



**VNiVERSIDAD
D SALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física Aplicada

Trabajo de *Grado de Salamanca*

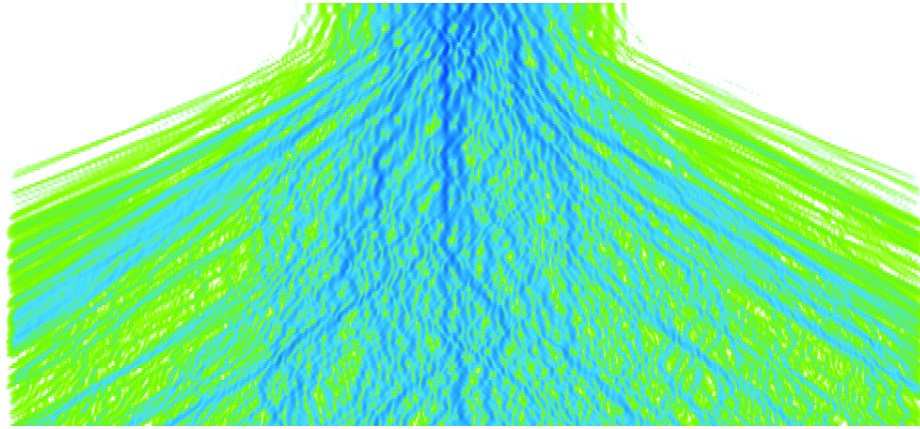
**LOCALIZACIÓN DE ANDERSON
E HIPERTRANSPORTE
TRANSVERSALES DE LA LUZ**

Andrés García Ruiz

Dirigido por:

Luis Plaja Rustein

Julio San Román Álvarez de Lara



LOCALIZACIÓN DE ANDERSON
E HIPERTRANSPORTE
TRANSVERSALES DE LA LUZ

Trabajo de *Grado de Salamanca*
Universidad de Salamanca

Andrés García Ruiz

(GRAndres1989@gmail.com)

Salamanca — Julio de 2014



**VNiVERSIDAD
DSALAMANCA**

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

D. Luis Plaja Rustein y D. Julio San Román Álvarez de Lara, Doctores en la Universidad de Salamanca,

CERTIFICAN:

que el presente Trabajo de *Grado de Salamanca*, titulado ***Localización de Anderson e hipertransporte transversales de la luz*** y presentado por **D. Andrés García Ruiz**, con NIF 70892345 – C, ha sido realizado bajo su dirección.

En Salamanca, a día 7 de julio de 2014,

Fdo. Luis Plaja Rustein

Fdo. Julio San Román Álvarez
de Lara

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Andrés García Ruiz'.

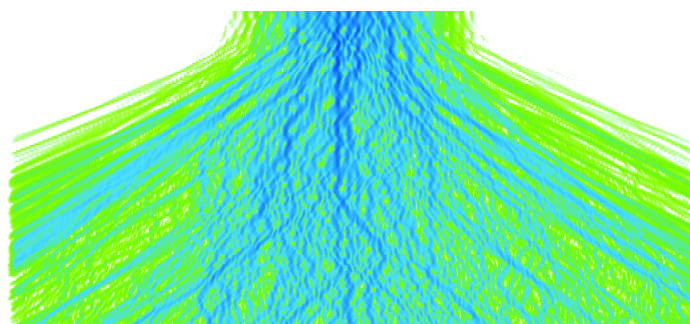
Fdo. Andrés García Ruiz



Agradecimientos

A mis supervisores, Luis y Julio, por sus tiempos, paciencias, y sugerencias imprescindibles; a Isabel por animarme a empezar este trabajo y a la *alegre* gente de *El Fotón Charro* en general, que me ha acogido como uno más; a mi familia y a todos los que más de cerca me rodean.

Muchas gracias.



Contenidos

1. Trayectoria y actualidad del problema	1
2. Modelo utilizado	8
2.1. Ecuación de ondas	8
2.2. Ecuación de ondas para funciones cilíndricamente simétricas .	10
2.3. Resolución numérica	11
2.3.1. Parametrización del índice de refracción	12
2.3.2. Control de reflexiones transversales	13
3. Regímenes y herramientas	14
3.1. Perfiles de índice estudiados	14
3.1.1. Difracción libre o balística	14
3.1.2. Cristal fotónico	15
3.1.3. Índice de refracción con aleatoriedad	16
3.1.4. Índice de refracción con aleatoriedad variable en z . . .	18
3.1.5. Extensión a <i>dos dimensiones</i> con índice cilíndrico . . .	19

3.2. Parámetros y herramientas desarrolladas	20
3.2.1. Caracterización de la anchura del haz	21
3.2.2. Estudio modal de la propagación	22
4. Resultados	25
4.1. Sistema <i>unidimensional</i>	25
4.1.1. Difracción libre o balística	26
4.1.2. Cristal fotónico	27
4.1.3. Índice de refracción con aleatoriedad	29
4.1.4. Índice de refracción con aleatoriedad variable en z	32
4.1.5. Anchuras comparadas	37
4.1.6. Estudio modal de la propagación <i>unidimensional</i>	39
4.2. Sistema <i>bidimensional</i> con índice cilíndricamente simétrico	49
4.2.1. Difracción libre o balística	50
4.2.2. Índice de refracción con <i>periodicidad</i> radial	53
4.2.3. Índice de refracción con aleatoriedad radial	57
4.2.4. Índice de refracción con aleatoriedad radial variable en z	62
4.3. Comparación entre diferentes sistemas <i>1D</i> y <i>2D</i>	67
5. Conclusiones	70
5.1. Perspectivas y cuestiones abiertas	71
5.1.1. Comprobación experimental	72
5.2. Posibles aplicaciones	73
Apéndices: Contenido del disco adjunto	74
A.1. Código de propagación	74
A.2. Código de diagonalización y proyección	74
Referencias	75

“*As with most things in life, some **disorder** can cause unexpected **new phenomena**.*”

— Cefe López

1. Trayectoria y actualidad del problema

Cuando un paquete de electrones se deja evolucionar libremente, incluso si se encuentra inmerso en un potencial cristalino, se observa un proceso de difusión por el cual su densidad de probabilidad se expande ocupando todo el espacio disponible. Algo similar sucede con cualquier sistema que responda a una ecuación de ondas, por ejemplo un haz de luz que se esté propagando por un medio de índice de refracción homogéneo o con variaciones periódicas en la dirección transversal al haz: la difracción hace que éste diverja y que la distribución transversal de su intensidad se expanda.

En este trabajo se explora una serie de *fenómenos de transporte* que emergen cuando una onda está inmersa en una red periódica cuyas simetrías se ven perturbadas de forma aleatoria. Existen entonces, en función de la dimensionalidad¹⁸, la configuración y características de la red o la intensidad y correlación del desorden^{14,18}, distintos regímenes de transporte cualitativamente opuestos. Entre ellos se encuentran la *localización de Anderson*, en la que no hay difusión, la *localización débil*, en la que la difusión es más lenta que en ausencia de desorden (*subdifusión*), y el *hipertransporte*, donde la difusión es más rápida que la libre o balística. La *transición de fase* entre estos regímenes no siempre está bien definida, ya que depende fuertemente del tipo de sistema (pues por ejemplo en un cristal hay variables que no

existen de forma natural en otros sistemas, como la temperatura) y de su dimensionalidad.

El hecho de que las diferencias entre los sistemas que presentan estos fenómenos frente a aquellos en los que se observa la difusión convencional sea tan difícil de caracterizar cuantitativamente, junto con las complicaciones y tardanza de su observación y estudio, dan cierto misterio a la *localización de Anderson* y al *hipertransporte* convirtiéndolos en fenómenos de especial interés.

La idea de la *localización de Anderson* fue dada a conocer en el ámbito del estado sólido en 1958 por Philip W. Anderson¹. Su propuesta parte del modelo de red cristalina cuya periodicidad establece la dinámica de los electrones como *estados de Bloch*, que son extensos, y donde el *scattering* es debido sólo a la presencia de impurezas. Un cristal en el que el potencial de cada sitio de red sea diferente, en su posición o amplitud, puede considerarse un medio cristalino con impurezas, en el que cabe esperar que el transporte se vea dificultado. Si el desorden es suficientemente grande esto debería de suceder, de hecho, hasta la completa detención de la difusión. Es precisamente a este límite de los casos *subdifusivos* a lo que se llama *localización de Anderson*. En esta situación *casi todo* estado pasa a ser localizado y conviene describir la propagación en términos de estados ligados localizados y no según *estados de Bloch*^{22,33}.

El primer modelo que se presentó para entender la *localización de Anderson* era uno de tipo *Tight-Binding* (TB) con desorden aleatorio añadido en la intensidad de cada pozo. Si este desorden es lo suficientemente débil, la probabilidad de que los electrones pasen a un primer vecino por efecto túnel es la misma para cualquiera de estos vecinos. Así, al sumar las amplitudes de los múltiples caminos que puede seguir un electrón a partir de un pozo concreto, se da el fenómeno de *backscattering coherente*. Éste consiste en que, debido al desorden, la mayoría de los diferentes caminos del electrón interfieren destructivamente, ya que la fase adquirida en cada camino también es aleatoria. Sin embargo, esto no ocurre para los caminos en los que el

electrón retorna a su origen (*loops* de *backscattering*), en los que las posibles maneras de realizar el *loop* (en sentido *horario* o *antihorario*) interfieren constructivamente, aumentando la probabilidad de dicho camino en un factor dos. Esta interferencia constructiva privilegia los *loops*, lo que justifica la *localización débil*, especialmente en una dimensión, donde siempre se da este *backscattering*^{21,22}. La *localización débil* suele presentarse como el *precursor* de la *localización de Anderson*, que sucede cuando el desorden es más intenso. Mientras que en el caso periódico los estados TB tienen una longitud característica del orden de la constante de red, en el caso desordenado los estados localizados se extienden sobre regiones espaciales mayores.

La base teórica que ha ido permitiendo comprender la *localización de Anderson* ha sido lentamente desarrollada desde que apareció este modelo inicial. En el momento en que se propuso la existencia del fenómeno la repercusión fue mínima, mientras que hoy acumula más de 4000 citas²². Desde entonces se han ido explorando numerosas vías para obtener una teoría sólida, yendo desde la dependencia de la difusión con la escala²¹ hasta modelos de *billares dinámicos* cuánticos³³.

En los años 60 del pasado siglo, Nevill Mott²⁶ estudió la presencia de la *frontera de movilidad* que separa estados extensos de localizados. Llegó a la conclusión de que los estados de alta energía se comportan de forma análoga a los estados de Bloch (deslocalizados), salvo aquellos con energías entorno a los bordes de banda, que implican longitudes de onda de de Broglie largas y se muestran poco extensos.

Hoy se tiene una visión completa de la localización en sistemas unidimensionales basada en teoría de matrices aleatorias, pero para sistemas de más dimensiones el problema es más complicado, por la dificultad de incluir los *loops* entre los posibles múltiples caminos. No fue hasta 1974 cuando David Thouless, en lo que sería la contribución más importante después de la del descubrimiento del fenómeno de la localización, consiguió resolverlo³². Su modelo resolvió el problema por primera vez, aunque no era completo, lo que destaca la falta de una verdadera comprensión del fondo del fenómeno y

justifica toda la producción en investigación existente²². El valor crítico de desorden necesario para que se produzca la localización depende del número de primeros vecinos de los sitios de red, lo que justifica la mayor dificultad y diferencias en la forma de la transición para dimensiones altas.

La sensibilidad a las condiciones de contorno llevó después a un replanteamiento del fenómeno en términos del grupo de renormalización, llevando a la aparición de la *Scaling Theory of Localization*^{18,21} como se conoce en el campo de sistemas complejos y fenómenos colectivos. Éste es el modelo hoy establecido, y da una idea intuitiva, aunque cualitativa, de cómo aparece la transición de fase en sistemas finitos. Se basa en la dependencia de la conductividad, constante de difusión, etc. con el tamaño del sistema cerca de la frontera de movilidad. La formulación principal usa un único parámetro para determinar estas dependencias con la escala, y corresponde a la relación entre el tiempo que el paquete tarda en alcanzar la frontera del material (*tiempo de Thouless*) y el tiempo máximo que tarda en volver a una zona en la que estuvo previamente (*tiempo de Heisenberg*), de forma que si el primero supera al segundo se da la localización.

Algunos de los modelos más intuitivos, como el *random walk* Browniano^{10,33} y la interferencia de caminos entre centros de dispersión inspiran la aplicación también a ondas en sistemas clásicos. De hecho ejemplos cercanos de situaciones donde el *scattering* múltiple origina una respuesta macroscópica opuesta a la microscópica son muy comunes en el campo de la óptica cotidiana. Algunos ejemplos podrían ser un montón de azúcar, la nieve o una nube, que resultan opacos mientras sus granos o gotas son transparentes. De hecho el propio Anderson ha utilizado la idea de localización para explicar el aspecto de la pintura blanca². Esto ha generado también investigación tanto experimental como teórica de localización *completa* de luz en cristales fotónicos y medios difusos de tres dimensiones^{19,31}.

Puesto que se trata de un fenómeno puramente ondulatorio, la *localización de Anderson* aparece en sistemas muy diversos, en distintas áreas de la física: condensados de Bose-Einstein en redes ópticas (en *cuasi-1D*^{7,27} y

en 3D^{8,31}), plasmas, sonido^{22,23}, observándose incluso en ondas superficiales en agua²¹, así como en sistemas ópticos diversos^{18,31}, o en super-redes, tanto ópticas^{5,25} como de semiconductores^{4,14,15}, donde se estudia la localización en *cuasi-1D* en términos de las medidas «externas» de transmisión o conductividad a lo largo de una pila de películas de materiales de distintas propiedades ópticas o electrónicas.

El punto de vista considerado en este trabajo es el de explorar la localización transversal de la luz en un sistema óptico consistente en un haz monocromático propagándose linealmente por un medio cuyo índice de refracción varía de forma aleatoria, o periódica pero con variaciones aleatorias, en la dirección transversal a la de la propagación. Este escenario tiene algunas ventajas experimentales frente a los otros planteamientos: permite el seguimiento de la distribución de probabilidad a nivel microscópico y no sólo el de parámetros «externos» o macroscópicos de transporte, manteniendo además el control sobre las características del potencial (en el caso de la luz, sobre el índice de refracción) y de su evolución³⁰, aparte de evitar los efectos análogos a la interacción electrón-electrón, electrón-fonón, que dificultan la observación experimental de la localización en cristales. También se ha usado previamente para estudiar cómo afectan las interacciones no lineales a la localización²⁹, que es un problema de la física del estado sólido que, en la actualidad, permanece sin resolver³⁰, y otros problemas de interés en esta disciplina que así se simplifican. Por otro lado, la restricción a dos dimensiones no permite observar fenómenos que dependan fuertemente de la dimensionalidad del sistema, como las transiciones de fase entre situaciones de alta y baja conductividad debida a localización, mejor definidas en tres dimensiones^{22,30}.

El caso opuesto a la localización, el del *hipertransporte*, sucede cuando la distribución aleatoria de índice de refracción sufre variaciones también aleatorias en la dirección de propagación. En el caso electrónico esto equivale a un potencial que evoluciona en el tiempo. En estas condiciones el haz de luz sufre un ensanchamiento más rápido que el que ocurriría si el medio tuviera un índice homogéneo. No cualquier variación en z del perfil de índice de refracción da lugar a este comportamiento, y de hecho en los electrones en sistemas

cristalinos no se observa el *hipertransporte* de forma espontánea a pesar de las oscilaciones térmicas del potencial. Esto hace que sea un fenómeno aún más difícil de observar en electrones que la localización, por lo que sólo se ha empezado a conocer de forma más reciente en los experimentos con luz y no para electrones. En el espacio de los momentos transversales, durante el *hipertransporte*, la anchura del paquete de ondas también crece durante la propagación, mientras que en los casos de localización y difracción libre se estabiliza.²³

Al tratarse de un estudio de sistemas con ciertos parámetros aleatorios, la observación y análisis de la *localización de Anderson* y del *hipertransporte* se realiza normalmente sobre conjuntos estadísticos o *ensembles* de propagaciones entre las que se mantienen todos los parámetros excepto los valores aleatorios del índice, extrayendo finalmente las conclusiones sobre el promedio de las diferentes realizaciones (representado en este trabajo por $\langle \rangle$). A pesar de ello, a menudo es posible trabajar sobre realizaciones individuales cuando la componente aleatoria es lo suficientemente intensa y el sistema lo suficientemente grande (macroscópico)²¹, de forma que cada realización sea bastante representativa. Esto se denomina capacidad de *auto-promediado* (*self-averaging*) en la bibliografía de sistemas desordenados.

En el ámbito de la analogía óptica existen también algunos resultados e incluso patentes sobre la aplicación tecnológica del fenómeno de la localización en fibras con distribuciones transversales binarias de índice¹², donde hay una *verdadera* o *total* aleatoriedad bidimensional. Sin embargo, no hemos encontrado que se haya investigado hasta ahora el fenómeno de la localización y el *hipertransporte* en sistemas de dos dimensiones transversales con simetría cilíndrica y con desorden. Este tipo de escenario puede presentarse en *fibras multi-capa* de estas características, por lo que explorar este terreno ha sido una de las principales motivaciones de este trabajo.

Hay esperanzas en que el conocimiento de los fenómenos de *scattering* múltiple en general podrá generar numerosas aplicaciones en diferentes ámbitos, y ya resulta muy importante en algunos como el de la medicina

(imagen-diagnóstico), y el estudio de la hidrodinámica de coloides, suspensiones y otros fluidos complejos¹⁸.



“*Order is never observed; it is **disorder** that **attracts** attention because it is awkward and intrusive.*”

— Eliphaz Levi

2. Modelo utilizado

2.1. Ecuación de ondas

El modelo teórico utilizado para realizar las simulaciones se obtiene al aplicar a la ecuación de ondas ciertas aproximaciones usuales en el estudio de la propagación de haces. Consideramos la propagación entorno al eje z de un haz monocromático de longitud de onda λ , y factorizamos la amplitud del campo eléctrico de la siguiente manera:

$$E(x, y, z, t) = \Re \left[\Psi(x, y, z, t) e^{i(k_z z - \omega t)} \right], \quad (1)$$

siendo $k_z = 2\pi n_0 / \lambda$, n_0 el índice de refracción del medio (*bulk index*) y donde \Re denota la parte real. Aplicando la aproximación paraxial ($|k_z| \gg |k_x|, |k_y|$), por la cual se restringe a la luz a propagarse en direcciones que formen ángulos lo suficientemente pequeños con el eje longitudinal, así como la aproximación de *envolvente lentamente variable* (*Slowly Varying Envelope Approximation*, *SVEA*^{9,12}) en relación con las escalas longitudinal y temporal de la portadora,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right| &\ll \left| k_z \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|, \\ \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right| &\ll \left| \omega \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|, \end{aligned} \quad (2)$$

la ecuación de ondas toma la forma:

$$i \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} = \left[-\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 - \frac{k}{n_0} \Delta n(x, y, z) \right] \Psi(x, y, z) \equiv \hat{\mathcal{H}} \Psi(x, y, z), \quad (3)$$

donde $-\frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2$ representa la difracción de la luz y $\Delta n(x, y, z)$ es el *exceso* local de índice de refracción que puede añadirse sobre n_0 (y que tendrá que variar de forma suficientemente lenta en el plano transversal para mantener la paraxialidad del haz). Llamaremos $\hat{\mathcal{H}}$ al operador de propagación.

Se puede ver aquí la analogía que motiva el uso de este tipo de sistemas ópticos para el estudio de la *localización de Anderson*, al resultar la ecuación (3) formalmente equivalente a la de Schrödinger: el operador de propagación $\hat{\mathcal{H}}$ se identifica con el Hamiltoniano, la envolvente (transversal) con la función de onda, la distancia de propagación sustituye al tiempo, el término con $\Delta n(x, y, z)$ sustituye al potencial, y el momento k se identifica con la masa^{23,29}. Estos paralelismos a menudo llevan a utilizar términos de uno y otro ámbitos indistintamente. Debe tenerse en cuenta que la ecuación (3) sólo permite la descripción de propagaciones en un sólo sentido (sin reflexiones), por lo que el modelo no representa la posibilidad de *backscattering* longitudinal. Por esto es necesario evitar variaciones bruscas en z en el término $\Delta n(x, y, z)$ planteado, ya que esto sí originaría dichas reflexiones en el sistema real, y no sería coherente con la aplicación de la aproximación *SVEA*.

El operador de propagación $\hat{\mathcal{H}}$ para un sistema con una sola dimensión transversal (*unidimensional*) es simplemente

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k}{n_0} \Delta n(x, z). \quad (4)$$

En un sistema con dos dimensiones transversales, y utilizando coordenadas cilíndricas (adaptadas a la simetría de nuestro problema), hay que considerar el operador

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - \frac{k}{n_0} \Delta n(\rho, \phi, z). \quad (5)$$

2.2. Ecuación de ondas para funciones cilíndricamente simétricas

Asumiendo la simetría cilíndrica de Δn y Ψ y aplicándola a la ecuación (5), el término de la derivada en ϕ desaparece y sólo hay un término, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$, que la diferencia de la ecuación *unidimensional*, manteniéndose además la dependencia en una sola variable transversal, por lo que se trata de una situación *pseudo-unidimensional*. Esto representa una ventaja de este sistema frente al de dos dimensiones *completas* a la hora de realizar su estudio numérico.

Por otro lado, podría esperarse que no fuese posible simular con ello una estructura de tipo *vórtice*, i.e. un estado con momento angular no nulo, al tener éstos una fase que depende del ángulo polar. Estos vórtices se pueden expresar en términos del conjunto completo de los *modos de Laguerre-Gauss*, y su forma es la siguiente²⁸

$$\Psi_{\ell p}(\rho, \phi, z=0) \propto \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w_0} \right)^{|\ell|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) L_p^{|\ell|} \left(\frac{2\rho^2}{w_0^2} \right) \exp(i\ell\phi). \quad (6)$$

Aquí $w_0 = 2\sigma$ y $L_p^{|\ell|}$ es el *polinomio generalizado de Laguerre* (siendo para $\ell=0$ el *polinomio de Laguerre* de orden p). Físicamente p caracteriza la estructura radial del haz (el número de máximos de intensidad), y ℓ corresponde al número de excitaciones angulares (número cuántico de momento angular, número de modo angular, o *carga topológica* del vórtice), representando el número de ciclos 2π que varía la fase del campo con cada vuelta completa de ϕ .

Se puede ver entonces que, al considerarse sólo perfiles de índice de refracción también con simetría de revolución $\Delta n = \Delta n(\rho, z)$, el momento angular se verá conservado durante la propagación, por lo que es de esperar que la coordenada azimutal ϕ no juegue ningún papel fundamental en esta evolución, haciendo que los vórtices no sean incompatibles con la dimensión reducida del modelo. Efectivamente se ve que se salva el impedimento sin más que factorizar los modos dados en la ecuación (6) como

$$\Psi_{\ell p}(\rho, \phi, z=0) = \tilde{\Psi}(\rho) \exp(i\ell\phi), \quad (7)$$

de forma que cuando el operador de propagación completo de la ecuación (5) actúa sobre la función de onda se tiene una ecuación de evolución

$$i \frac{\partial \Psi_{\ell p}}{\partial z} = \left[-\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) - \frac{k}{n_0} \widetilde{\Delta n}(\rho, z) \right] \Psi_{\ell p}, \quad (8)$$

donde se puede considerar un *exceso* local de índice efectivo,

$$\widetilde{\Delta n}(\rho, z) = \Delta n(\rho, z) - \frac{n_0 \ell^2}{k \rho^2}, \quad (9)$$

que lleva dentro la contribución de una *barrera centrífuga* que permite emular el efecto que tiene el momento angular de un vórtice sobre la evolución de su envolvente, haciendo posible por tanto implementarlo en nuestro modelo y simular su propagación a través de este tipo de medios.

2.3. Resolución numérica

El método numérico elegido para resolver estas ecuaciones, con las restricciones indicadas, es el método de *Crank-Nicolson*, frecuentemente utilizado para resolver problemas difusivos. Este método de diferencias finitas se basa en la resolución del sistema tridiagonal al que se reduce la ecuación discreta de propagación para cada *paso* en z . Su convergencia y estabilidad ocurre cuando

$$\frac{\Delta z}{4k\Delta\rho^2} < \frac{1}{4}.$$

A pesar de esto queda libre el valor concreto de la resolución transversal, que dependerá también de cuán pronunciadas sean las variaciones del perfil de índice de refracción probado, y habrá que comprobar en cada caso que el resultado ha convergido.

Los estados iniciales utilizados en el estudio son principalmente perfiles gaussianos y de Laguerre-Gauss en el caso *bidimensional*, manteniendo controladas siempre las condiciones de contorno adecuadas en cada caso, de forma que en los extremos del espacio transversal considerado la envolvente se anule salvo para $\rho=0$ en el caso cilíndrico, donde ésta debe tomar pendiente nula.

