

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ÁVILA
Departamento de Ingeniería Cartográfica y del Terreno

**Implementación Rigurosa del Sistema de Referencia
Geodésico ETRF-89 en España Peninsular y su Aplicación a
la Red Geodésica Nacional**

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

D. Saieth Baudilio Chaves Pabón

Dirigida por:

D. Alfonso Núñez-García del Pozo

Salamanca, Diciembre 2013

**Implementación Rigurosa del Sistema de Referencia
Geodésico ETRF-89 en España Peninsular y su
Aplicación a la Red Geodésica Nacional**

Saieth Baudilio Chaves Pabón

Dirigida por:

D. Alfonso Núñez-García del Pozo

Escuela Politécnica Superior de Ávila

Universidad de Salamanca

Diciembre 2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
A. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO	1
B. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS.....	2
C. METODOLOGÍA SEGUIDA DURANTE LA INVESTIGACIÓN.....	4
D. ESTRUCTURA DE LA TESIS	5
1. OBSERVACIONES GEODÉSICAS	7
1.1. OBSERVACIONES ACIMUTALES	7
1.1.1. INSTRUMENTAL Y MÉTODOS DE OBSERVACIÓN	7
1.1.2. CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN RELATIVA DE LA VERTICAL...8	
1.1.3. CORRECCIÓN POR PASO DE SECCIÓN NORMAL A LÍNEA GEODÉSICA.....	9
1.1.4. CORRECCIÓN POR ALTITUD DEL PUNTO VISADO	9
1.2. OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS.....	10
1.2.1. DETERMINACIÓN DE LA LATITUD POR EL MÉTODO DE STERNECK	10
1.2.1.2. Correcciones a aplicar a la distancia cenital observada.....	12
1.2.1.3. Preparación de la lista puntero.....	17
1.2.1.4. Método de observación	18
1.2.1.5. Ecuaciones de observación.....	19
1.2.1.6. Resolución de las ecuaciones de observación.....	22
1.2.1.7. Correcciones a efectuar a la latitud calculada	24
1.2.2. DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD POR EL MÉTODO DE MAYER. PROGRAMA DE CALCULO AUTOMÁTICO.....	26
1.2.2.1. Principio del método. Generalidades.....	26

1.2.2.2.	Correcciones instrumentales. Condiciones ideales de observación.	
	Formula de Mayer.....	29
1.2.2.3.	El tiempo observado y coordenadas de estrellas	38
1.2.2.4.	Preparación de la lista puntero.....	40
1.2.2.5.	Ejecución de la observación	41
1.2.2.6.	Ecuaciones de observación. Resolución.....	42
1.2.2.7.	Correcciones a la longitud observada.....	45
1.2.3.	DETERMINACIÓN DEL ACIMUT POR EL MÉTODO DE LA POLAR	
	47	
1.2.4.	CORRECCIÓN POR MOVIMIENTO DEL POLO TERRESTRE.....	48
1.2.5.	CORRECCIÓN POR CURVATURA DE LA PLOMADA	49
1.3.	OBSERVACIONES E.D.M. (MEDIDA ELECTROMAGNÉTICA DE	
	DISTANCIAS)	49
1.3.1.	REDUCCIÓN EN MEDIDA DE DISTANCIAS	51
1.3.2.	CALIBRACIÓN Y CONTRASTACION DE UN DISTANCIÓMETRO	
	ELECTRÓNICO SUBMILIMÉTRICO. BASES INTERFEROMÉTRICAS DE	
	CALIBRACION. MEKOMETER ME-5000.....	52
1.3.2.1.	Descripción.....	52
1.3.2.2.	Principios operativos.....	54
1.3.2.3.	Errores proporcionales	58
1.3.3.	PRECISIÓN DATOS METEOROLÓGICOS	59
1.3.4.	TEMPERATURAS.....	61
1.3.4.1.	Equipos usados	61
1.3.4.2.	Morfología de los termómetros	62
1.3.4.3.	Calibración	64
1.3.4.4.	Resultados	66
1.3.5.	PRESIONES.....	67
1.3.5.1.	Equipos usados	67
1.3.5.2.	Morfología de barómetros.....	68
1.3.5.3.	Calibración	74
1.3.5.4.	Comprobación del compensador térmico	76

1.3.5.5.	Resultados	77
1.3.6.	PRECISIONES DE CENTRADO	77
1.3.6.1.	Basadas	77
1.3.6.2.	Corrección de niveles	79
1.3.6.3.	Medición de repetibilidad de estacionamiento	80
1.3.7.	COMPROBACIÓN DE ESCALA.....	82
1.3.7.1.	Consideraciones teóricas	82
1.3.7.2.	Medida de frecuencia	83
1.3.7.3.	Estudio de estabilidad por tensión y alimentación.....	84
1.3.7.4.	Instrumental utilizado.....	84
1.3.8.	DETERMINACIÓN DE CONSTANTES.....	85
1.3.8.1.	Sistemas	85
1.3.8.2.	Base Väisälä.....	86
1.3.8.3.	Realización de las medidas	87
1.3.8.4.	Resultado obtenidos	91
2.	SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERENCIA	93
2.1.	SISTEMAS DE COORDENADAS.....	93
2.1.1.	SISTEMAS GLOBALES DE COORDENADAS.....	95
2.1.2.	SISTEMAS LOCALES DE COORDENADAS.....	104
2.1.3.	FORMULAS DIFERENCIALES.....	113
2.1.4.	GENERALIDADES DEL DATUM	114
2.2.	CAMBIO EN EL SISTEMA DE REFERENCIA	119
2.2.1.	CAMBIO EN LOS PARÁMETROS DEL ELIPSOIDE.....	119
2.2.2.	VARIACIÓN DE (φ, λ, h) POR UNA TRASLACIÓN DEL SISTEMA DE REFERENCIA DADA POR (dX_o, dY_o, dZ_o)	123
2.2.3.	VARIACIÓN DE (φ, λ, h) POR UNA ROTACIÓN INFINITESIMAL DE ÁNGULOS (w_x, w_y, w_z)	123
2.2.4.	VARIACIÓN DE (φ, λ, h) EN FUNCIÓN DE UN CAMBIO DE ESCALA dL DEL MODELO	124

2.3.	DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE TRANSFORMACIÓN ENTRE DOS SISTEMAS DE REFERENCIA	126
2.3.1.	MODELO DE BURSA-WOLF	129
2.3.2.	MODELO DE BADEKAS-MODOLENSKI	133
2.4.	SISTEMAS DE REFERENCIA VIGENTES EN ESPAÑA.....	137
2.4.1.	SISTEMAS DE REFERENCIA EUROPEAN DATUM 1950 (ED-50) ..	137
2.4.2.	SISTEMAS DE REFERENCIA EUROPEAN DATUM 1987 (ED-87) ..	140
2.4.3.	WORLD GEODETIC SYSTEM (WGS-84)	141
2.4.4.	EUROPEAN REFERENCE FRAME 1989 (EUREF-89)	142
2.4.5.	LA RED IBERIA 95	145
2.4.6.	EL PROYECTO REGENTE	148
2.4.7.	SISTEMAS DE REFERENCIA GPS	152
2.4.7.1.	Órbitas	152
2.4.7.2.	Coordenadas en el plano orbital.....	155
2.4.7.3.	Coordenadas en sistema rectangular instantáneo	156
2.4.7.4.	Sistema WGS-84	157
2.4.7.5.	Sistema rectangular local (Sistema ED-50)	158
3.	REDES GEODÉSICAS.....	160
3.1.	GENERALIDADES	160
3.1.1.	CONCEPTO Y TIPOS DE REDES	160
3.1.1.1.	Redes Geodésicas Clásicas	166
3.1.2.	INSTRUMENTOS EMPLEADOS EN LAS OBSERVACIONES DE LAS REDES GEODÉSICAS.....	167
3.1.2.1.	Instrumentos de medidas angulares	168
3.1.2.2.	Instrumentos de medidas de distancias.....	169
3.1.2.3.	Instrumentos de medidas por observaciones a satélites artificiales..	170
3.1.3.	REDES PLANIMÉTRICAS DE PRIMER ORDEN.....	170
3.1.3.1.	Determinación de puntos de control horizontal a través de triangulación.....	173

3.1.3.2.	Determinación de puntos de control horizontal a través de la trilateración.....	182
3.1.3.3.	Determinación de puntos de control horizontal a través de la poligonización.....	182
3.1.3.4.	Determinación de puntos de control utilizando el sistema GPS.....	184
3.1.4.	REDES PLANIMÉTRICAS DE ORDEN INFERIOR.....	186
3.1.4.1.	Redes de segundo orden.....	186
3.1.4.2.	Redes de Tercer Orden.....	186
3.1.4.3.	Densificaciones geodésicas de la red de tercer orden.....	187
3.1.5.	REDES ALTIMÉTRICAS O DE CONTROL VERTICAL.....	187
3.1.6.	REDES DE NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN.....	189
3.1.7.	REDES PARA LEVANTAMIENTOS LOCALES.....	190
3.1.7.1.	Redes de control para levantamientos topográficos.....	190
3.1.7.2.	Redes locales de alta precisión.....	191
3.2.	ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN MODELOS LINEALES: EL MODELO DE GAUSS-MARKOV COMO MARCO PARA EL ESTABLECIMIENTO DE LAS ECUACIONES DE OBSERVACIÓN DE LA GEODESIA.....	192
3.2.1.	MODELO DE GAUSS-MARKOV (GMM).....	192
3.2.1.1.	Conceptos básicos.....	193
3.2.1.2.	Estimación de los parámetros.....	195
3.2.1.3.	Modelo del test global.....	197
3.2.1.4.	El problema del ajuste de redes.....	199
3.2.2.	ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS.....	204
3.2.3.	INTERVALOS DE CONFIANZA.....	215
3.3.	ECUACIONES DE OBSERVACIÓN DE LA GEODESIA.....	218
3.3.1.	MÉTODO DE VARIACIÓN DE COORDENADAS. COORDENADAS CARTESIANAS.....	218
3.3.1.1.	Ecuaciones diferenciales.....	219
3.3.1.2.	Ecuaciones de observaciones geodésicas.....	221

3.3.2.	ECUACIONES DE OBSERVACIÓN SOBRE LA SUPERFICIE DE UN ELIPSOIDE. COORDENADAS GEODÉSICAS	227
3.3.2.1.	Ecuaciones diferenciales.....	227
3.3.2.2.	Ecuaciones de observación en coordenadas geodésicas.....	230
3.4.	COMPENSACIÓN DE REDES GEODÉSICAS.....	232
3.4.1.	APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS AL AJUSTE DE REDES GEODÉSICAS	232
3.4.2.	PRECISIÓN Y FIABILIDAD EN LAS REDES GEODÉSICAS	247
3.4.2.1.	Concepto de precisión	247
3.4.2.2.	Concepto de fiabilidad	260
3.4.2.3.	Equivalencia de la precisión en las observaciones.....	280
3.4.2.4.	Test de fiabilidad	284
3.4.2.4.1.	Test global.....	285
3.4.2.4.2.	Test local.....	287
3.4.2.5.	Fiabilidad estadística	290
3.4.2.5.1.	Fiabilidad interna	290
3.4.2.5.2.	Fiabilidad externa.....	291
4.	DETERMINACIÓN DEL GEOIDE	293
4.1.	INTRODUCCIÓN	293
4.2.	MÉTODOS DE DETERMINACIÓN DEL GEOIDE.....	295
4.2.1.	INTRODUCCIÓN.....	295
4.2.2.	MÉTODO DE APROXIMACIÓN POLINÓMICA	299
4.2.2.1.	Modelo para datos homogéneos.....	300
4.2.2.2.	Elección del grado del polinomio de aproximación	304
4.2.3.	DETERMINACIÓN DEL GEOIDE USANDO MODELO GEOPOTENCIALES	305
4.2.3.1.	La Integral de Stokes	306
4.3.	EL GEOIDE IBERICO IBERGEO 95.....	308

5.	SISTEMAS GPS.....	311
5.1.	INTRODUCCIÓN	311
5.2.	ASPECTOS HISTÓRICOS	312
5.2.1.	GENERALIDADES DE LOS SATÉLITES ARTIFICIALES.....	313
5.3.	CONCEPTOS BÁSICOS DEL POSICIONAMIENTO CON GPS.....	315
5.3.1.	TÉCNICAS GENERALES DE POSICIONAMIENTO	316
5.3.1.1.	Medición de direcciones.....	317
5.3.1.2.	Medición de distancias	318
5.3.2.	MÉTODOS DE POSICIONAMIENTO.....	320
5.3.3.	LAS SEÑALES	322
5.3.4.	LA OBSERVACIÓN DE FASE.....	326
5.3.5.	EL MÉTODO DIFERENCIAL.....	327
5.4.	PROBLEMAS BÁSICOS DEL POSICIONAMIENTO CON GPS	332
5.4.1.	ERRORES ORBITALES Y DE LAS COORDENADAS DE LA ESTACIÓN DE REFERENCIA.....	332
6.	CÁLCULOS Y RESULTADOS	334
	BIBLIOGRAFÍA.....	384
	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DE INTERNET	390

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Representación de la estrella ubicada en un meridiano	11
Figura 1.2. Esfera celeste centrada en el lugar de observación	30
Figura 2.1. Sistemas de Referencia Global Cartesiano	97
Figura 2.2. Elipsoide de revolución	100
Figura 2.3. Desviación relativa de la vertical	101
Figura 2.4. Sistema de Referencia Local Astronómico	106
Figura 2.5. Coordenadas cartesianas astronómicas locales	106
Figura 2.6. Transformación entre el sistema astronómico local y el global.....	107
Figura 2.7. Observaciones reducidas en Sistema de Coordenadas Geodésicas Locales.....	110
Figura 2.8. Coordenadas del satélite con respecto al plano orbital.....	156
Figura 3.1. Ilustración de un cuadrilátero completo de una triangulación.....	174
Figura 3.2. Exceso esférico en un triángulo geodésico.....	175
Figura 3.3. Funciones de densidad χ^2 central y no central en el test global, n-p=8	286
Figura 3.4. Las funciones de densidad de las distribuciones normales fundamentales y no fundamentaes en el test local.....	288
Figura 5.1. Escalas relevantes para el posicionamiento diferencial	328
Figura 6.1. Fichero de observaciones clásicas sobre la red de orden inferior (ROI)	334
Figura 6.2. Fichero de coordenadas geodésicas de la red de orden inferior (ROI)	335
Figura 6.3. Fichero de planimetría y direcciones acimutales	336
Figura 6.4. Fichero de altimetría y direcciones cenitales	337
Figura 6.5. Fichero de cierre de triángulos.....	338
Figura 6.6. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, datos de entrada	339
Figura 6.7. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de observaciones	340
Figura 6.8. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, resultados de la compensación.....	341
Figura 6.9. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de residuos.....	342
Figura 6.10. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de elipse de error estándar absolutas	343
Figura 6.11. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de errores de las observaciones y parámetros de redundancia	344
Figura 6.12. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de elipses de error relativas.....	345
Figura 6.13. Fichero del cálculo de desniveles.....	346
Figura 6.14. Fichero de desniveles para el ajuste altimétrico	346

Figura 6.15. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de vértices	347
Figura 6.16. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de observaciones	348
Figura 6.17. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de residuos.....	349
Figura 6.18. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, resultados de la compensación.....	350
Figura 6.19. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de errores y redundancias de las observaciones	351
Figura 6.20. Fichero de las coordenadas compensadas de la ROI en el sistema ED50	352
Figura 6.21. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), datos de entrada.....	353
Figura 6.22. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), tabla de observaciones.....	354
Figura 6.23. Ficheros de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), resultados de la compensación y tabla de residuos	356
Figura 6.24. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), tabla de elipse de error absolutas	358
Figura 6.25. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), tabla de errores de las observaciones y parámetros de redundancia	359
Figura 6.26. Fichero de las coordenadas compensadas de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89)	360
Figura 6.27. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, datos de entrada	361
Figura 6.28. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de observaciones	362
Figura 6.29. Ficheros de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, resultados de la compensación	364
Figura 6.30. Ficheros de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de residuos.....	365
Figura 6.31. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de elipse de error absolutas.....	366
Figura 6.32. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de errores de las observaciones y parámetros de redundancia	367
Figura 6.33. Fichero de las coordenadas compensadas de la ROI en el sistema REGENTE	368
Figura 6.34. Coordenadas (x, y) de ED-50 y REGENTE respectivamente.....	370
Figura 6.35. Puntos comunes a ambos sistemas	371
Figura 6.36. Resultados e la transformación de Helmert.....	372
Figura 6.37. Fichero con los datos de partida para el ajuste altimétrico.....	373
Figura 6.38. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de vértices	374
Figura 6.39. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de observaciones	375

Figura 6.40. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de residuos.....	376
Figura 6.41. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, resultados de la compensación.....	377
Figura 6.42. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de errores y redundancias de las observaciones	378
Figura 6.43. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, cotas ortométricas H de ROI.....	379
Figura 6.44. Ficheros ALTIM.OBS y ALTIM.ELI, respectivamente.....	380
Figura 6.45. Fichero GEOIDE.WGS	381
Figura 6.46. Ficheros ALTIM.ELI y ALTIM.ORT, respectivamente	382

INDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Test estadístico de la hipótesis nula versus la hipótesis de alternativa 284

INTRODUCCIÓN

A. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

Ante la implantación a nivel cartográfico del sistema de referencia global WGS-84 (ETRS para Europa), se plantea el problema de transformar la geodesia referida al sistema local ED-50, oficial y vigente en España, a este nuevo sistema de referencia.

Por tanto, el tema de investigación que proponemos es referir la Red Geodésica de Tercer Orden, también llamada Red de Orden Inferior (ROI), al sistema WGS-84 y en particular a ETRS-89 a través del Sistema de Referencia Europeo EUREF.

Para llevar a la práctica las distintas metodologías geodésicas necesarias para efectuar dicha transformación, se ha elegido una zona test de ROI, compuesta por aproximadamente 880 vértices y unas 8000 observaciones que componen la Red de Orden Inferior de varias provincias del suroeste de España (nos referimos a las provincias de Huelva, Cádiz, Sevilla, Badajoz y Córdoba), que sea lo suficientemente significativa, como para poder definir una metodología práctica que nos permita abordar el problema para el resto de España. En fin, se trata de un análisis de la precisión y fiabilidad de la red geodésica de tercer orden nacional, aplicación al bloque suroeste de España.

B. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

A lo largo de estos últimos años, principalmente en las dos últimas décadas, los conceptos y conocimientos relacionados con la geodesia han experimentado una evolución extraordinaria e inusitada. Siglos de teoría e investigación ligados a la geodesia clásica, han quedado relegados a un segundo plano a medida que los avances científico-técnicos, han dado un espacio a lo que en el entorno geodésico se conoce como geodesia espacial. Esta técnica se hace notar tanto en las técnicas de medida como en el tratamiento de datos. Estas nuevas técnicas, han introducido mejoras substanciales, desde el punto de vista de la producción y precisión geodésicas, atrás quedaron las complicadas y dilatados métodos de observación clásica, así como las compensaciones expeditas, que por su laboriosidad, no deben ser infravaloradas, pues supusieron o marcaron una época dentro del despertar de la geodesia, como ciencia de la medida y representación de la tierra (Helmert, 1880).

La libre accesibilidad por parte de los usuarios civiles, a dos aspectos fundamentales de la geodesia como los es las plataformas satelitales (Navstar para el GPS; SPOT, IKONOS, NOAA, etc., para la teledetección), y por ende, a la información y conocimientos geodésicos, antes en manos de unos pocos privilegiados, ha contribuido considerablemente al despertar geodésico mundial.

Por consiguiente, los objetivos del presente trabajo a realizar son:

1. Establecer los datos disponibles para la realización del trabajo.
2. Analizar la precisión y la fiabilidad de la ROI en los sistemas ED-50 y WGS-84.
3. Obtener coordenadas aproximadas de ROI en el sistema WGS-84, a partir de la información de REGENTE y ED-50 en puntos comunes, es decir, $(\phi, \lambda, h)_{\text{WGS-84}}$ y $(\phi, \lambda, H)_{\text{ED-50}}$.
4. Realizar el ajuste mínimo cuadrático de ROI (en la zona suroeste de España) en planimetría y en el sistema WGS-84, tomando como fijos (sistema de

referencia) los vértices de la Red de Primer Orden en dicho sistema, es decir, el sistema de referencia $(\phi, \lambda)_{\text{WGS-84}}$ respecto a la Red de Primer Orden.

5. Realizar el ajuste mínimo cuadrático de ROI en planimetría y en el sistema WGS-84 tomando como sistema de referencia REGENTE, es decir, el sistema de referencia $(\phi, \lambda)_{\text{WGS-84}}$ respecto a REGENTE, determinando la posición y fiabilidad.
6. Comparar las coordenadas (ϕ, λ) ; (x, y) , mediante una transformación de Helmert y un análisis de los residuales, para obtener el análisis de precisión y fiabilidad.
7. Obtener las cotas ortométricas ROI, tomando como referencia la Red de Nivelación de Alta Precisión (NAP), y a través de los ángulos cenitales observados, obtener cotas ortométricas H de ROI, determinándose su precisión y fiabilidad.
8. Determinar las altitudes elipsoidales en todos los puntos de ROI, a partir de REGENTE (h elipsoidales en WGS-84) y de distintos modelos geoidales, como EGM 96, EGG 97, Corchete, EGM 08, IBERGEO 95 e IBERGEO 2005 (geoide gravimétrico; Ng).
9. Determinar las ondulaciones del geoide en toda la ROI, mediante interpolación en dichos modelos.
10. Estudio de la posible utilización de observaciones de ángulos cenitales de ROI para mejorar los distintos modelos geoidales.

C. METODOLOGÍA SEGUIDA DURANTE LA INVESTIGACIÓN

El presente estudio ha empleado una metodología descriptiva para el análisis del aporte científico, a través de la observación y toma de datos, para obtener unos resultados que le puedan dar validez y consistencia al trabajo realizado.

Para el estudio se llevaron a cabo las siguientes etapas:

- Etapa preliminar: en esta etapa se realizó todo el análisis y búsqueda de la información auxiliar y estudios anteriores.
- Etapa de definición del área de estudios: en esta etapa se determinó el área más representativa de la Red de Tercer Orden que proporcionara suficientes vértices de la Red de Primer Orden y de la Red REGENTE.
- Etapa de recopilación de datos: en la cual se han realizado los trabajos necesarios para la obtención de la información geodésica de ROI para la realización de este trabajo.
- Etapa de tratamiento geodésico e informático de la información, con la realización y puesta al día del software para los cálculos.
- Etapa de cálculo y ajuste en los sistemas de referencia ED-50 y ETRS-89 de la red elegida.
- Etapa de contraste y verificación de los distintos cálculos, y de análisis de la precisión y fiabilidad de los resultados.
- Etapa de elaboración de conclusiones.

D. ESTRUCTURA DE LA TESIS

El presente trabajo se divide en dos partes claramente diferenciadas, la primera parte comprende desde los capítulos dos al seis, en donde se hace una exposición teórica sobre los conceptos necesarios para entender el desarrollo posterior del procesamiento de los datos, igualmente para comprender las conclusiones de los mismos.

Hay que mencionar que para la confección de estos cinco capítulos, han sido consultadas numerosas referencias bibliográficas, tanto literarias, como artículos publicados en revistas especializadas, en distintas páginas de Internet así como en revistas de carácter nacional.

La segunda parte del trabajo, capítulos siete, exclusivamente, comprende el tratamiento de los datos geodésicos, propiamente, suministrados en los sistemas ED-50 y WGS-84, así de esta manera:

- En el sistema oficial ED-50, se cuenta con:
 - las coordenadas (ϕ , λ) de la red de primer orden,
 - con las coordenadas ajustadas de la red de orden inferior, y,
 - las cotas ortométricas (H) de la red de orden inferior.

- En el sistema WGS-84:
 - Las coordenadas (ϕ , λ , h), de la campaña EUREF sistema ETRF-89, en la red de orden cero.
 - Las coordenadas (ϕ , λ , h) en la Red REGENTE, esto es, coordenadas en un punto por cada hoja del mapa nacional 1:50000 (densidad de un punto cada 30 km), aproximadamente 1100 puntos de REGENTE, para toda la zona peninsular de España.

Asimismo tenemos:

- Las observaciones de la Red de Orden Inferior (ROI). Estamos hablando de:
 - Las direcciones acimutales, y,
 - Los ángulos cenitales recíprocos pero no simultáneos.
- El geoide gravimétrico IBERGEO 95, elaborado por D. Miguel Sevilla.
- A partir de EUREF se ha ajustado la Red de Primer Orden en WGS-84, es decir, se tienen las coordenadas (ϕ , λ) de los vértices de Primer Orden en ETRF-89.

De todos estos conceptos se tratarán en los capítulos que conforman la primera parte.

1. OBSERVACIONES GEODÉSICAS

1.1. OBSERVACIONES ACIMUTALES

1.1.1. INSTRUMENTAL Y MÉTODOS DE OBSERVACIÓN

El método utilizado por el Instituto Geográfico Nacional en observaciones acimutales de vértices geodésicos de la red de primer orden es el de reiteración por pares a la referencia externa. Es decir, se elegirá una estación inicial de referencia que no forme parte de la vuelta de horizonte y se medirán, independientemente, los ángulos formados por cada dirección de vuelta con la de referencia. (I.G.N., 1973).

El instrumento utilizado es el teodolito Wild T3, de graduación sexagesimal y con apreciación de 0"1. Para su puesta en estación se usa la basada con centrador.

La medición de cada ángulo comprende 18 series, diferenciadas entre sí por una reiteración del limbo acimutal y del micrómetro, comenzando la primera serie con origen cero a la referencia externa y siendo la constante de reiteración: 10° 03' 03".

Cada serie comprende dos posiciones del instrumento, denominadas CI y CD, según que el círculo vertical quede a la izquierda o la derecha del observador. Al pasar de una posición a otra, mediante volteo del anteojo, se invertirá el sentido del giro acimutal; esto es, se hará de referencia a señal en CI y de señal a referencia a CD.

En cada posición se harán cuatro punterías, dos llevando el hilo central a coincidir con la imagen de derecha a izquierda y las otras dos por movimiento inverso. Cuando la discrepancia máxima entre las cuatro lecturas sea superior a 2" se repetirán las punterías.

La medida de un ángulo se efectuará en tres sesiones en días sucesivos (6 series en cada sesión): dos nocturnas y una de día. Y se da por terminada la sesión cuando el error medio cuadrático de las series efectuadas es menor que un segundo sexagesimal de arco.

1.1.2. CORRECCIÓN POR DESVIACIÓN RELATIVA DE LA VERTICAL

Corrección debida a la no coincidencia de la vertical astronómica del lugar con la normal al elipsoide de referencia desde el punto considerado. Las correcciones a aplicar vienen dadas por, (Sevilla, 1975):

$$\xi = \phi - \varphi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi$$

$$\Delta A = \Delta \Lambda \operatorname{sen} \varphi + (\xi \operatorname{sen} A_a - \eta \cos A_g) \operatorname{ctg} z$$

donde ξ y η son las expresiones de la desviación relativa de la vertical; ΔA , la diferencia entre el acimut astronómico y geodésico; A_a , acimut astronómico; A_g , acimut geodésico; (λ, φ) , longitud y latitud geodésicas; (Λ, Φ) , longitud y latitud astronómicas; y, z el acimut geodésico.

El segundo término de la fórmula de diferencia de acimutes tienen el factor $\operatorname{ctg} z$, de manera que, como la distancia cenital es muy próxima a 90° , suele desaparecer. En este caso resulta,

$$\Delta A = \Delta \Lambda \operatorname{sen} \varphi$$

que es la llamada ecuación de Laplace simplificada.

1.1.3. CORRECCIÓN POR PASO DE SECCIÓN NORMAL A LÍNEA GEODÉSICA

Corrección de poca importancia, del orden de dos centésimas de segundo y que se rechaza según los casos.

Hemos reducido el ángulo al definido por la sección normal que pasa por A' y por B' y queremos pasar a la línea geodésica sobre el elipsoide que contiene a estos dos puntos. En estas condiciones, la geodésica entre los puntos proyección se obtiene corrigiendo un ángulo, (Levallois, 1970),

$$c_2'' = -\frac{1}{6} \frac{s^2 e^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} A \cos A}{a^2 \operatorname{sen} 1''}$$

en sentido inverso. Siendo s la distancia entre A' y B'; φ la latitud del punto; a y e semieje mayor y excentricidad del elipsoide; y, A el acimut aproximado.

1.1.4. CORRECCIÓN POR ALTITUD DEL PUNTO VISADO

Consideremos dos puntos A y B de la superficie topográfica terrestre y sus proyecciones en el elipsoide según las normales al mismo, A' y B'.

Los planos normales en A que contienen a los puntos B y B' no son coincidentes e intersecarán al elipsoide en dos secciones normales que formarán un cierto ángulo.

Por lo tanto, los ángulos medidos sobre el elipsoide no coincidirán con los medidos en la superficie topográfica, introduciéndose entonces la corrección de altitud del punto visado, que viene dada por, (Levallois, 1970),

$$c_1'' = -\frac{e^2 h \cos^2 \varphi \operatorname{sen} A \cos A}{a \operatorname{sen} 1''}$$

donde φ es la latitud del punto; A el acimut aproximado; a y e semieje mayor y excentricidad del elipsoide; y , h la altitud del punto visado.

1.2. OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS

Definiremos un punto Laplace como todo aquel vértice geodésico en el que se han hecho determinaciones astronómicas de gran precisión.

Los métodos de observación, (I.G.N., 1974), son: en acimut, series de precisión a la Polar y a la referencia con empleo de limbo acimutal; en latitud, el método de Sterneck; y, en longitud, el de Mayer.

1.2.1. DETERMINACIÓN DE LA LATITUD POR EL MÉTODO DE STERNECK

Es conveniente efectuar una determinación precisa de la latitud a fin de llegar a un exacto conocimiento de la desviación de la vertical. Para ello, se utiliza el método de Sterneck, que se basa en la observación de estrellas en sus pasos meridianos, midiéndose entonces sus distancias cenitales. (Sevilla y Núñez, 1979).

1.2.1.1. Fundamentos del método

Es un método de primer orden para la determinación de la latitud astronómica de un lugar. Se basa en la observación de estrellas en sus pasos meridianos midiendo sus distancias cenitales correspondientes a dichos pasos.

Por lo tanto el instrumento de observación ha de situarse en el meridiano del lugar con la mayor precisión posible, para lo cual será necesario efectuar primeramente en el punto de estación una determinación del acimut de una referencia por un método de primer orden, si es que no se conociese éste de antemano.

En un paso por el meridiano superior la declinación aparente de una estrella δ , su distancia cenital Z y la latitud del lugar Φ verifican ciertas relaciones, según que la culminación de la estrella sea al Norte o al Sur del cenit del lugar de observación, véase figura (1.1):

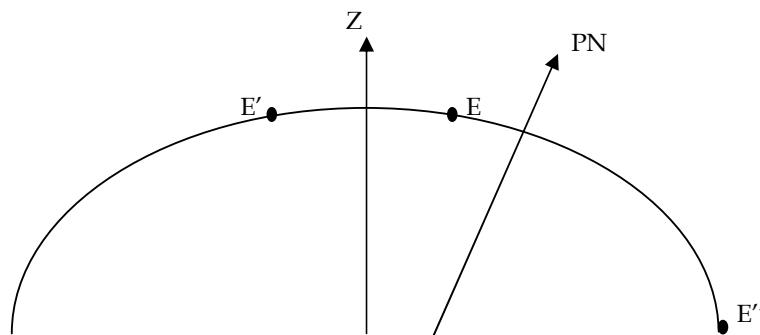


Figura 1.1.- Representación de la estrella ubicada en un meridiano.

Figura 1.1. Representación de la estrella ubicada en un meridiano

Se ha representado por Z el cenit del lugar y por PN el polo Norte.

Primeramente supongamos que la estrella se encuentra en la posición E, es decir, al norte del cenit; según la figura anterior:

$$90 - \delta = (90 - \Phi) - Z, \text{ de donde } \varphi = \delta - dZ \quad (1.1)$$

Si la estrella se encuentra en la posición E', es decir al sur del cenit; según la figura:

$$90 - \delta = (90 - \Phi) + Z, \text{ de donde } \Phi = \delta + Z \quad (1.2)$$

En su paso por el meridiano inferior, posición E'', al norte del cenit, se verifica:

$$90 - \delta = Z - (90 - \Phi), \text{ de donde } \Phi = 180 - (\delta + Z) \quad (1.3)$$

La declinación aparente δ , que se obtiene a partir de la declinación medida de un catálogo de estrellas no va a introducir posibles errores en la latitud Φ , al menos errores apreciables. Con la distancia cenital no va a suceder lo mismo, pues esta se determina por observación directa, entrando en juego los errores propios de la observación.

Diferenciando las fórmulas (1.1) y (1.2) obtenemos, en la hipótesis de que la diferencial de la declinación sea cero, es decir $d\delta = 0$.

$$d\phi = \pm dZ \quad (1.4)$$

Expresión que nos indica que los errores cometidos en la determinación de la distancia cenital afectan directamente y en la misma proporción a la latitud determinada.

1.2.1.2. Correcciones a aplicar a la distancia cenital observada

A) Corrección por error axial a priori. La primera corrección a efectuar es la debida al error axial del círculo de lectura cenital. Esta se determina mediante dos

lecturas recíprocas al mismo punto, es decir, con vuelta de campana y siempre antes de comenzar la observación, de aquí que se la denomine a priori. Este error proviene de un mal ajuste del cero del círculo de lectura cenital, de la posible no perpendicularidad del eje de giro y posiblemente de una defectuosa graduación de los círculos.

De no realizar dicha corrección se introduciría un error sistemático, difícilmente apreciable en las conclusiones finales que nos da el método.

Llamando a dicho error E_a , se tiene

$$Z_a = Z + E_a, \quad (1.5)$$

donde Z_a es la cenital corregida del error axial; generalmente se expresa E_a en segundos arco.

B) Corrección por flexión. Esta corrección proviene de la tendencia a curvarse el tubo del instrumento por el efecto de su propio peso. En los aparatos modernos (Teodolitos Astrogeodésicos) dicha corrección es menor, debido al pequeño tamaño del tubo, aunque no totalmente despreciable. Viene dada esta corrección por la expresión:

$$f'' = f_0'' \operatorname{sen} Z_a' \quad (1.6)$$

donde f_0 es la constante de reflexión del instrumento, dada también en segundos de arco. La corrección será negativa pues la reflexión tiende a aumentar la distancia cenital. La cenital corregida por reflexión será por tanto:

$$Z_f = Z_a - f'' \quad (1.7)$$

C) **Corrección por refracción.** La principal corrección que se va a efectuar sobre la cenital observada es la de refracción, para lo que utilizaremos la expresión:

$$R = \alpha_o (1 - \beta_o) \operatorname{tag} Z - (\beta_o - \alpha_o / 2) \operatorname{tg}^3 Z \quad (1.8)$$

Siendo los coeficientes α_o y β_o los siguientes:

$$\alpha_o = [\alpha_o] 760 \frac{P}{760} \frac{273}{273 + T} \quad \text{y} \quad \beta_o = [\beta_o] 760 \frac{P}{760} \frac{273 + T}{273}$$

$$P = p (1 - 0.00264 \cos \Phi_o - 0.000000196 H - 0.000163 T)$$

Siendo “p” la presión observada en milímetros de mercurio, “ Φ_o ” o un valor aproximado de la latitud, que puede determinarse, o bien interpolando de un mapa o realizando una observación de segundo orden, “H” es la altitud del lugar de observación y T es la temperatura observada en grados centígrados.

Las constantes $[\alpha_o]$ y $[\beta_o]$ vienen dadas por:

$$[\alpha_o] 760 = 0,00029255$$

$$[\beta_o] 760 = 0,001254$$

R, así obtenido, queda expresado en radianes que habrá que transformar a la unidad en que se esté trabajando. Como la refracción disminuye la distancia cenital, la corrección será positiva y la distancia cenital corregida es:

$$Z_R = Z_f + R \quad (1.9)$$

D) **Corrección por nivel de eclímetro.** La corrección por nivel proviene de la no verticalidad del eje principal del instrumento, viene dada por

$$B = \frac{\mu}{4} (\Sigma L_w - \Sigma L_e) \quad (1.10)$$

Siendo “ μ ” la constante del nivel en segundos de arco y ΣL_w , ΣL_e , son la suma de lecturas con el cero del nivel al oeste y al este respectivamente.

La cenital corregida por nivel es:

$$Z_N = Z_R + B \quad (1.11)$$

E) Corrección por desviación acimutal. En el apartado anterior se ha dicho que la observación debe realizarse en el meridiano del lugar, esto no va a ser siempre posible, por lo que será preciso introducir una corrección por este motivo, aunque con una buena determinación del acimut de una referencia se puede conseguir que esta corrección sea despreciable. Si esto no ocurre para poder aplicar dicha corrección, según veremos en la fórmula correctiva, se han de tomar tiempos en el momento de la observación.

Supongamos que la estrella es observada fuera del meridiano con una desviación “ h ” en el ángulo horario, respecto a 0° ó 180° que sería una observación perfecta superior o inferior.

Aplicando la primera fórmula de Bessel al triángulo PZE, se tiene:

$$\cos Z = \sin \Phi \sin \delta \pm \cos \Phi \cos \delta \cos h$$

donde el signo + corresponde a un paso superior y el signo - a un paso inferior.

Sustituyendo,

$$\cos h = 1 - \text{sen}^2 h / 2$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \cos Z &= \text{sen } \Phi \text{ sen } \delta \pm \cos \Phi \cos \delta (1 - 2 \text{sen}^2 (h / 2)) = \\ &= \text{sen } \Phi \text{ sen } \delta \pm \cos \Phi \cos \delta \pm 2 \cos \Phi \cos \delta \text{sen}^2 (h / 2). \end{aligned}$$

Ahora bien, llamando, Z' a la cenital que tendría la estrella si hubiese sido observada en el meridiano ($h = 0$), según el apartado primero.

$$Z' = \Phi - \delta \quad (\text{Sur del cenit})$$

$$Z' = \delta + \Phi \quad (\text{Norte del cenit})$$

Si la culminación es inferior

$$Z' = 180 - \Phi - \delta$$

Luego la expresión anterior se transforma en

$$\cos Z = \cos Z' \pm 2 \cos \Phi \cos \delta \text{sen}^2 (h / 2)$$

es decir,

$$\cos Z - \cos Z' \pm 2 \cos \Phi \cos \delta \text{sen}^2 (h / 2).$$

Finalmente reemplazado la diferencia de cosenos por productos de senos, se obtiene la expresión:

$$Z' = Z \pm \frac{2 \cos \Phi \cos \delta \text{sen}^2 (h / 2)}{\text{sen}(1/2) (Z + Z')}$$

En nuestras latitudes raramente se da una culminación inferior, por lo que:

$$Z' = Z - \frac{2 \cos \Phi \cos \delta \sin^2(h/2)}{\sin(1/2) (Z + Z')}$$

El ángulo h es pequeño, por lo tanto se puede efectuar la aproximación $\sin(h/2) = h/2$, y la expresión de la cenital corregida es:

$$Z' = Z - \frac{\cos \Phi_o \cos \delta h^2}{2 \sin Z} \quad (1.12)$$

donde hemos aproximado $(Z + Z') / 2 = Z$ y $\Phi = \Phi_o = \Phi_o$

Veamos con un ejemplo la magnitud de tal corrección.

Sean: $\Phi = 40^\circ$ $\delta = 65^\circ$ $Z = 25^\circ$ $h = 14''$

Al efectuar los cálculos se tiene

$$Z' = Z - 0''.00041$$

Sean: $\Phi = 40^\circ$ $\delta = 41^\circ$ $Z = 1^\circ$ $h = 15''$

Al efectuar los cálculos se tiene:

$$Z' = Z - 0''.018$$

Por lo tanto para cenitales pequeñas, una desviación acimutal de $15''$ influye en una cifra no despreciable en la cenital observada. No obstante, si se ha realizado primeramente una nueva orientación donde la desviación acimutal no pase de $2''$ ó $3''$, la reducción al meridiano de la cenital observada no se tiene que efectuar pues es totalmente despreciable. Por ejemplo sea:

$\Phi_o = 40^\circ$ $\delta = 41^\circ$ $Z = 1^\circ$ $h = 3''$

Al efectuar los cálculos se encuentra:

$$Z' = Z - 0''.00072$$

1.2.1.3. Preparación de la lista puntero

La preparación de la lista puntero ha de seguir los siguientes requisitos:

- 1) La magnitud de las estrellas debe ser superior a 6, a fin de que puedan ser observadas sin dificultad.
- 2) Las cenitales de las estrellas no han de ser superiores a 30° , a fin de mantener pequeños los errores de refracción y reflexión del instrumento.
- 3) A fin de eliminar en lo posible las incertidumbres de la refracción y la reflexión, se intentará observar igual número de estrellas de culminación al norte y al sur del cenit, y tal que consideradas positivas las cenitales de las que culminen al sur y negativas las otras, la suma algebraica de todas ellas sea próxima a cero.
- 4) Se calcularán las cenitales aproximadas de las estrellas a su paso por el meridiano, así como su tiempo de paso, a fin de poder situar el instrumento con anterioridad al paso de la estrella y esta se observa fácilmente. Los tiempos de comienzo y fin de la observación, impuestos a priori por el observador, permite la selección de estrellas en ascensión recta.
- 5) Para eliminar los posibles errores de lectura en el círculo vertical, la observación se irá desarrollando con el círculo al este y círculo al oeste, de modo que el número de estrellas que se observen con el círculo al este sea aproximadamente el de con círculo al oeste.

1.2.1.4. Método de observación

Una vez preparada y revisada la lista puntero se operará de la siguiente manera al efectuarse la observación en el campo:

- 1) El teodolito debe estar puesto en estación y situado de forma que su eje describa el meridiano al girar en altura, o lo más cerca posible.
- 2) Con anterioridad a la hora prefijada de comienzo de la observación, se efectuará la determinación del error axial a priori.
- 3) Antes del paso de la primera estrella por el meridiano del lugar, se efectuará el movimiento en altura del antejo hasta que la lectura de la cenital del círculo coincida con el cenital puntero.

- 4) Se consultará en la lista puntero la hora de paso de la estrella.
- 5) Divisada ésta en el campo del anteojo se efectuarán las lecturas de nivel.
- 6) Cuando la estrella haga contacto con el hilo central se efectuará la lectura de la distancia cenital.
- 7) Efectuar una segunda lectura de nivel de eclímetro.
- 8) Se efectuarán las lecturas de presión y temperatura.
- 9) Se operará de la misma forma con las demás estrellas de la serie.
- 10) Al empezar una nueva serie se operará desde 1 en forma igual.

1.2.1.5. Ecuaciones de observación

Después de aplicar a la cenital observada las correcciones explicadas por el apartado segundo, tendremos una distancia cenital corregida dada por,

$$Z_c = Z_o + C \quad (1.13)$$

donde indicamos por C la suma de las correcciones.

Ahora bien, a la corrección por error axial a priori E_a dada por observación, se le suele ajustar un cierto residual que denominaremos "a". A este residual le corresponderá una cierta corrección por refracción, que llamaremos ΔR .

Luego la ecuación (1.13) nos quedará de la forma:

$$Z_c = Z_o + C + a + \Delta R, \quad (1.14)$$

con suficiente aproximación:

$$\Delta R = c \operatorname{tg} a = c a \quad (1.15)$$

pues será una cantidad de primer orden, siendo “c” una constante que viene dada por el coeficiente de “tg Z” en la expresión de la corrección por refracción dada en el apartado segundo.

La ecuación (1.14) usando (1.15) se convierte en:

$$Z_c = Z_o + C + a (1 + c) \quad (1.16)$$

La latitud Φ según el apartado primero vendrá dada por:

$$\Phi = \delta \pm [Z_o + C + a (1 + c)] \quad (1.17)$$

donde el signo “-” es para una culminación al norte del cenit y el signo “+” para una culminación al sur del cenit.

Para establecer las ecuaciones de observación, se pueden seguir dos caminos. El primero y menos recomendable, pues según veremos los residuales son más grandes, es considerar la latitud inicial Φ_o y plantear las ecuaciones de observación en la forma:

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_o = \pm (Z_o + C) - \Phi_o \pm a (1 - c), \quad (1.18)$$

llamando:

$$t = \delta \pm (Z_o + C) - \Phi_o, \quad (1.19)$$

se tiene que:

$$\Delta\Phi = t \pm (1 + c) a,$$

es decir,

$$\Delta\Phi \pm (1 + c) a = t \quad (1.20)$$

Siendo las incógnitas el incremento de latitud “ $\Delta\Phi$ ” y el residual del error axial “ a ”.

Puesto que “ c ” es una cantidad pequeña, la ecuación (1.20) se puede emplazar de la forma más sencilla,

$$\Delta\Phi \pm a = t, \quad (1.21)$$

donde el signo “+” corresponde a la culminación de la estrella en norte del cenit, y el signo “-” al sur del cenit, siguiendo el apartado primero.

El segundo camino y más recomendable es el siguiente: Consideramos una serie de observaciones y calculemos las latitudes relativas a cada observación.

$$\Phi_i = \delta_i \pm (Z_{oi} + C_i) \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

siendo m el número de estrellas de la serie.

La latitud media correspondiente a las Φ_i será,

$$\Phi_m = \frac{\sum_{i=1}^m \Phi_i}{m} \quad (1.22)$$

Con esta latitud media se entra en la ecuaciones (1.17) al igual que se hacía con la inicial Φ_o ,

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_m = \delta \pm (Z_o + C) - \Phi_m \pm a \quad (1.23)$$

llamando,

$$t = \delta \pm (Z_0 + C) - \Phi_m$$

resulta,

$$\Delta\Phi \pm a = t \tag{1.24}$$

donde el signo “+” corresponde a la culminación al norte del cenit y el signo “-” al sur.

Las ecuaciones de observación serán por tanto,

$$\Delta\Phi \pm a_j = t_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{1.25}$$

para la serie j.

La determinación de $\Delta\Phi_j$ y a_j se realizará por el método de los mínimos cuadrados según se explica en el siguiente apartado.

1.2.1.6. Resolución de las ecuaciones de observación

Llamando t a la cantidad,

$$t = \delta \pm (Z_0 + C) - \Phi_m = \Phi_i - \Phi_m,$$

la observación de m estrellas en su paso por el meridiano dará lugar a m ecuaciones de observación de la forma,

$$\Delta\Phi \pm a - t_i = v_i,$$

con dos incógnitas $\Delta\Phi$ y a . Este sistema de ecuaciones de observación resultante de cada serie se resuelve por el método de los mínimos cuadrados y se obtienen los valores más probables de las incógnitas junto a las medidas de la precisión correspondientes.

Si hemos observado n series, para cada una de ellas habremos obtenido, $\Delta\Phi_j$ incremento de la latitud, $j = 1, 2, \dots, n$, tales que la latitud de la serie será,

$$\Phi_j = \Phi + \Delta\Phi_j \quad (1.26)$$

- a_j incremento del error axial a priori
- σ_j error medio cuadrático de la serie
- m_j error medio cuadrático de Φ_j
- m'_j error medio cuadrático de a_j

Para cada serie individual es preciso corregir Φ_j por movimientos del polo como se indicará después.

Entonces los resultados finales de las n series en la hipótesis de distinta confianza se obtiene por:

$$\Phi = \frac{\sum p_j \Phi_j}{\sum p_j} \quad (1.27)$$

$$a = \frac{\sum p'_j a_j}{\sum p'_j} \quad (1.28)$$

y los errores medios cuadráticos correspondientes por:

$$M_\Phi = \sqrt{\frac{\sum (\Phi - \Phi_j)^2 p_j}{(n-1)\sum p_j}} \quad (1.29)$$

$$M_{\Phi} = \sqrt{\frac{\sum (a - a_j)^2 p'_j}{(n-1)\sum p'_j}} \quad (1.30)$$

donde p_j y p'_j son los pesos correspondientes a Φ_j y a_j respectivamente determinados como los inversos de los cuadrados de los errores medios cuadráticos m_j y m'_j .

Si se adopta la hipótesis de considerar las n series de igual confianza las fórmulas anteriores se simplifican en,

$$\Phi = \frac{\sum \Phi_j}{n} \quad (1.31)$$

$$a = \frac{\sum a_j}{n} \quad (1.32)$$

Y de igual forma,

$$M_{\Phi} = \sqrt{\frac{\sum (\Phi - \Phi_j)^2}{n(n-1)}} \quad (1.33)$$

$$M_{\Phi} = \sqrt{\frac{\sum (a - a_j)^2}{n(n-1)}} \quad (1.34)$$

En el ejemplo dado al final se presentan los resultados en las dos hipótesis.

1.2.1.7. Correcciones a efectuar a la latitud calculada

A) Corrección por movimiento del polo. A fin de independizar la latitud obtenida del instante de la observación, es preciso efectuar la correspondiente reducción por movimiento del polo para referir la latitud al polo OCI (Origen convencional Internacional). Esta corrección viene dada por:

$$\Phi_c = \Phi_o - x_p \cos \Lambda + y_p \operatorname{sen} \Lambda \quad (1.35)$$

donde Φ_o es la latitud calculada mediante observación, Λ la longitud de la estación y x_p e y_p , las coordenadas del polo instantáneo interpoladas para el momento de la observación y que aparecen publicadas en la circular D del BIH (Bulletin International de l'Heure).

B) Corrección por excentricidad de la estación. Si la observación no se ha efectuado en la estación propiamente dicha, sino en una excéntrica, la latitud obtenida debe sufrir una corrección para tener la del punto de estación, Esta corrección viene dada por,

$$O = O_e + 0''.032376 d_e \cos A_e \quad (1.36)$$

siendo O_e la latitud excéntrica, de la distancia entre ambas estaciones y A_e el acimut de la estación principal desde la excéntrica. Si d_e se da en metros, la corrección vendrá expresada en segundos de arco.

C) Corrección por curvatura de la plomada. Para referir las coordenadas de un punto a la superficie del geoide, es preciso efectuar una corrección por curvatura de la plomada desde el punto al geoide. Esta corrección viene dada por,

$$\Phi = \Phi_t - 0''.00017 H \operatorname{sen} 2 \Phi_t \quad (1.37)$$

siendo Φ_t la latitud de la estación y H la altitud ortométrica del punto de estación que si está dada en metros, se obtiene la corrección en segundos de arco.

1.2.2. DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD POR EL MÉTODO DE MAYER. PROGRAMA DE CALCULO AUTOMÁTICO

El método de observación para las determinaciones de longitud será el de "Pasos Meridianos", aplicándose para el cálculo la fórmula de Mayer. La utilización de este procedimiento implica el previo conocimiento de las constantes del micrómetro ocular semiimpersonal, así como la correcta puesta en el meridiano con un límite de 15° en desviación acimutal y una perfecta determinación del estado y marcha del reloj. (Sevilla y Núñez, 1979).

1.2.2.1. Principio del método. Generalidades

Se define la *longitud astronómica* de un punto "P" con el ángulo " Λ " que forman el plano meridiano astronómico de P con un plano meridiano astronómico tomado como origen (meridiano de Greenwich), se mide de 0° a 360° o de 0^h a 24^h positivas hacia el Este en el plano del Ecuador.

Se define el *ángulo horario* de un astro "S" como el ángulo " H " que forman el plano meridiano astronómico (círculo horario) de S con el plano meridiano astronómico del lugar de observación, se mide de 0° a 360° o de 0^h a 24^h positivo hacia el Oeste en el plano del Ecuador.

Se define tiempo *sidéreo aparente local* como el ángulo horario " θ " del equinoccio vernal verdadero " γ " referido al meridiano astronómico del lugar de observación.

Se define la *ascensión recta aparente local* de un astro S con ángulo α que forman el círculo horario (meridiano astronómico) de S con el círculo horario (meridiano astronómico) del equinoccio vernal aparente γ , se mide desde γ de 0° a 360° o de 0^h a 24^h positivo hacia el Este.

Según estas definiciones se verifica:

$$\theta = \alpha + H \quad (1.38)$$

Se tiene, además, que la longitud astronómica de un punto P es la diferencia entre la hora sidérea aparente local en P y la hora sidérea en Greenwich para el mismo instante.

$$\Lambda = \theta - \theta_G$$

de donde

$$\theta = \theta_G + \Lambda$$

de manera que si se supone θ_G perfectamente conocida,

$$d\theta = d\Lambda \quad (1.39)$$

Por consiguiente, un error en la longitud del lugar produce un error en la hora sidérea local de cualquier fenómeno astronómico observado y viceversa.

En el instante del paso de una estrella por el meridiano del lugar, el ángulo horario se anula

$$H = 0$$

y por tanto (1.38), queda:

$$\alpha = \theta = \theta_G + \Lambda \quad (1.40)$$

Si Λ no se conoce con exactitud, entonces la hora sidérea determinada, T , no coincidirá con α ,

$$T = \theta_G + \Lambda_0 \neq \alpha \quad (1.41)$$

siendo Λ_0 un valor aproximado de Λ . Lo que dicho de otra manera puede interpretarse como que el reloj que nos da la hora sidérea local adolece de un cierto error, ΔT , equivalente al error $\Delta\Lambda$ en la longitud supuesta, pues,

$$T + \Delta T = \alpha = \theta_G + \Lambda_0 + \Delta T = \theta_G + \Lambda_0 + \Delta\Lambda \quad (1.42)$$

El propósito del método consiste en determinar con la mayor exactitud posible la hora sidérea θ en un lugar cuya longitud astronómica se quiere determinar, para lo cual será preciso conocer previamente un cierto valor aproximado Λ_0 de dicha longitud. Si éste no es el caso se efectuará una determinación de Λ_0 mediante algún método de segundo orden.

La hora sidérea, tomada directa o indirectamente de nuestro reloj o cronógrafo, según lo indicado anteriormente, no coincidirá con la hora sidérea local $\theta = \alpha$, lo que es equivalente a decir que el reloj tiene un cierto estado que llamaremos ΔE .

Luego,

$$\theta = T + \Delta E$$

Por lo general se conoce un cierto valor del estado del reloj, sea este ΔE_0 , se tendrá, pues:

$$\Delta E = \Delta E_0 + \Delta e$$

entonces,

$$\theta = T + \Delta E_o + \Delta e \quad (1.43)$$

siendo Δe el residual del estado del reloj. Sustituyendo (1.43) en la ecuación (1.40) se tiene que:

$$\Lambda = T + \Delta E_o + \Delta e - \theta_G \quad (1.44)$$

y, como $T + \Delta E_o - \theta_G$ no es otra cosa que Λ_o , se obtiene finalmente,

$$\Lambda = \Lambda_o + \Delta e \quad (1.45)$$

El método de Mayer se basa en la determinación del estado residual del reloj Δe , que es lo mismo que el incremento de longitud expresado en unidades de tiempo $\Delta \Lambda$ que debe añadirse a la longitud provisional Λ_o .

Se procederá, pues, a la observación de pasos de estrellas por el meridiano del lugar de observación y a determinar con la mayor precisión posible los términos correspondientes a dichos pasos.

1.2.2.2. Correcciones instrumentales. Condiciones ideales de observación. Formula de Mayer

Según las ideas generales esbozados en el apartado anterior, las estrellas han de ser observadas en sus pasos por el meridiano del lugar de observación, o lo que es lo mismo, el eje de colimación del instrumento ha de describir el meridiano del lugar al girar en altura el anteojo. Ahora bien, en la práctica esto no va a ser posible, como tampoco la perfecta verticalidad del eje principal ni su ortogonalidad con el eje de muñones. Esto nos dice que la estrella no será

observada en el instante de paso por el meridiano, sino antes o después del paso ideal.

Consideremos la esfera celeste centrada en el lugar de observación, y sobre ella el punto K, resultante de la intersección de la semirrecta que conduce al eje de muñones hacia el Oeste con la esfera.

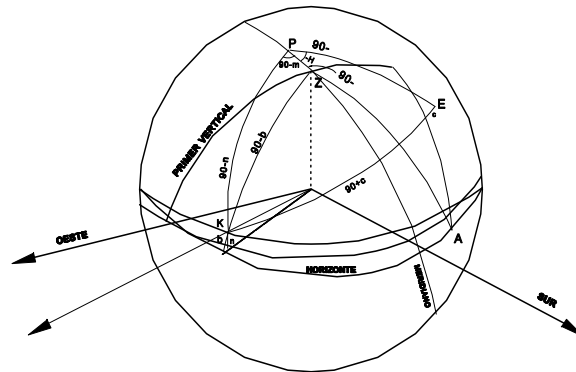


Figura 1.2. Esfera celeste centrada en el lugar de observación

Sean $(270 - \alpha)$ y b las coordenadas acimut y altura, respectivamente, del punto K, y sean $(90 - m)$ y n las coordenadas ángulo horario y declinación respecto del mismo punto. Consideremos el triángulo esférico PKZ, donde P es el polo Norte, Z el cenit del lugar de observación y K el punto anterior. Los elementos de dicho triángulo son como puede verse en la figura,

$$\begin{aligned} PZ &= 90 - \Phi & Z &= 90 + \alpha \\ PK &= 90 - n & P &= 90 - m \\ ZK &= 90 - b \end{aligned}$$

siendo Φ la latitud astronómica del lugar de observación, y estando los acimutes contados desde el Norte. Aplicando al triángulo anterior las dos primeras fórmulas de Bessel, se tiene:

$$\sin n = \sin b \sin \Phi - \sin b \cos \Phi \sin a \quad (1.46)$$

$$\cos n \sin m = \sin b \cos \Phi + \cos b \sin \Phi \sin a \quad (1.47)$$

Consideremos una estrella de coordenadas E (α , δ), siendo α la ascensión recta y δ la declinación. El triángulo PKE tiene por elementos:

$$PK = 90 - n$$

$$PE = 90 - \delta$$

$$KE = 90 + c$$

$$P = 90 - (m + H)$$

Teóricamente, el lado KE tendría que ser 90° , pero introduciendo la colimación inherente al instrumento, que designamos por c , será $(90 + c)$. H es el ángulo horario de la estrella.

La primera fórmula de Bessel, aplicada al triángulo PKE, nos dice:

$$-\sin c = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (m + H) \quad (1.48)$$

Si se supone que la nivelación del instrumento es perfecta, es decir, que el eje de muñones estuviese perfectamente horizontal, y que el instrumento careciese de colimación, tendríamos $b = 0$ y $c = 0$, y las fórmulas (1.46) y (1.47) se reducen a:

$$\sin n = -\cos \Phi \sin a \quad (1.49)$$

$$\cos n \sin m = \sin \Phi \sin a \quad (1.50)$$

Además de la ecuación (1.48), se sigue:

$$0 = \sin n \sin \delta + \cos n \cos \delta \sin (m + H) \quad (1.51)$$

Sustituyendo las expresiones (1.49) y (1.50) en (1.51) se obtiene:

$$0 = -\cos \Phi \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \delta + \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} \Phi}{\operatorname{sen} m} \cos \delta \operatorname{sen} (m + H)$$

equivalente a:

$$\operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} m = \operatorname{tg} \Phi \operatorname{sen} (m + H) \quad (1.52)$$

Diferenciando esta última expresión, manteniendo m constante:

$$\frac{d\delta}{\cos^2 \delta} \operatorname{sen} m = \frac{d\Phi}{\cos^2 \Phi} \operatorname{sen} (m + H) + \cos (m + H) + \operatorname{tag} \Phi dH \quad (1.53)$$

Dividiendo, por último, dH queda:

$$dH = \frac{2 d\delta}{\operatorname{sen} 2\delta \operatorname{cotg} (m+H)} - \frac{2 d\Phi}{\operatorname{sen} 2\Phi \operatorname{cotg} (m+H)} \quad (1.54)$$

Esta expresión nos permite analizar la influencia que sobre H tiene los errores cometidos en δ y Φ . El error cometido en δ , dado por $d\delta$, será pequeño al tomar las declinaciones de las estrellas de un catálogo. Ahora bien, con la latitud Φ no va a pasar lo mismo, puesto que en algunos casos se va a obtener interpolando de un mapa o bien por un método de segundo orden. El error dH cuando $\operatorname{sen} 2\delta$ y $\operatorname{cotg} (m + H)$ sean máximos; puesto que la latitud nos viene fijada a priori por el lugar de observación, puede únicamente decirse que los mejores resultados se obtendrán en lugares de latitudes próximas a los 45° . Por otra parte, “ $\operatorname{sen} 2\delta$ ” será máximo cuando $\delta = 45^\circ$; interesará, pues, observar estrellas próximas a los 45° de declinación, siendo poco aconsejables aquellas que están próximas al polo, es decir, de declinación grande. Para estudiar el máximo de $\operatorname{cotg} (m + H)$ hagamos primero unas transformaciones elementales:

$$\operatorname{cotg}^2 (m + H) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 (m + H)}{\operatorname{sen}^2 (m + H)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 (m + H)} - 1$$

Ahora bien, de la formula (1.42):

$$\operatorname{sen}^2(m + H) = \frac{\operatorname{tg}^2 \delta \operatorname{sen}^2 m}{\operatorname{tg}^2 \Phi}$$

Luego:

$$\operatorname{cotg}^2(m + H) = \frac{\operatorname{tg}^2 \Phi}{\operatorname{tg}^2 \delta \operatorname{sen}^2 m} - 1 \quad (1.55)$$

Para que esta expresión sea máxima ha de ser "m" mínimo, o lo que es equivalente, $m = 0$ ó $m = 180^\circ$. Esto se traduce en que la observación se ha de realizar en el meridiano del lugar, según afirmábamos en el apartado precedente.

La imposibilidad de observar exactamente en el meridiano obliga a introducir una corrección que se denominará "acimutal", y que va a ser el ángulo que formen los planos: meridiano del lugar y el que contiene al eje de colimación nula y al hilo central del retículo del instrumento. Igualmente se había supuesto $b = 0$ y $c = 0$; en la práctica estas condiciones tampoco se van a verificar, lo que habrá de tener en cuenta.

La desviación acimutal la designamos por "a". Se supone que los valores a, b, y c son lo suficientemente pequeños como para poder considerarlos como infinitésimos de primer orden y hacer las simplificaciones oportunas en nuestros desarrollos posteriores. En la práctica, efectivamente, dichos valores son muy pequeños, luego el error cometido en las aproximaciones que realicemos será depreciable. Además, m y n son cantidades del mismo orden de magnitud que a y b. En estas condiciones y recordando las fórmulas (1.46) y (1.47) a las que aplicamos estas aproximaciones, resulta:

$$\begin{aligned}n &= b \operatorname{sen} \Phi - a \operatorname{cos} \Phi \\m &= b \operatorname{cos} \Phi + \operatorname{sen} \Phi\end{aligned}\tag{1.56}$$

La fórmula (1.48) puede expresarse de la forma:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(m + H) &= -\operatorname{tg} n \operatorname{tg} \delta - \operatorname{sen} c \operatorname{sec} n \operatorname{sec} \delta = \\&= -n \operatorname{tg} \delta - c \operatorname{sec} \delta,\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}m + H &= \operatorname{sen}^{-1}(-n \operatorname{tg} \delta - c \operatorname{sec} \delta) = \\&= -n \operatorname{tg} \delta - c \operatorname{sec} \delta\end{aligned}$$

Finalmente, despejando H se obtiene:

$$H = -m - n \operatorname{tg} \delta - c \operatorname{sec} \delta$$

Esta fórmula se conoce como *fórmula de Bessel*, y se utiliza para el cálculo de la corrección que es preciso añadir al tiempo sidéreo observado para obtener el tiempo real del tránsito de las estrellas por el meridiano.

El término en “c”, cuando la observación se realiza en el centro del retículo, o se reduzcan las observaciones al hilo central, puede despreciarse.

Sustituyendo n y m por los valores (1.56) en esta última ecuación, resulta:

$$H = -b \operatorname{cos} \Phi - a \operatorname{sen} \Phi - (b \operatorname{sen} \Phi - a \operatorname{cos} \Phi) \operatorname{tg} \delta - c \operatorname{sec} \delta$$

Agrupando términos llegamos fácilmente a:

$$H = -\frac{\cos(\Phi - \delta)}{\cos \delta} b - \frac{\sin(\Phi - \delta)}{\cos \delta} a - \frac{1}{\cos \delta} c \quad (1.57)$$

que es la *fórmula de Mayer*.

Al analizar el retículo del aparato surgen otro tipo de correcciones que vamos a comentar brevemente.

Consideramos en nuestra discusión un retículo impersonal, del que va equipado el teodolito universal Wild T4. El campo de vista está atravesado por una serie de hilos fijos y uno móvil que permite el seguimiento de la estrella y que, en su cruce con los hilos fijos, conecta el sistema de impulsos que hacen que el cronógrafo marque la hora de cruce por los mismos según su propio sistema de impresión, variable de un tipo de cronógrafo a otro.

Ahora bien, los hilos del retículo no son líneas geométricas, sino reales, con un cierto grosor que se denomina espesor de contacto. Cabe, pues, la posibilidad de tomar el contacto con la estrella con los hilos antes o después del verdadero instante en que la estrella atraviesa las líneas imaginarias de los hilos del retículo.

Por otra parte, la construcción mecánica del sistema de movimiento del tornillo y del micrómetro hace que aparezca una diferencia entre el contacto mecánico y el contacto electrónico, que constituye el llamado tiempo muerto.

Tanto el espesor de contacto como el tiempo muerto se determinan experimentalmente y serán unos ciertos parámetros del retículo micrométrico (Mueller, 1969).

Por estos motivos los tiempos observados deben sufrir una corrección, que viene dada por:

$$L = 0.5 R (k + s) \sec \delta \quad (1.58)$$

en segundos de tiempo, siendo "R" el valor en segundos de tiempo (dividido por 100) de una revolución de tornillo micrométrico; k, el espesor del contacto, y s, el tiempo muerto. El factor "sec δ" reduce a la declinación de la estrella el valor ecuatorial de R.

En lo que respecta a la colimación "c", esta puede eliminarse si se opera del siguiente modo, por ejemplo: Al irse moviendo la estrella por el campo del antejo se tomarán los pasos por los hilos del retículo, registrándose en el cronógrafo los tiempos respectivos de dichos pasos y procurando observar siempre en hilos simétricos del central.

Si se observa en los hilos i, j, simétricos del central, respectivamente, en i antes del tránsito por el meridiano y en j después, el instante de paso por el meridiano del instrumento será:

$$T_m = \frac{T_i + T_j}{2},$$

siendo T_i y T_j los tiempos de pasos por los hilos i, j, respectivamente. Todo es cierto siempre que el retículo esté perfectamente construido y que al hilo central le corresponda la colimación nula.

En general, si el retículo es de 20 hilos, agrupados en 10 pares, tomaremos como tiempo de paso por el meridiano:

$$T = \frac{\sum T_m}{10} = \frac{\sum T_i}{20} \quad (1.59)$$

Al instante "T" así determinado se le denomina reducido al hilo central.

De esta manera se consigue: reducir el posible error en la toma del instante de paso de la estrella y, al observar en hilos simétricos, suponiendo despreciable el error de colimación en el centro del retículo, el error de colimación se anula.

Otra alternativa, empleada en la práctica de la observación, consiste en observar antes del paso por el meridiano, tomando tiempo en una cierta región del retículo que incluye varios hilos, pero antes de llegar al hilo central, dar vuelta de campana al instrumento, mientras la estrella cruza el meridiano; después observar la salida del campo tomando tiempos en la misma región del retículo que a la entrada, y, por tanto, en el cruce con los mismos hilos. Así se pierde el paso por el hilo central y quizá los adyacentes, pero se elimina la colimación perfectamente por la inversión del instrumento. En este caso será preciso, lógicamente, toma lectura de niveles en ambas posiciones. En el caso de utilizar un Wild T4, la estrella se sigue aproximadamente dos revoluciones y media de tornillo, según se aproxima al meridiano instrumental; se comienza el seguimiento cuando aparece cerca de los hilos V_{05} o V_{15} , dependiendo de la posición del instrumento.

Cuando la estrella se aproxima a la división 7.5 o a la 12.5 se deja el seguimiento y se invierte el instrumento, seguidamente se reemprende el seguimiento otra vez cuando la estrella se encuentra cerca de los mismos hilos 7.5 ó 12.5, es decir, se observa la salida por la misma parte del retículo que se observó la entrada. A los tiempos obtenidos se les aplica entonces la fórmula (1.59).

La inclinación del eje de muñones, b , se determina de la forma usual con el nivel caballero o suspendido, tomándose dos lecturas, una antes y otra después del paso de la estrella por el meridiano. Si las lecturas son L_w y L'_w con el cero del nivel al Oeste y L_e y L'_e con el cero del nivel al Este, la inclinación se determina por:

$$b = \frac{\mu}{4} [L_e + L_{esup}' - L_w - L'_w] = \frac{\mu}{4} [\Sigma L_e - \Sigma L_w] \quad (1.60)$$

siendo μ el valor en segundos de una división del nivel.

Recordando las expresiones (1.38) y (1.43) se ve que el ángulo horario H no es otra cosa que:

$$H = \theta - \alpha = T + \Delta E_o + \Delta_e - \alpha$$

Igualando ésta a la expresión (1.57), e introduciendo la corrección L se obtiene finalmente la fórmula de Mayer en la forma:

$$\alpha = T + \Delta E_o + \Delta_e + \frac{\cos(\Phi - \delta)}{\cos \delta} b + \frac{\text{sen}(\Phi - \delta)}{\cos \delta} a + \frac{c}{\cos \delta} + L \quad (1.61)$$

y esto para el paso superior (P. S) considerado; en el caso en que la estrella atraviere el meridiano en un paso inferior (P. I.), poco probable en nuestras latitudes, el ángulo P del triángulo PKE se convierte en $90-(m-H)$. Introduciéndose los cambios pertinentes en los desarrollos anteriores se llega sin ninguna dificultad a la fórmula de Mayer para un paso inferior, dado por:

$$\alpha = T + \Delta E_o + \Delta_e + \frac{\cos(\Phi + \delta)}{\cos \delta} b + \frac{\text{sen}(\Phi + \delta)}{\cos \delta} a + \frac{c}{\cos \delta} + L \quad (1.61a)$$

1.2.2.3. El tiempo observado y coordenadas de estrellas

Sea t_0 el tiempo obtenido en la observación, es un tiempo universal observado que deberá transformarse en tiempo sidéreo para entrar en las ecuaciones de observación.

