



VNiVERSiDAD  
D SALAMANCA

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Matemática Aplicada

TESIS DOCTORAL

*ANÁLISIS DE MODELOS QUÍMICOS MEDIANTE  
TÉCNICAS DE SISTEMAS DINÁMICOS*

María Teresa de Bustos Muñoz

SALAMANCA, 2012

*A mi madre y a mi hermana*



## **Agradecimientos**

Quisiera aprovechar estas líneas para dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que me han ayudado a llevar a cabo este trabajo: A los profesores Juan Luis García Guirao y Jesús Vigo Aguiar, directores de la Tesis Doctoral, a mi marido y a mi familia.

*“Los científicos no estudian la naturaleza porque les sea útil; la estudian porque les es placentero, y les es placentero porque es bella. Si la naturaleza no fuera bella no merecería la pena conocerla y la vida no merecería ser vivida. No estoy hablando, por supuesto, de la belleza que nos golpea los sentidos, de la belleza de las cualidades y apariencias. Lejos estoy de despreciarlas, pero esto no tiene nada que ver con la ciencia. De lo que hablo es de una belleza más íntima que proviene del orden armónico de sus partes, y que una inteligencia pura puede atrapar”.*

Henri Poincaré. Science and Method. Part I. Ch. 1 : The Selection of Facts, p. 22. (1908)



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Teorema del Muestreo de Shannon</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.2. Teorema del Muestreo Potencial Asintótico . . . . .	6
1.3. Resultados auxiliares . . . . .	8
1.4. Convergencia puntual y analiticidad . . . . .	11
1.5. Teorema 1.2.2. Prueba I . . . . .	16
<b>2. Dinámica de productos químicos semirradiactivos</b>	<b>27</b>
2.1. Introducción y exposición del resultado principal . . . . .	27
2.2. Teorema 1.2.2. Prueba II . . . . .	29
<b>3. El modelo Hartmann para la molécula de benceno</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Osciladores isótropos y los potenciales anillados . . . . .	34
3.2.1. El oscilador y los potenciales de Hartmann generalizados . . . . .	34
3.3. Estudio cualitativo del flujo hamiltoniano . . . . .	38
3.3.1. Estudio del hamiltoniano $\mathcal{H}_a$ . . . . .	38
3.3.2. Estudio del hamiltoniano $\mathcal{H}$ . . . . .	43
3.4. Órbitas periódicas de potenciales anillados . . . . .	44
3.4.1. Variables de acción ángulo para el subsistema $\mathcal{H}_a$ . . . . .	44

3.4.2.	Clasificación de las órbitas periódicas de $\mathcal{H}_a$ . . . . .	48
3.4.3.	Caracterización de las órbitas de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b$ . . . . .	51
3.5.	El oscilador biparamétrico y su integración . . . . .	52
3.6.	Transformación de órbitas al sistema 3-D de Hartmann . . . . .	55
3.7.	Estabilidad de las órbitas periódicas . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>Teoría del averaging para órbitas periódicas</b>	<b>61</b>
4.1.	Introducción . . . . .	61
4.2.	El grado de Brouwer . . . . .	65
4.3.	Averaging vía el grado de Brouwer . . . . .	68
4.4.	Método averaging vía el grado de coincidencia . . . . .	73
4.5.	Averaging para sistemas autónomos planos . . . . .	75
<b>5.</b>	<b>El problema de Stark–Zeeman</b>	<b>81</b>
5.1.	Introducción . . . . .	81
5.1.1.	Regularización de Levi-Civita . . . . .	82
5.1.2.	Ecuaciones del movimiento en coordenadas polares . . . . .	84
5.2.	Prueba del Teorema 5.1.1 . . . . .	85
5.3.	El problema de Stark–Zeeman plano . . . . .	86
	<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

# Introducción

Durante el último cuarto del siglo XIX, mientras Peano y Picard cerraban el capítulo del enfoque clásico de encontrar soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.), Liapunov y especialmente Poincaré abrían uno nuevo: “*El estudio cualitativo de las soluciones*”. Se trata de una aproximación al problema radicalmente nueva en la que se presupone la existencia de soluciones y en su lugar se desean explotar las propiedades topológicas del espacio en que trabajamos y las analíticas de la función que define la ecuación para, determinar el comportamiento asintótico de las soluciones en valores grandes del tiempo.

Mientras la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales iba desarrollándose, los matemáticos comprendieron gradualmente que lo esencial de esta teoría encajaba en un marco mucho más general, el de los Sistemas Dinámicos (S.D.).

Aunque llevó algunos años dar con una formulación abstracta de este concepto (cabe citar al respecto el trabajo de Birkhoff [Bi 27] en la década de los 20 y Nemytskii y Stepanov [NS 49] en los 40 y 50), bien podría decirse que el origen de la idea de Sistema Dinámico es casi tan antiguo como el de la propia Ciencia. Sin mucha precisión, podríamos definir un S.D. como aquél que evoluciona con el tiempo y cuya característica principal es la de ser determinista, esto es, su estado futuro se puede predecir si se conocen su estado actual y las leyes que gobiernan su evolución.

Científicos como Kepler (con su búsqueda de leyes internas que gobernarán las observaciones), Galileo (que nos enseñó a considerar el tiempo, el movimiento y la velocidad no como misteriosas cualidades o esencias, sino como meras variables susceptibles de ser medidas externamente y computadas matemáticamente), Descartes (con su percepción de la infinitud del espacio y su concepción del mundo como un mecanismo), Newton (que despojó a la Ciencia de los argumentos metafísicos y sentó las bases del moderno pensamiento científico) o el propio Malthus (cuya pesimista y errónea, pero matemáticamente fundada, visión de la evolución de la población

humana nos advirtió de que no sólo los datos exactos cuentan sino también las tendencias) merecen con justicia figurar entre los pioneros de los S.D.

Atendiendo al conjunto de tiempos considerados, podemos distinguir dos tipos de S.D., a saber, los continuos (en los que el mencionado conjunto es un semigrupo de  $\mathbb{R}$ , como es el caso de los sistemas de E.D.O. y hamiltonianos) y los discretos (en los que el mencionado conjunto es un semigrupo de  $\mathbb{Z}$ ). Centremos ahora nuestra atención en los Sistemas Dinámicos Discretos (S.D.D.).

Al igual que para los Sistemas Dinámicos Continuos (S.D.C.), el padre de los S.D.D. es H. Poincaré, quien se vio abocado a ellos en la búsqueda de métodos que simplificasen el estudio cualitativo de los, en principio más difíciles, S.D.C. generados por sistemas de E.D.O. no lineales. Su idea de reducir el estudio de un S.D.C. al de un discreto nace en 1899, idea ésta de gran interés ya que permitía estudiar algo muy complicado a través de las propiedades topológicas de las órbitas de un S.D.D.. Desaparecido Poincaré, floreció la topología, pero no siguieron un camino paralelo los S.D. .

Hacia el primer cuarto del siglo XX, los S.D.C. se comenzaron a estudiar desde el punto de vista físico por Duffing [Du 18], Birkhoff [Bi 27] y Van der Pool [V 27]. Pero para estudiarlos había que resolver con lápiz y papel, lo que casi nunca era posible: los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales. Curiosamente, los S.D.D. más sencillos (los definidos a través de endomorfismos continuos en intervalos compactos de la recta real) permanecieron esencialmente inexplorados.

En los años veinte y treinta la teoría experimentó avances sustanciales, especialmente en sistemas asociados a la circunferencia y al plano, gracias a los trabajos de Julia, Fatou, Birkhoff y Denjoy.

Es ya en la década de los cincuenta y gracias a los trabajos de Moser [Mos 62], Myrberg [My 63], [My 65] y Smale [Sm 65], [Sm 67], cuando resurge de nuevo el estudio de los S.D.D., que alcanzan su punto álgido en la década de los 70 con la aparición de los trabajos de Metropolis, M.L. Stein y P.R. Stein [MSS 73], de Li y Yorke (que en 1975 publicaron su bien conocido artículo "*Period three implies chaos*" [LY 75]) o de R. May (quien en 1976, estudiando las ecuaciones en diferencias finitas de primer orden que aparecen en ciertos modelos utilizados en las C.C. Biológicas, Económicas y Sociales demostró que, aunque simples y deterministas, pueden exhibir un complicado comportamiento [M 76]). Será en esta faceta de modelización que

poseen este tipo de sistemas donde centraremos nuestros esfuerzos a lo largo del presente trabajo, en particular, estudiaremos sistemas dinámicos que modelan ciertos procesos procedentes de la química.

Continuando con la historia, el redescubrimiento por estas mismas fechas por parte de Stefan [St 77] del teorema de Sharkovskii, considerado por muchos uno de los resultados más relevantes de la segunda mitad del siglo XX, sobre la estructura periódica de las funciones continuas del intervalo y de la recta real, supuso el espaldarazo definitivo a la teoría.

Así pues, las condiciones científicas para el florecimiento de este estudio estaban ya establecidas. Los S.D.D. pasaban así a ejercer un papel relevante y terminaron consolidándose como una disciplina con interés en sí misma.

De forma general, un S.D.D. es una terna  $(\mathbb{X}, \mathbb{Z}, \phi)$  donde  $\mathbb{X}$  (espacio de fases) es un espacio topológico no vacío y  $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  (flujo del sistema) es una aplicación continua verificando las propiedades:

- (a)  $\phi(0, x) = x$  para todo elemento  $x \in \mathbb{X}$ ,
- (b)  $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x) = \phi(t, \phi(s, x))$  para todo  $s, t \in \mathbb{Z}$  y  $x \in \mathbb{X}$ .

Nuestro trabajo se encuentra dividido en 5 capítulos. El primer capítulo se dedica al conocido Teorema de Shannon de recomposición de señales de banda limitada. Aparte de recoger parte de su historia, introducimos y presentamos la demostración de un teorema que generaliza en el límite al de Shannon y que funciona para señales de ancho banda no limitada. Este resultado tiene una prueba larga y técnica y fue demostrado originariamente por Antuña et al. [AGL 11b]. En el capítulo 2 mostramos que el teorema de Shannon modificado se está utilizando como aplicación en ciertos problemas procedentes del mundo de la química, en particular para tratar materia pseudorradioactiva. El objetivo de este capítulo es presentar una demostración alternativa al teorema de Shannon generalizado utilizando un enfoque completamente diferente a [AGL 11b] vía teoría de transformada, con lo que conseguimos reducir a una página la prueba. Este resultado ha generado el trabajo [BG 12]. El capítulo tercero está dedicado a la introducción de un sistema dinámico hamiltoniano integrable que modela el comportamiento de la molécula de benceno a través de la generalización del modelo de Hartman. En el capítulo 4 presentamos los rudimentos

necesarios de la teoría de averaging para el cálculo de órbitas periódicas que aplicaremos en el capítulo siguiente. En el último capítulo estudiamos la estructura periódica de un problema clásico asociado al hamiltoniano de Stark–Zemmann que modela el comportamiento del átomo de hidrógeno que comparte propiedades dinámicas con la molécula de benceno, bajo la acción de un campo de microondas circularmente polarizado y perturbado y un campo magnético. Se demuestra la no integrabilidad  $\mathcal{C}^1$  de este problema y los resultados se hayan en el trabajo [BGVV 12].

# Capítulo 1

---

## Teorema del Muestreo de Shannon

---

### 1.1. Introducción

F. Marvasti y A.K. Jain [MJ 86] realizan un estudio de las señales redundantes, es decir, aquellas cuya anchura de banda puede ser comprimida en el dominio de la frecuencia sin ninguna distorsión. En particular, esto es lo que ocurre con el operador  $(\cdot)^{\frac{1}{n}}$ . En dicho trabajo (p. 652) presentan el siguiente resultado:

**Teorema 1.1.1. (Marvasti–Jain)** *Sea  $f$  una señal compleja de variable compleja de banda limitada con anchura de banda  $\omega$ , entonces  $g = f^{\frac{1}{n}}$  es de banda limitada con anchura de banda  $\frac{\omega}{n}$  si y sólo si  $f$  tiene todos sus ceros de orden  $n$ .*

La idea clave que se deduce de este resultado, como sus autores indican, es que si  $f$  es de dicho tipo, entonces puede ser reconstruida a partir de la aplicación del Teorema de Shannon a su raíz  $g = f^{\frac{1}{n}}$

$$f(z) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}}(k\tau) \operatorname{senc} \left( \frac{z}{\tau} - k \right) \right)^n,$$

utilizando una frecuencia de recomposición  $\tau \leq \frac{n}{\omega}$  mejor que la que ofrece un teorema directo para  $f$ , puesto que se ha disminuido la anchura de banda.

En esta misma línea tenemos el resultado complementario de L. Agud y R.G. Catalán en el trabajo [AC 01], en el que se recoge (p. 47) el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.2. (Agud–Catalán)** Sean  $p$  impar,  $\omega > 0$  y  $\tau$  tales que  $0 < \tau < \frac{1}{\omega}$ . Sea  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^{\frac{2}{p}}(\mathbb{Z})$ . Existen exactamente  $p$  señales  $f_i$  con  $0 \leq i \leq p-1$  tales que  $f_i^p$  tienen banda limitada en  $\left[-p\frac{\omega}{2}, p\frac{\omega}{2}\right]$  e interpolan los puntos  $(k\tau, s_k)$ .

Además, en la demostración de este resultado se prueba que

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k^{\frac{1}{p}} \text{senc}(\omega x - k),$$

donde  $s_k^{\frac{1}{p}}$  es la raíz real  $p$ -ésima de  $s_k$ .

En la expresión de  $f_0$  aparece una serie de tipo cardinal con coeficientes modificados por el parámetro  $p$  como raíces de los valores de interpolación.

En el artículo se prueba que podemos aplicar el teorema del muestreo de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov a un tipo particular de señales de banda limitada usando muestras a mayor distancia que la dada por la frecuencia de Nyquist. Esto supone una ventaja técnica ya que utilizamos menos muestras por unidad de tiempo que la cota dada por la frecuencia de Nyquist asociada a la señal.

La importancia práctica de este resultado es que abre un camino para hacer una reconstrucción de tipo Shannon de señales que incluso no sean de banda limitada a través de un proceso asintótico de paso al límite.

La unión de las ideas de Marvasti–Jain y Agud–Catalán para funciones de banda limitada, junto con la aproximación asintótica de J.M. Whittaker para funciones no necesariamente de banda limitada y el tratamiento desde la perspectiva de las funciones analíticas y la teoría de residuos de Ogura, es lo que origina las ideas que llevan a A. Antuña en [A 04] ha proponer la conjetura que presentamos en la siguiente sección.

## 1.2. Teorema del Muestreo Potencial Asintótico

El objetivo de esta sección es exponer una propiedad asintótica  $\mathcal{P}$  relacionada con el teorema del muestreo de Shannon, sobre la base normalizada de senos cardinales, y manteniendo constante la frecuencia de muestreo de una señal no necesariamente de banda limitada. Se generalizan en el límite los resultados iniciados por Marvasti et al. [MJ 86] y Agud et al. [AC 01]. Además, conjeturamos que muchas señales

satisfacen esta propiedad asintótica de recomposición, en particular, demostraremos en la secciones venideras que las señales de tipo gaussiano de la forma  $e^{-\lambda t^2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , cumplen  $\mathcal{P}$  presentando una demostración alternativa, más corta y sencilla que la original dada por A. Antuña et al. en [AGL 11b] que viene recogida en el trabajo [BG 12].

Un resultado central de la teoría de la señal en la ingeniería es el Teorema de Shannon–Whittaker–Kotel’nikov enunciado para recomponer funciones de banda limitada en  $L^2(\mathbb{R})$  (es decir, para señales Paley–Wiener), y basado en las funciones

$$\text{senc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0, \\ \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

Otra piedra filosofal de la teoría de procesamiento de señales es el teorema de muestreo de Middleton para funciones de paso de banda (véase [Mi 60]). Este resultado fue una de las primeras modificaciones del teorema de muestreo clásico (véase [Wh 15]) el cual sólo funciona para señales de banda limitada. Partiendo de este punto, aparecieron diferentes extensiones y generalizaciones de este teorema tratando de obtener aproximaciones de señales de banda no limitada (véase, [BRS 87] o [Gu 94]). Buenas referencias sobre estas extensiones son [BS 92] o [Za 93].

Nosotros seguimos con el espíritu de los resultados anteriores tratando de obtener aproximaciones de señales de banda no limitada usando señales de banda limitada. Pero nuestro enfoque es completamente diferente a los anteriores, ya que mantenemos constante la frecuencia de muestreo generalizando en el límite los resultados de Marvasti et al. [MJ 86] y Agud et al. [AC 01]

En este contexto, reafirmamos la siguiente propiedad asintótica del teorema de muestreo de tipo Shannon, donde la convergencia se considera en el valor principal de Cauchy para las series y puntual para el límite.

**Propiedad 1.2.1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una señal y  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Decimos que  $f$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$  para  $\tau$  si*

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}} \left( \frac{k}{\tau} \right) \text{senc}(\tau t - k) \right)^n. \quad (1.1)$$

Nuestro objetivo es responder a la conjetura que en párrafos anteriores se establecía de manera positiva, demostrando que cualquier función de tipo Gauss  $e^{-\lambda t^2}$

se puede reconstruir como un límite de funciones de banda limitada obtenidas de muestreos uniformemente distribuidos en los puntos  $\{\frac{k}{\tau} : k \in \mathbb{Z}\}$  donde  $\tau > 0$  a través de la siguiente fórmula:

$$e^{-\lambda t^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda \frac{k^2}{n\tau^2}} \text{senc}(\tau t - k) \right)^n$$

siendo la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. El resultado principal de esta sección es:

**Teorema 1.2.2.** *Las funciones gaussianas satisfacen la propiedad  $\mathcal{P}$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}^+$ .*

Habida cuenta de la analiticidad de  $e^{-\lambda t^2}$ , para demostrar el Teorema 1.2.2, en una primera versión, es suficiente mostrar la igualdad entre los coeficientes de la representación en serie de potencias de  $e^{-\lambda t^2}$  y los coeficientes de la expresión

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda \frac{k^2}{n\tau^2}} \text{senc}(\tau t - k) \right)^n$$

una vez probada la analiticidad de la misma.

Notemos que las señales de tipo gaussiano, que matemáticamente son importantes en sí mismas, juegan un papel destacado en la teoría de la señal ya que ellas son las únicas señales en donde se alcanza el mínimo del producto de la anchura temporal y frecuencial. Este mínimo está dado por el Principio de Incertidumbre, (ver [LP 61]). Por tanto, tener resultados de recomposición para este tipo de señales es interesante desde el punto de vista de las aplicaciones.

Presentaremos dos demostraciones diferentes del Teorema 1.2.2. La primera de ellas, basada en la idea de analiticidad antes expuesta y obra de A. Antuña, J.L.G. Guirao y M.A. López [AGL 11b], y la segunda, centrada en técnicas de análisis matemático, teoría de series y transformada de Fourier, obra nuestra (ver [BG 12]).

### 1.3. Resultados auxiliares

En esta sección presentamos algunos resultados auxiliares que desempeñarán un papel clave en la primera demostración del Teorema 1.2.2.

**Lema 1.3.1.** Para todo  $r \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2r - 2j + 1)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2j}} = \frac{-1}{2(2r + 1)!}.$$

*Demostración.* Sea  $f_j(z) = \frac{1}{z^{2j} \operatorname{sen}(\pi z)}$  con  $z \in \mathbb{C}$  y  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Calculando la representación de las serie de Laurent de  $f_0(z)$  se obtiene directamente que

$$\operatorname{Res}(f_0, 0) = \frac{1}{\pi}. \quad (1.2)$$

Para las funciones  $f_j(z)$  con  $j > 0$ , sea  $C_k$  el cuadrado de vértices  $\left(k + \frac{1}{2}\right) (\pm 1 \pm i)$ . Por el teorema de los residuos, se tiene que

$$2\pi i \left( \operatorname{Res}(f_j, 0) + \sum_{\substack{r=-k \\ r \neq 0}}^k \operatorname{Res}(f_j, r) \right) = \int_{C_k} f_j(z) dz. \quad (1.3)$$

Con unos sencillos cálculos, se obtiene que

$$\sum_{\substack{r=-k \\ r \neq 0}}^k \operatorname{Res}(f_j, r) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{r=-k \\ r \neq 0}}^k \frac{(-1)^r}{r^{2j}} = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^k \frac{(-1)^r}{r^{2j}}. \quad (1.4)$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C_k} f_j(z) dz = 0$ , tomando límites cuando  $k$  tiende a infinito en la expresión (1.3), se obtiene

$$\operatorname{Res}(f_j, 0) = - \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \neq 0}} \operatorname{Res}(f_j, r).$$

Por tanto, por (1.2) e introduciendo (1.4) en la expresión previa podemos escribir

$$\operatorname{Res}(f_j, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{if } j = 0, \\ \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2j}} & \text{if } j > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Por otro lado, por la representación de serie de Laurent de la función  $\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi z)}$  alrededor del punto  $z = 0$  tenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2p-1} z^{2p-1} \quad (1.6)$$

y así

$$f_j(z) = \frac{1}{z^{2j} \operatorname{sen}(\pi z)} = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2p-1} z^{2(p-j)-1}.$$

De la expresión anterior se deduce, para todo  $j \geq 0$ , que

$$\beta_{2j-1} = \operatorname{Res}(f_j, 0). \quad (1.7)$$

Usando la representación en serie de potencias de la función  $\operatorname{sen}(\pi z)$ , (1.6) puede escribirse

$$\left( \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(2q+1)!} (\pi z)^{2q+1} \right) \left( \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2p-1} z^{2p-1} \right) = 1$$

e igualando coeficientes obtenemos

$$\sum_{j=0}^r \frac{(-1)^{r-j}}{(2r-2j+1)!} \pi^{2r-2j+1} \beta_{2j-1} = 0.$$

Ahora, sustituyendo  $\beta_{2j-1}$  por la expresión (1.7) y separando el término correspondiente a  $j = 0$ , tenemos

$$\frac{1}{(2r+1)!} \operatorname{Res}(f_0, 0) + \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2r-2j+1)!} \operatorname{Res}(f_j, 0) = 0.$$

Finalmente, usando (1.5) en la igualdad anterior, la prueba finaliza.  $\square$

El siguiente paso es demostrar, para todo  $\tau > 0$ , que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \operatorname{senc}(\tau t - k) \right)^n \quad (1.8)$$

existe y define una función analítica. Para demostrarlo, vamos a utilizar el siguiente resultado, que es una versión simplificada de dos conocidos teoremas sobre convergencia de funciones analíticas (véase pág. 241-242 [Di 72]).

**Teorema 1.3.2.** *Sea  $\mathcal{A}$  un abierto conexo en  $\mathbb{C}^p$  y  $\Phi$  un conjunto de funciones analíticas de  $\mathcal{A}$  a un espacio de Banach complejo  $E$ . Sea  $M$  un conjunto de unidades en  $\mathcal{A}$ . Si se dan las siguientes condiciones:*

- i) para cada conjunto compacto  $L$  en  $\mathcal{A}$  existe  $m_L > 0$  tal que  $\|f(z)\| \leq m_L$  para todo  $f \in \Phi$  y cada  $z \in L$ ,*
- ii)  $(f_n)_n \subseteq \Phi$  converge punto a punto en  $M$ ,*

*entonces  $(f_n)_n$  converge uniformemente sobre conjuntos compactos de  $\mathcal{A}$  a una función analítica.*

## 1.4. Convergencia puntual y analiticidad

De ahora en adelante usaremos la siguiente notación:

$$g(z, n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \operatorname{senc}(\tau z - k). \quad (1.9)$$

En esta sección vamos a demostrar que existe el límite puntual de  $(g(z, n))^n$  y que éste define una función analítica. Para hacerlo, vamos a demostrar en las dos próximas proposiciones que se verifican las hipótesis del Teorema 1.3.2 en el caso en que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbb{C} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{\tau} \text{ conjunto abierto y conexo en } \mathbb{C}, \\ M &= \mathcal{A} \cap \mathbb{R} \text{ conjunto de unidades en las funciones analíticas,} \\ \Phi &= \{(g(z, n))^n, n \in \mathbb{N}\}, \\ E &= \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Para demostrarlo, vamos a usar la siguiente notación. Sean

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{1 - e^{-k^2 x}}{k^2 x} \\ L(x) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} l_k(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

**Proposición 1.4.1.** *Para todo  $L$  conjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{\tau}$ , existe un  $m_L > 0$  tal que  $|(g(z, n))^n| \leq m_L$  para todo  $z \in L$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Para  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos la siguiente función compleja

$$G(z, n) = n (g(z, n) - 1). \quad (1.11)$$

Usando la definición de  $g(z, n)$  dada por (1.9) y que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{senc}(z - k) = 1$  para todo

$z \in \mathbb{C}$  (véase [AGL 11a, Lema 3]), se tiene que

$$\begin{aligned}
G(z, n) &= n \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \operatorname{senc}(\tau z - k) - 1 \right) \\
&= n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} - 1 \right) \operatorname{senc}(\tau z - k) \\
&= n \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} - 1 \right) \frac{(-1)^k \operatorname{sen}(\pi \tau z)}{\pi} \left( \frac{1}{\tau z - k} + \frac{1}{\tau z + k} \right) \\
&= -n \frac{2\tau z \operatorname{sen}(\pi \tau z)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( 1 - e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \right) \frac{(-1)^k}{(\tau z)^2 - k^2}.
\end{aligned}$$

Separando la suma en términos pares e impares, obtenemos que

$$G(z, n) = B(z)a(z, n), \quad (1.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
B(z) &= -\frac{2\tau z \operatorname{sen}(\pi \tau z)}{\pi}, \\
a(z, n) &= n \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \frac{1 - e^{\frac{-(2k-1)^2}{n\tau^2}}}{(2k-1)^2 - (\tau z)^2} - \frac{1 - e^{\frac{-(2k)^2}{n\tau^2}}}{(2k)^2 - (\tau z)^2} \right).
\end{aligned} \quad (1.13)$$

Puesto que  $L$  es un conjunto compacto, existe una constante  $\beta_L > 0$  tal que

$$|B(z)| \leq \beta_L \quad (1.14)$$

para todo  $z \in L$ .