2.3.1. Parametrización del índice de refracción

El índice de refracción se encuentra definido en función de una serie de parámetros, los cuales pueden servir para incorporar el ruido aleatorio necesario para observar la localización y el *hipertransporte*. Si el índice de refracción del medio por el que se realiza la propagación es $n_0 + \Delta n(x, y, z)$, $\Delta n(x, y, z)$ representa sus variaciones locales y será el que contenga tanto un fondo periódico formado por «picos» de envolvente gaussiana, si es el caso, como el ruido. A continuación se exponen los parámetros utilizados en este trabajo.

- Periodicidad y anchura de los picos de índice.

Vienen dadas por la distancia transversal entre los máximos de dos picos contiguos y por la *anchura total a altura mitad (FWHM)*, respectivamente.

- Amplitud o *intensidad* de los picos.

Se especificará el valor máximo que tome el término $\Delta n(x, y, z)$ a lo largo de la dimensión transversal o radial (en cada realización de la propagación).

- Nivel de desorden.

La forma de definir un *nivel de desorden* que dé cuenta de la magnitud de la componente aleatoria usada en este trabajo es análoga a la que se utiliza para medir ésta experimentalmente cuando se construye este tipo de sistemas ópticos mediante el procedimiento de *fotoinducción*^{23,29}. La técnica se basa en el uso de un material *fotorrefractivo* en el que es posible lograr un perfil de índice a medida al hacer incidir en él un láser (de la longitud de onda adecuada) cuyo perfil de intensidad sea el que se desea tener en el índice que sentirá el haz prueba (cuya longitud de onda es otra). Así es posible cuantificar el nivel de desorden del sistema sin más que medir el ratio entre las intensidades totales de los dos haces inductores utilizados: uno con un perfil periódico y otro con un perfil de ruido aleatorio. En nuestro estudio caracterizamos el nivel de desorden dando la fracción (%) de la amplitud de la componente aleatoria de Δn frente a la de la periódica.

- Modulación en z .

Para hacer variar el índice de refracción en z de manera controlada se generan, para cada pico, seis parámetros que determinan sus variaciones sinusoidales en amplitud y posición transversal. Para cada una de ellas se define la amplitud, el periodo o longitud característica de evolución y la fase inicial de las oscilaciones, y se evalúan aleatoriamente en cada realización, siempre dentro de unos rangos que permitan obtener la dinámica deseada en el haz prueba.

2.3.2. Control de reflexiones transversales

En la simulación se han tomado condiciones de contorno totalmente reflectantes, forzando a que la amplitud de la envolvente del campo (Ψ) sea nula en los extremos del medio material. Esto significa que cuando la luz alcanza el final de la ventana transversal se introducen reflexiones artificiales en la dinámica. Hay dos soluciones para minimizar este error: hacer que la ventana sea suficientemente grande para que no se lleguen a alcanzar los extremos, lo que supone aumentar el número de puntos en el cálculo; o implementar absorbentes artificiales que atenúen la cantidad de luz reflejada.

En nuestro caso se ha optado por añadir una máscara espacial absorbente definida con la función $|\cos(\alpha)|^{1/8}$ con α entre 0 y $\pi/2$ aplicada en un $\sim 5\%$ de la ventana y que multiplica a Ψ en cada *paso* en z . Esto atenúa el haz ahí permitiendo reducir la reflexión lateral y monitorizar además la cantidad de luz que llega a los bordes en cada caso.

Debido a esta absorción es necesario comprobar el efecto que la pérdida de población total pueda tener sobre las medidas.

“Order and disorder” — said
the speaker — *“they each have their
beauty.”*

— Orson Scott Card

3. Regímenes y herramientas

Una vez establecidas las ecuaciones de movimiento del perfil del haz, en esta sección expondremos los diferentes regímenes de propagación que hemos utilizado, así como las herramientas empleadas para caracterizar los resultados.

3.1. Perfiles de índice estudiados

Las diferentes características de las distribuciones de índice de refracción (simetría, periodicidad, distribución del ruido, etc.) determinan los distintos regímenes de difusión. A continuación se recogen los tipos de dinámica estudiados en este trabajo y las distribuciones de índice empleadas para ello.

3.1.1. Difracción libre o balística

Se han realizado propagaciones libres como referencia con la que comparar el resto de regímenes y, también, como validación de los códigos realizados, al conocerse esta dinámica de forma analítica. Un haz monocromático de perfil gaussiano se propaga libremente de forma divergente, manteniéndose la forma del perfil pero aumentando su anchura $\omega(z)$ y disminuyendo su amplitud. La rapidez de ese ensanchamiento depende de factores como la anchura de

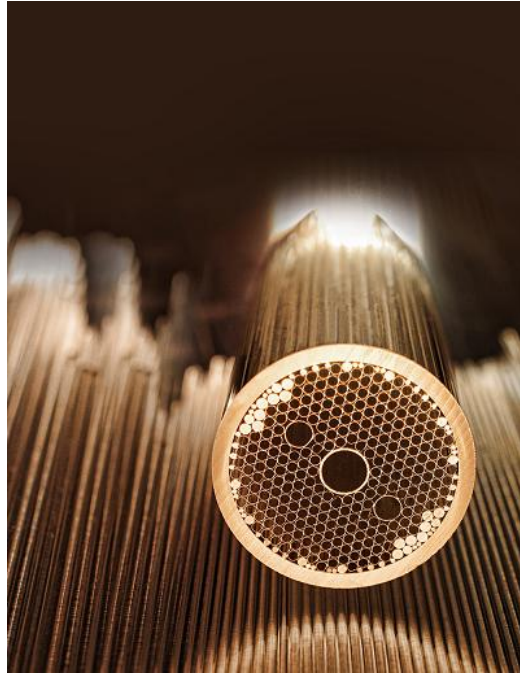


Figura 1: Fibra fotónica. Imagen de dominio público de la *Defense Advanced Research Projects Agency*.

partida ω_o y longitud de onda λ de la luz que lo compone según la expresión²⁸

$$\omega(z) = \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi\omega_o^2}\right)^2}. \quad (10)$$

3.1.2. Cristal fotónico

Un *cristal fotónico* consiste en un material cuyo índice de refracción se encuentra estructurado de forma periódica¹¹. En el caso de fibras ópticas fotónicas, las estructuras son transversales al haz (ver figura 1). La dinámica de la propagación de las ondas de luz en los cristales fotónicos es análoga a la de los electrones en cristales convencionales. En este caso también se tienen modelos teóricos bien establecidos¹⁷, por lo que, junto con la difracción libre, sirve para comprobar que los resultados son realistas, y establece otro punto de comparación.

En el presente estudio hemos construido el perfil de exceso de índice periódico, Δn , utilizando un peine de *deltas de Dirac* con la periodicidad transversal deseada, que se ha convolucionado con una función gaussiana de anchura determinada. De esta manera el perfil de *exceso* de índice de refracción obtenido resulta lo suficientemente suave como para ser representativo de un sistema real. Finalmente el índice se normaliza dentro de los márgenes convenientes.

Dadas las características del índice de refracción, la resolución transversal necesaria para obtener una buena convergencia en el cálculo de la propagación es notablemente mayor que la necesaria para reproducir la difracción del caso libre, lo que explica que las simulaciones en más de una dimensión exijan cálculo numérico masivo.

3.1.3. Índice de refracción con aleatoriedad

Cuando el perfil de índice de refracción tiene una componente aleatoria transversal, constante a lo largo del eje de propagación, puede aparecer el fenómeno de *localización de Anderson*, en el que la anchura del haz no crece y la distribución transversal adquiere un perfil con colas exponenciales. La aleatoriedad puede introducirse en las posiciones de los picos de índice (pozos de potencial), o en sus amplitudes. También puede tratarse de un índice totalmente ruidoso²³, de un ruido superpuesto a una red periódica²⁹, o ser resultado de la interferencia de dos redes de frecuencia no conmensurable^{13,27}. En este trabajo hemos impuesto la aleatoriedad sobre la amplitud del fondo periódico del índice de refracción, lo que nos da una mayor capacidad de control sobre los parámetros.

Para la generación de un perfil de índice de refracción de estas características se han considerado varias posibilidades, según los diferentes tipos de perfil utilizados en las principales referencias^{23,29}, a fin de reproducir sus resultados y las dinámicas conocidas. Se ha partido del proceso de construcción del índice periódico explicado en el apartado anterior, pero se ha asignado a cada delta del peine un peso aleatorio acotado. Nuestra estrategia permite generar, además de perfiles periódicos con una componente aleatoria, otros

totalmente ruidosos sin más que tomar una periodicidad de las deltas tan fina como la malla numérica transversal. En esta situación la continuidad del índice de refracción se obtiene al convolucionar con la misma gaussiana que en el caso periódico (figura 2), cuya anchura determina el *tamaño de grano* de la distribución de ruido generada. Tanto la componente aleatoria como el *exceso* de índice final Δn son siempre normalizadas para mantener éste dentro de los parámetros adecuados.

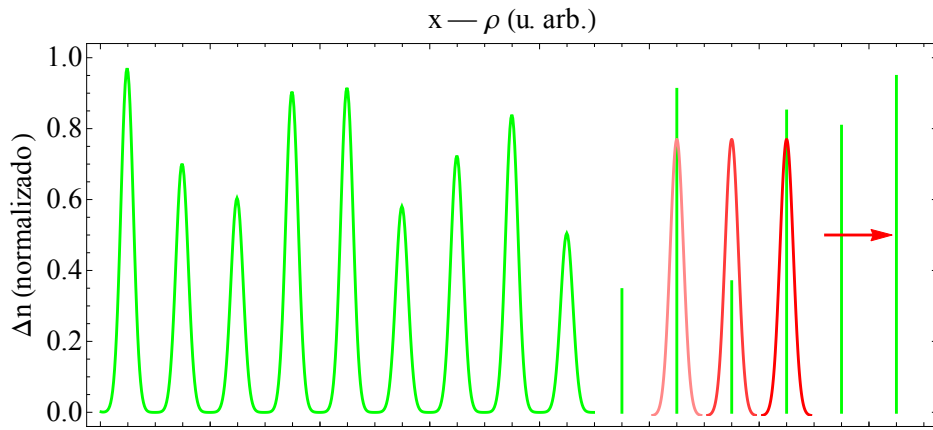


Figura 2: Esquema del procedimiento utilizado para construir el índice de refracción con componente aleatoria. El peine de funciones delta se convoluciona con los perfiles gaussianos y se normaliza adecuadamente.

Además se ha tenido la precaución de que las intensidades de los distintos picos de índice tomen aleatoriamente valores entorno a la intensidad de los picos del caso periódico, de forma que el promedio de un conjunto lo suficientemente grande de realizaciones distintas del índice con contribución aleatoria (pero bajo los mismos parámetros característicos) permitiría recuperar la red del caso periódico, mientras que el promedio de los estados producidos por cada una de estas realizaciones no representará la dinámica de ese caso. Gracias a esto la propagación en el medio periódico con ruido podrá ser comparada con la del caso periódico puro de forma consistente.

3.1.4. Índice de refracción con aleatoriedad variable en z

Si el ruido aleatorio del índice de refracción varía a lo largo de la dirección de propagación, la *localización de Anderson* se ve afectada. En particular, para ciertos valores de los parámetros puede llegar a lograrse una divergencia del haz significativamente más rápida que en el caso libre o balístico. Esto podría tener un gran interés práctico en la versión electrónica del sistema, ya que se aprovecha la alta velocidad alcanzada por los portadores de carga en los dispositivos de electrones balísticos frente a los convencionales³.

En nuestro caso se ha estudiado esta situación partiendo de las mismas configuraciones de ruido que en el caso anterior. Asumiendo dichas distribuciones, ahora sólo para $z=0$, hemos introducido oscilaciones sinusoidales (a lo largo de z) tanto en la posición transversal como en la intensidad de los picos de índice de refracción. Estas oscilaciones se han realizado asignando a cada pico unos valores aleatorios (dentro de unos rangos coherentes) para la amplitud, periodicidad longitudinal y fase inicial. De esta forma se obtienen perfiles como el mostrado en la figura 3. Esto no reproduce exactamente los perfiles de

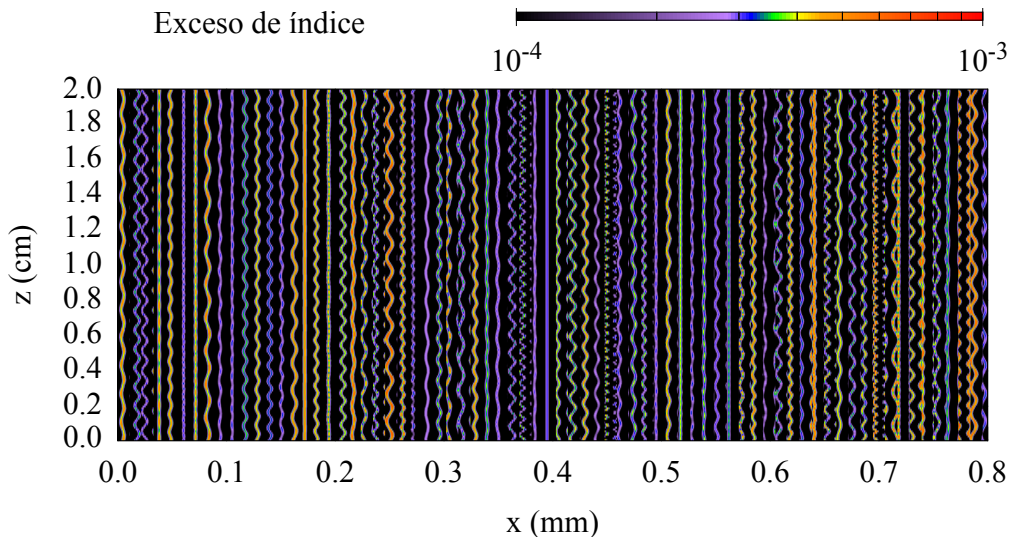


Figura 3: Mapa de un perfil de índice ($\Delta n(x, z)$) con aleatoriedad variable en z , en escala logarítmica.

índice utilizados en los experimentos de *hipertransporte* de las referencias [23] y [29], pero permite llegar cualitativamente a los mismos resultados, esto es,

se consigue observar el *hipertransporte* o transporte *hiperbalístico*, teniendo además un mayor control que allí sobre la forma y sobre cada parámetro de la dinámica del índice de refracción.

3.1.5. Extensión a *dos dimensiones* con índice cilíndrico

Con la intención de comprobar si los regímenes obtenidos en el sistema *unidimensional* pueden darse en uno de dos dimensiones transversales con simetría cilíndrica (con un índice de refracción independiente de ϕ), y para comparar de qué forma aparecen, hemos extendido la definición de los perfiles de índice de refracción anteriores a esta situación. Es decir, hemos estudiado las propagaciones descritas por la ecuación (8), de forma que frente al caso *unidimensional* se tiene, además de la simetría cilíndrica, un término de derivada primera transversal y una *barrera centrífuga* si se consideran campos con momento angular. Estas diferencias modifican la dinámica de difracción, motivando la extensión del estudio a este sistema.

La forma de construir el índice de refracción en ρ coincide con la del índice en x explicada en las secciones anteriores, pero conviene tener en cuenta que aquí además se tiene la precaución de que, al generarlo, el primer pico del índice en ρ esté situado a medio periodo de distancia de $\rho = 0$. De esta manera una sección longitudinal del cilindro completo que pase por su centro equivaldrá a la situación *unidimensional*, al tener todas las celdas equiespaciadas. Por otro lado, al usar números *pseudo-aleatorios* controlables mediante una semilla inicial (para los casos con componente aleatoria) podemos aplicar en cada propagación los mismos valores que en las realizaciones con una dimensión transversal, para así realizar una mejor comparación.

Merece la pena señalar, no obstante, que debido a la *simetría* $\rho \rightarrow -\rho$, no impuesta en el caso cartesiano, la parte del perfil de índice que ve el haz inicial no coincide con el del sistema *unidimensional*, que no muestra simetría especular. Esto hace que las comparaciones entre una y dos dimensiones transversales deban hacerse con cuidado, y preferiblemente sobre promedios de realizaciones. La figura 4 indica cómo hemos construido el perfil de índice

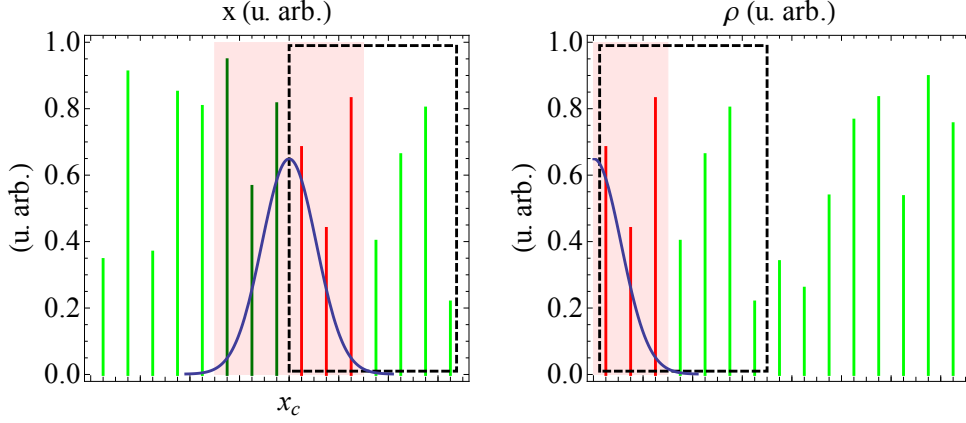


Figura 4: Ejemplo de distribuciones aleatorias usadas en la convolución para generar los perfiles de índice en una (izquierda) y dos (derecha) dimensiones transversales. Para el perfil en $\rho > 0$ se ha tomado la zona $x > x_c$ del caso *unidimensional*.

de refracción en el caso de dos dimensiones, a partir del *unidimensional*. Otra posible opción, no seguida aquí, consistiría en tomar el índice de refracción en una dimensión con una simetría de reflexión, lo que supondría correlaciones en el perfil de índice que podrían destruir la localización^{4,14}. Esta segunda manera de crear el índice de refracción en una y dos dimensiones permitiría investigar los efectos introducidos por la simetría impuesta por el caso *bidimensional*, pregunta que queda abierta para futuros trabajos.

Los perfiles iniciales de los haces propagados por estas estructuras de índice *bidimensionales* serán identificados con la notación $\Psi_{\ell p}$ de los modos de Laguerre-Gauss (ecuación (6)): $\{\Psi_{00}, \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{10}, \Psi_{20}\}$. Vale la pena comentar que, en los casos con momento angular no nulo, se requiere una mayor resolución de la malla numérica, ya que la *barrera centrífuga* es mucho más brusca e intensa que los picos de índice.

3.2. Parámetros y herramientas desarrolladas

Se han implementado algunas herramientas con las que analizar y cuantificar el comportamiento del sistema, además de servir de criterio para caracterizar o clasificar los diferentes regímenes de difusión. Hemos intentado que estas herramientas sean aplicables tanto al sistema *unidimensional* como al *bidi-*

mensional, permitiéndonos comparar, dentro de lo posible, ambos casos. Será importante además elegir adecuadamente la forma en que se hacen dichas comparaciones para que éstas sean lo más consistentes posible.

3.2.1. Caracterización de la anchura del haz

Como es evidente, la medida de la anchura de los haces y su evolución a lo largo de cada propagación proporciona un criterio imprescindible cuando se trata de estudiar los fenómenos de transporte transversal. Se han probado varios parámetros para cuantificar esta anchura.

- Anchura efectiva ω_{eff} .

Se define a partir del *cociente de participación inverso*^{29,33},

$$P = \frac{\int |\Psi|^4 dA}{[\int |\Psi|^2 dA]^2} = \frac{\int I^2 dA}{[\int I dA]^2}, \quad (11)$$

donde dA es el elemento de área en dos dimensiones y el de longitud en una dimensión. Con lo que se tiene:

$$\omega_{eff} = P^{-1/d}, \quad (12)$$

siendo d el número de dimensiones (transversales aquí) del sistema. Este parámetro de anchura efectiva da una medida del tamaño del espacio donde la intensidad es notablemente distinta de cero. Para los casos con múltiples realizaciones del índice de refracción, cuando hay componente aleatoria, se puede analizar el parámetro ω_{eff} de la intensidad promediada sobre las realizaciones $\langle |\Psi|^2 \rangle$, y no solo el de una propagación particular.

- $D4\sigma$ o anchura de la distribución.

Esta medida de anchura hace uso del segundo momento de la distribución de intensidad y es comúnmente utilizado en la medida del tamaño espacial de haces¹² con la definición siguiente:

$$D4\sigma = 4\sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}}, \quad (13)$$

donde la barra representa el promedio sobre dicha distribución. En casos con múltiples realizaciones se trata de forma análoga a ω_{eff} , pudiendo aplicarlo sobre promedios $\langle |\Psi|^2 \rangle$.

- *Longitud de localización* ξ y perfil $|\Psi|^2$ de salida.

Un parámetro típicamente utilizado para estudiar la *localización de Anderson*, como criterio de que ésta se ha alcanzado, es la *longitud de localización*^{21,22,25,33}, relacionada con el *coeficiente de difusión* y con el *recorrido libre medio*, en la analogía de estado sólido^{18,29}. Es el inverso del *exponente de Lyapunov*^{15,16} y se obtiene como el parámetro de ajuste de la distribución de intensidad a una exponencial (figura 5).

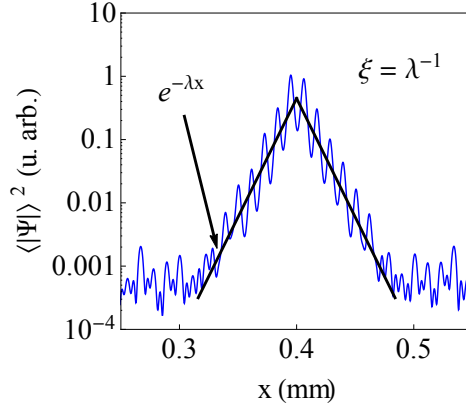


Figura 5: Perfil característico de la *localización de Anderson* con su ajuste exponencial, en escala logarítmica.

A partir de la dinámica de la anchura del haz, así como del perfil final de $|\Psi|^2$, o el ajuste de su cola a una exponencial característica de la localización, se puede hacer una clasificación ordenada de los comportamientos. En el presente estudio han resultado especialmente útiles el parámetro ω_{eff} y el perfil de $|\Psi|^2$.

3.2.2. Estudio modal de la propagación

Los parámetros explicados en el apartado anterior pueden ser obtenidos a partir de medidas realizadas en el laboratorio. Existen otros aspectos que no son fácilmente caracterizables en los experimentos pero que son

muy útiles, a fin de comprender los distintos regímenes de difusión. En este trabajo estudiaremos los autovalores y autovectores ψ_i del operador de propagación no perturbado, $\hat{\mathcal{H}}(z=0)$ así como las proyecciones sobre ellos de algunas distribuciones obtenidas durante la propagación. Con esto identificaremos los estados (autovectores) más relevantes para los distintos comportamientos y podremos obtener una visión de lo que sucede internamente en cada régimen. Además con las herramientas de proyección sobre estados propios aquí desarrolladas se tiene la opción de contrastar los resultados de los casos *unidimensionales* con los de la referencia [19] y a la vez extender ese estudio modal a dos dimensiones con un índice con simetría de revolución. Trabajar a nivel de los autoestados también da la posibilidad de estudiar la anchura de éstos, o la de realizar un «filtrado» de los estados de cualquier punto de la propagación eliminando alguna de sus componentes, con lo que se puede identificar cuáles de éstas contribuyen más a la localización y cuáles contribuyen más a la deslocalización.

Debido a la convención de signos para la parte espacial y temporal de las fases en óptica, los autovalores obtenidos, que corresponden a una corrección del momento k_z del campo eléctrico (Δk_z), son el análogo a la energía del electrón en un cristal cambiada de signo. Puesto que el módulo k se conserva, un autovalor (Δk_z) alto implica un k_\perp bajo, que caracteriza los estados con desplazamiento transversal lento, análogo a los electrones ligados o de baja energía (figura 6). Por tanto los estados consistentes con la aproximación paraxial serán los de mayor autovalor (los *primeros* según el orden elegido).