En primer lugar, deberá determinarse el UTC (tiempo universal coordinado), correspondiente, que será:

$$\text{UTC} = t_0 + \Delta t_0$$

donde Δt_0 es el estado del crono con respecto al UTC, que consta generalmente de dos términos; uno, debido a la corrección por distancias de la estación emisora a la estación receptora, si se controla el cronógrafo con señales de radio, y otro, debido a la deriva del cronómetro desde la sincronización, si es que se consigue, al momento de la observación; es decir, es la diferencia entre la señal de radio y la señal de crono.

En segundo lugar, habrá que determinar el UT1 a partir del UTC anterior; esto se hace añadiendo al UTC la corrección:

$$\text{DUT} = \text{UT1} - \text{UTC}$$

que se obtiene de la circular D del B. I. H., o bien de la circular SH del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando (Cádiz). Es decir:

$$\text{UT 1} = \text{UTC} + \text{DUT 1}$$

El tiempo sidéreo local correspondiente se obtiene inmediatamente por:

$$T = T_G + \text{UT 1} (1 + 1/365.2422) + \Lambda_0$$

donde T_G es la hora sidérea aparente en Greenwich a 0^h de tiempo universal que puede tomarse de las tablas habituales.

Las coordenadas de las estrellas observadas, ascensión recta α y declinación recta δ , son coordenadas aparentes para el instante y lugar de observación, es decir, corregidas de aberración diurna. Estos datos pueden obtenerse también de las tablas habituales, o bien, como en el caso anterior, a partir de posiciones

medidas 1975.0, a las que se les aplica un proceso de reducción a aparentes (Sevilla, 1976).

1.2.2.4. Preparación de la lista puntero

La elección de estrellas y la preparación de la lista puntero deben seguir las siguientes consideraciones:

- 1) Las estrellas elegidas no deben tener una magnitud inferior a siete, a fin de poderlas observar sin dificultad.
- 2) El factor A , que multiplica a la desviación acimutal a (ver fórmula (1.64)), no debe sobrepasar, en valor absoluto, la cantidad 0.6. Esta condición (2) viene impuesta por dos motivos. Primeramente, según se dijo en el apartado segundo, no interesan aquellas estrellas que estén próximas al Polo; es decir, las que tengan declinación próxima a 90° , ya que luego, al intervenir en A el coseno de la declinación dividiendo, pueden hacer muy grande el factor A ; así pues, las declinaciones, según se dijo, no pueden estar muy alejadas de lo 45° . El segundo motivo consiste en no hacer demasiado preponderante el término en A en el sistema de ecuaciones, que más tarde discutiremos.
- 3) Para una serie, la suma de los factores A_i , es decir, ΣA_i no debe sobrepasar la unidad y debe acercarse a cero lo más posible, lo cual se consigue eligiendo parecido número de estrellas que culminen al Norte y lo hagan al Sur. Esta condición se debe a que el término preponderante del sistema de ecuaciones antes considerado sea $\Delta\lambda$.
- 4) Para una determinación global de la longitud, es decir, para todas las series, se ha de verificar igualmente que $\Sigma A_i < 1$ y lo más cerca a cero posible.
- 5) Se intentará, como se ha dicho en la condición (3), observar en cada serie igual número de estrellas que culminen al Norte y al Sur. Puesto que en el primer caso el factor A será negativo y el segundo caso será positivo, y se verificará con más facilidad la condición del apartado (3).

La condición (2) nos dice que:

$$|A| < 0.6 ,$$

Luego,

$$-0.6 \leq \frac{\text{sen}(\Phi \pm \delta)}{\cos \delta} \leq 0.6$$

$$-0.6 \leq \frac{\text{sen} \Phi \cos \delta \pm \cos \Phi \text{sen} \delta}{\cos \delta} \leq 0.6$$

Luego,

$$-0.6 \leq \text{sen} \Phi \pm \cos \Phi \text{tag} \delta \leq 0.6,$$

llegando, finalmente, a la expresión:

$$\frac{-0.6 + \text{sen} \Phi}{\cos \Phi} \leq \text{tag} \delta \leq \frac{0.6 + \text{sen} \Phi}{\cos \Phi} \quad (1.62)$$

Las estrellas que se tomen del catálogo han de cumplir la condición (1.62). Así por ejemplo, para una latitud $\Phi = 45^\circ$, se tiene:

$$0.1514 \leq \text{tag} \delta \leq 1.8485 \quad (1.63)$$

$$8^\circ.609 \leq \delta \leq 61^\circ.5875$$

6) Los límites en ascensión recta los impondrán las horas de comienzo y final de la observación. Si son θ_c y θ_f las horas sidéreas de comienzo y final de la observación, la ascensión recta debe cumplir:

$$\theta_c \leq \alpha \leq \theta_f ,$$

pues si $\alpha < \theta_c$, ya habría pasado por el meridiano al comenzar la observación, y si $\alpha > \theta_f$, no llegaría a alcanzarlo.

1.2.2.5. Ejecución de la observación

La técnica de observación que se sugiere es la siguiente:

- 1) El instrumento ha de estar en el meridiano, dándose un posible margen de error de unos tres segundos angulares, para la cual se ha de efectuar de antemano una determinación de primer orden del acimut de una referencia.
- 2) El micrómetro ocular (Wild T-4) ha de estar preparado para el paso de la primera estrella.
- 3) El cronómetro o cronógrafo ha de estar en funcionamiento y controlado.
- 4) El círculo vertical dispuesto para la observación, es decir, el nivel de eclímetro ha de estar calculado.
- 5) Se ajusta el círculo vertical al cenital puntero de la primera estrella.
- 6) Consultar con la lista puntero la hora de paso de la primera estrella por el meridiano.
- 7) Una vez la estrella esté dentro del campo del antejo, se situará el hilo móvil en la posición correspondiente al hilo del retículo V05, o bien V15, se la seguirá con el hilo móvil hasta dos revoluciones del tornillo micrométrico.
- 8) Realícese la lectura del nivel caballero adosado al instrumento.
- 9) Dar vuelta de campana y situar nuevamente el instrumento en el meridiano.
- 10) Se sitúa de nuevo el círculo vertical al cenital puntero correspondiente; puesto que se tienen anotadas las cenitales recíprocas en la lista puntero.
- 11) Se seguirá la salida de la estrella por el campo del antejo entre los hilos indicados en (7).
- 12) Se efectuará la lectura del nivel caballero correspondiente a la nueva posición del antejo.
- 13) Repítase el mismo proceso con todas las estrellas de la serie.

1.2.2.6. Ecuaciones de observación. Resolución

La fórmula de Mayer, deducida en la sección 2, se puede escribir en la forma siguiente:

$$\Delta\Lambda + Aa - (\alpha - t) = 0, \quad (1.64)$$

siendo $\Delta\Lambda = \Delta e$ y t toman los siguientes valores:

a) Paso superior de la estrella.

$$A = \frac{\text{sen}(\Phi - \delta)}{\cos \delta}$$

$t = (T + \Delta E_o + Bb + Cc + L)$, con:

$$B = \frac{\cos(\Phi - \delta)}{\cos \delta} \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{\cos \delta}$$

b) Paso inferior de la estrella.

$$A = \frac{\text{sen}(\Phi + \delta)}{\cos \delta}$$

$$t = (T + \Delta E_o + B'b + Cc + L - 12^h)$$

con:

$$B' = \frac{\cos(\Phi + \delta)}{\cos \delta}$$

Según lo expuesto en las secciones anteriores, todos los coeficientes intervienen en (1.64) son conocidos, de manera que el problema reside en determinar " $\Delta\Lambda$ " y " a ".

La observación de " m " estrellas en su paso por el meridiano dará lugar a m ecuaciones de observación de la forma:

$$\Delta\Lambda + a_i a - (\alpha_i - t_i) = v_i \quad (1.65)$$

con dos incógnitas $\Delta\Lambda$ y a . En cada serie de observación "m" suele variar entre 8 y 16 (4 a 8 pares Norte-Sur). Así pues, el sistema de ecuaciones de observación resultante se resuelve por el método de mínimos cuadrados y se obtienen los valores más probables de las incógnitas junto a las medidas de la precisión correspondientes.

Si hemos observado n series, habremos así obtenido para $j = 1, \dots, n$, Λ_j incrementos de longitud, de manera que:

$$\Lambda_j = \Lambda_0 + \Delta\Lambda_j, \quad (1.66)$$

a_j desviaciones acimutales,
 σ_j error medio cuadrático de la serie,
 m_j error medio cuadrático de Λ_j ,
 m'_j error medio cuadrático de a_j .

Los valores Λ_j se corrigen por movimiento del polo para cada serie individualmente.

Entonces los resultados finales de las n series se obtendrán por

$$\Lambda = \frac{\sum p_j \Lambda_j}{\sum p_j} \quad (1.67)$$

$$a = \frac{\sum p'_j a_j}{\sum p'_j} \quad (1.68)$$

y los errores medios cuadráticos correspondientes por:

$$M_\Lambda = \sqrt{\frac{\sum (\Lambda - \Lambda_j)^2 p_j}{(n-1) \sum p_j}} \quad (1.69)$$

$$M_a = \sqrt{\frac{\sum (a - a_j)^2 p'_j}{(n-1) \sum p'_j}} \quad (1.70)$$

siendo p_j y p'_j los pesos correspondientes determinados como los inversos de los cuadrados de los errores medios cuadráticos.

Si se adopta la hipótesis de considerar todas las series de igual confianza, independientemente de los errores medios cuadráticos obtenidos, los resultados finales de las n series se obtienen simplemente por:

$$\Lambda = \frac{\sum \Lambda_j}{n} \quad (1.67a)$$

$$a = \frac{\sum a_j}{n} \quad (1.68a)$$

y los errores medios cuadráticos correspondientes por:

$$M_\Lambda = \sqrt{\frac{\sum (\Lambda - \Lambda_j)^2}{n (n-1)}} \quad (1.69a)$$

$$M_a = \sqrt{\frac{\sum (a - a_j)^2}{n (n-1)}} \quad (1.70a)$$

Se obtiene de esta manera la longitud final corregida por movimientos del polo. En el apartado siguiente veremos otras correcciones que hay que aplicar.

1.2.2.7. Correcciones a la longitud observada

a) *Corrección por movimiento del polo.*

A fin de eliminar el efecto producido por la oscilación del meridiano del lugar debido al movimiento del polo terrestre instantáneo, es preciso introducir una corrección a la longitud dada por (Sevilla, 1975):

$$\Delta \Lambda_p = \Lambda^p - \Lambda = - (x_p \operatorname{sen} \Lambda + y_p \operatorname{cos} \Lambda) \operatorname{tg} \Phi$$

Siendo Φ la latitud astronómica del lugar de observación, x_p e y_p las coordenadas del polo instantáneo interpoladas para el instante de la observación y que son publicadas en el "Bulletin International de l'Heure", circular D, así como en la circular SH del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando (Cádiz).

La longitud observada corregida por movimiento del polo es,

$$\Lambda^p = \Lambda - (x_p \operatorname{sen} \Lambda + y_p \operatorname{cos} \Lambda) \operatorname{tg} \Phi \quad (1.71)$$

b) Corrección por curvatura de la plomada.

La observación ha sido efectuada sobre la superficie terrestre, a fin de referir dicha observación a una superficie determinada, que va a ser el geode, se efectúa la corrección trasladando el punto sobre la superficie terrestre al geode, según la línea de la plomada. Viene dada dicha corrección por (Sevilla, 1975):

$$\Delta \Lambda \operatorname{cos} \Phi = - \frac{H}{g_m} \frac{\delta g_m}{\delta y} + \frac{g - g_m}{g_m} \operatorname{tag} \beta_2 \quad (1.72)$$

Siendo $\operatorname{tag} \beta_2 = \frac{\delta n}{\delta y}$ la tangente del ángulo de inclinación del perfil Este-

Oeste, donde se mide el gradiente horizontal de $g \left(\frac{\delta g}{\delta y} \right)$; "g_m" es el valor medio de

la gravedad ente P y P_o, y "H" la altitud ortométrica del punto. Evidentemente esta corrección es nula si se toma el campo de la gravedad normal.

c) *Corrección por excentricidad de la estación.*

Si la observación no se ha efectuado en la estación propiamente dicha, sino en una excéntrica, la longitud obtenida ha de sufrir una corrección para referirla al punto de estación.

Dicha corrección viene dada por (Sevilla, 1975):

$$\Delta \Lambda_E = \Lambda^E - \Lambda = 0.032376 d_o \operatorname{sen} \beta \sec \Phi$$

Siendo d_o la distancia de la excéntrica al punto de estación y β el acimut tomado desde la excéntrica y contado desde el Norte. La longitud corregida de excéntrica será, por tanto,

$$\Lambda^E = \Lambda + 0.032376 d_o \operatorname{sen} \beta \sec \Phi \quad (1.73)$$

1.2.3. DETERMINACIÓN DEL ACIMUT POR EL MÉTODO DE LA POLAR

Se comienza por él dada la necesidad de situarse en el meridiano con un error máximo de 15" para posteriores determinaciones de longitud y latitud. Primeramente se determina la marcha y estado del reloj, reduciéndose a menos de un segundo. Se recomienda la elección de una referencia luminosa lo más próxima al meridiano y cuya distancia sea inferior a 25 km, así como próxima al horizonte para disminuir los errores de inclinación.

Las observaciones a la Polar se limitarán a las proximidades de la máxima digresión, utilizándose para ello un teodolito.

Una lectura queda constituida; (I.G.N., 1974), por dos medidas efectuadas cada una en una posición alterna del nivel. Denominaremos "enfilación a la Polar" a cada puntería acompañada de registro cronográfico de hora y lectura acimutal. Una determinación completa del acimut se compone, al menos, de 36 series de precisión y cada serie de ocho visuales a la señal y otras ocho a la Polar.

Las punterías a la señal han de efectuarse reiterando el círculo acimutal con una constante de $5^{\circ} 02' 02''$, asegurando así la repartición de lecturas a lo largo del limbo y del micrómetro.

1.2.4. CORRECCIÓN POR MOVIMIENTO DEL POLO TERRESTRE

Tanto las coordenadas astronómicas de una estación como el acimut de una dirección obtenidos por observación, están referidos a un sistema instantáneo y por consiguiente varían con el tiempo con el movimiento del Polo.

Las correcciones, sustractivas a aplicar son, (Sevilla, 1975),

$$\Delta \phi = x_p \cos \bar{\Lambda} + y_p \sin \bar{\Lambda}$$

$$\Delta \Lambda = (x_p \sin \bar{\Lambda} + y_p \cos \bar{\Lambda}) \operatorname{tg} \bar{\phi}$$

$$\Delta A = (x_p \sin \bar{\Lambda} + y_p \cos \bar{\Lambda}) \operatorname{sec} \bar{\phi}$$

siendo $(\bar{\phi}, \bar{\Lambda})$ coordenadas astronómicas del punto en un sistema terrestre instantáneo; (x_p, y_p) coordenadas del Polo instantáneo en un sistema que tiene como origen el Polo medio y cuyos ejes X e Y coinciden con las direcciones de Greenwich y su perpendicular hacia el Oeste.

1.2.5. CORRECCIÓN POR CURVATURA DE LA PLOMADA

El hecho de que las diferentes superficies de nivel campo gravítico terrestre no sean paralelas hace que las coordenadas astronómicas de un punto P de la superficie topográfica y su correspondiente P_o del geode, obtenido proyectando a lo largo de la línea de campo, no sean iguales y además, que sus diferencias sean distintas para los distintos puntos que se consideren.

Las longitudes, latitudes y acimutes reducidos vendrán dados por, (Sevilla, 1975),

$$\phi_{P_o} = \phi_P + 0'' 00017 \text{ sen } 2 \phi$$

$$\Lambda_{P_o} = \Lambda_P$$

$$A_{P_o} = A_P - (\Delta \phi \text{ sen } A - \Delta \Lambda \cos \phi \cos A) \text{ ctg } z$$

donde (ϕ_{P_o} , Λ_{P_o} , A_{P_o}) son coordenadas referidas al geode; (ϕ_P , Λ_P , A_P) coordenadas astronómicas; $\Delta \phi$ e $\Delta \Lambda$ son variaciones en longitud y latitud a lo largo de la línea de la plomada entre P y P_o; y, z la distancia cenital de la referencia.

1.3. OBSERVACIONES E.D.M. (MEDIDA ELECTROMAGNÉTICA DE DISTANCIAS)

La correcta aplicación del método de trilateración a la red geodésica requiere un número suficiente de lados cuya longitud no sea mayor de 40 km para medidas efectuadas con geodímetro y de 60 km para medidas con telurómetro.

Se ha de obtener la distancia con un error medio externo que no exceda de 10 p.p.m. para lo cual es necesaria la reiteración de medidas; determinar el error de cero de los instrumentos y registrar precisa y cuidadosamente los datos

meteorológicos. Ha de conocerse también la altitud de los vértices con suficiente aproximación, 1 m, lo que requiere una compensación altimétrica de una red de orden inferior.

La medida de un lado se compone de dos tipos de registro, medida electromagnética de la distancia y toma de datos meteorológicos, teniendo estos últimos gran interés debido a la influencia de *la refracción atmosférica* en este tipo de medidas.

En medidas de distancia las normas a seguir son las siguientes, (I.G.N., 1975).

Se define una medida elemental, (m.e.), como la efectuada con un telurómetro funcionando como "master" y compuesta por una serie de medidas modificando la sintonía de la cavidad de 15 en 15 unidades, y se entiende por medida completa, (m.c.), la realizada por una pareja de telurómetros actuando sucesivamente como "master" y "remote". Una m.c. se compone de dos m.e. y puede llevarse a cabo en 45 minutos.

La medida de un lado requiere un mínimo de cuatro m.c., efectuadas al menos en dos jornadas diferentes, y dentro de cada jornada repartida en dos sesiones, mañana y tarde.

En el registro de datos meteorológicos se utilizan barómetros de temperatura seca y húmeda para la determinación de la humedad relativa. Al mismo tiempo que la temperatura, ha de medirse la presión, registrando al comienzo y al fin de cada medida elemental.

Una vez terminada la medida de un lado, no se dará como definitiva a no ser que las medidas elementales se encuentren agrupadas de modo que la discrepancia entre las extremas no exceda de 5 p.p.m. de la distancia.

1.3.1. REDUCCIÓN EN MEDIDA DE DISTANCIAS

- **Corrección por curvatura de la trayectoria.**

Las ondas no se propagan en línea recta debido a la variación del índice de refracción del medio. Si consideramos dos puntos A y B como extremos de un arco de circunferencia de radio R, igual al radio medio de la Tierra incrementado en la altitud media, $\left(\frac{h_A + h_B}{2}\right)$. Y D_o la distancia observada, entonces la corrección aditiva debida a la variación del índice de refracción es (Vidal, 1974),

$$C_c = (1 - K^2) \frac{D_o^3}{24 R^2},$$

donde K es el coeficiente de refracción, $K = 1 - (z_1 + z_2 - \pi) \frac{R}{n}$, con z_1 y z_2 distancias cenitales recíprocas, y n el índice de refracción a lo largo de la trayectoria y que se puede obtener por diferentes aproximaciones, (Levallois, 1969),

$$C_N = -D_H \frac{h_m}{R_A} + D_H \frac{h_m^2}{R_A^2},$$

Las altitudes que disponemos se refieren al geoide y no al elipsoide, por tanto las ondulaciones del geoide del orden de 60 m producen de 10 ppm.

- **Corrección por paso de la cuerda al arco.**

La corrección aditiva para pasar al arco sobre el resultado obtenido tras aplicar las anteriores correcciones es, (Vidal, 1971),

$$C_A = \frac{S^3}{24 R^2},$$

La pequeña magnitud de esta corrección permite tomar S igual a la distancia medida y R como valor medio.

- **Corrección por excentricidad.**

En caso de realizarse ha de ser la primera:

$$AB = \sqrt{\overline{EB}^2 + \overline{EA}^2 - 2\overline{EB}\overline{EA} \cos E}$$

donde \overline{EB} se mide electromagnéticamente, \overline{EA} con cinta, y el ángulo E con el teodolito.

1.3.2. CALIBRACIÓN Y CONTRASTACION DE UN DISTANCIÓMETRO ELECTRÓNICO SUBMILIMÉTRICO. BASES INTERFEROMÉTRICAS DE CALIBRACION. MEKOMETER ME-5000

1.3.2.1. Descripción

El ME-5000 fabricado por Kern (actualmente integrada con Wild en el grupo Leitz) es un distanciómetro con portadora láser y desviación estándar de $\pm (0,2 \text{ mm} + 0,2 \text{ pmm})$ en precisión.

La fuente de frecuencia es un sintetizador que usando frecuencias inusualmente elevadas, del orden de 500 MHz, modula el haz láser generado por

un He-Ne y causa una sistemática modificación de la polarización del haz, pasando secuencialmente de lineal a elíptica, a circular y así sucesivamente (figuras de Lissajous cerradas de relación 1:1).

La frecuencia moduladora (FM) es variable y ajustable por el instrumento en valores concretos durante un proceso automático.

Cuando las longitudes de onda corresponden a un múltiplo entero de la distancia entre el distanciómetro y el reflector, se determinan exactamente las frecuencias correspondientes a partir de las cuales se calcula la distancia buscada.

El instrumento puede hacer medida aislada normal (para lo que invierte de 2 a 2,5 minutos) y tracking (cada 20 segundos tras la inicial) pero con muy fuertes limitaciones en cuanto a velocidad de desplazamiento en esta última modalidad.

Se puede medir en dos rangos. El "bajo" alcanza desde 20 hasta 1000 m. El "alto" desde 50 a 8000 m.

Tanto en instrumentos como en prismas solo se dispone de 2 tornillos nivelantes en ángulo recto (en lugar de tres a 120° como es habitual). El aparato báscula sobre una rotula central, siendo por tanto constante e invariable la altura de estacionamiento. Tanto el instrumento como el reflector pueden invertir la posición (vuelta de campana). Se pueden hacer medidas hasta el cenit.

Es posible desmontar las bases nivelantes bitornillo Kern y, mediante un adaptador, utilizar bases nivelantes Wild, aunque se pierde la característica de altura constante y disminuye la precisión de centrado.

La altísima precisión nominal solo puede conseguirse si, ente otros factores, controlamos perfectamente el índice de refracción del medio, lo que solo puede hacerse con ciertas posibilidades de éxito en distancias claramente inferiores a

1000 m. No obstante, si se estableciese la adecuada infraestructura de toma de constantes meteorológicas, sería posible medir al alcance máximo de 8 km. con la precisión nominal.

El instrumento permite la salida de observaciones vía RS-232 hacia un colector de datos informático. También pueden ser controladas todas sus funciones (salvo las mecánicas de nivelación y puntería) desde un ordenador exterior. Con este sistema y con apoyo del adecuado software externo es posible hacer medidas a menos de 20 m. o a más de 8000 m. (esto último si las condiciones lo permiten y con adecuado número de prismas reflectores).

1.3.2.2. Principios operativos

Fundamento del sistema de medida.

En el ME-5000 la distancia se calcula a partir de valores de frecuencia que el instrumento mide.

Los valores de frecuencia siempre se miden cuando coincidan las fases de salida y retorno, es decir en "nulos". Esta situación se da cuando en el recorrido de la señal existe un número entero de longitudes de onda moduladora. Con diversos ajustes de frecuencia moduladora se pueden provocar diversas situaciones como la descrita, para una distancia dada.

El número entero N de longitudes de onda contenido en el recorrido de la señal se determina indirectamente por ajuste de la frecuencia de modulación en intervalos predefinidos.

Un ajuste de frecuencia se hace en dos etapas: primeramente se hace un rastreo buscando un nulo en el retorno hasta localizarlo. Ello constituye el ajuste aproximado. Seguidamente y en el inmediato entorno del valor antes determinado se hacen 1280 mediciones individuales en frecuencias ligeramente mayores y

menores que la correspondiente al nulo. La media ponderada de esos valores, que constituye el ajuste fino, ofrece el valor definitivo del valor de frecuencia ajustada a ese nulo concreto. Este proceso se denomina "*ajuste de frecuencia*".

Procedimiento automático de medida.

Al conectar el láser, el sintetizador de frecuencias ajusta inicialmente una frecuencia moduladora previa, a partir de la cual comienza la búsqueda del nulo más próximo. Tras el ajuste, la frecuencia F_0 se guarda en memoria. Se busca el nulo contiguo y se ajusta y guarda la frecuencia F_{0+1} .

En ese momento ya se puede calcular la distancia puesto que tenemos el sistema:

$$D = N\lambda_0 \quad D = (N + 1) \lambda_{0+1}$$

siendo "N" la ambigüedad o número de longitudes de onda λ_0 inicialmente contenidos en la distancia. Los valores $\lambda_0 + \lambda_{0+1}$ se obtienen de F_0 y F_{0+1} .

La distancia obtenida por la solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas carece de la precisión deseada y por ello se inicia otro proceso.

Los ajustes de frecuencia para otros nulos son predefinibles a partir de $\Delta F = F_0 - F_{0+1}$, dado que conocemos D y que la diferencia o incremento de frecuencia entre los valores ajustados de dos nulos contiguos son siempre idénticos y característicos de cada distancia.

Se hace un ajuste en la zona media del margen de ajuste y se obtiene la frecuencia F_m correspondiente al nulo buscado. Tras ello se busca, encuentra y ajusta otro nulo en el extremo del margen, obteniendo la frecuencia F_e .

Con la obtención de los valores F_0 , F_m y F_e termina el proceso de medida de valores, pudiendo proceder ya el cálculo de la distancia.

Cálculo de distancia con los valores de frecuencia.

En el proceso anterior el valor F se ha obtenido con toda precisión. Las ambigüedades se obtienen:

$$N_0 = \text{RDN}\left(\frac{F_0}{\Delta F}\right); N_m = \text{RDN}\left(\frac{F_m}{\Delta F}\right); N_e = \text{RDN}\left(\frac{F_e}{\Delta F}\right),$$

Siendo RDN un redondeo (ya que los valores "N" han de ser enteros) y N_0 , N_m y N_e el número de longitudes de ondas contenidos en el recorrido según la frecuencia moduladora sea F_0 , F_m ó F_e .

Si alguno de los valores N calculados difiere de un entero en valores superiores a $\pm 0,25$ la medida se desecha y se envía a pantalla un mensaje de error.

La distancia D se calcula como media de los valores D_0 , D_m y D_e :

$$D_0 = \frac{N_0 c}{2F_0} + K \quad ; \quad D_m = \frac{N_m c}{2F_m} + K$$

$$D_e = \frac{N_e c}{2F_e} + K \quad ; \quad D = \frac{D_0 + D_m + D_e}{3}$$

Siendo $c = 299707186.9$ m/s, velocidad de la luz para la λ del láser (de 632,8 nm en el vacío) en la atmósfera standard establecida (15° C, 1013,5 hPa, 0% HR y 0,03 de CO₂), y K la constante aditiva compuesta del valor mecánico interno de - 0,2 m., más el valor fijado en los conmutadores de constante.

Para eliminar errores groseros se hace una comprobación de coincidencia entre los tres valores D_0 , D_m y D_e . Si difieren en más de 0,02 m., la medida entera se desecha y se envía a pantalla un mensaje de error.

Si el proceso ha culminado correctamente se muestra en pantalla el valor D en metros con 4 decimales y se apaga el láser, quedando el instrumento en espera de otra medida.

Como puede observarse, este sistema es más simple que el de medida de fase. No está difundido porque exige una extremada precisión en la medición y ajuste de altas frecuencias lo que es caro y dificultoso técnicamente, y porque el proceso de medida es muy largo (tarda más de 2 minutos).

Fuentes de error.

Es obvio que, para alcanzar la precisión nominal, todos los posibles errores han de ser evitados por su determinación previa, por su modelación, o por su compensación o eliminación mediante el acertado método operativo.

Los errores que no puedan ser determinados, modelados o compensados habrán de asumirse. Solo puede considerarse un instrumento operativo y capaz de alcanzar su precisión nominal cuando los errores que hayan de asumirse (inevitablemente los habrá, aunque sean residuales) estén claramente por debajo de la precisión del sistema, generando lo que en términos electrónicos se llama "*ruido*" y originando en el peor de los casos un poco detectable aumento de la dispersión.

Al considerar las fuentes de error se plantea una alternativa en los errores: errores proporcionales a la distancia (que generan un factor de escala) o errores no proporcionales (absolutos).

Los errores proporcionales son dos: Velocidad (índice de refracción i.r.) y frecuencia del oscilador. Los errores no proporcionales son también dos: Precisión de centrado y constante del equipo.

1.3.2.3. Errores proporcionales

Velocidad.

Lo que en última instancia mide cualquier distanciómetro electrónico es el tiempo de tránsito que invierte la portadora en recorrer la distancia dos veces (ida y vuelta).

La velocidad de propagación es una variable que depende de la longitud de onda de la portadora y de las características del medio.

La cuantificamos para una longitud de onda λ concreta mediante el que denominamos índice de refracción, n , que es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío, c , y la de la onda en cuestión en el medio, c_m :

$$n = \left(\frac{c}{c_m} \right)$$

El fabricante del ME-5000 ha elegido como atmósfera tipo, es decir en la que la lectura ofrecida coincide exactamente con la distancia, la atmósfera estándar según Edlen con temperatura de 15° C, presión de 1013,5 hPa, 0% de humedad relativa y 0,03% de contenido de CO₂, lo que corresponde a un índice de refracción de 1,000284515 , que es el llamado "*índice residente*", n_r , que facilita el fabricante para que, al ser relacionado con el local del medio, n_m , nos ofrezca el factor de escala por velocidad a aplicar:

$$Fe_v = \left(\frac{n_r}{n_m} \right)$$

Las fuentes de error que han de controlarse para esta corrección son las provenientes de los equipos para tomar los parámetros meteorológicos y de la metodología usada.

1.3.3. PRECISIÓN DATOS METEOROLÓGICOS

En la Asamblea General de la Asociación Internacional de Geodesia (1963), se recomendó que la fórmula de Barrell y Sears (1939) fuese adoptada con las siguientes constantes para instrumentos electroópticos en las condiciones de 0°, 760 mm Hg y 0.03 % CO₂.

$$(n_g - 1) 10^7 = 2876.04 + (3 \cdot 10.288 / \lambda^2) + (5 \cdot 0.136 / \lambda^4)$$

donde: n_g = índice de refracción del grupo de ondas.

λ = en micras longitud de la efectiva onda de la radiación.

Expresando la temperatura seca "t" en °C, la presión "p" en mm Hg y la tensión "e" del vapor de agua en mm Hg, la fórmula utilizada es:

$$n = 1 + (((n_g - 1) / (1 + t / 273.15)) (p / 760)) - (5.5 \cdot 10^{-8} / (1 + t / 273.15)) \quad (73)$$

La tensión de vapor de agua, e, se calcula con la fórmula (Burnside, 1982).

$$e = E - 0.00066 (1 + 0.00115 t' p (t - t'))$$

$$\text{Log } E(\text{mm Hg}) = 26.12122 - (3049.50 / 273.15 + t') - (5.86970 \text{ Log } (273.15 + t'))$$

donde: t' = es la temperatura húmeda en °C.

E = es la tensión máxima del vapor del agua.

Por último, ha de considerarse la influencia de las variaciones meteorológicas sobre el índice de refracción.

$$d = (\delta n / \delta p) dp + (\delta n / \delta t) dt + (\delta n / \delta e) de$$

Diferenciando en la expresión (73) se obtienen las derivadas parciales:

$$\delta n / \delta p = (0.3947 (n_g - 1)) / (273.15 + t) + (9.9171 \times 10^{-6}) (1 + 0.00115t') (t - t')$$

$$\delta n / \delta t = - (0.359474 (n_g - 1)p / (273.15 + t)^2) + 1.5026 \times 10^{-5} e / (273.15 + t)^2$$

$$\delta n / \delta e = - 1.5026 \times 10^{-5} / (273.15 + t)$$

Para que el error en la corrección esté dentro de los límites de la precisión alcanzable por el instrumento, suponiendo condiciones normales y despreciando los segundos sumados, el error de la determinación del índice de refracción deberá ser menor de 2×10^{-7} , o sea 0.2 ppm.

Para que esto se cumpla:

$$dp \leq 2 \times 10^{-7} (n_g - 1)^{-1} / 0.0013158 \text{ mm Hg.}$$

$$dp \leq 2 \times 10^{-7} (n_g - 1)^{-1} / 0.00366032 \text{ }^\circ\text{C.}$$

$$dp \leq 2 \times 10^{-7} / - 0.005 \times 10^{-5} \text{ mm Hg.}$$

Haciendo $n_g = 1,000284515$ (nuestro índice residente), las precisiones requeridas serán:

$$dp \leq 0.53 \text{ mm Hg} = 0,7 \text{ hPa} = 0,7 \text{ mb}$$

$$dt \leq 0.2 \text{ }^\circ\text{C.}$$

$$de \leq 3.6 \text{ mm Hg}$$

La presión parcial de vapor de agua, e , no es medida directamente sino en función de la diferencia sicrométrica entre las temperaturas de los bulbos seco y húmedo del sicrómetro.

Aun no siendo lineal esta diferencia con e , se puede afirmar que en condiciones normales, el termómetro de húmeda “ha” de ofrecer precisiones de 2 °C, lo que es lógico si tenemos en cuenta el poco efecto que tiene la humedad en las portadas ópticas.

1.3.4. TEMPERATURAS

1.3.4.1. Equipos usados

La escala usada en la Celsius. Se han usado 4 aspirósicrómetros Thies 762 tipo Assman con turbina aspiradora radial movida por motor resorte.

Los termómetros empleados según norma DIN 58661 tienen divisiones de 0,2°. Entre dotación y repuestos había 10 unidades. Tras los oportunos contactos con el Instituto Nacional de Meteorología, se accedió al laboratorio de instrumentación situado en el parque madrileño del Retiro.

Allí poseen varios baños isotermos con temperatura ajustable. Se usó un MGW LAUDA modelo CD 20.

Los termómetros se numeraron del 1 al 10 con un grabador especial de metales, en la contera superior metálica haciendo caso omiso del largo número de fábrica. Es preferible hablar del termómetro 6 del 84355321 / 82, por ejemplo.

Antes de ser fijado el soporte adecuado y sumergidos en el baño, fueron cuidadosamente revisados en busca de grietas en cualquier punto del cristal, así

como cortes en la columna de mercurio o gotitas del mismo en la cámara superior de expansión. No se detectó anomalía alguna.

1.3.4.2. Morfología de los termómetros

Sólo se hará referencia a los de mercurio que han sido los usados en este trabajo. No se describirán las sondas PT 100, las termorresistencias, los bimetales, los termopares ni los semiconductores termolineales también usados en otras técnicas.

Los termómetros de mercurio están hechos de vidrio y tienen 4 elementos esenciales: bulbo, capilar, escala y cámara de expansión. En la cavidad interior hermética, formada por bulbo, capilar y cámara de expansión, hay la necesaria cantidad de mercurio y un espacio sometido al vacío o con una cierta cantidad de gas poco activo como nitrógeno.

Sin conectar su principio de funcionamiento, de sobra conocido, pueden hacerse las siguientes consideraciones:

El volumen del bulbo es uno de los factores que determinan su sensibilidad: cuanto mayor sea, más sensible será. Las paredes del bulbo deben ser, ni tan gruesas que provoquen una gran inercia térmica por conducción (tiempo largo de estabilización) ni tan finas que la presión atmosférica pueda provocar variaciones significativas de lecturas para la temperatura dada. Al fin y al cabo el bulbo es parte de una cámara hermética y por tanto susceptible de deformación en función de la presión. Como el mercurio es virtualmente no comprimible, si a temperatura estabilizada la presión aumentara y el bulbo sufrirá deformación por compresión, la columna de mercurio avanzaría por el capilar ofreciendo lecturas crecientes.

El capilar también determina la sensibilidad, pero además la presión. Cuanto más fino sea, mayor desplazamiento lineal podrá apreciarse en el final de

la columna de mercurio para una determinada variación de temperatura, es decir los grados serán más "grandes".

La precisión depende especialmente de la uniformidad del diámetro del capilar. Si el diámetro y por tanto la sección no es uniforme, a incrementos iguales de temperatura no corresponderán desplazamientos iguales en el extremo de la columna de mercurio.

La escala puede ir grabada en el capilar o en una lámina independiente adosada al capilar; es uniforme y su división está definida por el volumen del bulbo y el diámetro del capilar. Su origen lo está por la cantidad de mercurio contenida y la posición de la escala.

La cámara de expansión es una cavidad hueca situada al extremo del capilar para que si la temperatura rebasa el fondo de escala, el termómetro, en concreto su bulbo no explote por efecto de la presión generada por un mercurio de dilatación y que ha ocupado ya todo el volumen interior.

Es importante comprobar que en la cámara de expansión no ha quedado ninguna bolita de mercurio tras una pasada de temperatura. El volumen de estas bolitas causaría una menor longitud aparente de la columna de mercurio originando lecturas menores de la real.

La última incidencia que puede sufrir un termómetro es la rotura de la columna de mercurio, y no es algo infrecuente. En cierto punto aparece un hueco de por ejemplo 3º vacíos en medio de la columna de mercurio y por tanto las lecturas son 3º mayores. Se resuelve aplicando calor al bulbo muy lentamente. Cuando el hueco llegue a la cámara de expansión se puede enfriar y la columna estará entera. De nuevo cuidado con las bolitas que puedan quedar en la cámara de expansión que habrían de ser recogidas con nuevo calentamiento hasta que el

mercurio invada de nuevo la cámara de expansión y arrastre las gotitas al enfriarse.

Una fuente de error que se considera normalmente en termometría es la dilatación diferencial existente entre la columna de mercurio y el vidrio en que está grabada la escala.

Cuando se usan termómetros que han de sumergirse en cierta profundidad de líquido, por ejemplo 5 cm a partir del extremo inferior del bulbo, las lecturas corresponden a una temperatura ideal estándar del resto del termómetro, por ejemplo 20 °C.

La corrección se determina tomando la temperatura real del cuerpo con 3 ó 4 termómetros auxiliares, llamados "de columna". El coeficiente de dilatación del mercurio es conocido, y el del vidrio constitutivo del cuerpo del termómetro está indicado por un código de colores observable en unos filamentos coloreados incluidos en el reverso del termómetro.

En este caso la corrección no se realiza porque los termómetros patrón usados son de inmersión total y porque los termómetros a calibrar, como son para temperatura ambiente y durante su uso han de estar en su totalidad a igual temperatura, han sido totalmente sumergidos en el baño durante su calibración,

1.3.4.3. Calibración

La calibración se realizó entre -10 °C y 50 °C.

El líquido conductor del baño es una mezcla de agua y glicol con punto de congelación a -35 °C y punto de ebullición a 100 °C.

El baño está constituido por el baño en sí, líquido conductor, mecanismo de circulación y termostato electrónico programable. Dispone de una fuente de calor (resistencia interna) y otra de fría (unidad refrigeradora externa). La fuente de calor facilita ágiles subidas de temperatura (del orden de 1° /min), pero para obtener temperaturas de -10°C , al ser relativamente limitada la capacidad en frigorías / hora, de la unidad refrigeradora y considerable la masa de líquido a enfriar, a de esperarse un largo tiempo por la gran inercia térmica del conjunto. Ello motivó el uso de un temporizador que activó la circulación y refrigeración caso 6 horas antes del comienzo de las operaciones, porque como el descenso de temperatura es más lento que la subida, lo lógico es empezar a -10°C y subir (en este caso en incrementos de 5°C) hasta los 50°C .

El laboratorio facilitó una caja de termómetros patrón Scheider, con divisiones de $0,01^{\circ}\text{C}$.

Cada termómetro abarca 5° más 1° de solapa en cada extremo. Así, por ejemplo, un termómetro tiene escala de 4° a 11° , el siguiente de 9° a 16° , etc.

Cada termómetro posee su propio certificado oficial de calibración con las correcciones a aplicar que en este caso fueron despreciables ya que oscilan en valores de $\pm 0,02^{\circ}\text{C}$: En el certificado se anuncia que han de trabajar en inmersión total.

Para la calibración no es necesario estabilizar en valores exactos (-10° , -5° , 0° , 5°) sino que se validó cualquier valor cercano al deseado, pues lo buscado es la medida comparativa de los termómetros con el patrón.

La rutina empleada fue la siguiente:

- 1.- Estabilización.
- 2.- Lectura de patrón.
- 3.- Lectura de cada termómetro.

4.- Lectura en el patrón.

5.- Subida de 5 ° y nueva estabilización.

Este proceso se realizó desde los -10 ° hasta los +50° con plena satisfacción ya que el funcionamiento del baño fue irreprochable y tras las estabilizaciones no se pudieron detectar variaciones de temperatura del baño con el termómetro patrón.

Las únicas incidencias comentables fueron el empañamiento del cristal a bajas temperaturas y el transitorio color lechoso adquirido por el líquido al sufrir calentamientos a más de 30 °, por las minúsculas burbujitas producidas por los gases disueltos en el líquido liberados por la temperatura.

1.3.4.4. Resultados

Como las lecturas obtenidas se realizaron para cada termómetro, primero, un cuadro numérico de correcciones para incluir en programa de cálculo, y segundo una gráfica para uso expedito.

Ta. Patrón	-9,7	0,66	4,82	9,95	14,84	20,0	25,29	29,86	34,86	39,79	44,86	49,61
Ta. TERM-5	-9,8	0,70	5,00	10,1	15,0	20,15	25,8	30,0	35,0	39,9	44,9	49,6
ERROR	0,01	0,04	0,18	0,15	0,16	0,15	0,11	0,14	0,14	0,17	0,04	-0,01

Las gráficas tienen en abscisas temperaturas y en ordenadas errores. Su observación permite constatar la adecuada calidad al no presentar los posibles defectos típicos:

- Error por bulbo de volumen incorrecto, capilar de diámetro erróneo o escala con factor: la gráfica iría oblicua y no paralela al eje de abscisas.
- Error por capilar con diámetro no uniforme o escala mal dividida: la gráfica daría oscilaciones no admisibles.

- El otro error posible que es el cero, tiene poca importancia: La gráfica iría paralela al eje de abscisas y separada del mismo. Habría que aplicar una corrección constante. Se origina por un volumen erróneo de mercurio o un inadecuado posicionamiento entre escala y capilar. También puede estar motivado por corte en la columna o gotitas en la cámara superior de expansión.

1.3.5. PRESIONES

1.3.5.1. Equipos usados

De la misma manera que se han calibrado los termómetros de mercurio con los que se tomó la temperatura seca y húmeda, se han de calibrar los barómetros con los que se obtendrá el último parámetro meteorológico necesario para el cálculo del índice de refracción: la presión. Sabiendo que las precisiones requeridas en este caso son 0,7 hPa, se han usado cuatro barómetros aneroides tipo THOMMEN Modelo "A", que alcanzan mejor precisión que la citada y poseen compensación térmica.

Por decisión del Comité Ejecutivo de la O.M.M. (Organización Meteorológica Mundial) en su trigésima reunión, se acordó emplear, a partir del 1 de enero de 1982, como unidad de presión atmosférica el hektopascal (hPa) en lugar del milibar. Teniendo en cuenta su equivalencia, la expresión expresada en ambas unidades será la misma ($\text{hPa} = \text{mb}$).

La calibración se realizó también en los laboratorios que posee el I.N.M. en el retiro de Madrid. Allí se usó una cámara de presión Fuess para alcanzar las presiones deseadas, conectada a un barómetro de escala compensada Fuess. Fueron también utilizados diez barómetros semi-patrón tipo Fortín de dos centésimas de hPa de precisión, pertenecientes a los laboratorios, para ajustar al cero de los aneroides y el del Fuess mencionado.

La cámara de presión Fuess, antigua pero plenamente eficaz, es compacta y está fabricada con viga de acero soldada. La tapa delantera de la cavidad es un grueso cristal transparente por el que se observan los barómetros a calibrar. La tapa posterior se abre por medio de doce tornillos. Posee una lámina de caucho como sello para que ajuste herméticamente al cerrar. Para equilibrar el peso de la plancha posterior existe una polea y contrapeso que permite una fácil manipulación. La cámara está conectada a una bomba eléctrica de presión / vacío que nos permite aumentar o disminuir a voluntad la presión en la cámara una vez cerrada. En el lateral posee una pequeña válvula cónica con la que puede conseguirse una lenta aproximación a la presión deseada.

1.3.5.2. Morfología de barómetros

Los barómetros usados han sido:

- Fortín, de mercurio.
- Fuess de escala compensada, de mercurio.
- Thomson 2A, aneroide.

Sólo se hará referencia a los mencionados. No serán descritos los tipos de sifón, los manómetros con lectura por catetómetro, los de tubo Bourdon, los electrónicos piezoeléctricos ni los de ebullición o hipsométricos, también usados en otras técnicas.

1) De mercurio

El principio fundamental del barómetro de mercurio se basa en que la presión de la atmósfera se equilibra con el peso de una columna de mercurio. Está basado en el conocido experimento de Torricelli que sirvió para determinar en 1643, por primera vez, el valor de la citada presión.

Consiste en una cubeta y un tubo de vidrio cerrado por su parte superior. El mercurio llena la cubeta y parte del tubo, en cuya parte superior reina el vacío. La presión es proporcional a la diferencia de altura del mercurio entre tubo y cubeta y se mide sobre una escala metálica graduada en unidades de presión.

La diferencia entre los Fortín y los de escala compensada estriba en la forma de medir la diferencia de altura. Tienen protegido el vacío de la parte superior del tubo con un dispositivo que impide el paso de cualquier burbuja de aire (cazaburbujas). Siempre llevan un termómetro para conocer la temperatura del conjunto.

1.1) Barómetro Fortín

El nivel de mercurio de la cubeta puede variar de modo que la superficie del mismo se ponga en contacto con un índice de marfil. Para conseguir el contacto, en la base de la cubeta hay un tornillo que empuja hacia adentro el fondo de la cubeta que es piel de gamuza. La escala suele estar dividida en mm naturales o también en mbar o hPa. El cero de la escala coincide por construcción con la punta afilada de marfil.

Para realizar una lectura se hace variar el nivel de mercurio de la cubeta subiendo o bajando su fondo con el tornillo hasta conseguir que la superficie libre de Hg enrase con la punta del marfil, lo que se aprecia muy bien por su imagen perfectamente reflejada en la superficie del mercurio, que es como un espejo.

1.2) Barómetro de escala compensada

Es como el Fortín pero sin el fondo móvil de la cuneta. Está construido de manera que siendo conocida la relación entre las secciones interiores del tubo y la

cubeta, las subidas de mercurio en el tubo están compensadas en la escala con las burbujas del mercurio en la cubeta.

La lectura de la presión viene dada por la diferencia entre la superficie libre de mercurio en la cubeta y la de mercurio en el capilar.

Se calibra el cero añadiendo o quitando mercurio al compararse con un patrón Fortín. La operación de lectura se realiza igual en los dos (una vez hecha la coincidencia de la cubeta el Fortín). Para ello tienen una carcasa de latón en la que hay grabada una escala y un tubo concéntrico que puede subir o bajar y tiene un nonius cuyo origen coincide con su borde inferior y que queda sobre la escala.

El tubo concéntrico sube o baja hasta ser tangente su parte inferior al menisco del mercurio y entonces se lee la escala. El nonius de los Fortín tiene divisiones de 0,02 hPa y los de escala compensada de 0,1 hPa.

1.3) Corrección en los barómetros de mercurio

Para que las lecturas barométricas hechas a diferentes horas y en distintos lugares sean comparables entre sí, según el reglamento Técnico (R.T) de la O.M.M., es necesario reducirlas a las condiciones normales, para lo cual es necesario aplicar unas correcciones.

Se consideran como condiciones normales para la reducción de la presión, la temperatura a 0 °C, a la cual la densidad de Hg es de 13,5951 gr/cm³, y como valor normal de la aceleración de la gravedad 980,6665 cm/s².

a) Corrección por temperatura

Toda la columna de Hg, cualquiera que sea su sección, varía de altura al variar la temperatura, es decir, el Hg al dilatarse, disminuye su densidad y, por

consiguiente, con temperaturas diferentes se pueden leer presiones distintas en el barómetro sin que la presión haya variado. Interesa referir la altura de cada observación a la que tendría una temperatura determinada e invariable. Se ha elegido para ello la del hielo fundente, o sea 0 °C.

Por otra parte, habrá que tener en cuenta que la escala de latón fue graduada a 0 °C, lo que provoca que al variar la temperatura se altera la distancia entre sus divisiones.

Por ello, los barómetros de mercurio van provistos de un termómetro integrado en la carcasa. Las correcciones se hacen según las tablas oficiales del fabricante de del I.N.M.

b) Corrección por capilaridad

Característica del mercurio es que no moja al vidrio; como consecuencia, es observable que la superficie libre del mercurio dentro del tubo no es plana, sino que por tensión superficial forma un menisco convexo cuya parte superior, si el diámetro del tubo no fuera lo suficientemente grande, esto es 2,5 cm, estaría por debajo del nivel que alcanzaría el mercurio de no haber capilaridad.

La diferencia c entre las dos columnas se denomina depresión capilar, ésta depende del diámetro del tubo d y de la altura del menisco h_m de forma que disminuye con el diámetro del tubo y aumenta con la altura del menisco.

La corrección capilar es siempre aditiva y varía de un instante a otro, y en éstos al cabo del tiempo. Existen ábacos y tablas de doble entrada que dan la corrección de capilaridad. Aunque el mejor sistema consiste en comparar la presión del barómetro con la del otro patrón, de tubo suficientemente ancho para que éste no tenga corrección, o cuya corrección sea perfectamente conocida.

c) Corrección de ajuste del cero

Cuando la punta del índice no corresponde con el cero de la escala (comparándolo con un barómetro patrón), se efectúa la corrección. Usualmente se engloban las correcciones de capilaridad y cero, obteniéndose un valor que se aplica a todas las lecturas. Este valor estaba disponible en los equipos utilizados.

d) Corrección por gravedad

El peso de un cuerpo varía con la gravedad y ésta depende de la altitud y la latitud del lugar. Por lo tanto, la misma presión atmosférica no estará representada por la misma altura de la columna de mercurio en diversos lugares. Para poder comparar las alturas barométricas leídas y que sean independientes del lugar de observación, se accede a unas tablas de corrección gravitatorias.

Finalmente cabe mencionar que como la presión se lee en función de la diferencia de altura entre dos niveles, la escala o sea el cuerpo del barómetro ha de estar perfectamente vertical. De no ser así se cometería un error por exceso en función de la secante del error angular de verticalidad.

2) Barómetro anerode

En 1848 el francés Lucien Vidi, construyó un aparato que medía la presión atmosférica, no por el peso de una columna de mercurio, sino por la deformación que sufría una caja metálica de paredes delgadas muy elásticas, herméticamente cerradas, en cuyo interior se había hecho el vacío y cuyo aplastamiento era impedido por la reflexión del muelle. Cuando aumenta la presión exterior se comprime esta caja y al disminuir vuelve a ensancharse, de manera que estos movimientos son amplificados y transformados en movimientos giratorios de una aguja que indica la presión ejercida.

2.1) Corrección en los barómetros aneroides

Tienen la ventaja con respecto a los barómetros de mercurio de que su manejo es más fácil y cómodo en el campo, además de que al ser más compacto tiene menos peligro de romperse, sin embargo como consecuencia de la elasticidad del metal sometido a fatiga, sufre lentas derivas obligando a que periódicamente deban ser comparados con los de mercurio. Las correcciones a tener en cuenta en los barómetros aneroides son:

a) Corrección por temperatura

Debido a que los resortes y transmisión (palancas y engranajes) del barómetro no están contruidos con el mismo metal, un cambio de temperatura origina una serie de dilataciones desiguales de las distintas piezas, que producen un error en la lectura.

También provoca este efecto la entrada de gas en las cápsulas que tienen hecho el vacío, fenómeno de difusión difícilmente evitable. A veces se llena la cápsula con un gas inerte por ejemplo nitrógeno que si bien origina un claro coeficiente de temperatura, es perfectamente determinable.

Este problema conjunto se resuelve por medio de un compensador térmico, de tal forma que con los diferentes coeficientes de dilatación se provoca un cambio lineal de presión equivalente al error generado y de sentido contrario. En principio estos barómetros con compensación térmica no tienen coeficientes de temperatura a corregir, sin embargo deberá comprobarse su existencia.

b) Corrección de graduación o linealidad de escala

Deberá efectuarse la comprobación de que la escala del barómetro se ajusta exactamente al mecanismo amplificador, y una diferencia de "n" milímetros en las

lecturas de la escala corresponda a una variación de presión de “n” milímetros. De no ocurrir así y haber un error proporcional, se elimina con un coeficiente de escala.

c) Corrección de cero

Por comparación en un patrón, o bien se ajusta el cero con el adecuado tornillo de corrección o se determina una constante a aplicar.

d) Histéresis

Este error, propio de los sistemas mecánicos no puede afectar a sistemas de equilibrio de fluidos como en el caso de los barómetros de columna de mercurio.

La única forma de detectarlo es durante la calibración, al hacer lecturas sucesivas a lo largo del rango del instrumento, llegando muy lentamente al valor de lectura en el sentido de avance de la calibración.

Este error, aunque puede ser medido, normalmente habrá de ser asumido como un límite de la precisión del barómetro ya que dada las fluctuaciones pequeñas y como sistemáticas de la presión local durante la observación, no es fácil establecer en un momento concreto si la presión leída lo ha sido durante una variación creciente o decreciente o en un momento de inflexión.

Como el efecto de la histéresis se procura minimizar usando sistemas elásticos antagonistas, suele quedar por debajo de la precisión del instrumento.

1.3.5.3. Calibración

El proceso de calibración constó de las siguientes fases:

1. Preparación y puesta a punto de la cámara.
2. Lectura inicial a presión reinante.
3. Bajada origen de escala y lecturas (en Fuess y los cuatro aneroides).
4. Subidas y lecturas en incrementos de 50 hPa hasta fondo de la escala.
5. Rebasamiento de fondo de escala.
6. Bajada de igual forma y lecturas como en la subida hasta el origen de la escala.
7. Lectura conjunta final a presión reinante.

La calibración en sí, comenzó con la comprobación de la perfecta verticalidad del barómetro de mercurio Fuess de escala compensada de la cámara y de la inexistencia de aire en su cámara superior.

Luego se comprueba la estanqueidad de la cámara. Se cierra y se eleva la presión al límite máximo, observándose fugas de presión.

Con adhesivo y vaselina filante pura se corrigió el problema, localizado en la tapa posterior, concretamente en el sello de caucho.

Tras ser numerados se introcen en la cámara las cuatro aneroides y son cuidadosamente nivelados.

Después de tomar nota de la hora y de la presión reinante leída en todos los barómetros (4 aneroides, 1 Fuess de escala compensada y 10 Fortín) se sella la cámara y se continua (ya en el punto 3) el proceso de 7 puntos anteriormente descrito.

La técnica operativa de recorrer todo el rango en sentido ascendente y, tras rebasar el fondo de escala permite repetir el recorrido, si las aproximaciones a las presiones de lectura se hacen lenta y cuidadosamente, pone de manifiesto una

posible histéresis (siempre presumible en sistemas mecánicos) que en estos instrumentos no fue detectada, al menos con valores significativos.

Todo proceso se repete el día siguiente.

1.3.5.4. Comprobación del compensador térmico

Descripción del método operativo

Se determina si existe modificación del valor de presión por una variación de la temperatura a presión constante.

Para ello se divide en dos grupos el equipo de cuatro aneroides: dos de ellos actuaron como testigos dando la presión a temperatura ambiente estabilizada y los otros fueron sometidos a una variación de temperatura entre $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

En la primera operación se toman como testigos los barómetros 3 y 4 y fueron probados el 1 y 2. Posteriormente se hizo a la inversa.

Se introdujeron en un congelador el grupo de los que iban a ser comprobados para conseguir temperaturas inferiores a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Se utilizaron dos sondas PT 100 CRISON, ya calibradas, como registradores de temperatura, las cuales fueron introducidas por un orificio en el interior de uno de los barómetros de cada grupo.

Los barómetros que debían ser probados, se metieron en una caja para disminuir los efectos convectivos del aire con objeto de conseguir una variación de temperatura más gradual y uniforme. Fueron tomándose las presiones a aproximadamente cada $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ de variación de temperatura, hasta que alcanzaron la temperatura ambiente.

Para obtener temperaturas superiores al ambiente se usó un radiador-soldador de aire caliente de 2000 W hasta que los barómetros en prueba alcanzaron una temperatura de 45 °C en su interior.

Tras ser igualmente dispuesto en la caja ante mencionada se fueron registrando datos cada 5 °C de disminución de temperatura hasta volver a alcanzar la ambiente.

A continuación se repite la operación intercambiándose los equipos.

Como era de esperar dada la alta calidad (y precio) de los barómetros empleados no se encontraron valores significativos en el coeficiente de temperatura.

1.3.5.5. Resultados

Tras el proceso de calibración de presión y de comprobación de los compensadores térmicos se confeccionaron, igual que para los termómetros, primero un cuadro numérico para incluir programas de cálculo y segundo una gráfica para su uso expedito.

Las gráficas son dobles para cada barómetro. La primera tiene en abscisas presiones y en ordenadas errores. La segunda tiene en abscisas temperaturas y en ordenadas errores.

1.3.6. PRECISIONES DE CENTRADO

1.3.6.1. Basadas

Las basadas (o placas de estacionamiento sobre pilar) suministradas por Kern son más pesadas, caras y complejas que las de otros fabricantes, pero permiten precisión de centrado y una repetibilidad de estacionamiento mejor de 0,2 mm.

Constan de una plataforma con tres patas cónicas, sobre la que va situado un casquete esférico de 100 mm de radio, cuyo centro coincide con el centro del triángulo equilátero determinado por las patas.

Sobre el casquete esférico, que opera a modo de rótula, juega la bancada en la que se fija, mediante un cierre adecuado, la base nivelante del instrumento. Esta bancada posee un nivel esférico lateral.

En la parte inferior de la basada, y solidario con la bancada, se dispone de una palanca que, al ser accionada, hace descender un punzón telescópico cuya punta materializa el punto de estacionamiento. Por medio de un mando que gira horizontalmente se bloquea o libera del casquete la bancada porta-instrumentos.

El estacionamiento de la basada se realiza liberando la bancada, nivelándola manualmente y bloqueándola sobre el casquete con el mando. Todo ello tras centrar con el punzón, si se trabaja sobre un punto señalado.

Puede ocurrir, que el triángulo determinado por las patas no sea equilátero, que el centro del casquete esférico no coincida con el centro del mencionado triángulo, o que esté descorregido el nivel.

El efecto causado por las dos primeras causas solo se acusa al trabajar sobre autocentros radiales y consiste en que el punto de estacionamiento del instrumento ocupa distinta posición en cada posible colocación de la basada (tres posibilidades por rotación 120°). Las tres posiciones están distribuidas formando un triángulo sensiblemente equilátero.

Si el nivel no está perfectamente corregido, el centro de la bancada de estacionamiento sufrirá un desplazamiento horizontal radial sobre el punto materializado por el punzón, dependiendo de la orientación de la basada. Trabajando sobre autocentrados radiales, su efecto se sumaría al antes mencionado con idénticos síntomas.

1.3.6.2. Corrección de niveles

Medimos la sensibilidad del nivel esférico que tiene un valor de 6/2 mm, el valor muy bueno que garantiza precisiones de estacionamiento de 0,02 mm. En lo que a nivelación se refiere.

La bancada porta-instrumentos presenta en su centro un orificio cilíndrico vertical en cuya prolongación está el punzón que materializa el punto de estacionamiento. Se dispone como accesorio de un nivel esférico (idéntico al de la bancada), montado sobre un vástago que se introduce ajustadamente en el orificio, permitiendo el giro del nivel sobre el orificio de la bancada.

Este nivel auxiliar se corrige con los tres tornillos de ajuste de que dispone en su parte inferior. Así, tras la adecuada colocación de la bancada sobre el casquete, al girar el nivel auxiliar con su vástago dentro del orificio, la burbuja siempre permanecerá calada.

En esa disposición puede considerarse la basada perfectamente estacionada, o lo es equivalente, vertical el orificio central cuyo eje coincide con el de estacionamiento. El nivel esférico lateral solidario a la bancada debe estar calado. De no ser así (y no lo fue en ninguna de las cuatro basadas comprobadas), se debe corregir calando la burbuja, actuando en los tres tornillos inferiores de ajuste del nivel.

Tras estas operaciones, las cuatro basadas quedaron operativas para trabajar estacionando mediante el punzón telescópico sobre un punto señalado en la cabeza del pilar.

1.3.6.3. Medición de repetibilidad de estacionamiento

Como ya hemos dicho, con el ME-5000 es preceptivo usar un sistema que garantice la repetibilidad de estacionamiento (como el autocentrado radial), para poder alcanzar las altas precisiones de que es capaz. En esas condiciones, es esencial que sea perfecta la geometría de las patas y el centrado del casquete.

El proceso de comprobación de esta repetibilidad ha de realizarse sobre un pilar con autocentrado radial. En la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Topográfica de Madrid se dispone de este tipo de centrado en el pilar astronómico.

Ha de verificarse que, en cualquiera de las tres posibles colocaciones de cualquiera de las basadas sobre el autocentrado, el orificio de la bancada ocupe la misma posición, tanto planimétrica como altiméricamente.

Para materializar el centro de estacionamiento del instrumento se emplea una esfera pintada de color amarillo mate, que fue elegida como el mejor blanco de puntería entre los varios ensayados.

Se usó una bola de acero de 13 mm de diámetro, de las empleadas en rodamientos. Fue repetidamente calibrada con un micrómetro y no pudieron detectarse faltas de esfericidad mayores de 0,01 mm. Se pintó por inmersión en pintura especial de alta tensión superficial, tras aplicarle un asidero permanente. El secado se hizo sujetando del asidero, de tal forma que quedara en la parte inferior de la bola.

Estacionando un teodolito en el pilar, a la distancia mínima de enfoque de 2 m marcamos dos puntos ortogonalmente dispuestos, en los que estacionamos con trípodes dos teodolitos. Desde los teodolitos, conocidas las distancias y observando las tangencias a las esferas, en un sistema de coordenadas aleatorio se puede establecer la situación planimétrica del centro de la esfera que materializa el eje de estacionamiento.

Por supuesto, en el programa de cálculo con el que se procesan “in situ” las observaciones, está previsto el control de desorientación de los instrumentos mediante observaciones auxiliares.

La primera comprobación fue la uniformidad de espesor de pintura de la bola. Para ello se hicieron repetidas observaciones a la bola en diferentes posiciones, no pudiéndose detectar variaciones en su situación aparente. No obstante se adoptó el criterio de colocar la bola siempre en la misma orientación para eliminar posibles errores accidentales residuales.

Las operaciones que constituyen el proceso de control de repetibilidad de estacionamiento son las siguientes:

1. Estacionamiento de la basada y nivelación.
2. Observación de tangencia.
3. Desnivelación y renivelación.
4. Observación de tangencias.
5. Giro de la basada 120° y repetición de las operaciones 1 a 4.
6. Nuevo giro de la basada 120° en el mismo sentido y repetición de las operaciones 1 a 4.

Con ello se dispone de seis coordenadas del eje de estacionamiento.

Los puntos están agrupados por parejas. Cada una de ellas corresponde a las dos presentaciones que se obtienen en las dos sucesivas nivelaciones para cada posición de la basada de la tres que se consiguen por rotación. El control por el nivel es perfecto y existe la posibilidad por posteriores correcciones de disminuir aún más el error de centrado.

Para comprobar la repetibilidad altimétrica se hacen tangencias a la parte superior de la bola. En todas las basadas se obtuvo el mismo valor.

1.3.7. COMPROBACIÓN DE ESCALA

1.3.7.1. Consideraciones teóricas

El ME-5000 trabaja con un índice de refracción residente o característico (built in) de $n = 1.000284515$, correspondiente a la atmósfera según Edler de 15 °C de temperatura, 1.013,25 hPa de presión, 0% de humedad relativa y 0,003% de contenido de CO₂. Ello presupone la adopción de una frecuencia moduladora concreta, que es lo que el fabricante realmente ajusta en el aparato para conseguir las premisas citadas.

En las características de fábrica, para el oscilador interno se admite una deriva anual de hasta 0,5 ppm. Por la deriva que, han asumido, ha sufrido el instrumento, tendremos un índice de refracción residente real distinto del teórico, al trabajar con una frecuencia real distinta de la teórica.

Si se quiere obtener la precisión nominal, se debe medir periódicamente la frecuencia moduladora con un patrón de mayor rango y establecer la deriva real de la unidad concreta para poder aplicar la oportuna corrección.

La descorrección de frecuencia origina un error de escala sistemático, no detectable internamente en un trabajo, pero que se pone de manifiesto al comparar los datos hallados, con otro sistema de referencia externo.

1.3.7.2. Medida de frecuencia

El patrón utilizado ha sido un reloj atómico de Hidrógeno con precisiones de 10-12 en largo período. Para ello accedimos al laboratorio de metrología de la Estación Espacial de la NASA en Robledo de Chavela, Madrid.

El ME-5000 dispone de una toma de frecuencia moduladora junto al telescopio de puntería. Se conectó al controlador controlado por el reloj atómico mediante un cable coaxial, así como a un analizador de espectro y a un osciloscopio.

El analizador mostró que la dispersión de la frecuencia en el espectro era muy estrecha y sin espúreos laterales, y el osciloscopio permitió apreciar su perfecta forma senoidal.

Tras 4 horas de seguimiento de la frecuencia y después de analizar los datos se puso de manifiesto que:

1. Desde el instante de encendido, la frecuencia no sufre variaciones mayores de 0,2 ppm.
2. Tras un período de calentamiento de 3 minutos la frecuencia se estabiliza en 0,06 ppm y no presenta deriva apreciable.

Se hizo un estudio de la dispersión instantánea de los valores de frecuencia obtenidos con período (gate) de 1 segundo. El error generado por esta dispersión es del orden de 0,01 ppm y por tanto despreciable.

Como ya se dijo, el ME-5000 varia su frecuencia moduladora durante su funcionamiento de forma perfectamente controlada. Sin detallar como el mismo instrumento ofrece el valor teórico de la frecuencia a calibrar en el momento que se hace la prueba diremos que la frecuencia debería ser 479,358300 Mhz resultó ser 479,358350 Mhz. La diferencia de 50 Hz genera un factor de escala de 0,9999998957. Teniendo en cuenta la fecha y el valor de la medida hecha en fábrica, la deriva sufrida por nuestra unidad habría sido de 0,06 ppm/año, ampliamente dentro de la cifra prevista.

1.3.7.3. Estudio de estabilidad por tensión y alimentación

Hay equipos de EDM que sufren variaciones en la frecuencia moduladora si varía la tensión de alimentación. Se verifico en el instrumento el efecto que podría tener una variación de la tensión de la alimentación entre 9 y 16 V, límites que el fabricante establece.

Tras la estabilización de 4 horas descrita, se hace funcionar el equipo conectado a una fuente de alimentación estabilizada ajustable, controlando la tensión con un voltímetro electrónico.

No hay variación alguna, ya que el propio equipo estabiliza su alimentación en valores inferiores a la tensión mínima aceptable.

1.3.7.4. Instrumental utilizado

- Frecuencia de referencia: MASER de Hidrógeno Smithsonian Unstitute.
- Contador: EIP Model 578 B Microwave counter.
- Osciloscopio: HP 1725 A Oscilloscope.
- Analizador: HP 8569 B Spectrum Analyzer.
- Fuente de alimentación: Harrison Laboratories 6266 A DC power supply.

- Voltímetro: Fluke 8050 A digital multimeter.

1.3.8. DETERMINACIÓN DE CONSTANTES

1.3.8.1. Sistemas

Para establecer la constante o error de cero (offset) de un equipo de EDM (Elevation Digital Modelling) existe una alternativa:

Puede compararse con una distancia conocida el valor medido, o sea, la lectura obtenida tras ser corregida de factor de escala por frecuencia y por condiciones meteorológicas, que no es más que otro factor de escala.

$$\text{Así:} \quad D = V_m + K \quad \text{y por tanto,} \quad K = D - V_m ,$$

donde D es la distancia conocida, V_m es el valor medio y K es la constante a aplicar en el equipo.

También puede emplearse el método de segmento partido. Para ello deben disponerse de tres estacionamientos alineados, preferible, aunque no necesariamente, en horizontal, no siendo preciso conocer las distancias que los separan.

El tramo A se descompone en los B y C. Tras medir A, B y C y reducir adecuadamente las lecturas, dispondremos de los valores medidos V_a , V_b y V_c . Podemos escribir:

$$A = B + C \quad (1)$$

$$A = V_a + K \quad (2)$$

$$B = V_b + K \quad (3)$$

$$C = V_c + K \quad (4)$$

sustituyendo en (1) por (2) y (4) tendremos:

$$V_a + K = V_b + K + V_c + K$$

y despejando K,

$$K = V_a - (V_b + V_c)$$

lo que nos permite conocer el valor de K de la constante.

Intuitivamente el método es claro: Medimos una distancia primero de una vez y segundo de dos veces: En la segunda ocasión hemos introducido dos veces la constante, y esa es la diferencia con la primera.

1.3.8.2. Base Väisälä

El profesor Väisälä de la Universidad finlandesa de Turku presentó en 1923 su método de medición de distancias por medio de interferencias de luz no monocromática, perfeccionándolo en 1937 con la introducción de patrones dimensionales de cuarzo. El método permite hacer sucesivas multiplicaciones del valor origen (el metro de cuarzo), hasta alcanzar valores de centenares de metros; y ello con precisiones del orden de 0,1 ppm.

En el año 1954 se adoptó internacionalmente este sistema para establecer bases en las que calibrar los hilos invar empleados entonces para medir bases geodésicas, garantizando así una escala uniforme en las redes nacionales de todos los usuarios.

En el año 1978, el Instituto Nacional estableció en las cercanías de Valladolid una base o línea de calibración con este sistema. Tiene siete capilares,

de ellos tres principales con referencia subterránea, perfectamente alineados y en horizontal, denominados pilar 0,216 y 432, atendiendo las denominaciones a las distancias que separan el pilar origen (0) del intermedio (216) y del extremo (432). Los valores oficialmente establecidos para estas distancias son de $216009.83 \pm 0,05$ mm y $431990.83 \pm 0,05$ mm, respectivamente.

Al disponer esta base de tres pilares alineados y con separaciones conocidas, se pueden emplear los dos métodos antes descritos para la determinación de la constante.