Para  $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{\tau}$ , sea

$$A_p(z, n) = \frac{n \left( 1 - e^{\frac{-p^2}{n\tau^2}} \right)}{p^2 - (\tau z)^2}.$$

De tal manera, usando la notación (1.10) podemos escribir

$$A_p(z, n) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau z}{p}\right)^2} \frac{1 - e^{\frac{-p^2}{n\tau^2}}}{\frac{p^2}{n}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau z}{p}\right)^2} \frac{1}{\tau^2} l_p \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \quad (1.15)$$

y por (1.13),  $a(z, n)$  puede expresarse en la forma

$$a(z, n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (A_{2k-1}(z, n) - A_{2k}(z, n)). \quad (1.16)$$

Después de algunos cálculos, tenemos que

$$\begin{aligned}
& A_{2k-1}(z, n) - A_{2k}(z, n) \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left[ l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \frac{1}{1 - \left( \frac{\tau z}{2k-1} \right)^2} - l_{2k} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \frac{1}{1 - \left( \frac{\tau z}{2k} \right)^2} \right] \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left[ l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\tau z}{2k-1} \right)^2} - \frac{1}{1 - \left( \frac{\tau z}{2k} \right)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1 - \left( \frac{\tau z}{2k} \right)^2} \left( l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) - l_{2k} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \right) \right] \tag{1.17} \\
&= \frac{1}{\tau^2} \left[ l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) (\tau z)^2 \frac{4k-1}{((2k-1)^2 - (\tau z)^2)((2k)^2 - (\tau z)^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - (\tau z)^2} \left( l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) - l_{2k} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Así, utilizando la desigualdad triangular en (1.16)

$$\begin{aligned}
|a(z, n)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} (A_{2k-1}(z, n) - A_{2k}(z, n)) \right| \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |A_{2k-1}(z, n) - A_{2k}(z, n)| \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) z^2 \frac{4k-1}{((2k-1)^2 - (\tau z)^2)((2k)^2 - (\tau z)^2)} \right| \\
&\quad + \frac{1}{\tau^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - (\tau z)^2} \left( l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) - l_{2k} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \right) \right|. \tag{1.18}
\end{aligned}$$

Ahora, por un lado, como la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{4k-1}{|(2k-1)^2 - (\tau z)^2| |(2k)^2 - (\tau z)^2|}$$

converge para todo  $z \in L$ , está acotada y como  $0 < l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \leq 1$ , tenemos una

cota superior  $\alpha_L$  para la primera parte de la suma (1.18), ya que

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) z^2 \frac{4k-1}{((2k-1)^2 - (\tau z)^2)((2k)^2 - (\tau z)^2)} \right| \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |z|^2 \frac{4k-1}{|(2k-1)^2 - (\tau z)^2| |(2k)^2 - (\tau z)^2|} < \alpha_L. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por otro lado, nos disponemos a obtener una cota superior para la segunda parte de (1.18). En efecto, como  $z \in L$  y  $L$  es compacto, existe  $\delta_L > 0$  tal que para todo  $z \in L$ ,  $|m^2 - (\tau z)^2| \geq \delta_L$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k)^2}{\min_{z \in L} |(2k)^2 - (\tau z)^2|} = 1,$$

por la definición de límite, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0(L)$  tal que para todo  $k \geq k_0$

$$1 - \varepsilon < \frac{(2k)^2}{\min_{z \in L} |(2k)^2 - (\tau z)^2|} < 1 + \varepsilon.$$

Para  $k < k_0$  se tiene

$$\frac{(2k)^2}{\min_{z \in L} |(2k)^2 - (\tau z)^2|} \leq \frac{(2k_0)^2}{\delta_L}.$$

Por lo tanto, tomando  $\lambda_L = \max \left\{ 1 + \varepsilon, \frac{(2k_0)^2}{\delta_L} \right\}$  obtenemos

$$\left| \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - (\tau z)^2} \right| \leq \frac{(2k)^2}{\min_{z \in L} |(2k)^2 - (\tau z)^2|} \leq \lambda_L$$

de manera uniforme en  $k$ .

De la expresión anterior, usando (1.10) y que  $L(x) \leq \frac{\pi}{2}$  para  $x \in \mathbb{R}^+$  (véase [AGL 11a, Proposición 7]), obtenemos la cota de la segunda parte de la suma (1.18), ya que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - (\tau z)^2} \right| \left| l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) - l_{2k} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \right| \\ & \leq \frac{\lambda_L}{\tau^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( l_{2k-1} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) - l_{2k} \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \right) \\ & \leq \frac{\lambda_L}{\tau^2} L \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \leq \frac{\lambda_L}{\tau^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Así, por (1.19) y (1.20), obtenemos de (1.18) que

$$|a(z, n)| \leq \alpha_L + \frac{\lambda_L}{\tau^2} \frac{\pi}{2} = \gamma_L.$$

De la expresión anterior y, por (1.14), tenemos para todo  $z \in L$

$$|G(z, n)| = |B(z)| |a(z, n)| \leq \beta_L \gamma_L < \infty. \quad (1.21)$$

Ahora, de la ecuación (1.11), la función  $g(z, n)$  tiene la forma

$$g(z, n) = 1 + \frac{G(z, n)}{n}. \quad (1.22)$$

Así, utilizando (1.21), se verifica que

$$|g(z, n)| \leq 1 + \frac{|G(z, n)|}{n} \leq 1 + \frac{\beta_L \gamma_L}{n},$$

y por lo tanto

$$|(g(z, n))^n| \leq \left(1 + \frac{\beta_L \gamma_L}{n}\right)^n \leq e^{\beta_L \gamma_L} = m_L,$$

finalizando la demostración.  $\square$

**Proposición 1.4.2.**  $\{(g(z, n))^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente en  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Como  $\text{senc}(k) = \delta_{k,0}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , luego  $\{(g(z, n))^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $\frac{\mathbb{Z}}{\tau}$ .

Sea  $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{\tau}$  y  $G(z, n)$  la función auxiliar definida por (1.11) en la proposición previa. Por (1.22)

$$(g(x, n))^n = \left(1 + \frac{G(x, n)}{n}\right)^n$$

y, por consiguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g(x, n))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x, n). \quad (1.23)$$

La igualdad anterior implica que si  $G(x, n)$  converge en  $n$  a un número real, la demostración ha concluido.

Mediante (1.12),  $G(x, n) = B(x) a(x, n)$ , y por lo tanto la convergencia de  $G(x, n)$  depende sólo de la convergencia de  $a(x, n)$  que, por (1.16), puede escribirse en la forma

$$a(x, n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (A_{2k-1}(x, n) - A_{2k}(x, n)).$$

Separando en dos partes y tomando límites, ya se satisfacen las condiciones de Weierstrass, y podemos escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(x, n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{2k-1}(x, n) - A_{2k}(x, n)).$$

Ahora, usando la expresión de  $A_p(x, n)$  dada por (1.15) y que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} l_k(x) = 1$ , es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_p(x, n) = \frac{1}{\tau^2} \frac{p^2}{p^2 - (\tau x)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} l_p \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) = \frac{1}{\tau^2} \frac{p^2}{p^2 - (\tau x)^2}$$

y así

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a(x, n) &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2 - (\tau x)^2} - \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - (\tau x)^2} \right) \\ &= x^2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{4k-1}{((2k-1)^2 - (\tau x)^2)((2k)^2 - (\tau x)^2)} \end{aligned}$$

que converge para todos  $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{\tau}$ .

Así, se ha demostrado la existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(x, n)$ , lo que implica la existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x, n)$ , y por (1.21) sabemos que este límite es finito. Por último, por (1.23) finaliza la demostración.  $\square$

**Teorema 1.4.3.** *Para todo  $\tau > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \text{sinc}(\tau t - k) \right)^n$  define una función analítica.*

*Demostración.* La demostración es una consecuencia directa de la aplicación del Teorema 1.3.2. El uso de este resultado es posible gracias a que en las Proposiciones 1.4.1 y 1.4.2 ponen de manifiesto la validez de las hipótesis del Teorema 1.3.2.  $\square$

## 1.5. Teorema 1.2.2. Prueba I

El objetivo de esta sección es presentar una primera prueba de nuestro resultado principal, el Teorema 1.2.2, mostrando que la función analítica (1.8) obtenida en la sección anterior es la función gaussiana, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se satisface la siguiente igualdad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \text{senc}(\tau t - k) \right)^n = e^{-t^2}$$

para todo  $\tau > 0$ .

La metodología que utilizaremos será calcular los coeficientes de la representación en serie de potencias de  $(g(x, n))^n$  y mostrar que sus límites son los coeficientes de la representación en serie de potencias de la función gaussiana.

Introducimos la siguiente notación que va a simplificar el cálculo de los coeficientes de las representaciones en serie en lo que sigue.

**Definición 1.5.1.** Para todo  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$B_m^\tau = \frac{(-1)^m (\pi\tau)^{2m}}{(2m+1)!}; \quad (1.24)$$

$$C_{m,n}^\tau = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m = 0, \\ \tau^{2m} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2m}} e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}} & \text{si } m \geq 1; \end{cases} \quad (1.25)$$

$$D_{m,n}^\tau = \sum_{p=0}^m B_p^\tau C_{m-p,n}^\tau; \quad (1.26)$$

$$d_{m,n}^\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0, \\ \frac{(-1)^m}{(n\tau^2)^m m!} - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,n}^\tau \frac{B_{m-j}^\tau}{\tau^{2(m-j)}} & \text{si } m \geq 1. \end{cases} \quad (1.27)$$

Los dos resultados siguientes sobre (1.25) y (1.26) serán las herramientas clave para tomar los límites en los coeficientes que vamos a obtener.

**Proposición 1.5.2.** Para todo  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $C_{m,n}^\tau = \frac{\tau^{2m} d_{m,n}^\tau}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

*Demostración.* Vamos a probar

$$d_{m,n}^\tau = \frac{2C_{m,n}^\tau}{\tau^{2m}} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Procedemos por inducción sobre  $m$ . La igualdad anterior es válida para  $m = 0$ , ya que

$$n(d_{0,n}^\tau - 2C_{0,n}^\tau) = n\left(1 - 2\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Para el caso  $m = 1$ , utilizando que  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$ , se tiene

$$\begin{aligned}
n \left( d_{1,n}^\tau - \frac{2C_{1,n}^\tau}{\tau^2} \right) &= n \left( -\frac{1}{n\tau^2} + \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \right) \\
&= -\frac{1}{\tau^2} + 2n \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \left( 1 - e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} \right) \\
&= -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} l_k \left( \frac{1}{n\tau^2} \right) \\
&= -\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^2} L \left( \frac{1}{n\tau^2} \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando límites cuando  $n$  tiende a infinito y utilizando que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \frac{1}{2}$  (véase [AGL 11a, Proposición 7]) obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( d_{1,n}^\tau - \frac{2C_{1,n}^\tau}{\tau^2} \right) = 0.$$

Sea  $m \geq 2$  y supongamos que para cada  $j \leq m$ ,  $d_{j,n}^\tau = \frac{2C_{j,n}^\tau}{\tau^{2j}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Seguidamente, usando (1.24) y la hipótesis de inducción, (1.27) puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned}
d_{m+1,n}^\tau &= \frac{(-1)^{m+1}}{n^{m+1} \tau^{2m+2} (m+1)!} - \sum_{j=0}^m \frac{B_{m+1-j}^\tau}{\tau^{2m+2-2j}} \left( \frac{2C_{j,n}^\tau}{\tau^{2j}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \frac{(-1)^{m+1}}{n^{m+1} \tau^{2m+2} (m+1)!} \\
&\quad + 2(-1)^m \pi^{2m+2} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j C_{j,n}^\tau}{(2m-2j+3)! (\pi\tau)^{2j}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 2(-1)^m \pi^{2m+2} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j C_{j,n}^\tau}{(2m-2j+3)! (\pi\tau)^{2j}} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d_{m+1,n}^\tau}{2} - \frac{C_{m+1,n}^\tau}{\tau^{2m+2}} &= (-1)^m \pi^{2m+2} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j C_{j,n}^\tau}{(2m-2j+3)! (\pi\tau)^{2j}} - \frac{C_{m+1,n}^\tau}{\tau^{2m+2}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (-1)^m \pi^{2m+2} \left( \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(-1)^j C_{j,n}^\tau}{(2m-2j+3)! (\pi\tau)^{2j}} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo  $C_{j,n}^\tau$  por la expresión (1.25) y usando la Proposición 1.3.1 con  $r = m+1$ , la expresión anterior toma la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{d_{m+1,n}^\tau}{2} - \frac{C_{m+1,n}^\tau}{\tau^{2m+2}} \\
&= (-1)^m \pi^{2m+2} \left[ \frac{1}{2(2m+3)!} + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m-2j+3)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2j}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m-2j+3)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} \frac{\left(1 - e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}}\right)}{k^{2j}} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (-1)^{m+1} \pi^{2m+2} \sum_{j=1}^{m+1} \left( \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m-2j+3)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} \frac{\left(1 - e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}}\right)}{k^{2j}} \right) \\
&\quad + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, separando el término  $j = 1$  de los demás

$$n \left( \frac{d_{m+1,n}^\tau}{2} - \frac{C_{m+1,n}^\tau}{\tau^{2m+2}} \right) = U_{m+1,n} + V_{m+1,n} + n o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.28)$$

donde

$$\begin{aligned}
U_{m+1,n} &= \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} \frac{\left(1 - e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}}\right)}{\frac{k^2}{n}}, \\
V_{m+1,n} &= (-1)^{m+1} \pi^{2m+2} \sum_{j=2}^{m+1} \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m-2j+3)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^{k+1} \frac{\left(1 - e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}}\right)}{\frac{k^{2j}}{n}}.
\end{aligned}$$

Veamos que el límite cuando  $n$  tiende a infinito (1.28) es igual a cero.

En efecto, por (1.10) y [AGL 11a, Proposición 7], se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{m+1,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{(2m+1)!} \frac{1}{\tau^2} L\left(\frac{1}{n\tau^2}\right) = \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{2\tau^2 (2m+1)!}. \quad (1.29)$$

Por otra parte, por el criterio de Weierstrass sabemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} V_{m+1,n} &= \\
&= (-1)^{m+1} \pi^{2m+2} \sum_{j=2}^{m+1} \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m - 2j + 3)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(1 - e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}}\right)}{\frac{k^{2j}}{n}} \\
&= (-1)^{m+1} \pi^{2m+2} \sum_{j=2}^{m+1} \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m - 2j + 3)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{\tau^2 k^{2j-2}} \\
&= \frac{(-1)^m \pi^{2m}}{\tau^2} \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j}{\pi^{2j} (2m - 2j + 1)!} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2j}}
\end{aligned}$$

y aplicando la Proposición 1.3.1 para  $r = m$  se satisface que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{m+1,n} = \frac{(-1)^{m+1} \pi^{2m}}{2\tau^2 (2m + 1)!}. \quad (1.30)$$

Así, tomando límites cuando  $n$  tiende a infinito en (1.28) y usando (1.29) y (1.30) probamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{d_{m+1,n}^\tau}{2} - \frac{C_{m+1,n}^\tau}{\tau^{2m+2}} \right) = 0.$$

Finalmente, por el Principio de Inducción, llegamos a la conclusión de que el resultado funciona para todos los  $m$ .  $\square$

**Proposición 1.5.3.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene*

$$D_{m,n}^\tau = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m = 0, \\ \frac{(-1)^m}{2n^m m!} + o\left(\frac{1}{n}\right) & \text{si } m \geq 1. \end{cases} \quad (1.31)$$

*Demostración.* El valor  $\frac{1}{2}$  para  $m = 0$  se obtiene directamente de las definiciones dadas por (1.24), (1.25) y (1.26), ya que

$$D_{0,n}^\tau = B_0^\tau C_{0,n}^\tau = \frac{1}{2}.$$

Sea  $m = 1$ . De la misma manera que en el caso anterior, es

$$D_{1,n}^\tau = C_{1,n}^\tau + \frac{B_1^\tau}{2} = C_{1,n}^\tau - \frac{(\pi\tau)^2}{12}$$

y por la Proposición 1.5.2 y (1.27) concluimos que

$$\begin{aligned} D_{1,n}^\tau &= \frac{\tau^2 d_{1,n}^\tau}{2} - \frac{(\pi\tau)^2}{12} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\tau^2}{2} \left( -\frac{1}{n\tau^2} + \frac{\pi^2}{6} \right) - \frac{(\pi\tau)^2}{12} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, sea  $m \geq 2$ . Utilizando el mismo método que en los casos anteriores

$$\begin{aligned} D_{m,n}^\tau &= C_{m,n}^\tau + \sum_{p=1}^{m-1} B_p^\tau C_{m-p,n}^\tau + \frac{B_m^\tau}{2} \\ &= \frac{\tau^{2m} d_{m,n}^\tau}{2} + \sum_{p=1}^{m-1} B_p^\tau \left( \frac{\tau^{2m-2p} d_{m-p,n}^\tau}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{B_m^\tau}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\tau^{2m}}{2} \left( \frac{(-1)^m}{n^m \tau^{2m} m!} - \sum_{j=0}^{m-1} d_{j,n}^\tau \frac{B_{m-j}^\tau}{\tau^{2m-2j}} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{m-1} B_p^\tau \frac{\tau^{2m-2p} d_{m-p,n}^\tau}{2} + \sum_{p=1}^{m-1} B_p^\tau o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{B_m^\tau}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ahora, separamos el término de la suma correspondiente a  $j = 0$  y hacemos un cambio en el índice de suma  $p$ , así,

$$\begin{aligned} D_{m,n}^\tau &= \frac{(-1)^m}{2n^m m!} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,n}^\tau \tau^{2j} B_{m-j}^\tau \\ &\quad + \sum_{p=1}^{m-1} B_p^\tau \frac{\tau^{2m-2p} d_{m-p,n}^\tau}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{(-1)^m}{2n^m m!} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

concluyendo la demostración.  $\square$

**Nota 1.5.4.** Destacamos que la nueva expresión  $D_{m,n}^\tau$  proporcionada por la Proposición 1.5.3 no depende de  $\tau$ .

El siguiente resultado será de utilidad en la Prueba I del Teorema 1.2.2.

**Lema 1.5.5.** Sea  $m, i \in \mathbb{N}$  tal que  $i \leq m$ , y sea  $\Delta_{m,i}$  el conjunto dado por

$$\Delta_{m,i} = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m); \alpha_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \sum_{r=1}^m \alpha_r = i, \sum_{r=1}^m r\alpha_r = m \right\}.$$

Entonces

(i)  $\Delta_{m,1} = \{(0, 0, \dots, 1)\}$  y  $\Delta_{m,m} = \{(m, 0, \dots, 0)\}$ .

(ii) Sea  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $2 \leq i \leq m$ , sea  $\alpha = (\alpha_r)_{r=1}^m \in \Delta_{m,i}$ . Si  $\alpha_r \neq 0$  se tiene que

$$\min \{r\alpha_r - 1, \alpha_r\} = \begin{cases} r\alpha_r - 1 & \text{if } r = 1, \\ \alpha_r & \text{if } r \geq 2. \end{cases}$$

*Demostración.* La parte (i) se sigue de la solución de los sistemas que definen los conjuntos  $\Delta_{m,1}$  y  $\Delta_{m,m}$ .

Para la parte (ii), sea  $\alpha = (\alpha_r)_{r=1}^m \in \Delta_{m,i}$  con  $\alpha_r \neq 0$ . Si  $r = 1$  el resultado es trivial. Supongamos  $r \geq 2$ . Como  $1 \leq (r-1)\alpha_r$ , se tiene  $\alpha_r \leq r\alpha_r - 1$ .  $\square$

En este punto estamos listos para demostrar nuestro resultado principal.

*Demostración (Teorema 1.2.2. Prueba I.)* La afirmación que tenemos que demostrar es: para cada  $p > 0$  y  $\tilde{\tau} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-p \frac{k^2}{n\tilde{\tau}^2}} \text{senc}(s\tilde{\tau} - k) \right)^n = e^{-ps^2} \quad (1.32)$$

para cada  $s \in \mathbb{R}$ . Además, esta convergencia es uniforme sobre conjuntos compactos.

De hecho, sea  $\tau = \frac{\tilde{\tau}}{\sqrt{p}}$  y  $t = s\sqrt{p}$ , entonces (1.32) puede ser escrito de la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{n\tau^2}} \text{senc}(\tau t - k) \right)^n = e^{-t^2}.$$

Así, usando la notación introducida por (1.9), vamos a demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g(t, n))^n = e^{-t^2} \quad (1.33)$$

convergiendo uniformemente sobre compactos.

Por el Teorema 1.4.3, sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(t, n))^n$  es una función analítica. Por lo tanto, para probar (1.33) es suficiente demostrar que la representación en serie de potencias de ambos miembros de (1.33) coinciden. Es más, observamos que es suficiente demostrar que la convergencia se tiene para todo  $t \in \left(0, \frac{1}{\tau}\right)$ .

Usando (1.24), (1.25), (1.26) y la representación en serie de potencias de  $\text{sen}(\pi\tau t)$ , la función  $g(t, n)$  puede ser escrita de la forma (véase [AGL 11a, Prueba Teorema 2])

$$g(t, n) = \text{senc}(\tau t) + \frac{2\tau t \text{ sen } \pi\tau t}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\tau^2 t^2 - k^2} e^{\frac{-k^2}{n\tau^2}} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,n}^{\tau} t^{2m}.$$

Por lo tanto

$$(g(t, n))^n = 2^n \left( \sum_{m=0}^{\infty} D_{m,n}^{\tau} t^{2m} \right)^n = 2^n \sum_{m=0}^{\infty} E_{m,n}^{\tau} t^{2m} \quad (1.34)$$

en donde, teniendo en cuenta los conjuntos  $\Delta_{m,i}$  descritos por la Proposición 1.5.5, se tiene que

$$E_{m,n}^{\tau} = \begin{cases} (D_{0,n}^{\tau})^n & \text{if } m = 0, \\ \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} (D_{0,n}^{\tau})^{n-i} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \prod_{j=1}^m (D_{j,n}^{\tau})^{\alpha_j} & \text{if } m \geq 1. \end{cases} \quad (1.35)$$

Por lo tanto, nuestro objetivo se reduce a demostrar para cada  $m \geq 0$  la validez de la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n E_{m,n}^{\tau} = \frac{(-1)^m}{m!}. \quad (1.36)$$

Para  $m = 0$ , el resultado se deduce directamente por (1.35) y por las definiciones (1.24), (1.25) y (1.26), ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n E_{0,n}^{\tau} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (D_{0,n}^{\tau})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (B_0^{\tau} C_{0,n}^{\tau})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{1}{2^n} = 1. \quad (1.37)$$

Para  $m = 1$  y  $m = 2$  según la Proposición 1.5.5 parte (i), tenemos

$$\begin{aligned} E_{1,n}^{\tau} &= n(D_{0,n}^{\tau})^{n-1} D_{1,n}^{\tau}, \\ E_{2,n}^{\tau} &= n(D_{0,n}^{\tau})^{n-1} D_{2,n}^{\tau} + \frac{n(n-1)}{2} (D_{0,n}^{\tau})^{n-2} (D_{1,n}^{\tau})^2. \end{aligned}$$

Ahora, con las dos expresiones anteriores y la igualdad (1.31) obtenemos

$$\begin{aligned} E_{1,n}^{\tau} &= \frac{n}{2^{n-1}} \left( \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right), \\ E_{2,n}^{\tau} &= \frac{n}{2^{n-1}} \left( \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} \left( \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n E_{1,n}^\tau &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -1 + 2n o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n E_{2,n}^\tau &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2n} + 2n o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{2n} + 2n(n-1) o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Notemos que los resultados (1.37) y (1.38) coinciden con [AGL 11a, Teorema 2].