Para el caso *bidimensional*, donde el problema se trata sólo en la coordenada radial, hay que tener en cuenta que el algoritmo de diagonalización utilizado trabaja en una dimensión. Esto hace que los autovectores que devuelve estén normalizados según el criterio unidimensional,

$$\mathcal{N} = \int |\psi_i(x)|^2 dx, \quad (14)$$

lo que no es coherente con el criterio de normalización de las funciones radiales buscadas, que ha de ser la dada por la integral bidimensional que considera

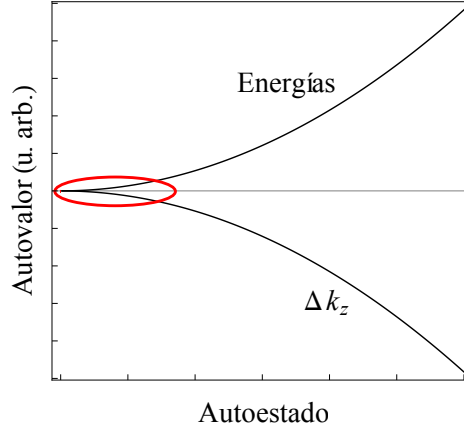


Figura 6: Esquema de los autovalores como energía del electrón y como corrección Δk_z del haz de luz. Se han señalado los estados transversalmente más *lentos*.

el elemento de área dependiente de ρ , es decir:

$$\mathcal{N} = 2\pi \int \rho |\psi_i(\rho)|^2 d\rho. \quad (15)$$

Para corregir este problema ha de realizarse una renormalización de los autoestados obtenidos directamente del algoritmo de diagonalización. Esto hará que se satisfaga la condición de ortogonalidad entre autoestados en dos dimensiones, es decir, que las autofunciones con las que se va a trabajar verifiquen

$$\delta_{ij} = 2\pi \int \rho \psi_i^*(\rho) \psi_j(\rho) d\rho, \quad (16)$$

de forma que la descomposición de los estados en la base propia del operador de propagación sea consistente.

“The order I found was the order of disorder.”

— William Saroyan

4. Resultados

A continuación presentamos los resultados obtenidos en este estudio, empezando por lo visto en un sistema con una sola dimensión transversal para pasar luego al *bidimensional*. Con esto podremos posteriormente comparar las peculiaridades y diferencias de ambas geometrías en sus capacidades para el transporte transversal.

En el sistema *unidimensional* mostraremos, para las diferentes estructuras del índice de refracción, las distribuciones de luz que surgen de la propagación a través del medio. También se dan figuras con las curvas de evolución de la anchura de los haces para los distintos regímenes de difusión, de forma que puedan compararse unos con otros. De los resultados del estudio modal se presentan los autovalores del operador de propagación $\hat{\mathcal{H}}(z=0)$ y algunas de las autofunciones correspondientes. También se ofrecen representaciones de las anchuras de los autoestados y la descomposición en autoestados de las distribuciones de la luz que aparecen durante la propagación.

4.1. Sistema *unidimensional*

Se ha propagado un haz gaussiano cuyo perfil transversal tiene la forma

$$\Psi(x, z=0) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (17)$$

Asumiremos una longitud de onda en el vacío $\lambda = 514$ nm, y un medio de índice de refracción de partida $n_0 = 2.34$ (correspondiente a un cristal *fotorrefractivo* de SBN:60) de $800 \mu\text{m}$ de ancho a lo largo de una distancia $L = 2$ cm. La anchura inicial del haz es $\sigma = 9 \mu\text{m}$, reproduciendo aproximadamente los parámetros de los montajes experimentales de las referencias [23] y [29].

4.1.1. Difracción libre o balística

Lo primero a considerar es el caso bien conocido de propagación libre en un medio homogéneo ($\Delta n = 0$). En la figura 7 se muestra el estado inicial y el

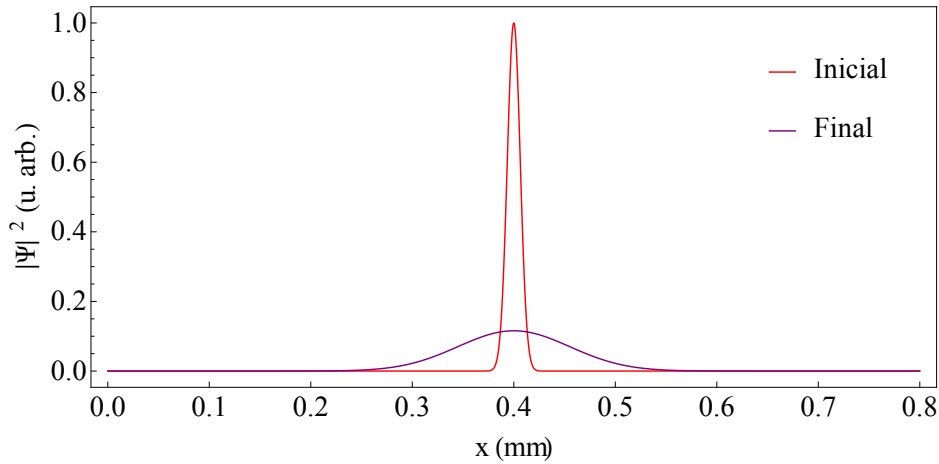


Figura 7: $|\Psi|^2$ inicial y final de caso libre *unidimensional*.

final en esta situación. Nuestra integración numérica reproduce perfectamente el resultado analítico, bien conocido para un perfil gaussiano. La anchura de la gaussiana evoluciona de la misma manera que en dos dimensiones, como se aprecia más adelante en la figura 37, aunque no su máximo, debido a que la energía del haz se distribuye en más dimensiones. Estos resultados, junto con los del régimen de difusión convencional, dan garantía de que nuestra simulación está funcionando bien.

La extensión del espacio de integración se toma de forma tal que, en esta situación libre, los límites de la malla numérica no afecten apreciablemente a la dinámica de expansión (8). Cabe esperar que la difusión *hiperbalística* alcance antes los bordes, por lo que habrá que tener esto en cuenta.

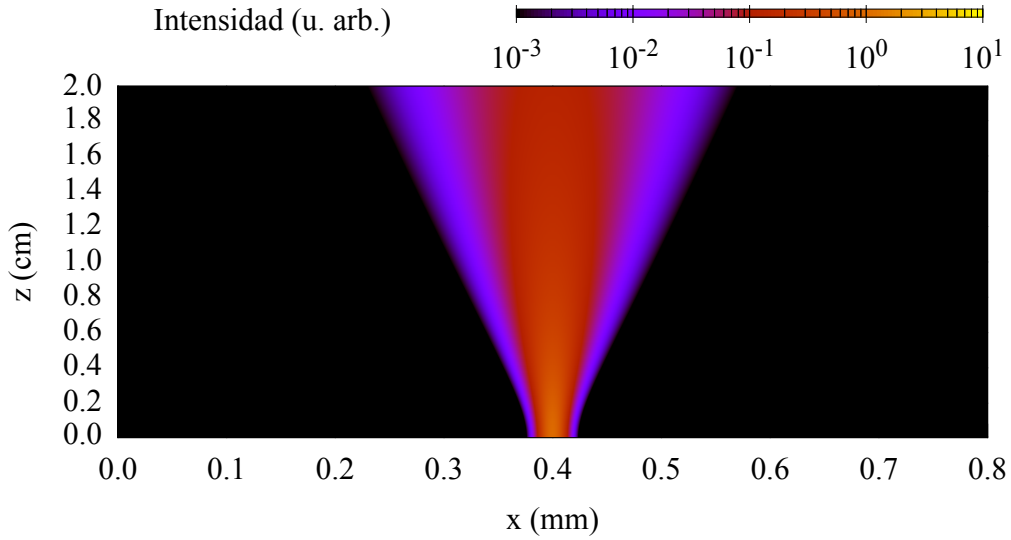


Figura 8: Mapa de la propagación libre. La intensidad está en escala logarítmica.

4.1.2. Cristal fotónico

Con los mismos parámetros del caso anterior, pero añadiendo ahora el término asociado a la variación periódica del índice de refracción (Δn) con un valor máximo del orden de 4×10^{-4} , se obtienen los perfiles de la figura 9. Los picos de índice construidos, mostrados en verde en la figura, tienen una anchura FWHM de $\sim 3 \mu\text{m}$, y la periodicidad corresponde a una distancia entre picos de $11.2 \mu\text{m}$. Estos valores son los que permitirán obtener dinámicas análogas a las de los artículos experimentales que hemos tomado como referencia, citados antes^{23,29}.

En la figura se puede observar la dinámica esperada a partir del *teorema de Bloch*, siendo el estado evolucionado un perfil gaussiano modulado con la periodicidad de la red, al estar éste compuesto por autofunciones con estas características. En la representación completa de esta propagación (figura 10) se aprecian mejor aún varios haces dispersados de forma más divergente que el haz libre, aunque el haz *principal*, mucho más intenso, determinará el valor de los parámetros de anchura. Estos haces divergentes aparecen en el caso localizado también con poco peso, y en el caso *hiperbalístico* los haces más divergentes se separan del eje aún más rápido que estos.

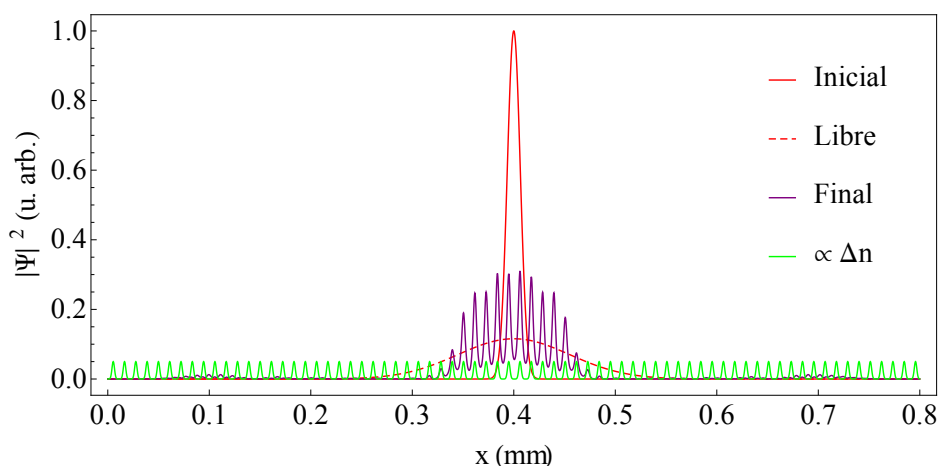


Figura 9: Perfil del índice de refracción periódico (fuera de escala) junto a los estados inicial y final de difusión que éste produce en una dimensión. Se muestra también a modo de comparación el estado final libre.

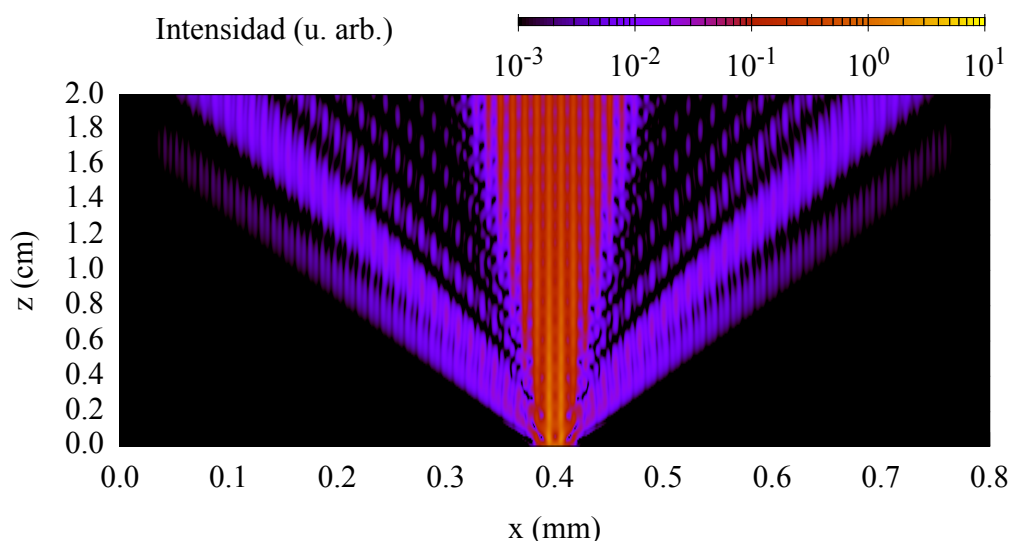


Figura 10: Mapa de la difusión en una red periódica *unidimensional*. La intensidad está en escala logarítmica.

Por otro lado, si se compara el haz principal con el de propagación libre se observa que aquí la luz se difracta de forma más lenta, al dificultar la estructura periódica de índice la propagación transversal de la luz. Sin embargo esto no tiene que ver con el fenómeno de la *localización de Anderson*, donde el ensanchamiento se detiene completamente. No obstante, como régimen de difracción más lenta que la libre, servirá de situación de referencia con la que

contrastar la localización.

4.1.3. Índice de refracción con aleatoriedad

La *localización de Anderson* no es un fenómeno sencillo de observar, debido a la sensibilidad de éste a los parámetros del haz, del índice de refracción, etc. Una opción es, como se mencionó en el apartado 3.1.3, trabajar con índices de refracción *totalmente* aleatorios, sin red periódica de fondo, de la forma del mostrado en la figura 11. Sin embargo, esta configuración es muy diferente a

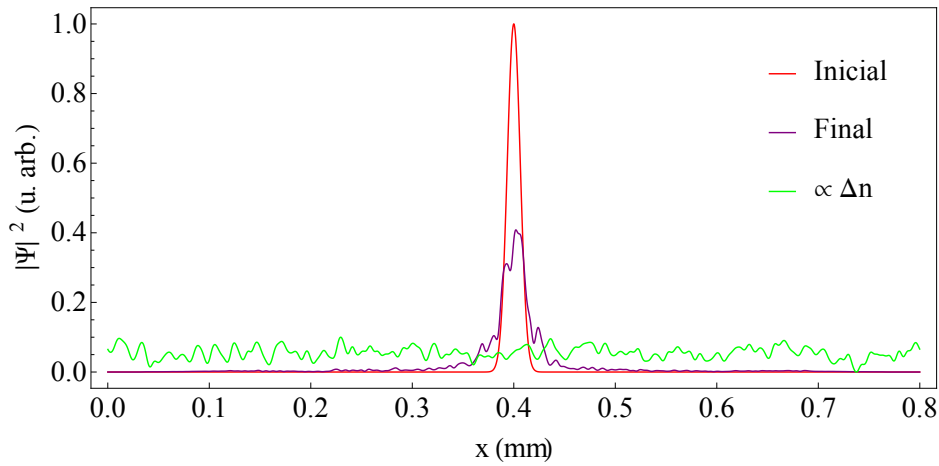


Figura 11: Δn aleatorio (fuera de escala) junto al estado inicial y al estado final que produce, con el perfil exponencial característico de la localización.

la usada en los experimentos [23,29] que deseamos emular, a pesar de que se puede ver que genera localización.

La otra opción para reproducir una situación análoga a la de la referencia [29] (tomando sus mismos parámetros como punto de partida) y para tener un perfil de índice más fácilmente manipulable de forma numérica, es estudiar índices de refracción con red periódica de fondo, de la forma explicada en 3.1.3. Los parámetros escogidos para realizar las simulaciones son los indicados al comienzo del apartado 4.1 ($\lambda = 514$ nm, $n_0 = 2.34$, distancia de propagación $L = 2$ cm y anchura inicial del haz $\sigma = 9$ μ m) y la periodicidad es la ya tomada en el caso difusivo (4.1.2): 11.2 μ m. Los picos de índice utilizados aquí (figura 12) tienen una anchura FWHM promedio igual a las del caso

periódico puro ($\sim 3 \mu\text{m}$), y la variación aleatoria máxima de sus amplitudes (*nivel de desorden*, 2.3.1) es del 50% respecto de las de éste (4×10^{-4}).

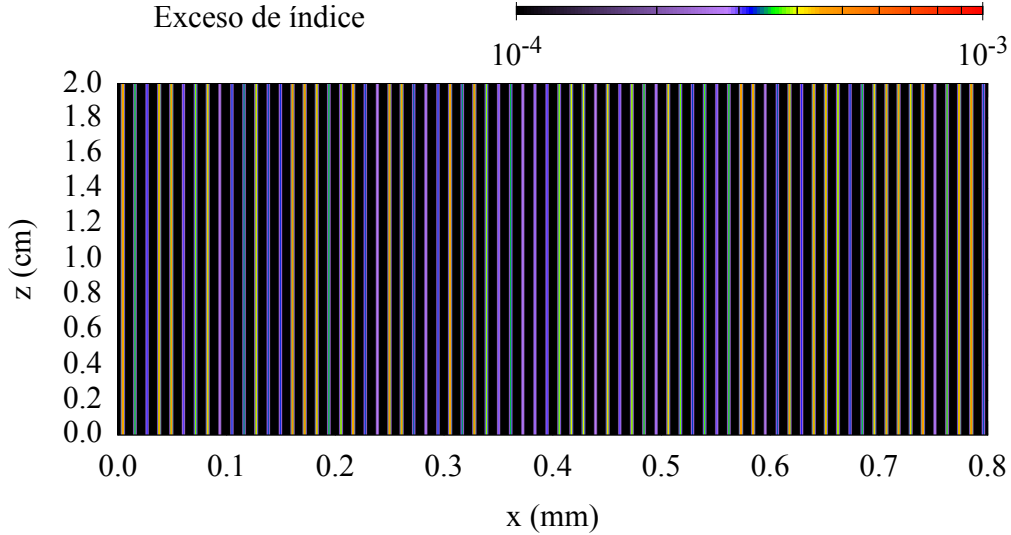


Figura 12: Mapa de un perfil de índice ($\Delta n(x, z)$) con aleatoriedad *constante* en z , en escala logarítmica.

La figura 13 muestra la propagación del haz por un medio con el perfil de índice de la figura 12, y la figura 14 muestra la distribución transversal de intensidad a la salida del cristal para un conjunto estadístico de 100 realizaciones diferentes del índice de refracción. Conviene observar cómo, pese a la mínima diferencia que existe entre los índices periódico y perturbado aleatoriamente, los regímenes que estos producen son totalmente distintos. En las figuras 13 y 14 se observa la localización esperada, tanto en una realización como en el promedio de un conjunto de ellas. La figura 15 permite apreciar el perfil exponencial característico de la *localización de Anderson*, y la evolución de su anchura confirmará que se trata de este fenómeno.

Cabe distinguir la *localización* del guiado de luz en fibras de gradiente de índice, ya que en nuestra situación lo que aparece no es *simplemente* un guiado a lo largo de un pico de índice individual, lo que queda claro al no observarse esta localización en el caso del índice periódico, sino que se tiene

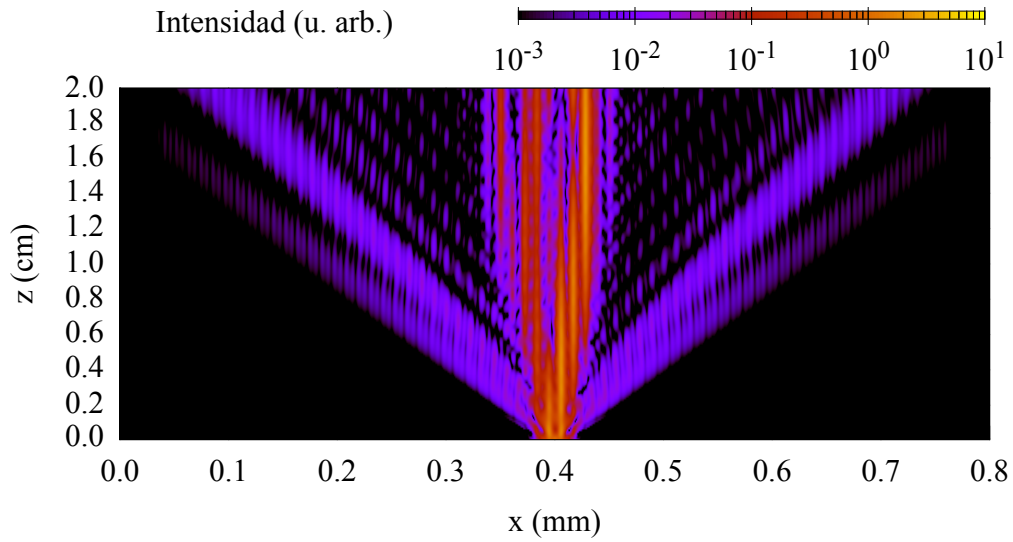


Figura 13: Mapa de la propagación localizada generada por el índice de la figura 12. La intensidad está en escala logarítmica.

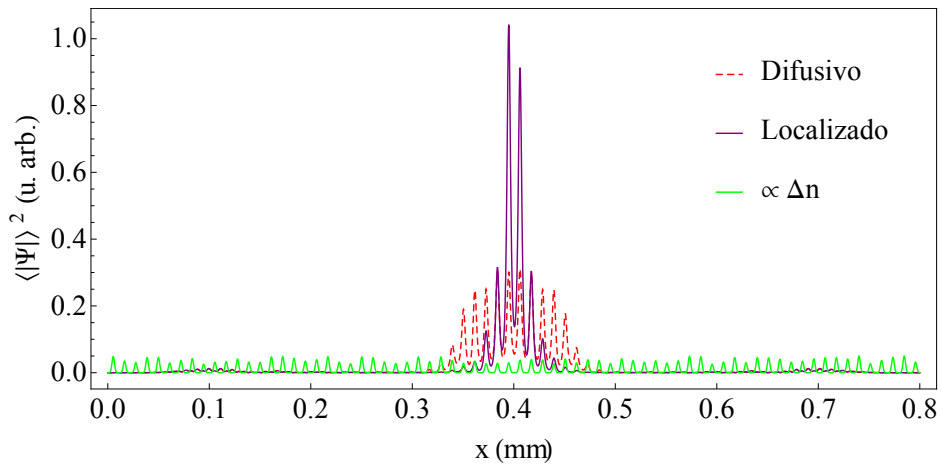


Figura 14: Perfil final localizado, resultado de promediar 100 realizaciones, junto al difusivo por un índice de refracción periódico y al índice de una de las realizaciones (fuera de escala).

una ralentización de la difusión. Por otro lado, la magnitud de las variaciones de índice en dichas fibras es entorno a un orden de magnitud más intensa.

Veamos ahora hasta qué punto se da en nuestro sistema la propiedad de *auto-promediado* explicada en la sección 1. Consistía en la posibilidad de observar en propagaciones individuales fenómenos de transporte inducidos

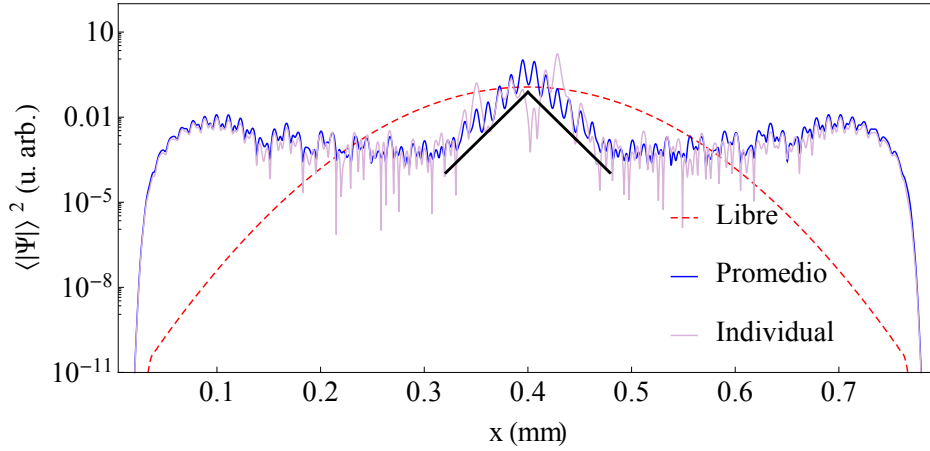


Figura 15: Perfiles finales localizados, uno resultado de promediar 100 realizaciones y otro de una sola de ellas, junto al libre. Se indica en negro la tendencia exponencial (escala logarítmica).

por una componente aleatoria, sin necesidad de recurrir al promedio de varias realizaciones. En la figura 15 se puede ver lo que sucede si se compara una de las propagaciones del conjunto estadístico con el promedio de éste. En ambas curvas siguen apareciendo las modulaciones debidas a cada pico de índice. Sin embargo en el promedio la modulación es homogénea, pero en la individual no, debido al perfil particular de intensidades para esa realización. Cabe resaltar en el caso promediado que, aunque el promedio de índices es una función periódica regular, el perfil de intensidad promediado es completamente diferente al del caso periódico. El *auto-promediado* permite obtener mucha información a partir de una sola realización, siempre que se tome una que sea lo suficientemente representativa. La mayoría de las realizaciones lo será, pues el *auto-promediado* simplemente da idea de la escasa desviación estadística que hay en este tipo de conjuntos.

4.1.4. Índice de refracción con aleatoriedad variable en z

En este caso el perfil de índice no permanece estático en z , sino que la intensidad y la posición transversal de cada pico oscila (como se ha explicado en 3.1.4) con amplitud, fase inicial y *rapidez* aleatorias dentro de unos rangos. En las propagaciones estudiadas a continuación, el periodo en z de las oscilaciones sinusoidales, tanto de la intensidad como de la posición transversal de los

picos, toma valores entre $L/50=0.4$ mm y $L/10=0.2$ cm respectivamente, siendo las fases iniciales aleatorias. La amplitud de la modulación de la intensidad va entre cero y la mitad de la intensidad de cada pico del caso estático. La amplitud de las oscilaciones de sus posiciones transversales toma valores entre cero y un cuarto de la periodicidad del perfil sin ruido. Uno de los perfiles obtenidos puede verse en la figura 16.