1.3.8.3. Realización de las medidas

A.- Preparación de los estacionamientos

Parece lógico pensar que lo primero que se debería hacer para comenzar las observaciones sería colocar las basadas perfectamente centradas sobre las referencias subterráneas; no obstante se plantean varios problemas: Las basadas no tienen plomada óptica; de tenerla, su corrección sería crítica; de estar perfectamente corregidas, sería muy difícil estacionarlas con precisión mejor de 0,2 mm; aún habiendo conseguido perfectos estacionamientos, su permanencia exigiría un control antes de cada estacionamiento a lo largo de todo el período de observación...

El método alternativo empleado es simple y eficaz:

Las basadas se colocan centradas aproximadamente (± 2 mm) con una plomada de gravedad, y se sujetan las patas al pilar con un poco de yeso. Después de nivelar escrupulosamente, se miden los descentrados de basada en sentido longitudinal y se aplican como una constante correctiva de la distancia. El descentrado que queda en sentido transversal se desprecia porque origina errores de menos de 0,0002 mm.

Para medir el *descentrado longitudinal de cada pilar*, se estaciona un teodolito a un lado de la alineación de la base, perpendicularmente en el punto de la basada. Siendo D la distancia y α el ángulo, por consiguiente la corrección c por descentrado vendrá dada por:

$$c = D \operatorname{tag} \alpha$$

Para la medida del ángulo se señala la basada con la conocida bola y la referencia subterránea. Para suplir la falta de un nivel caballero se utilizó el propio compensador de eclímetro:

Apuntando el teodolito paralelamente a la línea, se hizo una lectura cenital en la posición que ocupaba el anteojo en ese momento. Sin variar la posición cenital del anteojo, se giró horizontalmente media vuelta el teodolito y se repitió la lectura cenital. La mitad de la diferencia entre lecturas ofrece la inclinación transversal del eje principal del instrumento. Tras las suficientes repeticiones se toma el valor como bueno, o bien se modifica la nivelación hasta conseguir el valor 0, que fue lo que realizamos.

Con esta metodología se establecen los descentrados con precisión menor que 0,01 mm.

Otra constante que hay que aplicar es la de *esfericidad terrestre*, porque los valores oficiales de la distancia son entre referencias subterráneas. Como las basadas están 2,36 m más altas, las distancias de 216 m se han de incrementar en 0,8 mm y la de 432 m, lógicamente en 0,16 mm, incrementos significativos en el caso del ME-5000 dada su precisión.

Tras estas operaciones se dispone de tres puntos de estacionamiento con distancias perfectamente conocidas y con estabilidad fácilmente controlable: Si el

nivel de la basada permanece calado y el yeso no sufre rotura, la basada no se ha movido. Las basadas no se retiraron hasta finalizar todas las observaciones.

B.- Planificación y observación

Primeramente se hace una determinación de la curva de refracción diurna tipo, con vistas a planificar los momentos de observación y compensar posibles sistematismos. La refracción varía de 8 a 12 horas contrariamente de como lo hacía de 16 a 20 horas, permaneciendo estable de 12 a 16 horas. Por tanto se podían considerar las 14 horas como centro de simetría en lo que a refracción se refiere.

Cuando está variando, cualquier retardo o anticipación en la toma de datos meteorológicos puede producir un error residual, por lo que se destinaron las horas centrales del día a medir la distancia mayor, que sería la más afectada en el caso mencionado. Las dos distancias cortas se medirían en las horas matutinas y vespertinas de variación.

La observación del primer día se puede distribuir así:

HORA	TRAMO	MEDIDAS
10 a 11	0 - 216	2 series
10 a 12	432 - 216	2 series
12 a 14	432 - 0	2 series
14 a 16	comida	
16 a 17	216 - 432	2 series
17 a 18	216 - 0	4 series

Siendo el primer pilar mencionado el ocupado por el instrumento y el segundo por el prisma.

El segundo día se repite el mismo esquema, pero intercambiando las posiciones de instrumento-prisma.

De esta forma, cada tramo tuvo al final 8 series en cada sentido, minimizándose los movimientos de instrumental y operadores.

Cada serie de las mencionadas consta de un par de lecturas (después de comprobar que todos los niveles están bien calados), en cada combinación posible de las dos posiciones, directa e inversa (conjuntamente en instrumento y prisma para compensar eventuales torceduras de alidada), con los rangos alto y bajo, haciéndose tomas meteorológicas antes y después de cada par de lecturas, a la altura de la línea de medida, en ambos extremos.

Se toman extremadas precauciones para que los aspirósicrómetros no falsearan sus lecturas por efectos conductivos, convectivos o de radiación. Los barómetros se leyeron tras nivelarlos perfectamente mediante unos platillos especiales de plataforma cóncava esférica de producción propia.

Como resultado de todo lo expuesto se obtienen 64 medidas de cada tramo, con sus datos meteorológicos.

Todas las observaciones se hacen utilizando el prisma 1. Como se dispone de los prismas 2 y 3, había que comprobar si todas las unidades tenían la misma constante.

Para ello se usa el pilar 0, donde estaba el instrumento y el pilar auxiliar de los 21 m, donde se estacionó una basada. Tras hacer en rango corto cuatro medidas sobre el prisma 1 en ambas posturas y con las correspondientes tomas meteorológicas, se repite el proceso sobre las otras unidades. La comparación de los valores, por referencia al prisma 1, nos ofrecería las constantes con cada uno de los otros prismas.

1.3.8.4. Resultado obtenidos

Se hacen las reducciones meteorológicas y se aplican las ya establecidas correcciones de descentrado y esfericidad. En estas distancias no se hace corrección por curvatura del rayo, dada su irrelevancia.

No se hallan diferencias significativas entre rangos o posiciones, siendo la dispersión de todos los valores de cada lado menor de $\pm 0,2$ mm. Lo mismo ocurrió en la comparación entre los prismas 1, 2 y 3. Todo ello da idea de la alta calidad de construcción del equipo.

Con el método de segmento partido, la constante obtenida fue de $0 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ mm}$, obteniéndose el mismo resultado al comparar con el lado 216 - 432.

Pero al comparar con los lados 0 - 216 y 432 - 0, la constante obtenida era de $-1.3 \pm 0.2 \text{ mm}$, discrepancia no admisible.

Tras unos cálculos rápidos se detecta el problema e inmediatamente se piensa que se había cometido un error en la determinación del descentrado en todos los pilares, pero los resultados fueron los mismos, con diferencias de tan solo algunas centésimas de milímetro.

Esta discrepancia no era admisible y por ello se repitió el proceso íntegro en el mes de mayo, en condiciones totalmente diferentes (frío húmedo la primera vez; calor seco la segunda), pero los resultados obtenidos fueron coincidentes, con variaciones menores que la resolución del instrumento.

En principio, *el método del segmento partido* no admite discusión, y menos con la gran redundancia de observación disponible. Por otra parte, el que la constante sea de 0 mm es normal porque el ME-5000, que dispone, como la mayoría de los

EDM, de unos conmutadores para ajustar la constante, fue suministrado oficialmente con constante 0, tras el oportuno ajuste de los conmutadores en fábrica. Por tanto, se ha utilizado como constante instrumental el valor de 0 mm para todos los trabajos realizados, habiéndose obtenido siempre resultados plenamente satisfactorios.

Cabe pensar que el pilar 0 ha podido sufrir algún desplazamiento desde la medida de la base en el año 1978.

Aunque la base según la comunicación presentada en la II Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica, está construida sobre suelo de arenisca endurecida totalmente desprovista de arcilla, y fue favorable el informe petrogeológico (para el que se realizaron entre otros trabajos nueve sondeos con profundidades de 3 a 3,5 mm), la zona ha sufrido una importante desforestación, con abundante tráfico de transportes pesados madereros.

En cualquier caso, éstas han sido las únicas ocasiones en que un distanciómetro submilimétrico ha accedido a la base.

2. SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERENCIA

Los trabajos geodésicos, que implican la ubicación o posicionamiento de puntos dentro de nuestro planeta, requieren siempre una clara definición sobre el sistema en el cual se proporcionarán las coordenadas de los puntos.

2.1. SISTEMAS DE COORDENADAS

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la geodesia se fundamenta en el estudio de la tierra en su forma y dimensiones, lo que conlleva a la investigación de las coordenadas de los puntos de su superficie en un sistema geodésico de referencia única y general para toda la tierra. No obstante la expresión “figura de la tierra” con su forma y dimensiones, tiene varios significados en geodesia de acuerdo a la manera en que es utilizada y la precisión con la cual se define el tamaño y la forma de la misma. La actual superficie topográfica es muy diferente debido a la variedad que presenta tanto en las formas de la tierra y como en las áreas de agua. Es decir, la superficie sobre la cual hacemos las mediciones. Esto no es conveniente, sin embargo, para alcanzar unos cálculos matemáticos exactos porque a las formulas se les exigiría tener en cuenta las irregularidades de la superficie dentro de los cuales habría necesario prohibir una cantidad de cálculos. La superficie topográfica generalmente es la mayor preocupación para los topógrafos y los higrógrafos. El concepto pitagórico esférico ofreció una superficie simple la cual matemáticamente es fácil de tratar. La mayoría de cálculos astronómicos y de navegación usa este concepto como una superficie para representar la tierra. Mientras la esfera es una aproximación cercana a la verdadera figura de la tierra y es utilizada para muchos propósitos, para los geodestas interesados en mediciones de grandes distancias, por ejemplo,

continentales y oceánicas, sería imprescindible una figura más exacta. La idea de la tierra plana, sin embargo, es a pesar de todo aceptada por los topógrafos para pequeñas áreas. Las cartografías que se hacen para pequeñas áreas no tienen en cuenta en la mayoría de los casos la curvatura de la tierra. La cartografía de una ciudad probablemente se calcularía como si el terreno fuera una superficie plana tomando el tamaño de la ciudad. De manera que para áreas pequeñas de terreno, las posiciones exactas podrían determinarse relacionando unas de otras sin considerar el tamaño y forma de la esfera terrestre.

Debido a la forma geométrica complicada que presenta la figura de la tierra es necesario definir una superficie de referencia que será una aproximación al modelo de la figura de la misma. La primera aproximación y modelo que mejor se aproxima a la figura de la tierra es el GEOIDE, significa "forma de la tierra", el cual se define como la superficie equipotencial imaginaria que resulta de suponer la superficie de los océanos en reposo y que se propaga por debajo de los continentes y que sería la superficie de equilibrio de las masas oceánicas sometidas a la acción gravitatoria y a las fuerzas centrífugas ocasionada por la rotación y traslación del planeta, de modo que la dirección de la gravedad es perpendicular en todos los lugares. En los levantamientos geodésicos, el cálculo de las coordenadas de un punto geodésico se realiza sobre un elipsoide el cual se aproxima cercanamente al tamaño y forma de la tierra en el área que se está trabajando. Las actuales mediciones, que se realizan sobre la superficie terrestre, están referidas al geoide.

De modo que el geoide es una superficie física y no es una superficie matemática e la que podamos realizar cálculos geométricos en Geodesia, además es compleja e irregular. A causa de esto averiguamos otra superficie de referencia con una expresión matemática, lo cual significa que tenga una métrica y curvatura definida. Como primera aproximación al geoide es el elipsoide de revolución, por cierta experiencia científica y a razonamientos matemáticos, será escogido como la superficie de referencia de la geodesia geométrica. El elipsoide es una superficie

regular definida matemáticamente con dimensiones específicas. En vista de la distribución irregular de las masas de la tierra la superficie geoidal es irregular y, de que el elipsoide es una superficie regular, las dos no coincidirán. La separación que existe entre las dos se conocerá como ondulaciones del geoide, alturas del geoide, o separaciones del geoide. Ya que se ha definido la superficie de referencia, ahora se necesitará situarlo con respecto a la tierra y definir sus dimensiones. Esto conllevará a definir los distintos Sistemas Geodésicos de Referencia. Para esto la geodesia está interesada en definir puntos sobre la superficie terrestre, para esta tarea es necesario definir bien el sistema de coordenadas. Muchos sistemas de coordenadas se usan actualmente en geodesia, algunos concéntricos respecto a la tierra (sistemas geocéntricos o globales), otros no, aunque también se han usado los sistemas cartesianos y curvilíneos. Del mismo modo hay sistemas de coordenadas que son específicamente necesarios para posicionamiento astronómico y satelital, los cuales no son muy apropiados para describir la posición de los puntos terrestres.

2.1.1. SISTEMAS GLOBALES DE COORDENADAS

Se les conoce también como un sistema geocéntrico de coordenadas porque especifica una terna de ejes ortogonales cartesianos X , Y , Z centrado en el centro de masas de la tierra. Ya que la tierra se mueve, estas coordenadas dependen del tiempo, o sea en un instante t que pretendamos determinarlas. Para obviar este problema, suponemos un sistema de referencia tridimensional cartesiana identificado con la tierra, en otras palabras que sea inalterable en el tiempo, definido de la siguiente manera:

- El origen O del sistema es el centro de masas de la tierra.
- El eje X contenido en el plano del ecuador según el meridiano origen Greenwich.
- El eje Z próximo al eje de rotación, es decir, el eje polar corregido de los movimientos de nutación y precesión. Este eje está alineado con los ejes de

rotación de la tierra, ya sea convencional (es decir, un eje de rotación hipotético adoptado por una convención) o instantáneo (el eje de rotación temporal de la tierra).

- El eje Y perpendicular a los anteriores de manera que los tres (X, Y, Z) estén orientados a derechas o dextrógira.

A este tipo de sistema se le conoce como “geocéntricos o globales”, el cual es válido para toda la superficie terrestre y definirá un sistema de coordenadas cartesianas y tridimensionales.

Indudablemente, para que las coordenadas de P no dependan del factor tiempo t, se supone que la tierra será un sólido rígido indeformable, por supuesto que esto no es cierto, pero se aplica como hipótesis válida hasta aproximaciones del orden de 10^{-7} a 10^{-8} , que son adecuados para la diversidad de aplicaciones geodésicas. Podemos distinguir dos tipos de sistemas de referencia global y sus respectivas transformaciones una de la otra:

1). Sistema de Referencia Global Cartesiano Geocéntrico.

Llamemos (U_1, U_2, U_3) al triedro de vectores unitarios que definen este sistema:

$$U_1 = (1, 0, 0), U_2 = (0, 1, 0), U_3 = (0, 0, 1)$$

donde U_1 es el vector unitario en la dirección del eje X, definido anteriormente, asimismo U_2 en la dirección Y, y U_3 en la dirección Z.

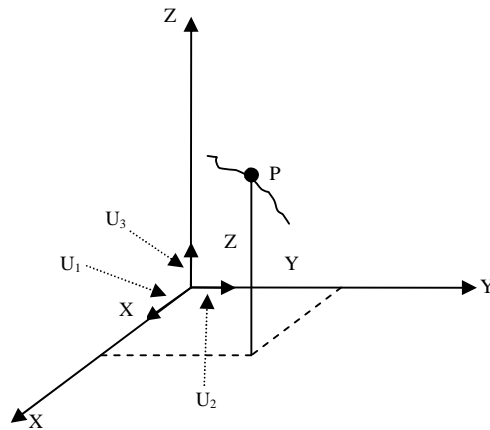


Figura 2.1. Sistemas de Referencia Global Cartesiano

De esta manera, las coordenadas de un punto P de la superficie de la tierra, dentro de este sistema de referencia Global Cartesiano, será (X, Y, Z) y se conocen como *Coordenadas Cartesianas Geocéntricas*. De lo anterior, para propósitos geodésicos este sistema no es apropiado, porque no describe la forma de la tierra (la cual es aproximadamente un elipsoide de dos ejes), por ende, se debería introducir un segundo sistema global de coordenadas. No obstante, una vez se haya definido el plano ecuatorial y el meridiano de origen, será posible definir este sistema de coordenadas que a su vez este asociado al nuevo, y por ende el origen de este nuevo sistema de referencia puede ser el centro de masas terrestre, o bien el centro del elipsoide. Aunque este sistema de coordenadas no sea el más usado en la práctica, para estudios globales, como por ejemplo la tectónica de placas, las coordenadas cartesianas tienen un papel incuestionable.

2). Sistema de Referencia Global Elipsoidal o Geodésico.

Según el Dr. Ferry Moore, del Institute of Engineering and Space Geodesy, en la Universidad de Nottingham (Reino Unido), los sistemas de coordenadas geodésicos han sido de escaso interés para la mayoría de técnicos hasta la llegada de los modernos sistemas de posicionamiento por satélite, en particular el GPS, del que hablaremos más tarde.

Cabe señalar que la mayoría de los problemas que se presentan actualmente con la utilización de esta nueva técnica, es la ignorancia acerca de la verdadera complejidad que presentan los sistemas de coordenadas empleadas en geodesia. Este sistema está definido a partir de un elipsoide de revolución, de ahí su nombre de elipsoide de elipsoidal o geodésico, esto quiere decir que en vez de referir las posiciones respecto al origen las hacen a la superficie del elipsoide, reemplazando la distancia al origen por h o altura elipsoidal. Su localización y dimensiones se definen de la siguiente manera:

- El centro del elipsoide coincide con el centro de masas de la tierra.
- El eje de revolución del elipsoide (semieje menor) va a ser el eje Z y coincide con el eje polar medio de la Tierra.
- La forma del elipsoide quedara definida con los parámetros a y e^2 (excentricidad al cuadrado), donde:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (2.1)$$

Las coordenadas de P, de acuerdo a la figura (2.2) y situado sobre el elipsoide de referencia, referente a este sistema de coordenadas polares estará en función de (ϕ, λ, h) , pero antes vamos a definir los siguientes elementos:

- $AO'A'$. Es el *meridiano de origen de longitudes* y es un plano arbitrario que involucra el eje de rotación terrestre. Actualmente en la cartografía española se toma el que pasa por Greenwich.
- APA' . Es el meridiano que pasa por el punto P.
- $EO'E'$. Es el *plano ecuatorial* y es perpendicular al eje de rotación terrestre, pasando por el centro de gravedad de la misma.
- *Vertical geodésica*. Es la normal al elipsoide que pasa por le punto P. en este caso sería la línea Pn.

- *Vertical astronómica.* Es la línea que está en función del campo gravitatorio y es independiente del elipsoide adoptado. Para ser más explícitos sería una línea que tomaríamos al colocar una plomada sobre el punto P. Asimismo se le conoce como vertical local o vertical física y es la normal al geoide en el punto considerado, en este caso P.
- *Vertical geocéntrico.* Es la línea que pasa por el punto P y el centro del elipsoide (O).

Aclarando estos elementos definimos (ϕ , λ , h):

- *Latitud Geodésica (ϕ).* Ángulo que forma la vertical geodésica (Pn) del punto con el plano ecuatorial (EO'E'). Se determina en grados sexagesimales, partiendo del ecuador, siendo positiva en la dirección norte (varia de 0 a 90°) y negativa en la dirección contraria (va de 0 a -90°).
- *Longitud Geodésica (λ).* Ángulo medido a lo largo del Ecuador geodésico entre el meridiano origen o de Greenwich (AO'A') y el meridiano que pasa por el punto P (APA'). Se expresa en grados sexagesimales (varia de 0 a 360°), siendo positivo hacia el oeste.
- *Altura Elipsoidal (h).* Altura del punto P sobre el elipsoide de referencia, se mide sobre la normal al elipsoide que pasa por el punto P.

De esta manera llamamos a (ϕ , λ , h) coordenadas GEODÉSICAS. Del mismo modo estas coordenadas dependen de un elipsoide que se ha tomado como referencia, puesto que están determinadas a partir de la normal geodésica que pasa por el punto P de la superficie terrestre y a su vez es normal al Elipsoide de referencia, lo cual significa que si cambiamos el elipsoide las coordenadas cambian.

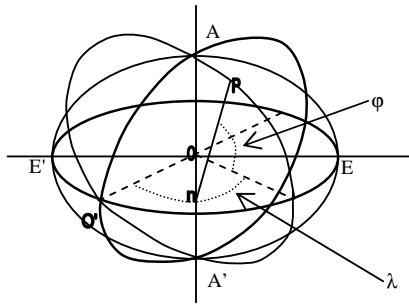


Figura 2.2. Elipsoide de revolución

Ahora bien, si en lugar de tomar la normal al elipsoide que pasa por el punto P, tomamos la normal al Geoide, es decir, materializada por la dirección de la línea de la plomada, lo que llamamos la vertical en el punto P, lo que conseguiremos serán coordenadas ASTRONÓMICAS (ϕ , Λ), y son absolutas en vista de que dependen del punto, esto es, de la normal astronómica de cada punto, donde:

- *Latitud astronómica* (ϕ). Es el ángulo que forma la vertical astronómica en el punto P con el plano ecuatorial.
- *Longitud astronómica* (Λ). Es el ángulo medido sobre el plano ecuatorial y que va desde el meridiano de origen o Greenwich y el meridiano del punto P.

Las coordenadas astronómicas definen la posición de la vertical en un punto, en este caso P, independientemente de considerar cualquier hipótesis sobre la forma de la tierra, dado que están referidas a un valor físico de la superficie terrestre. Comúnmente, esta vertical no corta el eje de rotación AA', en la mayoría de los casos porque la distribución de masas en el interior de la tierra es irregular. Otra causa que debemos añadir a este aspecto es que la dirección de la gravedad, o la vertical, en un mismo punto puede sufrir pequeñas oscilaciones, debido a las variaciones de la atracción gravitatoria entre el sol y la luna.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, se observa que hay dos normales que pasan por el punto P (figura 2.3), la normal geodésica (normal al elipsoide vertical geodésica) y la normal del geoide o astronómica, y el ángulo que se forma en este punto se le denomina *desviación relativa de la vertical*, cabe señalar que el termino relativo se refiere a que este valor depende del elipsoide de referencia adoptado. Ahora bien, para estudiar las variaciones de la vertical astronómica en función de las variaciones del valor de la gravedad, se utilizan unos instrumentos especiales conocidos como clinómetros. Obteniendo estas variaciones y conociendo la vertical geodésica, puede hallarse la desviación, mediante la aplicación de la ecuación de Laplace. Los puntos en los que se calcula la desviación de la vertical se conocen como puntos de Laplace y son de gran importancia en Geodesia, puesto que conociendo esta desviación es probable obtener la separación presente entre el elipsoide y el geoide. Es necesario resaltar que la desviación de la vertical es nula en el Datum geodésico.

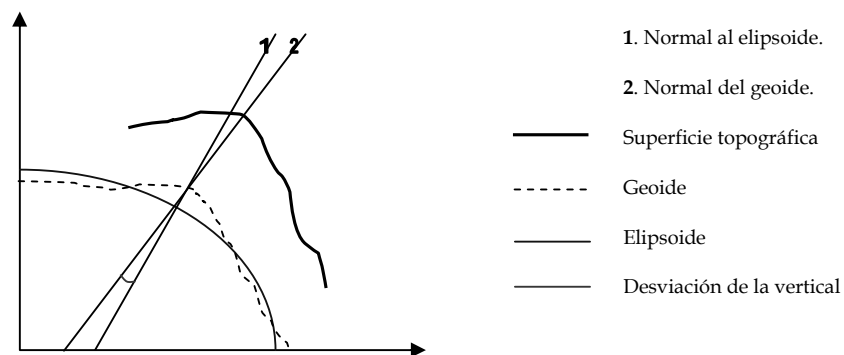


Figura 2.3. Desviación relativa de la vertical

3). Relación entre el sistema global cartesiano y el sistema global elipsoidal.

Las expresiones que transforman las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) en las cartesianas (X, Y, Z), son:

$$X = (v + h) \cos \varphi \cos \lambda \quad 0 \leq h \leq \infty \quad (2.2)$$

$$Y = (v + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad -\pi/2 \leq h \leq \pi/2 \quad (2.3)$$

$$Z = (v (1 - e^2) + h) \sin \varphi \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi \quad (2.4)$$

Estas ecuaciones, que relacionan de manera especial ambos sistemas globales, son la base de la geodesia tridimensional. Igualmente esta ecuación se puede formular vectorialmente:

$$\underline{x}(\varphi, \lambda, h) = \underline{x}(\varphi, \lambda) + h(\cos\varphi \cos\lambda, \cos\varphi \sin\lambda, \sin\lambda) + \underline{x}(\varphi, \lambda) - h \underline{n}(\varphi, \lambda)$$

Donde $\underline{x}(\varphi, \lambda)$ es la ecuación del elipsoide base, y $\underline{n}(\varphi, \lambda)$ el vector normal a dicho elipsoide. Ahora si $h = 0$, los puntos están en el elipsoide y las ecuaciones resultarían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X &= v \cos \varphi \cos \lambda & h &= 0 \\ Y &= v \cos \varphi \sin \lambda & -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ Z &= v (1 - e^2) \sin \varphi & 0 \leq \lambda \leq 2\pi \end{aligned}$$

Donde v el radio de curvatura máximo del punto P sobre el elipsoide y corresponde geoméricamente a la longitud de la normal del elipsoide desde la superficie del elipsoide a su intersección con el eje Z , cuya expresión es:

$$v = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}}, \text{ siendo: } \begin{cases} a = \text{semieje mayor del elipsoide} \\ e = \text{excentricidad del elipsoide} \\ h = \text{altura elipsoidal} \end{cases} \quad (2.4a)$$

De la misma manera vamos a determinar las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) teniendo ya los valores de (X, Y, Z) , y partiendo de las tres ecuaciones anteriores. La apreciación de λ es incuestionable, ya que al dividir la ecuación de (2.3) sobre (2.2), obtenemos este valor:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}$$

Por lo que λ queda enmarcada entre 0 y 2π . Al elevar al cuadrado las ecuaciones (2.2) y (2.3), sumándolas y haciendo la raíz, conseguiremos que:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = (v + h) \cos \varphi \quad (2.5)$$

Junto a la ecuación (2.4), forman un sistema de ecuaciones no lineales para determinar las coordenadas h y φ . Luego si dividimos la (2.4) sobre la (2.5), obtenemos:

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{(v(1-e^2) + h) \operatorname{sen}\varphi}{(v + h) \cos \varphi}$$

Al dividir el $\cos \varphi$ sobre el $\operatorname{sen} \varphi$, obtenemos:

$$\tan \varphi = \frac{Z(v + h)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(v(1-e^2) + h)}$$

Este sistema de ecuaciones se soluciona a través de una serie de iteraciones para llegar a un resultado satisfactorio. Sin embargo se puede hacer una primera aproximación con $h_0 = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned} \tan \varphi_0 &= \frac{Z(v_0 + h_0)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(v_0(1-e^2) + h_0)} = \frac{Z(v_0)}{\sqrt{X^2 + Y^2}(v_0(1-e^2))} \\ &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}(1-e^2)} \end{aligned}$$

Y con el valor de φ_0 se define un segundo valor para h , que citaremos h_1 , despejando h de la ecuación (2.4), dado por:

$$h_1 = \frac{Z}{\sin\varphi_0} - v_0 (1 - e^2)$$

Con este valor analizamos un segundo valor φ , que designaremos como φ_1 :

$$\tan\varphi_1 = \frac{Z (v_0 + h_1)}{\sqrt{X^2 + Y^2 (v_0 (1 - e^2) + h_1)}}$$

Y así sucesivamente hasta que $|h_i - h_{i-1}| < \varepsilon$ y $|\varphi_i - \varphi_{i-1}| < \delta$. Habitualmente el criterio de convergencia que se asume es $\varepsilon = 0,001$ metros y $\delta = 0'',00001$, lo que sucede en muy pocas iteraciones.

2.1.2. SISTEMAS LOCALES DE COORDENADAS

La geodesia clásica ha resuelto este problema definiendo “sistemas geodésicos locales”, denominación que expresa claramente que su ámbito de aplicación es reducido, no universal. Un sistema geodésico local queda definido por la elección de un elipsoide de referencia y por un punto origen (datum) donde se establece su ubicación en relación con la forma física de la tierra (geoide). Concretamente, el punto datum es aquél en el que se hace coincidir la vertical del lugar o normal astronómica con la normal al elipsoide (desviación de la vertical nula) y generalmente se establece la condición de tangencia entre el elipsoide y el geoide. El elipsoide así elegido y posicionado, se adapta bien al geoide en las inmediaciones del punto datum (siempre que la elección haya sido con criterio), pero a medida que nos alejamos crece la probabilidad de que esta adaptación aminore. Por esta razón los sistemas así definidos fueron utilizados por países o grupos de países permitiendo llevar adelante todos los proyectos geodésicos en sus respectivos territorios. Los parámetros que definen un sistema geodésico local son:

- dos de ellos son necesarios para especificar el elipsoide, usualmente el semieje mayor a y el achatamiento, aplastamiento o aplanamiento $f = \frac{a - b}{a}$,
- otros dos sirven para ubicar el punto datum. Son sus coordenadas latitud y longitud,
- finalmente, se requiere un acimut de origen en el punto datum a fin de orientar al elipsoide.

Los sistemas geodésicos locales se materializan mediante las redes de triangulación de diversos órdenes, cuyos vértices se denominan puntos trigonométricos.

Consideramos un punto P (figura 2.4) sobre la superficie terrestre, de modo que centrado en este punto definimos el siguiente sistema de referencia:

- $u_1 =$ es la dirección del vector en el plano tangente a la superficie en el punto P y orientado hacia el Norte.
- $u_2 =$ es el vector en el plano tangente y orientado hacia el Este.
- $u_3 = u_1 \wedge u_2$ de acuerdo al cenit astronómico, de manera que:

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} \text{ son unitarios.}$$

Precisamente este triedro que forman los vectores u_1, u_2, u_3 se denomina habitualmente como *TRIEDRO ASTRONÓMICO*, y define un sistema local de coordenadas teniendo como núcleo el punto P , debido a que este sistema depende solamente de cada punto, conjuntamente esta definido a partir de la normal astronómica de cada punto. Ahora bien si trasladamos el punto P a otro punto P' el sistema u_1, u_2, u_3 variaría, puesto que la normal será diferente para cada punto.

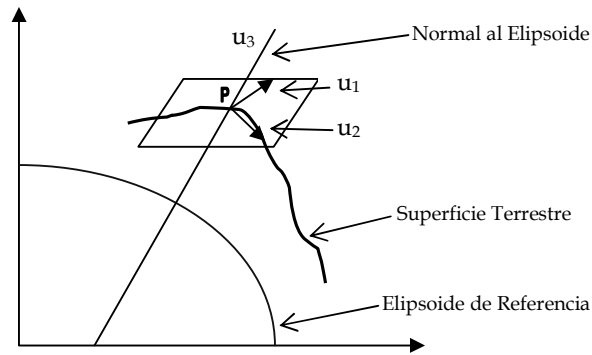


Figura 2.4. Sistema de Referencia Local Astronómico

1). Sistema cartesiano astronómico local.

También se le conoce como *Sistema de Referencia Astronómico Local*.

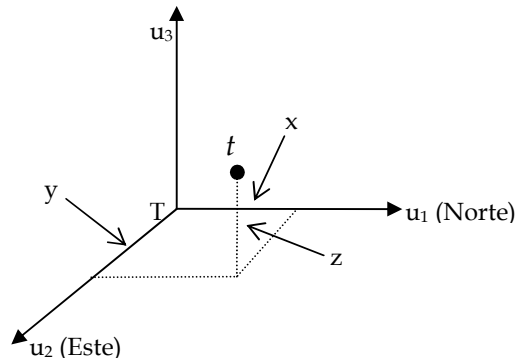


Figura 2.5. Coordenadas cartesianas astronómicas locales

Las coordenadas cartesianas del punto T (figura 2.5), serán $(0, 0, 0)$, ya que es el centro del sistema. Y las coordenadas del punto t serán (x_t, y_t, z_t) . Obviamente si el sistema de referencia estuviera en el punto t , las coordenadas serían $(0, 0, 0)$.

Asimismo podemos relacionar los dos sistemas de referencia tanto el astronómico local (u_1, u_2, u_3) como el global (U_1, U_2, U_3) .

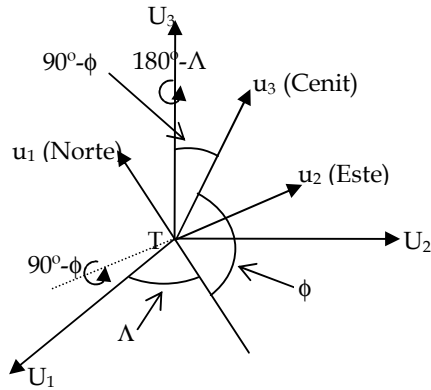


Figura 2.6. Transformación entre el sistema astronómico local y el global

De acuerdo a la figura (2.6), se observa un cambio paralelo que sufre el sistema global a uno local, transformamos el último a un sistema dextrógiro aplicando la siguiente matriz de la reflexión:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

De la misma manera se aprecia que las coordenadas locales se relacionan con las globales mediante dos rotaciones, una de $(180^\circ - \Lambda)$ en torno al eje u_3 y la otra $(90^\circ - \phi)$ en torno al eje u_2 , siendo (ϕ, Λ) las coordenadas astronómicas del punto origen del Sistema de Referencia Local Astronómico. Indiscutiblemente, $(X_t - X_T, Y_t - Y_T, Z_t - Z_T) = (X_t - X_T) U_1 + (Y_t - Y_T) U_2 + (Z_t - Z_T) U_3$, y de igual forma, $(x_t, y_t, z_t) = x_t u_1 + y_t u_2 + z_t u_3$, ahora bien, $u_i = A_{ij} U_j$, siendo la matriz A_{ij} ortogonal y de rotación, definida como matriz de transformación, que resulta de multiplicar una matriz R_1 de rotación en torno al eje u_2 un ángulo $(90^\circ - \phi)$, una matriz R_2 de rotación en torno al eje u_3 un ángulo $(180^\circ - \Lambda)$ y la matriz de reflexión (2.6). Por tanto tenemos que:

$$A_{ij} = R_1(90^\circ - \phi) * R_2(180^\circ - \Lambda) * S \quad (2.7)$$

Donde las matrices de rotación quedan definidas así:

$$R_1(90^\circ - \phi) = \begin{pmatrix} \text{sen } \phi & 0 & -\text{cos } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{cos } \phi & 0 & \text{sen } \phi \end{pmatrix} \text{ y } R_2(180^\circ - \phi) = \begin{pmatrix} -\text{cos } \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & -\text{cos } \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Las variaciones de las coordenadas entre T y t en el sistema global se obtienen a través de la siguiente ecuación:

$$\Delta U_j = A_j^i * u_i \quad (2.9)$$

Donde u_i esta dado por la siguiente ecuación:

$$u_i = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta U = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_t - X_T \\ Y_t - Y_T \\ Z_t - Z_T \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

De lo anterior la matriz de transformación será:

$$A_i^j = \begin{pmatrix} -\text{sen} \phi \text{ cos } \Lambda & -\text{sen} \Lambda & \text{cos } \phi \text{ cos } \Lambda \\ -\text{sen} \phi \text{ sen } \Lambda & \text{cos } \Lambda & \text{cos } \phi \text{ sen } \Lambda \\ \text{cos } \phi & 0 & \text{sen } \phi \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

La inversión de la ecuación 9, se cumple fácilmente considerando que A_j^i es ortonormal, por tanto $A^{-1} = A^T$. De la misma ecuación tenemos que $u_i = (A_j^i)^{-1} * \Delta U_j$, así vemos que:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen} \phi \text{ cos } \Lambda & -\text{sen} \phi \text{ sen } \Lambda & \text{cos } \phi \\ -\text{sen} \Lambda & \text{cos } \Lambda & 0 \\ \text{cos } \phi \text{ cos } \Lambda & \text{cos } \phi \text{ sen } \Lambda & \text{sen } \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t - X_T \\ Y_t - Y_T \\ Z_t - Z_T \end{pmatrix}$$

De lo anterior para pasar de coordenadas cartesianas globales a coordenadas cartesianas astronómicas locales, consideraremos las siguientes ecuaciones:

$$x_t = -\operatorname{sen}\phi \cos\Lambda (X_t - X_T) - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\Lambda (Y_t - Y_T) + \cos\phi (Z_t - Z_T) \quad (2.12)$$

$$y_t = -\operatorname{sen}\Lambda (X_t - X_T) - \cos\Lambda (Y_t - Y_T) \quad (2.13)$$

$$z_t = \cos\phi \cos\Lambda (X_t - X_T) - \cos\phi \operatorname{sen}\Lambda (Y_t - Y_T) + \operatorname{sen}\phi (Z_t - Z_T) \quad (2.14)$$

Ahora bien para pasar de coordenadas cartesianas astronómicas locales a coordenadas cartesianas globales, consideraremos las siguientes ecuaciones:

$$(X_t - X_T) = -\operatorname{sen}\phi \cos\Lambda x_t - \operatorname{sen}\Lambda y_t + \cos\phi \cos\Lambda z_t \quad (2.15)$$

$$(Y_t - Y_T) = -\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\Lambda x_t - \cos\Lambda y_t + \cos\phi \operatorname{sen}\Lambda z_t \quad (2.16)$$

$$(Z_t - Z_T) = \cos\phi x_t - \operatorname{sen}\phi z_t \quad (2.17)$$

Observamos que para realizar las transformaciones entre ambos sistemas de referencia se hace imprescindible contar con las coordenadas astronómicas del punto de origen del sistema local, lo que significa que nos relacionan ambos sistemas. Ahora bien si definimos el triedro conformado por los vectores u_1, u_2, u_3 , de la siguiente manera que u_3 es la dirección normal al elipsoide de referencia que pasa por el punto P, y u_1 y u_2 están contenidos en un plano \perp a u_3 pasando por P, además u_1 está orientado hacia el Norte y u_2 hacia el Este. A esta representación la llamaremos *TRIEDRO GEODÉSICO*, el cual se diferenciara del astronómico por la normal utilizada en cada caso. De manera que si en vez de escoger el triedro astronómico, escogemos el geodésico para definir el sistema de referencia local, las coordenadas utilizadas para relacionar ambos sistemas cambiaran, es decir, utilizaremos las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) del punto de origen del sistema local, y por tanto las ecuaciones anteriores serían las mismas para este caso, pero se sustituye las coordenadas astronómicas (ϕ, Λ) por las geodésicas (ϕ, λ) . Generalmente se trabaja con las coordenadas geodésicas, dado que son las más conocidas de los puntos sobre la superficie terrestre.

2). Sistema de referencia polar local o sistema de coordenadas geodésico local.

La figura (2.7), muestra como el acimut elipsoidal (o geodésico) y el ángulo vertical entre los puntos T y t, relacionan el *sistema de coordenadas geodésico local*. Sobre el sistema de referencia astronómico local podemos definir otro tipo de coordenadas que se les llama *coordenadas polares locales o sistema de coordenadas geodésico local*, las cuales serán:

α_{Tt} : Acimut elipsoidal; β_{Tt} : Ángulo vertical; D_{Tt} : Distancia geométrica.

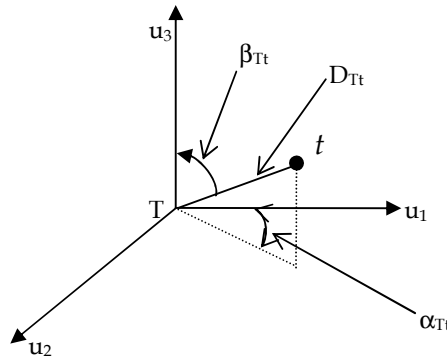


Figura 2.7. Observaciones reducidas en Sistema de Coordenadas Geodésicas Locales

Estas coordenadas se pueden relacionar con las coordenadas cartesianas locales a través de las siguientes ecuaciones, derivables de la figura (2.7):

$$u_1 = x_t = D_{Tt} * \cos \alpha_{Tt} * \sen \beta_{Tt}, \quad (2.18)$$

$$u_2 = y_t = D_{Tt} * \sen \alpha_{Tt} * \sen \beta_{Tt}, \quad (2.19)$$

$$u_3 = z_t = D_{Tt} * \cos \beta_{Tt}. \quad (2.20)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, podemos conseguir las coordenadas polares locales, las cuales quedan en función de las coordenadas cartesianas locales:

$$\alpha_{Tt} = \text{tg}^{-1} \frac{y_t}{x_t}, \quad \beta_{Tt} = \cos^{-1} \frac{z_t}{D_{Tt}}, \quad D_{Tt} = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}. \quad (2.21)$$

Una vez establecidas las relaciones entre las coordenadas globales y locales, procedemos a sustituir los valores de x_t , y_t , z_t por:

$$x_t = -\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda (X_t - X_T) - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda (Y_t - Y_T) + \cos\varphi (Z_t - Z_T) \quad (2.22),$$

$$y_t = -\operatorname{sen}\lambda (X_t - X_T) - \cos\lambda (Y_t - Y_T) \quad (2.23),$$

$$z_t = \cos\varphi \cos\lambda (X_t - X_T) - \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda (Y_t - Y_T) + \operatorname{sen}\varphi (Z_t - Z_T) \quad (2.24),$$

en las ecuaciones de $\operatorname{sen} \alpha_{Tt}$, β_{Tt} , D_{Tt} , así de esta forma quedaran en función de las coordenadas globales (X_T, Y_T, Z_T) y (X_t, Y_t, Z_t) , aunque se utiliza las coordenadas geodésicas en reemplazo de las astronómicas:

$$\alpha_{Tt} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{-\operatorname{sen}\lambda(X_t - X_T) - \cos\lambda(Y_t - Y_T)}{-\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda(X_t - X_T) - \operatorname{sen}\varphi \cos\lambda(Y_t - Y_T) - \cos\varphi(Z_t - Z_T)} \quad (2.25),$$

$$\beta_{Tt} = \cos^{-1} \frac{\cos\varphi \cos\lambda(X_t - X_T) - \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda(Y_t - Y_T) + \operatorname{sen}\varphi(Z_t - Z_T)}{\sqrt{(X_t - X_T)^2 + (Y_t - Y_T)^2 + (Z_t - Z_T)^2}} \quad (2.26),$$

$$D_{Tt} = \sqrt{(X_t - X_T)^2 + (Y_t - Y_T)^2 + (Z_t - Z_T)^2} \quad (2.27).$$

De estas ecuaciones se puede concluir que α y β dependen de la normal al elipsoide a través de las coordenadas geodésicas del punto T, al contrario la distancia D es inalterable, lo cual significa que ella no depende de las coordenadas geodésicas del punto T, mientras que α y β si dependen tanto de las coordenadas geodésicas del punto T como del punto t.

Si se ha definido con anterioridad que $\Delta X = (X_t - X_T)$, $\Delta Y = (Y_t - Y_T)$ y $\Delta Z = (Z_t - Z_T)$, entonces las ecuaciones anteriores sirven para hallar α , β y D, por ende:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\operatorname{sen}\lambda \Delta X - \cos\lambda \Delta Y}{-\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda \Delta X - \operatorname{sen}\varphi \cos\lambda \Delta Y - \cos\varphi \Delta Z} \quad (2.28),$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\varphi\cos\lambda \Delta X - \cos\varphi\text{sen}\lambda \Delta Y + \text{sen}\varphi \Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \quad (2.29),$$

$$D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (2.30).$$

Las ecuaciones 2.22, 2.23 y 2.24, constituyen un tipo de ecuaciones, $L_a = F(X_a)$, para el modelo de ajustes de las observaciones, donde ellas constan de un acimut reducido (ángulo horizontal), un ángulo vertical reducido y la distancia geométrica. Posteriormente emplearemos estas expresiones en forma diferencial para expresar variaciones en el acimut geodésico $d\alpha$, en el ángulo cenital $d\beta$ y en la distancia dD , todas en función de pequeñas variaciones en las coordenadas de los punto T (dX , dY , dZ) y t ($d\varphi$, $d\lambda$, dh), no obstante se puede usar las coordenadas del punto T, ya que las coordenadas del punto t se pueden reflejar en función de las del punto T, dicho de otro modo:

$$\begin{aligned} d\alpha_{Tt} &= f(dX_T, dY_T, dZ_T, dX_t, dY_t, dZ_t), \\ d\beta_{Tt} &= g(dX_T, dY_T, dZ_T, dX_t, dY_t, dZ_t), \\ dD_{Tt} &= h(dX_T, dY_T, dZ_T, dX_t, dY_t, dZ_t). \end{aligned}$$

Como se puede observar las funciones serán lineales. De manera similar, si se usan las coordenadas del punto t:

$$\begin{aligned} d\alpha_{Tt} &= f(d\varphi_T, d\lambda_T, dh_T, d\varphi_t, d\lambda_t, dh_t), \\ d\beta_{Tt} &= g(d\varphi_T, d\lambda_T, dh_T, d\varphi_t, d\lambda_t, dh_t), \\ dD_{Tt} &= h(d\varphi_T, d\lambda_T, dh_T, d\varphi_t, d\lambda_t, dh_t). \end{aligned}$$

de estas últimas ecuaciones se obtendrán las ecuaciones de observación de la geodesia geométrica tridimensional.

2.1.3. FORMULAS DIFERENCIALES

De la relación entre las coordenadas cartesianas (X, Y, Z) y las coordenadas geodésicas (φ , λ , h), referidas en las ecuaciones 2.2, 2.3 y 2.4:

$$\begin{aligned} X &= (v + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (v + h) \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \\ Z &= (v (1 - e^2) + h) \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

Se obtienen las expresiones lineales que relacionan pequeños incrementos (dX, dY, dZ) con pequeños incrementos en (φ , λ , h), ($d\varphi$, $d\lambda$, dh), alcanzándose sin dificultad, *las ecuaciones fundamentales*:

$$\begin{pmatrix} (\rho+h) d\varphi \\ (v+h) \cos \varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \varphi \cos \lambda & -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \lambda & \cos \varphi \\ -\operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda & \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \quad (2.31),$$

Despejando la matriz $\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$, de la ecuación 31, nos queda:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \varphi \cos \lambda & -\operatorname{sen} \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\rho+h) d\varphi \\ (v+h) \cos \varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} \quad (2.32),$$

Despejando la matriz $\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix}$, de la ecuación 2.32, da lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\rho+h) \operatorname{sen}\varphi \cos\lambda & -(v+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda & \cos\varphi \cos\lambda \\ -(\rho+h) \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda & (v+h) \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ (\rho+h) \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} \quad (2.33),$$

Donde las unidades de $(d\varphi, d\lambda)$ estarán expresadas en radianes y dh en metros. Donde v fue definida en el numeral 3) del 2.1.1., y ρ es el radio de curvatura del meridiano elipsoidal y es definido de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

Estas ecuaciones que nos relacionan los diferenciales de (dX, dY, dZ) con los diferenciales $(d\varphi, d\lambda, dh)$, serán imprescindibles a la hora de obtener las ecuaciones de observación de la geodesia tridimensional.

2.1.4. GENERALIDADES DEL DATUM

Como mencionamos anteriormente, específicamente en el numeral 2.1, el geoide es muy irregular y es improbable modelarlo correctamente, además existen diferencias claras al momento de establecer el geoide, debido a que este puede variar en diferentes puntos de las costas, ya que estos pueden registrar diferentes niveles del mar hasta pueden existir un metro de variación entre el nivel cero registrado por un mareógrafo y otro, incluso dentro de países con grandes extensiones de territorio. Por lo cual surge como alternativa geométrica el elipsoide, como superficie o modelo matemático sobre el que vinculamos la posición planimétrica de los puntos sobre la superficie terrestre, a su vez utilizamos al geoide como un modelo físico de la tierra.

Comúnmente, el Datum se define como la superficie de referencia para el cálculo y determinación de coordenadas, instaurándose unos datos iniciales de los cuales se derivan el resto. Asimismo, las coordenadas geodésicas y astronómicas

coinciden en el punto fundamental *datum*. En todos los demás puntos difieren, y el ángulo entre las dos normales dependerá de muchos factores, entre otros:

- del elipsoide sobre el cual se efectuaran los cálculos.
- Del punto fundamental astronómico elegido.
- De las coordenadas adoptadas para este punto.
- De las observaciones geodésicas efectuadas, del método y secuencia llevados a cabo en los cálculos, etc.

En geodesia se puede hablar de dos tipos de datum:

- El Datum Vertical. Conocido como la superficie de referencia que permite el cálculo de alturas. De manera que, es la superficie de altura nula, como se mencionó anteriormente. Frecuentemente esta superficie es el Geoide y a las alturas referidas a este sistema se denominan alturas ortométricas.
- El Datum horizontal. Permite el cálculo de la longitud y la latitud. Para esto es necesario escoger un punto donde las superficies del elipsoide de referencia y del geoide sean tangentes. Así pues, ambas verticales, tanto la geodésica y astronómica respectivamente, convergerán, igualmente ocurre con las coordenadas geodésicas y astronómicas en este punto.

El Datum geodésico está establecido por:

- Un punto fundamental, es aquel donde coinciden las verticales al geoide y al elipsoide, igualmente las coordenadas geodésicas y astronómicas. En el mismo sentido conocemos las componentes de la desviación vertical y la ondulación del geoide. Vale la pena aclarar que las determinaciones altimétricas clásicas son referidas al geoide, de otra manera se presenta en el sistema WGS-84, la cual está referido al elipsoide.
- Una superficie de referencia con definición geométrica exacta, usualmente un elipsoide de revolución.

Sin embargo la posición relativa entre el geoide y el elipsoide en un punto sobre la superficie terrestre está definida por las componentes de la desviación vertical ξ y η , y la ondulación del geoide N . Ahora bien para la implantación de un Sistema de Referencia Geodésico es necesario:

- Identificar las coordenadas astronómicas y geodésicas del punto fundamental y la ondulación del geoide, usualmente estas coordenadas coinciden, lo cual significa que la desviación vertical y la ondulación del geoide son cero, en otro sentido el geoide y el elipsoide son coincidentes, por tanto la normal astronómica y geodésica coinciden y no se presenta la ondulación del geoide.
- Definir el tamaño y forma del elipsoide de referencia. El elipsoide está definido por dos parámetros, por ejemplo, el semieje mayor (a), y el aplastamiento (f), este último se relaciona con el semieje menor (b), por:

$$f = \frac{a - b}{a},$$

Sin embargo se suele utilizar la excentricidad al cuadrado (e^2), la cual es:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Vale la pena señalar que estos cinco parámetros mencionados describen la relación entre el elipsoide de revolución y la línea de la plomada que tiene un punto P de la superficie terrestre, o sea, el elipsoide de revolución y el geoide. Los parámetros ξ , η y N , habitualmente se pueden reemplazar por otros parámetros T_x , T_y y T_z , definidos como la traslación del centro del elipsoide respecto al centro de la tierra. Asimismo se debe adjuntar dos parámetros adicionales que sirven para dar la orientación del elipsoide y la orientación del Sistema de Referencia Geodésico, y estos dos parámetros son:

- Ángulo que forma el semieje menor del elipsoide de revolución con el eje de rotación terrestre o también conocido como eje medio polar.
- El acimut geodésico a lo largo de una línea inicial a partir de la cual comenzara la triangulación.

En resumen, un datum local está determinado por siete parámetros bien claros, que solucionan la posición, forma y orientación del elipsoide de revolución con respecto al geoide, por consiguiente:

- 1) El semieje mayor (a) del elipsoide.
- 2) El achatamiento o aplanamiento (f) del elipsoide.
- 3) La componente ξ , de la desviación vertical en el meridiano del datum.
- 4) La componente η , de la mencionada desviación en el primer vertical del datum.
- 5) La ondulación del geoide, N , en el datum origen, en otras palabras es la distancia entre el elipsoide de referencia y el geoide.
- 6) El acimut geodésico a lo largo de una línea inicial de la triangulación.
- 7) La condición de paralelismo entre el semieje menor del elipsoide y el eje medio de la rotación terrestre.

El cambio de un sistema de referencia a otro conlleva una pequeña variación de las características de los elipsoides, expresadas en los incrementos (da y de^2), y al mismo tiempo una pequeña modificación en el cambio del datum. Por consiguiente, cuando se procede a calcular una transformación de coordenadas, es decir, pasar de un sistema a otro, se debe calcular el nuevo datum a utilizar junto con el nuevo elipsoide, y los oportunos parámetros de transformación, siempre partiendo de los parámetros de ambos elipsoides de referencia.

Por tanto, aparece un primer problema en las redes geodésicas, y es la optimización del *datum* o sistema de referencia más conveniente, cuya solución viene impuesta por la necesidad de enlazar la red geodésica. En cualquier

supuesto y para una configuración de la red determinada por la matriz de diseño A y con una precisión y metodología precisada por P , el datum estará determinado por la siguiente matriz:

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} = S^{-1}$$

Ahora bien, si la red es libre por cualquier matriz inversa generalizada S^- de S , la solución óptima será la representada por la matriz pseudoinversa:

$$Q_{xx} = (A^T P A)^+ = S^+$$

La cual se soluciona aplicando las transformaciones de Baarda.

En la geodesia española, el elipsoide utilizado es el internacional de Hayford y el Datum Europeo o Datum Potsdam (por estar ubicado en Alemania, en la ciudad que lleva el mismo nombre, concretamente en la Torre de Helmert). Generalmente se conoce con el nombre de ED-50 (European Datum, 1950), al cual nos referiremos más adelante. Posteriormente, en el año de 1979, se realizó una nueva compensación de la red, en la cual se localizó el punto fundamental en Munich (Datum Munich), no obstante se siguió utilizando el elipsoide de Hayford, y las altitudes se refirieron al elipsoide en vez del geoide. A este Datum se le designa como ED-79 (European Datum, 1979). Aquí es importante referirse al *Punto Astronómico Fundamental*, en donde las superficies del elipsoide y el geoide son tangentes (dado que se determinan sus coordenadas por métodos astronómicos y se igualan a las respectivas geodésicas, por lo que ambas son coincidentes) y es el que sirve como referencia para el posterior cálculo de las coordenadas de todos los vértices de una red geodésica.

El datum geodésico como se ha mencionado anteriormente describe la orientación de un sistema geodésico respecto al sistema geocéntrico global. Hoy en

día, las redes establecidas con métodos satelitales son referidas al ITRF y de ahí a las geocéntricas. Las desviaciones verticales más grandes ocurren en las redes geodésicas clásicas, las cuales serán orientadas por observaciones astronómicas. El caso más general, un sistema no geocéntrico $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ es transformado a un sistema X, Y, Z a través de una transformación de similitud en el espacio, es decir, por tres translaciones, tres rotaciones, y un cambio de escala.

2.2. CAMBIO EN EL SISTEMA DE REFERENCIA

Supongamos que se tiene una serie de puntos P_i , con coordenadas respecto a dos sistemas de referencia diferentes, cuyos elipsoides asociados son conocidos, y además se conocen las coordenadas geodésicas (ϕ_i, λ_i, h_i) en los dos sistemas. Entonces el problema del datum sería averiguar los parámetros de transformación entre ambos sistemas de referencia, lo cual significa, hallar (dX_o, dY_o, dZ_o) , (w_x, x_y, x_z) , dL , teniendo en cuenta que, (da, de^2) son conocidos.

Por consiguiente, en esta sección vamos a observar las fórmulas que nos den pequeñas variaciones en las coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) , las cuales estarán en función de pequeñas variaciones en los parámetros que precisan el sistema de referencia, o sea, pequeñas variaciones en la forma del elipsoide (da, de^2) , una traslación infinitesimal del origen del sistema de referencia (dX_o, dY_o, dZ_o) , una rotación infinitesimal de sus ejes (w_x, x_y, x_z) y un cambio de escala diferencial dL .

2.2.1. CAMBIO EN LOS PARÁMETROS DEL ELIPSOIDE

El elipsoide está en función por dos constantes: la longitud del semieje mayor (a) y la excentricidad al cuadrado (e^2) . Y como se ha mencionado antes cualquier cambio en un sistema de referencia envuelve el paso de un elipsoide a otro, es decir, una pequeña variación en las constantes del elipsoide, lo que incide

en que estas constantes dejan de serlo y se convierten en las variables en el sistema fundamental de ecuaciones.

Teniendo las siguientes ecuaciones que nos relacionan las coordenadas globales y geodésicas (2.2, 2.3 y 2.4), y la cuales son:

$$\begin{aligned} X &= (v + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (v + h) \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \\ Z &= (v (1 - e^2) + h) \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

Y reemplazando la ecuación v (2.4a), o también conocida como N , en las expresiones anteriores, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$X = \left(\frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} + h \right) \cos \varphi \cos \lambda \quad (2.34)$$

$$Y = \left(\frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} + h \right) \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \quad (2.35)$$

$$Z = \left(\frac{a (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} + h \right) \operatorname{sen} \varphi \quad (2.36)$$

Aplicando una diferenciación a estas ecuaciones con respecto a (a) y (e^2) , alcanzamos:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial a} da + \frac{\partial X}{\partial e^2} de^2 \quad (2.37)$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial a} da + \frac{\partial Y}{\partial e^2} de^2 \quad (2.38)$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial a} da + \frac{\partial Z}{\partial e^2} de^2 \quad (2.39)$$

Donde las derivadas parciales serán las siguientes:

$$\frac{\partial X}{\partial a} = v \cos \varphi \frac{\cos \lambda}{a} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial X}{\partial e^2} = \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \frac{\cos \lambda}{2(1 - e^2)} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = v \cos \varphi \frac{\operatorname{sen} \lambda}{a} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial e^2} = \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{sen} \lambda}{2(1 - e^2)} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = v(1 - e^2) \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial e^2} = (\rho \operatorname{sen}^2 \varphi - 2v) \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} \quad (2.45)$$

Por ende las variaciones ($d\varphi$, $d\lambda$, dh) que están en función de (dX , dY , dZ), y reemplazando las ecuaciones 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44 y 2.45 en 2.37, 2.38 y 2.39, obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \varphi \frac{\cos \lambda}{a} & \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \frac{\cos \lambda}{2(1 - e^2)} \\ v \cos \varphi \frac{\operatorname{sen} \lambda}{a} & \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{sen} \lambda}{2(1 - e^2)} \\ v(1 - e^2) \frac{\operatorname{sen} \varphi}{a} & (\rho \operatorname{sen}^2 \varphi - 2v) \frac{\operatorname{sen} \varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de^2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} da \\ de^2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Ahora que ya tenemos la relación entre ($d\varphi$, $d\lambda$, dh) y (dX , dY , dZ), podemos sustituir en la matriz (2.46) los valores determinados de $\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$ en la matriz (2.33), con el fin de lograr una matriz en función de ($d\varphi$, $d\lambda$, dh). Por consiguiente:

$$\begin{pmatrix} (\rho + h) d\varphi \\ (v + h) \cos \varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \cos \lambda & -\operatorname{sen}\lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \operatorname{sen}\lambda \\ \cos \varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} da \\ de^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{v e^2}{a} \cos \varphi \operatorname{sen}\varphi & -v \cos \varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{v}{a} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) & \left(\frac{\rho}{2} - v\right) \operatorname{sen}^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de^2 \end{pmatrix}$$

Y dado que (da, de^2) son cuantías de primer orden y si vinculamos $\rho = u = a$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} (\rho + h) d\varphi \\ (v + h) \cos \varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^2 \cos \varphi \operatorname{sen}\varphi & -a \cos \varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2} \\ 0 & 0 \\ (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) & -\frac{a}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da \\ de^2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la matriz anterior:

$$(\rho + h) d\varphi = -e^2 \cos \varphi \operatorname{sen}\varphi da - a \cos \varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2} de^2$$

$$(v + h) \cos \varphi d\lambda = 0$$

$$dh = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) da - \frac{a}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi de^2$$

O también se puede hacer en una primera aproximación $(\rho + h \cong a)$, y al reemplazar esta expresión en las anteriores ecuaciones, dará lo siguiente:

$$d\varphi = -\frac{e^2}{a} \cos \varphi \operatorname{sen}\varphi da - \cos \varphi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2} de^2$$

$$d\lambda = 0$$

$$dh = (1 - e^2 \sin^2 \varphi) da - \frac{a}{2} \sin^2 \varphi de^2$$

2.2.2. VARIACIÓN DE (φ, λ, h) POR UNA TRASLACIÓN DEL SISTEMA DE REFERENCIA DADA POR (dX_0, dY_0, dZ_0)

En la matriz (2.31), se realiza el siguiente cambio: $(dX, dY, dZ) = (dX_0, dY_0, dZ_0)$, por tanto obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} (\rho+h) d\varphi &= -\sin\varphi \cos\lambda dX_0 - \sin\varphi \sin\lambda dY_0 + \cos\varphi dZ_0 \\ (v+h) \cos\varphi d\lambda &= -\sin\lambda dX_0 + \cos\lambda dY_0 \\ dh &= \cos\varphi \cos\lambda dX_0 + \cos\varphi \sin\lambda dY_0 + \sin\varphi dZ_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.2.3. VARIACIÓN DE (φ, λ, h) POR UNA ROTACIÓN INFINITESIMAL DE ÁNGULOS (w_x, w_y, w_z)

Si tenemos una rotación infinitesimal (w_x, w_y, w_z) , las coordenadas cartesianas (X, Y, Z) serán:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_z & -w_y \\ -w_z & 0 & w_x \\ w_y & -w_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Al resolver la matriz anterior obtenemos lo siguiente, pero sustituyendo las coordenadas cartesianas (X, Y, Z) por sus valores expresados en las ecuaciones 2.2, 2.3 y 2.4, las cuales están en función de las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) , :

$$\begin{aligned} dX &= (v+h) \cos\varphi \sin\lambda w_z - (v(1-e^2) + h) \sin\varphi w_y \\ dY &= -(v+h) \cos\varphi \cos\lambda w_z + (v(1-e^2) + h) \sin\varphi w_x \\ dZ &= (v+h) \cos\varphi \cos\lambda w_y - (v+h) \cos\varphi \sin\lambda w_x \end{aligned} \quad (2.49)$$

Ahora estos valores se van a incluir en las ecuaciones fundamentales (2.31), y así tenemos que:

$$\begin{pmatrix} (\rho+h) d\varphi \\ (v+h) \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda & -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda & \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -(v(1-e^2)+h) \operatorname{sen}\varphi & (v+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ (v(1-e^2)+h) \operatorname{sen}\varphi & 0 & -(v+h) \cos\varphi \cos\lambda \\ -(v+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda & (v+h) \cos\varphi \cos\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Al resolver matricialmente la anterior expresión, las ecuaciones de $(d\varphi, d\lambda, dh)$ quedarían en función de (w_x, w_y, w_z) :

$$\begin{aligned} (\rho+h) d\varphi &= (v+h) (\cos\lambda w_y - \operatorname{sen}\lambda w_x) \\ (v+h) \cos\varphi d\lambda &= (v+h) (-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda w_x + \operatorname{sen}\varphi \cos\lambda w_y - \cos\varphi w_z) \\ dh &= (v+h) \cos\varphi (\cos\lambda w_y - \operatorname{sen}\lambda w_x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.2.4. VARIACIÓN DE (φ, λ, h) EN FUNCIÓN DE UN CAMBIO DE ESCALA dL DEL MODELO

Una variación en la escala del sistema de referencia, definida como dL , origina una variación en las coordenadas cartesianas, que se expresa de acuerdo a:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_{dL} = (1 + dL) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dL = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$$

Dando como resultado:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = dL \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \text{ si reemplazamos los valores de } X, Y, Z, \text{ de las ecuaciones 2.2,}$$

2.3 y 2.4, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = dL \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v+h) \cos\varphi \cos\lambda \\ (v+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ (v(1-e^2)+h) \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} dL$$

De acuerdo a la expresión anterior y sustituyendo las ecuaciones fundamentales (31), en esta matriz, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\rho+h) d\varphi \\ (v+h) \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \cos\lambda & -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda & \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda & \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (v+h) \cos\varphi \cos\lambda \\ (v+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda \\ (v(1-e^2)+h) \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} dL = \\ &= \begin{pmatrix} (v+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + (v(1-e^2)+h) \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \\ (v+h) \cos^2\varphi + (v(1-e^2)+h) \operatorname{sen}^2\varphi \end{pmatrix} dL = \\ &= \begin{pmatrix} -v e^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \\ (v+h) - v e^2 \operatorname{sen}^2\varphi \end{pmatrix} dL, \text{ o también, } = \begin{pmatrix} -v e^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \\ v(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi) + h \end{pmatrix} dL \end{aligned}$$

Y así pues tenemos que:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{-v e^2 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{(\rho+h)} \\ d\lambda &= 0 \\ dh &= ((v+h) - v e^2 \operatorname{sen}^2\varphi) dL \end{aligned} \tag{2.51}$$

De esta manera las expresiones nos permiten establecer pequeños cambios en las coordenadas ($d\varphi$, $d\lambda$, dh) en función de pequeños variaciones del elipsoide

de referencia (da, de^2) y en función de pequeñas variaciones del sistema de referencia (dX_o, dY_o, dZ_o), (w_x, w_y, w_z) y dL .

2.3. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE TRANSFORMACIÓN ENTRE DOS SISTEMAS DE REFERENCIA

El planteamiento del problema es el siguiente: dado un Sistema de Referencia Terrestre (S.R.T.) determinado por (O, U) , donde O , en este caso, es el centro de masas de la tierra y U determinado por $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, siendo \bar{u}_1 positivo en el plano ecuatorial convencional y del meridiano origen, \bar{u}_3 positivo hacia el norte y paralelo al eje convencional de rotación terrestre, y por ultimo \bar{u}_2 ortogonal a los anteriores y positivo hacia el Este. De manera similar, dado un Sistema de Referencia de la Geodesia Clásica (S.R.G.) expresado por (O', U') , donde O' es el centro del elipsoide de referencia y el triedro U' está determinado por $(\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, \bar{u}'_3)$, los cuales tienen las mismas características de orientación y posición de $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$. Asimismo el (S.R.G.) se supone fijo referente al (S.R.T.), por ende se precisa la hipótesis de rigidez de la tierra.

Consideremos una serie de puntos $P_i, i = 1, \dots, n$, que tienen coordenadas respecto a dos sistemas de referencia diferentes, por ejemplo, WGS-84 y ED-50, cuyos elipsoides asociados son sabidos $(a_1, e_1^2), (a_2, e_2^2)$, y se conocen las coordenadas geodésicas $(\varphi_i, \lambda_i, h_i)$ en ambos sistemas, lográndose expresar:

$$\delta\varphi_i = \varphi_i^{(2)} - \varphi_i^{(1)}$$

$$\delta\lambda_i = \lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)}$$

$$\delta h_i = h_i^{(2)} - h_i^{(1)}$$

donde $i = 1, \dots, n$

Se pueden dar varios casos en función del origen de las coordenadas. Los que vamos a tratar son:

- a) Dos sistemas de referencia geodésicos distintos.
- b) Sistemas de referencia satelital y geodésico.
- c) Dos sistemas de referencia satelital.

Hasta ahora no se ha hablado de los sistemas de referencia satelital, más adelante entraremos en este tema. Lo que se puede adelantar es que tanto los sistemas de referencia satelital como los clásicos geodésicos no son coincidentes, y el problema que se plantea es determinar los parámetros que relacionan ambos sistemas de referencia con un cierto orden de precisión que dependerá evidentemente de la precisión de las coordenadas que estemos comparando.

A continuación se analizan los casos antes mencionados:

- a) este caso se presenta cuando si tiene dos tipos de coordenadas geodésicas obtenidas por cálculos efectuados en *datum* distintos y también son consecuencia de distintos métodos de cálculo. El tratamiento riguroso del problema no es sencillo, ya que en general las coordenadas de ambos sistemas de referencia no son homogéneas entre sí, en otras palabras, sus precisiones no han de coincidir justamente. Generalmente esto ocurre cuando se pretende comparar redes antiguas con redes más modernas. Igualmente el conocimiento de la altimetría suele ser bastante pobre, lo que obliga a plantear el problema en dos dimensiones y en coordenadas geodésicas. Para analizar este caso se utilizan las ecuaciones vistas en el numeral 2.2. Por consiguiente el problema se centra en hallar los parámetros de transformación $(dX_o, dY_o, dZ_o), (w_x, w_y, w_z), dL,$ entre los dos sistemas de referencia, dado que (da, de^2) , son conocidos,

$$da = a_2 - a_1$$

$$de^2 = e_2^2 - e_1^2$$

En el momento que dispongamos de las coordenadas geodésicas, obtendremos las siguientes expresiones:

$$\delta\varphi_i = a_1^i da + a_2^i de^2 + a_3^i dX_o + a_4^i dY_o + a_5^i dZ_o + a_6^i w_x + a_7^i w_y + a_8^i w_z + a_9^i dL$$

$$\delta\lambda_i = b_1^i da + b_2^i de^2 + b_3^i dX_o + b_4^i dY_o + b_5^i dZ_o + b_6^i w_x + b_7^i w_y + b_8^i w_z + b_9^i dL$$

$$\delta h_i = c_1^i da + c_2^i de^2 + c_3^i dX_o + c_4^i dY_o + c_5^i dZ_o + c_6^i w_x + c_7^i w_y + c_8^i w_z + c_9^i dL$$

Y debido a que los coeficientes $a_j^i, b_j^i, c_j^i, j = 1, \dots, 9$ son conocidos a partir de las ecuaciones del numeral 2.2., conseguiríamos una serie de ecuaciones con términos independientes:

$$\delta\varphi_i = a_1^i da + a_2^i de^2$$

$$\delta\lambda_i = b_1^i da + b_2^i de^2$$

$$\delta h_i = c_1^i da + c_2^i de^2$$

Conocidos, teniendo como incógnitas a $(dX_o, dY_o, dZ_o, w_x, w_y, w_z)$, de esta forma se plantean tres (3) ecuaciones con siete (7) incógnitas, las cuales se determinarían por mínimos cuadrados.

- b) Este caso es de esencial importancia en el control de redes geodésicas por los datos obtenidos de las observaciones satelitales. Las coordenadas obtenidas por técnicas satelitales tienen una interesante propiedad desde el punto de vista de la geodesia geométrica, son homogéneas y están referidas a un sistema de referencia único. En contraste, en las redes geodésicas clásicas observadas por métodos tradicionales esto no ocurre a causa de los sistematismos y a la propagación de errores tanto en escala como en orientación, igualmente, a un incorrecta reducción de las observaciones realizadas desde la superficie terrestre al elipsoide de referencia, a la carencia de una buena información sobre la desviación de la vertical y la ondulación del geoide.
- c) Finalmente, este caso es habitual, debido a que se ha utilizado el sistema de referencia satelital para la reducción y cálculo de las observaciones. Sin ir más

lejos, en España se tenían coordenadas en el sistema NWL9D (reducidas con efemérides precisas) y el sistema WGS72 (reducidas con efemérides transmitidas). Por ende, este caso es de tratamiento sencillo dado que se puede suponer el modelo libre de sistematismos.

A continuación se señalan los modelos matemáticos más comunes en la literatura geodésica, utilizados para la determinación de los parámetros de transformación entre dos sistemas de referencia geodésicos diferentes.