Sea  $m \geq 3$ . En primer lugar, sustituimos  $D_{j,n}^\tau$  en (1.35) por la expresión (1.31) dada por la Proposición 1.5.3, obteniendo

$$E_{m,n}^\tau = \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{1}{2^{n-i}} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \prod_{j=1}^m \left[ \frac{(-1)^j}{2n^j j!} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\alpha_j}.$$

Como

$$\left[ \frac{(-1)^j}{2n^j j!} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{\alpha_j} = \frac{(-1)^{j\alpha_j}}{n^{j\alpha_j} (j!)^{\alpha_j} 2^{\alpha_j}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right),$$

utilizando esta igualdad en la expresión anterior podemos escribir  $E_{m,n}^\tau$  en la forma

$$\begin{aligned} E_{m,n}^\tau &= \frac{(-1)^m}{2^n} \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \\ &\quad \prod_{j=1}^m \left[ \frac{1}{n^{j\alpha_j} (j!)^{\alpha_j}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Dividiendo la suma en tres partes y aplicando la Proposición 1.5.5 parte (i) a los términos  $i = 1$  y  $i = m$ , tenemos

$$2^n E_{m,n}^\tau = (-1)^m \left( F_{m,n} + \sum_{i=2}^{m-1} G_{i,m,n} + H_{m,n} \right), \quad (1.39)$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{m,n} &= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,1}} \frac{n}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \prod_{j=1}^m \left( \frac{1}{n^{j\alpha_j} (j!)^{\alpha_j}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) \right) \\
&= n \left( \frac{1}{n^m m!} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right), \\
G_{i,m,n} &= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \prod_{j=1}^m \left( \frac{1}{n^{j\alpha_j} (j!)^{\alpha_j}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) \right), \\
H_{m,n} &= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,m}} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \prod_{j=1}^m \left( \frac{1}{n^{j\alpha_j} (j!)^{\alpha_j}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) \right) \\
&= \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \left( \frac{1}{n^m} + o\left(\frac{1}{n^m}\right) \right).
\end{aligned}$$

Claramente, de las expresiones anteriores se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{m,n} = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{m,n} = \frac{1}{m!}.$$

Para calcular el límite de  $G_{i,m,n}$  separamos el término  $j = 1$  de los demás. Notemos que para cada  $j \geq 2$  tal que  $\alpha_j = 0$ , el factor correspondiente es 1, y si  $\alpha_j \neq 0$ , por la Proposición 1.5.5 (ii), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{j\alpha_j} (j!)^{\alpha_j}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) &= o\left(\frac{1}{n^{j\alpha_j-1}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) \\
&= o\left(\frac{1}{n^{\min\{j\alpha_j-1, \alpha_j\}}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right).
\end{aligned}$$

Así,  $G_{i,m,n}$  puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned}
G_{i,m,n} &= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left[ \left( \frac{1}{n^{\alpha_1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) \right) \prod_{j=2}^m o\left(\frac{1}{n^{\alpha_j}}\right) \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left[ \left( \frac{1}{n^{\alpha_1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) \right) o\left(\frac{1}{n^{\sum_{j=2}^m \alpha_j}}\right) \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \left[ \left( \frac{1}{n^{\alpha_1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right) \right) o\left(\frac{1}{n^{i-\alpha_1}}\right) \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Delta_{m,i}} \frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} o\left(\frac{1}{n^i}\right),
\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{i,m,n} = 0.$$

Así, tomando los límites cuando  $n$  tienda a infinito en la expresión (1.39), si  $m \geq 3$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n E_{m,n}^\tau = \frac{(-1)^m}{m!}. \quad (1.40)$$

Por lo tanto, por (1.37), (1.38) y (1.40), hemos obtenido que para cada  $m \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n E_{m,n}^\tau = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Así, tomando límites en la expresión (1.34), se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g(t, n))^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^{2m}.$$

De manera que hemos demostrado la convergencia puntual a la función gaussiana. La convergencia uniforme sobre conjuntos compactos está garantizada por el Teorema 1.3.2, finalizando la prueba.  $\square$

La segunda prueba del Teorema 1.2.2, realizada con un enfoque completamente diferente, la presentamos en el próximo capítulo así como la aplicación de este resultado al mundo de la química.

## Capítulo 2

---

# Dinámica de productos químicos semi radiactivos a través de la teoría del muestreo

---

### 2.1. Introducción y exposición del resultado principal

Como es bien sabido, la dinámica de la descomposición de la mayoría de los productos químicos más utilizados, como el carbono 14 o el uranio 238, evoluciona de una manera exponencial. Supongamos que tenemos un material seudorradiactivo con una dinámica de descomposición desconocida, pero para el cual tenemos una muestra temporal de la cantidad del producto en descomposición. En este marco, para analizar si la dinámica tiene o no un ajuste exponencial, se utiliza una reciente generalización del teorema del muestreo de Shannon para señales de banda ilimitada [AGL 11b], Teorema 1.2.2 del capítulo anterior.

Como hemos expuesto en el capítulo anterior, un resultado central de la teoría de la señal en ingeniería es el bien conocido teorema de Shannon–Whittaker–Kotel’nikov (véase, por ejemplo, [Sh 49] o [Za 93]) para aplicaciones de banda limitada de  $L^2(\mathbb{R})$

(es decir, para señales de Paley–Wiener), que se basa en la aplicación seno cardinal normalizado  $\text{senc}(t)$  definido por:

$$\text{senc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0, \\ \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} & \text{if } t \neq 0. \end{cases}$$

Otra piedra filosofal de la teoría del procesamiento de señales es el teorema del muestreo de Middleton para funciones de paso banda (véase [Mi 60]). Este resultado fue una de las primeras modificaciones del teorema clásico del muestreo (véase [Wh 15]), que sólo funciona para aplicaciones de banda limitada. Después de este punto de partida, han aparecido en la literatura muchas y diferentes extensiones y generalizaciones de este teorema, intentando obtener aproximaciones para señales de banda ilimitada (véanse, por ejemplo, [BRS 87] o [Gu 94]). Unos buenos comienzos de estas extensiones son [BS 92] o [Za 93].

[AGL 11b] siguió el espíritu de los resultados anteriores en el sentido de intentar obtener aproximaciones de señales de banda ilimitadas usando señales de banda limitadas, aumentando el tamaño de banda. Pero esta aproximación es completamente diferente a las anteriores en el sentido de que mantiene constante la frecuencia de muestreo, generalizando en el límite los resultados de Marvasti y otros [MJ 86] y Agud y otros [AC 01].

En este marco, [AGL 11b] enuncia y demuestra para señales gaussianas el siguiente teorema del tipo asintótico del muestreo de Shannon, donde la convergencia está considerada en el valor principal de Cauchy para las series y convergencia puntual para el límite.

**Propiedad 2.1.1.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación y  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Diremos que  $f$  verifica la propiedad  $\mathcal{P}$  para  $\tau$  si*

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{\frac{1}{n}} \left( \frac{k}{\tau} \right) \text{senc}(\tau t - k) \right)^n. \quad (2.1)$$

Recordemos el enunciado del Teorema 1.2.2:

*Las aplicaciones gaussianas, es decir aplicaciones de la forma  $e^{-\lambda t^2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  verifican la propiedad  $\mathcal{P}$  para cada  $\tau \in \mathbb{R}^+$  fijado.*

Recordamos que la idea de la demostración mostrada en [AGL 11b], expuesta en el capítulo anterior, es la siguiente: dado que la aplicación gaussiana es analítica,

para probar la fórmula (2.1) basta con probar la igualdad entre los coeficientes de la serie de potencias que representa a la función gaussiana y los coeficientes del segundo miembro de (2.1). Esta demostración es muy larga, extremadamente técnica y utiliza herramientas de análisis complejo muy fuertes.

Nuestro objetivo en este capítulo es presentar una demostración alternativa para este resultado, muy corta y con un enfoque completamente diferente. Las ideas de nuestra demostración se basan en la utilización de algunos resultados muy simples de la teoría de las transformadas y en utilizar debidamente una cota dada por Boas [Bo 72].

## 2.2. Teorema 1.2.2. Prueba II

La intención de esta sección es demostrar el Teorema 1.2.2 desde un punto de vista completamente diferente a la demostración primigenia dada en [AGL 11b] y expuesta con todo detalle en el capítulo anterior.

*Demostración (Teorema 1.2.2. Prueba II.)*

Boas [Bo 72] indica la siguiente estimación

$$\left| f(t) - \sum_k f(k) \text{senc}(t-k) \right| \leq 2 \int_{|\xi| > 1/2} |\widehat{f}(\xi)| d\xi. \quad (2.2)$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\lambda = \tau = 1$ . Sea  $f(t) = e^{-\pi t^2}$ , para la cual  $f_n(t) = f^{1/n}(t) = e^{-\pi t^2/n}$  con  $\widehat{f}_n(\xi) = \sqrt{n} e^{-\pi \xi^2 n}$ . Por (2.2),

$$\begin{aligned} \left| f^{1/n}(t) - \sum_k f^{1/n}(k) \text{senc}(t-k) \right| &\leq 2\sqrt{n} \int_{|\xi| > 1/2} e^{-\pi \xi^2 n} d\xi = (x = \xi\sqrt{n}) \\ &= 2 \int_{|x| > \frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-\pi x^2} dx = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\pi n/4}\right) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la estimación trivial

$$\alpha \int_{x \geq \alpha} e^{-\pi x^2} dx \leq \int_{x \geq \alpha} x e^{-\pi x^2} dx = O(e^{-\pi \alpha^2})$$

Así, escribiendo  $a_n = \sum_k f^{1/n}(k) \operatorname{senc}(t - k)$ ,  $b_n = f^{1/n}(t)$ , hemos probado que

$$|b_n - a_n| \leq C \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\pi}{4}n}$$

Ahora, utilizando el Teorema del Valor Medio, es

$$|f(t) - a_n^n| = |b_n^n - a_n^n| \leq |b_n - a_n| n(1 + |b_n - a_n|)^{n-1}$$

Claramente

$$(1 + |b_n - a_n|)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\pi}{4}n}\right)^{n-1} = O(1)$$

pues

$$(n-1) \log\left(1 + \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\pi}{4}n}\right) \sim n \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\pi}{4}n} \rightarrow 0$$

cuando  $n$  tiende a infinito.

Por tanto

$$|f(t) - a_n^n| \leq Kn |b_n - a_n| \leq Kn \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\pi}{4}n} \rightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , probando así el resultado y, más aún, la convergencia uniforme para todo conjunto compacto de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

# Capítulo 3

---

## El modelo Hartmann para la molécula de benceno

---

### 3.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es exponer los resultados de [GV 11] sobre el estudio de un sistema dinámico 4-D integrable que modela el comportamiento de la molécula de benceno a través de una generalización del modelo de Hartmann, definido por la función hamiltoniana en forma paramétrica  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ , determinada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1,$$

siendo

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2 + \omega(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)) \quad (3.1)$$

el oscilador isótropo y

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{b}{q_3^2 + q_4^2} \right) \quad (3.2)$$

otro hamiltoniano, donde  $a, b$  y  $\omega$  son tres constantes estructurales del sistema positivas.

Este hamiltoniano está relacionado con dos familias de sistemas hamiltonianos 3-D integrables,  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|X\|^2 + V_i$  con simetría axial, es decir, sistemas cuyos potenciales están dados por

$$V_1 = \frac{\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{P}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{Qx_3}{(x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \quad (3.3)$$

denominado como potencial de Smorodinsky–Winternitz y

$$V_2 = \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{P}{2x_3^2} + \frac{Q}{(x_1^2 + x_2^2)} \quad (3.4)$$

(donde  $\mu, \Omega, P$  son parámetros,  $Q$  es el momento y  $x_i$  son las variables del problema).

Se puede demostrar que existe una relación entre dichos sistemas 3-D con un sistema dinámico integrable 4-D en términos de dos extensiones canónicas.

Si hacemos una transformación canónica de coordenadas cartesianas a polares simplécticas en la forma clásica (véase [AM 78]), entonces (3.1) y (3.2) se escriben en las nuevas variables como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \left( P_1^2 + P_2^2 + \frac{A_1^2}{\rho_1^2} + \frac{A_2^2}{\rho_2^2} + \omega(\rho_1^2 + \rho_2^2) \right), \\ \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\rho_1^2} + \frac{b}{\rho_2^2} \right). \end{aligned}$$

Hay que observar que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son cíclicas, por tanto  $A_1$  y  $A_2$  son integrales primeras.

El sistema se puede dividir en dos subsistemas de un grado de libertad, definidos por las funciones hamiltonianas

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} \left( P_1^2 + \frac{A_1^2}{\rho_1^2} + \omega\rho_1^2 + \frac{a}{\rho_1^2} \right), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}_b = \frac{1}{2} \left( P_2^2 + \frac{A_2^2}{\rho_2^2} + \omega\rho_2^2 + \frac{b}{\rho_2^2} \right), \quad (3.6)$$

con la misma estructura interna, tal que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b. \quad (3.7)$$

Dada la estructura del subsistema (3.5) y (3.6), basta con estudiar  $\mathcal{H}_a$  para deducir los correspondientes resultados para  $\mathcal{H}_b$ . Por último, por (3.7), obtenemos el estudio completo de  $\mathcal{H}$ .

Observemos que  $\mathcal{H}_a : \mathbf{E}_a \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbf{E}_a = \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2$  es el espacio de fases de donde está definido el hamiltoniano.

Kibler y Négadi [KN 84] consideraron el caso particular del sistema (3.2) donde  $a = b$ , en el transcurso de su estudio del potencial de Hartmann utilizando la transformación de Kustaanheimo–Stiefel. Por tanto, en este sentido, el hamiltoniano propuesto representa una generalización del suyo.

Observemos que los potenciales  $V_i$  pertenecen a una gran familia de sistemas integrables que son separables (véase Makarov et al. [MNSVW 67]). Estos potenciales han recibido una atención especial desde el trabajo pionero de Hartmann et al. debido a su relación con la molécula de benceno, así como con otros modelos de química cuántica y la física nuclear. Cuando tomamos  $Q = 0$  en el potencial  $V_1$ , tenemos el modelo de Hartmann [Ha 72].

Para hacer un estudio cualitativo de la dinámica asociada al sistema hamiltoniano de una manera similar a [LTV 01], vamos a considerar los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} E_{h_a} &= \mathcal{H}_a^{-1}(h_a) = \{z \in \mathbf{E}_a : \mathcal{H}_a(z) = h_a\}, \\ J_{k_1} &= \{z \in \mathbf{E}_a : A_1 = k_1\}, \\ I_{h_a k_1} &= E_{h_a} \cap J_{k_1}, \end{aligned}$$

donde  $z = (\rho_1, \theta_1, P_1, A_1) \in \mathbf{E}_a$  and  $(h_a, k_1) \in \mathbb{R}^2$ .

Estos conjuntos son invariantes por el flujo asociado al hamiltoniano, con  $\mathcal{H}_a$  y  $A_1$  dos integrales primeras del movimiento, independientes y en involución.

Los pasos para obtener las clasificaciones topológicas que completan los estudios presentados en [FT] y [BFJV] realizados en [GV 11] son:

- Las descripciones de las foliaciones de
  - (i) el espacio de fases  $\mathbf{E}_a$  por los conjuntos invariantes  $E_{h_a}$ ,
  - (ii)  $E_{h_a}$  por los conjuntos invariantes  $I_{h_a k_1}$ , y
  - (iii)  $I_{h_a k_1}$  por el flujo del sistema hamiltoniano.
- Calcular las variables acción ángulo para los sistemas  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$ .
- Obtener la región donde se puede definir la acción ángulo.
- Clasificar las órbitas periódicas de los sistemas  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$ .
- Obtener la clasificación de las órbitas de  $\mathcal{H}$ .

- Usar las transformaciones canónicas para reducir el sistema 4-D en (3.3), para ver cómo se transforman las órbitas de  $\mathcal{H}$ .

El objetivo es establecer la estabilidad de las órbitas periódicas y cuasiperiódicas anteriormente descritas y demostrar la integrabilidad de los sistemas, corrigiendo un error matemático que aparece en [FT], donde la integrabilidad del problema no se probó de forma correcta.

La organización es la siguiente. En las siguientes secciones, estudiamos la conexión entre el oscilador isotrópico 4-D y los potenciales anillados. La topología del hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}$ . Se clasificarán las órbitas periódicas de los potenciales anillados. Se estudia el oscilador biparamétrico y su integración. Se transforman algunas órbitas de  $\mathcal{H}$  al sistema 3-D de Hartmann. Finalmente, se estudia la estabilidad de las órbitas periódicas y cuasiperiódicas del sistema.

## 3.2. Relaciones entre los osciladores isótropos y los potenciales anillados

El propósito de esta sección es mostrar la relación existente entre los sistemas 3-D que se introdujeron anteriormente y un sistema dinámico integrable 4-D definido por la función hamiltoniana (3.1). En el siguiente par de subsecciones estableceremos, respectivamente, la relación entre el oscilador y los sistemas definidos por los potenciales (3.3) y (3.4). El punto clave para llevarlo a cabo será utilizar en cada caso adecuadas transformaciones en cuatro dimensiones y sus extensiones canónicas, que permiten relacionar los parámetros  $P$  y  $Q$  de los potenciales con las integrales y los parámetros del oscilador 4-D mediante un sistema lineal. Utilizaremos también algunos resultados de [FT].

### 3.2.1. El oscilador y los potenciales de Hartmann generalizados

Mostraremos, en primer lugar, la relación existente entre el sistema hamiltoniano definido por (3.1) y los potenciales de Hartmann generalizados definidos por los potenciales  $V_i$ . Para llevarlo a cabo haremos uso de la transformación  $(r, \phi, \lambda, \psi) \rightarrow$

$(q_1, q_2, q_3, q_4)$  dada por

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\lambda - \psi}{2}, & q_3 &= \sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \frac{\lambda + \psi}{2}, \\ q_2 &= \sqrt{r} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \operatorname{sen} \frac{\lambda - \psi}{2}, & q_4 &= \sqrt{r} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\lambda + \psi}{2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

con  $(r, \phi, \lambda, \psi) \in \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times [0, 2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  y cuyo jacobiano es  $-r \operatorname{sen} \phi/8$ . Más adelante vamos a necesitar la transformación inversa dada por

$$\begin{aligned} r &= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2, \\ \operatorname{sen} \phi &= \frac{2\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)}}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, & \cos \phi &= \frac{q_3^2 + q_4^2 - q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, \\ \operatorname{sen} \lambda &= \frac{q_1 q_3 + q_2 q_4}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)}}, & \cos \lambda &= \frac{q_1 q_4 - q_2 q_3}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)}}, \\ \operatorname{sen} \psi &= \frac{q_1 q_3 - q_2 q_4}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)}}, & \cos \psi &= \frac{q_1 q_4 + q_2 q_3}{\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)}}. \end{aligned}$$

La extensión canónica asociada a la transformación (3.8) se obtiene fácilmente como una transformación Mathieu, con

$$\sum Q_i dq_i = Rdr + \Phi d\phi + \Lambda d\lambda + \Psi d\psi.$$

$R, \Phi, \Lambda$  y  $\Psi$  reciben el nombre de momentos del problema. Obsérvese que las relaciones entre estos momentos vienen dadas por

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2 \sum q_i^2} (q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_3 Q_3 + q_4 Q_4), \\ \Phi &= \frac{(q_1 Q_1 + q_2 Q_2)(q_3^2 + q_4^2) - (q_3 Q_3 + q_4 Q_4)(q_1^2 + q_2^2)}{2\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)(q_3^2 + q_4^2)}}, \\ \Lambda &= \frac{1}{2} (-q_2 Q_1 + q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4), \\ \Psi &= \frac{1}{2} (q_2 Q_1 - q_1 Q_2 + q_4 Q_3 - q_3 Q_4). \end{aligned}$$

El hamiltoniano (3.1) en la nuevas variables se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 4r \left[ \frac{\omega}{8} + \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi^2 - 2\Lambda\Psi \cos \phi}{2r^2 \operatorname{sen}^2 \phi} + \frac{c + d \cos \phi}{2r^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad d = \frac{a-b}{2}.$$

Obsérvese que  $\lambda$  y  $\psi$  son variables cíclicas, con  $\Lambda$  y  $\Psi$  como integrales primeras. En otras palabras, el sistema diferencial es

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R}, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi}, \quad \frac{dR}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}$$

y dos cuadraturas

$$\lambda = \int (\partial \mathcal{H} / \partial \Lambda) d\tau, \quad \psi = \int (\partial \mathcal{H} / \partial \Psi) d\tau.$$

Utilizando la notación de Poincaré e introduciendo un cambio de la variable independiente  $\tau \rightarrow s$  dado por  $d\tau = 4r ds$ , el hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{4r} (\mathcal{H} - h_O) \\ &= \frac{\omega}{8} + \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \phi} \right) \\ &\quad + \frac{\Psi^2 - 2\Lambda\Psi \cos \phi}{2r^2 \sin^2 \phi} + \frac{c + d \cos \phi}{2r^2 \sin^2 \phi} - \frac{h_O}{4r}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $h_O$  es un valor fijo del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  para condiciones iniciales fijadas, y el flujo está ahora definido en la variedad  $\mathcal{K} = 0$ . Es preferible, sin embargo, utilizar una forma algo diferente: Consideremos el hamiltoniano

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}} &= \mathcal{K} - \frac{\omega}{8} = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \phi} \right) - \frac{h_O}{4r} + \frac{(\Psi^2 + c)/2}{r^2 \sin^2 \phi} \\ &\quad + \frac{(d/2 - \Lambda\Psi) \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

en la variedad  $\tilde{\mathcal{K}} = -\frac{\omega}{8}$ . Si denotamos por

$$\mathcal{H}_K = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \phi} \right) - \frac{h_O}{4r}$$

el sistema diferencial definido en (3.11) viene dado por

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{ds} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial R} = R, \\
\frac{d\phi}{ds} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial \Phi} = \frac{\Phi}{r^2}, \\
\frac{dR}{ds} &= -\frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial r} = -\frac{\partial \mathcal{H}_K}{\partial r} \\
&\quad + 2 \frac{(\Psi^2 + c)/2}{r^3 \sin^2 \phi} + 2 \frac{(d/2 - \Lambda \Psi) \cos \phi}{r^3 \sin^2 \phi} \\
\frac{d\Phi}{ds} &= -\frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial \phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}_K}{\partial \phi} + \frac{(\Psi^2 + c)/2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\sin^2 \phi} \right) \\
&\quad + \frac{(d/2 - \Lambda \Psi)}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

y dos cuadraturas

$$\lambda = \int \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial \Lambda} ds = \int \left( \frac{\Lambda}{r^2 \sin^2 \phi} - \frac{\Psi \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \right) ds, \tag{3.13}$$

$$\psi = \int \frac{\partial \tilde{\mathcal{K}}}{\partial \Psi} ds = \int \frac{\Psi - \Lambda \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} ds. \tag{3.14}$$

Si consideramos ahora el sistema diferencial definido por el hamiltoniano con potencial  $V_1$ , Eq. (3.3) en coordenadas esféricas  $(r, \phi, \lambda)$ ,

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin \phi \cos \lambda, \\
x_2 &= r \sin \phi \sin \lambda, \\
x_3 &= r \cos \phi
\end{aligned} \tag{3.15}$$

y sus momentos  $(R, \Phi, \Lambda)$ , comprobamos que dichas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (3.12) y (3.13) cuando nos restringimos a la variedad  $\Psi = 0$  y tomamos los siguientes valores para los coeficientes

$$h_O = 4\mu, \quad c = 2P, \quad d = 2Q,$$

e identificamos la variable  $s$  con el tiempo físico  $t$ .

Por tanto, hemos probado que la dinámica del oscilador definido por el hamiltoniano (3.1) se corresponde con la familia de potenciales de Hartmann generalizados. Si suponemos que  $\Psi = 0$ , se obtiene el caso particular del modelo de Hartmann cuando  $d = 0$ , *i.e.* cuando para el oscilador se toman los siguientes valores

$$h_O = 4\mu \quad \omega = -8\tilde{\mathcal{K}} \quad a = b = P.$$

### 3.3. Estudio cualitativo del flujo hamiltoniano

#### 3.3.1. Estudio del hamiltoniano $\mathcal{H}_a$

En esta parte vamos a estudiar el hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$ . Recordemos que el hamiltoniano  $\mathcal{H}_a : \mathbf{E}_a \rightarrow \mathbb{R}$  viene dado por

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} \left( P_1^2 + \frac{A_1^2}{\rho_1^2} + \omega \rho_1^2 + \frac{a}{\rho_1^2} \right), \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{E}_a = \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2$  es el espacio de fases en el que el hamiltoniano (3.16) está definido y  $(\rho_1, \theta, P_1, A_1) \in \mathbf{E}_a$ . Este tipo de coordenadas son las más apropiadas, ya que nos permiten comprobar que el hamiltoniano es integrable. Los parámetros  $a > 0$  y  $\omega > 0$  son dos constantes estructurales del sistema.

El sistema hamiltoniano es

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{d\mathcal{H}_a}{dP_1} = P_1, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\mathcal{H}_a}{dA_1} = \frac{A_1}{\rho_1^2}, \\ \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{d\mathcal{H}_a}{d\rho_1} = \frac{\omega \rho_1^4 - A_1^2 - a}{\rho_1^3}, & \frac{dA_1}{dt} &= -\frac{d\mathcal{H}_a}{d\theta} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Denotemos por  $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación definida por  $g(\rho_1, P_1, A_1) = \mathcal{H}(\rho_1, \theta, P_1, A_1)$ . Si  $h_a \in \mathbb{R}$  es un valor regular de la aplicación  $g$  y  $g^{-1}(h_a) \neq \emptyset$ , entonces  $g^{-1}(h_a)$  es una superficie de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$  llamada superficie de energía.

Para poder hacer un estudio cualitativo de la dinámica asociada al sistema hamiltoniano, de una forma similar a la que aparece en [LTV 01], consideremos los siguientes conjuntos:

$$E_{h_a} = \mathcal{H}^{-1}(h_a) = \{z \in \mathbf{E}_a : \mathcal{H}(z) = h_a\},$$

$$J_{k_1} = \{z \in \mathbf{E}_a : A_1 = k_1\}, \quad k_1 \in \mathbb{R},$$

$$I_{h_a k_1} = E_{h_a} \cap J_{k_1}, \quad (h_a, k_1) \in \mathbb{R}^2.$$

con  $z = (\rho_1, \theta, P_1, A_1) \in \mathbf{E}_a$  y  $(h_a, k_1) \in \mathbb{R}^2$ .