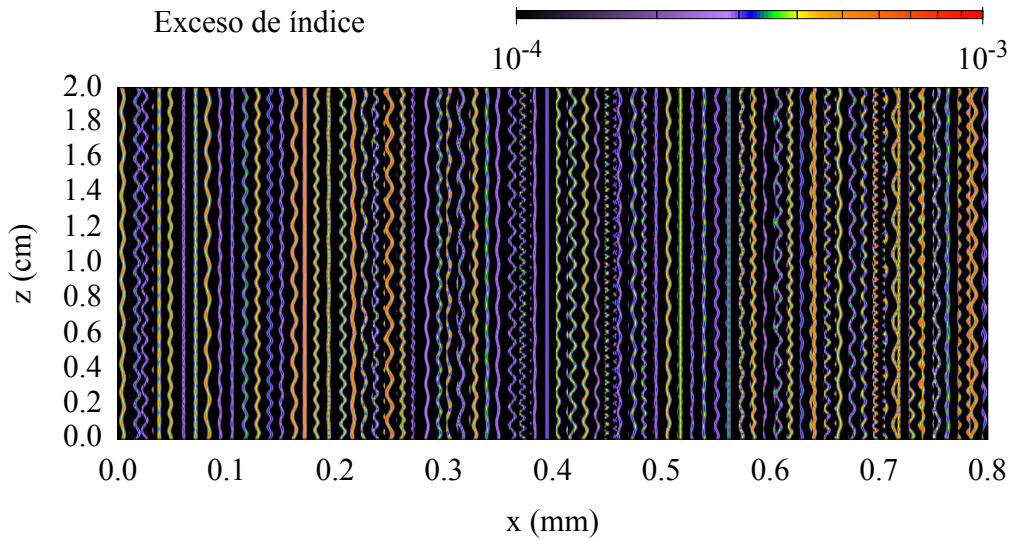


Figura 16: Mapa de un perfil de índice ($\Delta n(x, z)$) con aleatoriedad variable en z construido a partir del de la figura 12, en escala logarítmica.

Como se observa en la figura 17, el paquete en esta situación se ha expandido por toda la ventana tras la propagación. La forma en que esto sucede se hace más clara en la figura 18, donde se muestra todo el proceso de difusión. Puede verse además cómo la luz no alcanza el borde de la malla numérica gracias al absorbente.

Para obtener este transporte *hiperbalístico* no basta con hacer variar a lo largo del eje z la intensidad de los picos de índice, sino también sus posiciones en la dirección transversal. Esto facilita la transferencia de población entre los estados asociados a picos diferentes, ya que al variar la distancia entre ellos, la probabilidad de efecto túnel oscila.

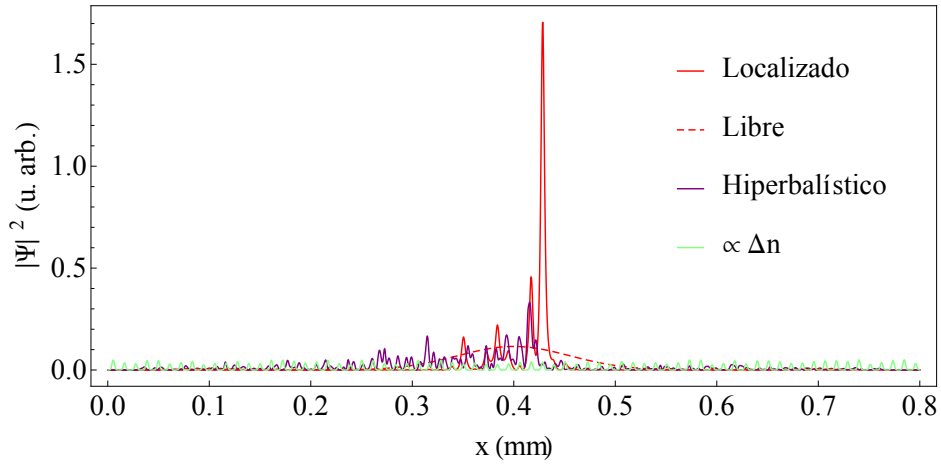


Figura 17: Estados finales localizado, libre e *hiperbalístico* obtenidos en una sola realización junto con el índice ruidoso (fuera de escala) utilizado en los casos localizado e *hiperbalístico* (sólo en la cara de entrada en el *hiperbalístico*).

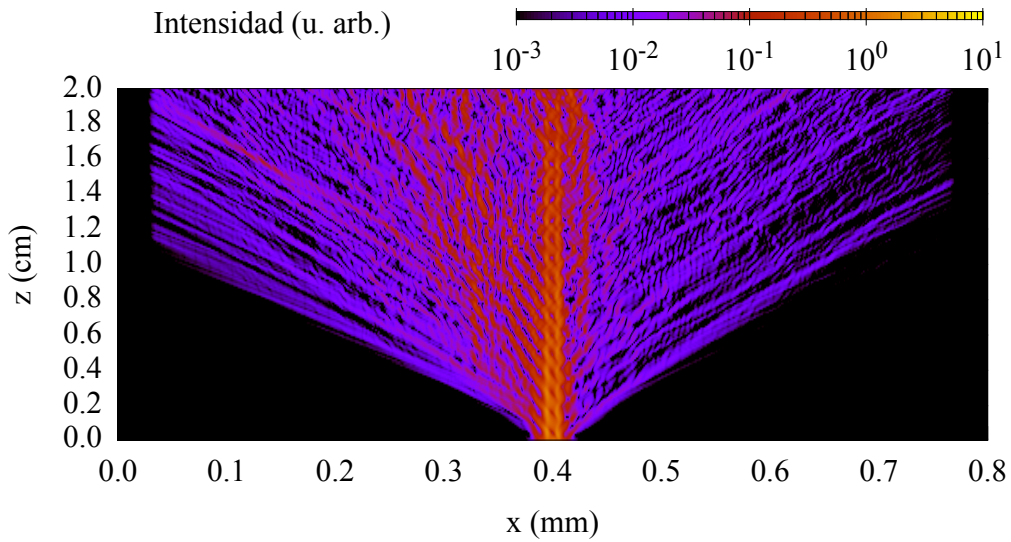


Figura 18: Mapa de la propagación con difracción *hiperbalística* producido por el medio de la figura 16 (una sola realización). La intensidad está en escala logarítmica.

En la figura 18 se observa el efecto túnel «en cadena» que permite esta forma de difusión especialmente rápida, haciendo que la luz alcance zonas lejanas al punto de incidencia del haz en el medio. Una fracción apreciable de las *ramas* (ya presentes en las dos situaciones previas) se separa rápidamente del eje longitudinal hasta que alcanza un pico de índice que es capaz de atraparla. De esta manera al final se tiene un haz principal que permanece

sin difundir junto a un fondo casi uniformemente repartido por toda la ventana, resultando en una anchura mucho mayor que en los otros regímenes. Esta fenomenología también afectará a la distribución de población entre los

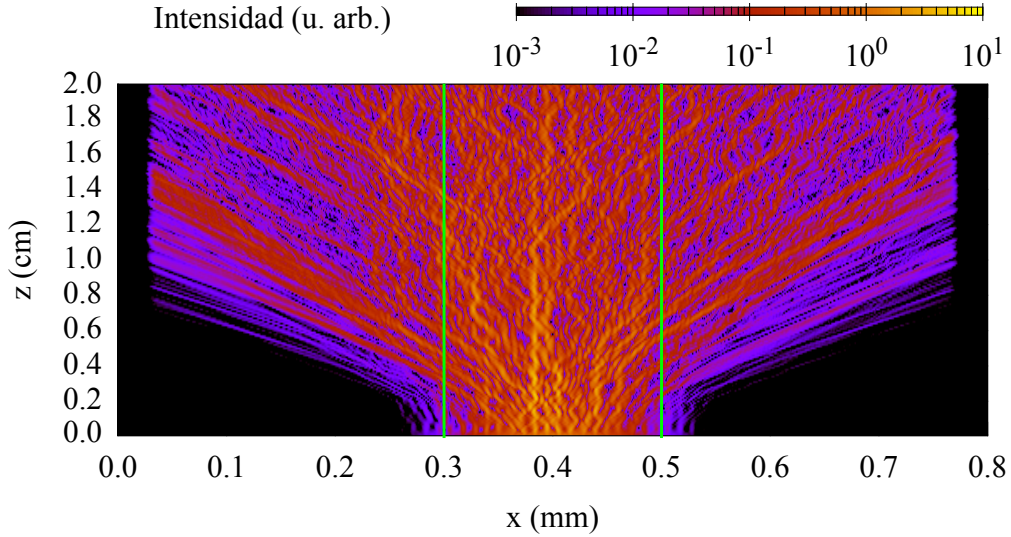


Figura 19: Mapa de la difusión *hiperbalística* (una sola realización) en un haz en el que no se observa ensanchamiento libre (líneas verdes). La anchura transversal del espacio es de $800\ \mu\text{m}$ y la distancia de propagación $L=2\ \text{cm}$. La intensidad está en escala logarítmica.

estados propios del operador de propagación inicial $\hat{\mathcal{H}}(z=0)$ y su evolución. El *hipertransporte* se hace más evidente si, utilizando los mismos parámetros del índice de refracción que antes, se propaga un haz más ancho, como en el caso mostrado en la figura 19, ya que al aumentar la anchura inicial se reduce la velocidad de la difusión balística (ecuación (10)). De esta forma en las distancias de propagación utilizadas aquí se obtiene un ensanchamiento libre final despreciable, como se ve en las líneas verdes de la figura, que corresponden a la caída a 10^{-2} del perfil gaussiano libre, pudiéndose distinguir con mayor claridad el régimen de *hipertransporte*. Esta configuración, por el contrario, dificultaría el estudio de la localización.

La figura 20 muestra la comparación del mapa de propagación de los cuatro regímenes presentados hasta el momento: *hiperbalístico*, libre, difusivo y localizado. En todo caso se presenta la distribución promedio de 100 realizaciones, con lo que se pueden observar las características básicas de

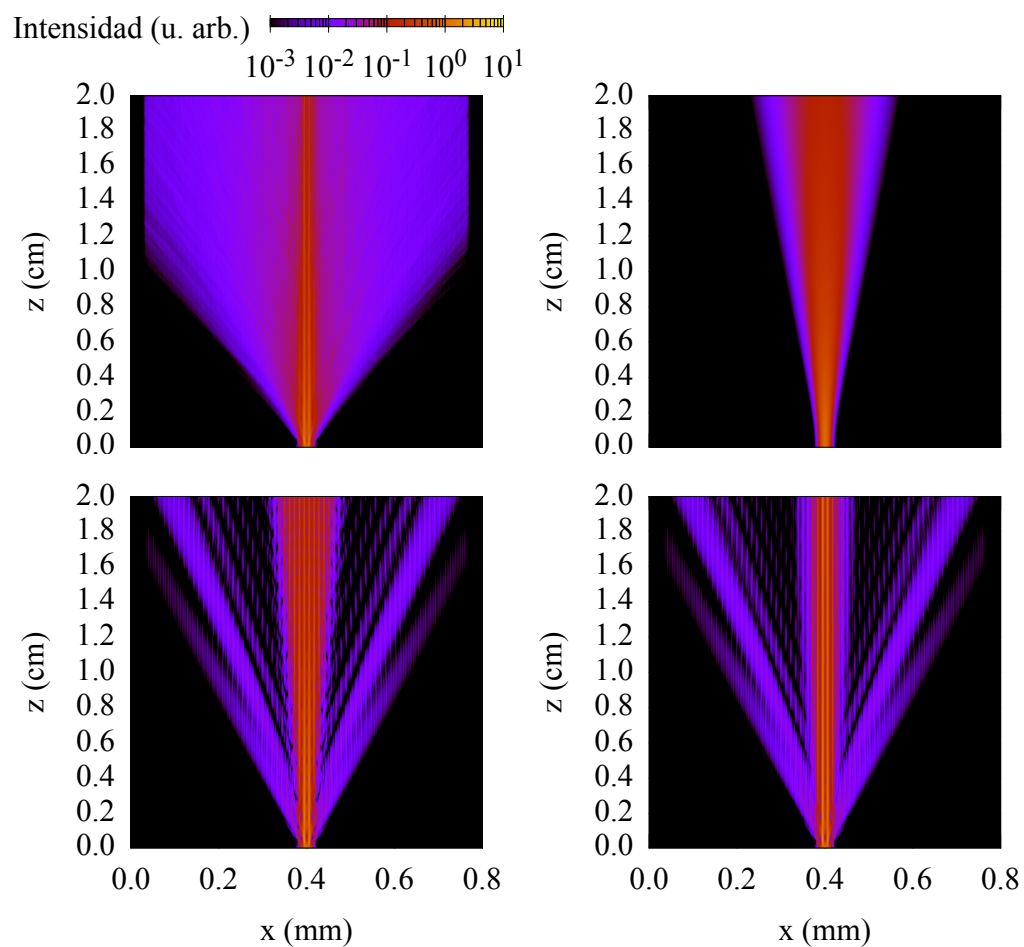


Figura 20: Mapas de las propagaciones *hiperbalística*, libre, *difusiva* y localizada, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, promediadas sobre 100 realizaciones. La intensidad está en escala logarítmica.

cada régimen de transporte.

4.1.5. Anchuras comparadas

En la figura 21 se muestra la dinámica de la anchura de los haces de forma que se puede ver la localización e *hipertransporte*, en comparación con los regímenes difusivo y libre, respectivamente: el ensanchamiento obtenido con índice ruidoso es más lento que el del caso periódico y el obtenido cuando el ruido varía en z es más veloz que en difracción libre. Además, esta figura

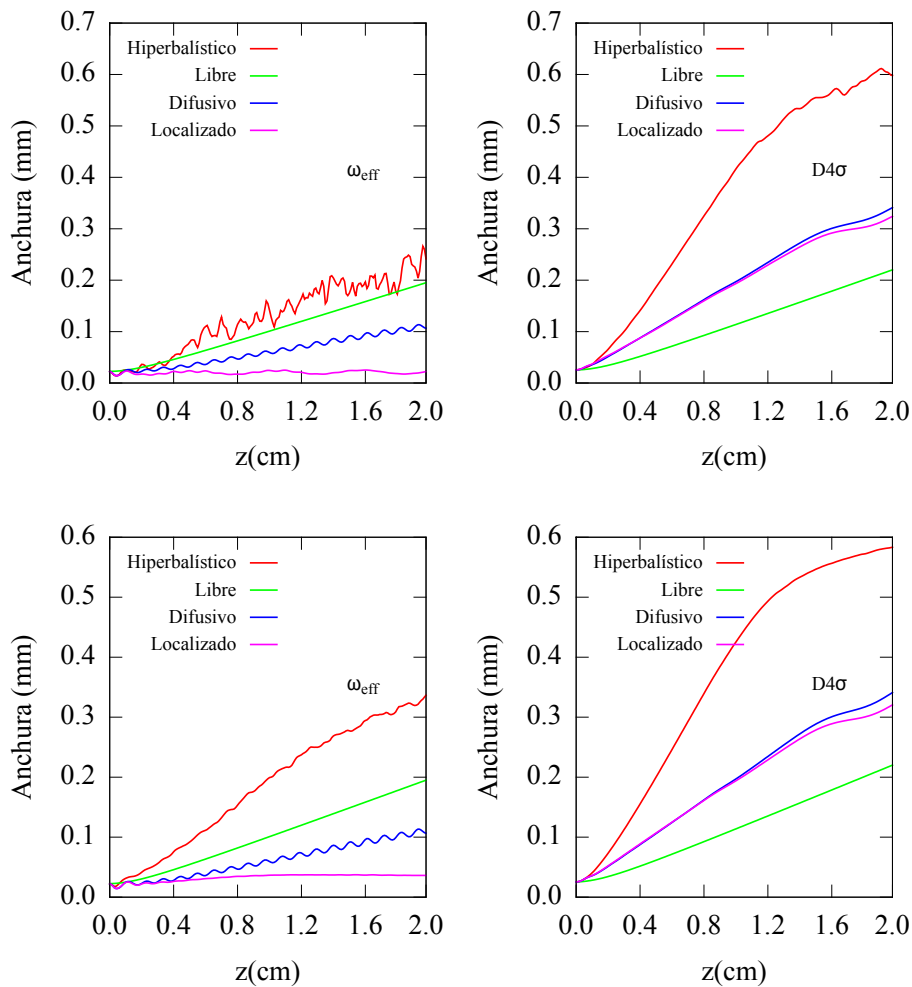


Figura 21: Evolución de las anchuras en los diferentes regímenes según los parámetros ω_{eff} y $D4\sigma$ para 1 (arriba) y 100 (abajo) realizaciones distintas de la propagación.

proporciona otra forma de identificar qué situaciones responden en mayor o menor grado al concepto de *auto-promediado*. En concreto hay que destacar la peor representatividad de los casos *hiperbalísticos* individuales. Es interesante observar las diferencias entre la evolución de la anchura en el caso libre según el parámetro $D4\sigma$ y ω_{eff} . Para el primero el caso libre resulta ser el que menor anchura presenta, mientras que para el segundo resulta ser el que presenta la segunda mayor anchura, después del caso *hiperbalístico*. Esta diferencia se debe a que el parámetro $D4\sigma$ da cuenta de la anchura *total* de la distribución de luz, mientras que ω_{eff} es más selectivo con las regiones que considera iluminadas, según lo expuesto en el apartado 3.2.1. Así podemos asociar, en la figura 20, la anchura medida por ω_{eff} a la del haz *principal*, en colores rojizos, mientras que la anchura medida por $D4\sigma$ no descarta los haces transversalmente más veloces, que son más débiles, teniendo también en cuenta las *ramas* de color violeta. Esto explica que la anchura descrita según el parámetro $D4\sigma$ de los casos periódico y localizado sean tan similares, al estar presentes esas *ramas* débiles más divergentes ya en el caso de la red perfectamente periódica (4.1.2).

En las curvas del parámetro ω_{eff} se aprecian oscilaciones debidas a la transferencia *periódica* de población entre picos de índice consecutivos ya mencionadas, especialmente para los casos difusivo y localizado, y de una forma menos suave y periódica en el *hiperbalístico*. Esto tiene sentido si se tiene en cuenta que en ese caso las distancias entre cada par de picos de índice adyacentes oscilan con distinta frecuencia, amplitud y fase inicial a lo largo del eje z . Puede verse además que la anchura (ω_{eff}) del caso localizado se estabiliza en nuestras condiciones tras el primer centímetro de propagación, como se aprecia en la figura 21.

También se aprecia en la dinámica de las anchuras el efecto del absorbente lateral durante el último tramo de la propagación, especialmente en la situación *hiperbalística*. La absorción puede ser monitorizada a través de la evolución de la normalización del perfil de intensidad, de lo que se da una muestra en la figura 22. En ella se presenta el promedio de 100 realizaciones de cada régimen, además de un caso *hiperbalístico* individual (en línea roja

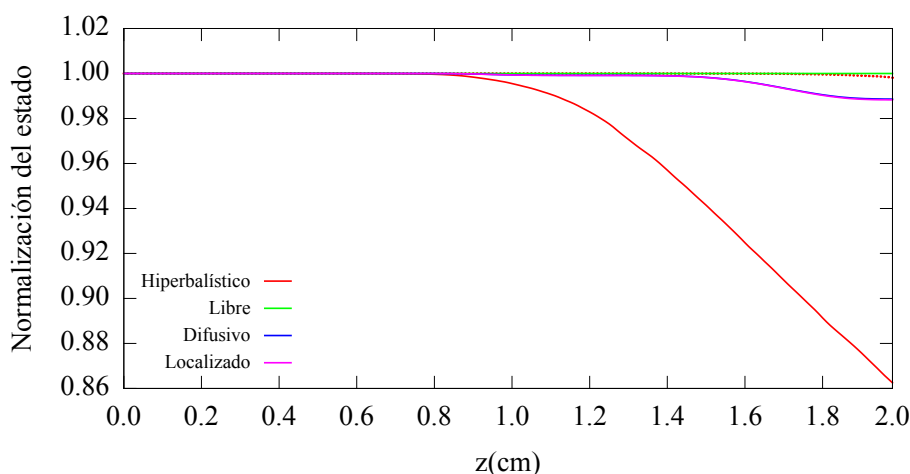


Figura 22: Curvas de la normalización de los estados promediados a partir de 100 realizaciones en cada régimen, junto a la de una realización *hiperbalística* en un medio de anchura el doble, en línea roja discontinua (prácticamente sobre la verde).

discontinua) en el que se ha usado una malla espacial con el doble de extensión ($1600 \mu\text{m}$). La anchura del absorbente es también el 5 % de esta ventana, y puede verse que las pérdidas que se producen en este caso son despreciables para la propagación en 2 cm, estando esta curva prácticamente sobre la del caso libre (línea verde), que es la que menos se ve afectada por el absorbente. En todos los casos, salvo para el *hiperbalístico*, la absorción es mínima, y en éste, aunque sea entorno a un 10 % del total, se ha considerado aceptable por afectar a las anchuras solo al final, cuando las dinámicas ya se han distinguido, y por el mayor tiempo de cálculo que exigirían los estudios de múltiples realizaciones con una ventana mayor.

4.1.6. Estudio modal de la propagación *unidimensional*

Complementariamente a la información que se obtiene del estudio de múltiples propagaciones, la capacidad de *auto-promediado* del sistema nos permite deducir más características a partir de una sola realización siempre que sea representativa de la fenomenología observada sobre el conjunto de éstas. En particular, podemos realizar el estudio modal a partir de la proyección de los resultados de una realización sobre las autofunciones del sistema. De nuevo los casos libre y periódico confirman la validez de los códigos, al recuperarse aquí

unos autoestados bien conocidos teóricamente: los de un pozo de potencial infinito (en el caso con $\Delta n=0$) y los *estados de Bloch* cuando Δn es periódico.

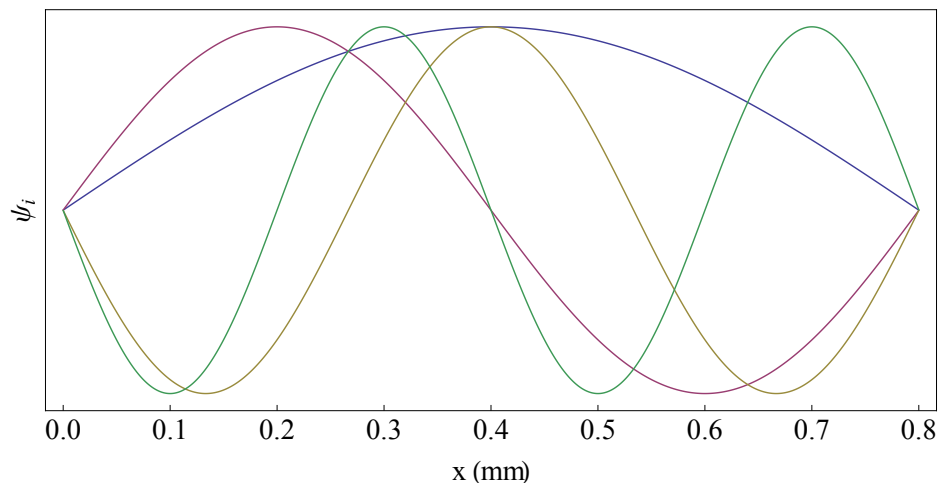


Figura 23: Las primeras cuatro autofunciones del caso libre *unidimensional*.

En la figura 23 se ven algunas de las autofunciones obtenidas en el caso libre. Se representan las primeras cuatro menos «energéticas», es decir, las que originan distribuciones de luz más lentas transversalmente. Son el tipo de autofunción esperado en un espacio limitado por la extensión finita de la malla, y se corresponden con los autovalores mostrados en la figura 24.

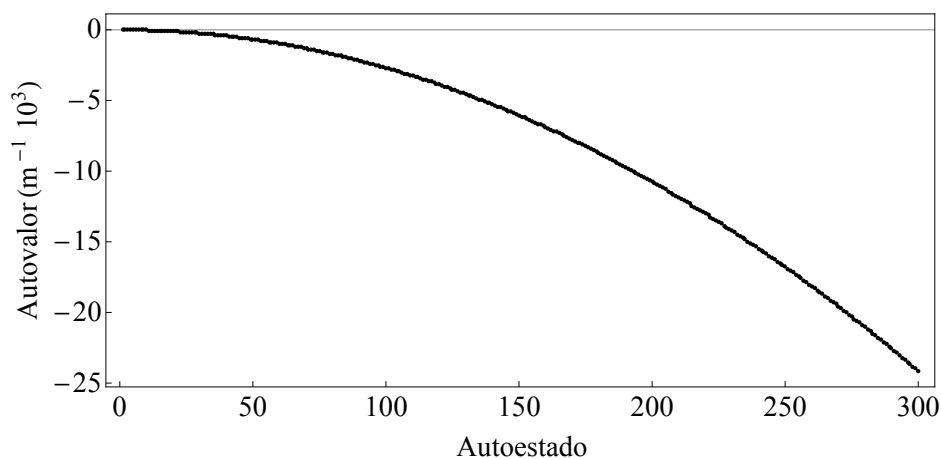


Figura 24: Autovalores de los 300 primeros autoestados (ordenados por autovalor decreciente) del caso libre *unidimensional*.