2.3.1. MODELO DE BURSA-WOLF

Este modelo relaciona dos conjuntos de coordenadas tridimensionales tratadas como observables. Por tanto, sea un conjunto de n puntos de posición conocida respecto a un S. R. G. (S1), llamado origen de la transformación, y otro S. R. G. (S2), llamado destino de la transformación, ambos expresados en coordenadas cartesianas geocéntricas, $\bar{X}_1^n = (X_1^n + Y_1^n + Z_1^n)$ y $\bar{X}_2^n = (X_2^n + Y_2^n + Z_2^n)$, con $n \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$, respectivamente. El planteamiento consiste en que el origen de S1 está trasladado del origen de S2, sus ejes muestran unas rotaciones diferenciales (w_x, w_y, w_z), asimismo se presentara una escala distinta. La transformación entre ambos sistemas se puede expresar de la siguiente manera:

$$\bar{X}_2 = \bar{T} + (1 + dL)R(w_x, w_y, w_z)\bar{X}_1 \quad (2.52)$$

Donde las incógnitas serán:

$\bar{T} = (dX_o, dY_o, dZ_o)^T$: El vector de traslaciones,

dL : La variación en escala,

$R(w_x, w_y, w_z)$: La matriz de rotación.

De acuerdo a lo anterior se supone que se puede pasar de un sistema de referencia a otro por una transformación de tipo Helmert, dicho de otro modo, por una transformación de similitud. Cabe señalar, que en ambos S. R. G. los parámetros del elipsoide (a_1, e_1^2) y (a_2, e_2^2) son conocidos. En principio, tenemos que la matriz de rotación se puede descomponer en una suma de matrices:

$$R(w_x, w_y, w_z) = I + Q(w_x, w_y, w_z)$$

Y reemplazando en la ecuación 2.52, obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{X}_2 &= \bar{T} + (1 + dL)[I + Q(w_x, w_y, w_z)]\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 &= \bar{T} + (1 + dL)[\bar{X}_1 + \bar{X}_1 Q(w_x, w_y, w_z)] \\ \bar{X}_2 &= \bar{T} + \bar{X}_1 + Q(w_x, w_y, w_z)\bar{X}_1 + \bar{X}_1 dL + Q(w_x, w_y, w_z)\bar{X}_1 dL\end{aligned}$$

De la anterior expresión, se puede obviar el último término por su pequeñez, de manera que:

$$\bar{X}_2 = \bar{T} + \bar{X}_1 + Q(w_x, w_y, w_z)\bar{X}_1 + \bar{X}_1 dL$$

Esta expresión se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\bar{T} + Q(w_x, w_y, w_z)\bar{X}_1 + \bar{X}_1 dL + (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0$$

Así se determina que para cada punto de coordenadas conocidas en ambos sistemas se logra plantear un sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w_z & -w_y \\ -w_z & 0 & w_x \\ w_y & -w_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} dL = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Reorganizando la ecuación anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & i & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & i & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \\ dL \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}$$

Conociendo las coordenadas de un conjunto de n puntos en ambos sistemas, obtenemos un sistema lineal de $3n$ ecuaciones y 7 incógnitas como se demostró anteriormente. Por tanto tenemos el GMM para la determinación de esta transformación según la ecuación 2.53, y es un problema lineal que se puede plantear para resolver por el método de mínimos cuadrados:

$$A\bar{x} = \bar{v} + \bar{r}, \text{ donde } \bar{r} \sim N(0, s_0^2 Q_{bb})$$

Siendo "A" la matriz de configuración del ajuste, "x" el vector de incógnitas, "v" el vector de observaciones y "r" el vector de residuos. Y matricialmente es expresada de la siguiente forma:

covarianzas de los residuos. Por ende, este planteamiento nos proporcionara los parámetros relevantes desde la perspectiva de los mínimos cuadrado.

Aun así, el problema más notorio de este modelo es que la matriz de diseño de las incógnitas muestra un condicionamiento numérico muy alto, puesto que las columnas de ella demuestran normas distintas, lo que conllevara a requerir métodos numéricos estables sino se quieren alcanzar errores en el hallazgo de las incógnitas, los cuales en un futuro serán de un gran valor.

2.3.2. MODELO DE BADEKAS-MODOLENSKI

Existen dos interpretaciones del modelo dependiendo del origen del sistema de referencia elegido. Por tanto, sea un conjunto de n puntos de posición conocida respecto a un S. R. G. (S1), llamado origen de la transformación, y otro S. R. G. (S2), llamado destino de la transformación, ambos expresados en coordenadas cartesianas geocéntricas, $\vec{X1}^n = (X_1^n + Y_1^n + Z_1^n)$ y $\vec{X2}^n = (X_2^n + Y_2^n + Z_2^n)$, con $n \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$, respectivamente. Puesto que el modelo de Badekas-Modolenski se obtiene como una variación del modelo Bursa-Wolf con la intención de minimizar el problema mencionado referente al mal acondicionamiento matricial de la matriz de diseño de las incógnitas. De acuerdo a este planteamiento se introduce un punto inicial "o" del conjunto de puntos dados, así de esta manera, el vector de posición de un punto arbitrario "n" se reemplaza por la suma del vector de posición del punto inicial "o", conocido anteriormente, con respecto al sistema de referencia y el vector de posición del punto arbitrario "n" con respecto al punto "o". La transformación entre ambos sistemas se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{X2} = \vec{T} + \vec{X1}_o + (1+dL) R(w_x, w_y, w_z) (\vec{X1} - \vec{X1}_o)$$

Para linealizar el modelo, introducimos:

$R (w_x, w_y, w_z) = I + Q (w_x, w_y, w_z)$, luego:

$$\bar{X}_2 = \bar{T} + \bar{X}_{1_0} + (1+dL) [I + Q (w_x, w_y, w_z)] (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0})$$

$$\bar{X}_2 = \bar{T} + \bar{X}_{1_0} + (1+dL) \{(\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) + Q (w_x, w_y, w_z) (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0})\}$$

$$\bar{X}_2 = \bar{T} + \bar{X}_{1_0} + (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) + Q (w_x, w_y, w_z) (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) + (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) dL + Q (w_x, w_y, w_z) (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) dL$$

Eliminando los términos de segundo orden:

$$\bar{X}_2 = \bar{T} + \bar{X}_1 + (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) dL + Q (w_x, w_y, w_z) (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0})$$

Reorganizando la ecuación anterior:

$$\bar{T} + (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) dL + Q (w_x, w_y, w_z) (\bar{X}_1 - \bar{X}_{1_0}) - (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) = 0$$

Cada punto de las coordenadas conocidas ayudan a proyectar tres ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 - Y_0 \\ X_3 - Z_0 \end{pmatrix} dL + \begin{pmatrix} 0 & w_z & -w_y \\ -w_z & 0 & w_x \\ w_y & -w_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 - Y_0 \\ Z_3 - Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}$$

Reorganizando la ecuación anterior, la ecuación 2.54 queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 - X_O & 0 & -(Z_1 - Z_O) & Y_1 - Y_O \\ 0 & i & 0 & Y_1 - Y_O & Z_1 - Z_O & 0 & -(X_1 - X_O) \\ 0 & 0 & i & Z_1 - Z_O & -(Y_1 - Y_O) & X_1 - X_O & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \\ dL \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}$$

En conclusión, el modelo obtenido demuestra que las normas correspondientes al factor del escala y las rotaciones no dependen de la norma de los vectores de posición de los puntos respecto al origen del sistema de coordenadas sino de la norma de los vectores respecto al punto inicial, lo cual significa que se optimiza el acondicionamiento numérico de la matriz de diseño de las incógnitas "A".

Por tanto tenemos el GMM para la determinación de esta transformación según la ecuación 2.54, y es un problema lineal que se puede plantear para resolver por el método de mínimos cuadrados:

$$A\bar{x} = \bar{v} + \bar{r}, \text{ donde } \bar{r} \sim N(0, s_0^2 Q_{bb})$$

Siendo "A" la matriz de configuración del ajuste, "x" el vector de incógnitas, "v" el vector de observaciones y "r" el vector de residuos. Y matricialmente es expresada en la ecuación 2.55.

Desde otra perspectiva, podemos ver la segunda interpretación del modelo, el cual se diferencia en el punto inicial "o", porque en vez de ser arbitrario se toma como *baricentro* de los puntos dados, esto es:

$$X_O = \sum \frac{X_1^n}{n}, \quad Y_O = \sum \frac{Y_1^n}{n}, \quad Z_O = \sum \frac{Z_1^n}{n}$$

Finalmente, y para un mayor entendimiento de la diferencia entre los dos métodos, podemos decir que como los puntos dados o tomados, están distribuidos en una zona pequeña de la tierra en comparación con las dimensiones de esta, el modelo Bursa-Wolf presenta problemas de mal acondicionamiento en la matriz normal ($A^T P A$). Y este inconveniente se puede solucionar en el modelo Badekas-Molodenski, al trasladar el origen del sistema de referencia al punto k , baricentro o centro de gravedad de los puntos dados.

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & X_1^1 - X_o & 0 & -(Z_1^1 - Z_o) & Y_1^1 - Y_o \\
 0 & 1 & 0 & Y_1^1 - Y_o & Z_1^1 - X_o & 0 & -(X_1^1 - X_o) \\
 0 & 0 & 1 & Z_1^1 - Z_o & -(Y_1^1 - Y_o) & X_1^1 - X_o & 0 \\
 1 & 0 & 0 & X_1^2 - X_o & 0 & -(Z_1^2 - Z_o) & Y_1^2 - Y_o \\
 0 & 1 & 0 & Y_1^2 - Y_o & Z_1^2 - X_o & 0 & -(X_1^2 - X_o) \\
 0 & 0 & 1 & Z_1^2 - Z_o & -(Y_1^2 - Y_o) & X_1^2 - X_o & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 1 & 0 & 0 & X_1^n - X_o & 0 & -(Z_1^n - Z_o) & Y_1^n - Y_o \\
 0 & 1 & 0 & Y_1^n - Y_o & Z_1^n - Z_o & 0 & -(X_1^n - X_o) \\
 0 & 0 & 1 & Z_1^n - Z_o & -(Y_1^n - Y_o) & X_1^n - X_o & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 dX_o \\
 dY_o \\
 dZ_o \\
 dL \\
 w_x \\
 w_y \\
 w_z
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 X_2^1 - X_1^1 \\
 Y_2^1 - Y_1^1 \\
 Z_2^1 - Z_1^1 \\
 X_2^2 - X_1^2 \\
 Y_2^2 - Y_1^2 \\
 Z_2^2 - Z_1^2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 X_2^n - X_1^n \\
 Y_2^n - Y_1^n \\
 Z_2^n - Z_1^n
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{pmatrix}
 r_1 \\
 r_2 \\
 r_3 \\
 r_4 \\
 r_5 \\
 r_6 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 r_{3n-2} \\
 r_{3n-1} \\
 r_{3n}
 \end{pmatrix}
 \quad (2.54)$$

2.4. SISTEMAS DE REFERENCIA VIGENTES EN ESPAÑA

Ya en el siglo XVIII tuvieron lugar los primeros intentos para iniciar el estudio de la red geodésica española, a cargo de Jorge Juan. Pero no fue hasta 1853, con la Ley de Medición del Territorio, cuando se iniciaron estos trabajos de una forma seria. Primero fueron encomendados al Ministerio de la Guerra y después al de fomento. El objetivo era la creación del Mapa General de España. En 1857 se midió la base de Madrilejos, lado fundamental de la triangulación geodésica del País. Los trabajos avanzaban con lentitud, en parte debido a una confusión administrativa, hasta que el 12 de septiembre de 1870 se crea el Instituto Geográfico, cuya dirección pasó a ocupar el General Don Carlos Ibáñez de Ibero. El Instituto Geográfico tenía como misión principal la creación del Mapa topográfico Nacional a escala 1/50.000, que comenzó a publicarse en 1875. Así comenzó la observación de la red de primer orden. Simultáneamente, el Deposito de la Guerra, creado en 1810, seguía desarrollando su trabajo cartográficos, convirtiéndose en 1939 en el actualmente conocido Servicio Geográfico del Ejército (Vázquez y Martín, 1987).

A continuación vamos a exponer de forma resumida algunos de los sistemas de referencia actuales y anteriores en España precisamente:

2.4.1. SISTEMAS DE REFERENCIA EUROPEAN DATUM 1950 (ED-50)

Es el sistema oficial utilizado en la Península Ibérica, archipiélago balear y las ciudades autónomas del norte de África (Ceuta y Melilla), para fines geodésicos y cartográficos desde 1950.

Según la legislación: « Se utilizara el sistema de referencia European Datum 1950 (ED-50) en coincidencia con el adoptado para las series cartográficas oficiales en sus diversas escalas a partir del Decreto 2303/1970, de 16 de Julio ». « Como sistema geodésico, se adoptará el denominado RE 50 (Red de Europa Occidental,

1950) definido por el Instituto Geográfico Nacional - organismo de la administración del estado responsable según ley 7/1986 de 24 de enero- a través de la Red Geodésica Nacional ».

Lo que conocemos como ED-50 (European Datum 1950), proviene de una compensación de redes geodésicas, que el *Servicio Cartográfico del Ejército (AMS o Army Map Service)* de los Estados Unidos de América realizó en tal época, con el propósito de tener una cartografía unificada de todos los países aliados después de la segunda guerra mundial, y que fue publicado en aquel año, razón por la cual se le denomina con este nombre al sistema de referencia y a su marco RE 50, aunque actualmente es el Marco de la Red de Orden Inferior (ROI). En el caso de este sistema, como elipsoide se adoptó el llamado Elipsoide Hayford de 1909, igualmente conocido como Internacional de Referencia de 1924, debido a que en ese año en una asamblea de la Internacional Association of Geodesy (IAG), realizado en la ciudad de Madrid, se adoptó para su uso en actuaciones cartográficas. De este modo se definió según los siguientes parámetros del Datum ED-50:

- ✓ El elipsoide de referencia es el internacional de Hayford de 1924:
 - Semieje mayor “a” o semieje ecuatorial de dimensión 6.378.388 metros.
 - Aplanamiento “f”: 1/297.
- ✓ El datum está situado en la ciudad alemana de Postdam (en la torre Helmert), con las siguientes coordenadas:
 - Latitud (φ_0): 52°21'51",45.
 - Longitud (λ_0): 13°03'58",74.
- ✓ Desviación de la vertical:
 - $\xi_0 = 3",36$.
 - $\eta_0 = 1",78$.
- ✓ Eje vertical paralelo al eje de giro de la Tierra.
- ✓ Excentricidad al cuadrado “e”: 0,006722670022.
- ✓ Orígenes de coordenadas geodésicas:

- Latitudes referidas al Ecuador y consideradas positivas al Norte del mismo.
- Longitudes referidas al meridiano de Greenwich y consideradas positivas al Este y negativas al Oeste de dicho meridiano.

Este sistema no es geocéntrico, se trata de un sistema geocéntrico local, cuya peculiaridad es que su elipsoide se adapta localmente a una zona del planeta, Europa en este caso, y los ejes X, Y, Z que lo definen no son paralelos al sistema WGS-84, el cual comentaremos más adelante. Las coordenadas geodésicas obtenidas a través de este sistema son transformadas a coordenadas planas mediante la proyección cartográfica U.T.M. (Universal Transversa de Mercator), proyección oficial y vigente en España.

De manera similar, como soporte dinámico, que sirviese de base para la definición del campo gravitatorio terrestre y como término de comparación para las medidas de gravedad, se eligió una superficie del campo de la gravedad normal, supuestamente dotada de simetría de rotación (elipsoide de revolución que fuera a la vez una superficie de nivel del potencial gravitatorio, elipsoide equipotencial), caracterizada por la fórmula internacional de la gravedad normal de Cassinis-Silva-Heiskanen en 1930 (Rodríguez y Cartula, 1999):

$$\gamma = 9,78094 * (1 + 0.0052884 * \text{sen}^2\phi - 0,0000059 * \text{sen}^22\phi) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad (2.55)$$

La orientación del datum se determinó mediante la medición de acimutes de gravedad normal la de Cassinis-Silva.

La exactitud continental de ED-50 oscila entre unos pocos metros en el centro de Europa y más de diez metros para el Sur de Europa, aunque su precisión relativa es mucho mayor y más que suficiente para los levantamientos cartográficos de pequeñas y medianas escalas. Por lo anterior, el SGE, en 1968, adoptó el Datum ED-50 para su nueva cartografía básica, levantada en proyección

Universal Transversa Mercator (UTM), y de manera similar, el IGC, en 1970, adoptó tanto el Datum ED-50 y la proyección UTM.

2.4.2. SISTEMAS DE REFERENCIA EUROPEAN DATUM 1987 (ED-87)

Desde su asamblea internacional de Roma, en 1954, la IAG creó una Subcomisión para el Reajuste de la Triangulación Europea, conocida como RETrig, integrada por todos los países de Europa Occidental, encargada de analizar la precisión y posibles errores de RE-50. En poco tiempo, se llegó a la detección de fuertes irregularidades en escala y orientación, tanto mayores cuanto más periféricos eran las redes nacionales, caso de la Península Ibérica. RETrig incorporó todo tipo de soluciones provisionales, conocidas como ED-77, ED-79 y ED-87, en ellas se observó la incorporación de más observaciones convencionales y la sustitución del punto principal POSTDAM por MUNICH (con coordenadas ED-50). En esta última solución, se incorporaron las primeras observaciones sobre satélites. En 1987 finalizó sus trabajos RETrig y quedó reemplazada por la Subcomisión EUREF, constituida por los mismos países (Cid y Ferrer, 1997).

Los sistemas ED-79 y ED-87, están referidos al mismo Elipsoide de Hayford, sin embargo toman como punto fundamental Munich, que son casi idénticas (Universidad de Munich, con coordenadas geográficas, $\varphi = 48^{\circ}08'22''.2273$ y $\lambda = 11^{\circ}34'26''.4862$). De esta manera, este sistema no ha pasado de ser de carácter científico, y por ende no se han llegado a confeccionar la cartografía oficial de ellos. Aun así, las coordenadas de la Red de Primer Orden han sufrido variaciones desde 1950 a 1987, ya que se han introducido nuevas observaciones efectuadas por el IGN (Instituto Geográfico Nacional) y que han dado una mayor consistencia y precisión al Sistema ED-87, entre ellas están, la inclusión de observaciones de VLBI sobre radiofuentes extragalácticas, SLR, medidas Doppler sobre la constelación NNSS y algunas pocas medidas con el GPS sobre la escasa constelación NAVSTAR experimental en la época, con esta última optimización se dio por finalizada el cometido de RETrig. También se puede observar la comparación de ambos

sistemas, sobre todo en la precisión, mientras en el sistema ED-50 la precisión es de 10 partes por millón (p.p.m.) en el sistema ED-87 alcanza precisiones de 1 p.p.m., asimismo este último mejoró la exactitud continental de ED-50 hasta el orden de unos 2 m.

2.4.3. WORLD GEODETIC SYSTEM (WGS-84)

A diferencia de los sistemas de referencia clásicos, el sistema de referencia World Geodetic System (WGS-84), es una solución geodésica obtenida desde varios grupos de datos terrestres y de satélites artificiales de la constelación Navstar, implicando láser y medidas Doppler. Conlleva un notable avance del WGS-72 anteriormente utilizado. De esta forma se conoce como el sistema más utilizado en las observaciones por medio de GPS a satélites artificiales, basados en el Elipsoide WGS-84, el cual viene definido por los siguientes parámetros:

- ✓ “a”: semieje ecuatorial o mayor, igual a 6.378.137,0 m.
- ✓ “b”: semieje polar o menor, igual a 6.356.752,3142 m.
- ✓ “f”: aplanamiento, igual a $1/298,257223563$.
- ✓ “e²”: excentricidad al cuadrado, igual a 0,00669437999013.

Y el sistema viene dado por las siguientes características:

- ✓ Es un sistema global de referencia geodésico geocéntrico, cuyo origen es coincidente (± 2 m) con el centro de masa de la Tierra, incluidos océanos y atmósfera.
- ✓ El eje X, es la intersección del meridiano de referencia y el plano del ecuador astronómico medio.
- ✓ El eje Z, de acuerdo al eje polar medio, paralelo a la dirección del Origen Convencional Internacional (CIO), tal como lo definió la Oficina Internacional de la Hora (BIH) para la época 1984.0.
- ✓ El eje Y, junto con los ejes X y Z es un sistema coordinado dextrógiro.

Las coordenadas rectangulares X, Y, Z referidas a este sistema son las utilizadas para todos los cálculos de posiciones. Para su transformación en coordenadas geodésicas ϕ , λ , h, se ha adoptado el Elipsoide WGS-84, cuyo centro coincide con el origen mencionado anteriormente, su semieje menor de rotación coincide con el eje Z y el semieje mayor se encuentra en el plano XY con magnitud definida como una de las cuatro constantes fundamentales del sistema. El marco e referencia original WGS-84 se realizó mediante una serie de coordenadas de 1591 estaciones obtenidas con observaciones Doppler sobre los satélites del sistema de navegación TRANSIT, lo que limitó la exactitud del marco de referencia WGS-84 al orden $\pm 1-2$ m (1σ) (Cunningham, 1987).

La precisión absoluta de este sistema es adecuado para escalas cartográficas medias y pequeñas, debido a que es del orden de un metro. No obstante, para estudios geodinámicos, y, trabajos topográficos y geodésicos no es la apropiada, ya que se demandan precisiones centimétricas. A todo lo anterior se deduce por qué en este sistema se labora en posicionamiento relativo. A pesar de esto, son muchos los países que lo establecen como sistema oficial, requiriendo la determinación de los parámetros de transformación entre el sistema antiguo y el sistema WGS-84. En el caso de España, conjuntamente con los 14 vértices geodésicos pertenecientes a la Red EUREF-89, se han realizado densificaciones a partir de estos vértices, estableciendo en primer lugar una Red denominada IBERIA con una densidad de un punto cada 200 Km. Últimamente se inició una nueva densificación de IBERIA en la Península, conocida como REGENTE, cuya densidad es de un vértice geodésico por cada hoja del M.T.N. 50.000.

2.4.4. EUROPEAN REFERENCE FRAME 1989 (EUREF-89)

Es el nuevo sistema de referencia europeo, de gran precisión, creado en la asamblea general de agosto de 1987, por la IAG y el Comité Europeo de Responsables de la Cartografía Oficial (CERCO). Ante la diversidad de datos

existentes en Europa y la consiguiente posibilidad de unificar de forma precisa la cartografía continental y dada la comprobada precisión de la metodología GPS. El objetivo fundamental de EUREF giro en torno a la elaboración de un nuevo Sistema de Referencia Terrestre para Europa, apoyándose para su consecución en:

- ✓ La presencia sobre Europa de una densa red de estaciones primarias pertenecientes a la red general del IERS.
- ✓ Una oferta especial hecha por lo Estados Unidos de emplear equipos móviles VLBI en 1989.
- ✓ La capacidad de varias agencias geodésicas europeas para realizar largas campañas de medidas y análisis de datos GPS con obtención de precisiones centimétricas en miles de kilómetros.

La primera actuación de la subcomisión EUREF (sucesora de RETrig desde 1987), acompañada de del Grupo de Trabajo VII (W VIII), fue la planificación de una importante campaña Europea GPS, conocida como EUREF-89, donde participaron durante dos semanas 82 estaciones GPS, varias de ellas colocadas en las estaciones VLBI (Very Long Baseline Interferometry o Interferometría de Grandes Bases) o SLR (Satellite Laser Ranging o Distanciometría Láser sobre Satélite). En Europa hay 8 estaciones fijas de SLR (en San Fernando) y 5 estaciones fijas de VLBI (en Robledo). En España se participó, en los trabajos de observación, análisis y precálculo (obtención de ficheros RINEX de la península), con 14 estaciones, de las cuales hay una de SLR y una de VLBI, a través del concurso del Instituto Geográfico Nacional (IGN), el Servicio Geográfico del Ejército (SGE) y el Real Observatorio de la Armada (ROA), las observaciones se realizaron sobre la escasa constelación de satélites NAVSTAR existente con la más moderna tecnología de aquella época, es decir, receptores TRIMBLE 4000 SLD (doble frecuencia, cuadratura de L2) en todas las estaciones peninsulares, con ocho de ellos. La red EUREF-89 se fundamenta en el sistema ITRS (International Terrestrial Reference System o Sistema Internacional de Referencia Terrestre) y así se definen las coordenadas de la red EUREF, que definen la ETRF (European Terrestrial

Reference Frame o Marco Europeo de Referencia Terrestre). Tras la compensación realizada manteniendo fijas las coordenadas SLR/VLBI de la lista ETRF-89 del IERS (International Earth Rotation Service), se logró conseguir una red Europea de alta precisión en el Sistema WGS-84, cuyas estaciones formaron a pasar parte del marco europeo (EUREF-89). No obstante, la subcomisión encontró que a escala global el WGS-84 no proporcionaba precisión suficiente para una red continental. Por lo anterior, recomendó la definición de un nuevo Sistema Geodésico de Referencia ETRS-89 o "European Terrestrial Reference System", definido por las coordenadas ITRF-89 (International Terrestrial Reference Frame o Marco Internacional de Referencia Terrestre) de 36 estaciones IERS localizadas en toda Europa. En este ETRF-89 se acepta una precisión para cada punto del orden de $\pm 15\text{mm}$. Además la subcomisión, determino usar para los cálculos el Elipsoide GRS-80 o "Geodetic Reference System 1980", dado que para usos prácticos es idéntico al elipsoide WGS-84, conjuntamente con el ITRF, cuyos parámetros son: $a = 6378137\text{ m}$, $f^{-1}=298,257222101$. Un último aspecto a mencionar, es el referente a los cálculos actuales que se realizan para optimizar los parámetros de transformación entre el ITRF y el ED-50, ED-87, WGS-84 y los nacionales, y a su vez de forma viceversa.

Resumiendo se puede decir que entre las finalidades perseguidas por la red EUREF-89, pueden destacarse:

- ✓ Constitución de un referencial básico para el establecimiento de redes geodésicas nacionales, homogéneas con las del resto de Europa, con características verdaderamente tridimensionales.
- ✓ Realización del cálculo de parámetros de transformación entre los sistemas geodésicos nacionales y ETRF-89/EUREF-89 y WGS-84, cuya utilización aumenta de modo sorprendente. (Cartula y Agria, 1996).

2.4.5. LA RED IBERIA 95

Durante la semana del 8 al 12 de mayo de 1995 se llevó a cabo la observación de la campaña IBERIA 95 preparada en colaboración directa entre el IGNE (Instituto Geográfico Nacional de España) y el Instituto Portugués de Cartografía e Cadastro (IPCC). El objetivo primordial de IBERIA 95 es la densificación en la península ibérica del "European Terrestrial Reference Frame" (ETRF-89) y la mejora de precisiones de la campaña EUREF-89 en España y Portugal, estableciendo así una red geodésica tridimensional de alta precisión, alguna de cuyas estaciones coincide con la campaña EUREF-89. La red está formada por 39 estaciones, de las cuales 27 son españolas y 12 portuguesas. El cálculo ha sido realizado utilizando el programa Bernese GPS software, Versión UNIX 4.0, resultando las coordenadas finales en el sistema de referencia ITRF-96 para la época 1995.4 y en el sistema de referencia ETRF-89. (<http://www.geo.ign.es/>).

En IBERIA 95 se apoyaran todos los cálculos del proyecto REGENTE, que en 1998, constituirá la Red Global de Primer Orden de España.

Como antecedente a este proyecto, los resultados finales de EUREF-89 no pueden calificarse de excelentes, debido a deficiencias, entre otras, como la escasa constelación, mala configuración geométrica orbital y elevado nivel de ruido en los receptores (en la frecuencia L2), por ende las estaciones situadas al oeste y sudoeste de Europa, en especial las de Portugal y España, quedaron establecidas con un grado de precisión ligeramente inferior al del resto de la red. Esta realidad ha quedado comprobada en diversas campañas GPS posteriores realizadas por ambos países, aisladamente y en conjunto (GEOBASE91, TANGO2, EUROGAUGE, MAGIES). En este sentido, la Subcomisión EUREF recomendó la densificación de ETRF por medio de observaciones GPS con modernos receptores y la adición en el cálculo de estaciones del IERF consideradas como beneficiarias. De aquí nació IBERIA 95, una red geodésica tridimensional de alta precisión, con

las recomendaciones de la Subcomisión EUREF, ligada a la red EUREF-89 y al ETRF-89, íntimamente enlazado con el ITRF. Para la elección de los vértices geodésicos a integrar en esta red se tuvieron en cuenta, algunos de los siguientes criterios:

- ✓ Mínima distancia entre los puntos adyacentes, compatible con el número de estaciones posibles.
- ✓ Monumentación estable y perdurable.
- ✓ Eliminación de errores de centrado mediante centrado forzado.
- ✓ Los vértices deben disponer de nivelación geométrica o encontrarse ubicados en lugares donde sea posible la atribución de altitud ortométrica de alta precisión. Esta altitud precisa deberá encontrarse disponible cuando finalicen los cálculos de IBERIA 95 a fin de utilizarla para el escalamiento del geoide.
- ✓ En las proximidades de la estación no deberán existir antenas emisoras que generen interferencias ni obstáculos que puedan producir trayectorias múltiples.
- ✓ Las estaciones deben ser fácilmente accesibles. (Cartula y Agria, 1996).

Teniendo en cuenta estas recomendaciones, IBERIA 95, quedo constituido por 27 estaciones en territorio Español y 12 en el lado Portugués. Las estaciones quedaron en manos de instituciones y empresas españolas, mientras las portuguesas por equipos y personal técnico de ellos.

Ahora bien, para las observaciones se tuvieron en cuenta una serie de normas, entre ellas:

- ✓ Simultaneidad de las observaciones en todas las estaciones durante 5 días consecutivos.

- ✓ En cada día se realizó una sesión de 12 horas, desde las 8:00 a las 20:00 UTC. Lamentablemente y por razones presupuestarias, no pudo extenderse el período de observación a 24 horas, como sería conveniente.
- ✓ Intervalo de registro de 30 segundos.
- ✓ Mascara de observación de 15°.
- ✓ En todas las estaciones, los receptores que se utilizaron fueron TRIMBLE 4000 SSE.
- ✓ En cada estación se procedió a la toma de datos meteorológicos (presión atmosférica, temperaturas seca y humedad) con una frecuencia horaria.
- ✓ Para cada estación, se cumplimentaron diariamente los estadillos (hojas de campo) redactados al efecto, en los que constan todos los datos relativos a la observación, tales como altura de antena, registros meteorológicos, horas de comienzo y final, incidencias, etc. (Cartula y Agria, 1996).

El procedimiento de cálculo se llevó a cabo simultáneamente entre el IGN y el IPCC, reuniéndose periódicamente para definir las estrategias a seguir para la discusión de los resultados preliminares y la adopción de la solución final. Cada país realizó el preprocesamiento de los datos respectivos a su jurisdicción, para posteriormente intercambiarlos con el otro, en formato RINEX. Acordaron utilizar el software Bernese, porque garantizaba la mayor precisión posible, y de esta forma facilitaba el tratamiento de las efemérides precisas. Y la solución final se acordó entre los dos países.

Una cuarta y definitiva solución ITRF-96, fue obtenida fijando las estaciones fiduciaras de Herstmonceaux, Madrid, Matera, Wettzell, Zimmerwald y San Fernando. Esta Solución designada como IBERIA 95, se presentó ante el Grupo técnico de trabajo de la Subcomisión para Europa de la IAG, quedando determinada oficialmente su calidad, en la Resolución primera del Simposium EUREF celebrado en Bad Neuenahr-Ahrweiler entre el 10 y el 13 de junio de 1998, en la siguiente forma: “la Subcomisión IAG para Europa (EUREF), reconociendo que en mayo de 1995 fue observada la campaña IBERIA 95 y que todos los

resultados fueron remitidos al Grupo Técnico de Trabajo EUREF, donde fueron aceptados como estándar clase B (alrededor de 1 cm en la época de observación), rubrica estos resultados como mejoras y extensiones de EUREF-89". (Rodríguez y Cartula, 1999).

Las coordenadas finales para IBERIA 95 mostraron una buena calidad si se tiene en cuenta las repetibilidades y la comparación con las estaciones de referencia o fiduciarias. La exactitud alcanzada para la solución final, como resultado de la combinación de las soluciones parciales para los cinco días, se estima alrededor de 1 cm en la época de observación. Los resultados de IBERIA 95 demostraron una elevada calidad de la solución, en el orden de 1 cm para la época de observación, por tanto se puede decir que la Península Ibérica cuenta con una Red Geodésica Tridimensional de Orden Cero, adecuadamente unificada con la Red Europea ETRF, que ha servido de soporte para otras redes tridimensionales de alta precisión como REGENTE. El archipiélago Balear no fue incluido en este proyecto, debido a la carencia de equipos GPS en esta época, por consiguiente este proyecto se llevaría a cabo en el mes de abril de 1998 y fue denominada como BALEAR 98, con los mismo equipos y aplicando la misma normativa de IBERIA 95.

2.4.6. EL PROYECTO REGENTE

Con el fin de establecer una cartografía Europea unificada, se hace indispensable la conversión de las coordenadas de los Marcos de los Sistemas Geodésicos Nacionales de marco ETRF-89, lo cual es posible a través de la determinación de los siete parámetros de transformación (tres traslaciones, tres rotaciones y un factor de escala) desde uno a otro marco. Tal determinación requiere el conocimiento de ambas clases de coordenadas en un número muy elevado de estaciones imperceptiblemente distribuidas, debiendo este número ser tanto mayor cuantas más irregularidades presente el marco local. En el caso de la Península y Archipiélagos, el IGN decidió resolver el problema, mediante el

proyecto REGENTE (Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales), consistente en el establecimiento de una densa red GPS de alta precisión con estaciones coincidentes con vértices de ROI y con clavos de las líneas NAP. La densidad media quedó fijada en una estación por hoja del MTN escala 1:50000, es decir, de una estación por cada 300 Km². Este proyecto quedara perfectamente enlazado con la red de referencia Europea ETRF-89 al ser los puntos de la red IBERIA 95 y BALEAR 98 puntos de REGENTE. En Canarias, REGENTE se apoya, como estación de referencia, en la estación VLBI de Maspalomas incluida en la red IGS. La idea de REGENTE emerge para alcanzar los siguientes objetivos (Barandillo y Quiros, 1996):

- ✓ Materialización, observación y cálculo de coordenadas para toda España de una red geodésica básica tridimensional de primer orden, con precisión absoluta, fijada previamente para cada coordenada mejor ó igual que 5 cm.
- ✓ Obtención de parámetros precisos de transformación entre el sistema de referencia de la Red Geodésica Nacional, ED-50, y el de REGENTE, ETRF-89.
- ✓ Facilitar datos válidos para la depuración del geoide español de precisión centimétrica. Se apoya el proyecto REGENTE con observaciones gravimétricas, por el método de relativas con gravímetros Lacoste-Romberg, en cada uno de sus puntos.
- ✓ Facilitar el acrecentado número de usuarios de la técnica GPS, de modo que un punto cualquiera del territorio nacional, se encuentre dentro de un círculo de radio máximo de 15 Km con centro en un vértice REGENTE.
- ✓ Servir como marco de referencia a redes locales empleadas para controles geodinámicos o geofísicos en relación con movimientos relativos de fallas y placas tectónicas.

La estructura de REGENTE quedará constituida por aproximadamente 1078 vértices en la Península y Baleares, uno por cada hoja del Mapa Topográfico Nacional (MTN) 1:50000, lo que supone una distancia que variaba de 20 a 25 Km

entre los vértices del proyecto. Los vértices de este proyecto han de cumplir las siguientes condiciones (Barandillo y Quiros, 1996):

- ✓ Pertener a la Red Geodésica Nacional o ser una estación VLBI o SLR.
- ✓ Reunir características comunes a una estación GPS como pueden ser el fácil acceso con vehículos, horizonte despejado por encima de 10° y alejamiento de elementos que pueden causar mutitrayectorias o interferencias, entre otros.
- ✓ Dado que REGENTE constituye una red Geodésica tridimensional con altitudes observadas elipsoidales referidas a WGS-84 y que deben quedar correctamente ligada a la Red Geodésica Nacional ED-50, cuyas altitudes están referidas al nivel del mar, se ha determinado que más de un 10% de los vértices estén dotados de altitud ortométrica, con precisión subcentimétrica, mediante el correspondiente enlace con la Red de Nivelación de Alta Precisión (NAP).
- ✓ Siempre que se reúnan las características necesarias a una estación GPS, serán incluidos en REGENTE los puntos Laplace y las estaciones astronómicas de segundo orden pertenecientes a la Red Geodésica Nacional ED-50.
- ✓ Debido a que la red de apoyo para REGENTE es la red IBERIA 95 con su ampliación BALEAR 98, cada uno de los vértices de esta red pertenece a REGENTE.

El método utilizado en la observación de REGENTE es el estático, observándose simultáneamente bloques de nueve vértices, con nueve receptores de doble frecuencia con correlación cruzada de código P cuando éste está encriptado, constituyendo de esta manera, polígonos adosados con tres estaciones comunes, de manera que cada uno de estas estaciones se observa en dos bloques diferentes en distinta época. Previamente se han seleccionado en gabinete los vértices que van a componer los bloques de REGENTE, atendiendo a los criterios

anteriormente enunciados. Muy importante es la atención a la proximidad de al menos un vértice por bloque a una línea de Nivelación de Alta Precisión (NAP).

En un reconocimiento en campo se comprueba que los vértices cumplen las condiciones necesarias para una buena observación. Una vez seleccionado el vértice de manera definitiva, se procede a la instalación, en la cara superior del pilar de observación del vértice, de un dispositivo de centrado forzada estándar para la basada soporte de la antena del receptor de forma que se elimine prácticamente el error de estacionamiento de la antena en las sucesivas sesiones de observación y en su caso, en los diferentes bloques en que ocupará el vértice en lamisca o en futuras campañas. La observación de cada bloque se realiza en dos sesiones diferentes, de tres horas de duración cada una, imponiendo que una de las dos sesiones sea matutina y la otra vespertina, para obtener en cada una, geometrías de constelación distintas que garanticen una repetibilidad de los datos. Una semana normal de cinco días incluye la observación de tres bloques completos, con un total de seis sesiones de observación. Al principio, al final y durante la sesión, se toman datos de presión y temperatura, así como información sobre la constelación en vista e incidencias producidas, con el fin de ayudar en el cálculo posterior. La programación de las observaciones se introduce semanalmente en los receptores, y también semanalmente, se recogen los datos observados para su pre-análisis y la documentación aneja a la observación.

En el desarrollo de los trabajos de campo de REGENTE, que comenzaron en el año de 1994, debían en principio finalizar en 1997. Por ello se dividió el conjunto del proyecto en cuatro campañas anuales aproximadamente iguales cada una en número de vértices y valoración económica. La campaña de 1994 abarcó lo que se denomina REGENTE centro, y comprende toda la zona central, 143 hojas, y REGENTE Canarias, 92 estaciones, 66 principales y 26 auxiliares, lo que permitió augurar una finalización del proyecto en un plazo de unos cinco años. Pero ya en 1995, los presupuestos se recortaron de forma importante, por lo que la observación se redujo a 159 hojas con un total de 182 estaciones GPS. En 1996, la

reducción presupuestaria fue más drástica, limitándose la observación a 65 nuevas hojas con un total de 88 estaciones GPS, 16 de ellas en Francia para el enlace con la Réseau Géodésique Français, RGF, equivalente en aquel país de REGENTE. En 1997, el recorte económico fue total, por lo que no se llevó a cabo observación alguna de RGG. En 1998 se volvió a retomar el proyecto observándose 218 hojas con 234 estaciones GPS en la península y las Islas Baleares, con 15 vértices observados. El año 1999, se observaron 218 hojas con 20 estaciones GPS. En el año 2000, se llevó a cabo la observación de 171 hojas con un total de 209 estaciones GPS.

La conclusión de REGENTE influye de forma muy importante en dos trabajos de gran interés:

- ✓ La determinación precisa de un escalado del geoide gravimétrico peninsular (Sevilla et al).
- ✓ La determinación de los parámetros de transformación y superficies de interpolación entre los marcos ETRF-89 y ROI ED-50 más adecuados para diversas zonas de la Península e Islas Baleares.

2.4.7. SISTEMAS DE REFERENCIA GPS

El sistema GPS (Global Positioning System ó Sistema de Posicionamiento Global), está basado en la utilización de los satélites artificiales de la constelación NAVSTAR, estos satélites se mueven alrededor de la tierra siguiendo una órbita Kepleriana. Su altitud es de unos 20.000 km y usualmente tiene 24 satélites funcionando en órbita, de modo que se garantiza un mínimo de 4 de ellos sobre el horizonte de cualquier punto de la tierra, los necesarios para obtener las coordenadas (X, Y, Z, t) de un punto P sobre la superficie terrestre.

2.4.7.1. Órbitas

Como se sabe, los satélites siguen en su órbita un movimiento kepleriano¹, para solucionar el posicionamiento de un cuerpo sobre su órbita hacen falta seis parámetros que definen una órbita ideal y el satélite en ella. De esta manera, para establecer la posición del satélite en su órbita emplearemos los seis parámetros, conocidos como *parámetros keplerianos*, por consiguiente, dos parámetros se fija en el espacio el plano orbital respecto al ecuatorial. Rigurosamente es un plano que se localiza en el centro de la tierra de acuerdo a la primera ley de kepler², y estos primeros son:

1. *Angulo geocéntrico (Ω)*. El cual da la orientación que hay entre la dirección del punto vernal y la dirección al punto en que la órbita corta al plano ecuatorial cuando el satélite pasa del hemisferio sur al norte, conocido como nodo ascendente³. También se le denomina ascensión recta del nodo ascendente.
2. *Inclinación (i)*. Fija el ángulo del diedro formado por el Ecuador y el plano orbital visto desde el nodo ascendente, por lo que puede variar entre 0° y 180°.

Los parámetros anteriores, dan la orientación del plano orbital en el espacio. Sobre el plano así establecido se sitúa la elipse de la órbita. Y según de la segunda ley de kepler, el centro de gravedad de la tierra ocupa un foco. Con tres adicionales se obtiene su orientación y dimensiones:

3. *Ángulo (ω)*. Es el ángulo que da la orientación de la elipse entre el nodo ascendente y el perigeo⁴, conocido como argumento del perigeo. Cabe aclarar que no se da en órbitas rigurosamente circulares.
4. y 5. Las dimensiones de la elipse se hallan con el semieje mayor “a” (o radio en órbitas circulares) y la excentricidad “e” (1 en órbitas circulares).

¹ *Johannes Kepler* (1571-1630) derivó las tres leyes del movimiento planetario por medio de observaciones astronómicas publicadas en el *Tycho de Brahe* (1546-1601). El *movimiento Kepleriano* da una descripción geométrica de las ecuaciones de movimiento para un movimiento central imperturbable.

² La órbita es una elipse contenida en un plano; uno de sus focos coincide con el centro de masas.

³ Línea nodal sería la intersección entre los planos ecuatorial y orbital.

⁴ Punto en el que el satélite está más cerca de la tierra.

En este momento está definida la órbita elíptica en el espacio, ahora la velocidad instantánea del satélite es determinada por la segunda⁵ ley de Kepler. Así de esta manera obtenemos el sexto parámetro:

6. este parámetro se refiere al momento t_0 o v , del paso del satélite por el perigeo o por el nodo ascendente, el cual nos fija el satélite en un punto concreto de la órbita en un momento dado.

Además de estos seis parámetros ideales, hay que adicionar una serie de perturbaciones, para predecir la posición instantánea real del satélite, debido a que alteran su trayectoria, y estos son:

- *Fricción atmosférica.* Este fenómeno afecta directamente a los satélites a una distancia menor a los 1000 km., puesto que a esa altitud hay moléculas que perjudican la órbita.
- *Presión de la radiación.* Es directamente proporcional a la sección del satélite afectada por la radiación, e inversamente proporcional a su masa, producto de la diferencia entre la cantidad de radiación incidente y la reflejada. Entre estas fuentes de radiación encontramos la solar directa, la solar reflejada por la tierra y su atmósfera, y obviamente la térmica expuesta por la tierra y su atmósfera.
- *Anomalías gravitacionales.* Son originadas por irregularidades y variaciones del campo gravitatorio terrestre, y, por el efecto de terceros cuerpos, como son la luna, el sol, y casi sin importancia los demás cuerpos celestes.

Todo lo anterior ayuda a establecer la posición de un satélite con gran precisión, sin embargo las efemérides no pueden limitarse a las keplerianas. Las efemérides, que usualmente son radiodifundidas por el propio satélite a sus respectivos usuarios, se actualiza determinado período de tiempo. Obviamente si se actualizarán frecuentemente bastaría con las keplerianas.

⁵ El cuadrado del período es proporcional al cubo del semieje mayor.

En el caso del GPS, él utiliza otros tres parámetros adicionales a los anteriores, como son: razón del cambio en la ascensión recta, razón del cambio de la inclinación, la diferencia del movimiento medio. Esta transmisión se hace dos veces al día, pero en cuatro grupos sucesivamente válidos para cuatro horas, es decir, las efemérides radiodifundidas cambian seis veces al día. Es importante resaltar que el período de actualización ha tenido y tiene numerosos cambios y no puede considerarse como permanente. De esta manera, para poder ponderar la precisión del satélite, es indispensable conocer el tiempo transcurrido (age data) desde la última actualización de efemérides hasta el momento en que sea necesario extrapolar su situación. Las efemérides transmitidas por los satélites permiten establecer su posición en su órbita alrededor de la tierra en un sistema de referencia inercial. El sistema de referencia inercial empleado por el GPS fue definido en 1984, por la IAG (Asociación Internacional de Geodesia) y la IUA (Unión de Astronomía Internacional), así pues, su plano ecuatorial y su equinoccio son los correspondientes a la época 12 horas (Tiempo Dinámico Baricéntrico) del día 1 de enero de 2000, de fecha juliana 2.451.545.0.

2.4.7.2. Coordenadas en el plano orbital

Ahora determinaremos las coordenadas del satélite en su plano orbital en el caso ideal anteriormente descrito. Para esto, consideremos el plano de la órbita del satélite y su órbita, o sea, la elipse, y sobre ella, un sistema cartesiano (x, y) cuyo origen es el geocentro, el eje "x" pasa por el nodo y el eje "y" es perpendicular a él:

PLANO ORBITAL

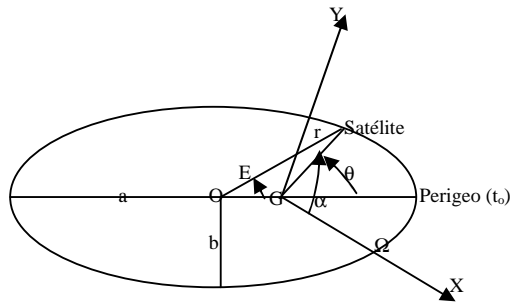


Figura 2.8. Coordenadas del satélite con respecto al plano orbital

Calculamos las coordenadas (x, y) del satélite bajo este sistema de referencia del plano orbital:

$$x = a (\cos E - e)$$

$$y = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

o lo mismo que:

$$x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, \text{ donde } \begin{cases} \alpha = \text{arg umento de latitud} \\ E = \text{anomalía excentrica} \end{cases}$$

2.4.7.3. Coordenadas en sistema rectangular instantáneo

Es el resultado de pasar de un sistema bidimensional (plano orbital) a un sistema tridimensional instantáneo, conocido como Sistema Rectangular Instantáneo. El cual viene dado por un origen (o geocentro), plano fundamental o Ecuador Instantáneo, el eje X o intersección del plano fundamental y el meridiano de Greenwich, el eje Y perpendicular al plano X Z, y, el eje Z de acuerdo al polo instantáneo.

2.4.7.4. Sistema WGS-84

Las coordenadas de los satélites obtenidas anteriormente están referidas a un sistema de referencia convencional celeste, ahora pasaremos de este sistema a un sistema de referencia convencional terrestre, esto es, unas coordenadas de los puntos de la superficie terrestre bajo un sistema de referencia terrestre, mejor dicho al sistema WGS-84. Las coordenadas (X, Y, Z) definidas en el sistema de referencia rectangular instantáneo están relacionadas con las coordenadas del plano orbital (x, y), a través de dos giros, uno con respecto al eje X de un valor “-i” (inclinación del plano orbital) que conlleva al plano orbital a coincidir con el plano ecuatorial, y otro respecto al eje Z de un valor “-λ”, el cual hace coincidir los ejes x e y con los ejes del sistema rectangular instantáneo. Por consiguiente se expresa de la siguiente manera:

$$(X \ Y \ Z) = (x \ y \ 0) \begin{pmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda & 0 \\ -\text{cos}i \ \text{sen}\lambda & \text{cos}i \ \cos\lambda & \text{sen}i \\ \text{sen}i \ \text{sen}\lambda & \text{sen}i \ \cos\lambda & \text{cos}i \end{pmatrix}$$

Como se ha mencionado anteriormente el sistema WGS-84 es un sistema de referencia construido a partir de distintos datos u observaciones como lo son: desviaciones de la vertical, anomalías de la gravedad, observaciones láser a satélites SLR, observaciones VLBI, observaciones a satélites TRANSIT por técnicas Doppler, etc. Ahora bien para pasar del sistema de coordenadas rectangular instantáneo al sistema terrestre WGS-84, debe conocerse el tiempo Siderio, nutación y precesión astronómica y la variación del polo instantáneo respecto al polo medio. Acerca de los valores de la variación del polo instantáneo respecto al polo medio vienen publicados por el BIH⁶ y se dan a través de sus componentes x_p y y_p en segundos de arco. De esta manera, para pasar al sistema WGS-84 se deben realizar dos giros, uno con respecto al eje X de un valor “- y_p ” y otro con respecto

⁶ Boletín Internacional de la Hora.

al eje Y de un valor “ $-x_p$ ”, con estos dos giros pasamos del sistema rectangular instantáneo al sistema terrestre WGS-84. Y así su expresión es de la forma:

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & -\text{sen} y_p \\ 0 & \text{sen} y_p & \cos y_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x_p & 0 & \text{sen} x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} x_p & 0 & \cos x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Donde X_c, Y_c, Z_c , son coordenadas con respecto al sistema WGS-84. De esta manera hemos pasado de coordenadas con respecto al plano orbital (sistema de referencia convencional celeste) a coordenadas de los satélites con respecto a un sistema terrestre como lo es el sistema WGS-84. Este sería el sistema de referencia GPS, puesto que directamente me proporciona la técnica GPS son coordenadas bajo el sistema WGS-84.

2.4.7.5. Sistema rectangular local (Sistema ED-50)

Comúnmente se trabaja bajo el sistema de referencia oficial y vigente en el país, en este caso en España es el Sistema ED-50, y no directamente con las coordenadas WGS-84. Por tanto, el paso definitivo sería pasar del sistema WGS-84 al sistema rectangular local, sistema ED-50. Para este fin, es necesario calcular los parámetros de transformación entre los sistemas de referencia WGS-84 y ED-50. Este procedimiento ya se explicó con anterioridad, ahora bien, ya realizada la transformación mediante los parámetros calculados tendríamos coordenadas $(X, Y, Z)_{ED-50}$ bajo el sistema ED-50, que pasaríamos a coordenadas geodésicas por medio de las ecuaciones ya conocidas:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \text{sen} \lambda \\ Z &= (N (1 - e^2) + h) \text{sen} \varphi \end{aligned}$$

De esta forma lograríamos coordenadas $(\varphi, \lambda, h)_{ED-50}$. No obstante, h es la altura elipsoidal, respecto al elipsoide de Hayford, y a nosotros nos interesa H o altura ortométrica, o altura respecto al geoide. Así pues, para pasar de alturas elipsoidales a ortométricas es necesario conocer la *Ondulación del Geoide "N"*, o sea la distancia entre el elipsoide de referencia y la superficie del geoide medida a lo largo de la normal al elipsoide, y se expresa de la siguiente manera:

$$h = H + N$$

Una vez determinado N_{ED-50} , podríamos hallar H y así obtendríamos coordenadas geodésicas $(\varphi, \lambda, h)_{ED-50}$, y alturas ortométricas que son generalmente las mas utilizadas. A pesar de esto, no siempre se utilizan las coordenadas geodésicas para fines topográficos, sino que se aplica una proyección matemática para pasar a coordenadas planas. La proyección utilizada en España es la Universal Transversa de Mercator (U.T.M.), con la que hallaríamos las coordenadas U.T.M. y la altura ortométrica (x, y, H) , y que son habitualmente usadas en la gran mayoría de trabajos topográficos.

3. REDES GEODÉSICAS

3.1. GENERALIDADES

3.1.1. CONCEPTO Y TIPOS DE REDES

La finalidad de los levantamientos geodésicos está en la determinación de redes de control para posicionamiento, altitud y gravedad (Torge, 1983). La disposición o el establecimiento de una red de puntos de control son indispensables siempre que se vaya a realizar el levantamiento de grandes áreas de superficie terrestre. Estos puntos de control son especialmente construidos o son definidos por puntos ya existentes, por ejemplo, torres de iglesias como referencia del acimut. Las posiciones de estos puntos de control son dadas por sus coordenadas en relación a un sistema de referencia, definido con los debidos cuidados (Segantine, 1995).

Las redes geodésicas y gravimétricas constan de puntos de control monumentados que suministran vértices de referencia para el posicionamiento y la determinación del campo de gravedad en todas las escalas. Las redes globales permiten la elaboración de los sistemas de referencia definidos por las convenciones internacionales, mientras que las redes regionales son fundamentales para la topografía regional y gravimétrica, ya sea nacional o continental, las cuales son la base para los sistemas de georeferenciación y las series de mapas. También, mencionamos las redes locales que son comúnmente establecidas para proyectos de ingeniería o de exploración, y, de investigaciones geodinámicas. El establecimiento de *redes geodésicas* es uno de los objetivos principales que se persiguen con la Geodesia, pues en ellas se basarán una gran

cantidad de estudios y trabajos posteriores. Por tanto, una red geodésica es un conjunto de puntos o vértices perfectamente localizados en el terreno y materializados mediante monumentaciones adecuadas, entre los que se han efectuado observaciones de tipo geodésico, con el fin esencial de obtener las coordenadas de los puntos monumentados las cuales posiblemente fueron deducidas de observaciones terrestres por procesos de triangulación, trilateración o poligonización, su precisión y fiabilidad en términos relativos y absolutos, respecto de un sistema de referencia establecido con anticipación. En términos generales, una red geodésica está compuesta por una serie de triángulos son unidos entre sí por visuales y observaciones que los enlazan mutuamente. Para determinar las coordenadas de los vértices geodésicos se parte de las del punto astronómico fundamental, que se determina por métodos astronómicos. Posteriormente, se irán determinando el resto de puntos mediante visuales que formen una malla triangulada. Es necesario medir, con la máxima precisión, los tres ángulos de cada triángulo (triangulación), además de una línea determinada por dos vértices que suelen tomarse hacia el centro del país, denominándose base, la cual es la base de toda la red geodésica. A partir de la base, que constituyen el lado de uno de los triángulos y de la medición de los ángulos, se van determinando el resto de coordenadas, teniendo en cuenta que estos triángulos están sobre el elipsoide y sus lados serán líneas geodésicas y apoyándose unos triángulos sobre otros. También es necesario conocer la orientación, la cual se obtiene en cada punto geodésico, la dirección norte-sur, que es la intersección del plano horizontal, tangente a l elipsoide en este punto y el plano del meridiano que pasa por el mismo punto, conocida como *meridiana*. Y el ángulo que forma la meridiana con una dirección determinada del terreno se conoce como *acimut* en esta dirección. La elección del emplazamiento de los vértices de la red depende de las dimensiones que se quieran dar a los triángulos y a las condiciones del terreno. Una de las condiciones fundamentales de los vértices es su facilidad para observar a los demás vértices con los que de una u otra forma se entrelaza. La clasificación de las diferentes tipos de redes es complicado por varios factores, entre ellos podemos mencionar: la extensión del territorio a observar, técnicas o métodos de

observación, propósito de la red, etc. Inicialmente mencionamos dos tipos de redes:

- *Redes planimétricas.* Son redes continuas trazadas a lo largo de meridianos y paralelos cubriendo de manera uniforme toda una región más o menos extensa, con la finalidad de establecer las coordenadas geodésicas latitud y longitud. Un ejemplo claro de este tipo de red son las redes de primer orden o fundamentales, cuya función es cubrir grandes extensiones de terreno y generalmente definen el marco geométrico de varios países.

Los puntos de control de las redes planimétricas o de control horizontal se denominan puntos trigonométricos (VT's). Los puntos de primer orden o puntos de triangulación primaria están separados unos de otros de 30 a 60 km (Torge, 1983).

- *Redes altimétricas.* Las redes altimétricas o verticales, corresponden a un conjunto de estaciones terrestres para cada una de las cuales se determina con precisión su altitud ortométrica (H) (Castañeda, 1986). El motivo de disyunción entre las redes horizontales y verticales es eminentemente histórico, pues en el pasado, era más ventajoso, tanto en el aspecto operacional, como en el económico, separar las operaciones altimétricas de las planimétricas. Así de esta manera, las redes altimétricas son hechas para determinar la tercera coordenada H, cabe señalar que es la altura sobre la superficie del geoide o nivel medio del mar. Son redes de nivelación geométrica de alta precisión de primer orden, totalmente diferentes a las anteriores, tanto por su ubicación, métodos de observación y señalización.
- *Redes tridimensionales.* En donde las dos redes anteriormente señaladas se determinan de forma conjunta.

Para la clasificación de una red geodésica, se puede decir que esta formada por una serie de puntos o vértices adecuadamente elegidos, sobre la cual se ha de realizar una triangulación y una series de observaciones geodésicas. Como soporte científico, se presenta la geometría computacional como herramienta para el diseño y proyecto de la red geodésica, ya que nos proporciona algoritmos con soluciones precisas y se pueden manejar un amplio volumen de información. Como primer paso en un proyecto de red geodésica, se tiene en cuenta los problemas que nos pueden producir la proximidad entre los vértices y su ubicación, y para todo esto la geometría computacional nos da el respaldo necesario para solucionarlo de la siguiente manera: dado un conjunto de puntos, podemos localizar las regiones más próximas a uno de ellos con respecto a los demás, mediante el diagrama de Voronoi⁷. Este caso comúnmente se presenta en el tratamiento de vértices geodésicos en un área determinada o en el enganche de nuevos vértices a una red ya establecida⁸.

Las redes de carácter fundamental son insuficientes para los propósitos de algunas actividades geodésicas, como la cartografía, lo que conduce a una densificación de las mismas, de manera especial la red planimétrica. Asimismo para evitar en la medida de lo posible la lógica acumulación de errores que supone el cálculo de unos triángulos apoyados en los anteriores, se establecen redes geodésicas de distinta precisión u orden. Estas densificaciones se pueden señalar resumidamente en:

- *Redes de segundo orden.* La distancia entre vértices varía entre los 10 y 30 kilómetros y se basa en la de primer orden.
- *Redes de tercer orden.* La distancia entre vértices varía entre los 5 y 10 kilómetros, y se apoya en la de segundo orden.

⁷ Definición: Dados $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ conjunto de puntos del plano se llama región de Voronoi de p_i al conjunto de puntos (lugar geométrico) más cercanos a él que a cualquier otro punto de P . El conjunto de estas regiones constituye el *Diagrama de Voronoi* (López González, 1998).

⁸ Densificación de una red.

- *Redes de cuarto orden.* La distancia entre vértices varía entre los 3 y 4 kilómetros. Sin embargo puede llegar a 1 kilómetro, sujeto a las condiciones del terreno y a los alcances que se pretenda por parte de los usuarios.

Los triángulos de primer y segundo orden son elipsóidicos, esto es, se calculan sobre el elipsoide, ya que con estas dimensiones no puede prescindirse de la esfericidad terrestre. Los triángulos de tercer orden se calculan como planos.

Asimismo existe la red EUREF o de orden cero, cuya distancia entre vértices oscila entre los 200 y 300 kilómetros. Recordemos que, la red española está formada por vértices EUREF, Red de Primer Orden y Redes de Ordenes inferiores. Este tipo de redes geodésicas son de vital importancia, ya que todos los levantamientos topográficos deben estar referidos a ellas, tanto en posicionamiento absoluto, como en escala y orientación. Igualmente, señalamos otros tipos de redes que son utilizadas en labores de carácter local, entre ellas:

- Redes de base para apoyos fotogramétricos.
- Redes de alta precisión para control de deformaciones de la corteza terrestre, de grandes obras de ingeniería, edificios, etc.
- Redes de controles constituidos por bases de replanteo para proyectos de ingeniería lineales y de largo recorrido, como carreteras, ferrocarriles, canalizaciones, etc.
- Redes topométricas de acercamiento urbano, y urbanas para levantamientos topográficos, en trabajos cartográficos, catastrales, entre otras.
- Redes locales de alta precisión para usos de ingeniería, como lo son: el replanteo de grandes túneles, puentes, presas, enlace de autopistas, construcción de aceleradores de partículas, centrales nucleares, entre otras.

Al mismo tiempo, los métodos de observación de las redes geodésicas han ido cambiando a lo largo de la historia, y un ejemplo claro de ello son las tres operaciones que se empleaban en una red geodésica de primer orden en la década

de los cincuenta, hasta los métodos de posicionamiento estático GPS mediante satélites artificiales, pasando por mediciones de distancias usando distanciómetría infrarroja, por medio de telurómetros, entre otros.

El modelamiento de los parámetros geodésicos está fundamentado en observaciones tomadas sobre la superficie terrestre y desde su espacio exterior. Se cuentan con diferentes métodos de medición, geometría disponible o cantidades físicas. Los métodos geométricos se basan principalmente en las ondas electromagnéticas y estos a su vez están influenciados por la refracción atmosférica. Los métodos de medición se puede dividir en:

- Observaciones empleando satélites artificiales como objetivos (incluyendo la luna) o sensores: observaciones satelitales.
- Observaciones para establecer estrellas y fuentes de carácter extra galáctico: astronomía geodésica.
- Gravedad terrestre y mediciones del gradiente de la gravedad: gravimetría.
- Determinación de las diferentes coordenadas entre puntos sobre la superficie de la tierra: mediciones geodésicas terrestres.

Los métodos de medición dependen de la tecnología disponible, donde la electrónica gobierna la toma de datos y el procesamiento en línea de los mismos. (Kahmen 1978 y Schlemmer 1996). Las técnicas satelitales dominan hoy en día la topografía global y regional, mientras que los métodos terrestres son usados para la interpolación en el espacio y el tiempo. Los límites de la precisión son controlados por la calibración de errores y la eliminación o reducción de las influencias disturbadoras como lo son la temperatura, presión atmosférica, variación del campo magnético, microsismicidad, refracción atmosférica, e inestabilidades locales. Así de esta manera, la precisión inherente de una respectiva técnica puede dificultarse ya sea por uno, dos o más factores.

3.1.1.1. Redes Geodésicas Clásicas

El establecimiento de una red geodésica clásica, posicionamiento respectivamente, se coloca separadas las rede horizontales y verticales una de la otra. En este sentido, el espacio tridimensional es separado en un espacio horizontal bidimensional y un espacio vertical unidimensional. Se selecciona un elipsoide de referencia como base para el control horizontal en un espacio horizontal y se adopta un geoide como una referencia para el control vertical. Esta separación de las redes geodésicas se hizo debido a la visibilidad humana de las alturas y de lo plano, por lo cual ambos aspectos son automáticamente percibidos por ser de diferente naturaleza. Otra razón es el hecho de que las alturas sean determinadas con más precisión que las coordenadas horizontales y que exista el problema sin resolver de un modelamiento combinado para producir posiciones tridimensionales. La nivelación de precisión se calcula de $\pm k_{mm} \cdot \sqrt{s_{km}}$ donde s es la distancia en kilómetros y k es una constante (normalmente 0,2 mm) para labores geodésicas. La precisión horizontal en posición es afectada por muchos factores entre otros, como son: la refracción atmosférica, errores del teodolito y errores en la distancia medida. Los efectos de la refracción vertical son particularmente grandes en áreas de diferencias de alturas extremas y de una vasta extensión. De lo anterior, las alturas en posiciones tridimensionales deben obtenerse desde ángulos verticales, su precisión es limitada por efectos irregulares de la refracción. Por otro lado los efectos de la refracción lateral son comúnmente menores para que la información planimétrica obtenida a través de las observaciones sea aun de una precisión valorada. La nivelación dada combinada con la gravedad medida a lo largo de la línea niveladora sirve como los medios principales del control vertical mientras la triangulación y la posterior trilateración o una combinación de los dos proporcionan los medios principales del control horizontal. Las redes de gravedad también se determinan como redes unidimensionales. Los medios de observaciones son las medidas del gravímetro relativo y las medidas de gravedad absoluta, que usan el péndulo o el levantamiento y el método de la reducción. La aproximación clásica en posicionamiento geodésico es selectiva como recordar el

tipo de observación a utilizar. Los modelos clásicos son limitados a un tipo particular de datos que ignoran inmensos y pertinentes datos geodésicos incluyendo datos físicos que se han adquirido en años anteriores. Los instrumentos de medición y las observables reaccionan diferentemente a las condiciones inherentes de la gravedad y la atmósfera así de esta manera requiere de otros modelos para filtrar aquellos efectos. Las condiciones de medición y la influencia de la atmósfera y el campo de gravedad no son estáticos. Las mediciones repetidas en instantes diferentes del tiempo pueden diferir debido al cambio de la naturaleza de estos efectos, ellos requieren modelos separados para predecir la forma de la red con respecto al tiempo. La dependencia de las observaciones sobre el campo de gravedad es considerada por los modelos periféricos a través de las reducciones de las observaciones. Sin embargo, mientras este procedimiento es sencillo en la aplicación, la ventaja de la común dependencia de las observaciones sobre el campo de gravedad es ignorada y la concepción de un espacio tridimensional está perdida (Musyoka, 1999).

3.1.2. INSTRUMENTOS EMPLEADOS EN LAS OBSERVACIONES DE LAS REDES GEODÉSICAS

Las mediciones geodésicas terrestres son llevadas a cabo observando directamente cantidades geométricas entre puntos de la superficie terrestre. La mayoría de las observaciones están referidas al campo de gravedad de la tierra a través de la orientación en los sistemas astronómicos locales. La medida de los ángulos horizontales y cenitales, y la distancia permiten determinar posiciones relativas, donde habitualmente se combinan con otros instrumentos como las estaciones totales. La precisión en las diferencias de alturas es obra de la nivelación. Las mediciones de la tensión y la inclinación sirven para detectar cambios locales en el tiempo de distancias e inclinaciones.

Debido a la gran precisión y economía que representa la medición basada en los técnicas satelitales, las mediciones geodésicas terrestres son usadas

principalmente para la interpolación de los resultados derivados de las mediciones satelitales o en áreas donde los métodos satelitales fallan o necesitan de soporte terrestre. Por ejemplo, posicionamiento subterráneo o subacuático, bosques, áreas urbanas, topografía aplicada a la ingeniería, geodinámica local).

3.1.2.1. Instrumentos de medidas angulares

El instrumento representativo es el teodolito, ha sido y sigue utilizándose para las observaciones astronómicas como para las observaciones angulares acimutales y cenitales. Los principales componentes de este instrumento son un círculo horizontal y uno vertical con graduación, un telescopio capaz de rotar sobre los ejes horizontales y verticales, y un mecanismo para leer los círculos. Para orientar el teodolito con respecto a la dirección de la línea de la plomada, está equipado con niveles de energía o electrónicos. Recordando la lectura de la graduación del círculo, distinguimos entre teodolito óptico y electrónico o digital.

Hoy en día, los ángulos horizontales son medidos únicamente sobre distancias máximas de unos pocos kilómetros para densificar topografías o para redes locales. Los teodolitos electrónicos son los utilizados para este fin y tienen superpuestos los instrumentos ópticos analógicos. Comúnmente, este aparato se acompaña de un distanciómetro para producir una estación total.

Los errores accidentales que se pueden cometer, por ejemplo dirección, lectura, verticalidad y puntería, que se pueden efectuar con este tipo de aparatos dependen primordialmente de la apreciación y de la distancia a la que se lanzan las visuales, asimismo de la puntería del operador y de la lectura de las observaciones, por ende es importante saber y disponer de las características propias de los aparatos a emplear, entre ellos los aumentos, la sensibilidad y la apreciación, indispensables para poder realizar observaciones con una determinada precisión, en el marco de una tolerancias requeridas.

3.1.2.2. Instrumentos de medidas de distancias

Las distancias terrestres representan importantes cantidades geométricas para el posicionamiento. Las estaciones totales proveen unas relaciones entre los puntos y establecen la escala de las redes geodésicas clásicas.

Las distancias se pueden medir indirectamente por métodos electromagnéticos. Actualmente, estos aparatos se pueden clasificar según el tipo de onda portadora:

- *Mediciones electromagnéticas de distancias.* Utilizan microondas de longitud entre 1m y 1 cm, como los telurómetros. Se utilizaron inicialmente a finales de los años 40. usan longitudes de onda ($\lambda=0,4$ a $0,8 \mu\text{m}$) y cercana al infrarrojo (superiores a $\lambda = 1 \mu\text{m}$) o microondas ($\lambda=1$ a 10 cm) que porta la señal de medida (Rueger 1997, y, Joeckel y Stober 1999). El tiempo de viaje de la señal sirve para medir la distancia. La medición de distancias terrestres utilizando microondas se inicio con el desarrollo de un telurómetro por T. J. Wadley en 1956. En este caso la estación maestra emitía una onda ($\lambda = 8\text{mm}$ a 10 cm) modulada (la modulación de la frecuencia variaba entre 7.5 y 1.5 MHz), la cual fue retransmitida desde un transportador activo (receptor y transmisor). Los rangos de medición fueron superiores a los 70 Km y se obtuvieron más. La enorme precisión dependió de las incertidumbres de la refracción y puede alcanzar precisiones de $\pm(10\dots15 \text{ mm} + 3\times10^{-6}\text{seg})$
- *Mediciones electroópticas de distancias.* Utilizan ondas luminosas de tipo de la luz visible o infrarrojo, como lo es el geodímetro, utilizado para trabajar en largas distancias, de 20 a 60 kilómetros aproximadamente, con rayos láser de helio-neón, y los distanciómetros para medio y corto alcance, que emplean infrarrojos. El primer geodímetro fue desarrollado por E. Bergtrand en 1948. Para medir utilizo luz láser con una frecuencia de modulación entre 15 y 50 MHz y fue capaz de medir distancias superiores a 60 kilómetros, en días despejados, con una precisión de $\pm(1\dots5 \text{ mm} + 1\dots2\times10^{-6}\text{seg})$.