Obsérvese que  $E_{h_a} \approx g^{-1}(h_a) \times S^1$  y recibe el nombre de variedad de energía constante,  $J_{k_1}$  es la variedad del momento constante e  $I_{h_a k_1}$  es la variedad de energía-momento constante. Estos conjuntos son invariantes por el flujo asociado al hamiltoniano, con  $\mathcal{H}_a$  y  $A_1$  dos integrales primeras del movimiento, independientes y en involución.. Por tanto, el sistema hamiltoniano (3.17) es integrable.

Los principales resultados de esta sección son la descripción de la foliación del espacio de fases  $\mathbf{E}_a$  por los conjuntos invariantes  $E_{h_a}$ , de los conjuntos de energía  $E_{h_a}$  por los conjuntos invariantes  $I_{h_a k_1}$  y de  $I_{h_a k_1}$  por el flujo del sistema hamiltoniano. Esta foliación proporciona una buena descripción del espacio de fases cuando  $(h_a, k_1) \in \mathbb{R}^2$  y depende de los diferentes valores de  $a$  y  $\omega$ .

La herramienta principal para este estudio es el teorema de Liouville–Arnold:

**Teorema 3.3.1** (Liouville–Arnold). *El sistema hamiltoniano con dos grados de libertad definido sobre el espacio de fases  $\mathbf{E}$  tiene el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  y el momento angular  $p_\theta$  como dos integrales primeras independientes y en involución. Si  $I_{hk} \neq \emptyset$  y  $(h, k)$  es un valor regular de la aplicación  $(\mathcal{H}, p_\theta)$ , entonces se verifica:*

- (a)  $I_{hk}$  es una subvariedad bidimensional de  $\mathbf{E}$  invariante por el flujo del sistema hamiltoniano.
- (b) Si el flujo en una componente conexa  $I_{hk}^*$  de  $I_{hk}$  es completo, entonces  $I_{hk}^*$  es difeomorfo o bien al toro  $S^1 \times S^1$  o al cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Observemos que si  $I_{hk}^*$  es compacto (i.e.  $I_{hk}^* \approx S^1 \times S^1$ ), entonces el flujo sobre él siempre es completo.
- (c) Bajo la hipótesis (b), el flujo sobre  $I_{hk}^*$  es el conjugado de un flujo lineal sobre  $S^1 \times S^1$ , o bien sobre  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

Para más detalles sobre los sistemas hamiltonianos y las demostraciones del teorema anterior, véase Abraham y Marsden [AM 78] y Arnold [AKN 78]. En general, bajo las hipótesis del punto (b),  $I_{hk}^*$  puede ser también difeomorfo al plano  $\mathbb{R}^2$ .

El teorema de Liouville–Arnold muestra que, para sistemas hamiltonianos integrables, los conjuntos invariantes asociados a la intersección de todas las integrales primeras independientes en involución son genéricamente subvariedades del espacio de fases. Por otra parte, si el flujo sobre dichas subvariedades es completo, entonces estas subvariedades son difeomorfas a la unión de cilindros generalizados y el flujo en ellos se conjuga con un flujo lineal.

Definamos lo que son para nosotros un valor regular y crítico y un punto de equilibrio. El valor  $(h_a, k_1)$  es un valor crítico para la aplicación momento  $(\mathcal{H}_a, A_1)$ , cuando esta aplicación no es diferenciable en dicho valor o bien su diferencial es 0. Si  $(h_a, k_1)$  no es crítico, entonces se dice que es un valor regular. El punto de equilibrio

para la aplicación  $\mathcal{H}_a : \mathbf{E}_a \longrightarrow \mathbb{R}$  se obtiene cuando igualamos a cero el sistema (3.17).

Hemos aplicado este teorema a la aplicación momento  $(\mathcal{H}_a, A_1) : \mathbf{E}_a \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  en valores regulares. Cuando no es posible aplicar el teorema de Liouville–Arnold tenemos que hacer un estudio particular de los conjuntos  $I_{h_a k_1}$  para valores críticos  $(h_a, k_1) \in \mathbb{R}^2$  de la aplicación momento. Estos valores se corresponden con puntos de equilibrio de  $\mathcal{H}_a$  o con valores donde  $A_1 = k_1$  es un máximo o un mínimo de la superficie de energía.

### Puntos de equilibrio

Para calcular los puntos de equilibrio necesitamos igualar a cero el sistema hamiltoniano (3.17).

Este sistema sólo tiene una solución real para  $\rho_1 > 0$  y  $\forall a, \omega$ . Dicha solución es

$$\begin{aligned} P_1 &= 0, & A_1 &= 0, \\ \rho_1 &= \sqrt[4]{\frac{a}{\omega}}, & \theta_1 &= \theta_1. \end{aligned}$$

Si sustituimos estos valores en nuestro hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$  obtenemos  $h_{a_e} = \sqrt{a\omega}$ , es decir, el valor del punto de equilibrio.

### Función potencial. Regiones de Hill

El hamiltoniano (3.16), en coordenadas simplécticas polares se puede escribir como sigue:

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2} \left( P_1^2 + \frac{A_1^2}{\rho_1^2} \right) + \tilde{\mathcal{V}}(\rho_1),$$

donde

$$\tilde{\mathcal{V}}(\rho_1) = \omega \rho_1^2 + \frac{a}{\rho_1^2} \tag{3.18}$$

es el potencial. Por otra parte, las regiones de Hill están totalmente caracterizadas mediante esta función potencial.

Ahora bien, las regiones del espacio de fases donde existe movimiento real están determinadas por los puntos críticos de  $\tilde{\mathcal{V}}$  y estos vienen dados por las raíces reales positivas de la ecuación polinómica

$$\omega \rho_1 - \frac{a}{\rho_1^3} = 0, \tag{3.19}$$

que obtenemos derivando (3.18) con respecto a  $\rho_1$  e igualando a cero.

Utilizando el algoritmo de Sturm (o directamente, como se puede en este caso), discutimos, según los valores de los parámetros  $a$  y  $\omega$ , el número de raíces reales positivas respecto a  $\rho_1$  de la ecuación (3.19). Es fácil ver que  $\forall a, \omega$  sólo tenemos una raíz real positiva, pues

$$\rho_{1e} = \sqrt[4]{\frac{a}{\omega}}. \quad (3.20)$$

$\rho_{1e}$  recibe el nombre de punto crítico de  $\tilde{\mathcal{V}}$ .

Sea  $\pi : \mathbf{E}_a \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1$  la proyección natural. Para cada  $h_a \in \mathbb{R}$  se define la región de Hill  $R_{h_a}$  de  $E_{h_a}$  por  $R_{h_a} = \pi(E_{h_a})$ .

$$\begin{aligned} R_{h_a} &= \{(\rho_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : \tilde{\mathcal{V}} \leq h_a\} = \\ &= \{(\rho_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : \omega \rho_1^2 + \frac{a}{\rho_1^2} \leq h_a\}. \end{aligned}$$

Recordemos que  $E_{h_a}$  es difeomorfo a  $S^1 \times g^{-1}(h_a)$ .

En lo que sigue, el valor del potencial en el punto crítico  $\rho_{1e}$  se denotará por  $h_{ae} = \sqrt{a\omega} = \tilde{\mathcal{V}}(\rho_{1e})$ , y los valores  $\rho_1^j$ ,  $j = 1, 2$ , serán los puntos de intersección entre la gráfica del potencial y  $\tilde{\mathcal{V}} = h_a$ .

Para comprender mejor la topología de las regiones de Hill, vamos a considerar la siguiente imagen. La tabla nos proporciona la clasificación topológica de las regiones de Hill.

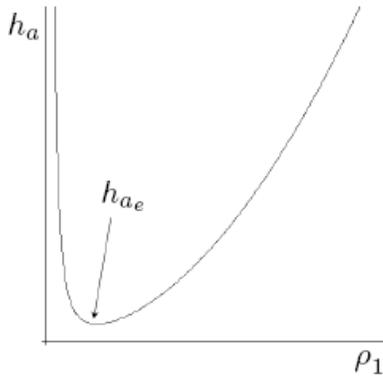


Figura 3.1: Gráfica del potencial, donde  $h_a$  es el punto crítico.

Cuadro 3.1: Clasificación topológica de las regiones de Hill para diferentes valores de  $h$  donde  $h_a$  es el punto crítico.

$\forall a, \omega$	$h < h_{a_e}$	$R_{h_a} \approx \emptyset$
	$h = h_{a_e}$	$R_{h_a} \approx \{h_{a_e}\} \times S^1$
	$h_{a_e} < h$	$R_{h_a} \approx [\rho_1^1, \rho_1^2] \times S^1$

### Extremos relativos de la superficie de energía

Utilizando el teorema de la función implícita, podemos ver que los extremos de la superficie de energía  $g^{-1}(h_a)$  vienen dados por las raíces de la ecuación polinómica

$$A_1^4 + \left(2a - \frac{h_a^2}{\omega}\right) A_1^2 + a^2 - \frac{ah_a^2}{\omega} = 0. \quad (3.21)$$

Resolviendo la ecuación bicuadrática (3.21) respecto a  $A_1$ , es fácil comprobar que (3.21) tiene o cero, una o dos raíces reales positivas que denotaremos por  $A_{1_i}, i = 1, 2, 3$ , y que se corresponden con los extremos de la superficie de energía  $m_{a_i}, i = 1, 2, 3$ . Los extremos de  $g^{-1}(h_a)$  vienen dados por  $m_{a_i} = \mathcal{H}_a(\rho_{1_i}, \_, P_{1_i}, A_{1_i}), i = 1, 2, 3$ , donde  $P_{1_i} = 0, \rho_{1_i} = \sqrt[4]{\frac{a + A_{1_i}^2}{\omega}}$ .

### Clasificación topológica de $E_{h_a}$ y $I_{h_a k_1}$

En esta parte vamos a estudiar la topología de las variedades invariantes  $\mathcal{H}_a^{-1}(h) = E_{h_a}$  y  $I_{h_a k_1}$ . Para dar la clasificación topológica de estos conjuntos invariantes, necesitamos alguna notación y algunos resultados.

Obsérvese que  $z_e = (\rho_{1_e}, \theta_{1_e}, P_{1_e}, A_{1_e}) \in \mathbf{E}_a$  es un punto de equilibrio del flujo hamiltoniano si y sólo si  $\tilde{z}_e = (\rho_{1_e}, \theta_{1_e})$  es un punto crítico del potencial. Por otra parte,  $\pi(z_e) = \tilde{z}_e$ , donde  $\pi : \mathbf{E}_a \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1$  es la proyección natural. Por esta razón, sabemos que tenemos únicamente una familia de puntos de equilibrio.

Sea  $S^{n-1}$  la esfera en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n > 1$  y  $A_{1_j}, j = 1, 2$ , los valores de  $A_1$  que se corresponden con los extremos de la superficie de energía  $g^{-1}(h_a)$ . Por último, sea  $h_{a_e}$  el valor del punto de equilibrio para el hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$ .

En la siguiente figura se muestran los diferentes casos.

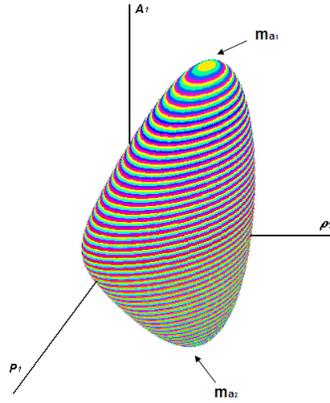


Figura 3.2: Superficie de energía para  $H_a^{-1}(h_a)/S^1$ , con  $h_{a_e} < h_a$  donde  $m_{a_1}$  y  $m_{a_2}$  son los extremos de la superficie.

En el cuadro 3.2 se encuentra la clasificación topológica de  $E_{h_a}$  y  $I_{h_a k_1}$  para los distintos valores de  $a, \omega > 0$ .

Cuadro 3.2: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_{h_a}$  y  $I_{h_a k_1}$ , para todos los valores de  $a$  y  $\omega$ , que se han considerado positivos, y  $(h_a, k_1)$  variable.

$h_a$	$E_{h_a}$	$I_{h_a k_1}$	
$h_a < h_{a_e}$	$\emptyset$	$\forall k_1$	$\emptyset$
$h_a = h_{a_e}$	$S^1$	$k_1 = 0$	$S^1$
$h_{a_e} < h_a$	$S^3$	$k_1 > A_{1_1}$	$\emptyset$
		$k_1 = A_{1_1}$	$S^1$
		$A_{1_2} < k_1 < A_{1_1}$	$S^1 \times S^1$
		$k_1 = A_{1_2}$	$S^1$
		$k_1 < A_{1_2}$	$\emptyset$

### 3.3.2. Estudio del hamiltoniano $\mathcal{H}$

Teniendo en cuenta la descomposición de  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b$ , utilizaremos los resultados obtenidos en el estudio de  $\mathcal{H}_a$  para deducir los correspondientes resultados para  $\mathcal{H}$ .

Sea  $S^{n-1}$  la esfera en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n > 1$ ,  $A_{1_j}, j = 1, 2$ , el valor de  $A_1$  que se corres-

ponde con los extremos de la superficie de energía  $g^{-1}(h_a)$  y  $h_{a_e}$  el valor del punto de equilibrio del hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$ . Por último,  $A_{2_j}, j = 1, 2$ , se corresponden con el valor de  $P_2$  que corresponde a los extremos de la superficie de energía  $g^{-1}(h_b)$  y  $h_{b_e}$  el valor del punto de equilibrio del hamiltoniano  $\mathcal{H}_b$ .

Hemos representado la clasificación topológica de  $\mathcal{H}$  en tablas desde 3.3 hasta 3.11.

Cuadro 3.3: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $\forall k_1, h_a < h_{a_e}$  y  $h_b, k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_a < h_{a_e}$	$h_b < h_{b_e}$	$\forall k_1$	$\forall k_2$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$h_b = h_{b_e}$	$\forall k_1$	$k_2 = 0$	$S^1$	$S^1$
	$h_{b_e} < h_b$	$\forall k_1$	$k_2 > A_{2_1}$	$S^3$	$\emptyset$
			$k_2 = A_{2_1}$		$S^1$
			$A_{2_2} < k_2 < A_{2_1}$		$S^1 \times S^1$
$k_2 = A_{2_2}$			$S^1$		
$k_2 < A_{2_2}$	$\emptyset$				

## 3.4. Órbitas periódicas de potenciales anillados

Ahora queremos caracterizar las órbitas periódicas del sistema hamiltoniano (3.1). Para llevar a cabo esta caracterización, es necesario calcular las variables de acción ángulo de los subsistemas  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$  y, por la estructura de ambos subsistemas, obtenemos la expresión de  $\mathcal{H}$  en estas variables.

### 3.4.1. Variables de acción ángulo para el subsistema $\mathcal{H}_a$

Podemos definir las variables de acción ángulo mediante la teoría de Hamilton-Jacobi

$$J_{\theta_1} = A_1 = k_1, \quad (3.22)$$

Cuadro 3.4: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $k_1 = 0$ ,  $h_a = h_{a_e}$  y  $h_b$ ,  $k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_a = h_{a_e}$	$h_b < h_{b_e}$	$k_1 = 0$	$\forall k_2$	$S^1$	$S^1$
	$h_b = h_{b_e}$	$k_1 = 0$	$k_2 = 0$	$S^1 \cup S^1$	$S^1 \cup S^1$
	$h_{b_e} < h_b$	$k_1 = 0$	$k_2 > A_{2_1}$	$S^1 \cup S^3$	$S^1$
			$k_2 = A_{2_1}$		$S^1 \cup S^1$
			$A_{2_2} < k_2 < A_{2_1}$		$S^1 \cup \{S^1 \times S^1\}$
$k_2 = A_{2_2}$			$S^1 \cup S^1$		
		$k_2 < A_{2_2}$		$S^1$	

Cuadro 3.5: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $\forall k_2$ ,  $h_{a_e} < h_a$ ,  $h_b < h_{b_e}$  y  $k_1$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{a_e} < h_a$	$h_b < h_{b_e}$	$k_1 > A_{1_1}$	$\forall k_2$	$S^3$	$\emptyset$
		$k_1 = A_{1_1}$			$S^1$
		$A_{1_2} < k_1 < A_{1_1}$			$S^1 \times S^1$
		$k_1 = A_{1_2}$			$S^1$
		$k_1 < A_{1_2}$			$\emptyset$

$$J_{\rho_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_{1_2}}^{\rho_{1_1}} \frac{\sqrt{-k_1^2 - a + 2h_a\rho_1^2 - \omega\rho_1^4}}{\rho_1} d\rho_1, \quad (3.23)$$

donde  $\rho_{1_1}$  y  $\rho_{1_2}$  son las dos raíces reales positivas del polinomio

$$P(\rho_1) = -k_1^2 - a + 2h_a\rho_1^2 - \omega\rho_1^4, \quad (3.24)$$

por esta razón, la transformación de coordenadas polares simplécticas a variables de acción ángulo sólo se puede definir en la región donde el polinomio (3.24) tiene dos raíces reales positivas distintas según los parámetros  $a$ ,  $\omega$ ,  $k_1$  y  $h_a$ .

Para calcular  $J_{\rho_1}$  utilizamos el teorema de los residuos de Cauchy, obteniendo la expresión

$$J_{\rho_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{h_a}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{J_{\theta_1}^2 + a} \right). \quad (3.25)$$

Cuadro 3.6: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $k_2 = 0$ ,  $h_{a_e} < h_a$ ,  $h_b = h_{b_e}$ ,  $k_1$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{a_e} < h_a$	$h_b = h_{b_e}$	$k_1 > A_{1_1}$	$k_2 = 0$	$S^3 \cup S^1$	$S^1$
		$k_1 = A_{1_1}$			$S^1 \cup S^1$
		$A_{1_2} < k_1 < A_{1_1}$			$\{S^1 \times S^1\} \cup S^1$
		$k_1 = A_{1_2}$			$S^1 \cup S^1$
		$k_1 < A_{1_2}$			$S^1$

Cuadro 3.7: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $k_1 > A_{1_1}$ ,  $h_{a_e} < h_a$ ,  $h_{b_e} < h_b$  y  $k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{a_e} < h_a$	$h_{b_e} < h_b$	$k_1 > A_1$	$k_2 > A_{2_1}$	$S^3 \cup S^3$	$\emptyset$
			$k_2 = A_{2_1}$		$S^1$
			$A_{2_2} < k_2 < A_{2_1}$		$S^1 \times S^1$
			$k_2 = A_{2_2}$		$S^1$
			$k_2 < A_{2_2}$		$\emptyset$

Obteniendo el valor de  $h_a$  en (3.25), tenemos el hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$  expresado en las variables de acción ángulo

$$\mathcal{H}_a = \sqrt{\omega} \left( 2J_{\rho_1} + \sqrt{J_{\theta_1}^2 + a} \right). \quad (3.26)$$

La condición que deben satisfacer los parámetros  $a$ ,  $\omega$ ,  $k_1$  y  $h_a$  para tener definidas las variables de acción ángulo es

$$h_a > \sqrt{(a + k_1^2)\omega}.$$

Cuadro 3.8: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $k_1 = A_{11}$ ,  $h_{a_e} < h_a$ ,  $h_{b_e} < h_b$  y  $k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{a_e} < h_a$	$h_{b_e} < h_b$	$k_1 = A_{11}$	$k_2 > A_{21}$	$S^3 \cup S^3$	$S^1$
			$k_2 = A_{21}$		$S^1 \cup S^1$
			$A_{22} < k_2 < A_{21}$		$S^1 \cup \{S^1 \times S^1\}$
			$k_2 = A_{22}$		$S^1 \cup S^1$
			$k_2 < A_{22}$		$\emptyset$

Cuadro 3.9: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $A_2 < k_1 < A_{11}$ ,  $h_{a_e} < h_a$ ,  $h_{b_e} < h_b$  y  $k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{a_e} < h_a$	$h_{b_e} < h_b$	$A_{12} < k_1 < A_{11}$	$k_2 > A_{21}$	$S^3 \cup S^3$	$\{S^1 \times S^1\}$
			$k_2 = A_{21}$		$\{S^1 \times S^1\} \cup S^1$
			$A_{22} < k_2 < A_{21}$		$\{S^1 \times S^1\} \cup \{S^1 \times S^1\}$
			$k_2 = A_{22}$		$\{S^1 \times S^1\} \cup S^1$
			$k_2 < A_{22}$		$\{S^1 \times S^1\}$

En la figura Fig. 3.3 está representada la región donde se pueden definir las variables de acción ángulo.

Podemos observar en dicha figura que la línea roja  $h_a = \sqrt{(a + k_1^2)\omega}$  se corresponde con los extremos de la superficie de energía  $E_{h_a}$ , *i.e.* en esos puntos tenemos órbitas circulares. Para el caso  $k_1 = 0$ , la energía toma el valor  $h_a = \sqrt{a\omega}$ , *i.e.* estamos en un punto de equilibrio del sistema. Debido a la topología de la superficie de energía, podemos asegurar que en la región azul las órbitas van a ser acotadas, por tanto, tendremos órbitas periódicas o cuasiperiódicas.

Cuadro 3.10: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $k_1 = A_{12}$ ,  $h_{ae} < h_a$ ,  $h_{be} < h_b$  y  $k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{ae} < h_a$	$h_{be} < h_b$	$k_1 = A_{12}$	$k_2 > A_{21}$	$S^3 \cup S^3$	$S^1$
			$k_2 = A_{21}$		$S^1 \cup S^1$
			$A_{22} < k_2 < A_{21}$		$S^1 \cup \{S^1 \times S^1\}$
			$k_2 = A_{22}$		$S^1 \cup S^1$
			$k_2 < A_{22}$		$S^1$

Cuadro 3.11: Clasificación topológica de los conjuntos  $E_h$  y  $I_{hk}$ , para todos los valores de  $a, b$  y  $\omega$ , que hemos considerado positivos,  $k_1 < A_{12}$ ,  $h_{ae} < h_a$ ,  $h_{be} < h_b$  y  $k_2$  variando.

$h_a$	$h_b$	$k_1$	$k_2$	$E_h$	$I_{hk}$
$h_{ae} < h_a$	$h_{be} < h_b$	$k_1 < A_{12}$	$k_2 > A_{21}$	$S^3 \cup S^3$	$\emptyset$
			$k_2 = A_{21}$		$S^1$
			$A_{22} < k_2 < A_{21}$		$S^1 \times S^1$
			$k_2 = A_{22}$		$S^1$
			$k_2 < A_{22}$		$\emptyset$

### 3.4.2. Clasificación de las órbitas periódicas de $\mathcal{H}_a$

#### Órbitas circulares

Las órbitas circulares tienen radio constante  $\rho_1 = C$ . Estas órbitas son la solución de

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{d\mathcal{H}_a}{dP_1} = P_1 = 0, \\ \frac{dP_1}{dt} &= -\frac{d\mathcal{H}_a}{d\rho_1} = \frac{\omega\rho_1^4 - A_1^2 - a}{\rho_1^3} = 0, \end{aligned}$$

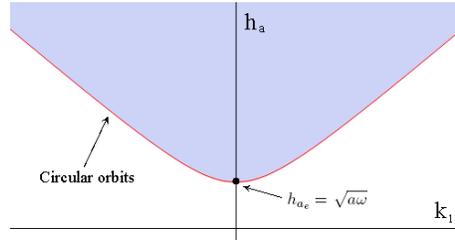


Figura 3.3: Región donde se pueden definir  $(J_{\rho_1}, J_{\theta_1})$ .

donde

$$\rho_1(t) = \sqrt[4]{\frac{a + A_1^2}{\omega}}, \quad \theta_1(t) = \frac{\sqrt{\omega} A_1}{\sqrt{a + A_1^2}} t.$$

Estas órbitas circulares se corresponden con el máximo y el mínimo de la superficie de energía.

### Órbitas rectilíneas

Las órbitas rectilíneas son las que tienen ángulo constante  $\theta_1 = C$ , por tanto

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\mathcal{H}_a}{dA_1} = \frac{A_1}{\rho_1^2} = 0,$$

donde  $A_1 = 0$ .

Las trayectorias rectilíneas son las soluciones del sistema

$$\frac{d\rho_1}{dt} = P_1 \quad \text{y} \quad \frac{dP_1}{dt} = \frac{a - \omega\rho_1^4}{\rho_1^3}.$$

### Órbitas periódicas y cuasiperiódicas

Una órbita de  $\mathcal{H}_a$  es periódica si

$$n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\partial\mathcal{H}_a/\partial J_{\rho_1}}{\partial\mathcal{H}_a/\partial J_{\theta_1}} = \frac{2\sqrt{a + J_{\theta_1}^2}}{J_{\theta_1}} = \frac{p_1}{q_1}$$

es un número racional. En caso contrario, tenemos órbitas cuasiperiódicas.

Obteniendo el valor de  $J_{\theta_1}$  respecto de  $p_1$  y  $q_1$ , se tienen las condiciones

$$J_{\theta_1} = \pm \frac{2\sqrt{a}q_1}{\sqrt{p_1^2 - 4q_1^2}},$$

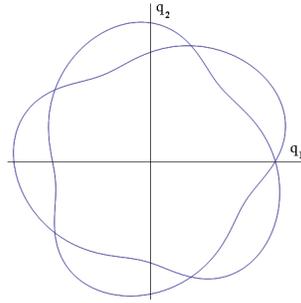


Figura 3.4: Ejemplo de órbita periódica para los parámetros  $a = 2$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 5$ ,  $q = 2$ ,  $J_{\rho_1} = \frac{1}{10}$  y  $J_{\theta_1} = \frac{4}{3}$ .