Al introducir un índice de refracción periódico, por otro lado, se obtiene la estructura de bandas que se muestra en la figura 25 y los correspondientes

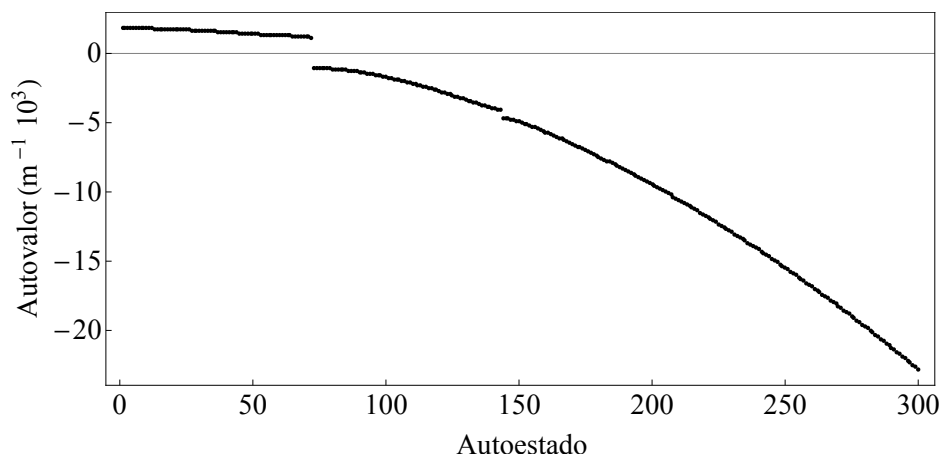
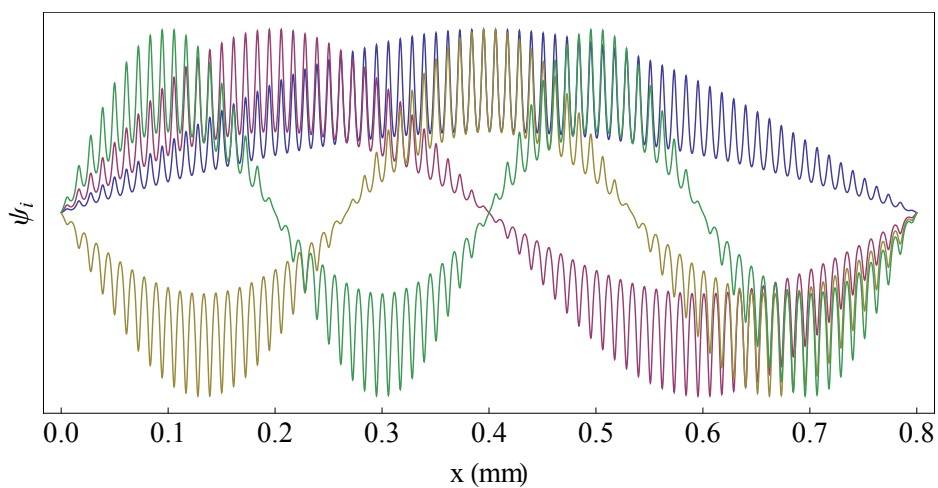
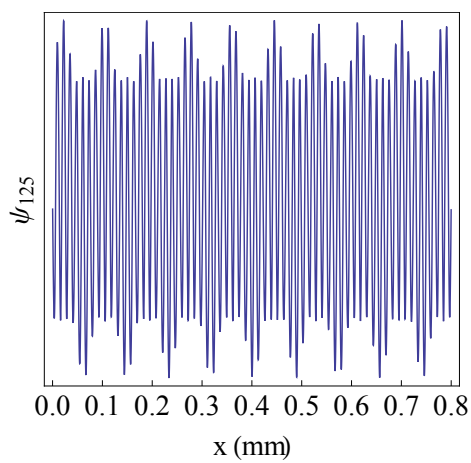
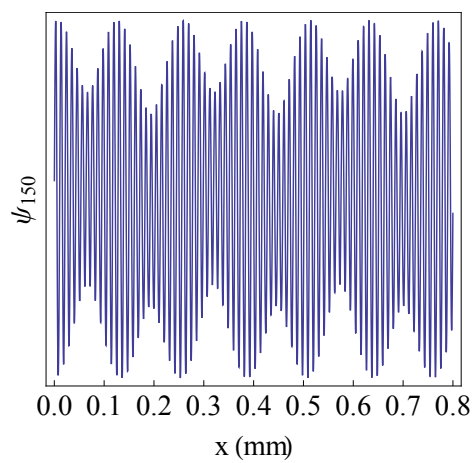


Figura 25: Estructura de bandas de los autovalores del caso periódico unidimensional.

estados de Bloch, modulados con la periodicidad del índice, de la figura 26. Cabe señalar la presencia de tres primeras bandas bien distinguidas, estando la primera compuesta por 72 estados ligados (tantos como picos de índice hay en el espacio transversal), de autovalor positivo, análogo a la energía negativa de los electrones, la segunda por un mismo número estados (del número 73 al 144 ambos incluidos) ya libres, y correspondiendo la tercera ya *casi* a un continuo de estados libres, pues los siguientes *gaps* apenas se distinguen. Si se representan las diferencias entre autovalores consecutivos se pueden llegar a apreciar hasta cuatro *gaps* más, pero su tamaño no es comparable con el de los dos primeros, aunque sí se hagan notar en algunas de las figuras siguientes. Cualitativamente, además, la forma de los autoestados correspondientes solo varía significativamente entre las dos primeras bandas. Por otro lado, con los primeros 300 autoestados del sistema, cuyos autovalores se muestran en la figura 25, se reconstruyen perfectamente las distribuciones de luz que aparecen en la propagación, como se verá más adelante. Merece la pena recordar que los estados de menor autovalor (los más negativos) se desvían más de la aproximación de paraxialidad, al corresponderles un k_{\perp} alto como se explicó previamente (sección 3.2.2), con lo que queda así de paso verificada la validez de la paraxialidad intrínseca en el modelo.



Autofunciones de la primera banda (del 1º al 4º).

Autofunción ψ_{125} (segunda banda).Autofunción ψ_{150} (tercera banda).**Figura 26:** Autofunciones de las tres bandas que aparecen en la diagonalización del caso periódico.

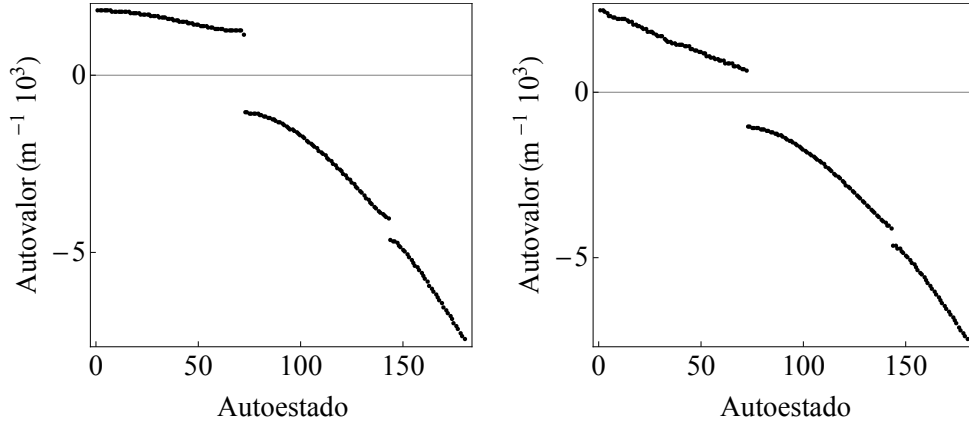


Figura 27: Comparación de las bandas producidas por el índice de refracción periódico (izquierda, fragmento del mostrado en la figura 25) frente al localizante (derecha).

En los casos en los que los picos de índice tienen intensidades aleatorias, la estructura de bandas no se ve alterada a grandes rasgos, pero sí varía el valor de los distintos autovalores, rompiendo especialmente la suavidad de la primera banda, como se ve en la figura 27, que además ahora tiene curvatura despreciable y mayor pendiente. Es en estos casos no periódicos en los que se habla de la estructura fractal de las bandas^{6,24,30}. El desorden hace que los autoestados de la primera banda presenten estructuras de picos muy estrechos, algo que no se observa en la red periódica. El tipo de estados que se obtienen se muestra en la figura 28. Todos los autoestados forman una base completa, que será la que usaremos también cuando el índice de refracción varía con z .

Es interesante prestar atención a los estados propios cercanos a los *gaps*, ya que muestran un comportamiento que no se corresponde con el de los más interiores. Esto se aprecia de forma nítida al calcular sus anchuras, que para el caso concreto de una distribución de índice de refracción localizante se muestran en la figura 29 junto con la desviación de los centros de cada autoestado ψ_i respecto del centro del espacio transversal. Ésta se ha calculado como $|x_c - \bar{x}_i|$, siendo x_c el centro de la ventana transversal, y mediante el primer momento de la distribución de intensidad que les corresponde,

$$\bar{x}_i = \int x |\psi_i(x)|^2 dx.$$

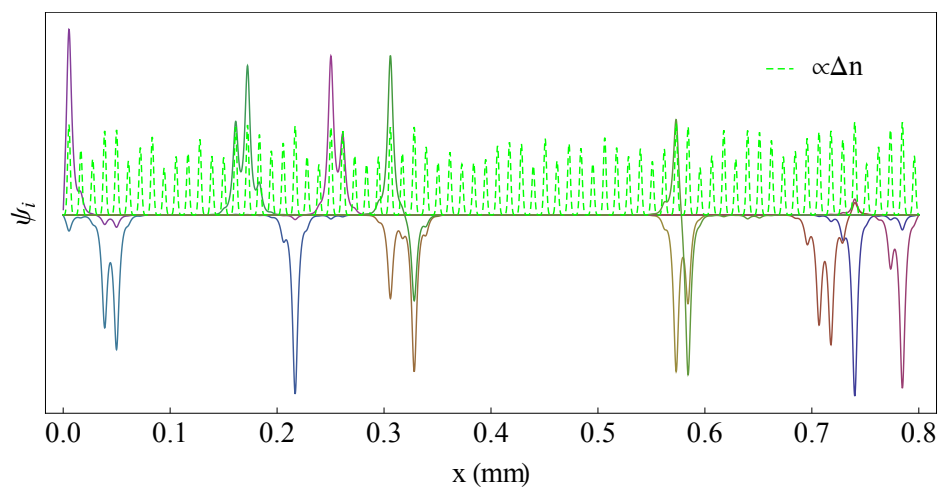
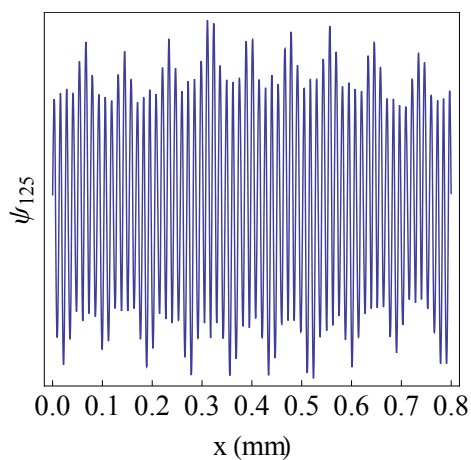
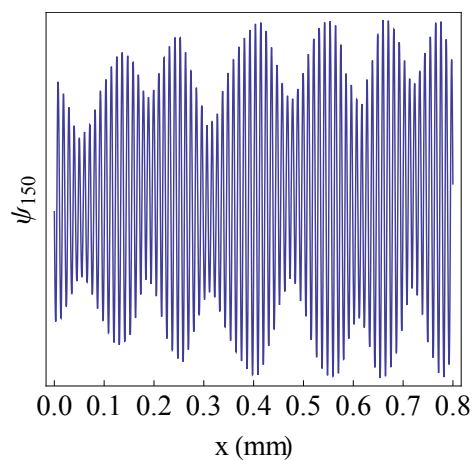
Autofunciones de la primera banda (del 1^o al 12^o).Autofunción ψ_{125} (segunda banda).Autofunción ψ_{150} (tercera banda).

Figura 28: Autofunciones de las tres bandas que aparecen en la diagonalización del caso localizante (y que se usará de base para el caso *hiperbalístico* también).

Estos dos parámetros caracterizan las autofunciones, dando información de su extensión espacial, si pueden producir localización o no, y dónde se sitúan.

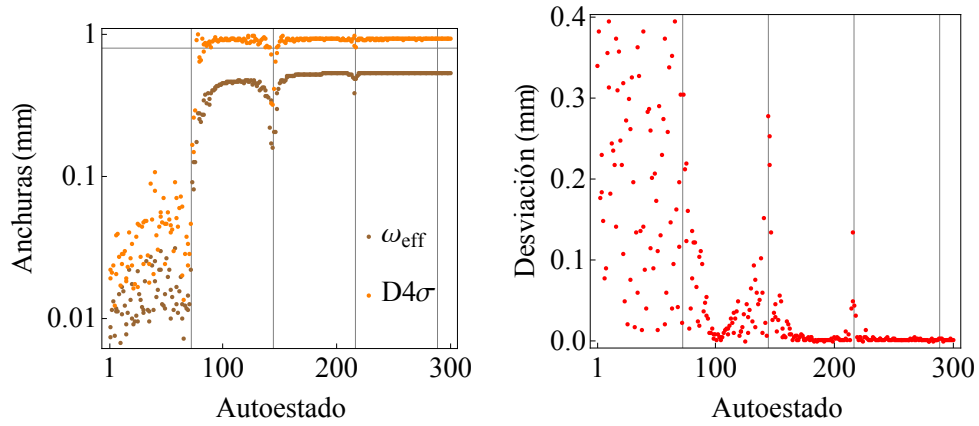


Figura 29: Anchuras (en escala logarítmica) y desviación respecto del centro de los autoestados del operador \hat{H} localizante. Se indica la anchura de la ventana y la situación de los *gaps*.

Atendiendo a la anchura de los autoestados con autovalor cercano a los *gaps*, vemos que se trata de estados no ligados relativamente localizados. Estos estados pueden entenderse como confinados por «macroestructuras» a más largo alcance, y no localmente por pozos individuales, como sucedía con los de la primera banda (figura 28). Algunos de ellos se pueden ver en la figura 30.

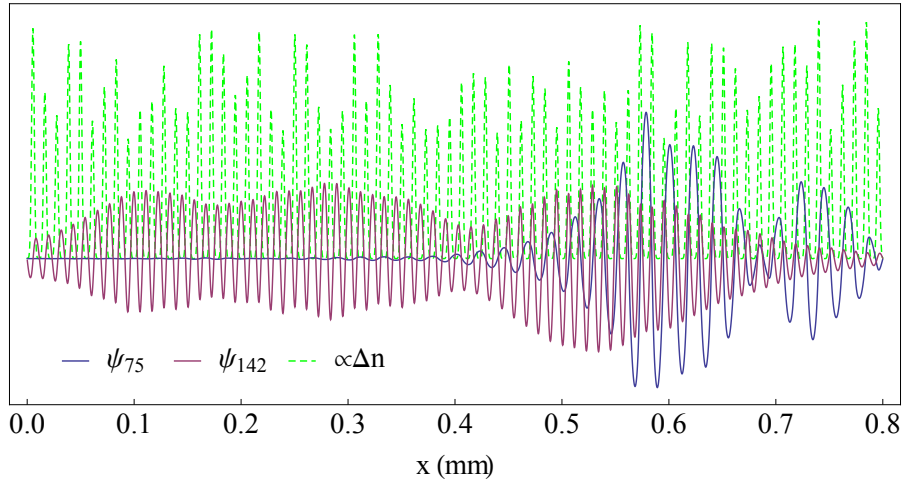


Figura 30: Autofunciones número 75 y 142, del entorno de los dos *gaps* junto al correspondiente perfil de índice de refracción del caso localizante *unidimensional* mostrado antes.

La descomposición de estados de propagación de un perfil inicialmente gaussiano en la base propia del operador de propagación $\hat{\mathcal{H}}(z=0)$ permite identificar los autoestados que participan en cada comportamiento. En la figura 31 presentamos los pesos de los 300 primeros autoestados para los casos libre (izquierda) y difusivo (derecha). Se puede apreciar claramente la importancia de los estados de las bandas segunda y tercera (de «energía»

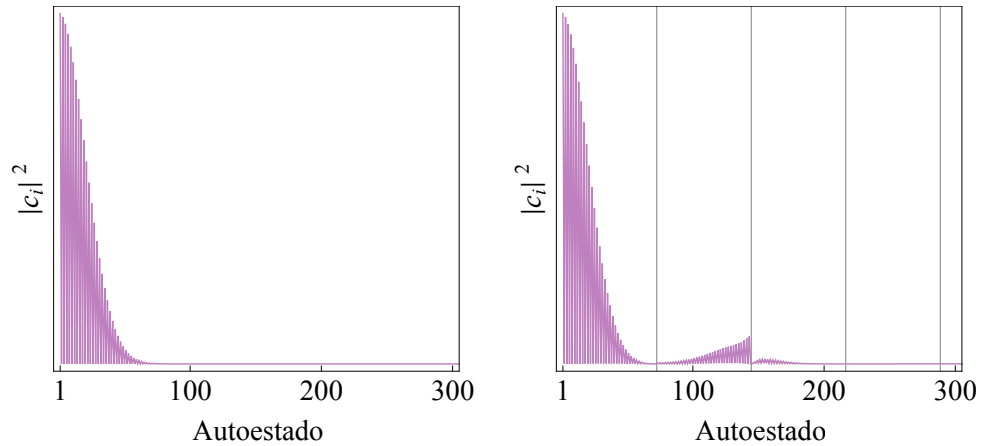


Figura 31: Descomposición de los estados de propagación de los casos libre y difusivo *unidimensionales*, respectivamente, en las bases de autoestados correspondientes. Se indica la situación de los *gaps*.

mayor), que son responsables de las *ramas* divergentes que aparecen en el caso *difusivo* y que vimos en la figura 20. Los pesos de estas bandas, además, se acumulan entorno al segundo *gap*. Estas autofunciones *de transición* entre bandas son relativamente localizadas, pero se sitúan en zonas distintas del espacio transversal (figura 29), lo que hace que mezclas de estos estados puedan generar distribuciones de luz arbitrariamente extensas en la práctica. Estas descomposiciones permanecen constantes durante la propagación hasta que empieza a actuar el absorbente lateral y salvo para el caso *hiperbalístico*, en el que la variación del índice de refracción con z hace que la base propia de $\hat{\mathcal{H}}(z=0)$ no lo sea para cualquier otro z (figura 33).

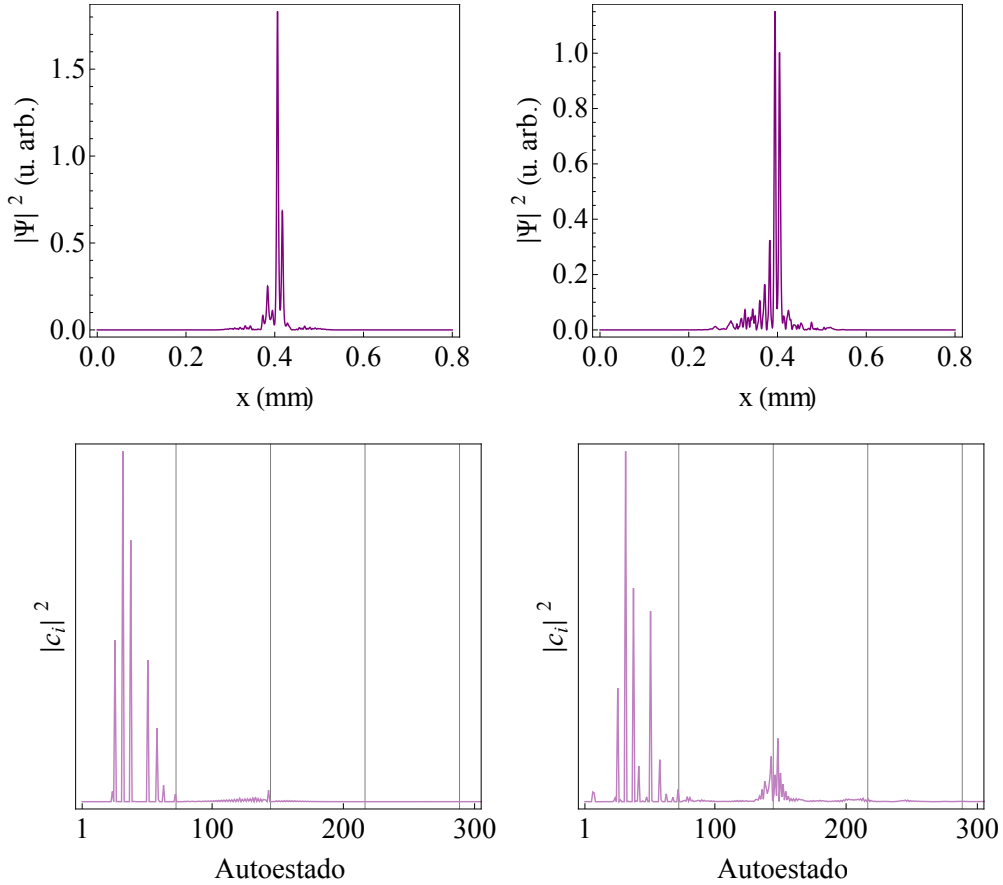


Figura 32: Estado de propagación tras un cuarto del recorrido ($z = 0.5$ cm) para los casos localizado e *hiperbalístico*, respectivamente, sobre sus descomposiciones en autoestados de $\hat{\mathcal{H}}(z=0)$. Se indica la situación de los *gaps*.

En la figura 32 se muestra la intensidad en $z = 0.5$ cm para los casos localizado e *hiperbalístico* y la descomposición de la correspondiente amplitud del campo (siendo esta descomposición independiente de z en el caso localizado). Las descomposiciones deben ser comparadas con las de los regímenes libre y difusivo de la figura 31. Al haber utilizado como base los autoestados del operador de propagación localizante, que coincide con el operador de propagación en $z=0$ del caso *hiperbalístico*, se puede ver la evolución de la descomposición a lo largo de la propagación *hiperbalística*. Durante ésta los pesos se redistribuyen, como se puede ver en la figura 33, para luego estabilizarse en una distribución cualitativamente análoga a la de la localización, con una gran contribución de algunos autoestados concretos de la primera banda y cierta distribución en los del entorno del segundo *gap*.

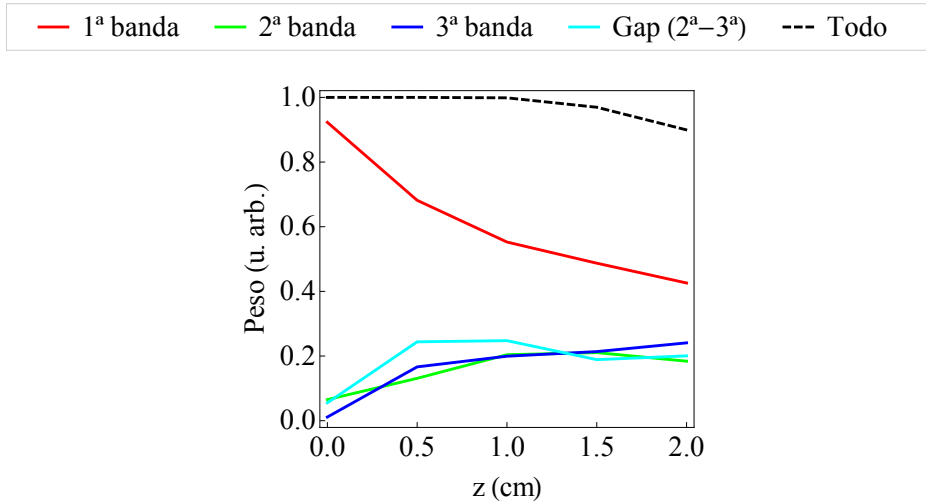


Figura 33: Evolución de los pesos de los estados de cada banda y de algunos (del número 118 al 174, ambos incluidos) situados entorno al *gap* existente entre la segunda y la tercera durante la propagación *hiperbalística*. Puede verse cómo el absorbente empieza a actuar sobre la población total a mitad de la propagación. El reparto inicial corresponde a la propagación con localización, donde éste es constante.

Para observar el papel de cada banda en la propagación se puede reconstruir la dinámica restringida a los estados de una sola banda, o a cualquier otra serie finita de estados, con los pesos iniciales que les correspondan. Esto representaría la propagación de esa combinación de autoestados por un medio de índice *estático* y nos permitirá ver la dinámica de cada uno de esos grupos, identificando cuál contribuye más a la localización y cuál contribuye

más a una dinámica *hiperbalística*. En la figura 34 se muestran los estados compuestos con las autofunciones de cada banda y de la región *de transición* que hay entre la segunda y la tercera, demostrando cómo la localización es producida principalmente por los estados de la primera banda mientras que la propagación *hiperbalística* es producida principalmente por los estados *de transición* entre las bandas segunda y tercera.