Actualmente, la medición de distancias terrestres es restringida a rangos de unos pocos kilómetros y como máximo 10 kilómetros. Y se está usando con más frecuencia la luz visible y el infrarrojo cercano, tanto en el pulso como en el método de comparación de la fase. Medir solamente distancias es aplicable para aplicaciones especiales, pero generalmente se emplean las estaciones totales electrónicas, para medir simultáneamente distancias, direcciones horizontales y ángulos cenitales.

3.1.2.3. Instrumentos de medidas por observaciones a satélites artificiales

Como principal instrumento aparece el GPS. Provistos de dos frecuencias (L1, L2) y un código P en la segunda frecuencia, igualmente de barómetros y termohigrómetros para la toma de datos meteorológicos que garantizan 1 milibar en la medida de la presión, 0,5° en la medida de la temperatura y un 2% en la medida de la humedad relativa del aire. Estos equipos permiten en la medida de las bases distancias entre 50 y 500 kilómetros, independientemente de la zona o lugar, una precisión mejor que 0,5 ppm, esto es, de 0,5 m en 1000 km.

3.1.3. REDES PLANIMÉTRICAS DE PRIMER ORDEN

Para la observación de una red de primer orden por medios terrestre es necesario realizar los siguientes pasos:

- Determinación de las coordenadas del punto astronómico fundamental y e los puntos Laplace, que incluye las observaciones astronómicas de determinación de la latitud por los métodos de Sterneck o Talcote, con precisiones requeridas del orden de 0",2 a 0",5, esto es, de unos 10 a 15 metros, en posicionamiento absoluto, y la determinación de la longitud por el método de Mayer con precisión exigida de 0",5 y determinación de los acimutes astronómicos por observación a las estrellas con una garantía superior a 0", 5 en el acimut de referencia. Este proceso nos conduce a obtener las coordenadas del punto

astronómico fundamental y el acimut de uno de los lados de la red, a través de la Astronomía Geodésica, reconociéndose asimismo los puntos Laplace, cuyas coordenadas son el resultado de la compensación astronómica - geodésica de redes.

- Medidas de bases, principal y secundarias realizadas por distanciometría láser, con una precisión exigida de $\pm(0,005\text{m} + 1 \text{ ppm})$, que avalan precisiones del orden de unos 30 kilómetros de 0,03 a 0,04 metros, o sea, de 2 ppm, y ahora bien, si son efectuadas a través de microondas, se alcanzan precisiones exigidas de $\pm(0,02\text{m} + 4 \text{ ppm})$, que avalan precisiones que varían entre 30 a 40 kilómetros, o lo mismo que de 0,14 a 0,2 metros. No obstante, esta metodología para efectuar las observaciones presenta problemas debido a la implicación de las condiciones climáticas en su proceso, especialmente la humedad relativa del medio.
- Observaciones acimutales para la determinación de los valores de los ángulos de los distintos triángulos que constituyen la red geodésica. Son las observaciones angulares efectuadas con los teodolitos de precisión de décimas de segundo, de noche y aplicando el método de Schreiber. En este trabajo se exigen precisiones del orden de $0'',3$ a $0'',5$, lo que garantiza para lados medios de unos 40 a 60 kilómetros, precisiones absolutas de 0,04 a 0,08 metros, o mismo que 2 ppm aproximadamente. Los acimutes astronómicos convenientemente transformados al sistema geodésico son de una importancia imprescindible en las redes fundamentales al redefinir la orientación de la red en cada punto astronómico, y evitar la propagación en orientación de errores sistemáticos que pueden tener consecuencias funestas en grandes triangulaciones.

Este tipo de observaciones son las clásicas de primer orden, permitiendo precisiones locales de orden centimétrico, que pone a prueba la garantía que los instrumentos modernos pueden ofrecer a la observación geodésica. A medida que los puntos crecen, por ejemplo, para grandes triangulaciones, estas precisiones locales no tienen ninguna aplicación, a causa de la acumulación de errores, ya sean

aleatorios como sistemáticos, a pesar de poder definir con los medios actuales clásicos esquemas coherentes de control de escala y orientación con la observación de distancias con láser y acimutes astronómicos. No obstante, la optimización de estas redes se puede hacer a través de las observaciones espaciales las cuales ha demostrado ser eficaces para el control de la escala y la orientación de las redes de primer orden. Siguiendo los pasos, vemos los siguientes:

- Observaciones Doppler a satélites TRANSIT con precisión en posicionamiento absoluto por técnicas de punto aislado, mejor que ± 1 metro, y en posicionamiento relativo a distancias de 200 a 300 kilómetros de $\pm 0,2$ metros, esto es, del orden de 1 ppm.
- Observaciones GPS a satélites de la constelación NAVSTAR con precisiones en posicionamiento relativo a distancias de 100 a 500 kilómetros de algunos centímetros, mejores que 0,5 ppm.

Los dos tipos de observaciones mencionados anteriormente han supuesto y van a suponer la revisión de muchos de los conceptos de la geodesia clásica, ya que no tienen tantas restricciones operativas de la geodesia clásica, y en cuanto a su precisión, los resultados logrados al día de hoy y las avances en mejorar el sistema GPS, hacen de este sistema un serio competidor a los métodos tradicionales de observación de distancias de varios kilómetros, mientras que para grandes distancias los métodos espaciales son más precisos y fiables.

Los puntos de control pueden determinarse por métodos de triangulación, trilateración y poligonización, (Torge, 1983). Actualmente, con la nueva tecnología GPS cambio el concepto de posicionamiento de puntos geodésicos. El sistema GPS permite a los usuarios determinar coordenadas de puntos expresos en latitud, longitud y altura geométrica en función de las coordenadas cartesianas X, Y, Z en relación con el centro de masas de la tierra.

3.1.3.1. Determinación de puntos de control horizontal a través de triangulación

El establecimiento de la triangulación de primer orden (lados de 30-60 km) tiene los siguientes objetivos:

- Científico, como la contribución a mejorar el conocimiento de la forma de la tierra.
- Cartográfico, suministrando un apoyo uniforme a los trabajos cartográficos.

La determinación de la triangulación de la red segundo orden (lados de 10 a 20 km) tiene como objetivo práctico suministrar el apoyo a los trabajos de cartografía o de otras obras de ingeniería. La triangulación de primera orden se desarrolla según cadenas de cuadriláteros completos localizados a lo largo de meridianos y paralelos alejados 2° unos de los otros, constituyendo mallas de un espesura que se entiende por toda una región. La triangulación de la red de segundo orden se hace para la descomposición de las figuras de la red de primer orden y compensar el espacio interior de cada malla. La triangulación de la red de tercer orden es esencialmente discontinua y tiene como objetivo densificar la ayuda básica a las campañas topográficas. En las regiones donde no están presentes las redes de primer orden, la cartografía se puede apoyar en redes locales de segundo o tercer orden, que poseen un datum horizontal propio, determinado por las observaciones astronómicas. Actualmente este problema es solucionado con el uso del GPS.

En una triangulación se observan todos los ángulos de los triángulos formados por los VT's del cuadrilátero completo. La escala y la orientación de la red son obtenidas a través de la determinación de la longitud y el acimut de uno de los lados del cuadrilátero. Para evitar errores sistemáticos de escala, tales medidas deben ser hechas cada 200 km, (Torge, 1983). La siguiente figura ilustra un cuadrilátero completo, donde, se parte de la base AB, resolviendo los triángulos hasta llegar a la base DC. Figura (3.1).

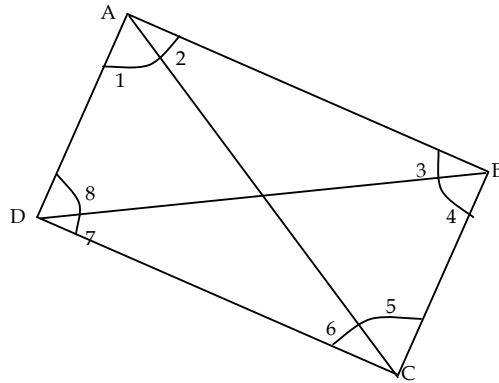


Figura 3.1. Ilustración de un cuadrilátero completo de una triangulación

Con los ángulos observados, se pueden hacer los cálculos de una triangulación clásica de cuatro maneras diferentes. Se sabe, entretanto, que uno de ellos suministrara un error menor. El error menor se hallara cuando el cálculo se de en un triángulo que tenga los ángulos configurados lo mejor posible. Esa mejor configuración se determina mediante el coeficiente de rigidez (R), (Gemael, 1994):

$$R = \frac{D - C}{D} \cdot \sum (\delta_{A_i}^2 + \delta_{A_i} \cdot \delta_{B_i} + \delta_{B_i}^2) \quad (3.1)$$

Dónde:

- D es igual al número de nuevas direcciones observadas en dos sentidos;
- C es igual al número de ecuaciones de condición;
- δ_A y δ_B es igual a las diferencias logarítmicas de la variación del seno de 1" en unidades sexagesimales de las distancias de los ángulos. Las distancias de los ángulos son los dos ángulos de un triángulo que se oponen al lado conocido y al lado que deja calcular. Por tanto tenemos que, (Gemael, 1994):

$$D = L + L' - 2 \quad (3.2)$$

$$C = (L' - p' + 1) - (L - 2 \times p + 3) \quad (3.3)$$

Dónde:

- L es igual al número total de los lados de la figura;
- L' es igual al número de los lados observados en ambas direcciones;
- p es igual al número total de vértices;
- p' es igual al número de vértices ocupados.

A.- Ajuste de una triangulación geodesia

Los lados de un triángulo geodésico son de tales dimensiones que están fuera del alcance de la topografía, y por ende se debe considerar la esfericidad de la tierra. La suma de dos ángulos internos es siempre mayor que 180° , conocido o denominado como *exceso esférico* (ϵ), como se ilustra en la siguiente figura:

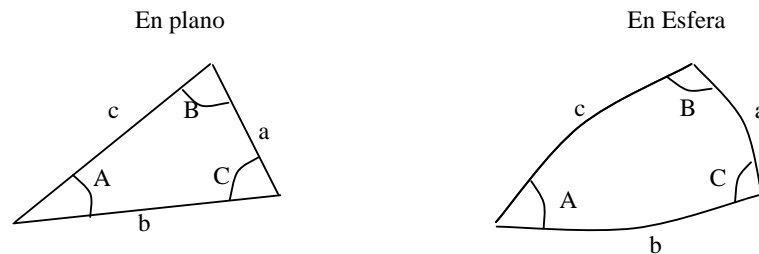


Figura 3.2. Exceso esférico en un triángulo geodésico

Para calcular el exceso esférico, se utiliza el hecho de que es proporcional al área de un triángulo esférico, o sea:

$$\epsilon_{\text{rad}} = \frac{S}{R^2} \quad (3.4)$$

Dónde:

- ϵ es igual al exceso esférico;
- S es igual al área del triángulo esférico;
- R es igual al radio medio de la esfera local.

Considerando un triángulo esférico como si fuese plano, se puede calcular su área por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h, \quad (3.5)$$

Dónde:

$$H = a \cdot \text{sen } C, \quad (3.6)$$

Substituyendo 3.6 en 3.5 se tiene:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } C \quad (3.7)$$

El radio de esfera y el radio medio se pueden calcular por:

$$R = \sqrt{M \cdot N} \quad (3.8)$$

Dónde:

- R es igual al radio medio de curvatura de la esfera;
- M es igual al radio de curvatura de la sección meridiana;
- N es igual al radio de la curvatura de la sección primera vertical.

Substituyendo 3.7 y 3.8 en 3.4 se tiene una expresión que permite calcular el exceso esférico:

$$\epsilon'' = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2 \cdot M \cdot N \cdot \text{sen } 1''} \quad (3.9)$$

Se puede realizar el ajuste de redes de triangulaciones geodésicas tanto por el método paramétrico como por el método de correlaciones. Cuando el método correlacionado corresponde a dos correlaciones, se formula ecuaciones de condiciones para los triángulos que forman el equilátero completo. Asimismo, es

importante en este ajuste la determinación del número de ecuaciones de condición.

A.1.- Número de ecuaciones de condición

Se formula en un triángulo dos tipos de ecuaciones: de ángulos y de lados, donde el número total de ecuaciones es, (Gemael, 1994):

$$c = n - 2v + 4 \quad (3.10)$$

dónde:

- v es el número total de vértices;
- n es el número de ángulos medidos e independientes;
- c es el número total de ecuaciones.

El número de ecuaciones de ángulos es, (Gemael, 1994):

$$c_a = I_2 - v_2 + 1 \quad (3.11)$$

dónde:

- I_2 es el número de líneas visadas en ambas direcciones;
- v_2 es el número de vértices ocupados;
- c_a es el número de ecuaciones de ángulos.

En el caso del cuadrilátero completo se tienen ecuaciones de ángulos, independientes entre si ($I_2 = 6$ y $v_2 = 4$).

El número de ecuaciones de lado es, (Gemael, 1994):

$$c_1 = I - 2 \cdot v + 3 \quad (3.12)$$

dónde:

- I es el número total de líneas visadas;
- v es el número total de vértices;
- c_1 es el número de ecuaciones de lado.

En el caso del cuadrilátero completo tenemos una ecuación de lado ($I = 6$ y $v = 4$).

Del cuadrilátero se pueden sacar cuatro triángulos, lo que a primera vista hasta se podría formular 4 ecuaciones de ángulos. Sin embargo, tres de estos triángulos son independientes y deben ser tenidos en cuenta para la formulación de las ecuaciones.

Una opción de los triángulos, es fijar uno de los vértices como polo, y se toman los tres triángulos que son comunes a él, excluyendo el cuarto triángulo. Para escoger un polo, se utiliza el criterio de que este debe ser el vértice que posee la mayor suma de los ángulos. Para mostrar un ejemplo de este ajuste tomaremos como polo o vértice C del cuadrilátero de la figura (3.1). En este caso los triángulos son: ABC, ADC, y CBD.

La ecuación del triángulo ABC podrá ser formulada de la siguiente forma:

$$(2)^a + (3 + 4)^a + (5)^a = 180 + \varepsilon \quad (3.13)$$

Pero:

$$(2)^a = (2) + v_2 \quad (3.14)$$

$$(3+4)^a = (3) + v_3 + (4) + v_4 \quad (3.15)$$

$$(5)^a = (5) + v_5 \quad (3.16)$$

Donde v_i es el residuo del ángulo y el índice "a" indica el ángulo ajustado. Substituyendo (3.14), (3.15), (3.16) en (3.13) se obtiene lo siguiente:

$$(2) + (3) + (4) + (5) + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 180 + \varepsilon \quad (3.17)$$

$$(2) + (3) + (4) + (5) - 180 - \varepsilon = w_1 \quad (3.18)$$

que es el error del cierre de este triángulo.

De la misma forma, para los demás triángulos se elaboran las dos ecuaciones restantes de condición de ángulos.

En lo que respecta a la ecuación del lado, para su formulación se usa el polo, escogido conforme el criterio descrito anteriormente. Para esto se utiliza el siguiente artificio:

$$\frac{CB}{CA} \cdot \frac{CA}{CD} \cdot \frac{CD}{CB} = 1 \quad (3.19)$$

Aplicando la ley de los senos en los triángulos seleccionados anteriormente, se obtiene las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{CB}{CA} &= \frac{\text{sen}(a)^a}{\text{sen}(3+4)^a} \\ \frac{CA}{CB} &= \frac{\text{sen}(7+8)^a}{\text{sen}(1)^a} \\ \frac{CD}{CB} &= \frac{\text{sen}(4)^a}{\text{sen}(7)^a} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Que substituyendo en la formula (3.19) y considerando los residuos se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\text{sen}(2 + v_2)}{\text{sen}(3 + 4 + v_3 + v_4)} \cdot \frac{\text{sen}(7 + 8 + v_7 + v_8)}{\text{sen}(1 + v_1)} \cdot \frac{\text{sen}(4 + v_4)}{\text{sen}(7 + v_7)} = 1 \quad (3.21)$$

La expresión (3.21) corresponde a la ecuación del lado, que, como se puede apreciar, no es una ecuación lineal, por consiguiente necesita ser linealizada. En la literatura clásica, el método actual de linealización es el de logaritmicación, pudiendo también ser linealizado a través del desarrollo de Taylor. Utilizando la logaritmicación en los dos lados de la igualdad de la ecuación (3.21), se obtiene:

$$\log\left(\frac{\text{sen}(2 + v_2)}{\text{sen}(3 + 4 + v_3 + v_4)} \cdot \frac{\text{sen}(7 + 8 + v_7 + v_8)}{\text{sen}(1 + v_1)} \cdot \frac{\text{sen}(4 + v_4)}{\text{sen}(7 + v_7)}\right) = \log(1) \quad (3.22)$$

Desarrollando la formula (3.22) se tiene lo siguiente:

$$\text{Logsen}(2 + v_2) + \text{logsen}(7 + 8 + v_7 + v_8) + \text{logsen}(4 + v_4) - \text{logsen}(3 + 4 + v_3 + v_4) - \text{logsen}(1 + v_1) - \text{logsen}(7 + v_7) = 0 \quad (3.23)$$

Sin embargo, los residuos son pequeños, para lo que se hace la siguiente simplificación:

$\text{Logsen}(i + v_i) = \text{logsen}(i) + v_i \cdot \Delta_i$ donde Δ_i representa una variación de 1" de arco, es decir, una diferencia tabular para 1" en unidades de sexagesimales. Para comprender mejor lo anterior, se supone un ejemplo donde tenemos un ángulo de 22°31'04,10". En este caso se observa que:

$$\Delta_i = \text{logsen}(i + 1'') - \text{logsen}(i)$$

$$\Delta_i = \text{logsen}(22^\circ 31' 05,10'') - \text{logsen}(22^\circ 31' 04,10'')$$

$$\Delta_i = 0,000005078$$

Luego Δ_1 es igual a (+ 5,078). De esta manera, retomando la ecuación del lado se tiene que:

$$\text{Logsen}(2) + v_2 \cdot \Delta_2 + \text{Logsen}(7 + 8) + (v_7 + v_8) \cdot \Delta_{7+8} + \text{Logsen}(4) + (v_4) \cdot \Delta_4 - \text{Logsen}(3 + 4) - (v_3 + v_4) \cdot \Delta_{3+4} - \text{Logsen}(1) - (v_1) \cdot \Delta_1 - \text{Logsen}(7) - (v_7) \cdot \Delta_7 = 0$$

$$\text{Logsen}(2) + \text{Logsen}(7 + 8) + \text{Logsen}(4) - \text{Logsen}(3 + 4) - \text{Logsen}(1) - \text{Logsen}(7) + v_2 \cdot \Delta_2 + (v_7 + v_8) \cdot \Delta_{7+8} + (v_4) \cdot \Delta_4 - (v_3 + v_4) \cdot \Delta_{3+4} - (v_1) \cdot \Delta_1 - (v_7) \cdot \Delta_7 = 0$$

Por consiguiente el error de cierre y la ecuación del lado linealizada en este ejemplo son:

$$\begin{aligned} \text{Logsen}(2) + \text{Logsen}(7 + 8) + \text{Logsen}(4) - \text{Logsen}(3 + 4) - \text{Logsen}(1) - \text{Logsen}(7) &= w_4 \\ v_2 \cdot \Delta_2 + (v_7 + v_8) \cdot \Delta_{7+8} + (v_4) \cdot \Delta_4 - (v_3 + v_4) \cdot \Delta_{3+4} - (v_1) \cdot \Delta_1 - (v_7) \cdot \Delta_7 + w_4 &= 0 \quad (3.24) \end{aligned}$$

entonces se tiene para este ejemplo las cuatro ecuaciones de condiciones completas:

$$\begin{aligned} 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 + 0 \cdot v_6 + 0 \cdot v_7 + 0 \cdot v_8 - w_1 &= 0 \\ 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + 0 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 + 1 \cdot v_7 + 1 \cdot v_8 - w_2 &= 0 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 + 1 \cdot v_7 + 0 \cdot v_8 - w_3 &= 0 \\ -(v_1) \cdot \Delta_1 + v_2 \cdot \Delta_2 + (v_7 + v_8) \cdot \Delta_{7+8} + (v_4) \cdot \Delta_4 - (v_3 + v_4) \cdot \Delta_{3+4} - (v_1) \cdot \Delta_1 - (v_7) \cdot \Delta_7 + w_4 &= 0 \end{aligned}$$

De la misma manera se puede describir de forma matricial:

$$B \cdot V + W = 0 \quad (3.25)$$

De donde:

- B es igual a la matriz de los coeficientes;
- V es el vector de los residuos;

- W es el vector de los errores de cierre.

Una vez formuladas las ecuaciones de condición faltaría por aplicar el método de las correlaciones:

$$V = P^{-1} \cdot B^T \cdot K \quad (3.26)$$

Siendo K el multiplicador de Lagrange y es obtenido por:

$$K = - (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot W \quad (3.27)$$

Conocido el vector de los residuos, se puede llegar a obtener las observaciones ajustadas que son los ángulos de la triangulación.

$$L_a = L_b + V \quad (3.28)$$

3.1.3.2. Determinación de puntos de control horizontal a través de la trilateración

El método de la trilateración tiene el mismo principio de la triangulación, donde en este caso en vez de medir ángulos se miden las distancias de los lados de los triángulos, así como las posibles líneas diagonales para conseguir un número suficiente de determinaciones redundantes de la red. Actualmente, la trilateración viene adquiriendo un papel importante en la determinación de coordenadas horizontales debido al desarrollo de las estaciones totales electrónicas.

3.1.3.3. Determinación de puntos de control horizontal a través de la poligonización

El desarrollo de redes de control a través de poligonización es mucho más económico. En este método de determinación de posiciones horizontales, los lados

son medidos a través de distanciómetros electrónicos y los ángulos de la poligonal con teodolitos. Actualmente, este se viene haciendo con estaciones totales. Con la llegada de los distanciómetros electrónicos, y con el constante mejoramiento de estos equipos, la poligonización pasó a desarrollar un papel fundamental en los levantamientos geodésicos, ya que es un método de determinación de coordenadas rápido y eficaz.

En geodesia, la poligonización es utilizada siempre que hay una restricción en la visibilidad debido por ejemplo a accidentes naturales y construcciones, substituyendo, en este caso, a la triangulación. En cuanto a precisión, una poligonal puede ser dividida en redes de primer de orden, segundo orden y tercer orden, ya descritos anteriormente. En cuanto al control de las poligonales se clasifican en:

- Poligonales abiertas, cuando el último vértice no está fijado a ningún vértice de las coordenadas conocidas, imposibilitando el control acimutal y de escala.
- Poligonales cerradas, cuando partiendo de un vértice de coordenadas conocidas se llega a otro de coordenadas conocidas. En este caso se tiene un control de escala y acimutal. En esta misma clase de polígonos encontramos los llamados “loop o lazo”, es decir, se parte de un vértice de coordenadas conocidas y se llega al mismo vértice, formándose un polígono cerrado. Este tipo de polígono no es aconsejable para trabajos de alta precisión, puesto que no se tiene un control de escala.

El cálculo de una poligonal consiste en el transporte de las coordenadas desde punto de partida a un punto de llegada, pasando por las estaciones intermedias que realmente son el objeto del levantamiento, (Silva y Gripe, 1996).

Una etapa que anticipa el cálculo de una poligonal, tiene necesariamente que reducir los valores observados (ángulos y distancias). Estas reducciones son

correcciones necesarias para eliminar los errores sistemáticos de los grandes procesos, o mejor dicho, situar estos grandes procesos en un mismo modelo.

3.1.3.4. Determinación de puntos de control utilizando el sistema GPS

Las observaciones con GPS, después de procesadas, proveen coordenadas tridimensionales de los puntos de la red, referenciadas al sistema geocéntrico WGS-84 (X, Y, Z). Como las propiedades de las coordenadas cartesianas son las mismas, ellas se pueden transformar para latitudes, longitud y altura geométrica. Asimismo es importante verificar si este sistema coincide o se adapta a una región (ó país) donde se desarrolla o trabaja. Los levantamientos realizados con GPS presentan, como característica, que se pueden observar en cualquier condición atmosférica, y por hoy con una constelación de satélites completa, garantizadas las 24 horas del día para operaciones de campo.

El planeamiento estratégico de una red geodésico se puede apoyar en los siguientes principios, (Segantine, 1995):

- Todas las estaciones deben ser consideradas de la misma manera (conocidas o no);
- Solamente los vectores independientes deben ser considerados en la planeación; este principio tiene el efecto de conferir, a la red una fuerte correlación entre todas las combinaciones de las líneas bases, formadas geoméricamente;
- Una red puede formarse por cuadriláteros con vectores independientes; este principio implica que en una gran red, el número de grado de libertad sea igual al número de incógnitas. Este método permite una alta precisión relativa, en particular si los cuadriláteros son subdivididos en triángulos, aunque esta operación es mucho más laboriosa.

Igualmente, son tres las estrategias básicas de observación, (Seeber, 1993):

- Posicionamiento absoluto: una posición absoluta puede ser determinada continuamente con una precisión de 10 a 15 m, sin el efecto de SA (Disponibilidad Selectiva), y con una precisión de 30 a 50 m bajo el efecto de SA. Realizando exactamente las observaciones por varios días, la precisión optima alcanzada será del orden de 3 a 5 m;
- Posicionamiento relativo: se puede aplicar para una antena móvil o estacionaria;
- Concepto de multiestación: este método se ocupa de puntos adyacentes, formando cuadriláteros o triángulos que permite una alta precisión relativa. El uso de más de dos receptores es más rápido y económico, igualmente para pequeñas redes. Cuando dos o más receptores observan simultáneamente, la red tendrá todas las estaciones co-observadas y presentara una correlación entre los vectores de los puntos considerados.

Existen varios parámetros que indican la calidad del levantamiento realizado. El primero involucra un análisis relativo a los estadísticos de los vectores individuales. El criterio es para determinar cuáles vectores son malos, y comparar estadísticamente una base buena con una base mala. Una variación brusca del Error Medio Cuadrático (e.m.c) es un buen indicador de que una base presenta problemas. En el caso de las redes, el procedimiento de verificación de las bases problemáticas y el uso de programas que procesan el cierre de figuras geométricas.

Eliminadas las bases problemáticas, se realiza un ajuste por el método de mínimos cuadrados, donde para esto se hace una fijación de una estación. Esta fijación de las coordenadas recibe el nombre de *prescripción mínima*. Del mismo modo, las demás coordenadas calculadas en el ajuste serán obtenidas en función de estas coordenadas.

3.1.4. REDES PLANIMÉTRICAS DE ORDEN INFERIOR

3.1.4.1. Redes de segundo orden

Tradicionalmente se han observado con observación nocturna y teodolito de décima de segundo. El método de observación angular puede ser el de Schreiber, aunque se pueden utilizar otros. La precisión requerida esta entre $0'',5$ a $0'',8$, lo que para un lado medio de unos 15 kilómetros, certifican precisiones relativas de unos $\pm 0,05$ metros. Se recurren a teodolitos con apreciación directa de medio segundo centesimal. Otra opción a la cual se recurre actualmente para observar este tipo de redes es la distancimetría con microondas, con una precisión de $\pm 0,06$ metros a $\pm 0,10$ metros. Como instrumentos utilizados para este tipo de medición se encuentran entre otros, el geodímetro AGA M8, con una precisión de $\pm (6 \text{ mm} + 1 \text{ ppm})$, el didtomar Wild D14, con una precisión de $\pm (5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$, y el distanciómetro Hewlett Packard HP 3810 A, con una precisión de $\pm (5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm})$.

3.1.4.2. Redes de Tercer Orden

En vista de que las distancias en las que se operan estas redes están entre 5 y 10 kilómetros se puede utilizar la distancimetría de microondas, con precisión superior a $\pm (0,02 \text{ m} + 2 \text{ ppm})$, o lo mismo que una precisión relativa de $\pm 0,03 \text{ m}$ a $\pm 0,05$ metros, suficiente para fines prácticos planimétricos, y distancias cenitales recíprocas y simultáneas para altimetría con teodolito de segundo, que ofrece garantías de $\pm 0,01 \text{ m}$ a $\pm 0,02$ metros por kilómetros. Los instrumentos utilizados son teodolitos de segundos como el Wild T 2, Zeiss TH 2, Kern DKM 2A, entre otros, en el mismo sentido, para las observaciones de distancias se emplean instrumentos análogos a los utilizados en las redes de segundo orden.

3.1.4.3. Densificaciones geodésicas de la red de tercer orden

La densificación de la red de tercer orden a vértices situados entre sí de 2 a 4 kilómetros, es un tema de especial interés para cualquier región en particular, puesto que a menudo la red de tercer orden es muy poco densificada (alrededor de 8 Km en promedio). Las observaciones de estas densificaciones se pueden realizar de tres maneras distintas:

- *Trilateración con microondas*. Se alcanzan precisiones del orden de $\pm (0,02 \text{ m} + 2 \text{ ppm})$.
- *Triangulación con teodolito de segundo*. Se realiza diurna a puntos abanderados, con una precisión mínima exigida de unos 10 segundos centesimales.
- *Poligonación con teodolito de segundo y distanciómetro de infrarrojos*. Es una solución eficiente en cuanto a precisión y rentabilidad.

Se ha mencionado hasta ahora los métodos clásicos de observación, sin embargo, el sistema GPS puede ser muy eficiente con la puesta en funcionamiento de toda la constelación, se puedan observar todas las redes excepto las fundamentales, dado que no necesita la intervisibilidad entre los puntos observados, lo que conlleva a unos beneficios tales como la ubicación de los vértices permanentes, la clase de triángulos de la red, ya que no se necesitan parecerse a los equiláteros.

3.1.5. REDES ALTIMÉTRICAS O DE CONTROL VERTICAL

Las redes altimétricas o verticales, corresponden a conjuntos de estaciones terrestres para cada una de las cuales se determina con precisión solamente su altura ortométrica (H), (Castañeda, 1986).

Es evidente, sin embargo, que las estaciones de una red vertical deben disponer de pares coordenados (ϕ, λ) referidos a algún sistema geodésico, aunque

imprecisos, de manera que posibiliten su representación cartográfica. Como se menciona más adelante, el geoide corresponde a una superficie de referencia para las altitudes ortométricas. En la práctica, la materialización de un datum geodésico vertical se da a través de una especificación de un punto con una latitud ortométrica ($H = 0$) con el propósito de vincular una red vertical a una región de determinado interés.

Las operaciones de campo originan las principales informaciones necesarias para el transporte de altitudes ortométricas, a partir de estaciones ya definidas altimétricamente, reciben la denominación general de *nivelación*, (Castañeda, 1986). Metodológicamente, podemos dividir la nivelación en tres clases: geométrica, trigonométrica y barométrica. La nivelación geométrica proporciona una mejor exactitud de elevación. El mismo es conducido a través de circuitos cerrados, posibilitando un control de la propagación de errores. Durante el trabajo son implantados las Referencias de Niveles (RN's), que son puntos cotados correspondientes a los extremos de las secciones de la nivelación que normalmente acompañan las márgenes de la autovías y ferrovías. En promedio, la extensión de una sección de nivelación es del orden de 3 km, lo cual se subdividen en segmentos no mayores a 200 m, denominados *lances de nivelación*. En estos lances se realizan lecturas adelante y atrás por un instrumento nivelador (nivel), con reglas especiales (miras), verticalmente posicionado el medio lance de cada mira. En los trabajos más rigurosos (primer orden), cada sección es nivelada en ambos sentidos.

La nivelación trigonométrica es aquella en la que una diferencia de nivel es determinada en función de la distancia y del ángulo cenital (o vertical) entre estos dos puntos considerados. Ahora, la nivelación barométrica, es aquella donde la diferencia de nivel determinada está en función de la variación de la presión atmosférica existente, entre los puntos de diferentes altitudes de la superficie terrestre. Las operaciones para los levantamientos trigonométricos y barométricos normalmente son apoyados con los RN's. Al contrario de la nivelación de alta

precisión, el trigonométrico se adapta bien a los terrenos accidentados, por lo que esta técnica es la más usual para determinar las altitudes de los vértices de las redes planimétricas.

La nivelación trigonométrica puede realizarse por dos métodos: visadas unilaterales, para la cual con un teodolito y un blanco es suficiente, o visadas reciprocas simultaneas, realizadas con dos teodolitos, operados simultáneamente. Bajo condiciones operacionales ajustadas, esta segunda técnica puede proporcionar precisión del orden de ± 1 m por desnivel entre estaciones separadas aproximadamente 25 km (por cancelación matemática ella prácticamente elimina el problema crítico e refracción), (Castañeda, 1986).

En lo que respecta a la nivelación barométrica, se trata de una técnica de obtención de desniveles entre estaciones a partir de las diferencias de presión atmosférica. Tales mediciones son realizadas por barómetros aneroides y se recurre a este tipo de nivelación cuando el empleo de otras técnicas se muestran inviables (por ejemplo el caso de la amazonia) o en trabajos en los cuales se admiten errores del orden de 2 m por desnivel determinado. Actualmente, con el uso del sistema GPS asociado con algunos artificios, ya es posible la determinación de altitudes ortométricas con buena precisión.

3.1.6. REDES DE NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN

Este tipo de redes se observan con nivelación geométrica y van dotadas de gravimetría a lo largo de las líneas con el fin de determinar diferencias de potenciales o también llamadas cotas potenciales y no solamente una corrida de altitudes. Es una de las observaciones más exigidas en la geodesia, debido a las grandes precisiones exigidas en primer orden, por la perfecta estabilidad de la señalización, en las deformaciones de la corteza terrestre, los errores sistemáticos de los niveles y las miras invar, los fenómenos de refracción, etc. Por tanto, para ejecutar este tipo de observaciones se exigen niveles de alta precisión que pueden

llegar hasta 1 m, de precisión en 1 kilómetro de doble nivelación. El objetivo fundamental de estas redes es ofrecer un sistema de altitudes a grandes territorios, que sirva de apoyo a los distintos trabajos, ya sean geodésicos o topográficos, que se apoyan en el conocimiento de esta altimetría. Especialmente, para apoyar a esta por medio de una nivelación trigonométrica de precisión al mayor número posible de vértices de la red geodésica, tomando como arranque clavos de la red de nivelación de alta precisión.

En España, la comparación de la posición relativa de vértices topográficos en diferentes épocas permite calcular las tasas de deformación cortical en zonas activas. La utilización de datos de Nivelación de Alta Precisión permite determinar con una precisión milimétrica los movimientos verticales recientes. A partir de los datos de nivelación de alta precisión obtenidos por el Instituto Geográfico Nacional en los últimos 125 años ha sido posible obtener deformaciones significantes en el Este de la Península Ibérica. En 1997 se instaló y midió una nueva red de nivelación de alta precisión para controlar las deformaciones verticales entre Guardamar de Segura y Alicante.

3.1.7. REDES PARA LEVANTAMIENTOS LOCALES

3.1.7.1. Redes de control para levantamientos topográficos

En muchas aplicaciones de la topografía es necesario el establecimiento de redes de control para posteriores trabajos de apoyo, como pueden ser, puntos de apoyo para fotogrametría, cartografía urbana y rústica, levantamientos taquímetros, entre otros. La precisión de estas labores es directamente proporcional a las características del mismo, en especial, de la escala de la cartografía. Por ejemplo, es diferente las precisiones requeridas en una red de control de un vuelo 1/20000 para propósitos de catastro de rústica o para cartografía a escala 1/5000 para propósitos municipales o comarcales, que en una

red de control para cartografía de urbana a escala 1/500. Porque para el primer ejemplo es suficiente un orden de precisión de $\pm 0,5$ metros, mientras que para el segundo ejemplo sería suficiente de $\pm 0,1$ metros. De lo anterior, se deduce que la configuración y observación de cada una de estas redes debe ser completamente diferentes, tanto en la longitud de los lados, como en la propia garantía de las observaciones. Volviendo a los ejemplos anteriores, en el primero una Poligonación sería suficiente, y el último se podría establecer una red de triangulación o trilateración para determinar además de la precisión una mejor redundancia⁹.

3.1.7.2. Redes locales de alta precisión

En muchos trabajos se solicita requisitos de precisión difícilmente alcanzados con los métodos e instrumentos de observación tradicionales. Como ejemplo podemos mencionar redes de control a las estructuras de ingeniería o a las deformaciones de la corteza terrestre, redes para el replanteo de grandes obras de ingeniería como puentes, auscultación de presas, túneles, aceleradores de partículas, centrales nucleares, entre otras. En esta clase de obras se requiere trabajar con precisiones superiores al centímetro e incluso al milímetro, que generan unos problemas adicionales como pueden ser una señalización especial, con centrado forzoso, para evitar deformaciones singulares de las señales, garantía de los centrados de los instrumentos con décimas de milímetros, observación con teodolitos de décima de segundo, distanciometría de alta precisión láser y nivelación geométrica de alta precisión para la tercera coordenada, con niveles con lectura digital a la décima del milímetro. Es importante anotar, que este tipo de redes no deben apoyarse en ningún caso en redes geodésicas convencionales, ya que su precisión está por encima de estas, y si sucede pues se puede llegar a perjudicar la calidad de los resultados logrados con este tipo de observaciones de gran calidad.

⁹ Se define la *redundancia* como las observaciones sobrantes, es decir; los grados de libertad de cada incógnita de la red (Hennberg, 1985).

3.2. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN MODELOS LINEALES: EL MODELO DE GAUSS-MARKOV COMO MARCO PARA EL ESTABLECIMIENTO DE LAS ECUACIONES DE OBSERVACIÓN DE LA GEODESIA

3.2.1. MODELO DE GAUSS-MARKOV (GMM)

El problema planteado por la geodesia geometría se señala de la siguiente manera:

1) Un sistema de referencia definido previamente, esto es:

- Coordenadas de al menos un punto.
- Escala y orientación de la figura.
- Elipsoide de referencia (a , e^2) sobre el que referir los cálculos.

2) Una serie de observaciones geodésicas entre los puntos de la red, que pueden ser:

- Direcciones angulares o ángulos.
- Distancias geométricas.
- Acimutes astronómicos.
- Diferencias de nivel o cota, bien por nivelación geométrica o por ángulos cenitales.
- Espaciales a satélites artificiales.

Ahora bien la cuestión a determinar son las coordenadas de la red, su precisión absoluta y relativa, o sea, respecto al sistema de referencia elegido y entre ellos, y la fiabilidad o capacidad de detectar posibles observaciones erróneas, que en términos geodésicos puede llamarse redundancia observacional. Por ende, si los datos son las observaciones y el sistema de referencia, y las incógnitas son las coordenadas de los puntos de la red observada, lo primero que tenemos que

conseguir son relaciones funcionales que nos relacionen o ligen las observaciones con las coordenadas.

3.2.1.1. Conceptos básicos

El modelo Gauss-Markov (GMM) es un modelo matemático lineal que consiste en relaciones de funcionales y estocásticas, el cual expresa el vector de observaciones en función de los parámetros e indica la naturaleza aleatoria de los errores de la observación. Esto relaciona las observaciones estocásticas l_i con los parámetros fijos x_i . En una matriz de notación donde estos parámetros adquieren el siguiente valor:

$$\begin{aligned} E(l) &= Ax \text{ ó } l = Ax + \varepsilon \\ E(\varepsilon\varepsilon) &= \Sigma = \sigma_0^2 Q, \end{aligned} \tag{3.29}$$

Este es el caso general, donde A puede o no puede tener el rango total de la columna. Debido a la linealización, l es un vector de n observaciones menos los términos de orden cero, A (conocida) es la matriz de coeficientes $m \times n$ que contiene las derivadas de primer orden de las observaciones respecto a los parámetros desconocidos m . x es el vector del parámetro a estimar (correcciones a las coordenadas a priori), y ε es el vector de los errores de la observación que se consideran aleatorios y tienen una esperanza cero. La matriz (Q) $n \times n$ contiene los pesos de las observaciones, las cuales se pueden correlacionar. La inversa de Q , que se muestra en la ecuación (3.30) implica que P es una matriz definida positiva; esta matriz también conocida como matriz cofactor. El símbolo σ_0^2 es la varianza a priori de referencia, la cual también se puede estimar o calcular. Para aplicar este modelo teórico para la estimación de parámetros desde datos reales, se tiene que reescribirse como un modelo sencillo:

$$v + l = Ax \quad P = Q^{-1} \tag{3.30}$$

los símbolos anteriores tienen el siguiente significado:

n	vector de observaciones,
O	operador de expectativa,
u	vector de parámetros desconocidos,
$n \times u$	matriz de coeficientes conocidos,
n	vector de errores verdaderos (reales),
$n \times n$	matriz de covarianza,
f	Factor de varianza a priori,
$n \times u$	matriz cofactor de observaciones,
$n \times n$	matriz de pesos de observaciones,
n	vector de residuos.

Las ecuaciones originales de observaciones en las redes geodésicas son usualmente no lineales, por ejemplo:

$$\text{Distancia: } E(l) = \sqrt{\Delta x_2 + \Delta y_2} + C_d$$

$$\text{Azimut: } E(l) = \arctan(\Delta y + \Delta x) + C_a$$

$$\text{Dirección: } E(l) = \arctan(\Delta y + \Delta x) + o + C_a$$

Para obtener la forma lineal se requiere conducir a la GMM a una linealización (series de Taylor). Con $a_{ij} = \partial l_i / \partial x_j$ donde las ecuaciones de las observaciones serán:

$$l_i + v_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \dots + a_{ni}x_n, \quad i \in [1, n] \quad (3.31)$$

Donde los parámetros de orientación (o) y corrección (C) son eliminados. Los derivados a_{ij} son calculados con los valores aproximados a los de los parámetros. De esta manera, los vectores de observación y los parámetros desconocidos de la ecuación (3.31) se calculan así:

l_i = cálculos observados negativos de los valores observados.

x_i = parámetros aproximados estimados negativos.

Los pesos de las observaciones se calculan de:

$$P_i = \sigma_o^2 / \sigma_i^2 \quad (3.32)$$

siendo σ_o^2 una varianza a priori de l_i . Las correlaciones entre las observaciones son difíciles de estimar de manera realista. Sin embargo generalmente son ignoradas.

3.2.1.2. Estimación de los parámetros

Es sabido por experiencia que todas las observaciones contienen errores. Por lo tanto, es imposible conseguir valores verdaderos de los parámetros de la ecuación (3.29), se supone que los errores están al azar con expectativa cero. El número de observaciones es mayor que el número de parámetros de los GMM. La ecuación (3.30) representa un sistema sobredeterminado de ecuaciones y esto permite introducir cierto criterio para conseguir estimaciones óptimas de los parámetros. Hay muchas posibilidades para definir la optimización de los parámetros estadísticos. En muchas ocasiones se usan aproximaciones, los cuales se aplican aquí, una estimación es considerada óptima en el sentido estadístico, si ella es imparcial y tiene una varianza mínima:

$$E(\hat{x}_j) = x_j \quad (3.33)$$

$$\forall j \in (1, u) \quad (\text{Imparcialmente})$$

$$s_{\hat{x}_j}^2 = \min \quad (\text{mínima varianza})$$

(nota: la expresión de A invertida significa "para todas")

La derivación matemática que da este texto, estadísticamente hablando, da a la función de estimación:

$$\hat{x} = (A^t P A)^{-1} A^t P l \quad (3.34)$$

donde se refiere como a BLUE (mejor estimador lineal imparcial). Bajo el mismo criterio de optimización, el estimador de varianza es:

$$S_0^2 = v^t P v / (n-u) \quad (3.35)$$

siendo el BIQUE (mejor estimador invariante cuadrático imparcial) del factor varianza σ_0^2 .

El método de estimación de datos se remonta a principios del siglo XIX y fue desarrollado independientemente por Gauss y Legendre. Usualmente lo llamaban método de mínimos cuadrados (LS), porque se minimizaba la suma de los cuadrados de los residuos. Los mismos estimadores se obtenían por la aplicación del principio de probabilidad máxima suponiendo que las observaciones están normalmente distribuidas. Donde simbólicamente se expresan de la siguiente manera:

$$l \sim N(Ax, \Sigma) \quad (3.36)$$

Donde Ax es la esperanza de l y Σ es la matriz covarianza. Posteriormente se necesitaban las siguientes matrices cofactor:

$$\begin{aligned} Q \hat{x} &= (A^t P A)^{-1} \\ Q_v &= Q - A (A^t P A)^{-1} A^t \\ Q \hat{l} &= A (A^t P A)^{-1} A^t = Q - Q_v \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dónde:

$$\hat{l} = 1 - v$$

Las derivaciones de estas matrices no se dan. Estas se pueden hallar en otros libros de texto sobre ajustes o puede derivarse por el lector usando las siguientes reglas.

Para obtener la matriz cofactor de un vector de funciones y , de un vector al azar l conociendo la matriz cofactor Q_l :

- i. expresar y como una función lineal (linealización) de l : $y = Bl$ (3.38)
- ii. aplicar la ley de propagación de varianzas: $Q_y = BQ_l B^t$ (3.39)
- iii. es posible simplificar el lado derecho de la ecuación (3.39).

Para concluir los cálculos es esencial chequear si los resultados numéricos se ajustan con el modelo o no.

3.2.1.3. Modelo del test global

El modelo del test global se introduce sin hacer una teoría estadística fundamental. El criterio de la también llamada hipótesis nula del test global es: "el modelo es correcto y completo". Esto se puede expresar de la siguiente forma:

$$H_0 : E (s_0^2) = \sigma_0^2 \quad (3.40)$$

y dada la prueba estadística:

$$T = v^t P v / \sigma_0^2 \quad (3.41)$$

De la cual H_0 , esta bajo la distribución X^2 con esperanza $(n-u)$:

$$T \sim X^2(n-u) \mid H_0 \quad (3.42)$$

Dónde:

\sim = está distribuida por...

| = bajo la condición que (H_0 es verdadera).

Después de seleccionar una probabilidad de error, típicamente $\alpha=5\%$, el valor de la distribución χ^2 con $n-u$ grados de libertad en $\alpha\%$ se lee en la tabla. Este valor $\chi_{\alpha}^2(n-u)$ es entonces comparado con T de la ecuación (3.41). Si:

$$T \leq \chi_{\alpha}^2(n-u) \quad (3.43)$$

Si la prueba no indica contradicciones entre las observaciones y el modelo matemático, es porque esta prueba no suministra la validez del modelo o las correcciones de las observaciones.

En el caso opuesto ($T > \chi^2$) es necesario investigar porque el modelo o las observaciones o si ambas son incorrectas. Pruebas o test estadísticos adicionales podrían ayudar a las investigaciones. Las posibles fuentes de error serían:

- ✓ En el modelo funcional:
 - Mapa proyectado (sistemas de coordenadas).
 - Instrumentación (parámetros de calibración).
 - Campo de gravedad.
 - Modelo de refracción.
 - Factor del tiempo.

Previamente los efectos no modelados pueden ser considerados por la reducción o corrección de las observaciones o ser tratados por una introducción de parámetros adicionales.

- ✓ En el modelo estocástico:
 - Varianzas a priori.
 - Correlaciones.

Una matriz de covarianza más realista a priori se necesitara.

- ✓ En el dato observado:

- Errores groseros en la medición.
- Errores reservados.
- Equivocaciones en la identificación de los puntos.
- Inestabilidad de los monumentos o señales de medición o vértices.
- Errores en el centrado.

La proyección de observaciones y residuos en combinación con las pruebas estadísticas pueden ayudar a la limpieza de los datos.

✓ En los cálculos:

- Errores en la programación.
- Errores de entrada.
- Estabilidad numérica de la matriz inversa.
- Acumulación de errores al redondear los resultados.

El uso de programas independientes podría indicar si existen problemas de esta naturaleza.

La detección de las fuentes de error es usualmente muy problemático. Pero se hace cada esfuerzo para llegar a un modelo matemático con aproximaciones a la realidad física con una considerable precisión mejor que las precisiones de las observaciones.

3.2.1.4. El problema del ajuste de redes

El problema del ajuste de redes se puede plantear de la siguiente manera: a través de una serie de observaciones l_1, \dots, l_m se proyectan determinar unas cantidades incógnitas x_1, \dots, x_n , como ejemplo mencionamos las coordenadas de los puntos de una red, que estén relacionadas con las cantidades observadas por ecuaciones en general no lineales del tipo,

$$\begin{aligned}
 F_1(x_1, \dots, x_n, l_1, \dots, l_m) &= 0 \\
 F_2(x_1, \dots, x_n, l_1, \dots, l_m) &= 0 \\
 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
 & \hspace{20em} (3.44)
 \end{aligned}$$

$$F_m(x_1, \dots, x_n, l_1, \dots, l_m) = 0$$

La determinación de las cantidades incógnitas x_1, \dots, x_n correspondería a la resolución de un sistema no lineal de m ecuaciones con n incógnitas, con la hipótesis adicional, $m > n$, esto es, más ecuaciones que incógnitas, o dicho en otras palabras, se realizan más observaciones que las estrictamente necesarias para la determinación de las incógnitas.

La resolución de problemas no lineales es complicada, y usualmente los ajustes de las redes se fundamentan en la linealización del sistema (3.44) a partir del conocimiento de información a priori de las cantidades incógnitas x_1, \dots, x_n : sean x^0_i unos valores aproximados de x_i mediante el desarrollo de series de Taylor de la función F_j en el punto x^0_i podemos escribir,

$$F_j(x_1, \dots, x_n, l_1, \dots, l_m) = F_j(x^0_1, \dots, x^0_n, l_1, \dots, l_m) + \sum (\partial F_j / \partial x_k)_0 dx_k,$$

$$dx_k = x_k - x_k^0, j = 1, \dots, m$$

en donde hemos relegado términos cuadráticos y de orden superior en dx_k . Esta aproximación necesita ser acorde con la realidad, para lo cual es necesario que los valores aproximados de las incógnitas conocidas con anterioridad, sean efectivamente aproximados, por ejemplo, en una red,

$$dx_k = |x_k - x_k^0| < \varepsilon d,$$

en el cual d es la distancia media entre los puntos de la red, y ε una pequeña cantidad que pueda oscilar entre 10^{-4} y 10^{-5} . Designando a,

$$F_j(x^0_1, \dots, x^0_n, l_1, \dots, l_m) = -t_j, j = 1, \dots, m,$$

cantidades conocidas, ya que la función F_j lo es, x_i^0 también y l_i son las observaciones. Así de esta manera, se alcanza el sistema de ecuaciones linealizado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1 - x_1^0) + \dots + a_{1n}(x_n - x_n^0) &= t_1 \\ \dots & \\ a_{m1}(x_1 - x_1^0) + \dots + a_{mn}(x_n - x_n^0) &= t_m \end{aligned} \tag{3.45}$$

en donde los coeficientes a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$,

$$a_{ij} = (\partial F_i / \partial x_j)_0$$

son correctamente conocidos a partir de los valores aproximados de las incógnitas (x_1^0, \dots, x_n^0) , (l_1, \dots, l_m) .

Al sistema lineal de la ecuación (3.45) se le denomina sistema de RELACIONES DE OBSERVACIÓN, y puede escribirse en forma matricial,

$$A \underline{x} = \underline{t} \tag{3.46}$$

donde A es la matriz de coeficientes de las incógnitas, frecuentemente llamada matriz de configuración o diseño, con m filas y n columnas, \underline{x} el vector de cantidades incógnitas,

$$\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_n)^T$$

y \underline{t} el vector de términos independientes.

El problema se plantea consiguientemente en los siguientes términos: Conocidos la matriz A y el vector de observaciones (términos independientes) \underline{t} , determinar el vector de incógnitas \underline{x} , dx_1, \dots, dx_n , es decir,

$$x_1 = x_1^0 + dx_1, \dots, x_n = x_n^0 + dx_n$$

la evaluación de las incógnitas x_1, \dots, x_n .

Hemos planteado el problema en términos meramente deterministas, ahora bien, podemos aprovechar la naturaleza estocástica de las observaciones l_1, \dots, l_m , de acuerdo a la teoría de errores de Gauss, para poder formular el modelo lineal de Gauss - Markov. Hagamos las siguientes hipótesis: El vector \underline{t} a través del vector de observaciones \underline{l} sigue una distribución normal m - dimensional, de media,

$$E(\underline{t}) = A \underline{x},$$

y matriz de covarianzas,

$$D^2(\underline{t}) = E(\underline{t} \underline{t}^T) = s^2 Q$$

De la misma manera,

$$\underline{t} \sim N(A \underline{x}, s^2 Q)$$

y el modelo lineal (3) se escribe en la forma,

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t} \tag{3.47}$$

En la que \underline{v} es un vector denominado de residuos o correcciones de las observaciones, que tiene el siguiente significado: El modelo de la ecuación (3.46), es un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas (sistema sobredeterminado). Habitualmente, este tipo de problemas no admite solución, es decir, no vamos a encontrar un único vector de incógnitas \underline{x} que verifique el sistema de forma exacta. Por consiguiente, cualquier "solución" \underline{x}_A no es más que una aproximación que producirá un vector de correcciones \underline{r} ,

$$A \underline{x}_A + \underline{r} = \underline{t}$$

y lo que vamos a intentar es minimizar de alguna forma este vector, o sea, encontrar "soluciones" que hagan lo más pequeño posible \underline{r} , o alguna función de \underline{r} . El vector aleatorio \underline{v} hace el papel del vector \underline{r} , y el sentido que tiene en la teoría de ajustes, es variar en cantidades pequeñas las observaciones a fin de encontrar una solución única óptima en cuanto a minimizar alguna funcional de \underline{r} . El vector de residuos \underline{v} verifica:

$$E(\underline{v}) = \underline{0} \quad D^2(\underline{v}) = s^2 Q \quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, s^2 Q) \quad (3.48)$$

por ende, sigue una distribución normal de media cero y matriz de covarianzas $s^2 Q$.

El modelo de la ecuación (3.47) con la hipótesis (3.48) se conoce como modelo de Gauss - Markov (GMM), y supone para su validez tres hechos primordiales:

- a) El modelo, en general no lineal, está bien linealizado, a partir de los valores aproximados de los parámetros incógnitas \underline{x}^0 .
- b) El valor esperado del vector de residuos es cero, lo que implica que no existen sistematismos ni errores groseros en las observaciones, esto es, el vector de residuos \underline{v} describe pequeños efectos aleatorios, tanto por la propia apreciación de los instrumentos de medida, como por errores accidentales debidos al observador o al medio no ideal en que se realizan las observaciones.
- c) En la matriz de covarianzas del vector \underline{v} , $s^2 Q$, o bien, del vector \underline{t} , se postula la precisión a priori de las observaciones, en función del instrumental utilizado y de los métodos de observación. A s^2 se le denomina factor de varianza a priori y Q es la matriz cofactor de las observaciones.

En estas condiciones de razonamiento del modelo de Gauss–Markov (GMM), el problema planteado puede resumirse en: obtenida una muestra aleatoria simple (observación), l_1, \dots, l_m estimar de forma óptima el valor de los parámetros incógnitas \underline{x} , relacionados con \underline{t} mediante un sistema de m ecuaciones y n incógnitas.

3.2.2. ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

Como ya se ha señalado anteriormente, en general no va a ser posible encontrar una solución única que verifique las “ m ” ecuaciones debidamente, por ende, buscaremos encontrar una estimación única de los parámetros \underline{x} que en cierto sentido sea la mejor aproximación.

El método de aproximación más usual es el de los mínimos cuadrados, tratándose de estimar \underline{x} bajo la condición,

$$\underline{v}^T Q^{-1} \underline{v} = \text{mínimo}$$

$$\underline{v}^T P \underline{v} = \text{mínimo}$$

en donde P es la matriz de pesos de las observaciones, $P = Q^{-1}$.

Valoremos $\underline{v}^T P \underline{v}$,

$$\underline{v}^T P \underline{v} = (\underline{t} - A \underline{x})^T P (\underline{t} - A \underline{x}) = \underline{t}^T P \underline{t} - 2 \underline{x}^T A^T P \underline{t} + \underline{x}^T A^T P A \underline{x}$$

y al atribuir la condición de mínimo,

$$\partial(\underline{v}^T P \underline{v}) / \partial \underline{x} = -2 A^T P \underline{t} + 2 A^T P A \underline{x} = \underline{0}$$

se determina la estimación mínimos cuadrados \underline{x} del vector de parámetros incógnitas,

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} \quad (3.49)$$

La matriz $A^T P A$ se denomina NORMAL y al sistema,

$$(A^T P A) \hat{\underline{x}} = A^T P \underline{t} \quad (3.50)$$

de n ecuaciones y n incógnitas, SISTEMA NORMAL, o de ECUACIONES NORMALES.

Encontrada la estimación $\hat{\underline{x}}$, vamos a demostrar que es la mejor estimación lineal centrada de \underline{x} , entendiendo por mejor la que tiene mínima varianza,

Consideremos una función lineal de \underline{x} ,

$$\underline{p}^T \underline{x} = \sum p_i x_i$$

e intentemos encontrar la mejor estimación lineal centrada de $\underline{p}^T \underline{x}$. Sea $\underline{q}^T \underline{t}$ la mejor estimación lineal centrada de $\underline{p}^T \underline{x}$, bajo estas condiciones vamos a tratar de encontrar \underline{q} .

La condición de estimación centrada se traduce en:

$$E(\underline{q}^T \underline{t}) = \underline{q}^T E(\underline{t}) = \underline{q}^T A \underline{x} = \underline{p}^T \underline{x} \quad \underline{q}^T A = \underline{p}^T$$

Dispongamos de la condición de mínima varianza,

$$D^2(\underline{q}^T \underline{t}) = s^2 \underline{q}^T Q \underline{q}$$

luego para cualquier otra estimación $\underline{q}'^T \underline{t}$

$$D^2(\underline{q}^T \underline{t}) = \underline{s}^T \underline{q}^T Q \underline{q} \geq \underline{s}^T \underline{q}^T Q \underline{q}.$$

Por tanto \underline{q} minimiza la forma cuadrática $\underline{y}^T Q \underline{y}$, y verifica la condición de centralidad, $\underline{q}^T A = \underline{p}^T$, situación ideal para aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para resolver este problema de mínimo sujeto a condiciones.

Sea la forma cuadrática,

$$w = \underline{y}^T Q \underline{y} - 2 \underline{\lambda}^T (A^T \underline{y} - \underline{p})$$

en la cual, $\underline{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange. La condición de mínimo para w se traduce en:

$$\partial w / \partial \underline{\lambda} = \underline{0} \quad ; \quad \partial w / \partial \underline{y} = \underline{0}$$

que conduce a las ecuaciones,

$$Q \underline{q} = A \underline{\lambda} \quad \underline{q} = Q^{-1} A \underline{\lambda} = P A \underline{\lambda}$$

y dado que,

$$\underline{p}^T = \underline{q}^T A = \underline{\lambda}^T A^T P A$$

$$\underline{\lambda}^T = \underline{p}^T (A^T P A)^{-1}$$

$$\underline{q}^T = \underline{p}^T (A^T P A)^{-1} A^T P$$

y por consiguiente, la mejor estimación lineal centrada de $\underline{p}^T \underline{x}$ es

$$\underline{p}^T \underline{x} = \underline{p}^T (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} \tag{3.51}$$

y su varianza es,

$$D^2(\underline{p}^T \underline{x}) = D^2(\underline{q}^T \underline{t}) = \underline{q}^T D^2(\underline{t}) \underline{q} = s^2 \underline{q}^T \underline{Q} \underline{q} = s^2 \underline{p}^T (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{p}$$

Especialmente, la matriz de covarianzas de la estimación $\hat{\underline{x}}$ del vector de parámetros incógnitas \underline{x} , es

$$D^2(\hat{\underline{x}}) = D^2((\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{t}) = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} D^2(\underline{t}) \underline{P} \underline{A} (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} = s^2 (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1}$$

ya que $(\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})$ es una matriz simétrica.

Si bien \underline{x} es un vector de variables deterministas (no aleatorias), la estimación $\hat{\underline{x}}$ es un vector aleatorio que se distribuye según una variable normal n -dimensional de media,

$$E(\hat{\underline{x}}) = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} E(\underline{t}) = \underline{x}$$

con matriz de covarianzas,

$$D^2(\hat{\underline{x}}) = s_o^2 (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1}, \quad (3.52)$$

Luego,

$$\hat{\underline{x}} \sim N(\underline{x}, s_o^2 (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1}) \quad (3.53)$$

La estimación del vector de observaciones \underline{t} viene dada por,

$$\underline{t} = \underline{A} \underline{x} = \underline{A} (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{t} = \underline{A} \underline{N}^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{t} \quad (3.54)$$

que nos facilita el vector de observaciones ajustadas.

La matriz $A (A^T P A)^{-1} A^T P$ juega un papel importante en la teoría de estimación mínimo cuadrática. Llamemos R a esta matriz y demostremos que es idempotente, esto es,

$$R R = A (A^T P A)^{-1} A^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P = A (A^T P A)^{-1} A^T P = R$$

y al mismo tiempo es simétrica.

Aplicando la ley de propagación de las covarianzas,

$$D^2(\underline{t}) = D^2(A \underline{x}) = A D^2(\underline{x}) A^T = s_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T$$

La cual es la matriz de covarianzas de la estimación \underline{t} .

La media de la variable \underline{t} es,

$$E(\underline{t}) = E(A \hat{\underline{x}}) = A \underline{x} = E(\underline{t})$$

luego,

$$\underline{t} \sim N(A \underline{x}, s_0^2 A (A^T P A)^{-1} A^T) \quad (3.55)$$

La estimación del vector de residuos es,

$$\hat{\underline{y}} - A \underline{x} = \underline{t} - A (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} = (I_m - A (A^T P A)^{-1} A^T P) \underline{t} = (I_m - R) \underline{t} \quad (3.56)$$

En la que I_m es la matriz identidad de rango m .

La matriz $(I_m - R)$ también es idempotente, debido que

$$(I_m - R)(I_m - R) = I_m - 2R + R = (I_m - R)$$

asimismo es simétrica, semejante a R.

La media del vector de residuos ajustados,

$$E(\hat{y}) = E(t) - E(Ax) = E(t) - Ax = Ax - Ax = \underline{0}$$

y su matriz de covarianzas,

$$D^2(\hat{y}) = (I_m - R) D^2(t) (I_m - R) = s_o^2 (I_m - R) Q (I_m - R) = s_o^2 (Q - A (A^T P A)^{-1} A^T) = D^2(t) - D^2(t)$$

luego,

$$\hat{y} \sim N(\underline{0}, s^2 (Q - A (A^T P A)^{-1} A^T)) \quad (3.57)$$

Una propiedad importante es que las filas de la matriz $(I_m - R)$ son ortogonales a las columnas de A, es sea,

$$(I_m - R) A = A - R A = A - A (A^T P A)^{-1} A^T P A = A - A = 0,$$

luego una verificación de la bondad de un ajuste es,

$$\begin{aligned} A^T P \underline{y} &= A^T P (I_m - A (A^T P A)^{-1} A^T P) \underline{t} = (A^T P - A^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P) \underline{t} = \\ &= (A^T P - A^T P) \underline{t} = \underline{0} \end{aligned}$$

las filas de la matriz $A^T P$ son ortogonales al vector de residuos ajustados.

Por tanto, las filas de la matriz $(I_m - R)$ corresponden al núcleo de la matriz A de dimensión $(m - n)$, ya que el rango $(A) = n$, concluyendo en que el rango $(I_m - R) =$

$(m - n)$ y que $\text{rango}(R) = n$. Por consiguiente, la matriz R (m, n) tiene $(m - n)$ filas (columnas) linealmente dependientes con el resto de la matriz $(I_m - R)$, n .

$$\text{Rango}(I_m - R) = m - n; \quad \text{rango}(R) = n.$$

A continuación, vamos a tratar de encontrar una estimación centrada de la varianza de peso unidad s^2 , para lo cual se va a determinar la esperanza matemática de la forma cuadrática,

$$\hat{\underline{y}}^T P \hat{\underline{y}} = \underline{t}^T P (I_m - R) \underline{t} = \underline{t}^T P \underline{t} - \underline{t}^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} = \underline{t}^T P \underline{t} - \hat{\underline{x}}^T A^T P \underline{t}$$

$$E(\hat{\underline{y}}^T P \hat{\underline{y}}) = s_0^2 \text{traza}(I_m - R) P Q = s_0^2 \text{rango}(I_m - R) = s_0^2 (m - n),$$

derivándose que

$$\hat{s}_0^2 = \frac{\hat{\underline{y}}^T P \hat{\underline{y}}}{m - n}$$

es una estimación centrada de s_0^2 ,

$$E(\hat{s}_0^2) = s_0^2$$

Se ha aplicado el siguiente resultado de distribución de formas cuadráticas: Si,

$$\underline{x} \sim N(\underline{\mu}, V),$$

entonces, $E(\underline{x}^T A \underline{x}) = \text{traza}(A V) + \underline{\mu}^T A \underline{\mu}$ y en el caso expuesto,

$$E(\underline{t}^T P (I_m - R) \underline{t}) = \text{traza}(I_m - R) + \underline{x}^T A^T (I_m - R) A \underline{x}$$

y el resultado de este término es cero.

Al mismo tiempo el resultado significativo en cuanto a la distribución de la forma cuadrática $\underline{v}^T P \underline{v}$ es que, \underline{x} y $\underline{v}^T P \underline{v}$ se distribuyen de forma independiente, ya que:

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} = B_1 \underline{t}$$

$$\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}} = \underline{t}^T B_2 \underline{t}, \quad B_2 = P (I_m - A (A^T P A)^{-1} A^T P)$$

confirmándose que:

$$B_1 B_2 = (A^T P A)^{-1} A^T P (P - P A (A^T P A)^{-1} A^T P) = 0$$

de esta manera queda demostrado.

Llamemos SSE a la forma cuadrática $\underline{v}^T P \underline{v}$, SST a $\underline{t}^T P \underline{t}$ y SSR a $\underline{t}^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t}$, que verifican,

$$SSE = SST - SSR, \quad SST = SSE + SSR.$$

Se procura determinar la distribución de estas formas cuadráticas, para lo que vamos a realizar un cambio de variable con el fin de simplificar los cálculos. La matriz de pesos P se supone por hipótesis definida positiva, luego existe una única matriz S triangular superior (inferior) de tal forma que,

$$P = S^T S$$

generalmente en ajustes geodésicos o topográficos, la matriz P es diagonal, asimismo lo es S , y

$$s_{ii} = \sqrt{p_{ii}}$$

Consideremos el modelo,

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t} \quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, s_0^2 Q)$$

multiplicando por S en ambos miembros,

$$S \underline{t} = S A \underline{x} + S \underline{v}$$

y precisando las nuevas variables,

$$\underline{v}' = S \underline{v}, \underline{t}' = S \underline{t}, A' = S A,$$

se alcanza el modelo,

$$\underline{t}' = A' \underline{x} + \underline{v}' \quad \underline{v}' \sim N(\underline{0}, s^2 I_m)$$

y las formas cuadráticas se transforman en:

$$SSE = \underline{t}'^T (I_m - A'(A'^T A')^{-1} A'^T) \underline{t}'$$

$$SST = \underline{t}'^T \underline{t}'$$

$$SSR = \underline{t}'^T A'(A'^T A')^{-1} A'^T \underline{t}'$$

Veamos primeramente la distribución de la forma cuadrática SSE/s^2 de matriz asociada $(I_m - A'(A'^T A')^{-1} A'^T)/s^2$, que es idempotente y de rango $(m - n)$ que son los grados de libertad del ajuste. Empleamos el siguiente resultado de distribución de formas cuadráticas:

Si $\underline{x} \sim N(\underline{\mu}, V)$, entonces $\underline{x}^T B \underline{x} \sim X^2(\text{rango}(B))$ si y sólo si B es idempotente, indicando por X^2 la distribución X^2 no central con parámetro de no centralidad $\underline{\mu}^T B \underline{\mu}/2$.

En este caso,

$$\underline{t}' \sim N(A' \underline{x}, s_o^2 I_m)$$

y por tanto,

$$SSE/ s_o^2 \sim X^2(\text{rango}(I_m - A'(A^T A)^{-1} A^T), \lambda)$$

en donde λ es el parámetro de no centralidad proporcionado por,

$$\lambda = \underline{x}^T A^T (I_m - A'(A^T A)^{-1} A') A' \underline{x} / 2 s_o^2 = 0$$

luego SSE/s^2 sigue una distribución X^2 central con $(m - n)$ grados de libertad,

$$SSE/s_o^2 \sim X^2_{m-n}$$

y puesto que

$$SSE = (m - n) s_o^2$$

$$(m - n) \hat{s}_o^2 / s_o^2 \sim X^2_{m-n} = F_{m-n, \infty} (m - n)$$

$$\hat{s}_o^2 / s^2 \sim F_{m-n, \infty}$$

Enseñando por F la distribución F de Snedecor, con $(m - n), \infty$ grados de libertad.

Este resultado es importante en los ajustes geodésicos, en los que normalmente se toma $s_o^2 = 1$, demandándose la precisión de las observaciones en la matriz Q , usando la distribución del estadístico s_o^2 para contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas a priori y a posteriori, esto es, la bondad del ajuste en cuanto a la veracidad de la hipótesis de precisión de las observaciones efectuada a priori.

Respecto a la forma cuadrática SST, tenemos que:

$$SST/s_o^2 \sim X^2(\text{rango}(I_m), \underline{x}^T A^T A' \underline{x}/2s_o^2) = X^2(m, \underline{x}^T A^T A' \underline{x}/2s_o^2)$$

y desorganizando el cambio de variable,

$$SST/s_o^2 \sim X^2(m, \underline{x}^T A^T P A \underline{x}/2s_o^2)$$

sigue una distribución X^2 no central con m grados de libertad y parámetro de no centralidad $\underline{x}^T A^T P A \underline{x}/2 s_o^2$.

La distribución de la forma cuadrática SSR se obtiene de igual forma,

$$SSR/s_o^2 \sim X^2(n, \underline{x}^T A^T P A \underline{x}/2s_o^2)$$

y por supuesto la razón de formas cuadráticas,

$$F(R) = SSR (m - n)/SSE n \sim F'(n, m-n, \underline{x}^T A^T P A \underline{x}/2s_o^2)$$

Emplearemos estos resultados en la contrastación de hipótesis efectuadas sobre el modelo Gauss-Markov, y evidentemente están basados en que la variable aleatoria \underline{y} siguiendo una distribución normal de media cero y matriz de covarianzas $s^2 Q$.