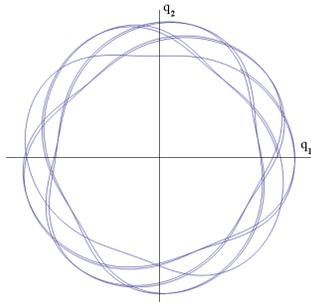


Figura 3.5: Ejemplo de órbita cuasi periódica para los parámetros  $a = 2$ ,  $\omega = 1$ ,  $p = 5$ ,  $q = \sqrt{3,9}$ ,  $J_{\rho_1} = \frac{1}{10}$  y  $J_{\theta_1} = 1,88$ .

donde  $p_1$  y  $q_1$  son números enteros.

Volvamos de nuevo ahora a la región donde están definidas las variables de acción ángulo para clasificar las órbitas periódicas.

En esta figura podemos observar que para  $k_1 = 0$  (línea amarilla) se obtienen órbitas rectilíneas. Estas órbitas también son acotadas. Así, para cada par de números enteros  $(p_1, q_1)$ , tenemos dos líneas verticales donde el sistema tiene órbitas periódicas.

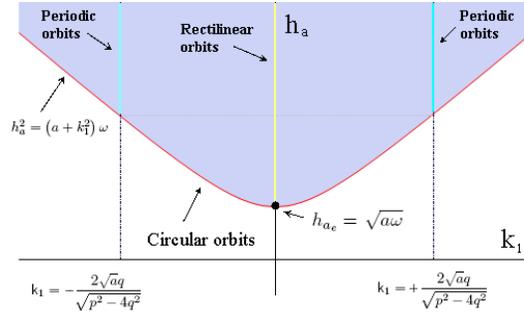


Figura 3.6: Caracterización de las órbitas periódicas del hamiltoniano  $\mathcal{H}_a$ .

### 3.4.3. Caracterización de las órbitas de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b$

#### Variables de acción ángulo para $\mathcal{H}$

El resultado para  $\mathcal{H}_b$  es completamente análogo al que hemos obtenido para  $\mathcal{H}_a$ , de manera que será

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_a &= \sqrt{\omega} \left( 2J_{\rho_1} + \sqrt{J_{\theta_1}^2 + a} \right), \\ \mathcal{H}_b &= \sqrt{\omega} \left( 2J_{\rho_2} + \sqrt{J_{\theta_2}^2 + b} \right),\end{aligned}$$

y, por tanto, podemos expresar el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  en las variables de acción ángulo

$$\mathcal{H} = \sqrt{\omega} \left( 2J_{\rho_1} + \sqrt{J_{\theta_1}^2 + a} + 2J_{\rho_2} + \sqrt{J_{\theta_2}^2 + b} \right).$$

Ahora, las órbitas periódicas deben verificar

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{q_1}{p_2}, \quad \frac{n_3}{n_4} = \frac{p_2}{q_2},$$

donde

$$n_1 = \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial J_{\rho_1}}, \quad n_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial J_{\theta_1}}, \quad n_3 = \frac{\partial \mathcal{H}_b}{\partial J_{\rho_2}}, \quad n_4 = \frac{\partial \mathcal{H}_b}{\partial J_{\theta_2}}$$

y  $p_1, q_1, p_2, q_2$  son números enteros.

Obtenemos las condiciones

$$J_{\theta_1} = \pm \frac{2\sqrt{a}q_1}{\sqrt{p_1^2 - 4q_1^2}}, \quad J_{\theta_2} = \pm \frac{2\sqrt{b}q_2}{\sqrt{p_2^2 - 4q_2^2}}, \quad (3.27)$$

con  $p_1, q_1, p_2$  y  $q_2$  números enteros.

Podemos ahora caracterizar las órbitas periódicas de  $\mathcal{H}$  considerando las órbitas periódicas de  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$ .

Cuadro 3.12: Caracterización de las órbitas de  $\mathcal{H}_a$ 

Órbitas periódicas de $\mathcal{H}_a$	
Punto fijo	$A_1 = 0$ y $h_a = +\sqrt{a\omega}$
Órbitas rectilíneas	$A_1 = 0$ y $h_a > +\sqrt{a\omega}$
Órbitas circulares	$\rho_1(t) = \sqrt[4]{\frac{a + A_1^2}{\omega}}$ y $h_a > +\sqrt{a\omega}$
Órbitas periódicas	$J_{\theta_1} = \pm \frac{2\sqrt{a}q_1}{\sqrt{p_1^2 - 4q_1^2}}$ y $h_a > +\sqrt{a\omega}$ con $p_1, q_1$ números enteros

Cuadro 3.13: Caracterización de las órbitas de  $\mathcal{H}_b$ 

Órbitas periódicas de $\mathcal{H}_b$	
Punto fijo	$A_2 = 0$ y $h_b = +\sqrt{b\omega}$
Órbitas rectilíneas	$A_2 = 0$ y $h_b > +\sqrt{b\omega}$
Órbitas circulares	$\rho_2(t) = \sqrt[4]{\frac{b + A_2^2}{\omega}}$ y $h_b > +\sqrt{b\omega}$
Órbitas periódicas	$J_{\theta_2} = \pm \frac{2\sqrt{b}q_2}{\sqrt{p_2^2 - 4q_2^2}}$ y $h_b > +\sqrt{b\omega}$ con $p_2, q_2$ números enteros

### 3.5. El oscilador biparamétrico y su integración

Una vez demostrada la relación existente entre las familias de sistemas anillados con el oscilador, vamos a centrarnos ahora en la integración de nuestro oscilador biparamétrico. La función de Hamilton (3.1) define un sistema integrable, debido

Cuadro 3.14: Caracterización de las órbitas de  $\mathcal{H}$  respecto de las órbitas de  $\mathcal{H}_a$  y  $\mathcal{H}_b$ . Obsérvese que las órbitas periódicas deben verificar las condiciones (3.27).

Órbitas periódicas de $\mathcal{H}$			
$\mathcal{H}_a$	$\mathcal{H}_b$	$\mathcal{H}_a$	$\mathcal{H}_b$
$\{h_{a_e}\}$	$\times \{h_{b_e}\}$	$S^1$	$\times \{h_{b_e}\}$
$\{h_{a_e}\}$	$\times [\rho_2^1, \rho_2^2]$	$S^1$	$\times [\rho_2^1, \rho_2^2]$
$\{h_{a_e}\}$	$\times S^1$	$S^1$	$\times S^1$
$\{h_{a_e}\}$	$\times T^2$	$S^1$	$\times T^2$
$[\rho_1^1, \rho_1^2]$	$\times \{h_{b_e}\}$	$T^2$	$\times \{h_{b_e}\}$
$[\rho_1^1, \rho_1^2]$	$\times [\rho_2^1, \rho_2^2]$	$T^2$	$\times [\rho_2^1, \rho_2^2]$
$[\rho_1^1, \rho_1^2]$	$\times S^1$	$T^2$	$\times S^1$
$[\rho_1^1, \rho_1^2]$	$\times T^2$	$T^2$	$\times T^2$

a que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son cíclicas, y, por tanto  $A_1$  y  $A_2$  son integrales primeras. En otras palabras, el sistema se puede separar en dos subsistemas con un grado de libertad, definidos por las funciones hamiltonianas (3.5) y (3.6). Vamos a integrar el sistema diferencial definido por (3.1).

Sea

$$\tilde{Q} = 2\mathcal{H}_a - \omega\rho_1^2 - \frac{A_1^2 + a}{\rho_1^2},$$

y consideremos las cantidades  $a_1$  y  $b_1$  definidas por

$$a_1 + b_1 = \sqrt{2 \left( \frac{\mathcal{H}_a}{\omega} + \sqrt{\frac{A_1^2 + a}{\omega}} \right)},$$

$$a_1 - b_1 = \sqrt{2 \left( \frac{\mathcal{H}_a}{\omega} - \sqrt{\frac{A_1^2 + a}{\omega}} \right)},$$

entonces, podemos escribir

$$\tilde{Q} = \frac{\omega}{\rho_1^2} (a_1^2 - \rho_1^2)(\rho_1^2 - b_1^2).$$

Podemos ver que la ecuación  $\tilde{Q} = 0$  tiene raíces reales cuando  $\mathcal{H}_a \geq \sqrt{\omega(A_1^2 + a)}$ .

El sistema definido por  $\mathcal{H}_a$  se reduce a

$$\dot{\rho}_1 = P_1 = \sqrt{\tilde{Q}}, \quad \dot{\theta}_1 = \frac{A_1}{\rho_1^2},$$

*i. e.*, a dos cuadraturas. De la primera de ellas obtenemos inmediatamente

$$\rho_1(\tau) = \sqrt{a_1^2 \cos^2(\sqrt{\omega}\tau) + b_1^2 \sin^2(\sqrt{\omega}\tau)}$$

y el ángulo  $\theta_1(\tau)$ , viene dado, después de algunos cálculos, por

$$\theta_1(\tau) = \frac{k_1}{\sqrt{a+k_1^2}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{h_a^2 - (a+k_1^2)\omega}{(a+k_1^2)\omega}} \right) + \arctan \left( \frac{h_a \tan(\sqrt{\omega}\tau) - \sqrt{h_a^2 - (a+k_1^2)\omega}}{\sqrt{(a+k_1^2)\omega}} \right) \right],$$

para  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$ , y

$$\theta_1(\tau) = \frac{k_1}{\sqrt{a+k_1^2}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{h_a^2 - (a+k_1^2)\omega}{(a+k_1^2)\omega}} \right) + \arctan \left( \frac{h_a \tan(\sqrt{\omega}\tau) - \sqrt{h_a^2 - (a+k_1^2)\omega}}{\sqrt{(a+k_1^2)\omega}} \right) + n\pi \right],$$

para  $\frac{\pi}{2}(2n-1) \leq \tau < \frac{\pi}{2}(2n+1)$ , con  $n \geq 1$

Para  $\rho_2$  y  $\theta_2$  se obtienen expresiones similares, es decir:

Recordando que las cantidades  $a_2$  y  $b_2$  vienen dadas por

$$a_2 + b_2 = \sqrt{2 \left( \frac{\mathcal{H}_b}{\omega} + \sqrt{\frac{A_2^2 + b}{\omega}} \right)},$$

$$a_2 - b_2 = \sqrt{2 \left( \frac{\mathcal{H}_b}{\omega} - \sqrt{\frac{A_2^2 + b}{\omega}} \right)},$$

se tiene que

$$\rho_2(\tau) = \sqrt{a_2^2 \cos^2(\sqrt{\omega}\tau) + b_2^2 \sin^2(\sqrt{\omega}\tau)},$$

donde  $\rho_2(0) = b_2$  y el ángulo  $\theta_2 = \theta_2(\tau)$  viene dado, tras varios cálculos, por

$$\theta_2(\tau) = \frac{k_2}{\sqrt{b+k_2^2}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{h_b^2 - (b+k_2^2)\omega}{(b+k_2^2)\omega}} \right) + \arctan \left( \frac{h_b \tan(\sqrt{\omega}\tau) - \sqrt{h_b^2 - (b+k_2^2)\omega}}{\sqrt{(b+k_2^2)\omega}} \right) \right],$$

para  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$ , y

$$\theta_2(\tau) = \frac{k_2}{\sqrt{b+k_2^2}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{h_b^2 - (b+k_2^2)\omega}{(b+k_2^2)\omega}} \right) + \arctan \left( \frac{h_b \tan(\sqrt{\omega} \tau) - \sqrt{h_b^2 - (b+k_2^2)\omega}}{\sqrt{(b+k_2^2)\omega}} \right) + n\pi \right],$$

para  $\frac{\pi}{2}(2n-1) \leq \tau < \frac{\pi}{2}(2n+1)$ , con  $n \geq 1$ .

Finalmente, sustituiremos dichos valores en las ecuaciones anteriores, obteniendo las variables  $q_i$ .

### 3.6. Transformación de algunas órbitas de $\mathcal{H}$ al sistema 3-D de Hartmann

Operando, se obtiene que las soluciones del hamiltoniano de potencial  $V_1$  son

$$x_1 = r \sin \phi \cos \lambda, \quad x_2 = r \sin \phi \sin \lambda, \quad x_3 = r \cos \phi$$

Por tanto, podemos mostrar cómo algunas de las órbitas periódicas de  $\mathcal{H}$  se transforman en el sistema de Hartmann.

### 3.7. Estabilidad de las órbitas periódicas

En esta parte vamos a estudiar la estabilidad de las diferentes órbitas periódicas del sistema (3.17). Las ecuaciones variacionales del sistema anterior son

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta\rho} \\ \dot{\delta\theta} \\ \dot{\delta P} \\ \dot{\delta A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2A^2}{\rho^3} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ -\left(\frac{3(a+A^2)}{\rho^4} + \omega\right) & 0 & 0 & -\frac{2A^2}{\rho^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta\theta \\ \delta P \\ \delta A \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

El sistema anterior, en el caso de una órbita rectilínea periódica  $\gamma(t) = (\rho, \theta_0, \dot{\rho}, 0)$ ,

con  $\rho(t) = \sqrt{h - \sqrt{(h^2 - a\omega)} \sin(2t)}$ , se simplifica en

$$\begin{aligned}\dot{\delta\rho} &= \delta P \\ \dot{\delta\theta} &= \frac{1}{\rho^2} \delta A \\ \dot{\delta P} &= -\left(\frac{3a}{\rho^4} + \omega\right) \delta\rho \\ \delta A &= cte.\end{aligned}$$

Aunque el sistema anterior es integrable por cuadraturas, no lo vamos a integrar completamente, sino que tendremos en cuenta que

$$\delta\theta(t) = \delta\theta_0 + cte \int_0^t \frac{ds}{h - \sqrt{(h^2 - a\omega)} \sin(2s)}$$

no está acotado, y concluiremos que las *soluciones periódicas rectilíneas son inestables*.

En el caso de soluciones periódicas circulares  $\gamma(t) = \left(\sqrt[4]{\frac{a+k^2}{\omega}}, \frac{\sqrt{\omega}kt}{\sqrt{a+k^2}}, 0, k\right)$ , tenemos que (3.28) es

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta\rho} \\ \dot{\delta\theta} \\ \dot{\delta P} \\ \dot{\delta A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2k^2}{\rho^3} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \\ -4\omega & 0 & 0 & -\frac{2A^2}{\rho^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta\theta \\ \delta P \\ \delta A \end{pmatrix}$$

un sistema lineal con coeficientes constantes cuyo polinomio característico es  $p(s) = s^2(s^2 + 4\omega)$ . Los índices de estabilidad del sistema (véase [Br 69] para más detalles) son  $K = 2 \cos(4\pi\sqrt{\omega})$ , por tanto, estas órbitas son *linealmente estables*. Obsérvese que cuando  $\omega = \frac{(1+2k)^2}{64}$  existen bifurcaciones de estas órbitas circulares.

En el caso de las órbitas periódicas restantes, la estabilidad del sistema (3.28) está directamente relacionada con el estudio de la estabilidad de la siguiente ecuación

$$\ddot{\delta\rho} + \left(\frac{3(a+k^2)}{\rho^4} + \omega\right) \delta\rho = 0$$

$$\text{con } \rho(t) = \sqrt{\frac{1}{\omega} \left( h - \sqrt{h^2 - \omega(a + k^2)} \operatorname{sen}(2t\sqrt{\omega}) \right)}, \quad A = k.$$

Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos se estudiará numéricamente por medio de la teoría de Floquet (véase [Me 97] para más detalles). Por ejemplo, para el caso en el que  $k = \frac{2\sqrt{21}}{21}$ ,  $\omega = 1$ ,  $a = 1$ , estamos interesados en la estabilidad de esta familia de órbitas.

Calculando numéricamente la traza de la matriz de monodromía, obtenemos el diagrama de estabilidad de la Fig. 3.14.

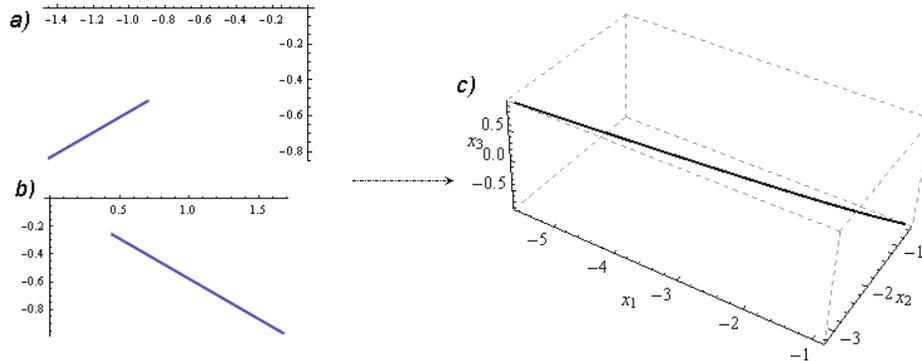


Figura 3.7: a) Órbita rectilínea del subsistema  $\mathcal{H}_a$  para los parámetros  $a = 2$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_1 = 5$ ,  $q_1 = 2$ ,  $J_{\rho_1} = \frac{1}{10}$  y  $J_{\theta_1} = 0$ . b) Órbita rectilínea para el subsistema  $\mathcal{H}_b$  para los parámetros  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_2 = 5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $J_{\rho_2} = \frac{1}{5}$  y  $J_{\theta_2} = 0$ . c) Órbita rectilínea  $\times$  Órbita rectilínea

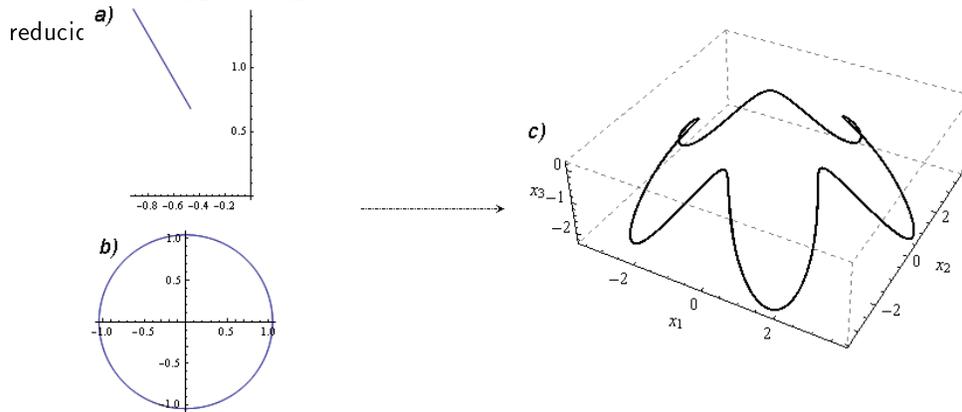


Figura 3.8: a) Órbita rectilínea del subsistema  $\mathcal{H}_a$  para los parámetros  $a = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_1 = 5$ ,  $q_1 = 2$ ,  $J_{\rho_1} = \frac{1}{5}$  y  $J_{\theta_1} = 0$ . b) Órbita circular del subsistema  $\mathcal{H}_b$  para los parámetros  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_2 = 5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $J_{\rho_2} = 0$  y  $J_{\theta_2} = \frac{2}{5}$ . c) Órbita rectilínea  $\times$  Órbita circular reducida al

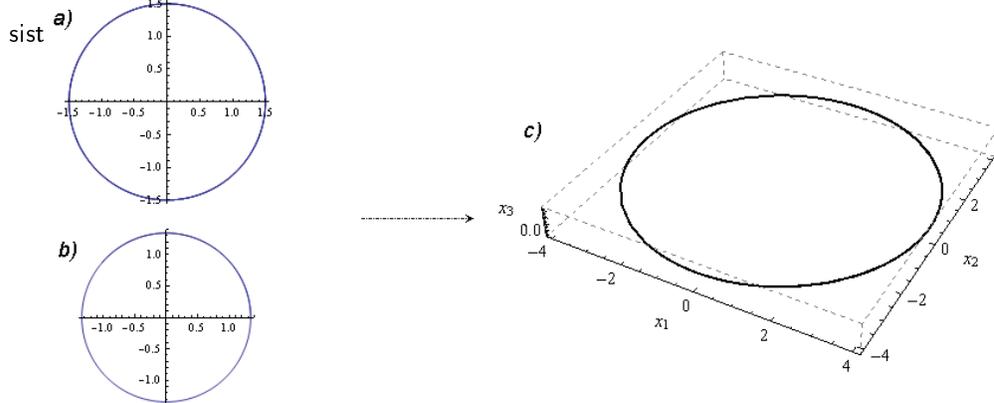


Figura 3.9: a) Órbita circular del subsistema  $\mathcal{H}_a$  para los parámetros  $a = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_1 = 5$ ,  $q_1 = 2$ ,  $J_{\rho_1} = 0$  y  $J_{\theta_1} = \frac{1}{2}$ . b) Órbita circular del subsistema  $\mathcal{H}_b$  para los parámetros  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_2 = 5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $J_{\rho_2} = 0$  y  $J_{\theta_2} = 2$ . c) Órbita circular  $\times$  Órbita circular reducida al sistema de Hartmann.

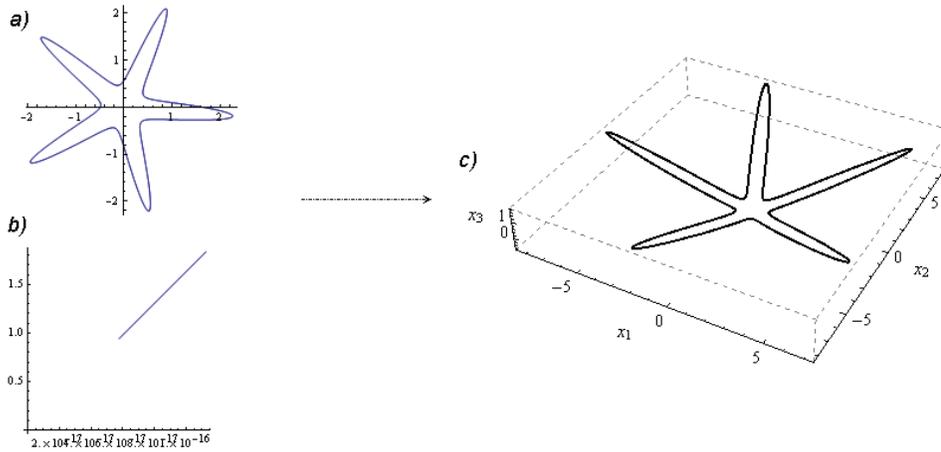


Figura 3.10: a) Órbita rectilínea del subsistema  $\mathcal{H}_a$  para los parámetros  $a = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_1 = 5$ ,  $q_1 = 2$ ,  $J_{\rho_1} = \frac{1}{5}$  y  $J_{\theta_1} = 0$ . b) Órbita periódica del subsistema  $\mathcal{H}_b$  para los parámetros  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_2 = 5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $J_{\rho_2} = \frac{4}{5}$  y  $J_{\theta_2} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ . c) Órbita rectilínea  $\times$  Órbita periódica reducida al sistema de Hartmann.

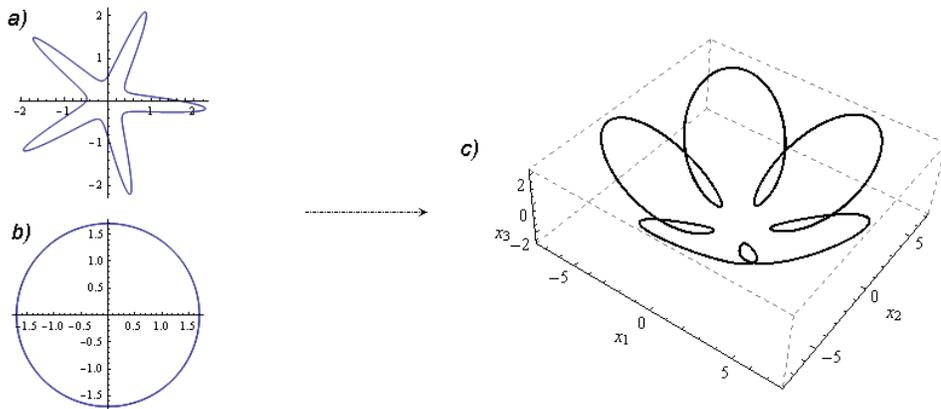


Figura 3.11: a) Órbita circular del subsistema  $\mathcal{H}_a$  para los parámetros  $a = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_1 = 5$ ,  $q_1 = 2$ ,  $J_{\rho_1} = 0$  y  $J_{\theta_1} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ . b) Órbita periódica para el subsistema  $\mathcal{H}_b$  para los parámetros  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_2 = 5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $J_{\rho_2} = \frac{4}{5}$  y  $J_{\theta_2} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ . c) Órbita rectilínea  $\times$  Órbita circular reducida al sistema de Hartmann.