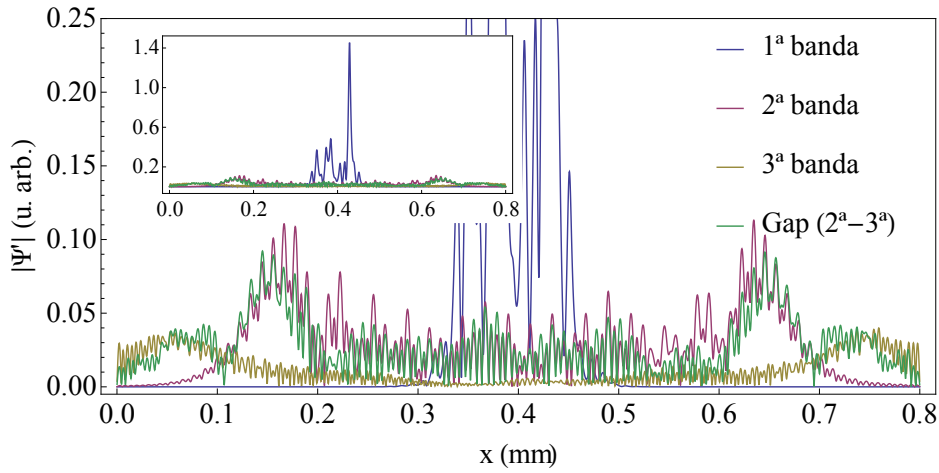


Figura 34: Composiciones propagadas en el medio de índice de refracción estático, correspondientes a diferentes paquetes de autofunciones del caso localizado. Los autoestados tomados para la curva *Gap* (2^a-3^a) van del número 118 al 174, ambos incluidos.

4.2. Sistema *bidimensional* con índice cilíndricamente simétrico

A continuación se presentan los resultados correspondientes a la extensión de nuestro sistema a dos dimensiones transversales, adaptando los perfiles de índice estudiados en una dimensión tal y como se indicó en la sección 3.1.5. Para ello hemos integrado numéricamente la ecuación (5) utilizando como condiciones iniciales los modos de Laguerre-Gauss: $\Psi_{\ell p} = \{\Psi_{00}, \Psi_{01}, \Psi_{02}, \Psi_{10}, \Psi_{20}\}$, con la misma notación utilizada antes.

Los valores de los parámetros del haz utilizados en esta parte coinciden con los del sistema *unidimensional*, pero ahora la anchura física del espacio

de propagación es de $1600\ \mu\text{m}$, al mantener la ventana numérica en $800\ \mu\text{m}$ y corresponder ésta ahora a la variable radial ρ .

4.2.1. Difracción libre o balística

Lo primero que se ha hecho es comprobar que el código empleado calcula correctamente la propagación libre. Para esto se ha comparado, para cada modo, la evolución simulada frente a la conocida de forma analítica, como se muestra en la figura 35. La pequeña diferencia que se observa entre ambas

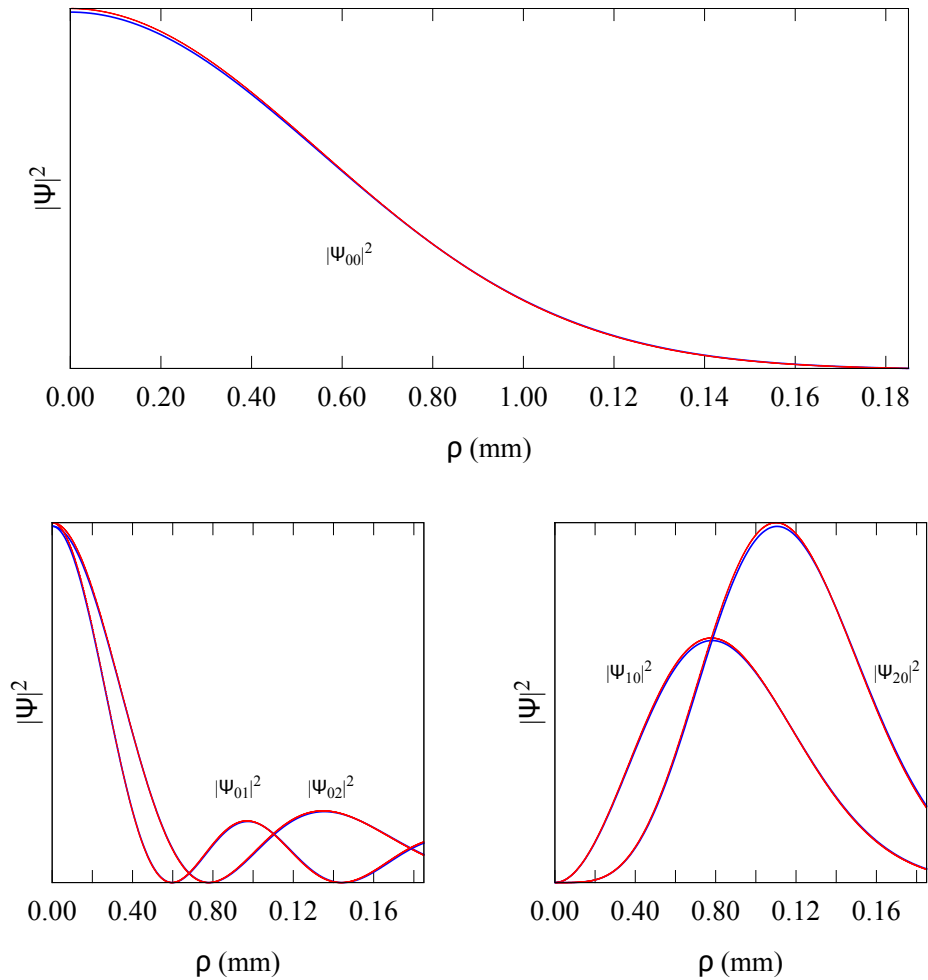


Figura 35: Comparación del estado final ($L=2\ \text{cm}$) de cada modo tras su propagación libre mediante el modelo numérico *bidimensional* (rojo) con su versión teórica (azul).

curvas se debe únicamente a la discretización de la malla espacial, ya que desaparece variando la resolución del cálculo.

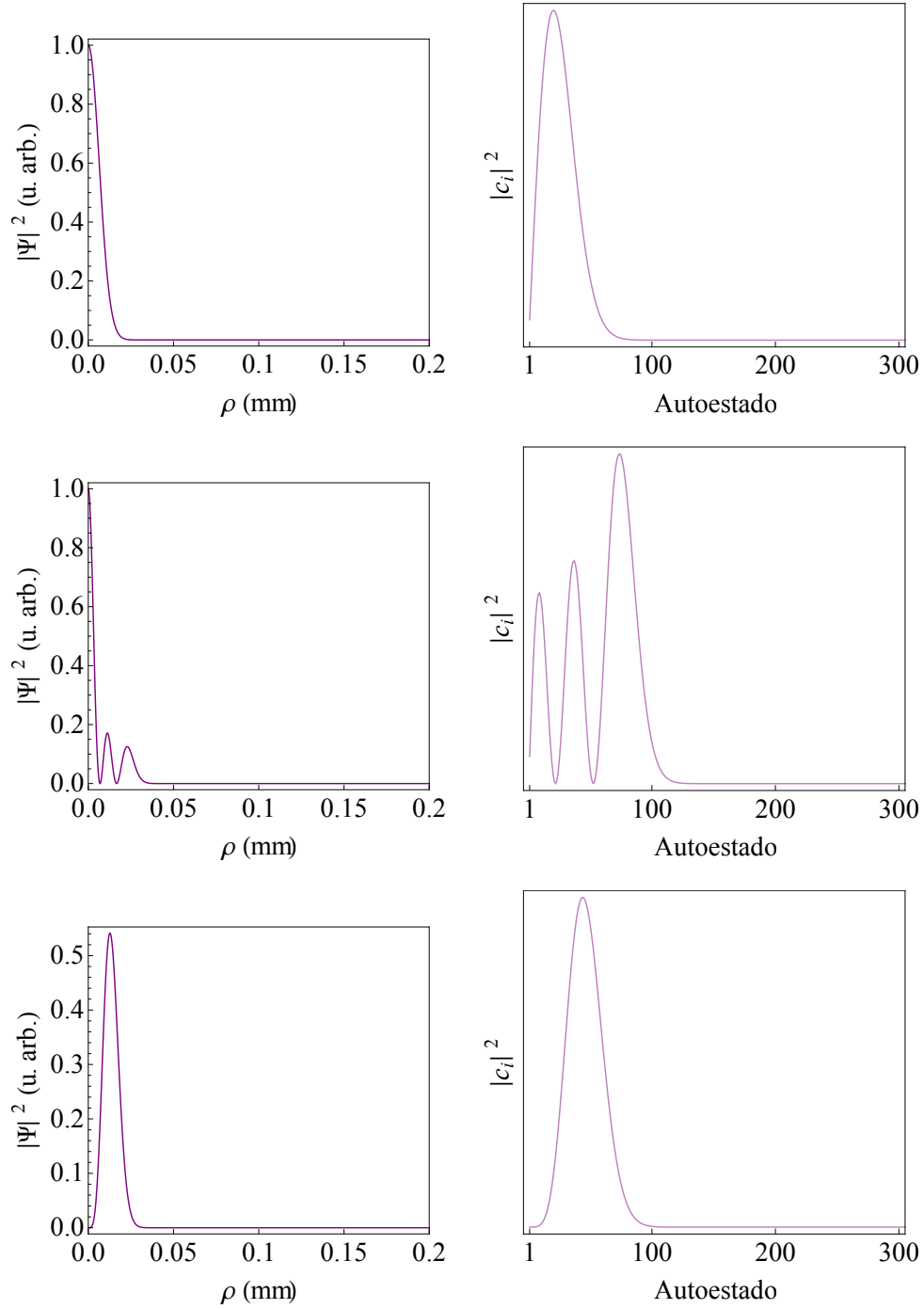


Figura 36: Estados iniciales (Ψ_{00} , Ψ_{02} y Ψ_{20} de arriba a abajo) y su descomposición en autoestados del operador de propagación libre, que será constante durante esta propagación.

El espectro de autovalores, en todos los casos *bidimensionales*, es muy similar al obtenido en una dimensión (figuras 24, 25, y 27), y la descomposición en autoestados de las propagaciones libres, representadas en la figura 36, refleja la estructura del estado propagado.

Conviene también tener en cuenta que la evolución de las anchuras en las propagaciones libres es distinta para cada modo, como se muestra en la figura 37 para el parámetro ω_{eff} . También se observa ahí la coincidencia de anchuras en el caso particular de haces gaussianos, independientemente de si se trata del de una o dos dimensiones transversales, siendo sus normalizaciones diferentes, tal y como se dijo en el apartado 4.1.1. No pasa lo mismo para el resto de modos, que se difractan más rápidamente que la gaussiana (más incluso que la propagación *hiperbalística unidimensional* de la figura 21), lo que se debe tanto al término centrífugo asociado al momento angular como a la excitación radial, en el caso de estados de p no nulo. Por todo ello será necesario realizar comparaciones de anchuras entre los regímenes de difusión de forma relativa a la situación libre o periódica de cada modo, como se hará en la figura 54.

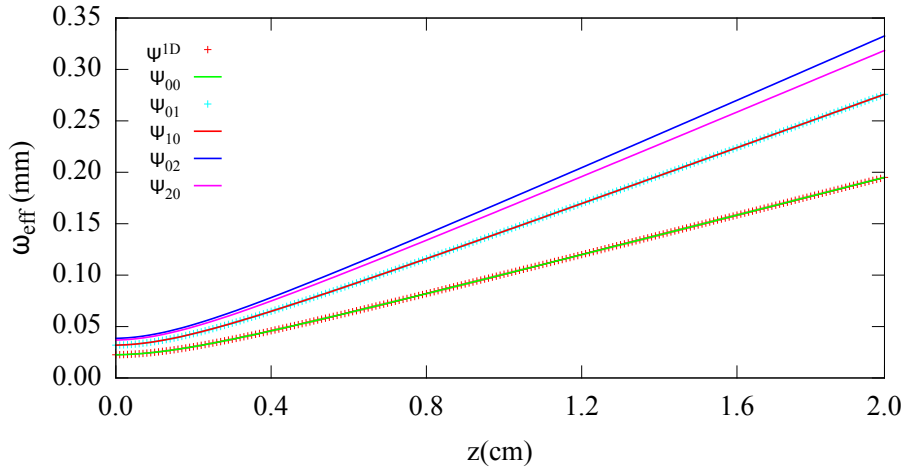


Figura 37: Evolución de las anchuras del haz en todas las situaciones de propagación libre consideradas. Las dinámicas de los modos Ψ_{01} y Ψ_{10} y las de Ψ_{00} y el caso *unidimensional* aparecen superpuestas.

4.2.2. Índice de refracción con *periodicidad* radial

Definiremos ahora una estructura anular (*periódica*) de índice de refracción análogo a una *fibra de Bragg*, con la salvedad de que en ella se tiene un núcleo *hueco* donde la luz es confinada¹⁷ (figura 38). Centrándonos en nuestro sistema,

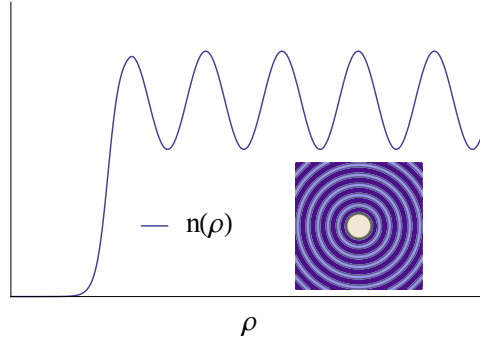


Figura 38: Perfil de índice de una *fibra de Bragg*.

los perfiles de intensidad obtenidos a la salida ya no se corresponden con los típicos perfiles *de Bloch*, que se asemejarían a los de difusión libre, conservando una apariencia aún gaussiana aunque con las modulaciones de la red, como sucede con una sola dimensión transversal (figura 9). Los perfiles presentan, ya en este caso de difusión sin ruido alguno, la exponencial característica de la localización, especialmente en el caso de Ψ_{00} , como se aprecia en la

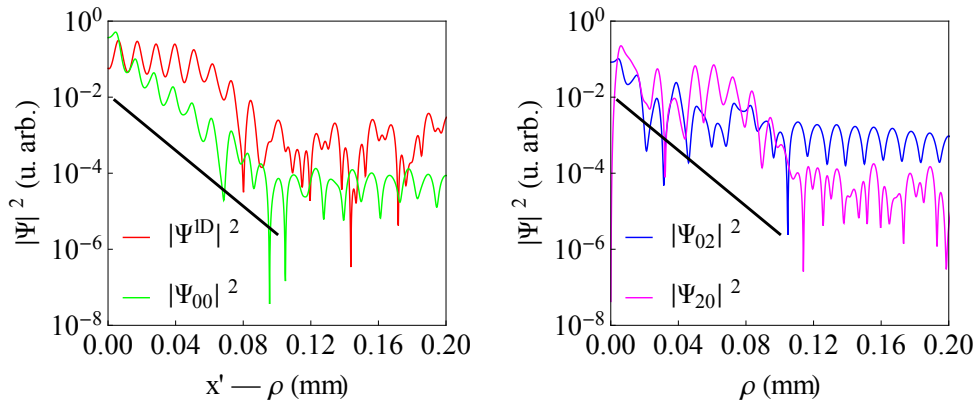


Figura 39: Estados finales de propagación a través del medio de índice *periódico* transversal para algunos de los distintos modos iniciales probados. Se indica en negro la tendencia exponencial (escala logarítmica) de Ψ_{00} (coincide con la de localización *unidimensional*). El caso *unidimensional* es el de la figura 9, y aquí $x' \equiv x - x_c$.

figura 39. Más adelante, cuando estudiemos la evolución de la anchura de las distribuciones, veremos que esto no supone una *localización de Anderson* obtenida sin necesidad de añadir ruido aleatorio.

La evolución de las anchuras de estos haces a lo largo de la propagación por este medio es la mostrada en la figura 40. En ella se aprecia que, si bien el crecimiento en los casos libres es más rápido que en una dimensión (figura 37), estas propagaciones *difusivas* son similares e incluso más lentas que en el caso periódico *unidimensional* (compárense las figuras 21 y 40), aunque en ninguno de los haces se tiene la estabilización de la anchura del haz característica de la *localización de Anderson*.

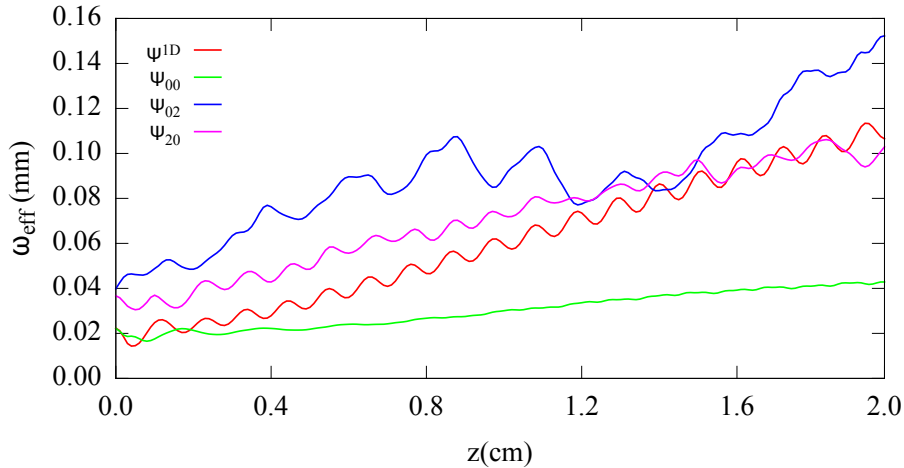


Figura 40: Anchuras del caso *difusivo bidimensional* a lo largo de la propagación para algunos de los modos empleados, comparadas con el caso *difusivo unidimensional*.

Los espectros de autovalores en este caso son análogos también a los de una dimensión, y sólo hay pequeñas diferencias en función del número ℓ en los entornos de los *gaps*, no mayores que los que se dan entre el caso *unidimensional* y uno de los *bidimensionales* en la figura 41.

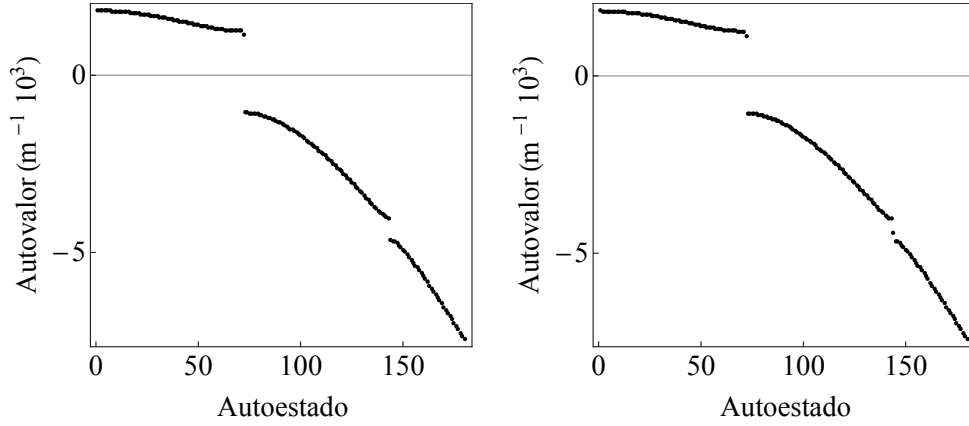


Figura 41: Espectro de autovalores del sistema *unidimensional* y del *bidimensional* con $\ell=0$, respectivamente, de un medio con periodicidad.

Sin embargo las descomposiciones del haz *difusivo bidimensional* en los autoestados del operador de propagación sí son cualitativamente diferentes a las que se esperaría con lo visto en las versiones libre y difusiva *unidimensionales* (figura 31), como se observa si se comparan aquellas con las figuras 36 y 42. En este caso ya aparecen espontáneamente contribuciones destacadas de estados individuales próximos a los *gaps*, como pasaba en el caso localizante *unidimensional* (figura 32), incluso de forma más exagerada.

Las anchuras de los autoestados de este perfil de índice periódico, que tampoco varían significativamente con los valores de ℓ usados, se han representado para $\ell=0$ en la figura 43. Junto a ellas se puede ver la situación *unidimensional*, que se diferencia principalmente en los estados próximos a los *gaps*. Esto se debe a la definición del parámetro ω_{eff} , que resulta en comportamientos opuestos. Ya que la anchura obtenida según la definición de ω_{eff} refleja el *radio* del *anillo* en lugar de su *grosor*, que sí que se correspondería con la anchura asignada en una dimensión, en dos dimensiones es necesario considerar a la vez los dos parámetros de anchura, ω_{eff} y $D4\sigma$, si se quiere tener una visión completa de la estructura del estado.

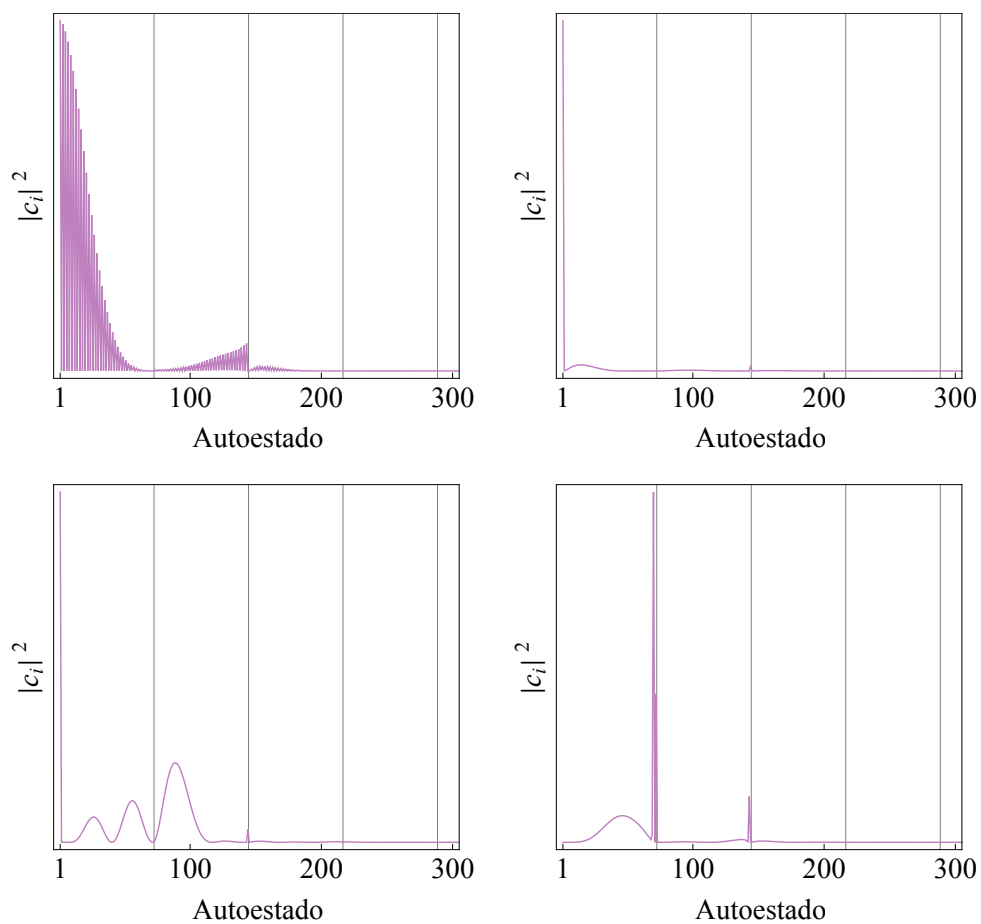


Figura 42: Descomposición de los haces que propagan por el perfil periódico. Corresponden, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, al caso *unidimensional*, ya mostrado en la parte derecha de la figura 31, y a Ψ_{00} , Ψ_{02} , y Ψ_{20} en el sistema *bidimensional*. Se indica la situación de los *gaps*.

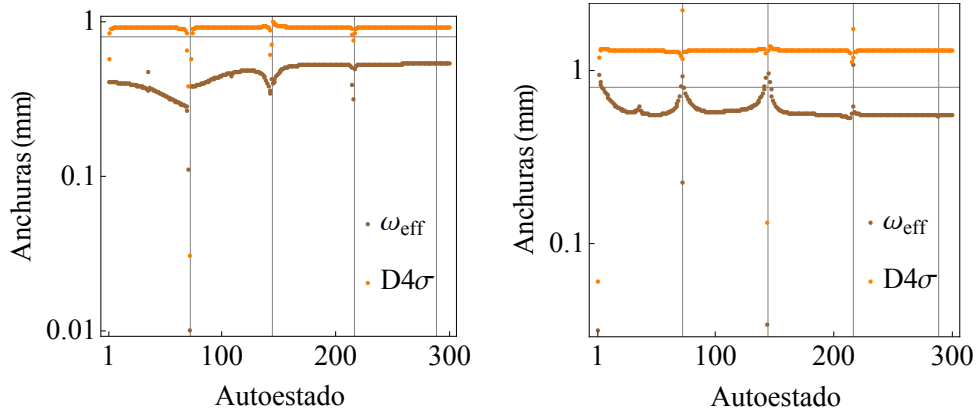


Figura 43: Anchuras de autoestados (en escala logarítmica) en la situación periódica *unidimensional* (izquierda) y *bidimensional* para $\ell=0$ (derecha). Se indica la anchura de la ventana y la situación de los *gaps*.