La matriz de covarianzas $D^2(\underline{x})$ juega un papel fundamental para la definición de la precisión con que se han determinado los parámetros incógnitas \underline{x} . Debido a que la matriz A es de rango completo, $\text{rango}(A) = n$, la matriz $(A^T P A)$ es definida positiva e igualmente lo es,

$$D^2(\underline{x}) = s^2 (A^T P A)^{-1}$$

obteniendo todos sus autovalores distintos de cero y positivos.

3.2.3. INTERVALOS DE CONFIANZA

Las variables unidimensionales,

$$(\hat{x}_i - x_i) / s_o \sqrt{N^{ii}} \sim N(0, 1) \quad i = 1, \dots, n$$

indicando por N^{ii} el i -ésimo elemento de la diagonal principal de la matriz N^{-1} .

En el caso en que s_o^2 no se conozca a priori, se utiliza la estimación \hat{s}_o^2 , y tenemos que,

$$(\hat{x}_i - x_i) / \hat{s}_o \sqrt{N^{ii}} \sim t_{m-n} \quad i = 1, \dots, n$$

indicando por t_{m-n} la distribución t de Student con $(m-n)$ grados de libertad.

Para un nivel de significación α (confianza $(1 - \alpha)$) dado a priori, se pueden hallar los intervalos de confianza para los parámetros x_i . Sean $t_{m-n, \alpha}$ y $t_{m-n, \alpha}$ dos números tales que,

$$\Pr(t_{m-n} < t_{m-n, \alpha}) + \Pr(t_{m-n} > t_{m-n, \alpha}) = \alpha,$$

O sea,

$$\Pr(t_{m-n,\alpha} < t_{m-n} < t_{m-n,\alpha}) = 1 - \alpha$$

sustituyendo la distribución t_{m-n} por su valor,

$$\Pr(t_{m-n,\alpha} < (\hat{x}_i - x_i) / \hat{s}_o^2 \sqrt{N^{ii}} < t_{m-n,\alpha}) = 1 - \alpha$$

y despejando los parámetros x_i , determinamos el intervalo de confianza para el parámetro x_i ,

$$\Pr(\hat{x}_i - t_{m-n,\alpha} \hat{s}_o^2 \sqrt{N^{ii}} < \hat{x}_i < x_i + t_{m-n,\alpha} \hat{s}_o^2 \sqrt{N^{ii}}) = 1 - \alpha$$

$$i = 1, \dots, n$$

que depende del nivel de confianza a través de $t_{m-n,\alpha}$ y $t_{m-n,\alpha}$, del error medio cuadrático (desviación típica) de peso unidad \hat{s}_o^2 y de la matriz cofactor N^{ii} .

Habitualmente se supone simétrico el intervalo de confianza, eligiendo $t_{m-n,\alpha}$ y $t_{m-n,\alpha}$ como $t_{m-n,1/2\alpha}$, obteniendo el intervalo de confianza para la variable x_i ,

$$I = (\hat{x}_i - \hat{s}_o^2 t_{m-n,1/2\alpha} \sqrt{N^{ii}}, \hat{x}_i + \hat{s}_o^2 t_{m-n,1/2\alpha} \sqrt{N^{ii}})$$

$$\Pr(x_i \in I) = 1 - \alpha, \quad i = 1, \dots, n$$

que precisan en cierta manera la garantía con que se han determinado (estimado) los parámetros x_i .

En el caso en que s_o^2 sea conocido a priori el intervalo de confianza para el parámetro x_i es:

$$I = (\hat{x}_i - \hat{\sigma}_o^2 t_\alpha \sqrt{N^{ii}}, \hat{x}_i + \hat{\sigma}_o^2 t_\alpha \sqrt{N^{ii}})$$

Estando en función de t_α únicamente del nivel de significación α .

Por ejemplo, para:

$$\alpha = 0.05 \quad (1 - \alpha = 0.95) \quad t_\alpha = 1.96$$

$$\alpha = 0.01 \quad (1 - \alpha = 0.99) \quad t_\alpha = 2.96$$

$$\alpha = 0.001 \quad (1 - \alpha = 0.999) \quad t_\alpha = 3.26$$

En general el intervalo de confianza para cualquier funcional lineal de \underline{x} , por ejemplo, $\underline{q}^T \underline{x}$, queda determinado por,

$$(\underline{q}^T \hat{\underline{x}} - \hat{\sigma}_o^2 \underline{q}^T N^{ii} \underline{q} t_{m-n,1/2\alpha}, \underline{q}^T \hat{\underline{x}} + \hat{\sigma}_o^2 \underline{q}^T N^{ii} \underline{q} t_{m-n,1/2\alpha})$$

y en particular para la i -ésima observación $\underline{q}^T = A_i$, indicando por A_i la i -ésima fila de la matriz A ,

$$(A_i \hat{\underline{x}} - \hat{\sigma}_o^2 A_i^T N^{ii} A_i t_{m-n,1/2\alpha}, A_i \hat{\underline{x}} + \hat{\sigma}_o^2 A_i^T N^{ii} A_i t_{m-n,1/2\alpha})$$

que define el intervalo de confianza para la observación i -ésima para un nivel de significación α . De acuerdo a la distribución de Fisher o de Snedecor alcanzamos llegar al concepto de la fiabilidad de las redes geodésicas, el cual está en función del nivel de significancia α , y que nos conduce a obtener las observaciones que no nos sirven, a través de un nuevo análisis estadístico y de esta manera deducir la bondad de la red geodésica. Por último y concluyendo la parte del estudio de las redes geodesias, podemos decir, que se parte comúnmente de unos procesos iniciales de medición y subsiguientemente se procede al cálculo de las coordenadas iniciales

de los vértices que componen la red, para luego realizar el ajuste de las coordenadas de los mismo, empleando los siguientes datos:

- Vértices fijos.
- Tipos de ajuste.
- Número de observaciones.
- Número de incógnitas.

Y así de esta forma, determinar unos resultados finales con los valores de las coordenadas geodésicas, valores de los residuos en coordenadas y valores de las correspondientes elipses de error, y consecutivamente se calculan los parámetros de transformación para pasar de un sistema de referencia a otro, para finalizar con las conclusiones que se obtienen de los cálculos ejecutados.

3.3. ECUACIONES DE OBSERVACIÓN DE LA GEODESIA

3.3.1. MÉTODO DE VARIACIÓN DE COORDENADAS. COORDENADAS CARTESIANAS

Es complicado formar las ecuaciones de condición, por lo que se hace necesario analizar alguna metodología que permita resolver los casos más comunes o utilizados. Este método es útil para realizar compensaciones de visuales, cubriendo de esta manera el tema de las intersecciones directas e inversas, utilizándose habitualmente en las densificaciones de triangulaciones geodésicas, con la introducción de puntos o vértices adicionales. Como se ha mencionado anteriormente, las ecuaciones (2.25), (2.26) y (2.27), que relacionan las coordenadas polares (α , β , D) con las coordenadas cartesianas (X , Y , Z),

$$\alpha_{Tt} = \text{tg}^{-1} \frac{-\Delta Y \text{sen} \lambda_T - \Delta X \text{cos} \lambda_T}{-\Delta X \text{sen} \varphi \text{cos} \lambda - \Delta Y \text{sen} \varphi \text{cos} \lambda - \Delta Z \text{cos} \varphi} \quad (2.25),$$

$$\beta_{Tt} = \cos^{-1} \frac{\Delta X \cos \varphi \cos \lambda - \Delta Y \cos \varphi \sin \lambda + \Delta Z \sin \varphi}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} \quad (2.26),$$

$$D_{Tt} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (2.27).$$

Donde $\Delta X = X_t - X_T$, $\Delta Y = Y_t - Y_T$, $\Delta Z = Z_t - Z_T$.

Tratamos de hallar como las pequeñas variaciones de las coordenadas (X, Y, Z), en los puntos T y t, (dx, dY, dZ) influyen en las coordenadas polares (α , β , D), (d α , d β , dD). Para lo cual diferenciamos estas expresiones, obteniendo sin dificultad los diferenciales.

3.3.1.1. Ecuaciones diferenciales

a). Diferencial del acimut

$$d\alpha_{Tt} = a_1 (dX_t - dX_T) + a_2 (dY_t - dY_T) + a_3 (dZ_t - dZ_T) + a_4 d\Phi_T + a_5 d\Lambda_T \quad (3.58),$$

donde,

$$a_1 = \frac{(\sin \varphi_T \cos \lambda_T \sin \alpha_{Tt} - \sin \lambda_T \cos \alpha_{Tt})}{D_{Tt} \sin \beta_{Tt}}$$

$$a_2 = \frac{(\sin \varphi_T \sin \lambda_T \sin \alpha_{Tt} - \cos \lambda_T \cos \alpha_{Tt})}{D_{Tt} \sin \beta_{Tt}}$$

$$a_3 = \frac{-\cos \varphi_T \sin \alpha_{Tt}}{D_{Tt} \sin \beta_{Tt}}$$

$$a_4 = \tan^{-1} \beta_{Tt} \sin \Lambda_T$$

$$a_5 = \sin \Phi_T - \cos \alpha_{Tt} \cos \Phi_T \tan^{-1} \beta_{Tt}$$

Entendiendo (φ , λ) en el punto T y (α , β , D) para la línea de observación Tt.

b). Diferencial de la distancia

$$dD_{Tt} = b_1 (dX_t - dX_T) + b_2(dY_t - dY_T) + b_3 (dZ_t - dZ_T), \quad (3.59),$$

dónde:

$$b_1 = \frac{(X_t - X_T)}{D} = \frac{\Delta X}{D}$$

$$b_2 = \frac{(Y_t - Y_T)}{D} = \frac{\Delta Y}{D}$$

$$b_3 = \frac{(Z_t - Z_T)}{D} = \frac{\Delta Z}{D}$$

c). Diferencial del ángulo cenital

$$d\beta_{Tt} = c_1 (dX_t - dX_T) + c_2(dY_t - dY_T) + c_3 (dZ_t - dZ_T) + c_4 d\Phi_T + c_5 d\Lambda_T, \quad (3.60)$$

donde,

$$c_1 = \frac{(\Delta X \text{sen} \beta_{Tt} - D_{Tt} \cos \varphi_T \cos \lambda_T)}{D^2_{Tt} \text{sen} \beta_{Tt}}$$

$$c_2 = \frac{(\Delta X \text{sen} \beta_{Tt} - D_{Tt} \cos \varphi_T \cos \lambda_T)}{D^2_{Tt} \text{sen} \beta_{Tt}}$$

$$c_3 = \frac{(\Delta Z \cos \beta_{Tt} - D_{Tt} \text{sen} \varphi_T)}{D^2_{Tt} \text{sen} \beta_{Tt}}$$

$$c_4 = -\cos \alpha_{Tt}$$

$$c_5 = -\cos \Phi_T \text{sen} \alpha_{Tt}$$

d). Diferencial de incremento de coordenadas cartesianas tridimensionales

$$d(X_t - X_T) = d(\Delta X) = dX_t - dX_T$$

$$d(Y_t - Y_T) = d(\Delta Y) = dY_t - dY_T$$

$$d(Z_t - Z_T) = d(\Delta Z) = dZ_t - dZ_T$$

Resuelta las formulas diferenciales, a continuaciones procede a determinar las ecuaciones de observación suponiendo que se conocen las coordenadas de los puntos aproximados (X^o, Y^o, Z^o) , o también $(\varphi^o, \lambda^o, h^o)$.

3.3.1.2. Ecuaciones de observaciones geodésicas

a). Ecuación de observación para acimutes

La ecuación de observación para la observación para la observación del acimut, recordando la ecuación diferencial, se puede expresar de la siguiente manera:

$$V_{\alpha_{Tt}} = a_1^o (dX_t - dX_T) + a_2^o (dY_t - dY_T) + a_3^o (dZ_t - dZ_T) + a_4^o d\Phi_T + a_5^o d\Lambda_T + (\alpha^o_{Tt} - \alpha_{Tt}) \quad (3.61)$$

Donde α^o_{Tt} es el valor del acimut para las coordenadas aproximadas (X^o, Y^o, Z^o) , o también $(\varphi^o, \lambda^o, h^o)$. De acuerdo a lo anterior (α^o, β^o, D^o) son las coordenadas polares calculadas a partir de las coordenadas aproximadas (X^o, Y^o, Z^o) .

b). Ecuación de observación de dirección horizontal

Una dirección horizontal l_{Tt} esta precisada por:

$$\alpha_{Tt} = O_T + l_{Tt}$$

En donde O_{Tt} es la desorientación de la vuelta de horizonte, que está en función únicamente del punto de estación T. Por consiguiente:

$$d\alpha_{Tt} = dO_T + dl_{Tt}$$

y la ecuación de la dirección es por tanto:

$$V_{l_{Tt}} = -dO_T + a_1^0 (dX_t - dX_T) + a_2^0 (dY_t - dY_T) + a_3^0 (dZ_t - dZ_T) + a_4^0 d\Phi_T + a_5^0 d\Lambda_T + (\alpha_{Tt} - (l_{Tt} + O^0_T)), \quad (3.62)$$

En la que O^0_T es el valor aproximado de la desorientación y dO_T es la incógnita de orientación de la vuelta de horizonte.

c). Ecuación de observación de ángulo horizontal

Consideremos el punto de estación T y se visan los puntos t y t', obtendríamos dos ecuaciones, una para la dirección Tt y otra para la dirección Tt',

$$V_{l_{Tt}} = -dO_T + a_1^0 (dX_t - dX_T) + a_2^0 (dY_t - dY_T) + a_3^0 (dZ_t - dZ_T) + a_4^0 d\Phi_T + a_5^0 d\Lambda_T + (\alpha_{Tt} - (l_{Tt} + O^0_T)), \quad (3.63)$$

Y para t' :

$$V_{l_{Tt'}} = -dO_T + a_1'^0 (dX_{t'} - dX_T) + a_2'^0 (dY_{t'} - dY_T) + a_3'^0 (dZ_{t'} - dZ_T) + a_4'^0 d\Phi_T + a_5'^0 d\Lambda_T + (\alpha_{Tt'} - (l_{Tt'} + O^0_T)), \quad (3.64)$$

Aplicando una resta entre las ecuaciones anteriores, es decir, la (3.64) menos la (3.63),

$$V_\alpha = [a_1'^0 (dX_{t'} - dX_T) - a_1^0 (dX_t - dX_T)] + [a_2'^0 (dY_{t'} - dY_T) - a_2^0 (dY_t - dY_T)] + [a_3'^0 (dZ_{t'} - dZ_T) - a_3^0 (dZ_t - dZ_T)] + d\Phi_T (a_4'^0 - a_4^0) + d\Lambda_T (a_5'^0 - a_5^0) + (\alpha_{Tt'} - \alpha^0_{Tt}) - (l_{Tt'} - l_{Tt}), \quad (3.65)$$

Como vemos esta ecuación tiene nueve incógnitas, tres para el punto t, (dX_t , dY_t , dZ_t), tres para el punto t', ($dX_{t'}$, $dY_{t'}$, $dZ_{t'}$) y tres para el punto T, (dX_T , dY_T , dZ_T).

d). Ecuación de distancia

La ecuación de observación de una distancia es de la siguiente manera:

$$V_{D_{Tt}} = e_1^o (dX_t - dX_T) + e_2^o (dY_t - dY_T) + e_3^o (dZ_t - dZ_T) + (D_{Tt}^o - D_{Tt}) \quad (3.66)$$

Donde:

$$e_1^o = \frac{X_t^o - X_T^o}{D_{Tt}^o}; \quad e_2^o = \frac{Y_t^o - Y_T^o}{D_{Tt}^o}; \quad e_3^o = \frac{Z_t^o - Z_T^o}{D_{Tt}^o};$$

$$D_{Tt}^o = \sqrt{(X_t^o - X_T^o)^2 + (Y_t^o - Y_T^o)^2 + (Z_t^o - Z_T^o)^2}$$

e). Ecuación de observación de ángulo cenital

La ecuación de observación para ángulo cenital observado, puede expresarse de la siguiente manera:

$$V_{\beta_{Tt}} = -D_{Tt}^o dK_T + c_1^o (dX_t - dX_T) + c_2^o (dY_t - dY_T) + c_3^o (dZ_t - dZ_T) + c_4^o d\Phi_T + c_5^o d\Lambda_T + (\beta_{Tt}^o - (\beta_{Tt} + \beta_{Tt}^o K_T^o)), \quad (3.67)$$

En la que K_T^o es el coeficiente de refracción aproximado, dK_T^o es la incógnita residual de la refracción para la estación T, β_{Tt}^o es el valor del ángulo cenital determinado a partir de las coordenadas aproximadas, y los coeficientes c_i^o , expresados de esta forma:

$$c_1^o = \frac{((X_t^o - X_T^o) \cos \beta_{Tt}^o - D_{Tt}^o \cos \varphi_T^o \cos \lambda_T^o)}{(D_{Tt}^o \sin \beta_{Tt}^o)},$$

$$c_2^0 = \frac{((Y_t^0 - Y_T^0) \cos \beta_{Tt}^0 - D_{Tt}^0 \cos \varphi_T^0 \cos \lambda_T^0)}{(D_{Tt}^0 \sin \beta_{Tt}^0)},$$

$$c_3^0 = \frac{((Z_t^0 - 0) \cos \beta_{Tt}^0 - D_{Tt}^0 \varphi_T^0)}{(D_{Tt}^0 \sin \beta_{Tt}^0)},$$

$$c_4^0 = -\cos \alpha_{Tt}^0,$$

$$c_5^0 = -\cos \varphi_{Tt}^0 \sin \alpha_{Tt}^0,$$

Y valoradas en las coordenadas aproximadas.

f). Ecuación de observación para diferencias de altitud o nivel

Analizamos el observable Δh entre dos puntos T y t, la ecuación de observación se puede expresar la siguiente manera:

$$t_{\Delta h} + dh_t - dh_T = \Delta h^0 = (h_t - h_T) - (h_t^0 - h_T^0)$$

y, ya que:

$$dh = \cos \varphi \cos \lambda dX + \cos \varphi \sin \lambda dY + \sin \varphi dZ$$

podemos aproximar la ecuación de la siguiente forma:

$$\cos \varphi_t = \cos \varphi_T$$

$$\cos \lambda_t = \cos \lambda_T$$

$$\sin \varphi_t = \sin \varphi_T$$

$$\sin \lambda_t = \sin \lambda_T$$

$$t_{\Delta h} + d_1^0 (dX_t - dX_T) + d_2^0 (dY_t - dY_T) + d_3^0 (dZ_t - dZ_T) = \Delta h - \Delta h^0$$

donde:

$$d_1^{\circ} = \cos \varphi_t^{\circ} - \cos \lambda_T^{\circ}$$

$$d_2^{\circ} = \cos \varphi_t^{\circ} - \sin \lambda_T^{\circ}$$

$$d_{13}^{\circ} = \sin \varphi_t^{\circ}$$

g). Ecuación de observación para latitudes astronómicas

$$t_{\Phi_T} = d\Phi_T + (\Phi_T^{\circ} - \Phi_T),$$

En la que Φ_T° es un valor aproximado para la latitud astronómica, es decir, $\Phi_T^{\circ} = \varphi_T^{\circ}$, y Φ_T es la latitud observada.

h). Ecuación de observación para longitudes astronómicas

$$t_{\Lambda_T} = d\Lambda_T + (\Lambda_T^{\circ} - \Lambda_T),$$

En la que Λ_T° es un valor aproximado para la longitud astronómica, es decir, $\Lambda_T^{\circ} = \lambda_T^{\circ}$, y Λ_T es la longitud observada.

i). Ecuación en diferencias de coordenadas cartesianas tridimensionales (gps)

Ahora bien, si las cantidades observadas son incrementos de coordenadas cartesianas directamente,

$$(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z) = (X_t - X_T, Y_t - Y_T, Z_t - Z_T),$$

Al igual que ocurre en las observaciones satelitales, veríamos que:

$$d(X_t - X_T) = dX_t - dX_T,$$

$$d(Y_t - Y_T) = dY_t - dY_T,$$

$$d(Z_t - Z_T) = dZ_t - dZ_T,$$

al ya haber obtenido las ecuaciones diferenciales, que expresan la diferencial de las observaciones, acimutes, distancias, cenitales e incrementos de coordenadas, vamos a deducir las ecuaciones de observación suponiendo que se conocen las coordenadas aproximadas de los puntos observados (X^o, Y^o, Z^o) , o también $(\varphi^o, \lambda^o, h^o)$ que pueden tomarse como una aproximación de las coordenadas astronómicas (Φ, Λ) comúnmente desconocidas. Por tanto, para la coordenada X:

$$t_{\Delta X} = (dX_t - dX_T) + (X_t^o - X_T^o) - (X_t - X_T),$$

En donde,

$(X_t - X_T)$ es el valor observado, y, $(X_t^o - X_T^o)$ es el valor calculado a partir de las coordenadas aproximadas. Para la coordenada Y:

$$t_{\Delta Y} = (dY_t - dY_T) + (Y_t^o - Y_T^o) - (Y_t - Y_T),$$

En donde,

$(Y_t - Y_T)$ es el valor observado, y, $(Y_t^o - Y_T^o)$ es el valor calculado a partir de las coordenadas aproximadas. Para la coordenada Z:

$$t_{\Delta Z} = (dZ_t - dZ_T) + (Z_t^o - Z_T^o) - (Z_t - Z_T),$$

En donde,

$(Z_t - Z_T)$ es el valor observado, y, $(Z_t^o - Z_T^o)$ es el valor calculado a partir de las coordenadas aproximadas. Por último, señalamos que estas son las ecuaciones fundamentales en geodesia tridimensional referentes al sistema cartesiano global (X, Y, Z) .

3.3.2. ECUACIONES DE OBSERVACIÓN SOBRE LA SUPERFICIE DE UN ELIPSOIDE. COORDENADAS GEODÉSICAS

A través de las formulas diferenciales que expresa (dX, dY, dZ) en función de (dφ, dλ, dh), se encuentran sin dificultad las formulas diferenciales que expresan la variación de las cantidades observadas en función observadas en función de (dφ, dλ, dh).

3.3.2.1. Ecuaciones diferenciales

a) *Diferencial para acimut astronómico.*

$$d\alpha_{Tt} = a_1 d\phi_T + a_2 d\lambda_T + a_3 dh_T + a_4 d\phi_t + a_5 d\lambda_t + a_6 dh_t + a_7 d\Phi_T + a_8 d\Lambda_T.$$

dónde:

$$a_1 = \text{sen } \alpha_{Tt} / (D_{Tt} \text{ sen } \beta_{Tt}),$$

$$a_2 = - \text{cos } \alpha_{Tt} / (D_{Tt} \text{ sen } \beta_{Tt}),$$

$$a_3 = 0,$$

$$a_4 = - \text{sen } \alpha_{Tt} / (D_{Tt} \text{ sen } \beta_{Tt}),$$

$$a_5 = \text{cos } \alpha_{Tt} / (D_{Tt} \text{ sen } \beta_{Tt}),$$

$$a_6 = 0,$$

$$a_7 = \text{sen } \alpha_{Tt} \tan^{-1} \beta_{Tt},$$

$$a_8 = \text{sen } \Phi_T - \text{cos } \alpha_{Tt} \text{ sen } \Phi_T \tan^{-1} \beta_{Tt},$$

b) *Diferencial para las distancias.*

$$dD_{Tt} = e_1 d\phi_T + e_2 d\lambda_T + e_3 dh_T + e_4 d\phi_t + e_5 d\lambda_t + e_6 dh_t.$$

dónde:

$$e_1 = -\operatorname{sen} \beta_{Tt} \cos \alpha_{Tt},$$

$$e_2 = -\operatorname{sen} \beta_{Tt} \operatorname{sen} \alpha_{Tt},$$

$$e_3 = -\cos \beta_{Tt}$$

$$e_4 = -\operatorname{sen} \beta_{Tt} \cos \alpha_{Tt},$$

$$e_5 = -\operatorname{sen} \beta_{Tt} \operatorname{sen} \alpha_{Tt},$$

$$e_6 = -\cos \beta_{Tt}.$$

c) *Diferencial para los ángulos cenitales.*

$$d\beta_{Tt} = f_1 d\varphi_T + f_2 d\lambda_T + f_3 dh_T + f_4 d\varphi_t + f_5 d\lambda_t + f_6 dh_t + f_7 d\Phi_T + f_8 d\Lambda_T.$$

dónde :

$$f_1 = -\cos \beta_{Tt} \cos \alpha_{Tt} / D_{Tt},$$

$$f_2 = -\cos \beta_{Tt} \operatorname{sen} \alpha_{Tt} / D_{Tt},$$

$$f_3 = \operatorname{sen} \beta_{Tt} / D_{Tt},$$

$$f_4 = (\operatorname{sen} (\varphi_t - \varphi_T) - \cos \beta_{Tt} \operatorname{sen} \varphi_t \cos \alpha_{Tt}) / (D_{Tt} \operatorname{sen} \beta_{Tt}),$$

$$f_5 = (\cos \beta_{Tt} \operatorname{sen} (\lambda_t - \lambda_T) - \cos \beta_{Tt} \operatorname{sen} \beta_{Tt} \operatorname{sen}) / (D_{Tt} \operatorname{sen} \beta_{Tt}),$$

$$f_6 = (\cos (\varphi_t - \varphi_T) + \cos \beta_{Tt} \cos \beta_{Tt}) / (D_{Tt} \operatorname{sen} \beta_{Tt}),$$

$$f_7 = -\cos \alpha_{Tt},$$

$$f_8 = -\cos \Phi_T \operatorname{sen} \alpha_{Tt}$$

d) *Diferencial para el incremento de coordenadas cartesianas.*

$$d(X_t - X_T) = b_1 d\varphi_T + b_2 d\lambda_T + b_3 dh_T + b_4 d\varphi_t + b_5 d\lambda_t + b_6 dh_t.$$

donde :

$$b_1 = \operatorname{sen} \varphi_T \cos \lambda_T,$$

$$b_2 = \operatorname{sen} \lambda_T,$$

$$b_3 = -\cos \varphi_T \cos \lambda_T,$$

$$b_4 = -\operatorname{sen} \varphi_t \cos \lambda_t,$$

$$b_5 = -\operatorname{sen} \lambda_t,$$

$$b_6 = \cos \varphi_t \cos \lambda_t,$$

$$d(Y_t - Y_T) = c_1 d\varphi_T + c_2 d\lambda_T + c_3 dh_T + c_4 d\varphi_t + c_5 d\lambda_t + c_6 dh_t.$$

dónde :

$$c_1 = \operatorname{sen} \varphi_T \operatorname{sen} \lambda_T,$$

$$c_2 = -\cos \lambda_T,$$

$$c_3 = \cos \varphi_T \cos \lambda_T,$$

$$c_4 = -\operatorname{sen} \varphi_t \operatorname{sen} \lambda_t,$$

$$c_5 = \cos \lambda_t,$$

$$c_6 = -\cos \varphi_t \operatorname{sen} \lambda_t,$$

$$d(Z_t - Z_T) = d_1 d\varphi_T + d_2 d\lambda_T + d_3 dh_T + d_4 d\varphi_t + d_5 d\lambda_t + d_6 dh_t.$$

dónde,

$$d_1 = -\cos \varphi_T,$$

$$d_2 = 0,$$

$$d_3 = -\operatorname{sen} \varphi_T,$$

$$d_4 = \cos \varphi_t,$$

$$d_5 = 0,$$

$$d_6 = \operatorname{sen} \varphi_t.$$

e) *Diferencial para el incremento de altitudes.*

$$d(h_t - dh_T) = dh_t - dh_T$$

de la cual hemos estimado:

$$d\varphi = (\rho + h) d\varphi$$

$$d\lambda = (v + h) \cos \varphi d\lambda$$

3.3.2.2. Ecuaciones de observación en coordenadas geodésicas

De la misma modo, que en coordenadas cartesianas las ecuaciones de observación en coordenadas geodésicas (φ , λ , h) se plantean de la siguiente manera:

I. Ecuación de observación para direcciones acimutales.

$$t_{Tt} = -dO_T + a_1^{\circ} d\varphi_T + a_2^{\circ} d\lambda_T + a_3^{\circ} dh_T + a_4^{\circ} d\varphi_t + a_5^{\circ} d\lambda_t + a_6^{\circ} dh_t + a_7^{\circ} d\Phi_T + a_8^{\circ} d\Lambda_T + (\alpha_{Tt}^{\circ} - (I_{Tt} + O_T^{\circ})),$$

los parámetros de esta ecuación tienen los mismos valores que en el caso de las coordenadas cartesianas. Los coeficientes de a_i° se calculan con las coordenadas aproximadas de los puntos de la red.

II. Ecuación de observación para distancias geométricas.

$$t_{DTt} = e_1^{\circ} d\varphi_T + e_2^{\circ} d\lambda_T + e_3^{\circ} dh_T + e_4^{\circ} d\varphi_t + e_5^{\circ} d\lambda_t + e_6^{\circ} dh_t + (D_{Tt} + D_{Tt}^{\circ}),$$

los coeficientes e_i° se calculan con las coordenadas aproximadas.

III. Ecuación de observación para ángulos cenitales.

$$t_{\beta Tt} = -dk_T D_{Tt}^{\circ} + f_1^{\circ} d\varphi_T + f_2^{\circ} d\lambda_T + f_3^{\circ} dh_T + f_4^{\circ} d\varphi_t + f_5^{\circ} d\lambda_t + f_6^{\circ} dh_t + (\beta_{Tt}^{\circ} - (D_{Tt}^{\circ} k_T^{\circ} + \beta_{Tt})),$$

los coeficientes f_i° se calculan con las coordenadas aproximadas.

IV. Ecuación de observación para acimutes astronómicos.

$$t_{DTt} = a_1^{\circ} d\phi_T + a_2^{\circ} d\lambda_T + a_3^{\circ} dh_T + a_4^{\circ} d\phi_t + a_5^{\circ} d\lambda_t + a_6^{\circ} dh_t + (D_{Tt} + D_{Tt}^{\circ}),$$

los coeficientes a_i° se calculan con las coordenadas aproximadas.

V. Ecuación de observación para diferencias de coordenadas.

$$t_{\Delta X} = b_1^{\circ} d\phi_T + b_2^{\circ} d\lambda_T + b_3^{\circ} dh_T + b_4^{\circ} d\phi_t + b_5^{\circ} d\lambda_t + b_6^{\circ} dh_t + (X_t^{\circ} + X_T^{\circ}) - (X_t + X_T)$$

$$t_{\Delta Y} = e_1^{\circ} d\phi_T + e_2^{\circ} d\lambda_T + e_3^{\circ} dh_T + e_4^{\circ} d\phi_t + e_5^{\circ} d\lambda_t + e_6^{\circ} dh_t + (Y_t^{\circ} + Y_T^{\circ}) - (Y_t + Y_T)$$

$$t_{\Delta Z} = d_1^{\circ} d\phi_T + d_2^{\circ} d\lambda_T + d_3^{\circ} dh_T + d_4^{\circ} d\phi_t + d_5^{\circ} d\lambda_t + d_6^{\circ} dh_t + (Z_t^{\circ} + Z_T^{\circ}) - (Z_t + Z_T)$$

los coeficientes b_i° , e_i° y d_i° , se calculan con las coordenadas aproximadas.

Cada ecuación tiene como incógnitas ($d\phi_T$, $d\lambda_T$, dh_T) en el punto de estación ($d\phi_t$, $d\lambda_t$, dh_t) para el punto de visado $d\phi_T$, $d\lambda_T$, dO_T incógnita de orientación para las observaciones de dirección y dk_T incógnita residual de refracción para los ángulos cenitales. Las incógnitas de $d\phi_T$ y $d\lambda_T$, pueden eliminarse siempre que las observaciones, efectuadas respecto al sistema astronómico local, sean corregidas y pasadas al sistema geodésico. De esta manera, tenemos 6 incógnitas en coordenadas, una incógnita de observación y otra de refracción para las observaciones de dirección y cenital respectivamente.

En el caso expuesto anteriormente con las redes horizontales o planimétricas las formulas anteriores se simplifican, lográndose hacer dos aproximaciones al problema, que veremos a continuación:

- Plantear las ecuaciones de observación de la geodesia tridimensional manteniendo constante la altitud de los puntos, esto es, $dh_T = dh_t = 0$, que es el método de compensación con la altura controlada. Este método ofrece

ventajas, ya que no hay que reducir las distancias geométricas a la superficie de referencia, a pesar de los posibles errores que esta operación envuelve. En este caso las relaciones de observación se plantean, con las condiciones, en las que las incógnitas en altitud tampoco existan, esto es, $dh_T = dh_t = 0$.

- Plantear las ecuaciones de observación directamente sobre el elipsoide de referencia, lo que conlleva a minimizar las observaciones efectuadas sobre la superficie de la tierra a dicha superficie, especialmente las distancias, debido a que se debe tener información altimétrica que aporte suficiente garantía para realizar esta corrección de una manera rigurosa. En este caso las relaciones de observación se plantean, con las incógnitas en dh_T y dh_t se eliminan y la distancia cenital entre los puntos es por condición igual a π .

3.4. COMPENSACIÓN DE REDES GEODÉSICAS

3.4.1. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS AL AJUSTE DE REDES GEODÉSICAS

Los modelos matemáticos para el ajuste de redes se han fundado con el objetivo de hallar las ecuaciones de observación para los distintos tipos de observables de la geodesia y topografía. Luego la discusión es como resolver de una forma coherente los modelos planteados.

Ahora bien, a continuación planteamos un problema con una red geodésica con n puntos entre los que se ha efectuado observaciones, comúnmente de diferentes tipos, como direcciones acimutales, acimutes, distancias, diferencias de coordenadas, ángulos cenitales, etc.). Para cada punto hay tres incógnitas, ($d\phi$, $d\lambda$) para las coordenadas de latitud y longitud respectivamente, dO que sería la incógnita de orientación para puntos en donde se hayan observado direcciones. Por consiguiente, se tiene un sistema lineal de m ecuaciones con $3n$ incógnitas. A esta clase de problemas se le conoce como sobredeterminado y habitualmente no tiene solución.

Una primera condición que debe comprobarse antes de proceder al ajuste de una red, es precisar el sistema de referencia del cual van a determinarse las coordenadas óptimas de los puntos de la red. En una red planimétrica el sistema de referencia queda definido por cuatro parámetros, son, el origen del sistema de coordenadas, esto es, coordenadas conocidas de al menos un punto de la red, la escala y la orientación de la misma. Estos cuatro parámetros se asemejan al conocimiento de las coordenadas de dos puntos de la red, debido a que se definen con la misma escala y la orientación de la red a través de dichos puntos. Dicho de otro modo, las observaciones geodésicas van a definir la posición relativa de unos puntos con respecto a otros, pero no evidentemente coordenadas, las cuales deben estar referidas a un sistema definido con antelación. En una red de triangulación, los cuatro parámetros que definen el sistema de referencia deben darse a través de por lo menos dos puntos fijos, o sea, la escala y orientación de la red se definen de forma externa mediante dos puntos fijos. Vale la pena mencionar que si se han observado acimutes u orientaciones, la orientación de una red puede definirse por las propias observaciones, esto es, de forma interna.

Si en la red se han observado distancias, las escalas de la red pueden definirse por estas observaciones, y por último si se han calculado las coordenadas de un punto de la red de forma absoluta, por ejemplo, por observaciones Doppler o GPS, la posición de la red queda calculada en cuanto se refiere a un origen de coordenadas. En una red unidimensional, por ejemplo de nivelación, el sistema de referencia queda definido con el conocimiento de la cota, o generalmente, de la coordenada e un punto al menos de la red. De manera similar, las observaciones permiten determinar diferencias de coordenadas, como las altitudes, pero no coordenadas. En una red tridimensional son siete los parámetros que definen el sistema de referencia, tres para el origen de coordenadas, tres para su orientación y uno para la escala. Al mismo tiempo, en una transformación de Helmert en el espacio queda definida por siete parámetros, tres para el cambio de origen, tres rotaciones y un factor de escala.

Estos siete parámetros pueden definirse de varias formas, entre ellas pueden ser, por medio de tres puntos como mínimo, debido a que dos solamente determinarían seis parámetros. También de forma interna a través de acimutes y distancias, o por diferencias de coordenadas, las cuales son equivalentes a acimutes, distancias y diferencias de altitud, y las coordenadas de un punto fijo.

El método de mínimos cuadrados, el cual da la mejor solución minimizando la suma de los cuadrados del peso de las discrepancias entre las mediciones, es uno de los métodos mas utilizados con frecuencia para obtener estimaciones de los parámetros de mediciones redundantes. Una de las importancias de este método es que para la implementación del mismo, no se necesita tener conocimiento de la distribución desde donde las observaciones son procesadas para calcular los parámetros. Como se puede ver, la matriz de pesos se escoge por ser la inversa de la matriz covarianza de las observaciones, el mínimo cuadrado estimado es imparcial y es la varianza mínima calculada. Si le sumamos que, los errores de la observación son normalmente distribuidos, el método de mínimos cuadrados ofrecería un vector de solución idéntico a aquellos métodos de probabilidad máximos.

Supongamos una red con n vértices, estableciéndose un sistema lineal de m ecuaciones con $3n$ incógnitas, donde $m > 3n$, como se observa claramente es un problema sobredeterminado.

Generalmente, se utiliza un sistema de referencia y una red tridimensional, con q vértices fijos, se dan cuatro incógnitas ($d\phi$, $d\lambda$, dh , dO) para cada punto fijo. Por ende, tenemos el siguiente número de incógnitas:

$$n = p + 3 (n - q),$$

ahora bien, si el ajuste fuera bidimensional, se tendrán $n = p + 2 (n - q)$ incógnitas, siempre con m ecuaciones de observación. Planteando el sistema de relaciones de observación, se puede expresar de manera matricial:

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t}$$

En donde A es la matriz de diseño o de configuración de la red, de m filas o ecuaciones por n columnas o incógnitas, \underline{x} es el vector de incógnitas (incrementos a las coordenadas aproximadas), \underline{v} es el vector de residuos y \underline{t} es el vector de términos independientes (valores observados menos valores calculados a partir de las coordenadas aproximadas), quedando por asignar la matriz de covarianzas a priori de las observaciones (distancias observadas). Supondremos que las observaciones son incorreladas, o de la misma manera, la matriz cofactor Q es diagonal (o la matriz de pesos P). La asignación de pesos a las observaciones depende de la garantía (precisión) del instrumental, de los métodos de observación y del proceso seguido para la reducción de las observaciones. Cada observación tiene un error a priori σ_i , y si suponemos el factor de varianza a priori $s^2 = 1$, la matriz cofactor Q coincide con la matriz de covarianzas, que adquiere la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Para las m observaciones de la red. La matriz Q es diagonal, y los elementos de la diagonal principal son las varianzas a priori de las distancias observadas. El modelo estocástico de Gauss-Markov de ecuaciones de observación se puede formular en estas condiciones:

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t} \quad \underline{v} \sim n(\underline{0}, s^2 Q) \quad (3.68)$$

Es preciso resaltar que la designación a priori de pesos a las observaciones debe ser coherente con la realidad física, de modo que ella dependa de varios factores, entre los que mencionamos con mayor relevancia:

- precisión de los instrumentos de medida,
- inclinación de las visuales,
- dotación de las señales permanentes,
- métodos de observación,
- condiciones atmosféricas, etc.

Por ende, la estimación de mínimos cuadrados del vector de incógnitas es:

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t}, \quad P = Q^{-1} \quad (3.69)$$

En la que la matriz P cofactor de las observaciones es la inversa de la matriz diagonal de los pesos, y suponiendo que A es de rango completo, $\text{rango}(A) = n$, hipótesis que se mantendrá de momento y de antemano se tiene definido un sistema de referencia, con el propósito de excluir el defecto de rango de la matriz A .

En una red bidimensional trilaterada, si la escala se supone definida por las propias observaciones, el defecto de rango de la matriz A es tres incógnitas, una para la orientación y dos para el origen de las coordenadas. En el método de variación de coordenadas para el ajuste de redes antes mencionado, el defecto de rango de la matriz A se suprime, y esto se puede hacer a través de:

- *Observaciones.* Como del acimut para anular el parámetro libre de orientación.
- *Distancias.* Con el propósito de eliminar el parámetro libre de escala.

- *Introducción de puntos fijos.* Es decir, puntos cuyas coordenadas quedan invariantes en el ajuste y que definen el sistema de referencia, origen de coordenadas, orientación y escala de la red.

La matriz A de configuración de la red tiene dimensiones (m, n) , sin embargo, en la realidad de los n elementos de cada fila exclusivamente cuatro son diferentes de cero, de modo que para almacenar la matriz A en un ordenador solamente tendremos que guardar $4m$ elementos y un puntero que nos indique que posición ocupa en la matriz,

$$\begin{aligned} A(i, j), & \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, 4 \\ IP(i, j), & \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Un ejemplo de lo anteriormente expuesto sería, que para una red con 100 observaciones y 50 incógnitas, tendríamos que almacenar solamente 400 números, de los 50000 que la matriz A tiene. Esto es de trascendental importancia para el ajuste de grandes redes, debido a que se pueden manejar problemas primordiales en ordenadores personales desde el punto de vista numérico.

La matriz $N = (A^T P A)$, igualmente es una matriz con muchos ceros, puesto que en cada relación de observación intervienen exclusivamente las incógnitas del punto en cuestión que genera la incógnita y de los puntos que tienen enlace con el (a través de las observaciones), con el objetivo de encontrar estructuras tipo banda para N por medio de una ordenación previa de las incógnitas (puntos de la red), así de esta manera minimizando el ancho de banda. La estimación de mínimos cuadrados de las incógnitas es de la siguiente forma:

$$\hat{\underline{x}} = N^{-1} A^T P \underline{t}, \quad (3.70)$$

Y las coordenadas concluyentes ajustadas:

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}} + \underline{x}^0, \quad (3.71)$$

en la que \underline{x}^0 es el vector de coordenadas aproximadas de los puntos de la red, que han servido para la linealización del sistema de relaciones de observación. El vector de residuos ajustados,

$$\hat{\underline{v}} = -A \hat{\underline{x}} + \underline{t} \quad (3.72)$$

y los residuos ponderados,

$$\hat{v}_{pi} = \hat{v}_i \sqrt{p_i} \quad (3.73)$$

En donde p_i es el i ésimo elemento de la diagonal principal de la matriz de pesos P . La estimación de la varianza de peso unidad,

$$\hat{s}_o^2 = \frac{\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}}}{m - n} \quad (3.74)$$

en la que $(m-n)$ es el número de grados de libertad del ajuste. La matriz de covarianzas de las incógnitas,

$$C_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} = \hat{s}_o^2 N^{-1} \quad (3.75)$$

La cual es una matriz (n, n) definida positiva y que a la postre va a definir la precisión con la que se han determinado las coordenadas de los puntos de la red. Al ser definida positiva todos sus autovalores son positivos, distintos y no nulos, sean estos, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, los correspondientes autovalores. La forma cuadrática $\underline{v}^T D^2(\underline{x}) \underline{v}$ define un hiper-elipsoide de dimensión n , cuyos semiejes son $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$, que normalmente se le conoce como elipsoide de error, contrastándose,

$$0 \text{ para } i \neq j$$

$$\underline{v}_i \underline{v}_i = \delta_{ij} = 1 \text{ para } i = j,$$

esto es, la matriz de autovectores V definida por,

$$V = \begin{pmatrix} \underline{v}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \underline{v}_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \underline{v}_3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{v}_4 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \underline{v}_n \end{pmatrix}$$

Es una matriz ortogonal, dado que $V^{-1} = V^T$, y $D^2(\underline{x})$ admite la representación espectral:

$$D^2(\underline{x}) = V \Lambda V^T \tag{3.76}$$

En donde Λ es la matriz diagonal de autovalores,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

A pesar de esto, laborar con este elipsoide de n ejes no es sencillo, debido a la reducción del problema al desestimar del problema gran parte de la información suministrada por la matriz $D^2(\underline{x})$. Ahora bien, consideremos para cada punto i la matriz $(2, 2)$:

$$D^2(x) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

de donde σ_x^2 , σ_y^2 son las varianzas de las incógnitas (x, y) del punto i, y σ_{xy} es la covarianza entre ellas. Los autovalores de esta matriz son,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2 + \sqrt{(\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2) + 4\sigma_{x_i y_i}} \right) \\ \sigma_{\min}^2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2 - \sqrt{(\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2) + 4\sigma_{x_i y_i}} \right) \end{aligned} \quad (3.77)$$

y sus raíces cuadradas σ_{\max}^2 , σ_{\min}^2 son los semiejes mayor y menor de las elipses de error absolutas del punto i de la red, y el acimut α del semieje mayor esta dado de la siguiente manera:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sigma_{x_i y_i}}{\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{x_i}^2}$$

Las elipses de error absolutas proporcionan una idea de la precisión de la red, esto es, del error con que se han calculado las incógnitas (coordenadas de los puntos de la red), no obstante, ellas dependen de varios factores, como pueden ser, configuración de la red, precisión de las observaciones y del sistema de referencia utilizado para el ajuste. Las elipses de error relativas se pueden hallar utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{\Delta x}^2 + \sigma_{\Delta y}^2 + \sqrt{(\sigma_{\Delta x}^2 + \sigma_{\Delta y}^2) + 4\sigma_{\Delta x \Delta y}} \right) \\ b^2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{\Delta x}^2 + \sigma_{\Delta y}^2 - \sqrt{(\sigma_{\Delta x}^2 + \sigma_{\Delta y}^2) + 4\sigma_{\Delta x \Delta y}} \right) \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\sigma_{\Delta x \Delta y}}{\sigma_{\Delta y}^2 - \sigma_{\Delta x}^2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

de donde:

$$\sigma^2_{\Delta x} = \sigma^2_{x_j} + \sigma^2_{x_i} - 2\sigma^2_{x_i x_j}$$

$$\sigma^2_{\Delta y} = \sigma^2_{y_j} + \sigma^2_{y_i} - 2\sigma^2_{y_i y_j}$$

$$\sigma^2_{\Delta x \Delta y} = \sigma_{x_i x_i} - \sigma_{x_i x_j} - \sigma_{x_j x_i} + \sigma_{x_j x_j}$$

De donde a^2 y b^2 son los semiejes mayor y menor de las elipses de error relativas. Estas elipses dan una estimación de la precisión local de la red en función de las cantidades $\Delta X = X_j - X_i$, $\Delta Y = Y_j - Y_i$. De las elipses de error estándar, ya sean absolutas o relativas, se llega a las elipses de confianza al 95 al 99% multiplicando por 2,45 o 3,03 respectivamente.

La matriz $D^2(\underline{x})$, esta en función de varios factores:

- De la configuración de la red.
- De la distribución de los puntos fijos o de control de la red.
- De la situación de los puntos de la red y de las observaciones entre ellos.

Un tema también importante en las redes geodésicas son los puntos de control, igualmente conocidos como puntos fijos, cuya misión es la de definir el sistema de referencia y reducir la propagación de los errores aleatorios y sistemáticos de las observaciones, ya sea en escala y orientación. Ahora bien, en el método de ajuste por variación de coordenadas estos puntos de control e introducen como condiciones, es decir, puntos libres de error quedando sus coordenadas invariantes en el ajuste. Por ende, tanto la escala como la orientación quedan definidas de forma externa a las propias observaciones por los puntos de control. Por ejemplo, si en una red trilaterada se introducen dos o mas puntos de control, la escala quedara definida por ellos, y es muy probable que no coincida con las obtenidas por la observación, ya sea por errores sistemáticos en las

distancias observadas o en una mala calidad de los puntos de control, por ejemplo, este ultimo caso es común en la densificación de redes, dada la enorme precisión de los equipos actuales frente a la de los puntos de control, esto es, si la red básica (puntos de control) tiene una garantía de 40 partes por millón y ha de servir de control a una densificación que tenga garantías de 2 partes por millón, es obvio que nacen serios problemas al intentar controlar una red de muy alta calidad con una mala calidad, pudiendo estropear la labor de la densificación. Ciertamente, este tipo de problemas no tiene solución, ya que inevitablemente pasaría por el cambio de las coordenadas de los puntos de la red básica que sirve de control de la densificación. Sin embargo, modificar las coordenadas de los puntos de las redes, por ejemplo las nacionales, producirían un caos, cuya solución seria inviable debido a la perdida de precisión en la densificación.

Aun así, existe solución para la comprobación de la calidad de las redes, exenta de las condiciones dadas por los puntos de control, efectuando el ajuste con el mínimo de condiciones que definan un sistema de referencia con el objetivo de evitar la singularidad de la matriz normal del ajuste. En estas condiciones se alcanza la varianza de peso de unidad del ajuste:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{f} \quad (3.79)$$

en la que f es el número de grados de libertad del ajuste. El primer paso es comprobar la hipótesis de igualdad de varianzas a priori y a posteriori, con el fin de confirmar que las precisiones postuladas para nuestras observaciones son consecuentes con la realidad física del problema:

$$H: \hat{\sigma}_o^2 = \hat{\sigma}_o^2,$$

Esta hipótesis se revisa por medio del F-test de Snedecor, cuyo cociente es:

$$\hat{\sigma}_o^2 / \hat{\sigma}_o^2 \sim F_{m-n, \infty}$$

asimismo, fijado un nivel de significación α , por ejemplo, $\alpha = 0,05$, se acepta la hipótesis H si:

$$\hat{\sigma}_o^2 / \hat{\sigma}_o^2 \leq F_{m-n, \infty, \alpha}$$

rechazándose en caso contrario. En caso de aceptarse la hipótesis H podemos concluir en que la precisión de las observaciones postuladas, en la matriz de covarianzas a priori s^2Q ha sido respetada en la experiencia, y que por tanto la observación ha sido coherente con lo supuesto.

Ahora bien, en caso que no se acepte la hipótesis H, las causas podrían ser las siguientes, discutidas brevemente:

- Que la red no haya sido observada con un instrumental adecuado a los requerimientos del trabajo y además la precisión sea inferior a la solicitada.
- Una mala corrección o reducción de las observaciones de distancia, como puede ser una mala toma de datos meteorológicos o ausencia de estos, una mala altímetra y por ende una inadecuada reducción de las distancias a la superficie de referencia, entre otras.
- La presencia de errores groseros en las observaciones, que producen perturbaciones en la calidad del ajuste.

Luego de comprobarse la calidad del ajuste, sigue la verificación de los puntos de control. Y para esto lo ideal es efectuar un nuevo ajuste introduciendo dichos puntos de control como condiciones y estimar la varianza de peso unidad bajo la hipótesis H de compatibilidad del control con las observaciones:

$$\frac{\hat{\sigma}_o^2}{H} = \frac{\hat{\mathbf{y}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{y}}}{f'} \quad (3.80)$$

de donde \hat{v}' es el vector de residuos estimado bajo la hipótesis H (sujeta a las condiciones impuestas por el control) y f' los grados de libertad de este nuevo ajuste. A continuación vemos las formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} \text{SSE}/H &= \hat{s}_o^2 / H f' \\ \text{SSE} &= \hat{s}_o^2 f, \end{aligned}$$

y el valor estadístico:

$$F(H) = \frac{(\text{SSE}/H)}{s} \hat{s}^2 \quad (3.81)$$

en la que “s” es el número de condiciones impuestas a la red. Este es un procedimiento riguroso para contrastar la bondad de los puntos de control. No obstante, hay otra alternativa en el supuesto que la hipótesis H no se acepte, el cual consiste en la incorporación de parámetros sistemáticos en el ajuste denominados *factores de escala*, cuya misión es compatibilizar la escala dada por el control con la dada por el instrumento. Indudablemente, la escala final es la dada por los puntos fijos (condiciones) y la función que debe cumplir es corregir todas las distancias observadas del sistematismo, tratando de anular las perturbaciones del ajuste. De esta manera, introducir un parámetro sistemático en las relaciones de observación es sencillo, sea un dL un factor de escala en partes por millón, que se multiplica a las distancias observadas de la siguiente manera:

$$v_{DTt} + e_1 d\phi_T + e_2 d\lambda_T + e_3 d\phi_t + e_4 d\lambda_t = (D_{Tt} (1 + dL 10^{-6}) - D^0_{Tt}),$$

por ende,

$$v_{DTt} - dL 10^{-6} D_{Tt} + e_1 d\phi_T + e_2 d\lambda_T + e_3 d\phi_t + e_4 d\lambda_t = (D_{Tt} - D^0_{Tt}),$$

es la relación de observación en la que se incorpora el parámetro dL a calcular como una incógnita más en el proceso del ajuste. Ahora bien, si los puntos T y t fuesen fijos, te conseguiría:

$$dL \cdot 10^{-6} D_{Tt} = D_{Tt} - D^0_{Tt}$$

$$dL = \frac{(D_{Tt} - D^0_{Tt})10^6}{D_{Tt}} \quad (\text{en ppm}) \quad (3.82)$$

Lo que nos proporciona directamente el factor de escala entre la escala definida por los puntos fijos y la observada, en unidades de parte por millón (milímetro por kilómetro). La matriz de covarianzas de las observaciones ajustadas es:

$$D^2(\underline{t}) = C_{tt} = \hat{\sigma}_o^2 A(A^T P A)^{-1} A^T = \hat{\sigma}_o^2 A D^2(\underline{\hat{x}}) A^T \quad (3.83)$$

de donde los términos de la diagonal principal las varianzas de las observaciones ajustadas:

$$s^2_{ti} = (D^2(\underline{t}))_{ii}$$

la cual define la precisión a posteriori (después del ajuste) de las observaciones, comprobándose:

$$s^2_{ti} \leq s^2_{ti} = s^2(Q)_{ii}$$

la matriz de covarianzas de los residuos estimados:

$$D^2(\underline{v}) = C_{vv} = s^2(Q - AN^{-1}A^T) = D^2(\underline{t}) - D^2(\underline{t}) \quad (3.84)$$

Y la varianza del residuo i -ésimo:

$$s_{vi}^2 = (D^2(\underline{v}))_i \quad (3.85)$$

como se ha observado anteriormente, la distribución de las cantidades esta expresada de la siguiente forma:

$$w_i = \frac{v_i}{s_{vi}} \sim N(0,1) \quad (3.86)$$

Lográndose considerar observaciones erróneas con un 99,9% de confianza a aquellas cuyo residuo tipificado w_i supera en valor absoluto la cota (número crítico de detección de errores groseros) $w_o = 3,29$.

Finalmente, y como resumen de lo anteriormente expuesto, el ajuste de una red por el método e variación de coordenadas y técnicas de estimación de mínimos cuadrados tiene las siguientes fases:

- 1) Obtención de coordenados aproximados de los puntos de la red por métodos de cálculo tradicionales de poligonales, triangulación, etc.
- 2) Análisis de la configuración de la red, esto es, si la figura es calculable y la redundancia es suficiente para proceder el ajuste.
- 3) Análisis de la posibilidad de grandes errores en las observaciones que darían al traste con el ajuste, el cual se puede llevar a cabo hallando las desorientaciones de cada dirección y las distancias, calculadas a partir de las coordenadas aproximadas, y observadas. Si no se manifiestan grandes errores se puede proceder al ajuste de la red.
- 4) Elección del sistema de referencia definitivo con la determinación de los puntos fijos que van a quedar inalterables en el ajuste.
- 5) Se lleva a cabo el ajuste, contrastando la hipótesis de igualdad de varianzas $H : \hat{s}_o^2 = s_o^2$ a través del F-test, para aprobar o descartar la hipótesis de partida de asignación de pesos. Si se acepta la hipótesis H se hace la detección de errores groseros con el w-test.

3.4.2. PRECISIÓN Y FIABILIDAD EN LAS REDES GEODÉSICAS

El principal criterio de diseño en una red geodésica son la precisión, fiabilidad y la determinación geométrica, y el costo. Estos parámetros son directamente proporcionales, es decir, a mayor precisión y fiabilidad en una red mayor costo, ya sea en el tiempo invertido para las observaciones como el equipo a utilizar en las mismas. En general, el propósito del diseño óptimo de una red comprende en construir una configuración óptima de la red y un plan de seguimiento que satisfaga el criterio de calidad de la red propuesto (por ejemplo, elipses de error y numerosas redundancias) con un costo mínimo. Grafarend en 1974 clasificó el orden de diseño de las redes geodésicas para obtener una red óptima, como: diseño de orden cero (ZOD), diseño de primer orden (FOD), diseño de segundo orden (SOD), y diseño de tercer orden (THOD). El diseño de una red de orden cero es seleccionado de un datum de referencia óptima para definir las coordenadas y matrices de covarianza (matriz del datum D). El diseño de la red de primer orden es seleccionado de una configuración óptima para una red (matriz de diseño A). El diseño de la red de segundo orden es seleccionada de los pesos óptimos para las observaciones (matriz de pesos P). El diseño de la red de tercer orden es seleccionada de un método para optimizar o mejorar una red existente. Los diseños del orden puede ser una combinación de ZOD, FOD, y/o de problemas SOD. El diseño de la red de segundo (SOD), es un problema de cuidado, ya que debe ser considerado en la optimización y en los diseños de redes geodésicas. Como se ha mencionado, en la etapa del SOD, se busca la precisión óptima de las observaciones. La SOD normalmente se lleva a cabo para alcanzar una red con precisión alta. (Amiri-Simkooei y Sharifi, 2004).

3.4.2.1. Concepto de precisión

La precisión de una red se expresa en términos de la matriz covarianza de parámetros desconocidos, la cual es la medida de las características de las redes en

los errores de propagación al azar. Una simple representación de esta matriz covarianza se determina en las elipses de error relativa y absoluta.

La precisión es la habilidad de los sistemas para mantener la posición con un error total del sistema (Kuusniemi, 2005).

Indudablemente, que la precisión en la determinación de las coordenadas de los puntos de una red geodésica, depende de la garantía con que se han llevado a cabo las observaciones, sin embargo, depende también de la configuración de la red y del sistema de referencia elegido, es decir, esta en función de la matriz de configuración A y de la matriz de pesos P de las observaciones:

$$D^2(\underline{x}) = s^2 (A^T P A)^{-1} \quad (3.87)$$

de donde $D^2(\underline{x})$ es la matriz de covarianzas de los parámetros incógnitas (coordenadas) de la red, que es directamente proporcional a la precisión de las observaciones a través de $s^2 Q$, y de la matriz de configuración de la red A , que a su vez esta en función de la situación de los puntos, de la clase de observaciones que existen entre ellos y del sistema de referencias definido a través de puntos fijos o de las propias observaciones.

Pensemos, por ejemplo, en una red bidimensional, para fijar un sistema de referencia se necesitan conocer al menos cuatro parámetros que definan el origen de coordenadas, la escala y la orientación de la red. Estos cuatro parámetros permiten eliminar el defecto de rango de la matriz A y obtener así coordenadas y precisiones respecto del sistema particular elegido. La transformación de estos cuatro parámetros permite hallar distintas soluciones mínimos cuadrados y matrices de covarianza asociadas a estas soluciones.

Imaginemos una red geodésica, con el siguiente sistema de relaciones de observación convenientemente linealizadas a partir del conocimiento de unas buenas coordenadas aproximadas,

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t} \quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, s^2 Q) \quad (3.88)$$

Si en la red se han observado exclusivamente ángulos (direcciones) el defecto de rango de la matriz A es igual a 4, es decir, hay que fijar cuatro parámetros, por ejemplo, las coordenadas de un punto, un acimut y una distancia, o similarmente, las coordenadas de dos puntos, para obtener una única solución mínimos cuadrados. Así de esta manera, sean P, Q, R, S y T cinco puntos de la red, el modelo,

$$\begin{aligned} A \underline{x} + \underline{v} &= \underline{t} \quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, s^2 Q) \\ (x,y)_P &= (x_P, y_P) \\ \text{distancia } ((x,y)_Q, (x,y)_R) &= d_{QR} \\ \text{acimut } ((x,y)_S, (x,y)_T) &= \alpha_{ST} \end{aligned} \quad (3.89)$$

habilita a determinar una única solución mínimos cuadrados, perteneciente al conjunto de soluciones mínimos cuadrados del modelo de la ecuación (3.88). De esta manera, citemos a \underline{x}_0 como una solución particular y a C_{00} como la matriz de covarianzas.

Si modificamos en una pequeña cantidad (de primer orden) las condiciones del modelo, expresado en la ecuación (3.89), tendremos otra solución mínimos cuadrados del modelo, expresado en la ecuación (3.88), que están correspondidos mediante una transformación de Helmert, o lo mismo que si se pasa de una solución a la otra mediante una traslación, un giro y un cambio de escala. Existe por tanto una única matriz asociada a la transformación de Helmert H_{0G} que relaciona las soluciones mínimos cuadrados \underline{x}_0 y \underline{x}_G ,

$$\underline{x}_G = \underline{x}_0 + H_{0G} \underline{v} \quad (3.90)$$

en la que $\underline{v}^T = (t_x, t_y, w, dL)$, y los parámetros que relacionan ambos sistemas de referencia, (0) y (G),

$$t_x = \text{traslación según el eje } x$$

t_y = traslación según el eje y

w = rotación

dL = factor de escala

y la matriz H_{0G} correspondiente a una transformación de Helmert en donde los parámetros son cantidades de primer orden (infinitesimales), expresada de la siguiente manera:

$$H_{0G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (-y_o)_1 & (x_o)_1 \\ 0 & 1 & (x_o)_1 & (y_o)_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & (-y_o)_p & (x_o)_p \\ 0 & 1 & (x_o)_p & (y_o)_p \end{pmatrix}$$

para una red de p puntos, siendo $(x_o)_i, (y_o)_i, i = 1, \dots, p$ las coordenadas de los puntos de la red en el sistema (0), despejando el vector \underline{y} de parámetros se consigue:

$$\underline{y} = H_{0G} (\underline{x}_G - \underline{x}_0)$$

en la que H_{0G} es una matriz inversa generalizada de H_{0G} , que puede ser por ejemplo mínimos cuadrados,

$$H_{0G} = (H_{0G}^T H_{0G})^{-1} H_{0G}^T$$

por tanto, la ecuación (3.90), puede expresarse así,

$$\underline{x}_G - \underline{x}_0 = H_{0G} H_{0G} (\hat{\underline{x}}_G - \hat{\underline{x}}_0) = H_{0G} (H_{0G}^T H_{0G})^{-1} H_{0G}^T (\hat{\underline{x}}_G - \hat{\underline{x}}_0)$$

o equivalente,

$$(I - H_{0G} H_{0G}) \hat{\underline{x}}_G = (I - H_{0G} H_{0G}) \hat{\underline{x}}_0 \quad (3.91)$$

Esta relación es fundamental, y como nos indica que independientemente del sistema de referencia escogido, existe una matriz $R_{0G} = (I - H_{0G} H_{0G})$ tal que,

$$R_{0G} \underline{x}_0 = R_{0G} \underline{x}_G \quad (3.92)$$

es decir, la cantidad $R \hat{x}$ es invariante para cualquier solución \underline{x} mínimos cuadrados del modelo expresado en la ecuación (3.88). La matriz R_{0G} depende de las coordenadas \underline{x}_0 , y aproximando se puede reemplazar por el vector de coordenadas aproximadas de la red \underline{x}_0 . Luego en función de las coordenadas \underline{x}_0 , H_{0G} se puede considerar como una constante que designaremos H y a $R_{0G} \rightarrow R$. Por tanto, $R \hat{x}$ es invariante para cualquier solución mínimos cuadrados. De esta forma y aplicando la ley de propagación de las covarianzas a la expresión (3.92), obtenemos este resultado:

$$R C_{\hat{x}_G \hat{x}_G} R^T = R C_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} R^T \quad (3.93)$$

donde se relaciona las matrices de covarianza respecto de los sistemas de referencia (0) y (G). La matriz R esta en función de la elección de la inversa de H , tomando los mínimos cuadrados de esta manera:

$$H = (H^T H)^{-1} H^T$$

$$R = (I - H(H^T H)^{-1} H^T)$$

La cual es la famosa S-transformación de Baarda que denominaremos S .

Hagamos una breve recapitulación de los resultados obtenidos hasta ahora. Una red geodésica modelada de acuerdo a la expresión (3.88), tiene normalmente infinitas soluciones mínimos cuadrados, que dependen del sistema de referencia elegido, esto es, de cuatro parámetros (t_x, t_y, w, dL) que definen la posición, orientación y escala de la red. Sea X el conjunto de soluciones mínimos cuadrados, si $\underline{x}_i, \underline{x}_j$ son soluciones pertenecientes a X , existe una matriz S_{ij} única tal que,

$$S_{ij} \hat{x}_i = S_{ij} \hat{x}_j$$

$$S_{ij} C_{\hat{x}_i \hat{x}_i} S_{ij}^T = S_{ij} C_{\hat{x}_j \hat{x}_j} S_{ij}^T$$

la matriz S_{ij} depende exclusivamente de la configuración de la red. La solución (coordenadas ajustadas) y su matriz de covarianzas dependen del sistema de referencia escogido para el cálculo, siendo un problema grave para una definición clara y comprensible del concepto de precisión. La explicación de este caso es sencillo, las observaciones geodésicas no definen comúnmente los sistemas de referencia por sí mismas, sino la posición relativa de unos puntos con respecto a otros, que nos indica que lo único que tiene realidad física son las diferencias de coordenadas entre los puntos, no así coordenadas absolutas determinadas a partir de condiciones externas a las propias observaciones. Este hecho es de vital importancia para la comprensión de la teoría de redes que se describe a continuación.

El sistema de referencia lo elige en cada caso el experto en geodesia en función a las necesidades del trabajo y a la información que se tenga de antemano. El problema que se va a plantear es encontrar un único sistema de referencia que cumpla ciertos requisitos en cuanto a que optimice la precisión. Dicho de otro modo, se procura determinar los parámetros (t_x, t_y, w, dL) de forma intrínseca, dependiendo únicamente de la configuración de la red, de manera que la matriz de covarianzas de la solución hallada sea óptima en cuanto a la de cualquier otra solución mínimos cuadrados.

La matriz S tiene interesantes propiedades,

- A. Es simétrica, puesto que $H(H^T H)^{-1} H^T$ lo es.
- B. Es idempotente,

$$SS = (I - H(H^T H)^{-1} H^T)(I - H(H^T H)^{-1} H^T) =$$

$$\begin{aligned}
&= I - 2 H(H^T H)^{-1} H^T + H(H^T H)^{-1} H^T H(H^T H)^{-1} H^T = \\
&= I - 2 H(H^T H)^{-1} H^T + H(H^T H)^{-1} H^T = S.
\end{aligned}$$

C. Se verifica,

$$\begin{aligned}
S H &= (I - H(H^T H)^{-1} H^T) H = 0 \\
&= H^T S = H^T (I - H(H^T H)^{-1} H^T) = 0.
\end{aligned}$$

Supongamos una solución \hat{x}_0 mínimos cuadrados cualquiera y elaboremos la matriz S , de todas las infinitas soluciones mínimos cuadrados vamos a elegir una única dada por,

$$\hat{x}_m = S \hat{x}_0 \quad (3.94)$$

que es invariante en el conjunto X . La solución \hat{x}_m es única, mínimos cuadrados y adicionalmente es la que tiene mínima norma, dado que,

$$\|\hat{x}_m\| < \|S\| \|\hat{x}_0\| < \|\hat{x}_0\|$$

ya que, $\|S\| < 1$. Por otra parte, la matriz de covarianzas de la solución \hat{x}_m viene dada por la siguiente expresión:

$$C_{\hat{x}_m \hat{x}_m} = S C_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} S \quad (3.95)$$

es la expresión de mínima traza dentro del conjunto de matrices covarianza asociadas a soluciones de X . La matriz $C_{\hat{x}_m \hat{x}_m}$ define la precisión de la red de forma intrínseca, es decir, respecto de un sistema de referencia definido por la propia geometría de la red.

Generalmente, buscar una solución única del modelo expresado en la ecuación (3.88), es equivalente a introducir p condiciones o constreñimientos, siendo $p > r$, r como el defecto de rango de la matriz A , o de la matriz normal N . Estas condiciones adecuadamente linealizadas son relaciones lineales entre las incógnitas, sean por ejemplo,

$$C \hat{\underline{x}} = \underline{c} \quad (3.96)$$

donde C es una matriz (p, n) , $\text{rango}(C) = p$.

La condición,

$$L(C^T) \cup L(N) = \mathbb{R}^n$$

en la que L es el desarrollo lineal, o similarmente a:

$$\underline{N} = N + C^T C,$$

donde \underline{N} es regular e invertible por procedimientos clásicos, lo que significa que el problema de la ecuación (3.88) con las condiciones de la ecuación (3.96) tiene solución única. Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange para resolver el problema sujeto a condiciones por mínimos cuadrados, se obtiene el siguiente sistema normal:

$$\begin{pmatrix} N & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}}_r \\ \hat{\underline{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{c} \end{pmatrix}$$

La solución encontrada $\hat{\underline{x}}_r$ se escribe en función de cualquier solución de mínimos cuadrados,

$$\hat{\underline{x}}_r = R \hat{\underline{x}}_0 + \underline{r}$$

$$R = I - (N + C^T C) C^T (C(N + C^T C)^{-1} C^T)^{-1} C$$

$$\underline{r} = (N + C^T C)^{-1} C^T (C(N + C^T C)^{-1} C^T)^{-1} \underline{c}$$

comprobándose, $C R = O$; $R(N + C^T C)^{-1} C^T = O$

Se ha supuesto que el número de condiciones p es mayor o igual que r (deficiencia de rango de N), si escogemos $p = r$, es decir, el número mínimo de condiciones para evitar la deficiencia de rango de N , se tiene

$$R = I - C^T (C C^T)^{-1} C^T$$

$$\underline{r} = C^T (C C^T)^{-1} \underline{c}$$

Si la ecuación de condición se escribe en la forma usual de la geodesia geométrica,

$$C \hat{\underline{x}} = \underline{0}$$

se obtiene claramente $\underline{r} = \underline{0}$.

Denominando a S , a la matriz R y H a C , se llega a los mismos resultados a través de las ecuaciones de condición, sobretodo por consideraciones sencillamente geométricas. La matriz S se comprueba $S H = 0$ y $H^T S = 0$, luego,

$$H^T C_{\hat{x}_m \hat{x}_m} = H^T S C_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} S = 0$$

la última expresión en coordenadas puede expresarse de la siguiente manera:

$$(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) Q_{mm} (x_1, y_1, \dots, x_p, y_p) = 0$$

$$(-y_1, x_1, \dots, -y_p, x_p) Q_{mm} (-y_1, x_1, \dots, -y_p, x_p) = 0$$

$$(1, 0, \dots, 1, 0) Q_{mm} (1, 0, \dots, 1, 0) = 0$$

$$(0, 1, \dots, 0, 1) Q_{mm} (0, 1, \dots, 0, 1) = 0$$

Las ecuaciones tercera y cuarta nos dicen que el centro de gravedad de la red,

$$x_g = (\sum x_i) / p, \quad y_g = (\sum y_i) / p$$

tiene varianza cero respecto al sistema de referencia definido de forma intrínseca.