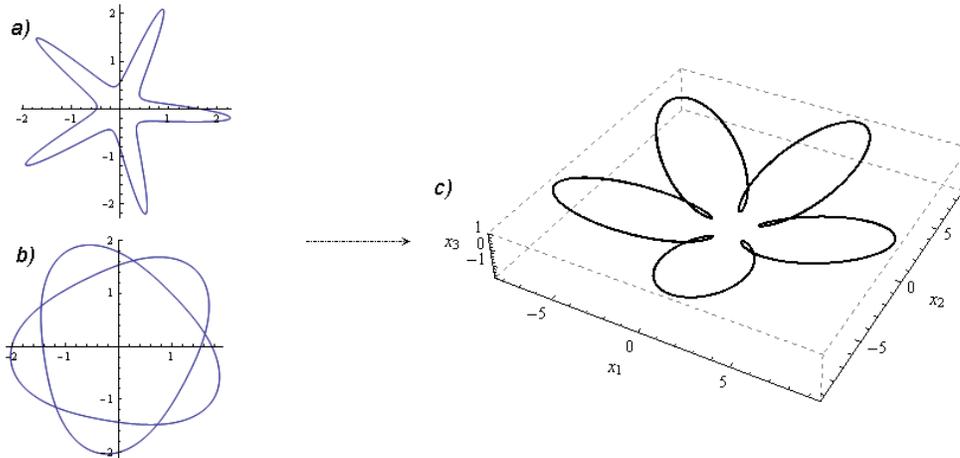


Figura 3.12: a) Órbita periódica para el subsistema  $\mathcal{H}_a$  para los parámetros  $a = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_1 = 5$ ,  $q_1 = 2$ ,  $J_{\rho_1} = 0$  y  $J_{\theta_1} = \frac{4}{\sqrt{3}}$  b) Órbita periódica para el subsistema  $\mathcal{H}_b$  para los parámetros  $b = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $p_2 = 5$ ,  $q_2 = 1$ ,  $J_{\rho_2} = \frac{4}{5}$  y  $J_{\theta_2} = \frac{2}{\sqrt{21}}$ . c) Órbita periódica  $\times$  Órbita circular reducida al sistema de Hartmann.



Figura 3.13: Órbitas para  $k = \frac{2\sqrt{21}}{21}$ ,  $\omega = 1$ ,  $a = 1$  con  $h$  variando. Obsérvese que cuando  $h$  crece las órbitas son muy "estrelladas".

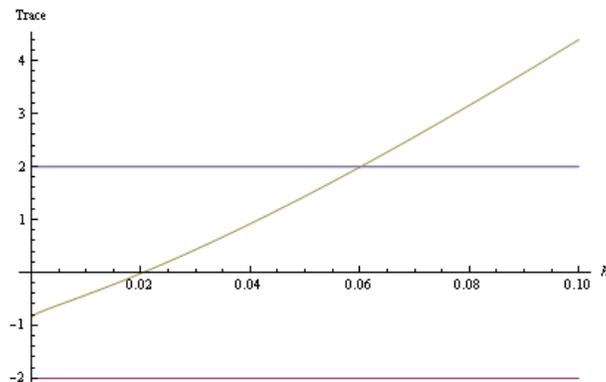


Figura 3.14: Traza de la matriz de monodromía variando con  $h$ . Para  $0 \leq h < 0,0601811$  estas órbitas son linealmente estables. Para  $h \geq 0,0601811$  la órbita es inestable.

## Capítulo 4

---

# Teoría del averaging para órbitas periódicas

---

### 4.1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es introducir los rudimentos básicos del método de averaging [SV 85], [Ve 91] que proporciona una relación cuantitativa entre las soluciones de algunos sistemas diferenciales no autónomos y las soluciones del sistema diferencial promediado, que es autónomo. El promedio se hace con respecto a la variable independiente. El Teorema de la Función Implícita se usa de manera esencial, aunque nosotros presentaremos un enfoque algo más pedagógico usando la Teoría del Índice de Brouwer.

Empezaremos mostrando como resultados fundamentales de esta teoría los Teoremas 4.1.1, 4.3.1 y 4.3.2.

El primer paso en el ataque de este tipo de problemas consiste en reemplazar nuestro problema original por el de encontrar los ceros de alguna función finito-dimensional relacionada directamente con el sistema diferencial dado. De hecho, tenemos que estudiar la bifurcación de los ceros de esta función con respecto al parámetro  $\epsilon$  alrededor de  $\epsilon = 0$ .

Además, con la aproximación a esta teoría que presentamos y que se basa en el trabajo [BL1 04] conseguiremos debilitar las hipótesis de teoremas análogos en el averaging de primer orden, como el Teorema 11.5, p. 158 de [Ve 91] (véase el Teorema 4.1.1) y en el averaging de segundo orden, Corolario 6, p. 6, [Ll 02] o el Teorema 2.2 [Ha 03], (véase el Teorema 4.3.1). También se han conseguido mejoras para el tercer orden en el caso de sistemas unidimensionales (véase el Teorema 4.3.2). Por lo que sabemos en [BL1 04] es la primera vez que se ha dado una formulación explícita para métodos de averaging de tercer orden. Debido a esta nueva aproximación, que no utiliza ningún cambio de variable en el sistema dado, consideramos que será más fácil y transparente poder obtener resultados para órdenes superiores.

Veamos el primer resultado fundamental en la teoría:

**Teorema 4.1.1.** (*Método averaging de primer orden*). *Consideremos el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon), \quad (4.1)$$

donde  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones continuas  $T$ -periódicas en la primera variable y  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos  $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (4.2)$$

y supongamos que:

- i)  $F_1$  y  $R$  son localmente lipschitzianas con respecto a  $x$ ;
- ii) para  $a \in D$  con  $f_1(a) = 0$ , existe un entorno  $V$  de  $a$  tal que  $f_1(z) \neq 0$  para todo  $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$  y  $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$ .

Entonces, para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeño, existe una solución  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \epsilon)$  del sistema 4.1 tal que  $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

El Teorema 4.1.1 tiene hipótesis más débiles que el resultado análogo obtenido en el Teorema 11.5 de [Ve 91], donde en lugar de i) se supone que

- j)  $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$  y  $D_x R$  están bien definidas, son continuas y acotadas por una constante  $M$  (independiente de  $\epsilon$ ) en  $[0, \infty) \times D, -\epsilon_f < \epsilon < \epsilon_f$ , y, en lugar de ii) se pide que

jj) para  $a \in D$  con  $f_1(a) = 0$  tenemos  $J_{f_1}(a) \neq 0$ .

De ahora en adelante denotaremos por  $D_x F$  la matriz jacobiana de las derivadas de las funciones componentes de  $F$  con respecto a las componentes de  $x$ , y por  $D_x^2 F$  alguna matriz de segundo orden de las derivadas.  $J_f(a)$  será el jacobiano de  $f$  evaluado en  $a$ .

A través de la Teoría del Grado de Coincidencia [GM 77] se obtiene un método de averaging para sistemas continuos (Teorema 4.1.2) sin imponerle que el campo vectorial sea ni siquiera localmente lipschitziano. Como en todos los resultados que expondremos, las condiciones para la bifurcación de funciones (que son de dimensión finita) vienen dadas en términos del grado de Brouwer en lugar del jacobiano.

Aquí está el resultado, cuya demostración podemos encontrar en el punto 4.4.

**Teorema 4.1.2.** *La tesis del Teorema 4.1.1 es válida también sin suponer que se verifica la condición (i).*

La principal contribución de este enfoque a la teoría de averaging es la eliminación de las condiciones de regularidad. De hecho, en el Teorema 4.1.2 podemos suponer solamente la integrabilidad en  $(0, T)$  en lugar de la continuidad de  $F_1$  y  $R$  con respecto a  $t$ . Aunque los resultados de Ellison, Sáenz y Dumas [ESD 90] no establecen la existencia de soluciones periódicas, podemos decir que las hipótesis de suavidad son comparables. Proporcionan una aproximación del teorema basado en el enésimo orden y conjeturan que las condiciones de regularidad están probablemente próximas a las mínimas.

Excepto en el caso del Teorema 4.1.2, la demostración de los resultados fundamentales están basados en el Lema 4.2.1 enunciado y probado en la sección 4.2. Este lema se puede utilizar para estudiar la bifurcación de los ceros de una función continua finito-dimensional de la cual se conoce su desarrollo con respecto al parámetro de bifurcación hasta un orden  $k$ . Las diferencias entre este resultado y el Teorema de la Función Implícita o el Teorema de Preparación de Malgrange (Teorema 1.10 de [CLW 94], pág. 194) también utilizado en el estudio de la bifurcación de ceros, son las siguientes. En primer lugar, observemos las condiciones de regularidad. El Lema 4.2.1 se puede aplicar a las funciones que son solamente continuas.

Para  $k = 0$ , en condiciones más débiles que las utilizadas en el Teorema de la Función Implícita sólo está asegurada la existencia. Al considerar una aproximación de orden superior, en algunos casos, se puede obtener la existencia de varias ramas

de ceros, como se puede ver en el Ejemplo 4.2.2 de la sección 4.2. Para funciones  $\mathcal{C}^\infty$ , esto complementa el Teorema de Preparación de Malgrange.

El punto 4.2 contiene también ejemplos concretos y observaciones con respecto al uso del Lema 4.2.1 como una herramienta en la teoría de la bifurcación. Vale la pena mencionar aquí que la teoría de grado Brouwer es rica en resultados que concluyen la existencia de ceros de alguna función. Se pueden utilizar estos en lugar del Lema 4.2.1 para obtener nuevas condiciones sobre la existencia de soluciones periódicas de sistemas diferenciales.

En el punto 4.3 se muestra la demostración del Teorema 4.1.1 y el enunciado y la demostración de los resultados de los métodos averaging de segundo y tercer orden. Además se da un ejemplo concreto como aplicación de esta teoría. En primer lugar, se propone una forma general para aplicar el método averaging para el estudio de ciclos límite de sistemas planos que se bifurcan a partir de trayectorias periódicas del anillo periódico 4.5.1.

Esto ya lo hizo antes Llibre en [Ll 02] para perturbaciones dentro de sistemas polinomiales cuadráticos de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(1 + \lambda_4 y), \\ \dot{y} &= x(1 + \lambda_4 y),\end{aligned}$$

y Llibre, Pérez del Río y Rodríguez en [LP 01] para perturbaciones en sistemas polinómicos de grado  $n$  del anterior sistema. La forma de aplicar el método es esencialmente la misma que proponemos en el Teorema 4.5.1. Pero en el Teorema 4.5.2 probamos que esto es equivalente a estudiar la función de desplazamiento de un sistema plano dado. Entonces, sólo por razones prácticas se tiene que elegir entre estos dos métodos. Chicone y Jacobs encontraron en [CJ 91] que, hasta el primer orden en el parámetro  $\epsilon$ , como mucho dos ciclos límite bifurcan en los sistemas cuadráticos del anillo periódico de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^2, \\ \dot{y} &= x + xy.\end{aligned}$$

Estudiaron la función de desplazamiento usando algunos resultados de Bautin [Ba 54]. Al mismo resultado puede llegarse, de una manera más corta, utilizando el método de averaging. Incluso para sistemas planos el método del averaging y el método del uso de la función de desplazamiento no son siempre equivalentes. Se pueden encontrar otros procedimientos en [Ll 02].

## 4.2. El grado de Brouwer

Para subconjuntos abiertos y acotados  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  denotaremos por  $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0)$  el grado de Brouwer de la función  $f(\cdot, \epsilon)$  con respecto al conjunto  $V$  y el punto 0, como está definida en [Br 83].

Una de las principales propiedades del grado topológico es que si  $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) \neq 0$ , entonces la ecuación

$$f(z, \epsilon) = 0 \quad (4.3)$$

tiene una solución en  $V$  (véase de nuevo [Br 83]).

El principal resultado de esta sección es el siguiente:

**Lema 4.2.1.** *Consideremos las funciones continuas  $f_i: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $i = 0, \dots, k$ , y  $f, g, r: \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dadas por*

$$g(\cdot, \epsilon) = f_0(\cdot) + \epsilon f_1(\cdot) + \epsilon^2 f_2(\cdot) + \dots + \epsilon^k f_k(\cdot), \quad (4.4)$$

$$f(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + \epsilon^{k+1} r(\cdot, \epsilon). \quad (4.5)$$

*Supongamos que*

$$g(z, \epsilon) \neq 0, \forall z \in \partial V, \epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0] \setminus \{0\}. \quad (4.6)$$

*Entonces, para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeño,  $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0)$  está bien definida y  $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \epsilon), V, 0)$ .*

*Demostración.* Utilizaremos la invariancia bajo homotopía del grado de Brouwer.

Para cada  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0] \setminus \{0\}$ , consideramos la homotopía continua

$$g_t(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + t(f(\cdot, \epsilon) - g(\cdot, \epsilon)),$$

para  $0 \leq t \leq 1$ .

Todo lo que tenemos que demostrar es que, cuando  $\epsilon$  es suficientemente pequeño,  $0 \notin g_t(\partial V, \epsilon)$  para todo  $0 < t \leq 1$ .

Por reducción al absurdo, supongamos que para algún  $t_0 \in (0, 1]$  y algún  $x_0 \in \partial V$ , es  $g_{t_0}(x_0, \epsilon) = 0$ .

Sea  $M > 0$  tal que  $|r(z, \epsilon)| \leq M$  para todo  $z \in \bar{V}$  y todo  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ . Entonces  $|g(x_0, \epsilon)| \leq M\epsilon^{k+1}$ , lo cual no es cierto para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, pues  $|g(x_0, \epsilon)| = |f_0(x_0) + \epsilon f_1(x_0) + \dots + \epsilon^k f_k(x_0)| \neq 0$ .  $\square$

Recordemos ahora la definición del grado de Brouwer para funciones  $\mathcal{C}^1$  (según aparece en [Llo 78]). Sea  $g \in C^1(D)$ ,  $\bar{V} \subset D$  y  $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$ . Supongamos también que

$$J_g(z) \neq 0, \quad \forall z \in Z_g,$$

donde  $J_g(z)$  es el jacobiano de  $g$  at  $z$ . Esto garantiza que  $Z_g$  es finito (véase el teorema 1.1.2 de [Llo 78]). Entonces

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

En [Llo 78] hay algunos ejemplos de cómputo del grado de funciones que no son  $\mathcal{C}^1$  o para las cuales  $J_g(z) = 0$  para algún  $z \in Z_g$  (ver, por ejemplo, la página 21).

**Observación 4.2.1.1.** Sea  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$ , con  $g(a) = 0$ , donde  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $a \in D$ . Si  $J_g(a) \neq 0$ , existe un entorno  $V$  de  $a$  tal que  $g(z) \neq 0$  para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ . Entonces  $d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}$ .

**Observación 4.2.1.2.** El grado de Brouwer de la función  $f_0(z) = z^2$  es 0 en cualquier entorno del origen. En efecto, la función  $f_0$  tiene un único cero  $a = 0$  y se tiene que  $f'_0(0) = 0$ . Para calcular el grado, vamos a considerar un  $\lambda > 0$  arbitrario, el intervalo  $V = (-2\lambda, 2\lambda)$  y la función  $g(z) = z^2 - \lambda^2$ . Entonces  $g$  tiene dos ceros en  $V$ :  $-\lambda$  y  $\lambda$ .

La matriz jacobiana es negativa en  $-\lambda$  y positiva en  $\lambda$ . Por tanto,  $d_B(g, V, 0) = 0$ . Como es fácil ver que  $\sup_{z \in \bar{V}} |f_0(z) - g(z)| < \inf_{z \in \partial V} f_0(z)$ , por la definición 1.4.1 de [Llo 78], se tiene que  $d_B(f_0, V, 0) = 0$ .

**Observación 4.2.1.3.** Nuestra intención es describir un método para utilizar el Lema 4.2.1 para dar respuesta a algunas preguntas de nuestro principal problema de encontrar los ceros de una función apropiada  $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Supondremos que  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  es de la forma (4.5) con  $g$  dada por (4.4) y  $r : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. El primer paso para llevarlo a cabo es encontrar todos los ceros de  $f_0$ . Sea  $a \in D$  tal que  $f_0(a) = 0$ . Si existe un entorno  $V$  de  $a$  tal que  $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$ , entonces para  $|\epsilon|$  suficientemente pequeño,  $f(\cdot, \epsilon)$  tiene al menos un cero en  $V$ .

Si el grado de Brouwer de  $f_0$  es cero en entornos pequeños de  $a$  o no se puede calcular (esto incluye la posibilidad de que  $f_0$  sea idénticamente 0), procederemos a estudiar  $f_0 + \epsilon f_1$  en algún entorno pequeño de  $a$  y para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

Supondremos en primer lugar que existe un cero de  $f_0 + \epsilon f_1$ ,  $a_{1\epsilon}$ , y un abierto acotado  $V$  tal que  $a_{1\epsilon} \in V$  para cada  $\epsilon \neq 0$  suficientemente pequeño y

$$d_B(f_0 + \epsilon f_1, V, 0) \neq 0. \quad (4.7)$$

Así, por el Lema 4.2.1,  $f(\cdot, \epsilon)$  tiene al menos un cero en  $V$ . Observemos que existe la posibilidad de que existan otros ceros de  $f_0 + \epsilon f_1$  en el mismo entorno de  $a$ , además de  $a_{1\epsilon}$ .

En el caso de que no se verifique (4.7), continuaremos estudiando, de manera análoga, la función  $f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$ , y así sucesivamente.

**Ejemplo 4.2.2.** Ilustramos aquí las observaciones anteriores para la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z, \epsilon) = z^2 - \epsilon^2 + \epsilon^3 r(z, \epsilon)$ . Utilizando la notación del Lema 4.2.1, tenemos que  $f_0(z) = z^2$ ,  $f_1(z) = 0$ ,  $f_2(z) = -1$ .

En cualquier entorno de 0, el grado de  $f_0$  es 0.

Así, continuamos con el estudio de  $(f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2)(z) = z^2 - \epsilon^2$ . Esta función tiene dos ceros,  $-\epsilon$  y  $\epsilon$ . Fijemos un  $\epsilon_0 > 0$  y consideremos los intervalos abiertos  $V = (0, \epsilon_0)$  y  $U = (-\epsilon_0, 0)$ . Utilizando la primera observación, se tiene que  $d_B(f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2, V, 0) \neq 0$  para  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , y la misma relación se mantiene para  $U$  en lugar de  $V$ . Entonces, por el Lema 4.2.1 y algunas observaciones anteriores, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $f(\cdot, \epsilon)$  tiene al menos dos ceros, uno en  $U$  y otro en  $V$ .

Si  $r$  es  $\mathcal{C}^\infty$ , como  $f_0(z) = z^2$ , por el Teorema de Preparación de Malgrange [CLW 94], para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $f(\cdot, \epsilon)$  tiene como mucho dos ceros. Por tanto, tiene exactamente dos ceros.

**Observación 4.2.2.1.** Supongamos que se verifican las hipótesis del Lema 4.2.1 para  $k = 0$  y, además, que

- i) para  $a \in D$  con  $f_0(a) = 0$ , existe un entorno  $V$  de  $a$  tal que  $f_0(z) \neq 0$  para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$  y  $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$ .

Observemos en primer lugar que, como  $f_0(z) \neq 0$  para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ , por la propiedad de escisión del grado (Teorema 2.2.1, p. 26 de [Llo 78]) se tiene que  $d_B(f_0, V_\mu, 0) \neq 0$  para cada entorno  $V_\mu \subset V$  de  $a$ . Elegimos  $V_\mu$  tal que  $V_\mu \rightarrow \{a\}$  cuando  $\mu \rightarrow 0$ . Es fácil ver que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño  $f(\cdot, \epsilon)$  tiene al menos un cero  $a_\epsilon \in V_\mu$  y podemos elegir  $a_\epsilon$  tal que  $a_\epsilon \rightarrow a$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . En este caso diremos que *al menos una rama de ceros se bifurca desde  $a$* . Por otra parte, si, además,  $J_{f_0}(a) \neq 0$ , por el Teorema de la Función Implícita se tiene que esta rama es única.

### 4.3. Averaging vía el grado de Brouwer

En esta sección enunciaremos y demostraremos los resultados más importantes de averaging. Comenzaremos con la justificación del hecho de que “el problema de encontrar soluciones periódicas para algunos sistemas diferenciales es equivalente al de encontrar ceros de cierta correspondiente función finito-dimensional”.

Consideremos el sistema diferencial

$$x'(t) = F(t, x, \epsilon), \quad (4.8)$$

donde  $F : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua,  $T$ -periódica en la primera variable, localmente lipschitziana en la segunda y que  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $z \in D$  denotemos por  $x(\cdot, z, \epsilon) : [0, t_z] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solución de (4.8) con  $x(0, z, \epsilon) = z$ . Supondremos que

$$t_z > T \text{ para todo } z \in D \quad (4.9)$$

Consideremos la función  $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dada por

$$f(z, \epsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon) dt \quad (4.10)$$

Cada solución de (4.8)

$$x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ con } x(0) = x(T) \quad (4.11)$$

se puede extender por periodicidad a  $\mathbb{R}$  y tenemos la relación

$$x(T, z, \epsilon) - x(0, z, \epsilon) = f(z, \epsilon).$$

Entonces, cada  $(z_\epsilon, \epsilon)$  tal que

$$f(z_\epsilon, \epsilon) = 0 \quad (4.12)$$

proporciona la solución periódica  $x(\cdot, z_\epsilon, \epsilon)$  de (4.8). El recíproco también es cierto, es decir, para cada solución  $T$ -periódica de (4.8), si denotamos por  $z_\epsilon$  su valor en  $t = 0$  entonces se verifica (4.12). *Por tanto, el problema de encontrar una solución  $T$ -periódica de (4.8) se puede reemplazar por el problema de encontrar ceros de la función finito-dimensional  $f(\cdot, \epsilon)$  dada por (4.10).*

Para aplicar el Lema 4.2.1, necesitamos la fórmula de Mac–Laurin. Sea  $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y de clase  $C^k$  en  $\epsilon$ , escribamos

$$f(z, \epsilon) = g(z, \epsilon) + \epsilon^{k+1}r(z, \epsilon) \quad (4.13)$$

con  $g$  dada por

$$g(z, \epsilon) = f(z, 0) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(z, 0) + \cdots + \epsilon^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(z, 0) \quad (4.14)$$

Excepto en  $\epsilon = 0$ , la función  $r$  está bien definida y es continua. Si pudiera demostrarse que  $r$  está acotada en algún conjunto de la forma  $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ , siendo  $K$  un subconjunto compacto de  $D$ , entonces tenemos que  $r$  es continua en  $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ . La continuidad de  $r$  se necesita en el Lema 4.2.1 y, en este caso, de aquí en adelante en lugar de escribir la fórmula (4.13) con la función  $r$  dada explícitamente, utilizaremos el símbolo de Landau (ver, por ejemplo, [SV 85], p. 11) y escribiremos en  $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ ,

$$f(z, \epsilon) = g(z, \epsilon) + \epsilon^{k+1}O(1).$$

Por ejemplo, si  $\frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}$  es lipschitziana en  $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ , entonces  $r$  está acotada en este conjunto.

Hemos enunciado el Teorema 4.1.1 sobre el método de averaging de primer orden anteriormente. Veamos la demostración.

*Demostración del Teorema 4.1.1.* Para todo  $z \in \bar{V}$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que, si  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ ,  $x(\cdot, z, \epsilon)$  está definido en  $[0, T]$ , i.e. la relación (4.9) es válida. De hecho, por el Teorema de Existencia y Unicidad Local, se tiene que  $t_z > h_z$ , con  $h_z = \inf(T, \frac{b}{M(\epsilon)})$ ,  $M(\epsilon) \geq |\epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon)|$  para todo  $t \in [0, T]$ , para cada  $x$  con  $|x - z| \leq b$  y para cada  $z \in \bar{V}$ . Cuando  $|\epsilon|$  es suficientemente pequeño,  $M(\epsilon)$  puede ser arbitrariamente grande, de manera que  $h_z = T$  para todo  $z \in \bar{V}$ .

Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  y  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$  se tiene la siguiente relación:

$$x(t, z, \epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \epsilon)) ds + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds \quad (4.15)$$

y la función  $f$  dada por (4.10) se convierte para nuestro sistema en

$$f(z, \epsilon) = \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, x(s, z, \epsilon)) ds + \epsilon^2 \frac{1}{T} \int_0^T R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds.$$

Demostraremos ahora que

$$f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 O(1) \text{ en } \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \quad (4.16)$$

con  $f_1$  dada por (4.2). Observemos en primer lugar que existe un subconjunto compacto  $K$  de  $D$  tal que  $x(t, z, \epsilon) \in K$  para todo  $t \in [0, T], z \in \bar{V}$  y  $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ . Entonces, es fácil ver que

$$f(z, \epsilon) - \epsilon f_1(z) = \epsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)] ds + \epsilon^2 O(1) \quad (4.17)$$

Utilizando que  $F_1$  es lipschitziana con respecto a  $x$  en  $[0, T] \times K$  y la fórmula (4.15), se obtienen las siguientes relaciones

$$|F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)| \leq L_K |x(s, z, \epsilon) - z| = \epsilon O(1).$$

Así, se verifica (4.16). Por la cuarta observación, obtenemos que la hipótesis (ii) asegura la existencia de  $z_\epsilon$  tal que  $f(z_\epsilon, \epsilon) = 0$  y  $z_\epsilon \rightarrow a$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Entonces,  $\varphi(\cdot, \epsilon) = x(\cdot, z_\epsilon, \epsilon)$  es una solución periódica de (4.1) y  $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow a$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  (esto es debido a la propiedad de continuidad de las soluciones de (4.1) con respecto a un parámetro y a los datos iniciales).  $\square$

**Teorema 4.3.1** (Método de averaging de segundo orden). *Consideremos el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 F_2(t, x) + \epsilon^3 R(t, x, \epsilon), \quad (4.18)$$

donde  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones continuas,  $T$ -periódicas en la primera variable y  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que

(i)  $F_1(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(D)$  para todo  $t \in \mathbb{R}, F_1, F_2, R$  y  $D_x F_1$  son localmente lipschitzianas con respecto a  $x$ , y  $R$  es diferenciable con respecto a  $\epsilon$ .