Como conclusiones de lo obtenido en este régimen se puede señalar que la evolución de las anchuras de los haces propagados, la estructura de bandas y las anchuras de los autoestados son análogas a las del caso *unidimensional* correspondiente, pero los perfiles finales y las descomposiciones en autoestados se parecen más a la situación localizante del sistema *unidimensional*. Además hemos visto la importancia de tener dos parámetros de anchura distintos en dos dimensiones, especialmente en casos en los que aparezca o se pueda esperar una estructura de bandas.

4.2.3. Índice de refracción con aleatoriedad radial

Estudiemos ahora el caso aleatorio. Para ello hemos implementado el mismo tipo de ruido que en la situación *unidimensional* daba lugar a la *localización de Anderson* (apartado 4.1.3). Las distribuciones de intensidad finales se pueden ver, para distintos valores de ℓ y de p , en la figura 44. Comparando en ésta las dos gráficas de la parte superior (una sola realización) con las de la parte inferior (promedio de 100 realizaciones) podemos concluir que estos casos *bidimensionales* también presentan un *auto-promediado* aceptable.

Las anchuras evolucionan, para estas propagaciones, según las curvas de la figura 45. La anchura del caso Ψ_{02} se estabiliza más tarde por causa

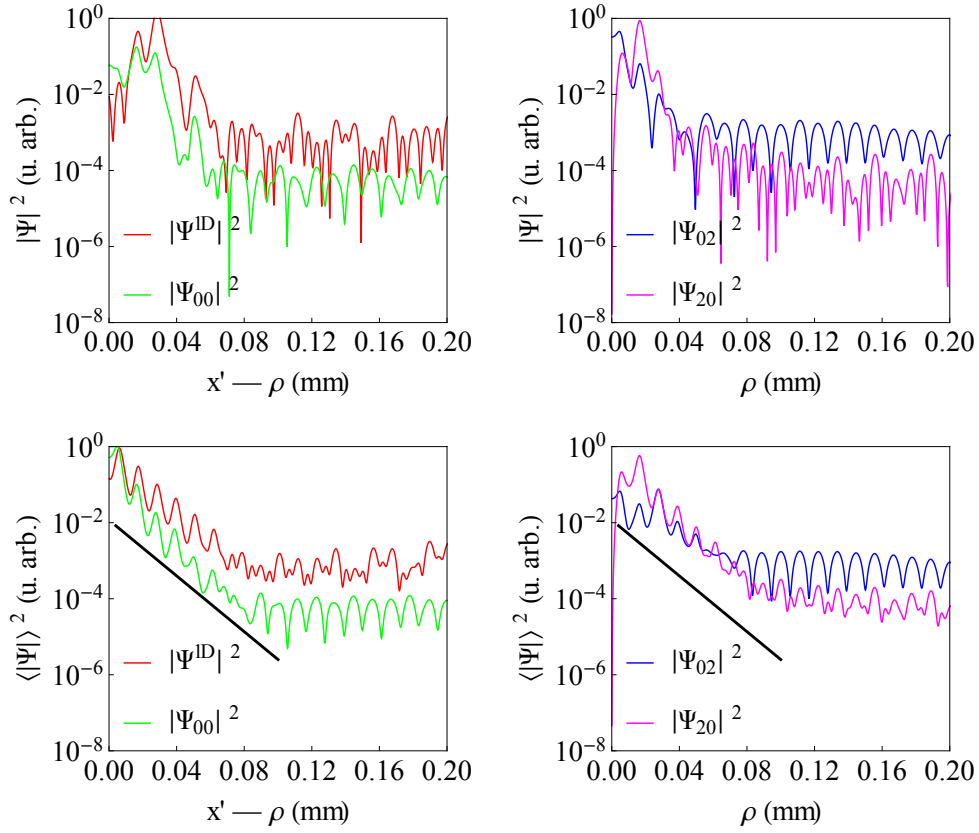


Figura 44: Intensidad final ($L = 2$ cm) en un medio con aleatoriedad para una realización individual (arriba) y para el promedio sobre 100 distintas (abajo). Se indica en negro la tendencia exponencial del caso *unidimensional* (escala logarítmica). En el caso *unidimensional*, $x' \equiv x - x_c$.

de la mayor excitación radial, p . Por la misma razón, la pendiente de la cola exponencial en la figura 44 se muestra ligeramente menor que en el resto de casos. Tanto la estructura exponencial final como el crecimiento estabilizado de la anchura muestran claramente que en este sistema *bidimensional* también se produce localización. Se puede distinguir además en el estado final de la propagación de Ψ_{00} (figura 44) una mayor pendiente que en el caso *unidimensional*, lo que equivale a una menor *longitud de localización* (mayor confinamiento) que en el caso *unidimensional*.

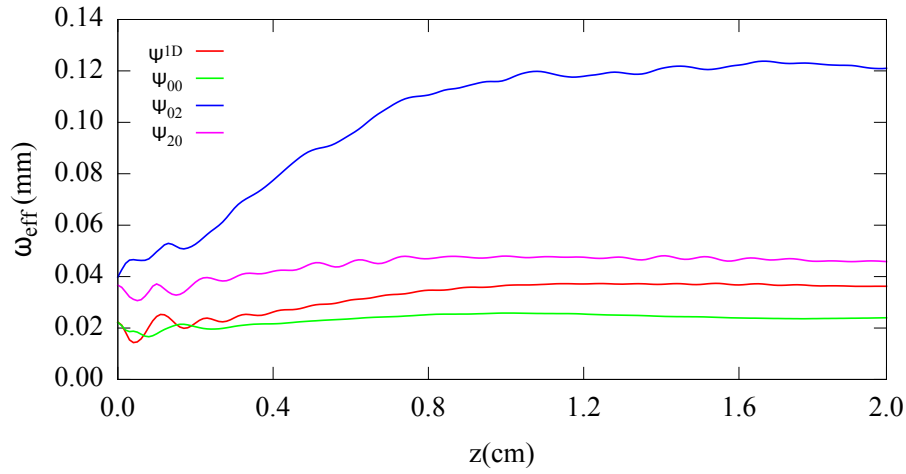


Figura 45: Anchuras del haz promediado en 100 propagaciones por un medio con aleatoriedad sobre el perfil periódico.

En la figura 46 se muestra el espectro de autovalores del operador de propagación $\hat{\mathcal{H}}$ del caso con $\ell=2$. En dos dimensiones, con los mismos perfiles de índice de refracción que en una, se tienen fundamentalmente los mismos autovalores, variando ligeramente con ℓ en los extremos de las bandas.

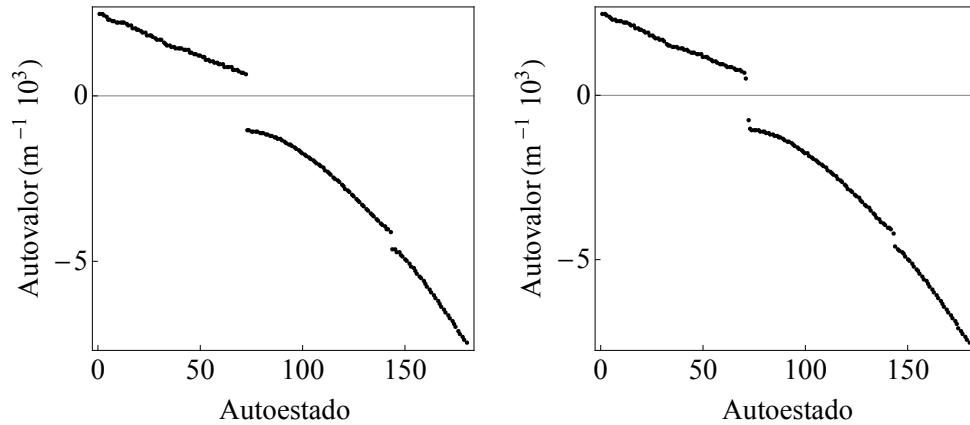


Figura 46: Autovalores del operador de propagación *localizante* para el caso *unidimensional* (izquierda), ya mostrado en la figura 27, y para $\ell=2$ (derecha).

En la figura 47 se presenta la descomposición en autoestados de varios casos con un perfil de índice de refracción aleatorio sobre fondo periódico. El primero es la referencia *unidimensional*, seguido de los casos *bidimensionales*

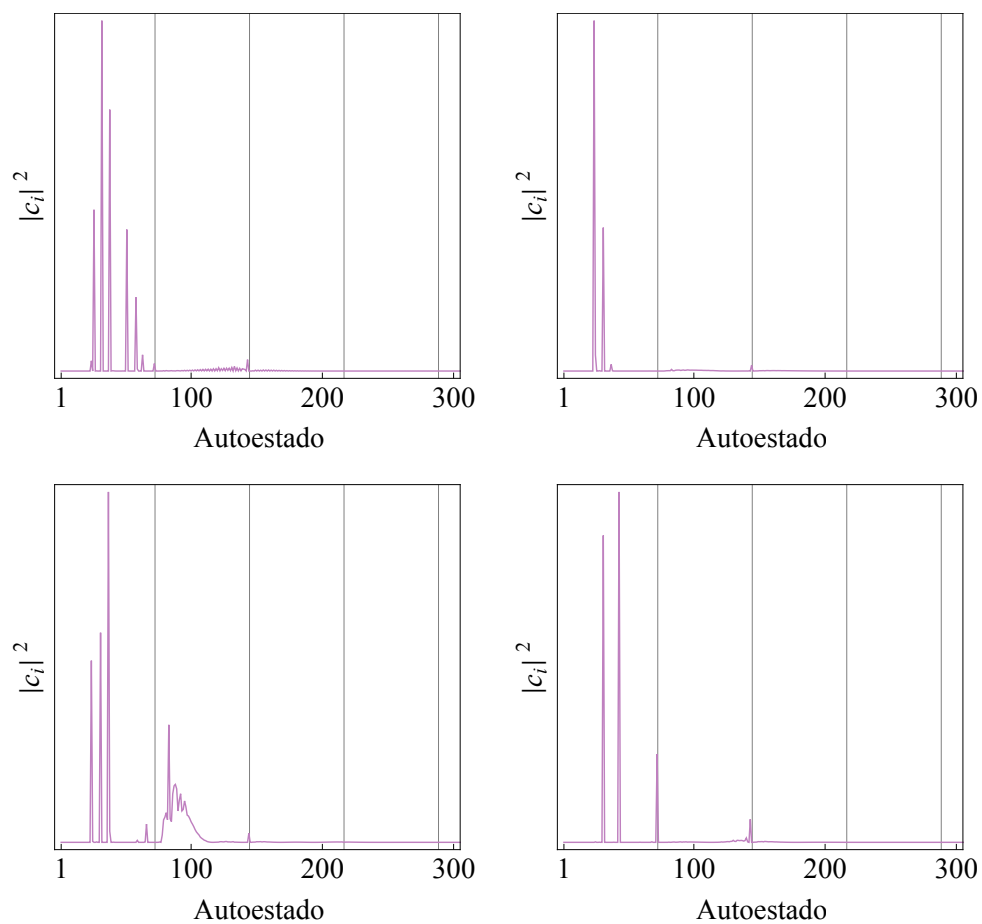


Figura 47: Descomposición de los haces que propagan por el perfil con aleatoriedad (constante) sobre fondo periódico. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestra la situación *unidimensional* (ya mostrada en la figura 32) y la *bidimensional* para Ψ_{00} , Ψ_{02} , y Ψ_{20} . Se indica la situación de los *gaps*.

Ψ_{00} , Ψ_{02} , y Ψ_{20} (estos dos últimos en la parte inferior de la figura). Como vemos aparecen diferencias en las componentes radialmente más localizadas (las de la primera banda y entorno a los *gaps*), lo que es lógico ya que cada estado inicial tiene una distribución espacial diferente. Llama más la atención el modo Ψ_{02} , donde tiene fuerte peso un conjunto de estados que ahora no se sitúa exactamente en el *gap* entre las bandas segunda y tercera. Ese conjunto de estados son los *primeros* de la segunda banda que empiezan a estar centrados en $\rho=0$, por donde entra al medio el haz en este caso. Como veremos a continuación, estos estados no son de los más localizados, lo que es consistente también al tratarse de un haz relativamente extendido, como se vio en la figura 36. Por otro lado, esos estados podrían ser los responsables de la localización *tardía* del estado Ψ_{02} antes mencionada (figura 45).

Las anchuras de los autoestados que produce este perfil de índice se muestran en la figura 48. En este caso las autofunciones de la primera banda y las de los entornos de los *gaps* tienen una apariencia similar a las del problema *unidimensional*, estando también localizadas en picos de índice individuales situados en distinta posición ρ . Conviene recordar de nuevo que, como en el caso *bidimensional* tenemos estructuras anulares de luz, puede ser que anillos de poco *grosor* presenten anchuras ω_{eff} grandes, debido a su radio.

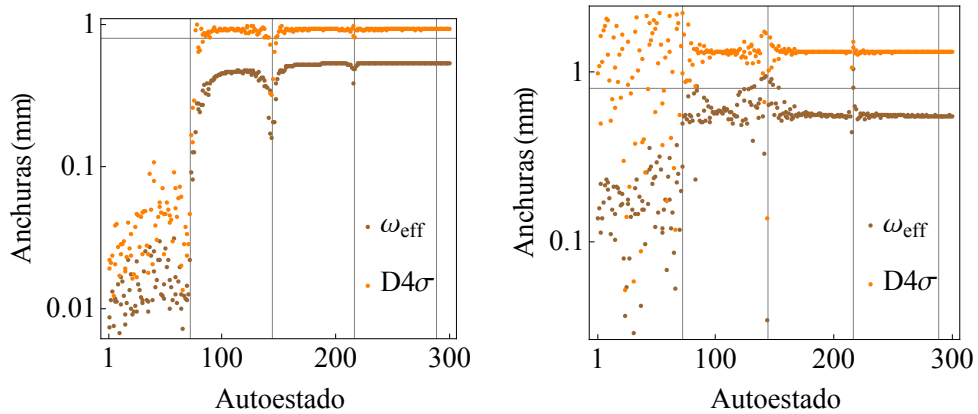


Figura 48: Anchuras de autoestados del operador de propagación con aleatoriedad (en escala logarítmica). Izquierda: en una dimensión (mostrado ya en la figura 29). Derecha: en dos dimensiones para $\ell = 0$. Se indica la anchura de la ventana y la situación de los *gaps*.

Como resumen, hemos visto en este apartado que priman las similitudes con el sistema *unidimensional* en cuanto a la aparición de la *localización de Anderson*. Todo es bastante coherente con lo que allí sucedía, salvo quizás las anchuras de los autoestados obtenidos, que se deben, según lo expuesto, a las diferencias propias de la construcción de los sistemas en una y dos dimensiones y en las definiciones de los parámetros, como se ha señalado en el apartado previo. En algunos casos de este sistema *bidimensional* han aparecido contribuciones de estados que no son del borde de las bandas, lo que puede estar causando la *ralentización* de la localización. En otros casos los estados de los bordes de las bandas tienen un peso mayor que en una dimensión, dando mayor tendencia a la localización. Hay que destacar que esta mayor facilidad, en general, para el confinamiento en el sistema *bidimensional*, ya se notó en el transporte por el medio periódico.

4.2.4. Índice de refracción con aleatoriedad radial variable en z

Veamos ahora el efecto que tiene una modulación del ruido dependiente de la coordenada de propagación. Los resultados, ahora en dos dimensiones, serán comparados con los *unidimensionales* (sección 4.1.4). En la figura 49 se han representado los perfiles de intensidad finales tanto en una realización individual como en un promedio sobre un conjunto de 100 realizaciones. En ella se ve cómo se ha perdido el perfil exponencial del caso anterior, con ruido independiente de la coordenada de propagación. Pueden compararse además los perfiles promediados con el del sistema *unidimensional* equivalente, que se ha representado en la misma figura. Queda claro aquí cómo el tipo de transporte inducido por el perfil de índice que varía con z en el sistema *bidimensional* es menos difusivo que el producido en el sistema *unidimensional* estudiado anteriormente.

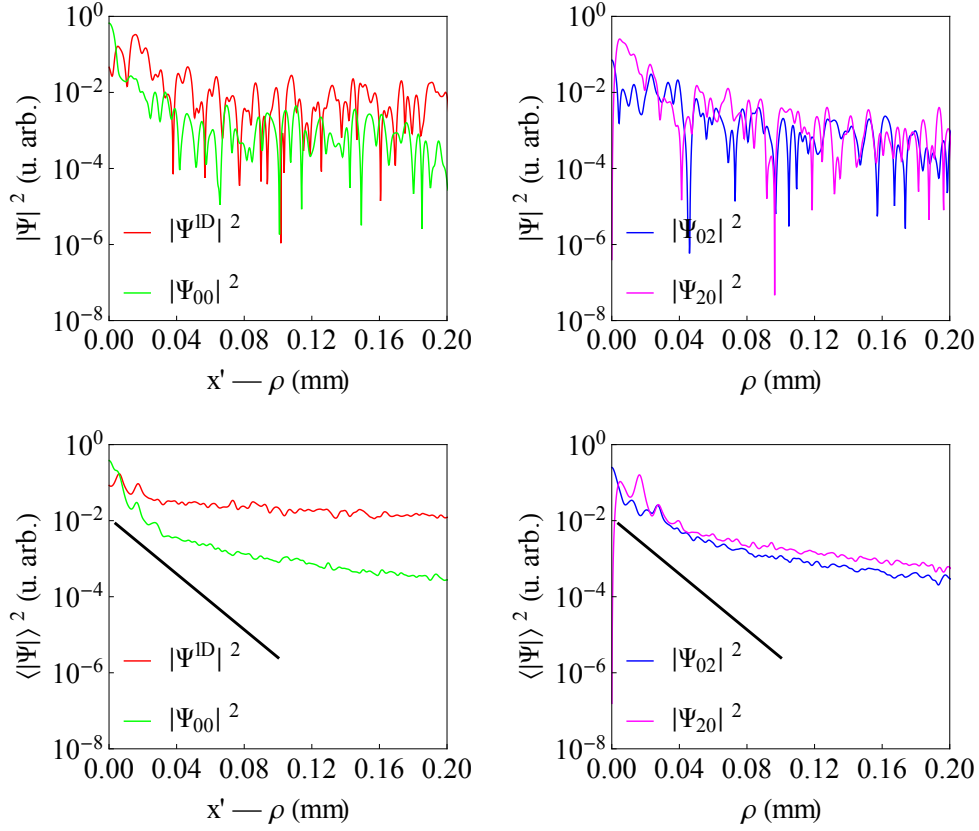


Figura 49: Intensidad final ($L=2$ cm) en un medio con aleatoriedad que evoluciona en z . Se observa también aquí el *auto-promediado*: arriba se ve el resultado de una propagación individual, y abajo el promedio sobre 100. Se indica en negro la tendencia exponencial del caso localizado *unidimensional*, mostrado en figuras previas. En el caso *unidimensional*, $x' \equiv x - x_c$.

La evolución de las anchuras se muestra en la figura 50 para el caso promediado, y confirma la dificultad de obtener el *hipertransporte* en este sistema frente al de una sola dimensión transversal que se veía en la distribución de la intensidad saliente. Los modos no mostrados tienen aproximadamente la misma tendencia que Ψ_{20} .

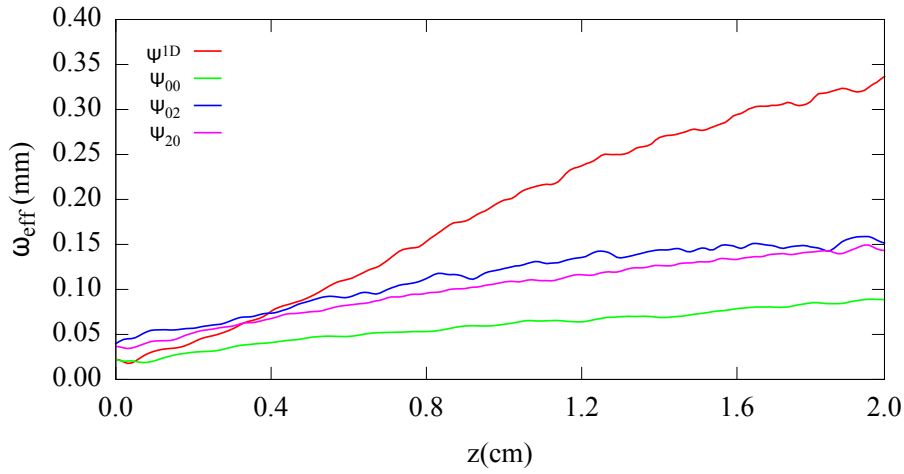


Figura 50: Evolución de las anchuras del haz promediado en 100 propagaciones por un medio con aleatoriedad variable en z para algunos de los modos.

Por otro lado esta dificultad era de esperar a partir de lo aprendido del sistema *unidimensional*. Allí los haces a través de los perfiles de índice periódico y localizante producían unas *ramas* rápidamente divergentes (figura 20), como ya se ha señalado, por lo que se puede considerar que el *hipertransporte* estaba ya latente en dichos casos, mientras que en las situaciones análogas en dos dimensiones estas *ramas* no aparecen. Se da una muestra de esto en la figura 51, donde por resumir se ha seleccionado el estado inicial Ψ_{02} , de forma que puede realizarse la comparación con la figura análoga del sistema *unidimensional* (figura 20).

Utilizando como base las autofunciones del operador de propagación en $z=0$, las del caso anterior (cuyas anchuras se dieron en la figura 48), obtenemos las descomposiciones de la distribución obtenida tras 0.5 cm de propagación que se muestran en la figura 52. En ellas se ve que las estructuras obtenidas ahora no son tan sencillas como las del sistema *unidimensional*, y los estados del *gap* situado entre la segunda y la tercera bandas, tan característicos del *hipertransporte* allí, ya no contribuyen de una forma tan destacada. Aunque aparecen contribuciones de autoestados *rápidos* ya en esta etapa temprana de la propagación, el *hipertransporte* no aparece como lo hacía en el sistema *unidimensional*.

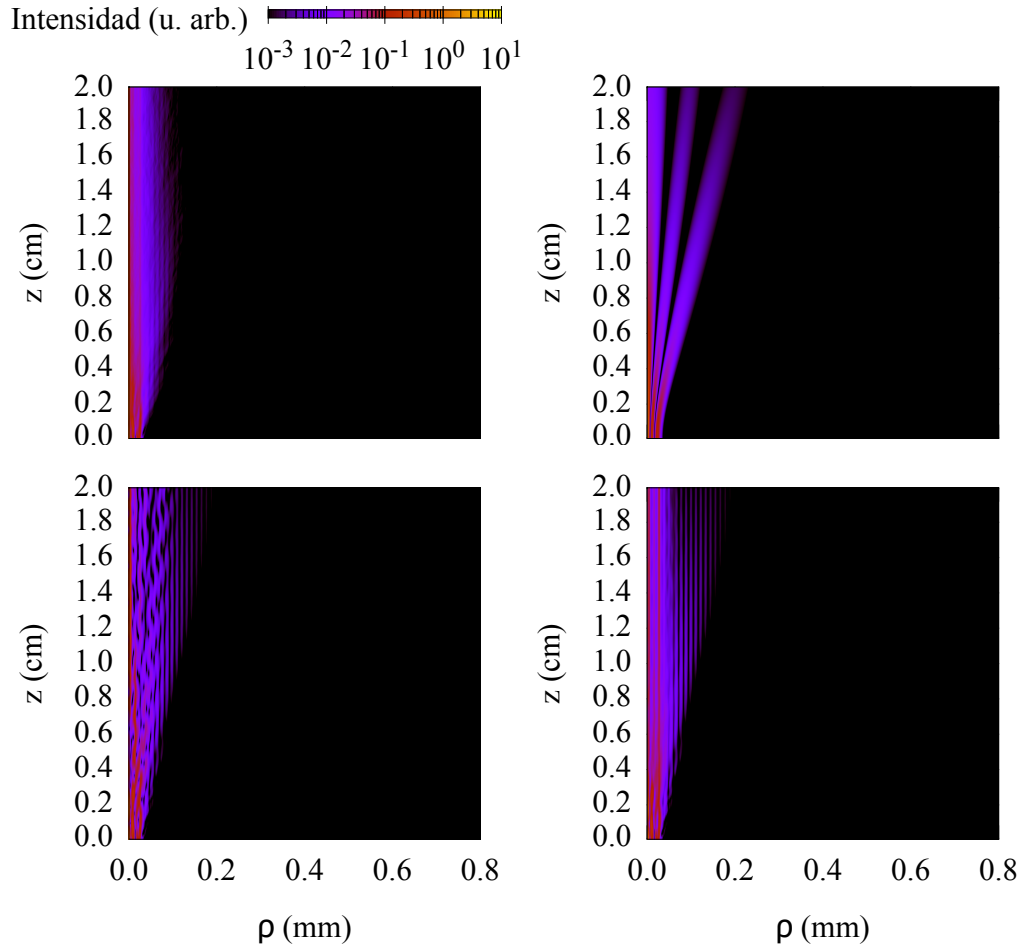


Figura 51: Mapas de las propagaciones de Ψ_{02} por los medios con aleatoriedad variable en z , homogéneo (propagación libre), con periodicidad radial y con aleatoriedad constante en z , de izquierda a derecha y de arriba a abajo, promediadas sobre 100 realizaciones. La intensidad está en escala logarítmica. Puede compararse con la figura 20.