Se ha introducido el problema de la definición de la precisión de una red geodésica a partir de la teoría de S-transformaciones, por ser desde un punto de vista geométrico más claro que la aplicación directa de inversas generalizadas a problemas geodésicos con defecto de rango. A continuación se va a analizar la teoría de redes libres desde el enfoque de la utilización de matrices inversas generalizadas.

Consideremos el modelo de la expresión (3.88), y sea r el defecto de rango de la matriz normal N . La matriz N tiene r filas (columnas) que son linealmente dependientes, es decir, únicamente tiene $(n - r)$ filas (columnas) linealmente independientes, existiendo infinitas soluciones mínimos cuadrados que verifican la condición $\underline{v}^T P \underline{v} = \text{mínimo}$. Sea G una inversa generalizada cualquiera de N , que comprueba:

$$N G N = N, \quad (3.97)$$

y sea \underline{x}_G la solución mínimos cuadrados determinada a partir de G ,

$$\underline{x}_G = G A^T P \underline{t} = G \underline{n}, \quad \underline{n} = A^T P \underline{t} \quad (3.98)$$

La estimación \underline{x}_G de las incógnitas \underline{x} en general no es centrada, como se ha observado en el apartado anterior.

En términos geodésicos, este resultado se interpreta de la siguiente manera: La elección particular de la inversa generalizada G de N es equivalente a la elección de un sistema de referencia particular, no pudiendo pretender que las estimaciones mínimos cuadrados determinadas a partir de distintas inversas generalizadas tengan el mismo valor esperado.

Sean G_1, G_2 dos inversas generalizadas de N que definen los sistemas de referencia (1) y (2), dando lugar a las soluciones,

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{G_1} &= G_1 A^T P \underline{t} \\ \hat{\underline{x}}_{G_2} &= G_2 A^T P \underline{t} \\ E(\hat{\underline{x}}_{G_1}) &= G_1 N \underline{t}; \quad E(\hat{\underline{x}}_{G_2}) = G_2 N \underline{t}\end{aligned}$$

y restando ambas esperanzas,

$$E\{\hat{\underline{x}}_{G_2} - \hat{\underline{x}}_{G_1}\} = (G_2 - G_1) N \underline{t} = \underline{0}$$

Aun así, es evidente que existe una transformación de Helmert que nos relaciona ambas soluciones,

$$\hat{\underline{x}}_{G_2} = \hat{\underline{x}}_{G_1} + H \underline{y} \quad (3.99)$$

Consideremos la matriz $G N$, utilizando propiedades elementales de las matrices inversas generalizadas, se observa que:

$$G N \hat{\underline{x}}_G = G N G A^T P \underline{t} = A^T P \underline{t}$$

cantidad que no depende de la g -inversa elegida, y por ende es invariante, luego la matriz S de Baarda antes deducida por métodos estrictamente geométricos, no es otra cosa que $G N$:

$$S = G N \quad (3.100)$$

y multiplicando por $G N$ alcanzamos la consiguiente expresión:

$$\underline{O} = G N H \underline{y} \quad G N H = S H = 0$$

propiedad deducida anteriormente.

Ya que en general $G N = I$, el estadístico $\hat{\underline{x}}_G$ no es centrado y el sesgo de la estimación viene dado por,

$$\text{SESGO}(\hat{\underline{x}}_G) = (I - G N) \underline{x} = (I - S) \underline{x}$$

La matriz cofactor de $\hat{\underline{x}}_G$ es,

$$C_{\hat{\underline{x}}_G \hat{\underline{x}}_G} = G N G^T = G N G$$

así de esta manera, tanto la estimación mínimos cuadrados $\hat{\underline{x}}_G$, como su matriz cofactor (covarianzas), dependen de la matriz G , o lo mismo que el sistema de referencia elegido. En este momento, se ha observado que $G N \hat{\underline{x}}_G$ es un invariante.

A continuación se procede a encontrar otras cantidades de interés en los ajustes que son invariantes frente a cualquier solución mínimos cuadrados, esto quiere decir que sean estimaciones centradas.

El vector de observaciones ajustadas dado por,

$$\underline{t} = A \hat{\underline{x}}_G = A G A^T P \underline{t}$$

es una estimación centrada de \underline{t} , ya que

$$E(\underline{t}) = A G A^T P E(\underline{t}) = A G A^T P A \underline{t} = A \underline{x} = E(\underline{t})$$

El vector de residuos,

$$\underline{v} = \underline{t} - A \hat{\underline{x}}_G = (I - A G A^T P) \underline{t}$$

no depende tampoco de la g-inversa G elegida, y evidentemente tampoco la varianza estimada del ajuste,

$$s^2 = \underline{v}^T P \underline{v} / (m - \text{rango}(A)).$$

Este hecho es de fundamental importancia en la teoría de redes geodésicas, y nos dice, que si bien las estimaciones $\hat{\underline{x}}_G$ y $C_{\hat{\underline{x}}_G \hat{\underline{x}}_G}$ dependen de la inversa G elegida, cantidades de gran interés para la definición de la bondad de las observaciones, como el vector de residuos estimado y la varianza estimada no dependen de la elección del sistema de referencia, es decir, de la inversa generalizada mínimos cuadrados elegida. La teoría de redes libres permite por consiguiente analizar la auténtica calidad de una red geodésica, debido a que los constreñimientos impuestos a priori, por ejemplo, utilizando puntos fijos, pueden perturbar la calidad de las observaciones.

Las estimaciones $N \hat{\underline{x}}_G$ y $S \hat{\underline{x}}_G$ son centradas,

$$E(N \underline{x}_G) = N E(\underline{x}_G) = N G N \underline{x} = N \underline{x}$$

$$E(S \underline{x}_G) = S E(\underline{x}_G) = G N G N \underline{x} = G N \underline{x} = S \underline{x}$$

o asimismo ellas no están en función de la inversa generalizada G elegida. Comúnmente en la teoría de redes geodésicas, de las infinitas g -inversas de N , se elige una única, que se designa como N (matriz pseudoinversa), que verifica dos propiedades importantes:

1). La solución es única:

$$\hat{\underline{x}}_m = N^+ A^T P \underline{t}$$

2). $\| \hat{\underline{x}}_m \| < \| \hat{\underline{x}}_G \|$ para cualquier g -inversa G de N .

$$\text{traza}(N^+) < \text{traza}(G)$$

En términos geodésicos, el sistema de referencia se elige de forma única y la solución tiene mínima norma y matriz de covarianzas con traza mínima.

La solución mínimos cuadrados - mínima norma $\hat{\underline{x}}_m$ se puede determinar a partir de cualquier solución mínimos cuadrados a través de:

$$\hat{\underline{x}}_m = G N \hat{\underline{x}}_G = S \hat{\underline{x}}_G$$

Debido a que $G N \hat{\underline{x}}_G$ es invariante para cualquier G .

3.4.2.2. Concepto de fiabilidad

El otro parámetro que define la calidad de una red geodésica es la fiabilidad, es decir, la capacidad de la red para detectar errores groseros en las observaciones. El criterio de fiabilidad fue propuesto por Baarda en 1968, y trata de la capacidad de la red geodésica para detectar errores groseros en las observaciones. Hay otro aspecto del criterio de la fiabilidad conocido como "análisis de robustez" (Vaníček et al.

1990). Este criterio expresa la fortaleza de los puntos de la red geodésica a partir del punto de vista de la fortaleza de misma. Amiri-Simkooei, A. (2001a) concluyo que la fiabilidad y la fortaleza geométrica (análisis de robustez) criterio fuertemente correlacionado a cada uno.

La ventaja de utilizar los parámetros de estimación y de tratar las observaciones realmente como los valores del azar, en vez de calcular una única solución de tantas observaciones como es exigido, es tener acceso a la redundancia la cual es la clave para una llegar a una precisión óptima y un control de la calidad. La relación entre los datos satelitales y los parámetros de navegación desconocidos se tratan en el modelo funcional, mientras que la incertidumbre se señala en el modelo estocástico. Los errores groseros como los outliers, por ejemplo, los blunders (equivocaciones), no se obtienen en la relación funcional y, por esto los errores groseros son diferentes del ruido comun modelado estocasticamente, este modelo estocastico no puede responder a ambos. (Kuusniemi, 2005). Los blunders aparecen en la solución de la navegación y, por tanto, es imprescindible encontrar cualquier anomalia en las observaciones y eliminarlas. El modelo de detección de errores se fundamenta en la hipótesis de comprobación estadística en donde la presencia de las mediciones de la redundancia es de vital importancia (Tiberius, 1998). Suponiendo un modelo correcto de medición, los residuales observacionales, se definen como la diferencia entre los valores estimados de las observaciones y sus correspondientes valores medidos (Kuang, 1996), indican hasta que punto las medidas son internamente consistentes. Por ende, los residuos son útiles para supervisar la calidad de los parámetros estimados. Sin la redundancia suficiente, ninguna verificación de consistencia podrá realizarse, el control de calidad se vuelve inútil, y no hay ninguna manera de probar si los datos se pueden considerar estadísticamente consistentes con el modelo supuesto (Teunissen, 1990). La fiabilidad se refiere a la habilidad para detectar blunders y estimar los efectos que producen los blunders no detectados sobre una solución (Leick, 2004).

Ahora bien, consideremos una red geodésica que puede ser modelada por:

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t} \quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, s^2 Q),$$

bajo las siguientes hipótesis¹⁰:

a) El problema en principio no lineal (en general) está bien linealizado.

En esta hipótesis, se puede conseguir con cierta facilidad con programas de cálculo de coordenadas adecuados, o iterando el ajuste, es decir, realizar un nuevo ajuste con las coordenadas aproximadas resultantes del ajuste anterior.

b) El valor esperado de \underline{v} es $\underline{0}$, lo que equivale a que no haya sistematismos ni errores groseros en las observaciones.

En esta hipótesis intervienen las propias observaciones, y restringiendo exclusivamente a la parte distanciométrica, existen múltiples causas que pueden influir en la presencia de sistematismos en las observaciones:

- Ausencia o una mala calibración de los distanciómetros, equivalente a una mala determinación de las constantes de los aparatos, lo que produciría un error constante e independiente de la distancia observada. Habitualmente, es un error sistemático en distancimetría.

- Otro error habitual de los distanciómetros son las derivas a lo largo del tiempo de la frecuencia de la portadora. Este error es proporcional a la distancia medida.

- La influencia de la atmósfera en las medidas distanciométricas es también un factor importante, que se puede modelar en parte con la toma de datos

¹⁰ obviamente estas condiciones son imprescindibles para que el modelo tenga sentido, y pueden existir muchas causas para que no se verifiquen.

meteorológicos y medidas de ángulos cenitales, no obstante, se hace mas que una aproximación a la resolución de un problema muy complejo.

- Los centrados de los instrumentos, sobre todo en redes de alta precisión, pueden introducir errores sistemáticos importantes.

- Los puntos de control, si su calidad no está de acuerdo con la precisión de las observaciones, pueden crear problemas de difícil solución.

- La presencia de errores groseros en las observaciones es un factor importante para la validez del modelo matemático.

Existen técnicas estadísticas para detectar estos errores que se analizaran a continuación, pero no exentas de problemas. El primer problema reside en el propio método de mínimos cuadrados, que tiende a repartir el error de una observación a otras contiguas que no son erróneas, pudiéndose dar el caso de eliminación de observaciones que no son erróneas. En el mismo sentido, la detección de errores groseros se basa en técnicas estadísticas, existiendo la posibilidad de que observaciones erróneas no sean localizadas a un nivel de significación dado.

c) La matriz de covarianzas de las observaciones es $s^2 Q$ y se supone conocida a priori.

Esta hipótesis, implica el conocimiento a priori de la matriz de covarianzas $s^2 Q$ del vector de observaciones, lo que en la mayoría de los casos no es problemático, sobre todo cuando se tiene experiencia con el instrumental y los métodos de trabajo utilizados.

d) $E(\underline{t}) = A \underline{x}$, es decir, el vector \underline{t} pertenece al rango de A , el modelo se supone consistente con el problema geodésico en cuestión.

Esta hipótesis, implica la consistencia matemática del modelo con la realidad física.

Vamos a plantear dos cuestiones de fundamental importancia en redes geodésicas: ¿Cual es el error mínimo detectable por el test de detección de errores groseros?, ¿Qué perturbación produce el error máximo no detectable en una observación en los resultados del ajuste de una red?. Intentaremos a lo largo de este capítulo dar contestación a estas dos preguntas que caracterizan el concepto de fiabilidad de una red.

Consideremos el modelo lineal:

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t} \quad \underline{v} \sim N(\underline{0}, s^2 Q),$$

bajo la hipótesis nula H_0 de validez, en cuanto a su compatibilidad con la experiencia efectuada.

Bajo la hipótesis nula H_0 , las estimaciones:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &= (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} \\ \hat{\underline{t}} &= A (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} \\ \hat{\underline{v}} &= (I - A (A^T P A)^{-1} A^T P) \underline{t} \end{aligned}$$

siguen las siguientes distribuciones:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}} &\sim N(\underline{x}, s^2 (A^T P A)^{-1}), \\ \hat{\underline{t}} &\sim N(A \underline{x}, s^2 A (A^T P A)^{-1} A^T), \\ \hat{\underline{v}} &\sim N(\underline{0}, s^2 (Q - A (A^T P A)^{-1} A^T)), \end{aligned}$$

y la forma cuadrática:

$$SSE = \hat{\underline{y}}^T P \hat{\underline{y}},$$

sigue un distribución $\hat{\sigma}^2 X^2_{m-n}$, siendo $(m - n)$ el número de grados de libertad del ajuste, contrastándose que:

$$E(SSE/(\hat{\sigma}^2(m - n)))/H_0 = 1,$$

o lo que es lo mismo:

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) \quad \hat{\sigma}^2 = SSE/(m - n).$$

Supongamos que el modelo no es válido y hay que introducir otras incógnitas auxiliares, como por ejemplo factores de escala, formulando un modelo más complicado que podemos escribir en la forma:

$$\text{Hipótesis } H_0: E(\underline{t}) = A \underline{x} + C_p \underline{v}_p,$$

con las restricciones, $((\underline{v}_p)_i = 0; i=1, \dots, b)$,

$$\text{Hipótesis alternativa } H_{Ap}: E(\underline{t}) = A \underline{x} + C_p \underline{v}_p \quad (\text{Modelo relajado}),$$

en la que C_p es una matriz (m,b) a determinar en cada caso concreto, \underline{v}_p el vector de incógnitas adicionales.

El problema queda reducido a la elección de una de las dos hipótesis propuestas, H_0 o H_{Ap} . Llamemos A_p a la matriz A ampliada con C_p , o sea:

$$A_p = (A ; C_p),$$

que es de la forma $(m,(n+b))$.

En estas condiciones, se tiene un caso particular de la hipótesis lineal general que podemos escribir:

$$A_p \underline{x} + \underline{v} = \underline{t},$$

en la que el vector de incógnitas \underline{x} es:

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n, \nabla_{p1}, \dots, \nabla_{pb}),$$

esto es, con las incógnitas auxiliares ∇_p . La hipótesis H_0 se formula de la siguiente forma:

$$H_0: \nabla_{p1} = 0, \dots, \nabla_{pb} = 0,$$

o en forma matricial:

$$H: K^T \underline{x} = \underline{0}$$

En donde la matriz K^T se expresa de la siguiente manera:

$$K^T = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

tal que $\text{rango}(K) = b$.

otra forma de analizar y que a su vez es similar, es introducir el modelo con condiciones:

$$A \underline{x} + \underline{v} = \underline{t}$$

$$C_p^T \underline{x} = \underline{0}$$

y denominando $\underline{\lambda}_p$ al vector de multiplicadores de Lagrange asociado a las condiciones, se obtiene la estimación mínimos cuadrados \underline{x} sujeta a las condiciones:

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ C_p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\lambda}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T P t \\ 0 \end{pmatrix}$$

en la que el vector de multiplicadores de Lagrange $\underline{\lambda}_p$ viene dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\lambda}}_p &= C_p^T (P - P A (A^T P A)^{-1} A^T P) \underline{t} = C_p^T P (I - A (A^T P A)^{-1} A^T P) \underline{t} = \\ &= C_p^T P \hat{\underline{v}}_0, \end{aligned}$$

y la matriz cofactor de $\underline{\lambda}_p$ viene dada por:

$$Q_{\hat{\underline{\lambda}}_p \hat{\underline{\lambda}}_p} = C_p^T P Q_{\hat{\underline{v}}_0 \hat{\underline{v}}_0} P C_p.$$

Ahora bien, consideremos las formas cuadráticas SSE bajo la hipótesis nula H_0 y bajo la hipótesis alternativa H_{Ap} , dadas por:

$$\begin{aligned} SSE/H_0 &= \hat{\underline{v}}_0^T P \hat{\underline{v}}_0 \\ SSE/H_{Ap} &= \hat{\underline{v}}_{Ap}^T P \hat{\underline{v}}_{Ap}, \end{aligned}$$

cuya diferencia viene dada por:

$$Q = SSE/H_0 - SSE/H_{Ap} = \underline{\lambda}_p^T Q_{\lambda_p \lambda_p} \underline{\lambda}_p = \underline{v}_0^T P C_p (C_p^T P Q_{v_0 v_0} P C_p)^{-1} C_p^T P \underline{v}_0,$$

bajo la hipótesis H_0 , la forma cuadrática Q sigue una distribución $s^2 X^2_b$, de la cual:

$$E(Q/s^2b/H_0) = 1,$$

y bajo la hipótesis alternativa H_{Ap} , observamos que:

$$Q \sim s^2 X^2_{b,\lambda},$$

con parámetro de no centralidad λ , así pues:

$$\lambda = \underline{v}_p^T Q_{vpvp} \underline{v}_p / s^2,$$

y

$$E(Q/s^2b/H_{Ap}) = 1 + \lambda/b.$$

A pesar de esto, la determinación de modelos relajados con la incorporación de incógnitas auxiliares, o paralelamente, la especificación de la matriz C_p , no es en general un problema sencillo, y quitando algunos casos especiales, la única solución posible es analizar los resultados del ajuste y determinar las posibles causas para la no verificación de la hipótesis H_0 .

Vamos a profundizar en estas posibles causas por las que pueden aparecer sistematismos y errores groseros en las observaciones, aún cuando estas estén relizadas con el máximo rigor posible.

Las observaciones geodésicas se efectúan en la superficie de la Tierra y en presencia de la atmósfera que depende de las condiciones meteorológicas y de la orografía del terreno. Los instrumentos geodésicos se nivelan respecto a la normal del campo gravitatorio terrestre, y en el modelo matemático se sustituye dicha normal por la normal a un plano o a un elipsoide de referencia, según la hipótesis de trabajo y el tamaño de nuestra red. Esto es, se ha sustituido la normal física respecto

de la cual se nivelan los instrumentos por una normal teórica inexistente, y es por tanto necesario introducir las correcciones oportunas para referir las observaciones al sistema de referencia utilizado por el modelo, siendo necesario conocer el ángulo que forman en el espacio la normal física y la teórica, llamado *desviación relativa de la vertical* para corregir las observaciones. La no consideración de esta corrección puede, para visuales inclinados conducir a errores importantes.

Es necesario resaltar, la correcta reducción de las distancias observadas sobre la superficie terrestre a la superficie de referencia, para lo que hay que conocer con cierta garantía las altitudes de los puntos de la red. Como veremos en un ejemplo concreto, en redes de lados cortos observadas con distanciómetros de alta precisión (décima de milímetro), es indispensable en visuales muy inclinadas conocer la altimetría con precisiones superiores al milímetro con el propósito de asegurar la precisión del instrumento en la reducción geométrica de las observaciones.

La observación de distancias con instrumentos electroópticos, tiene una fuerte dependencia de las condiciones meteorológicas, y las correcciones que típicamente se efectúan no son más que aproximaciones al problema físico real, ya que los parámetros meteorológicos exclusivamente se conocen (se observan) en los extremos de la base a medir, interpolándose para el resto de la trayectoria. Pensemos que en distancimetría de alta precisión en la que hablamos de precisiones de 0,1 parte por millón, es imprescindible garantizar décimas de grado en la temperatura seca y décimas de milibar en la presión, para conservar la precisión del instrumento. Indudablemente no es sencillo conseguir la toma de datos meteorológicos con esta precisión en los extremos de la base, pero pensar que en lados de más de 500 metros la interpolación al resto de la trayectoria conservar estas garantías es inimaginable y ciertamente, si no se toman otras medidas auxiliares no estaremos hablando de precisiones de $\pm(0.0002 \text{ metros} + 0.2 \text{ partes por millón})$, sino de $\pm(0.0002 \text{ metros} + 1 \text{ parte por millón})$, mucho más acorde con la realidad del problema. Estas medidas pueden ser de dos tipos:

- Establecimiento de un modelo atmosférico en la zona de observación, en particular, de análisis del gradiente de temperatura con la toma de datos en puntos intermedios de la trayectoria del láser.
- Utilizar distanciómetros con dos colores en la portadora (bicolores) con el fin de reducir en un orden la influencia de la refracción atmosférica en las observaciones.

Las dos soluciones son complejas, la primera es muy costosa, pues consiste en el lanzamiento de globos con sensores para la toma de presión y temperatura y la observación con Teodolito desde tierra a los globos para determinar su altitud. La segunda también es laboriosa, ya que en la actualidad no hay distanciómetros bicolores comercializados, donde comercialmente se dispone en la actualidad con prototipos como el Terrameter.

Otro factor primordial en distanciometría de alta precisión es la calibración y verificación del instrumental de observación, tanto de los distanciómetros, como de los termómetros y barómetros para la toma de datos meteorológicos, con el objetivo de evitar sistematismos en las observaciones difíciles de detectar a posteriori. Estas calibraciones solamente pueden hacerse en bases interferométricas homologadas y que sean reobservadas al menos una vez cada cuatro o cinco años, que son en la actualidad el patrón de distancias en Geodesia y Topografía de alta precisión.

Otro factor a tener en cuenta en distanciometría es el seguimiento de la frecuencia de oscilación que genera la portadora, ya que se pueden producir errores de proporcionalidad a la distancia medida, los cuales son difíciles de detectar. Cuando se habla de precisiones superiores al centímetro, y en algunas aplicaciones geodésicas, superiores al milímetro, de fundamental importancia es el centrado de los instrumentos, que debe realizarse con una garantía de al menos diez veces superior a la precisión exigida por el trabajo a ejecutar. Precisiones superiores a la

décima de milímetro pueden asegurarse con distintas técnicas de centrado forzado, siempre que se tomen las debidas precauciones.

Todos estos hechos hacen que cualquier modelo matemático sea una simplificación del problema real, dicho de otra manera, de la auténtica experiencia, no considerando gran número de variables que han influido en las medidas, siendo una aproximación al verdadero problema. En estas condiciones, todo modelo matemático aplicado a la resolución de un problema geodésico, no está perfectamente especificado, pero si debe ser una aproximación consistente con la precisión con que se realiza la experiencia. Sería, por ejemplo, totalmente absurdo, abservar un red con un distanciómetro de alta precisión no tomando datos meteorológicos. No obstante en redes geodésicas y al tener observaciones abundantes (problemas sobredeterminados), existe la posibilidad de contrastar la bondad del modelo, bien mediante la incorporación de incógnitas auxiliares, siempre que sea posible especificar la matriz C_p , o bien por análisis de la varianza del modelo de partida. Supongamos que se añaden tantas incógnitas auxiliares como grados de libertad tiene el ajuste, de tal manera que la matriz C_p tenga rango $(m - n) = b$. De esta manera:

$$SSE/H_{Ap} = 0,$$

y por consiguiente, bajo la hipótesis nula H_0 :

$$Q = SSE/H_0 - SSE/H_{Ap} = (m - n) s^2,$$

y el estadístico:

$$\hat{S}_0^2 / s_0^2 \sim F_{m-n, \infty},$$

alcanza una distribución F con $(m - n, \infty)$ grados de libertad. Elegido un nivel de significación α , y dado que:

$$k = F_{m-n, \infty, \alpha},$$

se admite H_0 siempre y cuando:

$$\text{m\u00e1ximo } (\hat{s}_o^2/s_o^2, \hat{s}_o^2/s_o^2) < k,$$

deneg\u00e1ndose en caso contrario.

Como se ha se\u00f1alado anteriormente, una de las posibles causas de la no comprobaci\u00f3n del modelo es la presencia de errores groseros en las observaciones. Asimismo, se supone que se quiere contrastar la posibilidad de un error grosero en la observaci\u00f3n i -\u00e9sima l_i , y sea ∇_i el error cometido en dicha observaci\u00f3n. El problema que se plantea es cuanto es la magnitud de ∇_i para que la observaci\u00f3n l_i pueda ser reconocida como err\u00f3nea. De esta manera, veamos un ejemplo de m\u00e1s luz acerca del tema en cuesti\u00f3n. Si se observa una red con un distanciometro cuya f\u00f3rmula de precisi\u00f3n es $\pm(0.01 \text{ metro} + 2 \text{ partes por mill\u00f3n})$ y se mide con \u00e9l una distancia de 1.000 metros de la red, el error esperado es de ± 0.012 metros. En estas condiciones un error en esta observaci\u00f3n ∇_i de 0.02 metros es muy dif\u00edcil que sea detectado como error grosero. Ahora bien, en este mismo error ∇_i si la red fuese observada con un distanciometro cuya f\u00f3rmula de error fuese $\pm (0.0002 \text{ metros} + 0.2 \text{ partes por mill\u00f3n})$ es muy posible que sea detectado como error grosero. Por ende, es evidente que un factor importante en la detecci\u00f3n de errores groseros ser\u00e1 la precisi\u00f3n de las observaciones. Pero este no va a ser el \u00fanico factor, analicemos otro ejemplo. Si un punto de la red se ha levantado (ha sido dotado de coordenadas) con un m\u00ednimo de observaciones, en otras palabras, no existe redundancia local, erroneamente vamos a poder saber si una de las observaciones es inexacta. As\u00ed pues, desde otra perspectiva, la redundancia va a jugar un papel importante en la detecci\u00f3n de errores groseros. En definitiva, y tambi\u00e9n un factor importante es la configuraci\u00f3n de la red, dicho de otro modo, la distribuci\u00f3n de los puntos en el terreno y sus enlaces (observaciones).

En este caso la matriz C_p se transforma en un vector ($b = 1$) \underline{e}_i :

$$\underline{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$$

y el modelo puede formularse de la siguiente manera:

$$\text{Hipótesis } H_0 : E(\underline{t}) = A \underline{x} + \underline{e}_i \nabla_i,$$

con la condición $\nabla_i = 0$:

$$\text{Hipótesis } H_{Ap} : E(\underline{t}) = A \underline{x} + \underline{e}_i \nabla_i.$$

La diferencia de formas cuadráticas:

$$Q = \text{SSE}/H_0 - \text{SSE}/H_{Ap} = \lambda Q_{\lambda\lambda^{-1}} \lambda / s^2 = \lambda^2 / s_{\lambda}^2,$$

en la que λ es el multiplicador de Lagrange asociado al problema de minimizar $\underline{v}^T P \underline{v}$ sujeto a la condición $\nabla_i = 0$. La forma cuadrática Q tiene una distribución χ^2 central bajo la hipótesis nula H_0 , y por ende, si definimos w_i por:

$$w_i = \lambda / s_{\lambda},$$

sigue una distribución $\chi^2 = N(0,1)$ bajo H_0 .

Desde otra perspectiva:

$$Q/s^2 = \underline{v}_0^T P \underline{e}_i (\underline{e}_i^T P Q_{v_0 v_0} P \underline{e}_i)^{-1} \underline{e}_i^T P \underline{v}_0 / s^2$$

y cuando la matriz de pesos P es diagonal esta forma cuadrática se transforma en:

$$Q/s^2 = v_i^2/s_{vi}^2$$

De donde a “ v_i ” se le conoce a la i -ésima componente del vector \underline{v}_0 y “ s_{vi}^2 ” a su varianza. Luego las cantidades:

$$w_i = v_i/s_{vi}$$

alcanzan una distribución $N(0,1)$ bajo la hipótesis nula, o equivalentemente una distribución $\sqrt{F_{1,\infty}}$, y una distribución $\sqrt{F'_{1,\infty}}$ no central, de parámetro de no centralidad λ bajo la hipótesis alternativa H_{Ap} .

Para un nivel de significación α , usualmente $\alpha = 0.001$, el test de detección de errores groseros se plantea de la siguiente forma:

se acepta H_0 si $|w_i| < \sqrt{F_{1,\infty,\alpha}}$ (No existe error grosero en la observación i -ésima),

se acepta H_{Ap} si $|w_i| < \sqrt{F'_{1,\infty,\alpha}}$ (Existe error grosero en la observación i -ésima).

Se elige el nivel de significación muy pequeño ($\alpha = 0.001$), o la confianza muy alta ($1 - \alpha = 0.999$), para estar muy seguros a la hora de rechazar una observación.

En estadística se denomina potencia de un test a la probabilidad β con que el test acepta la hipótesis si esta es verdadera, la cual esta en función del nivel de significación elegido α . Una cuestión imprescindible que se plantea es la siguiente: ¿Cual debe ser el error mínimo cometido en la observación i -ésima $|v_i|$ para que sea detectable como error grosero con una probabilidad β y con un nivel de significación α ?. Esto sucede cuando la distribución de la cantidad w_i pasa a ser no central con un

parámetro de no centralidad λ_0 , que están en función de los parámetros α y β . De esta manera:

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha, \beta; b = 1),$$

es el caso en el que para $\beta = 0.80$, $\alpha = 0.001$, $b = 1$, el parámetro λ_0 es igual a 17,08.

De la expresión que define el parámetro de no centralidad,

$$\lambda = \sum_i \nabla_i^2 s_{\lambda}^2 / s^2$$

se halla el error $|\nabla_i|$ que hay que efectuar en la observación l_i para que sea detectado como error grosero con probabilidad β y con una confianza $(1 - \alpha)$. Así pues:

$$|\nabla_i| = \frac{s \lambda_0^{1/2}}{s^2},$$

y dado que:

$$s_{\lambda} = \underline{e}_i^T P Q_{VV} P \underline{e}_i,$$

podemos expresar a $|\nabla_i|$ de la siguiente forma:

$$|\nabla_i| = s \sqrt{\frac{\lambda_0}{(\underline{e}_i^T P Q_{VV} P \underline{e}_i)}},$$

$$i = 1, \dots, m.,$$

que da como resultado el mínimo error detectable.

Si la matriz de pesos es diagonal, o lo mismo que:

$$\underline{e}_i^T P Q_{vv} P \underline{e}_i = p_i^2 (Q_{vv})_{ii}$$

de donde:

p_i = es el peso de observación i -ésima.

$(Q_{vv})_{ii}$ = es el elemento i -ésimo de la diagonal principal de la matriz cofactor de los residuos Q_{vv} .

La matriz cofactor de los residuos ajustados venía dada por:

$$Q_{vv} = Q - A (A^T P A)^{-1} A^T,$$

y

$$Q_{vv} P = (I_m - A (A^T P A)^{-1} A^T P) = (I_m - R),$$

ademas recordemos que :

$$\underline{t} = A (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} = R \underline{t},$$

$$\underline{v} = (I_m - R) \underline{t}$$

en consecuencia:

$$|V_i| = s \sqrt{\frac{\lambda_0}{p_i^2 (Q_{vv})_{ii}}} = \frac{s}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{\lambda_0 Q_{ii}}{(Q_{vv})_{ii}}},$$

de la que Q_{ii} es el i -ésimo elemento de la diagonal principal de la matriz cofactor a priori de las observaciones \underline{t} . Del mismo modo, $s/\sqrt{p_i}$ es el error medio cuadrático a priori de t_i , s_{t_i} esta en la ecuación de esta manera:

$$\frac{|\nabla_i|}{s_{t_i}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 Q_{ii}}{(Q_{VV})_{ii}}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\underline{e}_i^T (\mathbf{I}_m - \mathbf{R}) \underline{e}_i}},$$

La matriz \mathbf{R} es la que decide el reparto o transferencia, que en el método de mínimos cuadrados tienen los errores en las observaciones ∇_{t_i} , y adicionalmente se observa que juega un papel esencial en la detección de errores groseros y en lo que denominamos fiabilidad de una red, entendida como la capacidad de la red para detectar errores groseros en las observaciones.

El w -test detecta un error de magnitud $|\nabla_i|$ en la observación i -ésima con una probabilidad β y una confianza $(1 - \alpha)$ dado por la expresión anterior. Para que $|\nabla_i|$ sea mínimo, que evidentemente es lo que nos interesa (detectar errores lo más pequeños posibles en magnitud) desde el punto de vista de optimización de una red, se puede jugar con dos hipótesis distintas, mayor precisión en las observaciones, o lo mismo que:

$$s_{t_i} = \text{mínimo},$$

o también, diseño de la red, es decir,

$$\underline{e}_i^T (\mathbf{I}_m - \mathbf{R}) \underline{e}_i = \text{máximo}, \quad \underline{e}_i^T \mathbf{R} \underline{e}_i = \text{mínimo}.$$

La solución ideal es la combinación de ambos factores: precisión y diseño. En este sentido, en muchas ocasiones es difícil o imposible mejorar la precisión o el diseño de una red geodésica, ya sea porque no existe un instrumental más preciso, o debido a que la orografía del terreno no permite mejores soluciones para el diseño de la red, pero siempre es posible analizar con métodos rigurosos las zonas débiles de la red, básicamente con el objeto de determinar que observaciones han de hacerse con las máximas precauciones, ya que un error grosero puede ser difícilmente detectable, o en muchas ocasiones inalcanzable.

Imaginemos que en una red no existen observaciones redundantes, situación poco satisfactoria en términos geodésicos, entonces la matriz R se reduce a la matriz identidad I_m y por tanto, $(I_m - R) = 0$, lo que implica que,

$$\underline{t} = \underline{t} \quad \text{y} \quad \underline{v} = \underline{0},$$

lo cual significa que, todos los posibles errores en las observaciones se transfieren directamente al resultado final del ajuste \underline{t} . En este caso no existe posibilidad de detectar posibles errores en las observaciones. Indudablemente no es indispensable llegar a esta situación extrema para que haya zonas en la red que no tengan redundancia, pues basta que algunas observaciones estén incontroladas, esto es, que verifican:

$$\underline{e}_i^T (I_m - R) \underline{e}_i = 0,$$

la cual indica una nula redundancia local.

A los elementos de la diagonal principal de la matriz $(I_m - R)$ se les llama números de redundancia local:

$$r_{ii} = \underline{e}_i^T (I_m - R) \underline{e}_i,$$

verificando que:

$$0 \leq r_{ii} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m.,$$

y por consiguiente:

$$|\nabla_i| > s_{ti} \sqrt{\lambda_0} \quad i = 1, \dots, m.,$$

expresión que nos resalta que en el mejor de los casos el w-test detecta, a un nivel de significación 0.001 y una potencia 0.8, un error $\sqrt{17}$ veces superior al error medio a priori de dicha observación s_{ti} . La colección de números $|\nabla_i|$ señala la fiabilidad interna de la red.

Otro problema importante en la teoría de redes geodésicas es la influencia de un error ∇_i en la i -ésima observación en los resultados del ajuste. Seguidamente se considera como cantidades de interés del ajuste, \underline{x} , \underline{t} , \underline{v} y s^2 , y se va a encontrar la influencia que tiene un error grosero de magnitud $|\nabla_i|$ en estas cantidades. Atendamos primeramente la influencia en el vector de coordenadas ajustadas (parámetros incógnitas):

$$\nabla_{i\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{e}_i |\nabla_i|$$

Frecuentemente se utiliza como medida de la fiabilidad externa el cuadrado del módulo del vector $\nabla_{i\underline{x}}$ ponderado con $(A^T P A)$, dicho de otro modo:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \nabla_{i\underline{x}}^T (A^T P A) \nabla_{i\underline{x}} / s^2 \\ &= |\nabla_i|^2 \underline{e}_i^T P A (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{e}_i / s^2 \\ &= |\nabla_i|^2 p_i^2 (Q_{tt})_{ii} / s^2 \\ &= |\nabla_i|^2 p_i^2 R_{ii} / s^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo $|\nabla_i|^2$ por su valor,

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (Q_{tt})_{ii} \lambda_0 / (Q_{vv})_{ii} \\ &= \lambda_0 (Q_{tt})_{ii} / (Q_{ii} - (Q_{tt})_{ii}), \end{aligned}$$

e introduciendo el parámetro,

$$q_i = (Q_{tt})_{ii} / Q_{ii}, \quad i = 1, \dots, m.,$$

cociente entre las varianzas a posteriori y a priori de las observaciones, podemos expresar de la siguiente manera:

$$|\nabla_i| = (\lambda_0 / (1 - q_i))^{1/2} \quad i = 1, \dots, m$$
$$\lambda_i^{1/2} = (\lambda_0 q_i / (1 - q_i))^{1/2}$$

parámetros que puntualizan la fiabilidad interna y externa de la red.

Las cantidades q_i que verifican $0 < q_i < 1$ son muy apropiadas para dar una idea local de la fiabilidad de la red. Un criterio que se utiliza en redes geodésicas es el siguiente:

- Una observación está muy bien controlada si $0 < q_i < 0,6$.
- Una observación está bien controlada si $0,6 < q_i < 0,8$.
- Una observación está débilmente controlada si $0,8 < q_i < 0,9$.
- Una observación está muy mal controlada si $0,9 < q_i < 1$.
- Una observación no está controlada si $q_i = 1$.

3.4.2.3. Equivalencia de la precisión en las observaciones

La equivalencia de la precisión en las observaciones en una red geodésica es uno de los problemas fundamentales que no se han considerado seriamente en la evaluación y diseño de estas redes. Lo cual significa que los diferentes tipos de observaciones de una red geodésica deben tener aproximadamente la misma precisión para anexarse a la red. Por ejemplo, consideremos un triangulo equilátero que tiene de lado $a = 51000$ metros y se supone que se ha medido tres distancias y tres acimutes (dos grupos de observaciones) de esta red sencilla. Si la precisión de las

distancias de las observaciones es $\sigma_i = 1$ cm, y de acuerdo a la famosa ecuación de la longitud de la cuerda $S = l * \alpha$, la precisión de las observaciones del acimut debe ser $\sigma_a = 0,01/1000 = 0,00001$ rad = 2,06 seg, tanto como la precisión de las distancias. Esto significa que para la precisión de 2,6 segundos del acimut es tanto como 1 cm de precisión en la forma lineal de 1 km de distancia. En este caso, la contribución de las distancias en la precisión de la red es tanta como la de los acimutes. Este es un ejemplo sencillo, donde la especificación de la equivalencia de la precisión en las redes no tiene dificultad. Se analiza a continuación este ejemplo sencillo, consideremos al modelo paramétrico observacional para la red con un dato de constreñimiento mínimo arbitrario (por ejemplo, matrices A, P, D). Sencillamente puede observarse, si se calcula la matriz de redundancia R (vea después), las numerosas redundancias de las distancias así como la de los acimutes serán 0.3333, los cuales equivalen al promedio del número de redundancia. Esto puede implicar que, si los números de redundancia son iguales, entonces las observaciones tendrán las exactitudes equivalentes. Si, además, aumentamos la precisión de las distancias, entonces recíprocamente, sus numeros de redundancia disminuirá, y viceversa. Esto quiere decir, que las observaciones más precisas son menos fiables en la red y viceversa (Amiri-Simkooei, 2001b). Por lo anterior, las observaciones con una precisión equivalente serían equivalentes, en el promedio, desde el punto de vista de la fiabilidad. (Amiri-Simkooei y Sharifi, 2004).

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, puede exponerse que la igualdad de los números de redundancia se da en una red, en donde los diferentes tipos de sus respectivas observaciones tienen una precisión equivalente. Ya que los numeros de redundancia pueden partir de un valor fijo, esto hace pensar, que para diseñar una red geodésica, en cierto modo que se obtienen los mismos promedios de números de redundancia para los diferentes grupos de sus observaciones. El número de redundancia de la observación i es la matriz diagonal R de los i elementos de las redundancias, es decir:

$$r_i = \mathbf{R}_{(ii)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P})_{ii} \quad (3.101)$$

de donde A es la matriz de diseo del modelo paramétrico, D es la matriz del datum, P es la matriz de pesos de las observaciones y I la matriz identidad. Los números de la redundancia r_i siempre varían entre 0 y 1, y la sumatoria de ellos es la redundancia total de la red (ver la ecuación (3.103)). Ellos reflejan la fortaleza geométrica de la red para detectar errores groseros en las observaciones. Porque de ellos, los números de la redundancia son el criterio fundamental para la fiabilidad interna y externa, la cual fue propuesta por Baarda en 1968. En el caso ideal, donde los números de la redundancia $r_i = 100\%$, cualquier error grosero se descubriría en las observaciones. Pero en un caso real, es deseable tener una red con los números de redundancias relativamente grandes y uniformes (cerca de 1) para que la habilidad del descubrimiento de los errores grosero sea la mejor y el mismo en cada parte de la red. Generalmente, un criterio de fiabilidad interno y externo puede ser del tipo (Baarda, 1968):

$$\min (r_i) = r_{\min} \rightarrow \max \quad (3.102)$$

de donde el “max” es la redundancia promedio \bar{r} de las observaciones de la red, el cual se calcula así:

$$\bar{r} = \frac{df}{n} = \frac{1}{n} \text{tr}(R) \quad (3.103)$$

de donde, “ $df = n - u + d$ ” es el grado de libertad de la red, n es el numero de observaciones, u es el numero de incógnitas, y d es el rango de deficiencia del sistema. Si se considera que las observaciones son divididas en m grupos, el diseño de la matriz A y la matriz de pesos P pueden dividirse de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_m \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

de la cual $A_{i(n_i \times x_u)}$ es la matriz diseño, $P_{i(n_i \times n_i)}$ es la matriz pesos del grupo de observables i , respectivamente. La ecuación da como resultado:

$$R_i = I_i - A_i(A_i^T P_i A_i + D^T D)^{-1} A_i^T P_i \quad (3.105)$$

donde $R_{i(n_i \times n_i)}$ es también, la matriz de redundancia del grupo de observaciones i . La traza de la ecuación (3.105), es de la siguiente forma:

$$df_i = \text{tr}(R_i) \quad (3.106)$$

la cual es la contribución del tipo las observaciones i , a la redundancia total (grado de libertad df) del sistema. En una red donde la precisión de las observaciones es equivalente, las siguientes relaciones deberían ser validas para los diferentes tipos de observaciones:

$$\bar{r}_i = \frac{df_i}{n_i} = \frac{df}{n} = \bar{r}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.107)$$

o su equivalencia:

$$df_i = \text{tr}(R_i) = \frac{n_i}{n} df \quad (3.108)$$

esta ecuación nos quiere decir que la contribución del grupo de observaciones i , al grado de libertad (o a la fiabilidad), igualmente a la precisión de la red, debería ser proporcional al numero de observaciones i (n_i). es decir, tanto como para la equivalencia de la precisión como para la equivalencia de la fiabilidad. La realización de la equivalencia de la precisión de los diferentes tipos de observaciones en las redes geodésicas es una de las tareas principales del diseño de redes de segundo orden. (Amiri-Simkooei y Sharifi, 2004).

3.4.2.4. Test de fiabilidad

Conceptualmente, los test de fiabilidad estadísticos sirven para determinar la veracidad de los postulados anteriormente supuestos. Una hipótesis nula (H_0) describe una situación sin error, es un nivel de referencia en la que cualquier desviación de la hipótesis de alternativa diferente (H_a) debe descubrirse a través de una comprobación estadística. Debido a la condición finita de la muestra disponible en la comprobación estadística, no se puede tomar una decisión estadística definida (Kuang, 1996). Hay siempre dos tipos de errores potenciales involucrados en una prueba estadística identificada como el tipo I y el tipo II errores. Un error tipo I se define como el error que surge de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando H_0 es realmente verdad. La probabilidad de cometer un error del tipo I se le llama nivel de importancia, expresado como α , y la probabilidad de tomar una decisión correcta se le conoce como nivel de confianza ($1 - \alpha$). Un error de tipo II se define como el error de aceptar H_0 cuando es realmente falso, y la probabilidad de cometer este tipo de error se señala por β . La probabilidad de rechazar H_0 cuando de hecho es falso se conoce como el poder de la prueba ($1 - \beta$). La siguiente tabla resume, la prueba de la hipótesis nula versus la hipótesis de alternativa (Kuang, 1996):

<i>SITUACIÓN</i>	Decisión	Acepta H_0	Rechaza H_0
H_0 es verdadero		Decisión correcta Nivel de confianza ($1-\alpha$)	Error tipo I Nivel de significancia α
H_0 es falso		Error tipo II Probabilidad β	Decisión correcta Potencia del test ($1-\beta$)

Tabla 3.1. Test estadístico de la hipótesis nula versus la hipótesis de alternativa

Se supone que, bajo H_0 y H_a , las funciones de densidad de probabilidad de una muestra estadística toma la misma forma pero tiene diferentes significados y valores de varianza (Kuang, 1996). El poder del test también define las pequeñas diferencias δ que puede detectarse si el test ha sido ejecutado con un nivel de significancia α (Kuang, 1996). Si se desea disminuir la probabilidad de ambos tipos de error I y II, δ , la fiabilidad interna, se incrementaría, es decir, la diferencia detectable entre H_0 y H_a es muy grande. Para detectar un error en la medida, se prueban estadísticamente los residuales de los mínimos cuadrados. En un test global, la hipótesis nula H_0 condiciona que el modelo de ajuste sea correcto y las suposiciones distribucionales reúnan la realidad, como opuesto a la alternativa de H_a la cual condiciona a que el modelo de ajuste no sea correcto (Leick, 2004; Baarda, 1968; Kuang, 1996; Ryan, 2002). Si el test global falla, se necesitaría un “test local” con más hipótesis alternativas específicas para evitar el fracaso.

La detección de Outlier y el aislamiento se fundamenta en la comprobación estadística de los residuos observacionales estimados. Los residuos estimados son, principalmente, indicativos de la anormalidad tanto de las observaciones como del modelo matemático. No obstante, es muy difícil separar el uno del otro, matemáticamente, o de un modelo geométrico malo y suposiciones del modelo o de malas observaciones que afectarán los residuos de la misma manera. En la detección del error y el proceso de aislamiento, los errores en el modelo de linealidad se suponen que son Gaussianos de significado cero en el caso de un error libre imparcial (Kuusniemi, 2005).

3.4.2.4.1. Test global

El test global para detectar un modelo de ajustes inconsistente se fundamenta en la forma cuadrática:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \Sigma^{-1} \hat{\mathbf{v}} \quad (3.109)$$

La cual sigue una distribución chi-cuadrada con $n - p$ grados de libertad, si los errores de la observación son normalmente distribuidas como $N(0, \Sigma)$ (Kuang, 1996; Leick, 2004). El parámetro P describe el numero de parámetros a estimar y n el numero de observaciones disponibles. Si el test estadístico excede el principio $\chi^2_{1-\alpha, n-p}$ donde α representa un porcentaje de falsa alarma, es decir, un nivel de significancia del test global, la hipótesis nula H_0 es rechazada a favor de H_a .

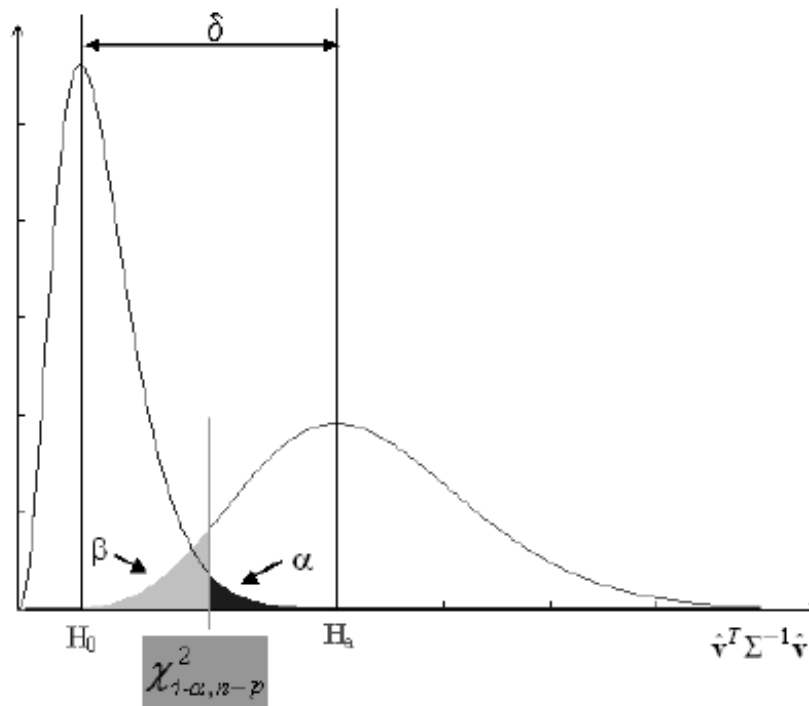


Figura 3.3. Funciones de densidad χ^2 central y no central en el test global, $n-p=8$

La figura 9 presenta las funciones de densidad χ^2 central y no central para 8 grados de libertad, $n-p=8$, el cual representa la hipótesis nula, H_0 , y la hipótesis alternativa, H_a , de la consistencia del test global. En esta figura, el parámetro β representa la probabilidad de una detección errónea y δ el parámetro de no centralidad de la distribución fundamental χ^2 . El test de la hipótesis en el test global es dada por:

$$H_0 : (\text{no hay falta de integración}), \hat{v}^T \Sigma^{-1} \hat{v} \leq \chi^2_{1-\alpha, n-p} \quad (3.110)$$

$$H_a : (\text{falta de integridad}), \hat{v}^T \Sigma^{-1} \hat{v} \leq \chi^2_{1-\alpha, n-p}$$

Si la hipótesis nula H_0 fuera rechazada y H_a es aceptada, ocurriría una inconsistencia en las observaciones evaluadas, y los errores existentes serían identificados y mitigados.

3.4.2.4.2. Test local

Una de las herramientas más comunes para rechazar H_0 en el test global es la presencia de las observaciones periféricas (outlying). Una estricta comprobación es veraz bajo la suposición de que hay sólo un outlier en el caso de un tiempo instantáneo, el cual es la suposición usual, por ejemplo, el tradicional RAIM. El esfuerzo por identificar tales errores en la medida individual puede realizarse si la redundancia aparece en al menos dos. Los residuales, \hat{v} , pueden estandarizarse individualmente de la siguiente forma:

$$w_i = \left| \frac{\hat{v}_i}{\sqrt{(C_{\hat{v}})_{ii}}} \right|, \quad i = 1 : n \quad (3.111)$$

De donde n expresa el número de observaciones, \hat{v}_i expresa los i elementos del vector \hat{v} , $(C_{\hat{v}})_{ii}$ describe la diagonal de elementos i de la matriz $C_{\hat{v}}$, la cual es la matriz covarianza de los residuales. Los residuos estandarizados se pueden utilizar para detectar outlier con incorrelaciones, normalmente observaciones distribuidas en el sentido de que, si la observación i no es un outlier, w_i es normalmente distribuida como $w_i \sim N(0, 1)$. Cada residual estandarizado w_i es comparado a un cuartil α_0 de una distribución normal, $n_{1-\frac{\alpha_0}{2}}$, con un porcentaje predeterminado de falsa alarma, el nivel de significancia α_0 . La hipótesis nula $H_{0,i}$ describe que la observación i no es un outlier, es rechazada si la w_i excede el límite de $n_{1-\frac{\alpha_0}{2}}$ de la distribución normal. La suposición importante del test local indica

que el modelo y la suposición que sigue al vector del error medido $\varepsilon \sim N(0, \Sigma)$ son correctos excepto por el sesgo constante sencillo de la observación i . los residuales estandarizados por tanto son normalmente distribuidos (Teunissen, 1998; leick, 2004) con una esperanza cero cuando $H_{0,i}$ es correcta, y con otra esperanza diferente a cero. El test local esta fundamentado en la siguiente comparación:

$$H_{0,i} : (i \text{ no es un outlier}), w_i \leq n \frac{1-\alpha_0}{2}$$

$$H_{a,i} : (i \text{ es un outlier}), w_i \leq n \frac{1-\alpha_0}{2}$$

Asimismo, el $H_{0,i}$ es rechazado, es decir, $H_{a,i}$ es reorganizado, si el valor critico es sobrepasado.

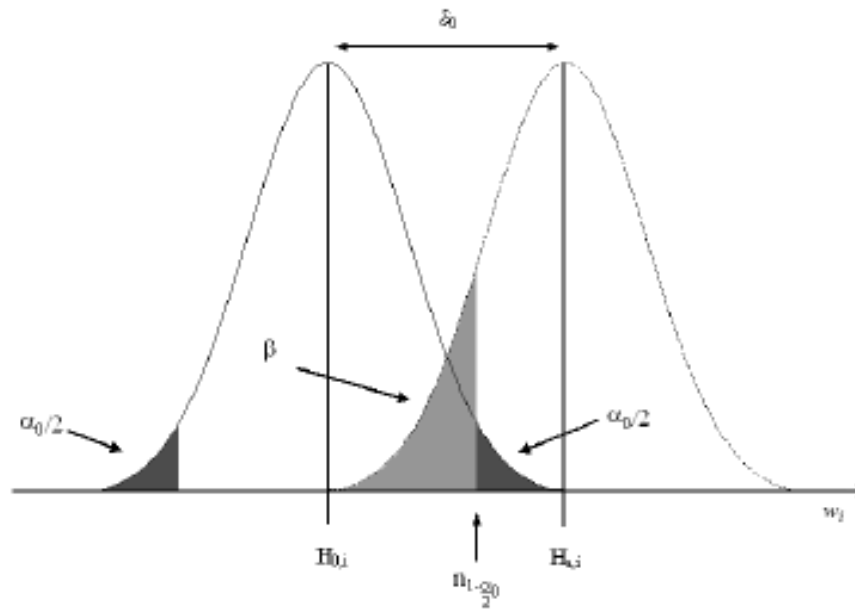


Figura 3.4. Las funciones de densidad de las distribuciones normales fundamentales y no fundamentales en el test local

La figura 10, presenta las funciones de densidad fundamentales y no fundamentales de la distribución normal que representa la hipótesis nula, $H_{0,i}$, y la hipótesis alternativa, $H_{a,i}$, del test local outlier de la observación i . la probabilidad exigida α_0 es repartida equitativamente en la cola lateral derecho y en la cola

lateral izquierda respectivamente. Solamente si H_0 de la prueba global se rechaza se realiza la prueba local para identificar el fallo o error y solamente la observación con el valor más grande del w_i se prueba y se rechaza posiblemente. Un outlier en una observación generalmente causa varios w_i al ser incrementado. La medida con el residuo regularizado más grande que excede el umbral se considera como un outlier y esa medida se excluye del cómputo de la solución (Teunissen, 1998), es decir, la k observación se desconfa de ser errónea cuando:

$$H_{a,k} : w_k \geq w_i \forall, \wedge w_k > n_{1-\frac{\alpha_0}{2}} \quad (3.112)$$

Las pruebas de consistencia globales y locales son una parte del test de fiabilidad para detectar outlier, procedimiento estadístico introducido originalmente por Baarda en 1968 (Baarda, 1968) para el descubrimiento e identificación de outliers en las redes geodésicas y conocido como dato curioso. Si se rechaza H_0 en el test global, se realiza el test local para identificar la falla. Los parámetros α , α_0 , β son interrelacionados (Baarda, 1968; Caspary, 1988) y solamente dos de ellos pueden seleccionarse arbitrariamente. El nivel de riesgo α del test global debería relacionarse al parámetro correspondiente en el test local, α_0 , ambos con una probabilidad de detección extraña β , la cual es la misma para ambos test. Una medida errónea que conlleva al test global a fallar debería indicarse por el correspondiente test local con la misma probabilidad. Los valores de α , α_0 y β son relacionados a través de las siguientes ecuaciones:

$$\delta = \delta_0^2 = \left(n_{1-\frac{\alpha_0}{2}} + n_{1-\beta} \right)^2 \quad (3.113)$$

$$\chi^2_{\beta, n-p, \delta} = \chi^2_{1-\alpha, n-p} \quad (3.114)$$

De donde δ es el parámetro de una distribución no central chi-cuadrado relacionado a la prueba de hipótesis global, y δ_0 es el valor esperado de distribución normal fundamental relacionada al test local.

La suposición de un outlier sencillo es una restricción severa, especialmente donde se localizan condiciones de la señal degradada. Sin embargo, esto se encontró en los datos curiosos los cuales se pueden solucionar con errores múltiples si se realizan iterativamente (Hawkins, 1980; Petovello, 2003). Siguiendo la eliminación de una observación, el parámetro de estimación, los test estadísticos, y posiblemente la exclusión de una observación pueden repetirse para cada época hasta que no sean identificados los outliers que surjan.

3.4.2.5. Fiabilidad estadística

Los valores seleccionados de α_0 y β determinan un sesgo o un llamado parámetro de non-centrality de $H_{a,i}$, y se indica como δ_0 , la *fiabilidad interior* (Leick, 2004; Ryan, 2002). La fiabilidad interna cuantifica los errores (o blunder) δ_0 que se pueden detectar sobre cada medida a través de una prueba de fiabilidad estadística. Los blunder mas pequeños que se pueden detectar se denominan Marginales, o alternativamente Errores Minimamente Detectables (MDB). La *fiabilidad externa*, por otra parte, se cuantifica por el tamaño del error en la solución de la navegación la cual es causado por un error no detectado del mismo tamaño del respectivo MDB (Leick, 2004; Kuang, 1996; Baarda, 1968; Ryan, 2002; Petovello, 2003). Las medidas de estas fiabilidades se describen a continuación:

3.4.2.5.1. Fiabilidad interna

Un MDB, es un parámetro de la fiabilidad interna, es una medida de la capacidad para detectar blunder con la probabilidad $(1-\beta)$ con $(1-\alpha_0)$ porcentaje e confianza; la suposición mas importante incluye la presencia de solamente un blunder sencillo en un tiempo y las medidas no correlacionadas. Para los niveles de probabilidad dados de α_0 y β , los MDB para la observación i , indicada como m_i , se expresa como:

$$m_i = \frac{\delta_0 (\Sigma)_{ii}}{\sqrt{(C_{\hat{v}})_{ii}}} \quad (3.115)$$

De donde δ_0 es el parámetro de no centralidad definido en la ecuación (3.113). Los MDB representan el límite teórico de un error de la observación que puede detectarse marginalmente y aisladamente pero frecuentemente, se necesitan que esos errores actuales sean menores que los valores MDB.

3.4.2.5.2. Fiabilidad externa

El MDB aislado no es de mucha importancia, no obstante, el efecto que un outlier no identificado puede tener sobre el resultado es importante, según lo cuantificado por la fiabilidad externa. Ella, esta indicada como e_i , que describe el efecto que tiene un blunder marginalmente detectable, en la medición i , sobre el resultado estimado, y se calcula de la siguiente manera:

$$e_i = - (H^T \Sigma^{-1} H)^{-1} H^T \Sigma^{-1} m_i \quad (3.116)$$

de donde el vector m_i es un vector columna que contiene ceros excepto por el MDB de la observación i , m_i , en la posición i . la fiabilidad externa representa el error de los parámetros estimados que pueden ser causados por sesgo individual del tamaño del MDB. El sistema puede estar marginalmente protegido contra este error con las probabilidades dadas α_0 y β . Por esta razón, a la fiabilidad externa se le puede llamar también *nivel de protección*. Si solamente ciertos elementos del vector del nivel de protección son de interés, ellos podrían investigarse individualmente (Petovello, 2003). La matriz de rotación R_L gira las coordenadas x , y , z del WGS-84 dentro de un sistema local, es decir, dentro de un sistema de coordenadas hacia el este (ENU:East-North-Up):

$$R_L = \begin{bmatrix} R_{L1,2} \\ R_{L3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 & 0 \\ -\text{sen}\varphi\cos\lambda & -\text{sen}\varphi\text{sen}\lambda & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\text{sen}\lambda & \text{sen}\varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

En un error de posicionamiento total (TPE) tridimensional debido a la MDB i , Δp_i , puede expresarse así:

$$\Delta p_i = \sqrt{e_i^T R_L^T R_L e_i} = \sqrt{e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + e_{i3}^2} \quad (3.118)$$

Sin embargo, un Error de Posicionamiento Horizontal (HPE) debido al MDB Δq_i , puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Delta q_i = \sqrt{e_i^T R_{L1,2}^T R_{L1,2} e_i} \quad (3.119)$$

De donde $R_{L1,2}$ es la submatriz de la matriz de rotación RL en la ecuación (3.117), la cual extrae los componentes horizontales desde un vector de parámetro y los convierte a componentes locales, este y norte. La matriz $R_{L1,2}$ ayuda en la eliminación del error radial de la posición bidimensional calculada desde el error de posición en las coordenadas x , y , z en WGS-84 que corresponden al efecto de la MDB de la observación i en la observación i .

4. DETERMINACIÓN DEL GEOIDE

4.1. INTRODUCCIÓN

La llegada de las nuevas técnicas de observación en las ciencias geodésicas, como lo son la observación Doppler a satélites, interferometría de corta y gran base VLBI, medida electrónica de distancias, etc., hace imprescindible el conocimiento de la *ondulación el geoide*, con una cierta precisión por dos razones diferentes:

- La comparación y control de los resultados obtenidos por métodos clásicos con los obtenidos al aplicar estas nuevas tecnologías.
- La reducción correcta de las observaciones efectuadas sobre la superficie de la tierra al elipsoide de referencia.

La geodesia clásica a través de observaciones terrestres como son, la medida de distancias, ángulos, y acimutes astronómicos, y por cálculos laboriosos, se obtienen las coordenadas geodésicas latitud y longitud de una serie de puntos denominados vértices geodésicos. La tercera coordenada indispensable para posicionar un punto en el espacio respecto al elipsoide de referencia elegido, es la altitud h , la que en la proyección de Helmert se compone de dos partes, la cota ortométrica H , o altitud del punto sobre el geoide y la ondulación del geoide N , o separación entre las superficies del geoide y elipsoide de referencia:

$$h_p = H_p + N_p \quad (142)$$

la cota ortométrica, H , se determina por nivelación geométrica de precisión o por nivelación trigonométrica. Por consiguiente, un punto se halla en geodesia

por las coordenadas (φ, λ, h) , respecto a un sistema de referencia definido con anterioridad.

Las observaciones a través de satélites, mediante técnicas GPS, permiten determinar coordenadas cartesianas (X, Y, Z) en un conjunto de puntos, que generalmente coinciden con vértices geodésicos. Las coordenadas cartesianas están relacionadas con las coordenadas geodésicas por medio de las formulas de la geodesia tridimensional, y de acuerdo a las ecuaciones 2, 3 y 4:

$$X = (v + h) \cos \varphi \cos \lambda \quad 0 \leq h \leq \infty \quad (2)$$

$$Y = (v + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad -\pi/2 \leq h \leq \pi/2 \quad (3)$$

$$Z = (v (1 - e^2) + h) \sin \varphi \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi \quad (4)$$

De donde v es la normal principal o gran normal del elipsoide de referencia en el punto de coordenadas (φ, λ) y e^2 es la primera excentricidad del elipsoide. De esta manera, dada una serie de puntos con coordenadas determinadas en ambos sistemas, podemos relacionarlos mediante transformaciones geométricas de similitud o tipo Helmert en tres dimensiones. Para ello es necesario conocer las altitudes sobre el elipsoide de referencia geodésico h_g , o conocido también como la ondulación del Geoide N , en dichos puntos, ya que la cota ortométrica H es conocida con anterioridad utilizando la nivelación.

En otro sentido, las observaciones realizadas sobre la superficie de la Tierra de ángulos, acimutes astronómicos y distancias, han de ser reducidas convenientemente al elipsoide de referencia, sobre la cual se realizaran los cálculos geodésicos y en particular las compensaciones de las redes clásicas. Estas razones hacen que la determinación del geoide sea un factor indispensable a tener en cuenta, ya sea desde el punto de vista geodésico para la puesta en marcha de redes fundamentales adecuadas a las exigencias de los trabajos tanto técnicos como científicos. De ahí que, se conoce como *ondulación del geoide*, en un punto P a la distancia entre la superficie del geoide y del elipsoide de referencia medida a lo

largo de la normal al elipsoide que pasa por dicho punto. La determinación del geoide es indispensable por las siguientes razones:

- Para la relación y transformación de los sistemas geodésicos clásicos con la geodesia espacial.
- Para la correcta reducción de las observaciones realizadas en la superficie terrestre al elipsoide de referencia.

Por consiguiente se tratara en este capítulo el fundamento matemático para resolución de la determinación del geoide, asimismo se analizara el método de aproximación polinómica y la determinación del grado óptimo del polinomio de aproximación.

4.2. MÉTODOS DE DETERMINACIÓN DEL GEOIDE

4.2.1. INTRODUCCIÓN

La geodesia, como teoría de la forma y dimensiones de la Tierra, puede parecer una ciencia puramente geométrica. No obstante, en la actualidad, el campo gravífico de la Tierra, que es una cantidad física, está inextricablemente involucrado en la mayoría de las medidas geodésicas, incluso en las puramente geométricas (López Amador, 2002). Existen diferentes técnicas para obtener la ondulación del geoide las cuales están en función de las observables. De esta manera podemos hablar de dos métodos comunes:

- 1) **Método Astrogeodésicos:** con este método se puede determinar la ondulación del geoide a través de observaciones astronómicas, a partir del cual se puede obtener la desviación a la vertical y por consiguiente la ondulación del geoide.

Los métodos astrogeodésicos se basan en la ecuación de Helmert:

$$N = N_a - \int_a^b \epsilon ds$$

siendo N la ondulación del geode o altura de éste sobre el elipsoide. N_a es la ondulación en el punto a . El valor ϵ es la desviación de la vertical en un punto de la superficie, es el ángulo formado por la normal al elipsoide y la normal al geode. El valor de esta desviación de la vertical depende del elipsoide adoptado como sistema de referencia, valiendo cero en el punto datum, elegido como punto de coincidencia de geode con elipsoide. Se calcula a partir de las dos componentes x , h de la desviación. Estas dos componentes se calculan a partir de la latitud y longitud astronómicas (sobre el geode por obtenerse con teodolitos astronómicos nivelados según la línea de la plomada), y de la latitud y longitud geodésicas (obtenidas por cálculos sobre el elipsoide). El diferencial ds es un arco de cuerda elemental (López Amador, 2002).

2) **Métodos gravimétricos:** se realizan las observaciones utilizando la gravedad.

Los métodos gravimétricos se basan en la ecuación de Stokes:

$$N = \frac{R}{4\pi G} * \iint \sigma \Delta g S(\psi) d\sigma$$

en esta fórmula, R es un radio medio de la Tierra, G es un valor promedio de la gravedad. El valor Δg es la anomalía de la gravedad, o diferencia entre la gravedad real y la gravedad normal deducida para el potencial del elipsoide de revolución. $S(\psi)$ es la función de Stokes. Y es función de la posición del punto donde se quiere determinar N . La integral de superficie está extendida a toda la tierra, de ahí que sea de difícil aplicación, pues hay zonas de la tierra en las que no se tienen medidas de la gravedad. En la práctica, es mejor calcular diferencias de N . Para ello, en lugar de $\Delta g S(\psi)$ se tiene $(\Delta g_o - \Delta g_m) S(\psi)$, siendo $(\Delta g_o - \Delta g_m)$ la diferencia entre la anomalía observada (Δg_o) y la anomalía obtenida (Δg_m) con un

modelo matemático basado en armónicos esféricos. Puede demostrarse que esa diferencia tiende a cero al aumentar la distancia, por lo que ya no es necesario obtener valores de anomalía en toda la tierra sino sólo en el entorno de la estación a determinar (López Amador, 2002).

3) *Métodos de la geodesia espacial*: realizan las observaciones con técnicas GPS. El procedimiento es el siguiente, la observación GPS nos ofrece (realizando la transformación adecuada) coordenadas geodésicas de los puntos observados y altura elipsoidal. Y si adicionalmente, en un determinado número de puntos observados se ha enlazado con nivelación geométrica de precisión, obtenemos la cota ortométrica, y por diferencia, se encuentra, la ondulación del geoide.

Conociendo la altitud H de los puntos sobre el geoide o nivel medio del mar mediante una nivelación, la ondulación N viene dada por $N = h - H$. La nivelación tiene que ir apoyada en medidas de gravedad dado que las superficies equipotenciales no son paralelas y la suma de los desniveles a lo largo de un itinerario cerrado no es cero. La variación del potencial entre dos superficies de nivel o equipotenciales separadas una distancia diferencial es igual al producto del gradiente del campo por el diferencial de distancia (López Amador, 2002):

$$Du = -\text{grad } U \cdot ds = \text{gravedad } ds,$$

la integral a lo largo de un itinerario cerrado ó $\int g ds$ es cero por ser conservativo el campo de la gravedad. Combinando medidas de desniveles con valores de gravedad se obtienen diferencias de potencial y estas se convierten a altitudes ortométricas H medidas a lo largo de la plomada, con la fórmula (López Amador, 2002):

$$H = \frac{\left(\int g ds \right)}{\left(g + 0,0424 H \right)}.$$

Este método es también conocido como Posicionamiento por Satélites y depende del conocimiento de las anomalías de las alturas en una cantidad determinada de puntos diseminados uniformemente por todo el territorio de interés, de tal manera que las alturas obtenidas por el posicionamiento por Satélites cuya superficie de referencia es la del Elipsoide puedan ser referidas a la superficie de nivel del campo real de la gravedad. Esta rama de la geodesia se conoce con el nombre de Geodesia Espacial, a veces Dinámica, y con carácter más restringido Geodesia por satélites. Esta manera de resolver las alturas de los puntos no ha alcanzado la precisión mínima requerida para las determinaciones altimétricas de alta precisión de forma generalizada. Su futuro está en la elevación de la precisión en la solución de las alturas elipsoidales con el empleo de los Satélites y la obtención del mapa del Cuasigeoide (Geoide en los mares y océanos), siendo esta última, tarea científica y técnica de primer orden para los geodestas (Palmero y Rozo, 2002).