Si definimos  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \cdot \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z)] ds \quad (4.19)$$

y suponemos además que

(ii) para un conjunto abierto y acotado  $V \subset D$  y para cada  $\epsilon \in (-\epsilon_f, \epsilon_f) \setminus \{0\}$ , existe  $a_\epsilon \in V$  tal que  $f_1(a_\epsilon) + \epsilon f_2(a_\epsilon) = 0$  y  $d_B(f_1 + \epsilon f_2, V, 0) \neq 0$ .

Entonces, para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeño existe una solución  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \epsilon)$  del sistema (4.18)

*Demostración.* La idea de la demostración es la misma que la del teorema anterior. Escribiremos, pues, las principales relaciones y omitiremos algunos detalles. Supondremos que todas las igualdades y relaciones se verifican para  $t \in [0, T], z \in \bar{V}, \epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ . Dado que el miembro derecho de (4.18) es diferenciable con respecto a  $\epsilon$ , entonces la solución  $x(t, z, \epsilon)$  tiene la misma cualidad. Por tanto, por analogía con (4.15),

$$x(t, z, \epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, z) ds + \epsilon^2 O(1),$$

y

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, \epsilon) = \int_0^t F_1(s, z) ds + \epsilon O(1).$$

Utilizando también que  $D_x F_1$  es localmente lipschitziana (y, por tanto, lipschitziana en  $[0, T] \times \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ ) obtenemos las siguientes relaciones:

$$F_1(t, x(t, z, \epsilon)) = F_1(t, z) + \epsilon D_z F_1(t, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) + \epsilon^2 O(1),$$

$$F_2(t, x(t, z, \epsilon)) = F_2(t, z) + \epsilon O(1).$$

Utilizando la notación (4.19), la función  $f$  dada por (4.10) se puede escribir para nuestro sistema como  $f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 f_2(z) + \epsilon^3 O(1)$  en  $\bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ . Aplicando el Lema (4.2.1), se concluye.  $\square$

**Observación 4.3.1.1.** El teorema 4.3.1 tiene hipótesis más débiles que su resultado análogo, el Corolario 6 de Llibre [Ll 02], o el Teorema 2.2 [Ha 03] donde  $D$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$ , en lugar de (i) se supone que

(j)  $F_1, F_2, R, D_x F_1, D_x^2 F_1, D_x F_2, D_x R$  están definidas y son continuas y acotadas en  $[0, \infty) \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ ,

y en lugar de (ii) se exige que

(jj)  $f_1(z) = 0$  para todo  $z \in D$  y para  $a \in D$ , con  $f_2(a) = 0$ , tenemos  $J_{f_2}(a) \neq 0$ .

Escribiremos el resultado del averaging de tercer orden para  $n = 1$ , aunque se verifica para sistemas de cualquier dimensión, para evitar escribir fórmulas demasiado complicadas.

**Teorema 4.3.2** (Método de averaging de tercer orden en dimensión 1). *Consideremos el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 F_2(t, x) + \epsilon^3 F_3(t, x) + \epsilon^4 R(t, x, \epsilon) \quad (4.20)$$

donde  $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas y  $T$ -periódicas en la primera variable,  $D$  es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Supongamos que

- (i)  $F_1(t, \cdot) \in \mathcal{C}^2(D)$ ,  $F_2(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(D)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2, F_3, R, D_x^2 F_1, D_x F_2$  son localmente lipschitzianas con respecto a  $x$ , y  $R$  es dos veces diferenciable con respecto a  $\epsilon$ .

Tomemos  $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por (4.19) y  $f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f_3(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(s, z) (y_1(s, z))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z) y_1(s, z) + F_3(s, z) \right] ds,$$

donde

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt, \quad y_2(s, z) = \int_0^s \left[ \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t F_1(r, z) dr + F_2(t, z) \right] dt.$$

Además, supongamos que

- (ii) Para un intervalo abierto y acotado  $V \subset D$  y para cada  $\epsilon \in (-\epsilon_f, \epsilon_f) \setminus \{0\}$  existe  $a_\epsilon \in V$  tal que  $f_1(a_\epsilon) + \epsilon f_2(a_\epsilon) + \epsilon^2 f_3(a_\epsilon) = 0$  y  $d_B(f_1 + \epsilon f_2 + \epsilon^2 f_3, V, 0) \neq 0$ .

Entonces, para  $|\epsilon| > 0$  suficientemente pequeño existe una solución  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \epsilon)$  del sistema (4.20).

*Esbozo de la demostración:* En esta ocasión tenemos que desarrollar la función  $f$  dada por (4.10) hasta el orden 3. Para ello, necesitamos de nuevo las relaciones (4.20) para las funciones  $F_2$  y  $F_3$  en lugar de  $F_1$  y, respectivamente,  $F_2$ . También, para  $F_1$  necesitamos la siguiente relación:

$$F_1(t, x(t, z, \epsilon)) = F_1(t, z) + \epsilon \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0)$$

$$+\epsilon^2 \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(t, z) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, z, 0) \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \epsilon^2}(t, z, 0) \right] \\ + \epsilon^3 O(1).$$

Observemos que

$$y_1(s, z) = \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(s, z, 0), y_2(s, z) = \frac{\partial^2 x}{\partial \epsilon^2}(s, z, 0).$$

Así,  $f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 f_2(z) + \epsilon^3 f_3(z) + \epsilon^4 O(1)$  en  $\bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$  y se concluye aplicando el Lema 4.2.1  $\square$ .

## 4.4. Método averaging vía el grado de coincidencia

La intención de esta parte es dar la idea de la demostración del Teorema 4.1.2. Para ello, necesitaremos algunos preliminares sobre la Teoría del Grado de Coincidencia que se pueden encontrar con más detalle en [Bu 00, Bu 01, GM 77].

Consideremos el sistema diferencial

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \quad (4.21)$$

donde  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones continuas,  $T$ -periódicas en la primera variable y  $D$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos  $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds. \quad (4.22)$$

Usemos la notación  $C_T = \{x \in C[0, T] : x(0) = x(T)\}$  y observemos que cualquier solución de (4.21) que está en  $C_T$  se puede extender a una solución  $T$ -periódica. Sea  $V$  un conjunto abierto y acotado tal que  $\bar{V} \subset D$ . Consideremos también el conjunto

$$\Omega = \{x \in C_T : x(t) \in V, \text{ para todo } t \in [0, T]\}$$

que es abierto y acotado en el espacio  $C_T$  con respecto a la norma del supremo. Necesitaremos también los siguientes objetos: el espacio  $C_0 = \{x \in C[0, T] : x(0) = 0\}$  con la norma del supremo, la aplicación  $L : C_T \rightarrow C_0$  definida por  $Lx(t) = x(t) - x(0)$  y el operador no lineal  $N(\cdot, \epsilon) : \bar{\Omega} \rightarrow C_0$  definido por  $N(x, \epsilon)(t) = \int_0^t [\epsilon F_1(s, x) + \epsilon^2 R(s, x, \epsilon)] ds$ . La aplicación lineal continua  $L$  es un operador de Fredholm de índice

0, *i.e.* la imagen  $\text{Im}L$  es cerrada en  $C_0$  y  $\dim \ker L = \text{codim Im}L = n < \infty$ . El operador  $N(\cdot, \epsilon)$  es completamente continuo, *i.e.* es continuo y  $N(\overline{\Omega}, \epsilon)$  es un conjunto relativamente compacto.

Observemos que el problema de encontrar una solución periódica de (4.21) se puede escribir ahora como la ecuación abstracta (llamada de tipo coincidencia)

$$Lx = N(x, \epsilon), x \in \Omega.$$

Si  $Lx \neq N(x)$  para todo  $x \in \partial\Omega$  el grado de coincidencia  $d((L, N), \Omega)$  está definido en [GM 77] (véase también [Bu 01]) como el grado de Leray–Schauder de algún operador asociado. De ahora en adelante nos referiremos al número  $d((L, N), \Omega)$  como *el grado de coincidencia del sistema* (4.21). Una de sus propiedades fundamentales es que, si es distinto de cero entonces (4.21) tiene al menos una solución en  $\Omega$ , que es, de hecho, una solución  $T$ -periódica.

El Teorema IV.2, p. 31 de [GM 77] es un teorema abstracto (resumido) del grado de coincidencia. Una consecuencia de este teorema para nuestro problema es el siguiente enunciado:

(E) Para cada  $\epsilon$  suficientemente pequeño, el grado de coincidencia del sistema (4.21) en el conjunto  $\Omega$  es igual al grado de Brouwer  $d_B(f_1, V, 0)$ .

Bajo las hipótesis del Teorema 4.1.2, para cada  $\epsilon$  suficientemente pequeño, el grado de coincidencia de (4.21) en  $\Omega$  no es cero, por tanto el sistema (4.21) tiene una solución  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \epsilon) \in \Omega$ . Como en la demostración del Teorema 4.1.1, podemos ver que, en lugar de  $V$  podemos considerar un entorno  $V_\mu \subset V$  de  $a$  tal que  $V_\mu \rightarrow a$  cuando  $\mu \rightarrow 0$ . Esto implica que el correspondiente conjunto  $\Omega_\mu$  es un entorno de la función constante  $a$  (en el espacio  $C_T$  con respecto a la norma del supremo) tal que el diámetro de  $\Omega_\mu$  es arbitrariamente pequeño cuando  $\mu \rightarrow 0$ .

Por tanto, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, el sistema (4.21) tiene una solución  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \epsilon) \in \Omega_\mu$ .

Podemos elegir soluciones tales que  $\varphi(\cdot, \epsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## 4.5. Averaging para sistemas autónomos planos. Relación con la función de desplazamiento

Consideremos el sistema plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{4.23}$$

donde  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas bajo la hipótesis

(A1) El sistema (4.23) tiene un anillo periódico alrededor del punto singular  $(0, 0)$ ,

$$\Gamma_h : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = h, h_c < h < h_s\}.$$

Aquí  $H$  es una integral primera,  $h_c$  es el nivel crítico de  $H$  correspondiente al centro  $(0, 0)$  y  $h_s$  denota el valor de  $H$  para el cual el anillo periódico termina en un políciclo separatriz.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $h_s > h_c \geq 0$ . Denotaremos por  $\mu = \mu(x, y)$  el factor integrante del sistema (4.23) correspondiente a la integral primera  $H$ .

Consideremos perturbaciones de (4.23) de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) + \epsilon p(x, y, \epsilon), \\ \dot{y} &= Q(x, y) + \epsilon q(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{4.24}$$

donde  $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas.

Vamos a proponer una forma de aplicar el método averaging para estudiar los ciclos límite de (4.24) para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, que bifurcan en  $\epsilon = 0$  de trayectorias periódicas del anillo periódico de (4.23).

Lo primero que queremos hacer es escribir el sistema (4.24) en la forma estándar para aplicar el método averaging, *i. e.* de la forma (4.1). El sistema diferencial en esta forma estándar describe la dependencia entre la raíz cuadrada de la energía,  $R = \sqrt{h}$ , y el ángulo  $\varphi$  de las coordenadas polares. El campo vectorial de esta ecuación será  $2\pi$ -periódico y sus soluciones  $2\pi$ -periódicas serán trayectorias periódicas de (4.24).

**Teorema 4.5.1.** *Supongamos que se verifica (A1) para el sistema (4.23) y que*

$$xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \text{ en el anillo periódico}\tag{4.25}$$

Sea  $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$  una función continua tal que

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (4.26)$$

para todo  $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$  y todo  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Entonces la ecuación diferencial que describe la dependencia entre la raíz cuadrada de la energía  $R = \sqrt{h}$  y el ángulo  $\varphi$  para el sistema (4.24) es

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py)}, \quad (4.27)$$

donde  $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$  e  $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$ .

Tomemos  $\epsilon_f > 0$  suficientemente pequeño y  $D = \bigcup_{h_{c*} < h < h_{s*}} \Gamma_h$ , donde  $h_c < h_{c*} < h_{s*} < h_s$  están fijados pero están arbitrariamente cercanos a  $h_c$  y  $h_s$ , respectivamente. El campo vectorial de (4.26) está bien definido y es continuo en  $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$  y es  $2\pi$ -periódico con respecto a  $\varphi$ .

*Demostración.* Necesitamos las relaciones

$$\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q$$

que son válidas en el anillo periódico, puesto que  $H$  es una integral primera y  $\mu$  es un factor integrante de (4.23). Definamos la función

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2,$$

en cada punto  $(r, \varphi)$  del anillo periódico (que es un conjunto abierto) y para cada  $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ .  $(r, \varphi)$  son las coordenadas polares. Se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\mu(x, y)}{r} (Q(x, y)x - P(x, y)y),$$

donde  $x = r \cos \varphi$  e  $y = r \sin \varphi$ . Para cada  $(r_0, \varphi_0)$  en el anillo periódico, existe  $R_0$  tal que  $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$ . La hipótesis (4.25) asegura que  $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0$ . Por el Teorema de la Función Implícita, alrededor de cada punto  $(R_0, \varphi_0)$  hay una única función continua  $\rho = \rho(R, \varphi)$  tal que se verifica la relación (4.26). Por tanto, esta función está bien definida en todo el dominio  $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$  y satisface (4.26).

La dependencia entre la raíz cuadrada de la energía y el tiempo viene dada por  $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$ , y entre el ángulo  $\varphi$  y el tiempo es  $\varphi(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ , cuando  $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h, t \in \mathbb{R}$ . Entonces tenemos

$$\dot{R} = \epsilon \frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}, \quad \dot{\varphi} = \frac{(Qx - yP) + \epsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}.$$

Eliminando el tiempo obtenemos la ecuación (4.27). La condición (4.25) implica que el campo vectorial de (4.27) está bien definido en  $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$  para  $\epsilon_f$  suficientemente pequeño. También es fácil ver que es continuo y  $2\pi$ -periódico en  $\varphi$ .  $\square$

Un importante resultado es el siguiente, que establece que la aplicación del método averaging para sistemas planos en las condiciones de esta sección es equivalente al estudio de la función de desplazamiento. En particular, el método averaging de primer orden es equivalente al estudio de la función de primer orden de Melnikov (para más detalles en este sentido, ver [Ba 54, CJ 91, CLW 94, Il 98, Zo 94]).

La demostración de este teorema es una consecuencia directa del (4.5.1) y de la definición de las funciones de desplazamiento de Melnikov.

**Teorema 4.5.2.** *La función  $f : (\sqrt{h_{c*}}, \sqrt{h_{s*}}) \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$  descrita por (4.10) para la ecuación (4.27) viene dada por*

$$f(R, \epsilon) = \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py)} d\varphi, \quad (4.28)$$

y la función  $f_1 : (\sqrt{h_{c*}}, \sqrt{h_{s*}}) \rightarrow \mathbb{R}$  descrita por (4.2) para la ecuación (4.26) es

$$f_1(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi, \quad (4.29)$$

donde  $\mu = \mu(x, y)$  es el factor integrante del sistema (4.23) correspondiente a la integral primera  $H$ , y  $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$  y  $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$ .

Además, la función (4.28) es una función de desplazamiento y (4.29) es la correspondiente función de Melnikov de primer orden del sistema (4.24).

**Ejemplo 4.5.3.** (Bifurcación de ciclos límite de centro isocrono vía averaging).

Siguiendo las notaciones utilizadas en [CJ 91] o [CS 99] el sistema diferencial cuadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2, \\ \dot{y} &= x + xy, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con un centro isocrono en el origen pertenece a la clase  $S_2$ , y una integral primera en el anillo periódico tiene la expresión  $H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2}$ . Para este sistema observemos que  $h_c = 0$ ,  $h_s = 1$ , y que la función  $\rho$  que satisface las hipótesis del Teorema 4.5.1 viene dada por  $\rho(R, \varphi) = \frac{R}{1 - R \sin \varphi}$  para todo  $0 < R < 1$  y  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

Consideremos las perturbaciones en la forma normal de Bautin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^2 + \epsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= x + xy + \epsilon q(x, y),\end{aligned}$$

donde  $p(x, y) = a_1x - a_3x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6y^2$  y  $q(x, y) = a_1y + a_2x^2 + a_4xy - a_2y^2$ . La correspondiente ecuación unidimensional (4.27) es

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \operatorname{sen} \varphi + \epsilon c(\varphi)R}, \quad (4.31)$$

donde

$$\begin{aligned}a(\varphi) &= (-2a_1 + 3a_2 + a_5) \operatorname{sen} \varphi + (a_4 + a_6) \cos \varphi \\ &\quad + (-4a_2 - a_5) \operatorname{sen}^3 \varphi + (-a_3 - a_4 - a_6) \cos^3 \varphi, \\ b(\varphi) &= a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2) \cos^2 \varphi - a_4 \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi, \\ c(\varphi) &= (a_3 + a_4) \operatorname{sen} \varphi + (-3a_2 - a_5) \cos \varphi + (-a_3 - a_4 - a_6) \operatorname{sen}^3 \varphi \\ &\quad + (4a_2 + a_5) \cos^3 \varphi.\end{aligned}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned}F_1(\varphi, R) &= \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R \operatorname{sen} \varphi}, \\ G(\varphi, R, \epsilon) &= -\frac{[a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3]c(\varphi)R}{(1 - R \operatorname{sen} \varphi)(1 - R \operatorname{sen} \varphi + \epsilon c(\varphi)R)},\end{aligned}$$

tal que (4.31) se convierte en

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon F_1(\varphi, \epsilon) + \epsilon^2 G(\varphi, R, \epsilon),$$

que es de la forma (4.1), *i.e.* la forma estándar del averaging de primer orden. Para aplicar el Teorema 4.1.1, necesitamos la función (4.2) que para nuestro problema es  $f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_1(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1z + a(\varphi)z^2 + b(\varphi)z^3}{1 - z \operatorname{sen} \varphi} d\varphi.$$

Calculamos esta integral utilizando Maple y obtenemos

$$\begin{aligned}f_1(z) &= -\frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})} [2a_2z^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)z^2\sqrt{1-z^2} - (10a_2 + 2a_5)z^2 \\ &\quad - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-z^2} + 8a_2 + 2a_5].\end{aligned}$$

Cuando tomamos la nueva variable  $\xi \in (0, 1)$  definida por  $z = \sqrt{1 - \xi^2}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{1 - \xi^2}) &= \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{1 - \xi^2})} (1 - \xi)(2a_2\xi^2 + (2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5). \end{aligned}$$

Observamos que  $z \in (0, 1)$  es un cero de  $f_1$  si y sólo si  $\xi \in (0, 1)$  es un cero de la función polinómica  $g(\xi) = 2a_2\xi^2 + c_1\xi + c_2$ , donde  $c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5$  y  $c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5$ . Es fácil ver que, en nuestra discusión sobre los ceros de  $g$  podemos considerar sus coeficientes como números reales arbitrarios. Por tanto, podemos concluir que el número de ceros de  $g$  en el intervalo  $(0, 1)$  es como mucho 2. Esto significa que el número de ceros de  $f_1$  es como mucho 2. Por tanto, como mucho dos ciclos límite bifurcan del anillo periódico del sistema (4.30).



## Capítulo 5

---

# Órbitas periódicas y $\mathcal{C}^1$ integrabilidad para el problema de Stark–Zeeman plano

---

### 5.1. Introducción

La cuestión de encontrar las órbitas periódicas y analizar la integrabilidad de sistemas dinámicos hamiltonianos de dos grados de libertad es un problema clásico frecuentemente tratado en la literatura. Recientemente, se han introducido nuevos métodos analíticos para investigar estas cuestiones para sistemas hamiltonianos cuya no integrabilidad se ha establecido vía técnicas heurísticas (ver, por ejemplo [Ko 83] o [MH 09]).

Uno de estos sistemas clásicos es el llamado sistema de Stark–Zeeman plano, que se corresponde con el movimiento de un átomo de hidrógeno bajo los efectos de un campo de microondas circularmente polarizado perturbado y un campo magnético estático ortogonal al plano de polarización del campo magnético [GG 97, GSR 01]. Este problema se ha formulado en  $\mathbb{R}^4$  con forma simpléctica  $\omega = \sum_i dP_i \wedge dQ_i$  mediante un hamiltoniano definido por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) - \frac{1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} + \epsilon\mathcal{P}(Q_1, P_1, Q_2, P_2) \quad (5.1)$$

donde  $\mathcal{P}(Q_1, P_1, Q_2, P_2) = \gamma(Q_2 P_1 - Q_1 P_2) + (\alpha Q_1 + \beta(Q_1^2 + Q_2^2))$  siendo  $\alpha, \beta$ , y  $\gamma$  tres constantes físicas no nulas relacionadas, respectivamente, con el campo de microondas circularmente polarizado y el campo magnético estático. (Para conocer más detalle sobre la deducción de estas ecuaciones hamiltonianas, véase, por ejemplo [GSR 01]).

Nuestro enfoque será estudiar la estructura periódica de un problema más general de tal manera que el hamiltoniano (5.1) sea un caso particular de éste (ver [BGVV 12]).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) - \frac{1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} + \epsilon \mathcal{P}(Q_1, P_1, Q_2, P_2) \quad (5.2)$$

donde  $\mathcal{P}$  es una función suave. Más tarde aplicaremos los resultados obtenidos al caso del sistema de Stark–Zeeman plano.

Para poder expresar nuestro resultado principal hemos de manipular el hamiltoniano general (5.2), con el fin de evitar las dificultades debidas a la colisión por la singularidad en  $(0, 0)$ , utilizaremos la regularización de Levi–Civita como sigue.

### 5.1.1. Regularización de Levi–Civita

Realicemos el cambio de variables en las posiciones dado por

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

el cambio inducido en los momentos conjugados será

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{q_1^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

con  $q_1^2 + q_2^2 = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$ . Para completar el procedimiento de regularización, es necesario reescalar el tiempo haciendo  $d\tau = \frac{4dt}{q_1^2 + q_2^2}$ . Aplicando estos cambios de

variable al hamiltoniano  $\mathcal{H}^* = \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{4}(\mathcal{H} - h)$  con energía  $h < 0$  de  $\mathcal{H}$  fijada, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = & \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{h}{2} \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \frac{1}{4} + \\ & \frac{\epsilon}{4}(q_1^2 + q_2^2) \mathcal{P}(q_1^2 - q_2^2, \frac{2(p_1 q_1 - p_2 q_2)}{q_1^2 + q_2^2} 2q_1 q_2, \frac{2(p_1 q_2 + p_2 q_1)}{q_1^2 + q_2^2}) \end{aligned}$$

y si usamos la siguiente transformación canónica

$$q_1 = 2c^{1/4}x, q_2 = 2c^{1/4}y, p_1 = 2c^{3/4}X, p_2 = 2c^{3/4}Y$$

con  $c = -\frac{h}{2}$  obtenemos el hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{II} = 4c^{3/2} \left[ \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + x^2 + y^2) - \frac{1}{16c^{3/2}} + \frac{\epsilon}{4c}(x^2 + y^2) \right. \\ \left. \mathcal{P} \left( 4c^{1/2}(x^2 - y^2), \frac{2c^{1/2}(Xx - Yy)}{x^2 + y^2}, 8c^{1/2}xy, \frac{2c^{1/2}(Xy + Yx)}{x^2 + y^2} \right) \right]$$

Reescalando  $\mathcal{H}_{II}$ , obtenemos el hamiltoniano regularizado

$$\mathcal{H}_{reg} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + x^2 + y^2) + \mathcal{P}_1(x, X, y, Y) = h^*$$

donde  $\mathcal{P}_1(x, X, y, Y)$  es de la forma

$$\frac{\epsilon}{4c}(x^2 + y^2) \mathcal{P} \left( 4c^{1/2}(x^2 - y^2), \frac{2c^{1/2}(Xx - Yy)}{x^2 + y^2}, 8c^{1/2}xy, \frac{2c^{1/2}(Xy + Yx)}{x^2 + y^2} \right)$$

y el nivel de energía fijado  $h^* = \frac{1}{16c^{3/2}}$

Las perturbaciones de (5.1) después del anterior cambio de coordenadas vienen dadas por  $\mathcal{P}_1(x, X, y, Y)$  en la forma

$$\begin{aligned} \epsilon(x^2 + y^2)(2a(yX - xY) + \frac{b}{\sqrt{c}}(x^4 - y^4) + 8c(x^2 - y^2)^2) = \\ \epsilon(x^2 + y^2)(a_1(xY - yX) + b_1(x^4 - y^4) + c_1(x^2 - y^2)^2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

con  $a_1 = 2a$ ,  $b_1 = b/\sqrt{c}$  y  $c_1 = 8c$ . Obsérvese que es un polinomio de grado 6 en las variables  $x, X, y, Y$ .

En esta parte vamos a utilizar como principal herramienta el método de averaging de primer orden para computar las órbitas periódicas de (5.2) y en particular de (5.1), véase [JL1, JL2, LR 11].

Una de las mayores dificultades que aparecen en la práctica a la hora de aplicar el método averaging es expresar el sistema en la forma normal establecida en los resultados del capítulo anterior. El uso de variables adecuadas en cada situación concreta puede simplificar mucho este proceso. De este modo, se introducen las

coordenadas polares para obtener órbitas periódicas, como se ilustra en el siguiente oscilador isotrópico de dos capas de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + x^2 + y^2) + \epsilon \mathcal{P}_1(x, X, y, Y). \quad (5.4)$$

donde  $\mathcal{P}_1$  es una función suave en las variables  $x, X, y, Y$ . Obsérvese que nuestra regularización hamiltoniana  $\mathcal{H}_{reg}$  verifica una de las hipótesis anteriores.