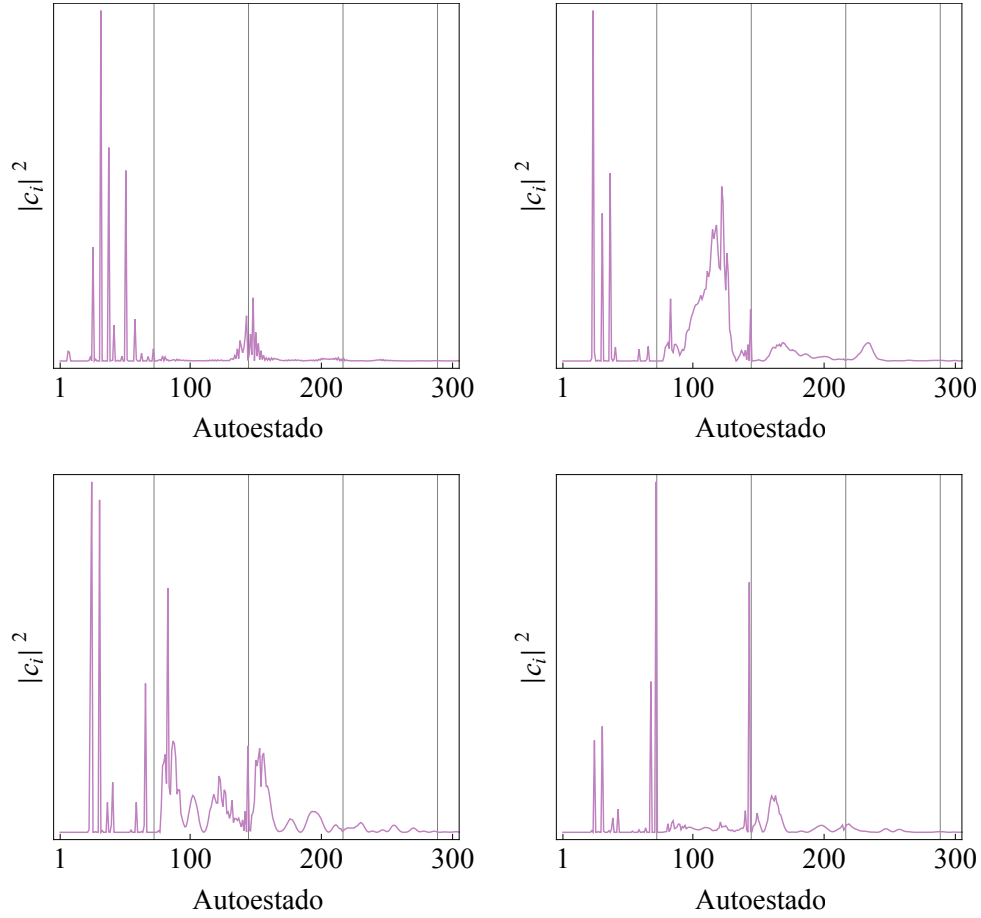


Figura 52: Descomposición de los haces tras un cuarto de propagación ($z=0.5$ cm) por el perfil con modulación en z . Corresponden, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, al sistema *unidimensional* y a Ψ_{00} , Ψ_{02} , y Ψ_{20} en el *bidimensional*. Se indica la situación de los *gaps*.

También es interesante analizar aquí la evolución de los pesos de cada banda en las propagaciones por el medio cuyo ruido varía con z , tal y como se vio en una dimensión. Se han representado ambos casos en la figura 53, y queda claro que aunque el sistema *bidimensional* no parece mostrar transporte *hiperbalístico* (en el sentido de que no difracta más rápidamente que el caso libre o *balístico*) la contribución de la primera banda, cuyos estados son transversalmente menos móviles, se pierde al inicio de la propagación para poblar principalmente la segunda banda; tras esto la descomposición se estabiliza en una distribución más parecida a las de la figura 52. Sin embargo,

en este caso, los estados que más población reciben son los internos de la segunda banda, y no los del *gap*, como ocurría en la propagación *hiperbalística* en el caso *unidimensional*.

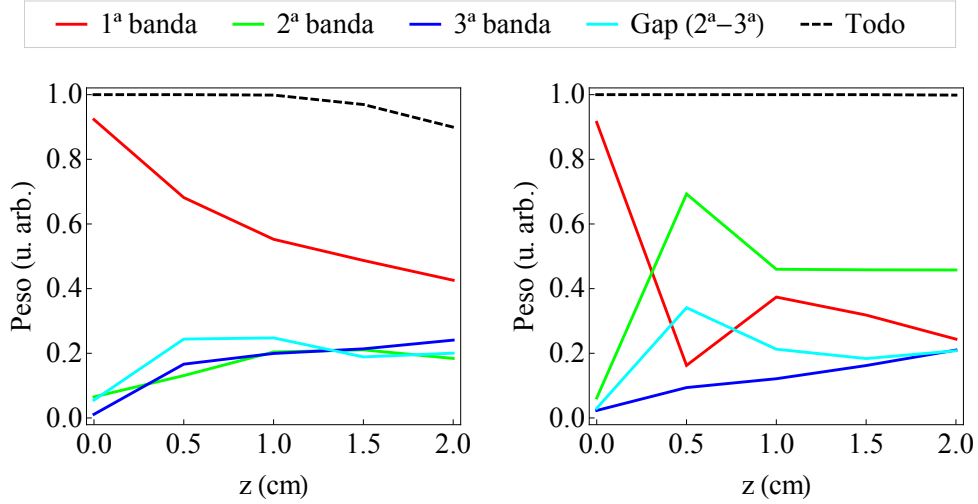


Figura 53: Evolución de los pesos de las componentes agrupadas por banda a la que pertenecen para el sistema *unidimensional* (izquierda) y para el modo Ψ_{00} de Laguerre-Gauss (derecha).

4.3. Comparación entre diferentes sistemas *1D* y *2D*

Como se ha visto en lo anterior, la principal novedad encontrada al pasar al sistema bidimensional con simetría cilíndrica es la mayor tendencia al *confinamiento*, en términos generales, sea cual sea el perfil del índice de refracción (salvo el libre) y el estado inicial probados. A modo de recopilación y para tener una visión comparada de los distintos regímenes observados en cada sistema para las diferentes funciones prueba, se ha hecho una representación donde este resultado se aprecia perfectamente (figura 54). En ella se muestra la evolución de la diferencia entre las anchuras obtenidas para distintos regímenes de propagación, para los casos *unidimensional* y los cuatro casos *bidimensionales* estudiados, tomando éstas del promedio de 100 realizaciones. En la gráfica superior se observa la diferencia entre la anchura del caso con ruido aleatorio variable en z y la anchura del caso libre correspondiente. Queda claro que en el sistema *bidimensional* el *hipertransporte* queda inhibido, al menos en los casos estudiados. La gráfica de abajo debe ser interpretada con

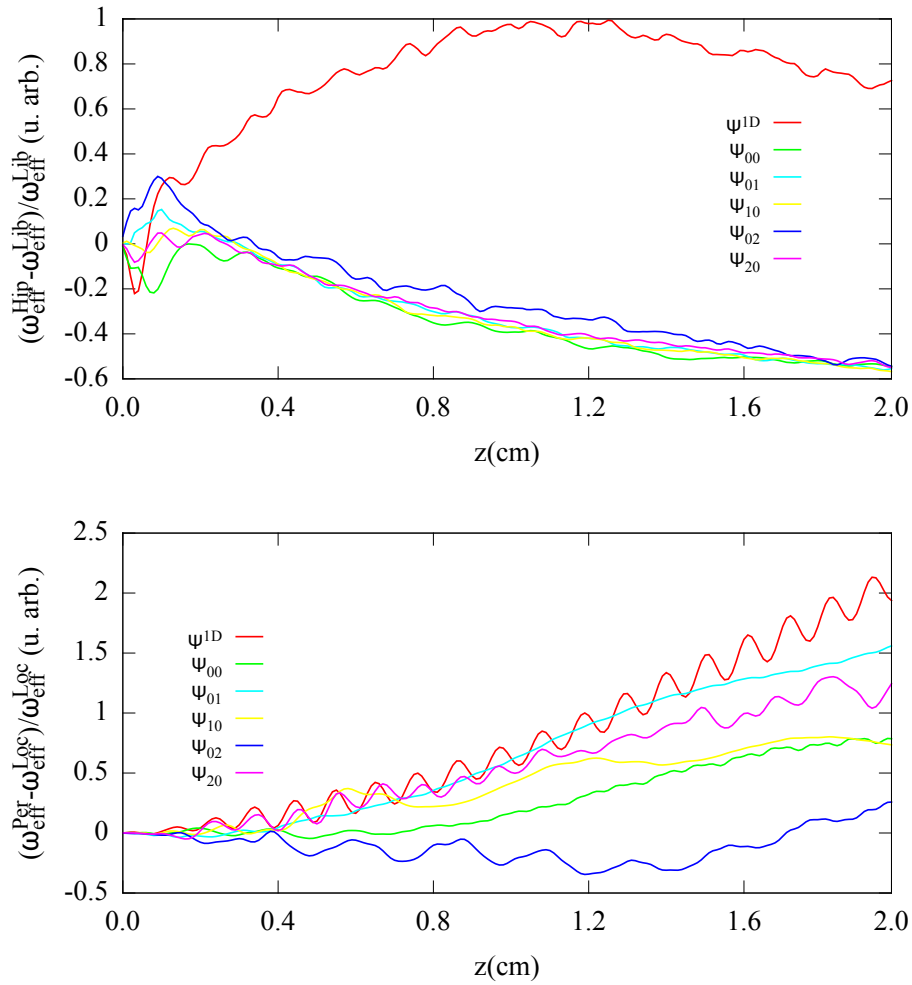


Figura 54: Evolución de comparaciones de anchuras entre los distintos regímenes de propagación para cada caso (una dimensión y dos con cada modo probado) y tomando éstas del promedio de 100 realizaciones. Se utilizan las abreviaturas *Hip.*, *Lib.*, *Per.* y *Loc.* para designar los casos con índices con aleatoriedad variable en z , homogéneo (propagación libre), con periodicidad y con aleatoriedad constante en z , respectivamente.

más precaución. En ella presentamos la diferencia entre la anchura del caso periódico y la del caso con ruido estático correspondiente. Esto mostraría la localización (como sucede claramente en la curva de *una dimensión*), pero sin olvidarnos de que en el caso de *dos dimensiones* el índice periódico también produce un gran *confinamiento*. Así uno no debe sacar la conclusión errónea de que, por ejemplo, el caso *bidimensional* Ψ_{00} presenta una menor localización que otros, ya que su propagación por el medio periódico es de por sí altamente *confinada*.



“*B*endito sea el *caos*, porque es
síntoma de *libertad*.”

— Enrique Tierno Galván

5. Conclusiones

En el presente trabajo hemos desarrollado una comparación de regímenes de difusión en distintos escenarios, con la cual hemos podido observar importantes diferencias en el transporte existente en un sistema óptico como el que proponemos, con dos dimensiones transversales y simetría cilíndrica, frente al estudiado en la literatura sobre sistemas unidimensionales y bidimensionales sin simetrías añadidas. Las conclusiones más destacables son:

- Hemos **definido los parámetros** de caracterización.

Las características de las fenomenologías han podido ser estudiadas con objetividad gracias a los parámetros definidos, como la medida de la anchura de los haces, o el código de diagonalización del operador de propagación. Éstos han probado ser eficaces en los sistemas *unidimensionales* conocidos y se han aplicado a nuestra ampliación del problema a dos dimensiones con simetría cilíndrica. En general debemos decir que parámetros que son concluyentes por sí mismos en los sistemas de una dimensión (ω_{eff} por ejemplo) pueden resultar confusos en un sistema de dos dimensiones, siendo necesario contrastarlos con otro parámetro complementario.

- **Identificación de los estados responsables** de la localización y del *hipertransporte*.

El estudio modal en los sistemas *unidimensionales* y *bidimensionales* nos ha permitido relacionar los estados de la primera banda con la localización, los *de transición* entre bandas con el *hipertransporte*, y los de el interior de las bandas segunda y tercera con la *ralentización* de la localización y la inhibición del *hipertransporte*.

- **Mayor tendencia a la localización.**

La mayor novedad comprobada es la existencia en nuestro sistema *bidimensional* de una fuerte tendencia al confinamiento transversal de la luz. Ésta es mucho mayor, cualquiera que sea el perfil del índice de refracción probado, que en una dimensión. De hecho, en *dos dimensiones*, aparece algún caso que recuerda a la localización, por el perfil con tendencia exponencial. Sin embargo, la evolución de las anchuras confirma que no se trata de verdadera *localización de Anderson*.

- **Ausencia de *hipertransporte* en nuestro sistema *bidimensional*.**

Para sistemas con simetría de revolución, la tendencia a la localización es tal que en la práctica llega a inhibirse el *hipertransporte* transversal. Esto queda probado al menos para valores de los parámetros de evolución del ruido próximos a los reflejados en este trabajo (aquellos que sí la producen en una dimensión), sin embargo con ello no se descarta que pueda existir un umbral más exigente en dos dimensiones. Por otro lado, el estudio modal del caso con ruido variable en z ha mostrado la aparición de estados del interior de la segunda banda que podrían ser los responsables de esta inhibición del *hipertransporte*.

5.1. Perspectivas y cuestiones abiertas

Si bien el objetivo inicial de este trabajo no era otro que ahondar en el conocimiento de la *localización de Anderson* y el *hipertransporte* transversales de luz, creemos que los sistemas de dos dimensiones transversales con simetría cilíndrica que hemos propuesto abren una rama de estudio de la que es fácilmente imaginable una continuación o incluso aplicación tecnológica, dada la importancia de sistemas como las fibras ópticas, y la existencia de técnicas

que ya permiten de hecho modular o estratificar con cierto control el índice de refracción de ciertos materiales.

La primera posible línea a continuar, sin alejarse de la línea central de este trabajo, sería la de realizar una comparativa más amplia, ya únicamente en el sistema *bidimensional*, entre la difusión de múltiples haces de Laguerre-Gauss que se distingan solamente en los valores de sus números ℓ o p , que permita ver con detalle la diferencia que esto supone en cada fenómeno. Se puede sacar partido también a otras configuraciones del índice de refracción, otros valores de la anchura de los picos de índice frente a las de los haces, otros parámetros de periodicidad, un perfil totalmente aleatorio sin red periódica intencional de fondo, etc. Al ser estos fenómenos tan sensibles a ellos existe un conjunto muy grande de combinaciones de parámetros para hacer un estudio riguroso.

Otra posibilidad es realizar comparaciones con un sistema *unidimensional* en los que se imponga una simetría de reflexión, como los descartados para nuestro estudio.

Como se dijo en la introducción, en nuestro conocimiento no se han investigado estos fenómenos en medios con simetría cilíndrica, en los que existe la posibilidad de buscar también localización de tipo anular, en lugar de la central encontrada aquí. Especialmente considerando lo visto en el estudio modal, en el cual aparecen estados localizados en valores de ρ de distintos picos de índice (figura 48), generando una estructura anular.

5.1.1. Comprobación experimental

Un trabajo interesante consistiría en la posibilidad de contrastar lo observado aquí numéricamente en el laboratorio. La primera idea para llevar esto a cabo supondría adaptar el método de las referencias^{23,29}, basado en la *fotoinducción* en materiales *fotorrefractivos*, de forma que se modelase una distribución de índice de refracción cilíndricamente simétrica. En este caso la principal dificultad añadida radicaría en la construcción de un haz inductor con el perfil adecuado, así como establecer un método que permita generar el conjunto

estadístico de distribuciones de índice necesario. Hay ciertas combinaciones de estados de Laguerre-Gauss que pueden servir como inductor de la variación de índice de refracción necesaria para el estudio de la localización. Encontrar, sin embargo, estructuras radiales de índice que cambien en la dirección longitudinal de la fibra, necesarias para estudiar la posible aparición de la propagación *hiperbalística*, parece bastante más complicado.

Una opción interesante alternativa sería la de fabricar un medio con una distribución permanente de índice, donde el ruido aleatorio sea lo suficientemente intenso como para garantizar el *auto-promediado*, al restringir esto en la práctica el número de realizaciones que se pueden estudiar. Esto tiene complicaciones tecnológicas, pero las técnicas para la fabricación de fibras de gradiente de índice o las mencionadas *fibras de Bragg* podrían ser utilizadas con este fin. Quizás este método sea más sencillo que el de la *fotoinducción* a la hora de obtener un perfil *no constante* a lo largo del eje longitudinal de la fibra.

5.2. Posibles aplicaciones

La mayor aplicación en la que se puede pensar tendría que ver con las necesidades de mantener un confinamiento transversal de la luz a lo largo de grandes distancias de propagación, enfocado principalmente a la transmisión de información. Sobre este tema hay trabajos realizados en base a *multi-fibras* binarias con aleatoriedad transversal total, sin simetría, con posibilidad de multiplexado transversal^{12,20}, por lo que se puede esperar que este caso con mayor facilidad para la localización y con menor dependencia de las características del perfil de índice de refracción tenga cierto interés en esta materia.

Apéndices: Contenido del disco adjunto

Se adjunta al texto un disco que contiene, además de una copia digital de este trabajo, los códigos en lenguaje *FORTRAN 95* escritos para realizar las simulaciones y el estudio de éstas explicado en el trabajo con el propósito de que éste pueda ser probado y utilizado. Se han usado en todo caso unidades del *Sistema Internacional*.

A.1. Código de propagación

Este código, *Anderson6.0.for*, contiene la implementación del método de *Crank-Nicolson* para la resolución de la ecuación de propagación de la envolvente del haz. En él pueden configurarse las características físicas del medio y del haz inicial a propagar. Se tiene control sobre la forma del *exceso* local de índice de refracción y su evolución.

A.2. Código de diagonalización y proyección

Se ha utilizado el código *ProyectaLoc4.0.for* para la diagonalización del operador de propagación y el estudio modal, permitiendo la proyección en la base de autoestados de distintos estados de propagación obtenidos mediante el código anterior. Requiere, además de los datos generados por el programa de propagación, las librerías *LAPACK* y *BLAS* para *FORTRAN 95*, que pueden encontrarse en el *Netlib Repository*.

Referencias

- [1] Anderson, P. W.: *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*. Phys. Rev., 109:1492–1505, Mar 1958. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>. [Citado en p. 2].
- [2] Anderson, Philip W: *The question of classical localization A theory of white paint?* Philosophical Magazine B, 52(3):505–509, 1985. [Citado en p. 4].
- [3] Bell, Trudy E: *The quest for ballistic action: Avoiding collisions during electron transport to increase switching speeds is the goal of the ultimate transistor*. Spectrum, IEEE, 23(2):36–38, 1986. [Citado en p. 18].
- [4] Bellani, V *et al.*: *Experimental evidence of delocalization in correlated disorder superlattices*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 7(3):823–826, 2000. [Citado en pp. 5 y 20].
- [5] Berry, MV y S Klein: *Transparent mirrors: rays, waves and localization*. European Journal of Physics, 18(3):222, 1997. [Citado en p. 5].
- [6] Bershanskii, A: *Pseudo-scaling and multifractality*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 234(3):611–622, 1997. [Citado en p. 43].
- [7] Billy, Juliette *et al.*: *Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder*. Nature, 453(7197):891–894, 2008. [Citado en p. 4].
- [8] Boas, DA *et al.*: *Scattering of diffuse photon density waves by spherical inhomogeneities within turbid media: analytic solution and applications*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 91(11):4887–4891, 1994. [Citado en p. 5].
- [9] Butcher, Paul N y David Cotter: *The elements of nonlinear optics*, volumen 9. Cambridge University Press, 1991. [Citado en p. 8].
- [10] Chou, C I y C L Ho: *Localization and Recurrence of Quantum Walk in Periodic Potential on a Line*. Preprint de arXiv: 1307.3186, 2013. [Citado en p. 4].

- [11] Christodoulides, Demetrios N, Falk Lederer y Yaron Silberberg: *Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices*. Nature, 424(6950):817–823, 2003. [Citado en p. 15].
- [12] De Raedt, Hans, Ad Lagendijk y Pedro de Vries: *Transverse localization of light*. Physical Review Letters, 62(1):47–50, 1989. [Citado en pp. 6, 8, 21 y 73].
- [13] D’Errico, C *et al.*: *Quantum diffusion with disorder, noise and interaction*. New Journal of Physics, 15(4):045007, 2013. [Citado en p. 16].
- [14] Diez, Enrique, Angel Sánchez y Francisco Domínguez-Adame: *Absence of localization and large dc conductance in random superlattices with correlated disorder*. Physical Review B, 50(19):14359, 1994. [Citado en pp. 1, 5 y 20].
- [15] Diez, Enrique, Sánchez, Angel y Domínguez-Adame, Francisco: *Intentionally disordered superlattices with high-DC conductance*. Quantum Electronics, IEEE Journal of, 31(11):1919–1926, 1995. [Citado en pp. 5 y 22].
- [16] Gredekskul, Sergey A *et al.*: *Anderson localization in metamaterials and other complex media*. Preprint de arXiv: 1207.1851, 2012. [Citado en p. 22].
- [17] Joannopoulos, John D *et al.*: *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton University Press, 2011. [Citado en pp. 15 y 53].
- [18] John, Sajeew *et al.*: *Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices*. Physical Review Letters, 58(23):2486–2489, 1987. [Citado en pp. 1, 4, 5, 7 y 22].
- [19] Karbasi, Salman, Karl W Koch y Arash Mafi: *A Modal perspective on the transverse Anderson localization of light in disordered optical lattices*. JOSA B, 30(6):1452–1462, 2013. [Citado en pp. 4 y 23].
- [20] Karbasi, Salman *et al.*: *Observation of transverse Anderson localization in an optical fiber*. Optics Letters, 37(12):2304–2306, 2012. [Citado en p. 73].

- [21] Kramer, Bernhard y Angus MacKinnon: *Localization: theory and experiment*. Reports on Progress in Physics, 56(12):1469, 1993. [Citado en pp. 3, 4, 5, 6 y 22].
- [22] Lagendijk, Ad, Bart van Tiggelen y Diederik S Wiersma: *Fifty years of Anderson localization*. Phys. Today, 62(8):24–29, 2009. [Citado en pp. 2, 3, 4, 5 y 22].
- [23] Levi, Liad *et al.*: *Hyper-transport of light and stochastic acceleration by evolving disorder*. Nature Physics, 8(12):912–917, 2012. [Citado en pp. 5, 6, 9, 12, 16, 18, 26, 27, 29 y 72].
- [24] Levi, Liad *et al.*: *Disorder-enhanced transport in photonic quasicrystals*. Science, 332(6037):1541–1544, 2011. [Citado en p. 43].
- [25] Mogilevtsev, D *et al.*: *Light propagation and Anderson localization in disordered superlattices containing dispersive metamaterials: effects of correlated disorder*. Physical Review B, 84(9):094204, 2011. [Citado en pp. 5 y 22].
- [26] Mott, Nevill: *Metal–insulator transitions*. Physics Today, 31(11):42–47, 2008. [Citado en p. 3].
- [27] Roati, Giacomo *et al.*: *Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate*. Nature, 453(7197):895–898, 2008. [Citado en pp. 4 y 16].
- [28] Saleh, Bahaa EA, Malvin Carl Teich y Bahaa E Saleh: *Fundamentals of photonics*, volumen 22. Wiley New York, 1991. [Citado en pp. 10 y 15].
- [29] Schwartz, Tal *et al.*: *Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices*. Nature, 446(7131):52–55, 2007. [Citado en pp. 5, 9, 12, 16, 18, 21, 22, 26, 27, 29 y 72].
- [30] Segev, Mordechai, Yaron Silberberg y Demetrios N Christodoulides: *Anderson localization of light*. Nature Photonics, 7(3):197–204, 2013. [Citado en pp. 5 y 43].

- [31] Skipetrov, SE y BA Van Tiggelen: *Dynamics of Anderson localization in open 3D media*. Preprint de arXiv: cond-mat/0508726, 2005. [Citado en pp. 4 y 5].
- [32] Thouless, D.J.: *Electrons in disordered systems and the theory of localization*. Physics Reports, 13(3):93 – 142, 1974, ISSN 0370-1573. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900295>. [Citado en p. 3].
- [33] Van Tiggelen, Bart A.: *Localization of waves*. En *Diffuse waves in complex media*, páginas 1–60. Springer, 1999. [Citado en pp. 2, 3, 4, 21 y 22].