### 5.1.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas polares

Consideremos  $x = R_1 \cos \theta_1, X = R_1 \sin \theta_1, y = R_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), Y = R_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$  y realicemos el cambio de coordenadas estándar a la forma polar para las ecuaciones del hamiltoniano dado por

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = -x + \epsilon \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial X} & \frac{dY}{dt} &= -y + \epsilon \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = X + \epsilon \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x} & \frac{dy}{dt} &= Y + \epsilon \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si denotamos por  $f^*$  el pullback de una función suave  $f$  en las variables  $(x, X, y, Y)$  con la transformación polar, obtenemos las siguientes ecuaciones no canónicas del movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dt} &= \epsilon(\cos \theta_1 (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial X})^* - \sin \theta_1 (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x})^*) \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -1 - \epsilon \frac{1}{R_1} (\sin \theta_1 (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial X})^* + \cos \theta_1 (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x})^*) \\ \frac{dR_2}{dt} &= \epsilon(\cos(\theta_1 + \theta_2) (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y})^* - \sin(\theta_1 + \theta_2) (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y})^*) \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \epsilon(\frac{1}{R_1} (\sin \theta_1 (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial X})^* + \cos \theta_1 (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x})^*) - \\ &\quad \frac{1}{R_2} (\sin(\theta_1 + \theta_2) (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y})^* + \cos(\theta_1 + \theta_2) (\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y})^*)) \end{aligned} \quad (5.6)$$

El siguiente teorema, que juega un papel fundamental en el análisis de resultados concretos para el hamiltoniano de Stark-Zeeman Hamiltonian que presentamos más adelante muestra las órbitas periódicas del sistema de ecuaciones anterior.

**Teorema 5.1.1.** *Para  $\epsilon \neq 0$  suficientemente pequeño y el nivel de energía  $h > 0$*

fijado, si  $(R_2^*, \theta_2^*)$  es un cero de

$$\begin{cases} f_1^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y}\right)^* - \cos(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y}\right)^*) d\theta_1 = 0 \\ f_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{R_2} (\sin(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y}\right)^* + \cos(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y}\right)^*) - \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{2h - R_2^2}} (\sin\theta_1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial X}\right)^* + \cos\theta_1 \left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x}\right)^*) \right) d\theta_1 = 0 \end{cases}$$

tal que el determinante de la matriz

$$J = \frac{\partial(f_1^1, f_1^2)}{\partial(R_2', \theta_2)} \Big|_{(R_2, \theta_2) = (R_2^*, \theta_2^*)}$$

es distinto de cero, existe una solución  $2\pi$ -periódica  $\varphi(t; R_2^*, \theta_2^*, \epsilon)$  del sistema (5.6) tal que  $\varphi(t; R_2^*, \theta_2^*, \epsilon) \rightarrow (\sqrt{2h - R_2^{*2}}, 0, R_2^*, \theta_2^*)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Los valores propios de la matriz  $J$  dan la estabilidad o inestabilidad de la órbita periódica, en particular, es estable cuando los valores propios de la anterior matriz son imaginarios puros.

La estructura de que sigue para este capítulo es la siguiente. En la Sección 5.2 presentamos la demostración del Teorema 5.1.1 y en la Sección 5.3, como aplicación de dicho teorema, presentamos el estudio de la estructura periódica y la no integrabilidad en el sentido de Liouville–Arnold del problema de Stark–Zeeman plano para el átomo de hidrógeno.

## 5.2. Prueba del Teorema 5.1.1

La intención de esta sección es presentar la demostración del Teorema 5.1.1 utilizando la teoría de averaging.

*Demostración (Teorema 5.1.1).* Haciendo un cambio de variable en las ecuaciones del movimiento (5.6), obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{dR_2}{d\theta_1} &= \epsilon \frac{(\cos(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial P_1}{\partial Y}\right)^* - \sin(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)^*)}{-1 - \epsilon \frac{1}{R_1} (\sin\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial X}\right)^* + \cos\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)^*)} \\ \frac{d\theta_2}{d\theta_1} &= \frac{\frac{1}{R_1} (\sin\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial X}\right)^* + \cos\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)^*)}{-1 - \epsilon \frac{1}{R_1} (\sin\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial X}\right)^* + \cos\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)^*)} - \\ &\quad \frac{\frac{1}{R_2} (\sin(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial P_1}{\partial Y}\right)^* + \cos(\theta_1 + \theta_2) \left(\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)^*)}{-1 - \epsilon \frac{1}{R_1} (\sin\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial X}\right)^* + \cos\theta_1 \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)^*)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Utilizando la reducción isoenergética clásica (para más detalles ver Whitakker [Wh 17]), fijando la energía del sistema  $h > 0$  y pulbackeando el hamiltoniano con respecto a la transformación polar, obtenemos  $h = \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2) + \epsilon \mathcal{P}_1^*$ .

Por el teorema de la función implícita obtenemos que  $R_1 = \sqrt{2h - R_2^2} + O(\epsilon)$ . Por otra parte, desarrollando en serie del parámetro  $\epsilon$  el sistema (5.7), obtenemos las siguientes expresiones, que son la reducción del sistema diferencial (5.6) para  $\epsilon \neq 0$  suficientemente pequeño y nivel de energía fijo  $h > 0$  de  $\mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{dR_2}{d\theta_1} &= \epsilon F_{11} + O(\epsilon^2) \\ \frac{d\theta_2}{d\theta_1} &= \epsilon F_{21} + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}F_{11} &= \epsilon(\sin(\theta_1 + \theta_2)\left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y}\right)^* - \cos(\theta_1 + \theta_2)\left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y}\right)^*) \\ F_{21} &= \epsilon\left(\frac{1}{R_2}(\sin(\theta_1 + \theta_2)\left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial Y}\right)^* + \cos(\theta_1 + \theta_2)\left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial y}\right)^*) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{2h - R_2^2}}(\sin \theta_1\left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial X}\right)^* + \cos \theta_1\left(\frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial x}\right)^*)\right)\end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, la demostración del Teorema 5.1.1 es consecuencia directa de la aplicación del método de averaging de primer orden descrito en el capítulo anterior.  $\square$

### 5.3. El problema de Stark–Zeeman plano

Resumamos algunos resultados de la teoría de integrabilidad de Liouville–Arnold para sistemas hamiltonianos sobre la teoría de las órbitas periódicas de ecuaciones diferenciales (para más detalles, ver, respectivamente [AM 78] y la subsección 7.1.2 de [AKN 78]). Aquí sólo vamos a presentar estos resultados para sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad.

Un sistema hamiltoniano con hamiltoniano  $\mathcal{H}$  de dos grados de libertad se dice que es integrable en el sentido de Liouville–Arnold cuando tiene una integral primera  $\mathcal{G}$  independiente de  $\mathcal{H}$  (i.e. los vectores gradientes de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{G}$  son independientes en todos los puntos del espacio de fase, excepto quizás en un conjunto de medida de Lebesgue cero) y en involución con  $\mathcal{H}$  (i.e. el paréntesis de Poisson de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{G}$  es cero).

Un flujo definido en un subespacio del espacio de fases es completo cuando sus soluciones están definidas para todo el tiempo.

Ahora estamos preparados para enunciar el teorema de Liouville–Arnold restringido a sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad.

**Teorema 5.3.1.** (*Liouville-Arnold*). *Supongamos que un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad definido en el espacio de fases  $M$  tiene su hamiltoniano  $\mathcal{H}$  y la función  $\mathcal{G}$  como dos integrales primeras en involución. Si  $I_{hc} = \{p \in M : H(p) = h \text{ y } C(p) = c\} \neq \emptyset$  y  $(h, c)$  es un valor regular de la aplicación  $(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ , entonces se verifica:*

- (a)  $I_{hc}$  es una subvariedad bidimensional de  $M$  invariante bajo el flujo del sistema hamiltoniano.
- (b) Si el flujo en una componente conexa  $I_{hc}^*$  de  $I_{hc}$  es completo, entonces  $I_{hc}^*$  es difeomorfo o bien al toro  $S^1 \times S^1$ , o al cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ , o al plano  $\mathbb{R}^2$ . Si  $I_{hc}^*$  es compacto, entonces el flujo en él es siempre completo y  $I_{hc}^* \approx S^1 \times S^1$ .
- (c) Bajo las hipótesis de (b), el flujo en  $I_{hc}^*$  es conjugado de un flujo lineal bien en  $S^1 \times S^1$ , en  $S^1 \times \mathbb{R}$ , o en  $\mathbb{R}^2$ .

Para un sistema diferencial autónomo, uno de los multiplicadores siempre es 1 y su correspondiente vector propio es tangente a la órbita periódica.

Una órbita periódica de un sistema hamiltoniano autónomo siempre tiene dos multiplicadores iguales a 1 porque el sistema hamiltoniano es autónomo y el otro también tiene valor 1 debido a la existencia de integral primera dada por el sistema hamiltoniano.

**Teorema 5.3.2.** (*Poincaré*) *Si un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad y hamiltoniano  $H$  es integrable en el sentido de Liouville-Arnold y  $G$  es una segunda integral primera tal que los gradientes de  $H$  y  $G$  son linealmente independientes en cada punto de una órbita periódica del sistema, entonces todos los multiplicadores de esta órbita periódica son iguales a 1.*

El Teorema 5.3.2 se debe a Poincaré (véase también [Ko 83]). Proporciona una herramienta para el estudio de la no integrabilidad en el sentido de Liouville-Arnold, independientemente de la clase de diferenciabilidad de la segunda integral primera. El principal problema para aplicar este resultado en un caso negativo es encontrar órbitas periódicas que tengan multiplicadores distintos de 1.

**Teorema 5.3.3.** *En el nivel de energía  $h^*$  el problema de Stark-Zeeman plano tiene al menos dos órbitas periódicas.*

*Demostración.* Utilizando la perturbación (5.3) y promediando sobre la variable más rápida  $\theta_1$  obtenemos el sistema promediado

$$\begin{aligned} \frac{dR_2}{d\theta_1} &= \frac{\epsilon}{2} a_0 (a_0^2 + R_2^2) (a_1 + 3c_1 a_0 R_2 \sen \theta_2) \cos \theta_2 + O(\epsilon^2) \\ \frac{d\theta_2}{d\theta_1} &= \epsilon \frac{(a_0^2 + R_2^2) ((a_0^2 - R_2^2) (3a_0 c_1 R_2 \cos \theta_2 - 2a_1 \sen \theta_2) - 3a_0 R_2 (2b_1 + (a_0^2 - R_2^2) c_1))}{4a_0 R_2} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

con  $a_0^2 = 2h^* - R_2^2$  y  $a_1 = 2\gamma$ ,  $b_1 = \alpha/\sqrt{c}$ ,  $c_1 = 8\beta$  en el nivel de energía fijado  $h^*$  obtenido por la regularización de Levi-Civita.

Unas soluciones particulares del sistema

$$f_1(R_2, \theta_2) = 0$$

$$f_2(R_2, \theta_2) = 0$$

con

$$\begin{aligned} f_1^1(R_2, \theta_2) &= a_0 (a_0^2 + R_2^2) (a_1 + 3c_1 a_0 R_2 \sen \theta_2) \cos \theta_2 \\ f_2^2(R_2, \theta_2) &= \frac{(a_0^2 + R_2^2) ((a_0^2 - R_2^2) (3a_0 c_1 R_2 \cos \theta_2 - 2a_1 \sen \theta_2) - 3a_0 R_2 (2b_1 + (a_0^2 - R_2^2) c_1))}{4a_0 R_2} \end{aligned}$$

son las siguientes:

$$\begin{aligned} (R_2, \theta_2) &= (R_2^*, \frac{\pi}{2}) \\ (R_2, \theta_2) &= (R_2^*, \frac{3\pi}{2}) \end{aligned}$$

con raíz positiva  $R_2^*$ , que existe en virtud del teorema de Bolzano aplicado al polinomio de octavo grado

$$P(R_2) = A_1 R_2^8 + A_2 R_2^6 + A_3 R_2^4 + A_4 R_2^2 + A_5$$

siendo

$$\begin{aligned} A_1 &= 64c_1^2 \\ A_2 &= 16c_1(3b_1 + 16h^*c_1) \\ A_3 &= -(144h^*b_1c_1 + 9b_1^2 + 4a_1^2 + 320(h^*)^2c_1^2) \\ A_4 &= 2h^*(48h^*b_1c_1 + 9b_1^2 + 4a_1^2 + 64(h^*)^2c_1^2) \\ A_5 &= -4(h^*)^2a_1^2. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$J = \frac{\partial(f_1^1, f_1^2)}{\partial(R_2, \theta_2)} \Big|_{(R_2, \theta_2) = (R_2^*, \theta_2^*)} = \begin{pmatrix} 0 & J_{12} \\ J_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$J_{12} = 16h^* c_1 R_2^* + \frac{4(h^*)^3 a_1}{R_2^{*3} a_0}$$

$$J_{21} = -h^*(2h^* c_1 R_2^* + c_1 (R_2^*)^3 + a_1 a_0)$$

manteniendo que

$$\det(J) = -J_{12} J_{21} \neq 0.$$

Bajo estas condiciones, la demostración se sigue es mera aplicación del Teorema 5.1.1.  $\square$

Los siguientes resultados proporcionan información de la estructura periódica del problema en un ámbito más concreto.

**Corolario 5.3.3.1.** *Si el campo magnético ortogonal constante es nulo, entonces los sistemas tienen dos órbitas periódicas dadas por*

$$(R_2, \theta_2) = \left( \sqrt{\frac{3b_1 + 8h^* c_1}{8c_1}}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(R_2, \theta_2) = \left( \sqrt{\frac{3b_1 + 8h^* c_1}{8c_1}}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

*Demostración.* En este caso particular, el polinomio  $P(R_2)$  factoriza de la siguiente manera:

$$P(R_2) = R_2^2(2h^* - R_2^2)(8c_1 R_2^2 - 3b_1 - 8h^* c_1)^2$$

Las soluciones  $R_2 = 0$  y  $R_2 = \sqrt{2h^*}$  no son válidas, puesto que  $\det(J)$  no está bien definido. En las soluciones

$$(R_2, \theta_2) = \left( \sqrt{\frac{3b_1 + 8h^* c_1}{8c_1}}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(R_2, \theta_2) = \left( \sqrt{\frac{3b_1 + 8h^* c_1}{8c_1}}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

$\det(J) = \frac{h^*(9b_1 - 64h^* c_1^2)}{4} \neq 0$  para  $h^*$  suficientemente grande.  $\square$

Los resultados anteriores establecen que en cualquier nivel de energía positiva  $h^*$  existen al menos dos órbitas aisladas. Utilizaremos esta información para demostrar el segundo resultado fundamental de este capítulo: la no integrabilidad  $\mathcal{C}^1$  en el sentido de Liouville–Arnold del problema de Stark–Zeeman.

**Teorema 5.3.4.** *El problema de Stark–Zeeman plano verifica:*

- (1) *Es integrable en el sentido de Liouville–Arnold y los gradientes de las dos constantes de movimiento son linealmente independientes en algunos puntos de las órbitas periódicas encontradas en el Teorema 5.3.3.*
- (2) *No es integrable en el sentido de Liouville–Arnold con cualquier segunda integral primera de clase  $\mathcal{C}^1$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 5.3.3, sabemos que el sistema en el nivel de energía  $h^*$  tiene al menos dos soluciones periódicas correspondientes a las soluciones encontradas previamente. Sus jacobianos asociados no son nulos. Además, los correspondientes multiplicadores no son iguales a 1. Por tanto, por el Teorema 5.3.2, o bien el sistema no puede ser integrable en el sentido de Liouville–Arnold con ninguna segunda integral primera  $\mathcal{C}^1$ ,  $G$ , o el sistema es integrable en el sentido de Liouville–Arnold y el vector gradiente de  $\mathcal{H}$  y  $G$  son linealmente independientes en algunos puntos de estas órbitas periódicas, con lo que se concluye.  $\square$

# Bibliografía

- [A 04] A. Antuña, *Teorema del Muestreo Potencial Asintótico*, Universidad de Zaragoza, Tesis Doctoral, 2004.
- [AC 01] L. Agud y R.G. Catalán, *New Shannon's sampling recomposition*, Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, **56**, 45–48, 2001.
- [AGL 11a] A. Antuña, J. L. G. Guirao y M. A. López, *On an asymptotic sampling Shannon type recomposition property*, Open Journal of Discrete Mathematics, **1**, 43–49, 2011.
- [AGL 11b] A. Antuña, J. L. G. Guirao y M. A. López, *An asymptotic sampling recomposition theorem for Gaussian signals*, Mediterranean Journal of Mathematics, **8**, 347–369, 2011.
- [AKN 78] V.I. Arnold, V. V. Kozlov y A. I. Neishtadt, *Dynamical systems III (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*, Springer Verlag (Berlin), 1978.
- [AM 78] R. Abraham y J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, 1978.
- [Ba 54] N. N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Math. USSR-Sb, **100**, 397–413, 1954.
- [BFJV] C. Balsas, S. Ferrer, E. Jiménez y J. A. Vera, *Foliations of a 4-D isotropic oscillator*, Int. J. Bifur. Chaos, en prensa.
- [BG 12] T. de Bustos y J.L.G. Guirao, *Dynamics of pseudo-radioactive chemical products via sampling theory*, J. Mathematical Chemistry, **50**, 374–378, 2012.

- [BGVV 12] T. de Bustos, J.L.G. Guirao, J.A. Vera y J. Vigo-Aguiar, *Periodic orbits and  $C^1$ -integrability in the planar Start-Zeeman problem*, J. Mathematical Physics, en prensa.
- [Bi 27] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. publications, Rhode Island, (1927).
- [BLl 04] A. Buica y J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. math., **128**, 7–22, 2004.
- [Bo 72] R. P. Boas Jr., *Summation formulas and band-limited signals*, Tohoku Math. J., **24**, 121–125, 1972.
- [Br 69] R. Broucke, *Stability of periodic orbits in the elliptic restricted three body problem*, AIAA Journal, **3**, 1003–1009, 1969.
- [Br 83] F. Browder, *Fixed point theory and nonlinear problems*, Bull. Amer Math. Soc. **9**, 1–39, 1983.
- [BRS 87] P. L. Butzer, S. Ries y R. L. Stens, *Approximation of continuous and discontinuous functions by generalized sampling series*, Jour. Appr. Theo., **50**, 25–39, 1987.
- [BS 92] P. L. Butzer y R. L. Stens, *Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview*, SIAM review, **34**, 40–53, 1992.
- [Bu 00] A. Buica, *Contributions to coincidence degree theory of homogeneous operators*, Pure Math. Appl., **11**, 153–159, 2000.
- [Bu 01] A. Buica, *Principii de coincidentasi aplicatii (Coincidence Principles and Applications)*, Presa Universitara Clujean a, Cluj-Napoca, 2001.
- [CJ 91] C. Chicone y M. Jacobs, *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones*, J. Differential Equations **91**, 268–326, 1991.
- [CLW 94] S. N. Chow, C. Li y D. Wang, *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge University Press, 1994.
- [CS 99] J. Chavarriga y M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **1**, 1–70, 1999.

- [Di 72] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Cahiers Scientifiques, Fas. XX-VIII, Gauthier-Villars Editeur, 1972.
- [Du 18] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, Braunschweig: F. Vieweg, **VI**, 1918.
- [ESD 90] J.A. Ellison, A.W Sáenz y H.S. Dumas, *Improved  $n$ th order averaging theory for periodic systems*, J. Differential Equations **84**, 383–403, 1990.
- [FT] S. Ferrer y E. Tresaco, *Some ring-shaped potentials as generalized 4-D isotropic oscillator*, Celestial Mechanics y Dynamical Astronomy, in press.
- [GG 97] K. Ganesan y R. Gebarowski, *Chaos in the hydrogen atom interacting with external fields*, Pramana Journal of Physics, **48(2)**, 379–410, 1997.
- [GM 77] R.E. Gaines y J. Mawhm, *The coincidence degree and nonlinear differential equations*, Lecture Notes Mathematics, vol. **568**, Springer, Berlín, 1977.
- [GSR 01] A.A. Gusev, V.N. Samoilov y V.A. Rostovtsev, *Algebraic perturbation theory for a hydrogen atom in weak electric fields*, Programming and Computing Software, **27(1)**, 18–21, 2001.
- [Gu 94] J. A. Gubner, *A new series for approximating Voight functions*, Jour. Phys. A: Math., **27**, 1745-1749, 1994.
- [GV 11] J. L. G. Guirao y J. A. Vera, *On the generalized Hartmann model for the benzene molecule*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **66(1)**, 177–204, 2011.
- [Ha 72] H. Hartmann, *Die Bewegung eines Körpers in einen ringförmigen potentialfeld*, Theoret. Chim. Acta, **24**, 201–206, 1972.
- [Ha 03] Hartono, A.H.P van der Burgh, *Higher order averaging: periodic solutions, linear systems and applications*, Nonlinear Anal. **52**, 1727-1744, 2003.

- [Il 98] I.D. Iliev, *Perturbations of quadratic centers*, Bull. Sci. Math. **122**, 107–161, 1998.
- [JL1] L. Jiménez–Lara y J. Llibre, *Periodic orbits and non-Integrability of Henon-Heiles system*, to appear in J. Physics A: Maths. Gen.
- [JL2] L. Jiménez–Lara y J. Llibre, *Periodic orbits and non integrability of generalized classical Yang–Mills Hamiltonian system*, to appear in J. Math. Phys.
- [KN 84] M. Kibler y T. Negadi, *Motion of a particle in a ring–shape potential: an approach via nonbijective canonical transformations*, Int. J. Quantum Chemistry, **26**, 405–410, 1984.
- [Ko 83] V.V. Kozlov, *Integrability and non integrability in Hamiltonian mechanics*, Russian Math. Surveys, **38(1)**, 1–76, 1983.
- [Ll 02] J. Llibre, *Averaging theory and limit cycles for quadratic systems*, Radovi Mat., **11**, 1–14, 2002.
- [Llo 78] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [LP 61] H. J. Landau y H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions. Fourier analysis and uncertainty II*, Bell. Sys. Tech. Jour., **40(1)**, 65–84, 1961.
- [LP 01] J. Llibre, J. S. Pérez del Río y J.A. Rodríguez, *Averaging analysis of a perturbed quadratic center*, Nonlinear Anal. **46**, 45–51, 2001.
- [LR 11] J. Llibre y L.A.Roberto, *Periodic orbits and non integrability of Armbruster–Guckenheimer–Kim potential*. Preprint, 2011.
- [LTV 01] J. Llibre, A. Teruel, C. Valls y A. de la Fuente, *Phase portraits of the two–body problem with Manev potential*, J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 1919–1934, 2001.
- [LY 75] T. Y. Li y J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Month., **82**, 985–992, 1975.
- [M 76] R. May, *Simple Mathematical models with a very complicated dynamics*, Nature, **261**, 459–467, 1976.

- [Me 97] D. R. Merkin, *Introduction to the theory of the stability*, Springer Verlag, 1997.
- [MH 09] K. R. Meyer y G. R. Hill, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the b-body problem*, Applied Math. Sci. **90**, Second Edition, Springer, 2009.
- [Mi 60] D. Middleton, *An introduction to statistical communication theory*, McGraw–Hill, New York, (1960).
- [MJ 86] F. Marvasti y A. K. Jain, *Zero crossings bandwidth compression, and restoration of nonlinearly distorted bandlimited signals*, J. Optical Soc. Amer., **3**, 651–654, 1986.
- [MNSVW 67] A. A. Makarov, J. A. Smorodinsky, Kh. Valiev y P. Winternitz, *A Systematic Search for Nonrelativistic Systems with Dynamical Symmetries*, Nuovo Cimento A, **52**, 1061, 1967.
- [Mos 62] J. Moser, *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys., Kl. **2**, 1–20, 1962.
- [MSS 73] N. Metropolis, M.L. Stein y P.R. Stein, *On finite limit sets for transformations on the unit interval*, J. Comb. Theory, **15**, (1973), 25-44.
- [My 63] P.J. Myrberg, *Iteration der Reellen Polynome Zweiten Grades III*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **336**, 1–20, 1963.
- [My 65] P.J. Myrberg, *Iteration der Polynome mit reellen Koeffizienten*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **374**, 1–17, 1965.
- [NS 49] V.V. Nemytskii y V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton University Press: Princeton, (Russian original, Moscow, 1949).
- [Sh 49] C. E. Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proc. IRE, **137**, 10–21, 1949.
- [Sm 65] S. Smale, *Diffeomorphism with many periodic points, differential and combinatorial topology*, S.S. Cairns, (1965), 63-80.

- [Sm 67] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, (1967), 774-817.
- [St 77] P. Stefan, *A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphism of the real line*, Commun. Math. Phys., **54**, 237–248, 1977.
- [SV 85] J.A. Sanders y F. Verhulst, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Appl. Math. Sci., **59**, Springer, 1985.
- [V 27] B. Van der Pool, *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance*, London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag, **3**, 109–123, 1927.
- [Ve 91] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [Wh 15] E. T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **35**, 181–194, 1915.
- [Wh 17] E. T. Whittaker, *A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1917.
- [Za 93] A. I. Zayed, *Advances in Shannon's sampling theory*, Ed. CRC Press, 1993.
- [Zo 94] H. Zoladek, *Quadratic systems with center and their perturbations*, J. Differential Equations, **109**, 223-273 (1994).