Las medidas de la astronomía geodésica, de triangulación y de nivelación hacen todas uso esencial de la línea de la plomada, que al ser la dirección del vector gravedad no está menos físicamente definida que su magnitud, esto es, que la gravedad g . Así pues, los métodos astrogeodésicos, que utilizan determinaciones astronómicas de latitud, longitud y acimut, y las operaciones geodésicas de triangulación, medida de bases y trilateración, pueden considerarse propiamente pertenecientes a la geodesia física, tanto como los métodos gravimétricos. Como diferencia general, los métodos astrogeodésicos utilizan la dirección del vector gravedad, empleando técnicas geométricas mientras que los métodos gravimétricos operan con el módulo del vector gravedad, haciendo uso de la teoría del potencial. Una clara demarcación es imposible y hay frecuentes solapamientos (López Amador, 2002).

Para fijar la posición de un punto en el espacio necesitamos tres coordenadas. Se puede utilizar un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Sin embargo, en muchos casos es preferible tomar las coordenadas naturales: la latitud geográfica,

la longitud geográfica y la altitud sobre el geoide, que se refieren directamente al campo gravitatorio de la Tierra. La altitud se obtiene por nivelación geométrica, combinada con medidas de la gravedad, mientras que las dos primeras se hallan por medidas astronómicas. En tanto que el geoide pueda identificarse con un elipsoide, el uso de estas coordenadas para cálculos es muy sencillo. Ya que esta identificación es suficiente sólo para resultados de muy baja precisión, la desviación del geoide respecto de un elipsoide debe tenerse en cuenta. El geoide tiene, infortunadamente, propiedades matemáticas muy molestas, primero, es una superficie complicada con discontinuidades en la curvatura. De ahí que, no se recomienda realizar cálculos matemáticos directamente sobre el, como si se puede hacer sobre el elipsoide. Debido a que las desviaciones del geoide con respecto al elipsoide son pequeñas y pueden ser calculadas, es conveniente añadir pequeñas reducciones a las coordenadas originales, de manera que se determinen valores que se refieran a un elipsoide.

De acuerdo a lo anterior, y teniendo una serie de puntos observados expondremos el *método de aproximación polinómica*, el cual nos determinara la ondulación de cualquier punto respecto a una situación planimétrica. Igualmente, se determinara cual grado de polinomio es el ideal para solucionar este problema planteado.

4.2.2. MÉTODO DE APROXIMACIÓN POLINÓMICA

Un método sencillo propuesto por P. Vanicek y C.L. Ferry en 1975 para el estudio local del geoide se fundamenta en el ajuste de un polinomio a los datos disponibles en ondulación del geoide y desviación de la vertical, que minimice una cierta funcional (método de mínimos cuadrados). Este método tiene inconvenientes aunque presenta también grandes ventajas debido a su sencillez en el tratamiento de los datos, su rapidez de cálculo y lo más importante es la posibilidad de calcular la ondulación del geoide en cualquier punto de la zona tratada ya que la representación es analítica. Entre los inconvenientes se pueden distinguir los siguientes:

- La resolución del sistema de ecuaciones normales puede presentar inconvenientes de mal condicionamiento de la matriz normal o de gram del ajuste.
- Al aumentar el grado del polinomio pueden suceder inestabilidades de tipo numérico.
- La elección del grado del polinomio a ajustar, esto es, la elección del polinomio óptimo.

4.2.2.1. Modelo para datos homogéneos

Sea una cierta región T en donde se han efectuado observaciones GPS y enlace a puntos de cota ortométrica, y se tiene por tanto determinada la ondulación del geoide en una serie de puntos P_k , $k=1, \dots, m$ con pesos a priori w_k . Introduzcamos sobre R_m una métrica por medio del producto escalar:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i w_i \quad x, y \in R^m$$

Y la norma correspondiente:

$$x^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 w_i \quad x \in R^m,$$

planteado el problema de la siguiente manera, la ondulación del geoide se representa a través de un polinomio de grado n en dos variables:

$$N(x, y) = P_n(x, y) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x^i y^j,$$

de donde las coordenadas (x, y) están referidas a un sistema local definido por:

$$x = R (\varphi - \varphi_0)$$

$$y = R \cos\varphi (\lambda - \lambda_0),$$

en la que (φ_0, λ_0) es el origen de coordenadas que pueden tomarse como el centro de masas de los puntos dato y R es un radio terrestre medio de la zona considerada.

De esta manera, conociendo las coordenadas (x, y) y la ondulación del geode de un conjunto de puntos podemos obtener los coeficientes del polinomio que nos relaciona la ondulación con la posición planimétrica del punto. Suponiendo que tenemos un polinomio de grado 1:

$$N(x,y) = a_{\infty} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} x^i y^j$$

Obteniendo n puntos donde se conoce la ondulación del geode y las coordenadas (x,y) , podemos escribir el sistema de n ecuaciones, que de forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & y_n & x_n & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\infty} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \end{pmatrix},$$

$$\underline{N} = A \underline{x}$$

de la cual \underline{N} es el vector de ondulaciones del geode observadas, A es la matriz de diseño o matriz de vandermonde, y \underline{x} como el vector de incógnitas de los coeficientes del polinomio.

En este caso, polinomio de grado 1, tenemos que 4 coeficientes a determinar. Siendo k el grado del polinomio de aproximación, el número de coeficientes (m) del polinomio k será:

$$m = (k + 1)^2,$$

ahora bien, si existen n observaciones, se debe cumplir que $n > (k + 1)^2$, para que se pueda realizar el ajuste por MM. CC.

Así de esta manera, las ecuaciones normales de este sistema serían de la siguiente expresión:

$$N \underline{\hat{x}} = \underline{d},$$

de la cual N es la matriz normal, $\underline{\hat{x}}$ es el vector de coeficientes incógnitas y \underline{d} es el vector de cantidades observadas. Las expresiones de N y \underline{d} se hallan de:

$$N = A^T P A,$$

$$\underline{d} = A^T P \underline{N},$$

de donde P es la matriz de pesos de las observaciones, en este caso se supone a P como la matriz identidad, $P = I$.

la solución de mínimos cuadrados es:

$$\underline{\hat{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{N} = N^{-1} \underline{d},$$

La matriz de varianzas-covarianzas de las incógnitas viene expresada por la siguiente forma:

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}^2 \circ N^{-1},$$

en la que $\hat{\sigma}_o^2$ es la varianza de peso unidad del ajuste dada por la siguiente expresión:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{m-n},$$

y \hat{P}_n es el polinomio estimado:

$$\hat{P}_n(x,y) = \sum_{i,j=0}^n \hat{a}_{ij} x^i y^j,$$

De donde \hat{a}_{ij} es la estimación de mínimos cuadrados de los coeficientes del polinomio.

La matriz de varianzas-covarianzas de las observaciones viene dada por la siguiente ecuación:

$$C_{ll} = A C_{xx} A^T,$$

y la matriz varianzas-covarianzas de los residuales viene dado por la siguiente expresión:

$$C_{vv} = Q - C_{ll},$$

Con v_i como el residual de la i -ésima observación. Este sería el modelo de aproximación polinómica con datos homogéneos, ondulación del geoide coincida en n puntos a partir de observaciones GPS, que daría como resultado la determinación del polinomio para el conocimiento de la N en cualquier punto conociendo su situación planimétrica (x,y) o igualmente que (ϕ,λ) .

4.2.2.2. Elección del grado del polinomio de aproximación

Ahora se trata de determinar el grado óptimo del polinomio de aproximación. Para este propósito se aplicará la hipótesis lineal general. Suponiendo que el polinomio de aproximación tiene grado $(n+1)$, entonces el número de coeficientes a determinar en el ajuste $(n+2)^2$. el número de coeficientes a obtener en el nuevo ajuste entre a elección grado n y grado $n+1$, es $2n+1$. Consideremos el modelo lineal:

$$A \underline{x} - \underline{t} = \underline{v}, E(\underline{v}) = 0, \text{cov}(\underline{v}) = s^2_0 Q,$$

en la que la matriz $(m, (n+1)^2)$ ($m = n^\circ$ de observaciones y $n =$ grado del polinomio) de diseño del ajuste, \underline{x} es el vector $((n+1)^2, 1)$ de coeficientes del polinomio a determinar, \underline{t} es el vector $(m, 1)$ de términos independientes y \underline{v} es el vector $(m, 1)$ de residuos.

La hipótesis H se puede plantear:

$$A \underline{x} - \underline{t} = \underline{v},$$

$$H : (0 ; I_{2n+1}) \underline{x} = 0,$$

Esto es, los coeficientes nuevos al pasar del polinomio de grado n a $n+1$ son cero. La forma más cómoda de contrastar la hipótesis H para este caso en particular, es considerar las siguientes cantidades:

$$\hat{R}_{n+1} = (m - (n+1)^2) \hat{s}_{n+1}^2,$$

$$\hat{R}_n = (m - n^2) \hat{s}_n^2,$$

de donde \hat{s}_{n+1}^2 es la varianza obtenida en el ajuste cuando se considera el polinomio de grado $(n+1)$ y \hat{s}_n^2 es la varianza del ajuste cuando se considera el polinomio de grado n . el estadístico es definido por la siguiente expresión:

$$F(H) = \frac{(\hat{R}_n - \hat{R}_{n+1})}{(2n+1)\hat{s}_{n+1}^2},$$

La cual sigue una distribución F central con $(m - (n+1)^2, 2n+1)$ grados de libertad cuando se verifica la hipótesis H, y si ocurre a un nivel de confianza $(1-\sigma)$, se puede considerar el grado óptimo del polinomio igual a n . en otras palabras, cuanto más grande es el valor del estadístico peor es el resultado con el polinomio de grado n , de ahí que lo que se busca es que $F(H) < F_{teórico}$. Esta hipótesis nos quiere decir que para la elección del grado óptimo del polinomio es que al introducir a_{ij} nuevos (al aumentar el grado del polinomio de n a $n+1$) los valores de estos a_{ij} nuevos sean de valor 0 o habitualmente 0.

4.2.3. DETERMINACIÓN DEL GEOIDE USANDO MODELO GEOPOTENCIALES

En este apartado se hará una presentación del método utilizado para la determinación del geoide usando modelos geopotenciales. Así de esta manera, a finales del siglo pasado, Helmert desarrollo una primera metodología para estimar la ondulación del geoide. Utilizo observaciones astronómicas para la determinación de los componentes de la desviación vertical a través de los procedimientos adecuados, calculados como ondulaciones geodésicas. Este procedimiento fue conocido como método astrogeodésico o nivelación astronómica. El inconveniente de este método es la necesidad de una red razonable de puntos distribuidos sobre una región donde se desea estimar las ondulaciones geoidales. En 1849, George Gabriel Stokes desarrollo una integral que hizo posible una determinación de las alturas geoidales utilizando el conocimiento de las anomalías de la gravedad. Estas deben ser conocidas de forma continua sobre toda la superficie de la tierra. Esta exigencia hizo que se aplicara muy

poco esta metodología, puesto que la gravedad solamente era conocida de manera discreta y sobre una pequeña parte de la superficie terrestre; en los océanos, por ejemplo, es considerado imposible el conocimiento de la gravedad.

Hasta 1920 los levantamientos gravimétricos eran realizados con dispositivos que utilizaban péndulo, en pequeña cantidad y en áreas continentales. Una dificultad del método pendular era que exigía operadores especializados y la productividad era muy baja, además de la imposibilidad del levantamiento en áreas oceánicas. Con el desarrollo de los gravímetros de resortes, pequeños, sensibles y de fácil manejo, permitiendo una rápida densificación de las redes gravimétricas en los continentes. Hoy en día en los océanos, un dispositivo tripendular de Vening Meinesz posibilitó medir aceleraciones de la gravedad de manera rápida. Posteriormente, los modernos gravímetros montados sobre plataformas giroestabilizadas en barcos permitieron determinaciones rápidas y precisas. En la actualidad, una altimetría por medio de radar resuelve el problema de la determinación de la gravedad en los océanos.

Con la llegada de los satélites artificiales y los recursos informáticos, la integral de Stokes gana un nuevo aliciente, pues, estudiando las perturbaciones de las orbitas de estos satélites, es posible estimar la componente de la longitud de onda del campo gravitacional y el efecto de la altura geoidal, a través de los modelos geopotenciales. De esta forma, no es indispensable extender la integral a toda la tierra y si alrededor de la zona de cálculo. Para esto es necesario introducir una modificación en la integral. Una evaluación de la integral puede hacerse de dos maneras: por la integración numérica o por la FFT (Transformada de Fourier Rápida).

4.2.3.1. La Integral de Stokes

George Gabriel Stokes presento en 1849, una de las formulas mas importantes de la geodesia física, ya que hizo posible determinar una separación geoide -

elipsoide, es decir, una ondulación del geoide, a través del conocimiento de las anomalías de la gravedad. Ella fue considerada durante mucho tiempo como simplemente teórica, debido a que se necesitaba conocer la gravedad en toda la extensión de la tierra, inclusive en los océanos, que era considerada como imposible. Con el desarrollo tecnológico, principalmente el uso de satélites artificiales para determinar los modelos geopotenciales, una integral no es precisa para toda la extensión de la tierra, pero sí para la zona donde se realizaran los cálculos. Una componente de la longitud de onda de la altura geoidal está basada en los modelos geopotenciales.

Una deducción de la fórmula, Stokes admitió una inexistencia de masas externas en una superficie equipotencial considerada, lo que hace que se deba reducir las mediciones de la gravedad generando una superficie física para el geoide y compensar las masas que son externas al geoide. También se admite una aproximación esférica para la superficie terrestre. Una integral de Stokes tiene la siguiente forma:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin\psi \, d\psi \, d\alpha,$$

De donde N es la altura geoidal, R es el radio de la tierra, ψ es el valor medio de la gravedad normal a la tierra, Δg es la anomalía de la gravedad, (ψ, α) es la distancia y el acimut esférico entre el punto considerado y el punto donde N es calculado y $S(\psi)$ es la función de Stokes.

Una función $S(\psi)$ puede ser expresado en una expansión de series de polinomios de Legendre de la siguiente forma:

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi),$$

De donde P_n son los polinomios de Legendre de grado n .

Como se menciona anteriormente, la integral de Stokes supone la existencia de masas externas en el geoide. Para esto se reducen las medidas de la gravedad, hechas sobre una superficie física, para el geoide se eliminan las masas topográficas. Con estas reducciones, se genera un modelo de la superficie terrestre con características diferentes de la real. Posteriormente, mediante la integral de Stokes se determina una separación entre el elipsoide de referencia y el geoide ficticio, que es un cuerpo resultante de la superficie terrestre modificada. Este geoide ficticio se denomina cogeoides. Para cada método de sustitución de masas topográficas se genera un cogeoides. Esa separación se conoce como efecto indirecto. Lo que se procura es adoptar un método de sustitución de masas topográficas que resultan con el menor efecto indirecto posible.

4.3. EL GEOIDE IBERICO IBERGEO 95

En la península Iberica el geoide Ibergeo95 fue publicado en 1995, desde entonces han venido surgiendo nuevos modelos geopotenciales, nuevos modelos digitales del terreno y nuevos datos precisos de las anomalías de la gravedad. El cálculo del geoide en grandes áreas es posible en el marco de la cooperación internacional. En la península Iberica, la colaboración entre el “Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC)” en Madrid, el español “Instituto Geográfico Nacional” y el “Instituto Portugues de Cartografía y Catastro”, en el marco del proyecto IBERGEO, hicieron posible la realización del geoide Iberico.

La primera determinación de un geoide preliminar en una pequeña zona en el centro de España había sido realizada en 1991, usando el método de Colocación de Minimos Cuadrados (LSC) (Sevilla et al., 1991^a), y el primer geoide gravimétrico de Portugal, también obtenido con LSC, había sido calculado en 1992 (Sevilla y Rodriguez-Velasco, 1993). El geoide del centro de España fue corregido en el año 1993 teniendo en cuenta los efectos del terreno (Gil et al., 1993). La primera

determinación del geoide gravimétrico para toda la península ibérica fue hecha en 1995, denominado Geoide Iberico IBERGEO95.

Este nuevo geoide gravimétrico ha sido calculado para la Península Iberica y las regiones circundantes, entre los límites $35 < \varphi < 45$ para latitudes y entre $-10,5 < \lambda < 5,5$ para longitudes, en una cuadrícula con lados de malla de 2,17 y 2,67 kilómetros en la dirección de las latitudes y longitudes respectivamente. El geoide definitivo fue calculado basándose en los siguientes tipos de datos: A) El modelo geopotencial OSU91A conjunto de coeficientes armónicos esféricos (Rapp et al., 1991), completo para el modelo 360, B) un conjunto de 186.813 puntos de anomalías de la gravedad aire-libre (118.423 marinos y 68.390 terrestres) que cubren la Península Iberica y las regiones circundantes, los datos de la gravedad han sido corregidos para los efectos atmosféricos y terrestres, y C) un modelo digital del terreno de 1000x1000 metros para España y la ETOPO5U revisado para el resto del territorio.

Todos los datos han sido probados y validados. El método LSC fue aplicado sistemáticamente para predecir las anomalías de la gravedad aire-libre con el propósito de la validación, usando el conjunto de coeficientes armónicos esféricos OSU91A para reducir las anomalías. Los errores graves se han detectado, un 2% en los datos marinos y en un 1% en los datos terrestres. La corrección del terreno se ha tenido en cuenta por medio de la técnica eliminación-restauración, y el segundo método de condensación de Helmert o la reducción de Helmert por condensación ha sido usado para reducir las anomalías de la gravedad. En consecuencia, han sido considerados los efectos indirectos en el geoide.

El método utilizado en los cálculos de la contribución de la gravedad local al dato del geoide fue la Integral de Stokes en forma de convolución. A los datos de entrada se les han reducido totalmente las anomalías de gravedad de cuadrícula. Para calcular la fórmula de Stokes' se usaron tres técnicas: la primera es la Transformación Planar Rápida de Hartley (FHT) (Tziavos, 1993a, b); la segunda es el método Esférico Multibanda de la Transformada Rápida de Fourier con la forma

bidimensional discreta de la Transformada Rápida de Fourier (Forsberg y Sideris, 1993) y la tercera es técnica esférica 1D-FFT (Haagmans et al., 1993), las cuales permitieron la evaluación de la Integral Discreta Esférica de Stokes' sin ningún tipo de aproximación, paralelo por paralelo. En todos los cálculos se ha usado el espectro discreto de la función Kernel. Se rellena con ceros al 100% la matriz de la señal con el fin de evitar los efectos de la convolución circular.

El geoide final ha sido obtenido sumando la contribución del modelo y la contribución de las anomalías de la gravedad reducida tanto como los efectos indirectos. La variedad de resultados han sido analizados y comparados. Los resultados definitivos, referidos al sistema geodésico de referencia GRS80, fueron presentados en un mapa cubriendo el contorno de la región con intervalos de 50 cm. Este mapa se ha construido a partir de 262.144 ondulaciones del geoide predichas. El error cuadrático medio de la altura geoidal obtenido por comparación con ondulaciones GPS en casi todas las partes fue de menos de 1 ppm.

5. SISTEMAS GPS

5.1. INTRODUCCIÓN

El Sistema de Posicionamiento Global GPS se ha convertido, desde que fuera declarado operacional en 1993, en la herramienta de posicionamiento por excelencia por su versatilidad y bajo costo. El objetivo primordial del Departamento de Defensa de los Estados Unidos (DoD) fue desarrollar un sistema de navegación global, que proporcionara resultados en tiempo real, que fuera independiente de las condiciones atmosféricas y tuviera una exactitud de pocos metros. Desde los inicios del proyecto NAVSTAR GPS, éste mostró cualidades sin precedentes para aplicaciones comerciales y científicas. Según el punto de vista que interesa a este trabajo, GPS provee un sistema de referencia global y al mismo tiempo una metodología para vincularse a él. Según la modalidad de trabajo que se emplee, GPS permite calcular posiciones de objetos respecto del ITRS con una exactitud desde decenas de metros hasta uno o dos centímetros. El posicionamiento de alta precisión con GPS ha contribuido a establecer el Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF), de exactitud centimétrica y fácilmente accesible en todo el mundo.

En el presente capítulo se expondrán las características principales del sistema GPS y el tratamiento de las observaciones con relación al establecimiento de marcos de referencia de exactitud centimétrica. Se describirán los problemas relativos al modelado de la propagación de la señal GPS. Los efectos que modifican la posición de la estación serán solo mencionados ya que han sido analizados antes en el capítulo 2.

5.2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Desde los primeros tiempos el hombre ha procurado utilizar los cuerpos celestes para la orientación, y todo indica que continuara utilizándolos para su orientación. Sin embargo, a parte de los cuerpos celestes naturales, también utilizan los cuerpos distribuidos convenientemente que están bajo su control (Moraes et al, 1998). La navegación astronómica depende de la visibilidad que tienen los usuarios de los astros en el momento de la realización de esta operación. Asimismo, puede ser perjudicial para la determinación, en tiempo real, de la posición de los usuarios, debido a que la visibilidad no se presenta las 24 horas del día. Otros sistemas modernos de navegación que utilizan ondas de radio también tienen limitaciones: como las ondas de radio de frecuencia alta proporcionan una posición precisa de la navegación, aunque presentan limitaciones en la precisión vertical; y las ondas de radio de baja frecuencia son pobres en precisión (horizontal y vertical) y además los equipos son difíciles de adquirir. En las décadas de los 60 y 70, la introducción de los satélites artificiales contribuyó con nuevos sistemas de navegación (Transit, timation, sistema 621B, NTS), que resuelven algunos de los problemas mencionados anteriormente, aunque no todos a la vez. El camino para solucionar estos inconvenientes fue dado a través de investigaciones realizadas en las décadas de los 70 y 80, por la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, que lograron desarrollar un sistema de navegación por satélites conocido como NAVSTAR/GPS (NAVigation System using Time and Ranking/Global Positioning System). Entre los objetivos trazados para el GPS nombramos los siguientes:

- Ayudar a la radionavegación con una elevada precisión en los cálculos de posición, exactamente con usuarios sujetos a una dinámica elevada;
- Propiciar la navegación en tiempo real;
- Propiciar una elevada inmunidad a las interferencias;
- Proporcionar una cobertura global, 24 horas por día;
- Obtener de forma rápida los datos transmitidos por los satélites.

El 22 de febrero de 1978 se lanzó el primer satélite de la constelación NAVSTAR (controlado por los Estados Unidos de América). Ella consta de 24 satélites que configuran el sistema GPS, más 4 de reserva, uniformemente distribuidos en 4 satélites por órbita, situados a una altitud media de 20.180 kilómetros, así pues, desde cualquier parte de la tierra se puede observar en cualquier momento a través de 6 a 11 satélites. Para el control de la constelación GPS existen cinco estaciones oficiales de seguimiento, que reciben continuamente las señales de los satélites, obteniendo con gran precisión las órbitas de todos ellos.

5.2.1. GENERALIDADES DE LOS SATÉLITES ARTIFICIALES

A continuación se hará un breve repaso sobre los tipos de satélites que se han utilizado para fines de posicionamiento. A todos los sistemas de satélites, tras su etapa experimental y uso militar, se les han ido buscando y encontrando aplicaciones de tipo civil, incluso diferentes de las originales, como posicionamiento, vigilancia, comunicaciones, meteorología, geodesia, astronomía, geofísica, teledetección, etc., divulgándose la información total o parcial. Dentro de las ciencias geográficas se buscan aplicaciones, además de la Geodesia o Topografía posicional, a otros campos como: determinación de parámetros orbitales, movimiento polar (cambio de latitud), irregularidades de rotación de la tierra (cambio de duración el tiempo), etc.

Los satélites se pueden dividir en dos clases: pasivos y activos. Los pasivos carecen de cualquier mecanismo y de emisiones propias; sólo pueden devolver la energía que en ellos incida, bien por simple reflexión o con prismas retrorreflectores. Mientras que los activos pueden tener luces pulsantes de alta intensidad, repetidores de microondas, transmisores radioeléctricos con modulaciones diversas, etc. También poseen el adecuado sistema de producción e energía, normalmente con placas fotovoltaicas o paneles solares; suelen tener baterías para almacenar la energía eléctrica y poder ser operativos cuando la tierra

eclipse la radiación solar. Pueden disponer también de elementos para su control y maniobra (combustibles, motores cohete, etc.).

Ahora bien, otro asunto a tratar es el problema del posicionamiento por satélites, es decir, queremos obtener nuestra situación respecto a un sistema de referencia dado a priori, a partir el conocimiento de la situación del satélite respecto a este sistema y de las observaciones realizadas sobre dicho satélite. La posición del satélite es conocida si disponemos de las efemérides (parámetros orbitales), que permiten calcular su posición en función del tiempo. Generalmente estas efemérides son facilitadas por los operadores de la constelación, esto es, el organismo encargado el mantenimiento en servicio de los satélites, tras hacer su seguimiento desde ciertas estaciones terrestres de posiciones conocidas y llamadas de referencia.

Para fines de navegación, la observación a satélites ha de permitir en cada instante determinar la posición del móvil en tiempo real o inmediato. Si la utilización es geodésica o para posicionamiento estático, sucesivas observaciones han de permitir determinar la mejor posición y el cálculo ha de hacerse en tiempo diferido, o sea, posterior a la propia observación. El problema siempre puede invertirse, es decir, conocida la posición de estaciones sobre la superficie terrestre y observando a los satélites, puede determinarse la posición de estos, con la siguiente mejora y actualización de las orbitas, es decir, los parámetros orbitales, que es lo que se hace en las estaciones de control antes mencionadas. Para expresarlo de una forma elemental: si sabemos donde están los satélites, podemos situarnos; si sabemos nuestra situación, podemos situar los satélites (o determinar sus efemérides).

Con el propósito de establecer posiciones de los satélites con la garantía indispensable (por ejemplo, ± 1 a 2 metros en GPS) para después utilizar estas efemérides calculadas, se necesita conocer la posición relativa a las estaciones de control con un rango superior de precisión ($\pm 0,1$ a 0,2 metros), por medio de la

utilización de otros sistemas de observación más precisos, como el sistema SLR (Láser a Satélites), o aún mejor, VLBI (Interferometría de Muy Larga Base).

Así de esta manera, para conocer la posición geodésica de un punto en la tierra se necesita conocer la posición de tres satélites. El receptor colocado en un punto de la tierra mide la distancia a tres satélites GPS y la posición viene definida por la intersección de dos círculos, siendo una la solución buena y la otra incorrecta.

Para la medida de distancias, tanto el satélite como el receptor incorporan un reloj atómico de alta precisión, puesto que el receptor compara el instante de llegada de la señal emitida desde el satélite con el instante de partida. Habitualmente, cuando desde un punto se miden tres direcciones o distancias no coplanarias a distintos satélites de posición conocida, se puede determinar por un simple cálculo trigonométrico la situación del punto respecto al sistema de referencia de los satélites. Ahora bien, para que esto sea consistente es imprescindible tener los relojes que miden el tiempo tanto en los satélites, como en tierra, perfectamente sincronizados. Aun así, al incorporarse al satélite un reloj mas preciso que el reloj del receptor se produce un error en la medición del tiempo, lo que hace necesaria la utilización de un cuarto satélite (las incógnitas a resolver son cuatro: X, Y, Z y el Tiempo).

5.3. CONCEPTOS BÁSICOS DEL POSICIONAMIENTO CON GPS

El sistema GPS tiene una enorme versatilidad, respondiendo a las necesidades de una gran variedad de usuarios del posicionamiento. El posicionamiento puntual implica utilizar un solo receptor que determina su posición sobre la base de mediciones de pseudo distancia con códigos hacia al menos cuatro satélites, y efemérides, extraídas estas últimas del mensaje de navegación transmitido por los mismos satélites. Esta modalidad tuvo hasta el 30

de abril de 2000 una exactitud de hasta 100 m en latitud y longitud y hasta 156 m en altura para el 95% del tiempo, suponiendo un coeficiente de Dilución de la Precisión para la Posición (PDOP) menor que 6, según las especificaciones del Servicio de Posicionamiento Estándar (SPS). Desde el 1^a de mayo de 2000, en que se eliminó la Disponibilidad Selectiva (SA) [IGS, 2000], las especificaciones del SPS deben dividirse por diez. Existe una modalidad algo más precisa o Servicio de Posicionamiento Preciso (PPS) pero es accesible solamente para usuarios autorizados por el DoD. Si se necesita un posicionamiento de mejor calidad, existen varias alternativas. La mayoría implican el uso del método diferencial y del observable más preciso que da el sistema, la fase de la portadora. El método diferencial implica calcular las coordenadas de nuevos puntos respecto de al menos una estación de referencia, que debe tener coordenadas conocidas a priori, a partir de observaciones simultáneas en todas las estaciones o pares de ellas conformando una red. La situación deseable es que el cálculo diferencial no se encuentre afectado por errores sistemáticos apreciables. En ese caso, la exactitud de las coordenadas calculadas estará dada por la de las coordenadas a priori de la estación de referencia y la calidad de los modelos empleados en el cálculo. La precisión de las mismas en cambio estará determinada por la del observable utilizado y la distribución de los satélites en el cielo. El usuario debe ser capaz de controlar la incidencia de los errores sistemáticos en el cálculo de sus vectores a fin de poder obtener una solución precisa y exacta.

5.3.1. TÉCNICAS GENERALES DE POSICIONAMIENTO

En este apartado, haremos referencia a los siguientes sistemas de posicionamiento espacial empleados con anterioridad a los sistemas actualmente vigentes, entre los que se encuentra el GPS. En la observación a satélites existen fundamentalmente dos técnicas de medición que se basan en la determinación de direcciones o distancias entre el observador terrestre y el satélite.

5.3.1.1. Medición de direcciones

La medición de direcciones a satélites típicamente se hace por medios fotográficos. La posición de la imagen del satélite (comúnmente cientos de imágenes sucesivas) sobre el fondo de estrellas identificadas en función de la posición que entre ellas ocupa, permitía, tras las oportunas medidas de fotocoordenadas realizadas por un comparador sobre el negativo y los cálculos convenientes, obtener la ascensión recta y declinación topocéntricas del satélite respecto al sistema de referencia definido por las estrellas fijas, en el momento de la toma fotográfica.

Las cámaras utilizadas eran de gran distancia focal, con abertura grande para registrar estrellas débiles y satélites poco brillantes. Además, podrían ser de tres tipos:

- **Balísticas.** Tenían un montaje altacimutal con distancias focales relativamente cortas, y por tanto, campo de visión amplios, tipo 20°.
- **Astronómicas.** Tenían montaje ecuatorial y focal grande, con campos de visión menor de 10°. Al tener movimiento horario y seguir las fijas, podrían registrar estrellas y satélites hasta de magnitud 13.
- **Orbitales.** Eran como las astronómicas, pero contando con un tercer eje de giro o grado de libertad que les permitían seguir al satélite, incluso las hubo con un cuarto eje para seguir movimientos que se desviarán del plano orbital. Estas cámaras eran de estación fija y podían también localizar estrellas y satélites de hasta magnitud 13.

Sin embargo, las fuentes de error inherentes a estas técnicas fotográficas son varias, entre ellas, podemos mencionar a la incertidumbre en las posiciones estelares, esto es, errores en las coordenadas ascensión recta y declinación de las estrellas; distorsión en la emulsión fotográfica y precisión del comparador, que se podía estimar en $\pm 0,002$ metros en coordenadas instrumentales. La refracción

afecta poco: al no estar el satélite en el “infinito”, sufre una variación de posición aparente, es decir, la posición observada no coincide con la real debido a este efecto de refracción, sobre el fondo de estrellas. El grueso de la refracción afecta conjuntamente al satélite y al fondo estelar. Los satélites usados en estas técnicas fueron al principio los globos pasivos ECHOS I y II de respectivamente de 30 y 41 metros de diámetro, orbitando a 1600 y 1100 kilómetros, además operativos de 1960 a 1968 y de 1964 a 1969, respectivamente. Para determinar las coordenadas geocéntricas de la cámara se han usado dos técnicas:

- **El método geométrico.** En el, cierto número de cámara desde distintos lugares de observación, fotografiaban simultáneamente el mismo satélite. Tras múltiples tomas que permitían la determinación con puntos comunes, el posicionamiento relativo de las estaciones era perfectamente calculable. No era necesario un conocimiento con gran precisión de efemérides de los satélites, ni la medida exacta del tiempo, pero si era esencial la sincronización de los relojes de las estaciones en la toma de fotografías, para que estas fuesen efectuadas en un mismo instante. Con este método y mediante cálculos sencillos se podían determinar posiciones relativas entre las estaciones, pero no absolutas.
- **El método dinámico.** No necesitaba sincronización, adicionalmente permitía el posicionamiento absoluto. Era necesario un preciso conocimiento de la órbita, que permitía establecer el sistema de referencia, y por tanto del momento exacto de la toma para la determinación de dichas efemérides. Se obtienen direcciones a puntos conocidos, constituyendo así una trisección inversa en tres dimensiones.

5.3.1.2. Medición de distancias

La medición directa de distancias a satélites presenta dos alternativas según la banda del espectro electromagnético utilizado, esto es, según el tipo de fuente utilizada para la creación de la señal:

- **Luz.** Siempre láser, en los sistemas SLR, que existe en el observatorio de la marina de San Fernando, actualmente con precisiones de 1 cm a 5 cm, y LLR (Láser a La Luna).
- **Ondas de radio,** en todos los demás (los satélites GPS generan estas ondas electromagnéticas).

En la medición de distancias se ofrece otra alternativa:

- **Distancia absoluta.** Sistema láser mediante la medición del intervalo de tiempo entre la generación de la señal y su retorno, o microondas con la medición de la diferencia de fases entre la generada por el satélite y la recibida en tierra por el receptor.
- **Diferencias de distancias.** Que pueden ser entre la estación receptora y radiofuente en dos momentos entre los que ha habido variación en la posición relativa (sistema Doppler) o entre dos estaciones receptoras y la radiofuente (sistema interferométrico).

Otra técnica utilizada es la parecida al sistema VLBI. La NASA desarrollo el sistema PRIME MINITRACK, cuyo funcionamiento se basaba en la comparación de las señales emitidas por el satélite y recibidas en dos estaciones diferentes, estableciéndose el vector que las unía. Los primeros satélites usados en este sistema emitían en 108 MHz.; los posteriores en 136 MHz. Podía también obtenerse la dirección al satélite con precisión de 20". Se media el tiempo transcurrido desde la emisión hasta el retorno tras la reflexión directa en el cuerpo del satélite o su remisión en otros casos, pudiendo obtenerse la distancia al satélite, alcanzando precisiones de alrededor de 3 m. Por la morfología de las antenas también se podían medir direcciones, aunque como la precisión era también de solo 20", el error de determinación de la posición para un satélite de 2000 Kilómetros de altitud, utilizando este método, podría ser hasta de algunos cientos de metros, según su distancia cenital.

5.3.2. MÉTODOS DE POSICIONAMIENTO

Se conoce por métodos de posicionamiento a los diversos métodos empleados para hacer mediciones GPS, o también conocido como métodos de levantamiento, aplicando los diferentes métodos de medición de distancias a los satélites hasta ahora explicados. Se pueden aplicar diferentes criterios para su clasificación. Ahora bien, si los puntos que queremos obtener están perfectamente definidos en un lugar determinado, se denomina a dichos métodos de posicionamiento estáticos. Si estos puntos se sitúan por la trayectoria de un móvil, ya sea una persona caminando o en vehículo, se denominan métodos de posicionamiento dinámicos. Si se utilizan métodos diferenciales, entonces se denominan métodos de posicionamientos relativos o diferenciales. Atendiendo a los anteriores criterios se pueden clasificar, en función de los métodos de medida empleados, en estáticos y dinámicos, el primero consiste en posicionar un receptor en un marco geodésico, en la cual son conocidas sus coordenadas, y un segundo receptor en un punto donde se quiere determinarlas. Rastreando simultáneamente las estaciones por un intervalo de tiempo recomendado, son calculadas las coordenadas tridimensionales (latitud, longitud y altitud geométrica) para un punto desconocido. Este proceso es el más empleado y el que mayores precisiones alcanzan, el más usado en el levantamiento de puntos de apoyo en la restitución (RIBAS et al, 1997). Así de esta manera, tenemos:

- **Método estático absoluto.** Utilizando un solo equipo con el método de medida de pseudos-distancias y tiempo de observación de 2 a 3 minutos, se obtienen, en tiempo real, los resultados con una precisión de 10 metros sin la S/A activada.
- **Método dinámico absoluto.** Utilizando un solo equipo con el método de pseudos-distancias, la primera observación tarda de 2 a 3 minutos y la precisión ronda los 30 metros sin la S/A activada y 150 metros con la S/A activada, siendo los resultados obtenibles en tiempo real.

- **Método estático relativo (diferencial).** Es indispensable la utilización de al menos dos equipos y se tiene que realizar un postprocesado de los datos recogidos por los receptores. Se pueden medir las distancias por pseudodistancias y por medida de fase. Si se mide la distancia por pseudodistancias, el tiempo de medición es de media hora a una hora y la precisión es de 0,5 metros y si se mide la distancia por el método de diferencia de fase las precisiones que se pueden alcanzar son de 0,005 metros + 0,5 p.p.m.
- **Método dinámico relativo (diferencial).** Se basa en la utilización de al menos dos receptores, uno está en la base instalada en un punto de coordenadas conocidas y otro en movimiento. Hay dos tipos: el conocido como *método estadístico o estático rápido*, en donde un receptor permanece fijo en una estación de referencia de coordenadas conocidas y el segundo se instala en el punto que se desea posicionar. La grabación de datos se hace habitualmente cada 15 segundos. El conocido como *método cinemático (stop and go y/o continuo)*, en donde un receptor permanece fijo en una estación de coordenadas conocidas y el segundo se desplaza deteniéndose brevemente en los puntos a posicionar (Stop & Go). Normalmente es posible reconstruir la trayectoria. Para alta precisión se requiere inicialización. La grabación de datos se hace habitualmente cada 5 seg., puede ser hasta de 1 segundo. (desplazamientos a mucha velocidad). Para SEGANTINE (1998), el levantamiento cinemático puro es aquel en el que, inicialmente, uno de los receptores es colocado sobre un punto de coordenadas conocidas y un segundo receptor es colocado sobre un punto cualquiera. A partir de aquí, las antenas receptores duales reciben datos simultáneamente por algunos minutos con el objetivo de resolver las ambigüedades. Posteriormente, una antena que estaba sobre un punto desconocido se mueve por una trayectoria seleccionada, siendo posible determinar con bastante precisión una trayectoria hecha por la antena móvil. La gran limitación de este método es que está obligado a mantener constante la recepción de las señales, en las antenas receptoras duales, emitidas por los satélites. Una variación de este método es el stop-and-go (semi-cinemático), es una derivación del cinemático puro, es decir, que un usuario tiene la opción de

registrar puntos específicos del levantamiento a lo largo del desplazamiento de la antena remota. Una gran ventaja de este método en relación con el cinemático puro es el aumento de la precisión en el posicionamiento debido al registro de un cierto número de épocas en un punto deseado (Segantine, 1998).

El tiempo de medición depende de:

- La técnica de medida,
- Distancia entre estaciones,
- Número y distribución de satélites,
- Tipo de receptor empleado, y la
- Precisión buscada.

5.3.3. LAS SEÑALES

Los satélites GPS emiten dos ondas portadoras (sinusoidales) de frecuencias L1 y L2 vienen montadas diversas modulaciones:

- La que tiene información sobre efemérides también denominada mensaje de navegación (M) que provee los datos necesarios para el cálculo de la posición del satélite en cualquier instante,
- la modulación del código llamado C/A (coarse acquisition) que consiste en una sucesión de multiplicaciones de la senoide portadora por +1 o -1, esta sucesión constituye un código, ya que es propia de cada satélite, y sirve entre otras cosas para identificar al satélite recibido. Ese código es leído e identificado por todo tipo de receptores. Es el observable primario de GPS y permite medir la distancia satélite-receptor (a menos del error de tiempo del receptor). La sucesión de +1, -1 propia de cada satélite se emite a partir de instantes bien determinados, y llegan para ser identificados en el receptor algún tiempo después. El retardo estimado en el receptor es una medida de la distancia que se consigue con una precisión del orden del metro.

- La modulación del código P (precise), similar al anterior solo que más precise pero mucho más largo y plenamente habilitado solo para usuarios calificados. El código P modula a L1 (en este caso se denomina P1) y también a L2 (P2).

Los códigos sirven para medir directamente la distancia satélite-receptor con la única corrección necesaria: el error del reloj local. Como el error de tiempo está presente en la medición en esta se denomina "Pseudo Range" o pseudo distancia, ya que no es estrictamente la distancia por el error de sincronización mencionado.

- Una vez decodificada, la señal resultante, tanto en L1 como en L2, es la senoide portadora original.
- Estas ondas portadoras también son aptas para medir diferencias de fase sobre ellas con los siguientes comentarios: en primer lugar las fases medidas evolucionan con la distancia, de manera que constituyen también una manera de estimar la distancia satélite receptor; en segundo lugar, las mediciones de fase tienen una precisión muy superior a la que se consigue con los códigos. Así es posible establecer una primera gruesa clasificación entre receptores de código que solo miden pseudo-range, y receptores geodésicos capaces de medir diferencias de fase.

La razón para el uso de dos frecuencias es que esto permite la eliminación del retardo producido por la ionosfera. Ambas portadoras están moduladas por varios códigos binarios que proveen las mediciones de pseudodistancia al satélite y su posición. La modulación utilizada es en fase de modo que cada transición en el código produce un cambio en la fase de la señal modulada de 180 grados.

La portadora L1 está modulada por el mensaje de navegación, sucesión de dígitos binarios con 50 transiciones por segundo que, principalmente, indican al receptor la posición extrapolada del satélite y el estado de su reloj para el instante de medición (Van Dierendonck et al., 1978).

Tanto L1 cuanto L2 se encuentran además moduladas por otros dos códigos. Esta segunda codificación tiene múltiples propósitos: identificar, desde el receptor, al satélite en que se originó la señal recibida y separarla de las señales de los demás, medir la pseudo-distancia satélite-receptor, proteger las señales contra posibles interferencias casuales y/o deliberadas e impedir el uso de algunas capacidades del sistema a usuarios no autorizados por el DoD. Los códigos utilizados son del tipo pseudo aleatorio. Se parecen a una señal aleatoria real en que su autocorrelación cae a cero muy rápido al desfasar en tiempo dos copias del mismo código, y la correlación cruzada de dos códigos para cualquier corrimiento en tiempo es prácticamente nula. La asignación de un código diferente a cada satélite permite al receptor identificarlos aunque lleguen señales de varios satélites simultáneamente a la misma antena y sobre la misma frecuencia portadora.

El receptor busca el máximo de la autocorrelación del código recibido desde el satélite respecto de una copia del mismo código generada localmente en sincronización con el tiempo del satélite a menos de un error en el reloj local. Esto le permite medir el desfasaje causado por la propagación y por la falta de sincronización del reloj local con respecto al patrón del satélite. Este desfasaje, multiplicado por la velocidad de la luz es lo que se llama pseudo distancia o distancia afectada de errores de sincronización entre los relojes del satélite y del receptor. Si se dispone de las pseudo distancias a cuatro satélites simultáneamente, se puede calcular la posición de la antena y el error del reloj local respecto del tiempo patrón del sistema. La precisión de la medición de pseudo distancia depende de la duración mínima de un estado del código o chip-rate. El sistema posee un código de Adquisición Rápida o Clara (C/A). Este es una secuencia con una duración de 1 ms, de frecuencia 1.023 MHz, de acceso público y que modula sólo a L1. Además existe otro código, llamado P o Protegido. Es una secuencia de dígitos de 266 días de duración, de frecuencia 10.23 MHz, de acceso restringido y que modula a L1 y a L2. El código C/A tiene una frecuencia tal que durante uno de sus estados, la luz, puede desplazarse 300 metros, mientras que el código P

tiene una frecuencia 10 veces más alta, por lo que deja trasladar la señal sólo 30 metros entre dos transiciones. Como la autocorrelación de los códigos por el receptor permite detectar desfasajes menores que 0.01 del chip-rate, la pseudodistancia con códigos permitiría un posicionamiento de precisión entre métrica y submétrica según el código que se utilice. Esto no resultaba así hasta el 30 de abril de 2000 para los usuarios no autorizados dado que el DoD degradaba el posicionamiento puntual en tiempo real, de importancia militar estratégica, mediante la Disponibilidad Selectiva (SA). La SA consistía en una degradación intencional de la marcha de los relojes de los satélites, o proceso δ , y de las posiciones de los satélites que se transmiten dentro del mensaje de navegación, llamado proceso ϵ . El primer proceso era el más activo y también el más perjudicial ya que afectaba a las mediciones mismas. Sus efectos tenían una variación muy rápida y no predecible, por lo que determinaban en la práctica las especificaciones del Servicio de Posicionamiento Estándar (SPS), referidas al comienzo de §2.2. El proceso ϵ en cambio implicaba errores en las efemérides que eran de pocos metros y tenían una variación lenta. Además, el DoD aplica aún en los satélites el Anti Spoofing (AS) o restricción de acceso al código P. Esto impide que terceros reproduzcan espuriamente la señal GPS con fines de inutilizar el sistema. Un efecto secundario de la aplicación del AS es que, como el código C/A modula solamente a L1, a los usuarios civiles les resulta más difícil aprovechar las dos frecuencias de GPS, ya que se ha podido mitigar el problema pero esto ha requerido de receptores más complejos y costosos. La modulación de las señales por los códigos pseudo aleatorios produce un ensanchamiento de la banda que ocupa la señal en el espectro electromagnético que pasa de una fracción de KHz a 20 MHz, equivalente por ejemplo al ancho de todo el espectro VHF. Esto constituye una efectiva protección para el sistema de posicionamiento contra posibles interferencias, ya sean accidentales o intencionales.

Además de las pseudo distancias con códigos, los receptores pueden realizar una medición equivalente sobre la fase de las portadoras L1 y L2. Dado que las frecuencias de L1 y L2 son del orden de 1000 veces mayores que las de los

códigos, la precisión de esta observación resulta milimétrica. La baja precisión de las mediciones de código elimina a las técnicas de posicionamiento basadas en ellas para las aplicaciones geodésicas que interesan en este trabajo por lo que no nos referiremos nuevamente a ellas.

5.3.4. LA OBSERVACIÓN DE FASE

Cuando el receptor comienza a observar un satélite y mide por primera vez la diferencia de fase entre las ondas portadoras recibida y generada localmente por él mismo, esta diferencia de fase inicial es un número entero N de ciclos más una fracción de ciclo ϕ . Al ser todos los ciclos de la portadora idénticos, el receptor puede medir solamente la fracción ϕ , mientras que la cantidad N no puede ser observada y permanece como una incógnita en el problema del posicionamiento con fase. Llamaremos en adelante N_i^k a la ambigüedad para el satélite k respecto del receptor i . Es un número entero de ciclos cuya longitud es de aproximadamente 19 cm o 24 cm según se trate de L_1 o de L_2 respectivamente. En lo subsiguiente se utilizarán las siguientes convenciones:

$$\text{Observación de fase} = \phi_i^k \text{ (ciclos),}$$

$$\text{Pseudodistancia} = \lambda \cdot (\phi_i^k + N_i^k) = \Phi_i^k + \lambda \cdot N_i^k \text{ (metros),}$$

Donde λ representa la longitud de onda de la portadora de que se trate mientras que ϕ y Φ indican la observación de fase en ciclos y en metros respectivamente.

La fase observada en un receptor i que recibe señal de un satélite k puede escribirse como:

$$\Phi_i^k = \sqrt{(x^k - x^i)^2 + (y^k - y^i)^2} + c \cdot \delta t^k + c \cdot \delta t_i - T_i^k + dm_i^k - \lambda N_i^k + \epsilon_i^k \quad (143)$$

Expresión en la que pueden distinguirse, en orden y expresados en metros, la distancia geométrica entre satélite y receptor, el error de reloj del satélite, el

error de reloj del receptor, los retardos ionosférico y troposférico y el efecto del multicamino. Completan la expresión los términos de la ambigüedad y del error de observación.

Las magnitudes de los términos de la ecuación (143) son muy disímiles. El error de reloj del receptor $c \cdot \delta t_i^k$ implica típicamente cientos de km dada la baja calidad de los relojes internos de los receptores, que pueden acumular desfasajes de hasta 1 metro, equivalente a 300 km de error en el cálculo de la observación. El término $c \cdot \delta t^k$ incluía el proceso δ de la SA, por lo que al haber sido ésta eliminada, disminuyó de varias decenas a sólo pocos metros. La magnitud del efecto ionosférico I_i^k puede alcanzar decenas de metros y depende de la frecuencia. La troposfera es un medio no dispersivo para las frecuencias de las portadoras y su efecto T_i^k alcanza unos pocos metros, mientras que el efecto del multicamino dm_i^k tiene magnitudes de hasta unos pocos centímetros y depende de la frecuencia. Finalmente el último término, ϵ_i^k , que representa al error de observación, tiene valores típicos de 2 a 3 milímetros en los receptores geodésicos.

5.3.5. EL MÉTODO DIFERENCIAL

Para aprovechar la calidad de la observación de fase se deben modelar todos los términos con una veracidad comparable al error de la observación. El primer problema se presenta en los relojes satelitales, de considerable magnitud, variación rápida y difícil predicción. Existen básicamente dos alternativas para resolver esto. Una puede ser la modelación de la marcha de los relojes y demás fenómenos en el nivel de las observaciones crudas, se puede observar en la figura 11. Una alternativa posible, que se emplea comúnmente por medio del software Bernese GPS en sus diferentes versiones, es el método diferencial. El cual consiste en el procesamiento de diferencias de observaciones simultáneas, realizadas por al menos dos estaciones a los mismos satélites. Entre las ventajas que proporciona este método podemos mencionar es que aprovecha el hecho de que los errores de

reloj de un satélite tienen el mismo efecto sobre todos los receptores que lo observen en forma simultánea. Asimismo, aprovecha la correlación espacial de otros varios efectos, como son los errores orbitales de un satélite tienen efectos muy parecidos para dos receptores que los observen simultáneamente separados por una distancia pequeña respecto de la que media entre receptor y satélite, que es del orden de 20.000 Km. En el caso de los errores de propagación atmosférica, tanto el efecto de la ionosfera cuanto el de la troposfera están correlacionados espacialmente. Los efectos ionosféricos diferenciales son despreciables sólo para distancias entre receptores menores a 10 Km. Si se pretende la máxima precisión en vectores más largos se debe eliminar la contribución significativa de la ionosfera por medio de una combinación adecuada de L1 y L2. Los efectos de la troposfera para dos estaciones que se observan simultáneamente pueden considerarse iguales sólo para distancias entre receptores de muy pocos kilómetros. El multicamino y el error de observación, por el contrario, no están correlacionados para mediciones simultáneas por lo que no son atenuados al utilizar el método diferencial sino que sus efectos aumentan en la observación combinada.

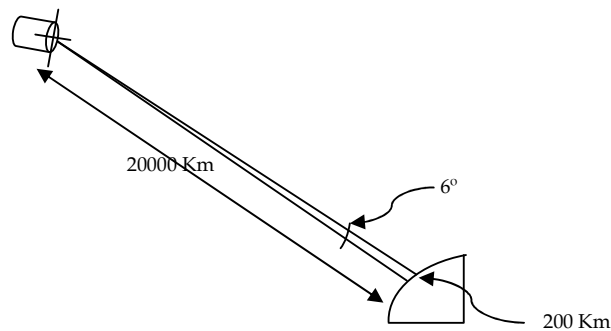


Figura 5.1. Escalas relevantes para el posicionamiento diferencial

Como podemos ver la figura 11, las direcciones a un mismo satélite desde dos estaciones separadas por cientos de kilómetros son muy similares. Ahora bien, si el vector entre las dos estaciones se hace muy corto, las señales serían afectadas por prácticamente los mismos errores. Por consiguiente, al tener las coordenadas y el error del reloj de la estación i , hallados en el posicionamiento puntual con

códigos por ejemplo, y la posición del satélite k proveniente de las efemérides transmitidas o precisas, se puede obtener una primera aproximación de la observación de fase:

$$\Phi_{i,0}^k = \sqrt{(x_0^k - x_{i,0})^2 + (y_0^k - y_{i,0})^2 + (z_0^k - z_{i,0})^2} + c \cdot \delta t_{i,0} - \lambda \cdot N_{i,0}^k \quad (144)$$

Donde $N_{i,0}^k$ es una primera aproximación del valor de la ambigüedad correspondiente al satélite k y la estación i . el valor buscado es $N_i^k = N_{i,0}^k + \delta N_i^k$. En rigor la incógnita que resta encontrar es la pequeña fracción δN_i^k , no obstante, de aquí en adelante se utilizará el símbolo N_i^k para indicar dicha fracción a fin de conservar una notación algo más sencilla. Por otra parte, si el error de reloj local $\delta t_{i,0}$ es conocido con una precisión de un μs , la diferencia entre la fase observada y calculada puede ser aproximada linealmente como se muestra en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_i^k = \Phi_i^k - \Phi_{i,0}^k \cong & (\cos \alpha_i^k \cdot \delta x_i + \cos \beta_i^k \cdot \delta y_i + \cos \gamma_i^k \cdot \delta z_i) + c \cdot \delta t_i + dm_i^k + \varepsilon_i^k - \lambda N_i^k \\ & + (\cos \alpha_{i,0}^k \cdot \delta x^k + \cos \beta_{i,0}^k \cdot \delta y^k + \cos \gamma_{i,0}^k \cdot \delta z^k) + c \cdot \delta t^k - I_i^k + T_i^k \end{aligned} \quad (145)$$

Las incógnitas de la posición del receptor quedan expresadas en función de los cosenos directores de la dirección receptor-satélite. Estas direcciones deben provenir de coordenadas a priori para la estación y efemérides del satélite expresadas en el mismo sistema de referencia.

En la primera línea figuran los términos relacionados con el receptor, en orden: efecto del error en la posición a priori de la estación i , $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$, del error de reloj del receptor, del multicamino, del ruido de observación y finalmente el término de la ambigüedad, que implica la diferencia entre el valor correcto y la primera aproximación, que puede provenir por ejemplo de una solución previa a partir de códigos. En la segunda línea se encuentran los términos relativos al

satélite: efectos del error orbital ($\delta x^k, \delta y^k, \delta z^k$), y del error del reloj del satélite. En último lugar, en la tercera línea figuran los retardos producidos por la ionosfera y troposfera.

Las aproximaciones lineales de dos observaciones de fase simultáneas realizadas desde las estaciones i y j al mismo satélite k pueden expresarse como se expresa a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_i^k &= (\cos\alpha_i^k \cdot \delta x_i + \cos\beta_i^k \cdot \delta y_i + \cos\gamma_i^k \cdot \delta z_i) + c \cdot \delta t_i - \lambda N_i^k \\ &+ (\cos\alpha_i^k \cdot \delta x^k + \cos\beta_i^k \cdot \delta y^k + \cos\gamma_i^k \cdot \delta z^k) + c \cdot \delta t^k - I_i^k + T_i^k + dm_i^k + \epsilon_i^k \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_j^k &= (\cos\alpha_j^k \cdot \delta x_j + \cos\beta_j^k \cdot \delta y_j + \cos\gamma_j^k \cdot \delta z_j) + c \cdot \delta t_j - \lambda N_j^k \\ &+ (\cos\alpha_j^k \cdot \delta x^k + \cos\beta_j^k \cdot \delta y^k + \cos\gamma_j^k \cdot \delta z^k) + c \cdot \delta t^k - I_j^k + T_j^k + dm_j^k + \epsilon_j^k \end{aligned} \quad (147)$$

Restando estas ecuaciones entre sí se obtiene la ecuación (148):

$$\Delta\Phi_{ij}^k = \mu_j^k \cdot \delta x_{ij} + \mu_{ij}^k \cdot \delta x_j + c \cdot \delta t_{ij} + \lambda N_{ij}^k + \mu_{ij}^k \cdot \delta x^k - \Delta I_{ij}^k + \Delta T_{ij}^k + \Delta dm_{ij}^k + \Delta \epsilon_{ij}^k \quad (148)$$

La cual aproxima linealmente a una simple diferencia de fase, y que se encuentra libre del error de reloj del satélite siempre que la simultaneidad de las observaciones en las dos estaciones esté asegurada al nivel del μs . En la expresión (148) aparecen en orden:

- a) El error del vector a priori entre las dos estaciones,
- b) el error de la posición a priori de la estación j ,
- c) la combinación de los errores de reloj de las dos estaciones receptoras,
- d) la combinación de las dos fracciones desconocidas de las ambigüedades para el satélite k desde las estaciones i y j ,
- e) el error orbital del satélite k ,
- f) los efectos atmosféricos diferenciales entre las dos estaciones y

g) las combinaciones de los errores por multicamino y medición de las dos estaciones.

La cantidad a) contiene los parámetros de interés geodésico, que debe ser estimado para poder obtener las coordenadas de la estación i respecto de las coordenadas conocidas del punto j. El efecto de c) puede llegar a miles de metros, por lo que debe ser estimado o eliminado convenientemente del problema. Los factores $\bar{\mu}_{ij}^k$ representan diferencias entre los cosenos directores de las direcciones desde ambas estaciones al satélite y son muy pequeños, por lo tanto, los términos b) y e) pueden ignorarse sin perder exactitud en el cálculo de un vector corto. El efecto ionosférico diferencial puede alcanzar valores de decenas de cm en vectores de cientos de kilómetros (Brunini, 1998). El efecto troposférico diferencial puede alcanzar varios centímetros para distancias de sólo pocos kilómetros. Por último queda una combinación de fracciones de las ambigüedades iniciales N_{ij}^k que es un número entero a estimar.

En el problema del posicionamiento diferencial con simples diferencias, aún queda entre las incógnitas la combinación de los errores de los relojes locales, que es preciso estimar época por época. Para evitar esto se pueden restar pares de simples diferencias simultáneas correspondientes al mismo par de estaciones hacia satélites diferentes. Se obtienen así las *dobles diferencias* de fase, cuya aproximación lineal puede escribirse como se muestra a continuación:

$$\Delta\Phi_{ij}^{kl} = \mu_i^{kl} \cdot \delta x_{ij} + \mu_{ij}^{kl} \cdot \delta x_j + \mu_{ij}^{kl} \cdot \delta x^k - \Delta I_{ij}^{kl} + \Delta T_{ij}^{kl} + \Delta dm_{ij}^{kl} - \lambda \cdot N_{ij}^{kl} + \Delta \epsilon_{ij}^{kl} \quad (149)$$

En la que $\bar{\mu}_{ij}^{kl} = \bar{\mu}_{ij}^k - \bar{\mu}_{ij}^l$ y convenciones de notación análogas valen para los índices de los efectos atmosféricos, el multicamino, las ambigüedades y el error de observación. Los órdenes de magnitud de los nuevos términos son los mismos que los que les corresponden en el análisis realizado para el caso de las simples

diferencias ya que en general los satélites l y k pueden estar en cualquier parte del cielo siempre que sean visibles desde ambas estaciones.

5.4. PROBLEMAS BÁSICOS DEL POSICIONAMIENTO CON GPS

En esta parte se describe el estado del arte del posicionamiento con GPS para la materialización de sistemas de referencia de alta precisión. Se abordan en principio los problemas que actualmente ponen el límite a la exactitud del posicionamiento con GPS.

5.4.1. ERRORES ORBITALES Y DE LAS COORDENADAS DE LA ESTACIÓN DE REFERENCIA

En la siguiente expresión se escribe nuevamente la aproximación lineal de la ecuación de simples diferencias de fase: atacaran

$$\Delta\Phi_{ij}^k = \mu_i^k \cdot \Delta x_{ij} + \mu_{ij}^k \cdot \Delta x_j + c \cdot \delta t_{ij}' + \mu_{ij}^k \cdot \Delta x^k - \Delta I_{ij}^k + \Delta T_{ij}^k + \Delta dm_{ij}^k - \lambda \cdot N_{ij}^k + \varepsilon_{ij}^k \quad (150)$$

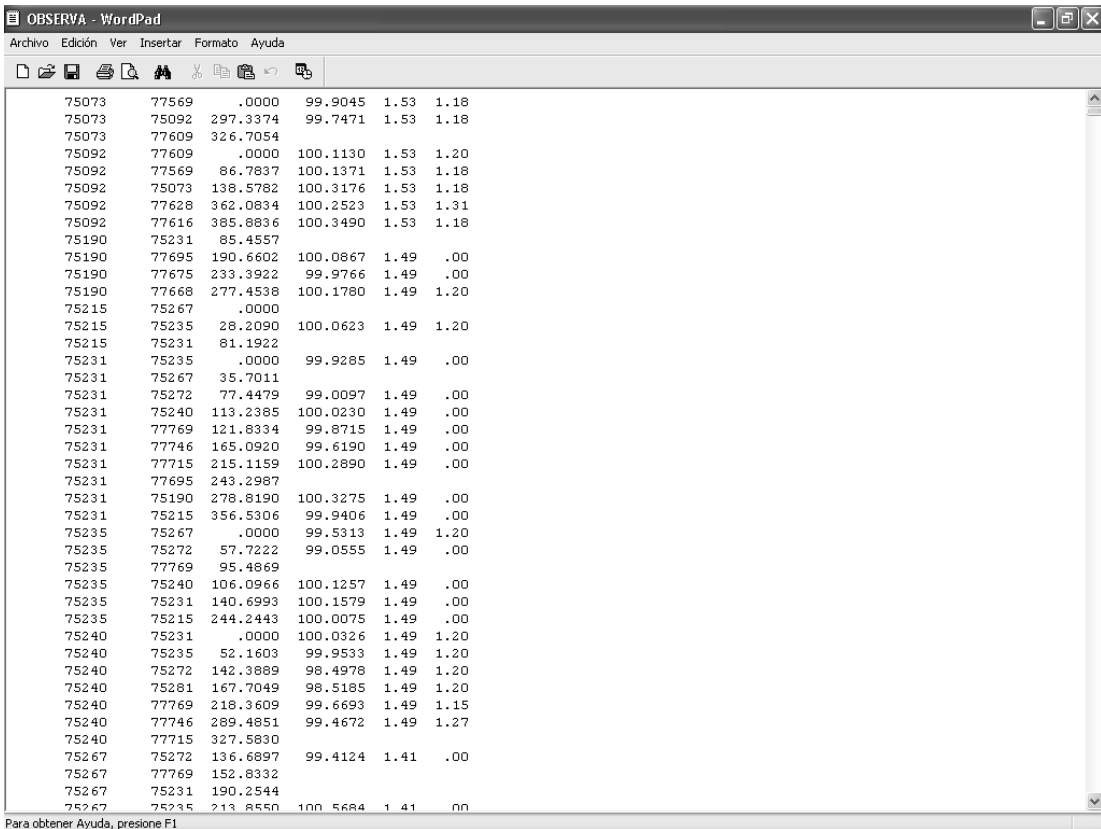
En el método diferencial, los errores de las coordenadas de la estación de referencia y de las efemérides de los satélites actúan de forma atenuada. El término $\mu_{ij}^k \cdot \Delta x_j$ de la expresión (150) es el error que se introduce en el cálculo de la observación debido a la aproximación de las coordenadas de la estación de referencia. Este término puede delimitarse mediante:

$$\begin{aligned} \mu_{ij}^k \cdot \Delta x_j &\leq \|\mu_{ij}^k\| \cdot \|\Delta x\| = \frac{\sqrt{(x_{io} - x_{j0})^2 + (y_{io} - y_{j0})^2 + (z_{io} - z_{j0})^2}}{\sqrt{(x^k - x_{j0})^2 + (y^k - x_{j0})^2 + (z^k - x_{j0})^2}} \cdot \|\Delta x\| \\ &= \frac{\text{dist}(i,j)\text{km}}{\approx 20.000 \text{ km}} \times \text{error}_j \end{aligned} \quad (151)$$

La expresión equivalente para el término del error orbital es análoga, por consiguiente no se anotara, la única diferencia de la ecuación 151 es que se reemplaza el módulo del error de las coordenadas de la estación de referencia j por el del error orbital del satélite k . Estas expresiones resultan adecuadas para estimar el error resultante en las alturas elipsoidales relativas pero son algo pesimistas para las coordenadas horizontales relativas (Beutler, 1996). De todos modos son de utilidad para realizar una estimación de los efectos de los errores orbitales y de las coordenadas de la estación de referencia en el posicionamiento relativo.

6. CÁLCULOS Y RESULTADOS

A continuación vamos a explicar la metodología que se siguió para la realización del trabajo, empezando con los ficheros que se disponían para los cálculos y la ejecución de los programas.



Estación	Punto	Distancia	Acimutal	Cenital	Altura Instrumento	Altura Mira
75073	77569	.0000	99.9045	1.53	1.18	
75073	75092	297.3374	99.7471	1.53	1.18	
75073	77609	326.7054				
75092	77609	.0000	100.1130	1.53	1.20	
75092	77569	86.7837	100.1371	1.53	1.18	
75092	75073	138.5782	100.3176	1.53	1.18	
75092	77628	362.0834	100.2523	1.53	1.31	
75092	77616	385.8836	100.3490	1.53	1.18	
75190	75231	85.4557				
75190	77695	190.6602	100.0867	1.49	.00	
75190	77675	233.3922	99.9766	1.49	.00	
75190	77668	277.4538	100.1780	1.49	1.20	
75215	75267	.0000				
75215	75235	28.2090	100.0623	1.49	1.20	
75215	75231	81.1922				
75231	75235	.0000	99.9285	1.49	.00	
75231	75267	35.7011				
75231	75272	77.4479	99.0097	1.49	.00	
75231	75240	113.2385	100.0230	1.49	.00	
75231	77769	121.8334	99.8715	1.49	.00	
75231	77746	165.0920	99.6190	1.49	.00	
75231	77715	215.1159	100.2890	1.49	.00	
75231	77695	243.2987				
75231	75190	278.8190	100.3275	1.49	.00	
75231	75215	356.5306	99.9406	1.49	.00	
75235	75267	.0000	99.5313	1.49	1.20	
75235	75272	57.7222	99.0555	1.49	.00	
75235	77769	95.4869				
75235	75240	106.0966	100.1257	1.49	.00	
75235	75231	140.6993	100.1579	1.49	.00	
75235	75215	244.2443	100.0075	1.49	.00	
75240	75231	.0000	100.0326	1.49	1.20	
75240	75235	52.1603	99.9533	1.49	1.20	
75240	75272	142.3889	98.4978	1.49	1.20	
75240	75281	167.7049	98.5185	1.49	1.20	
75240	77769	216.3609	99.6693	1.49	1.15	
75240	77746	289.4851	99.4672	1.49	1.27	
75240	77715	327.5830				
75267	75272	136.6897	99.4124	1.41	.00	
75267	77769	152.8332				
75267	75231	190.2544				
75267	75235	213.8550	100.5684	1.41	.00	

Figura 6.1. Fichero de observaciones clásicas sobre la red de orden inferior (ROI)

En la figura 6.1, tenemos el fichero de observaciones clásicas sobre la red de orden inferior (ROI), llamado OBSERVA.DAT, las columnas de izquierda a derecha nos muestran: el número de punto de estación, número de punto de visado, dirección acimutal, dirección cenital, altura de instrumento y altura de mira.

Station	ED-50 Easting	ED-50 Northing	ED-50 Elevation	Station Name	Zero	Zero
75351-	5.595333538	39.013737191	324.264	LA MORRA	00	0
75320-	6.060368714	39.001713821	272.029	GUADALPERAL	00	0
75411-	5.481384799	39.011025200	302.620	BARCA	00	0
77918-	5.475965384	38.581786208	323.882	SILO DE VILLANUEVA	00	0
77898-	5.513919990	38.580402377	309.580	SILO DON BENITO	00	0
77868-	5.571120345	38.584096413	363.430	REMONGO	00	0
77874-	5.565481374	38.545216030	287.915	LA JARILLA	00	0
77857-	6.003197825	38.571817351	392.604	SIERRA DE YELBES	00	0
77826-	6.064473418	38.560998730	249.282	EL GUIJO	00	0
77809-	6.100005096	38.591974886	364.443	GUIJARRO BLANCO	00	0
77844-	6.015304511	38.544747223	269.084	LA ATALAYA	00	0
77892-	5.523656296	38.522463708	659.104	HORTIGA	00	0
75430-	5.444925870	39.003490712	354.270	TAMBORRIO	00	0
77958-	5.403495528	38.582754263	320.350	ENCINA GRANDE	00	0
77946-	5.425593257	38.560566143	334.332	JALIAS	00	0
-77933-	5.441266800	38.534913799	561.859	MAGACELA	00	0
75452-	5.403253118	39.022332674	304.667	LA LOMA	00	0
77900-	5.490407823	38.502259020	411.268	CANADA GIL	00	0
77979-	5.363991917	38.592213998	372.893	PELADO	00	0
77954-	5.394255610	38.542066970	392.372	PAERILLA	00	0
77925-	5.465651911	38.550317297	368.282	GARZONA	00	0
77851-	5.591552423	38.515399866	347.679	PEGOTES DE CAMARA	00	0
77822-	6.055142982	38.522118103	297.820	LA ENCINA	00	0
80458-	5.590765564	38.485729939	578.661	SIERRA MANCHITA	00	0
77797-	6.120382447	38.570599671	337.125	LOS RETAMALES	00	0
75281-	6.142840727	39.011497964	545.574	TERRERO	00	0
77801-	6.103261940	38.514929430	265.684	MAJADA DE LAS CANAS	00	0
-77746-	6.215402250	38.565926490	374.695	CARIJA	00	0
77769-	6.183401139	38.590212065	341.630	LOS BARROS	00	0
77941-	5.423217436	38.512980286	398.576	TORRALBAS	00	0
80517-	5.472894827	38.473080417	666.932	CUEVA DEL CIERVO	00	0
80503-	5.490001455	38.431453954	530.382	DEHESA	00	0
80488-	5.531577461	38.484289456	536.952	LAPA	00	0
75475-	5.350524752	39.051783046	312.734	LEGIO	00	0
75463-	5.373089135	39.031065753	337.344	MESAS ALTAS	00	0
75490-	5.321012615	39.005065149	403.725	SILO DE ORELLANA	00	0
77975-	5.350888682	38.552044860	384.253	HERRADON	00	0
80579-	5.360754516	38.494709418	455.020	HONTANILLAS	00	0
80568-	5.385953798	38.484104674	448.494	CENSO	00	0
80533-	5.442831722	38.435946218	640.584	AGALLA	00	0
75502-	5.303752713	39.022837325	723.658	SIERRA MORENA	00	0
-75512-	5.273431379	39.023747120	687.670	REPTICA	00	0

Figura 6.2. Fichero de coordenadas geodésicas de la red de orden inferior (ROI)

En la figura 6.2, observamos el Fichero de coordenadas geodésicas de la red de primer orden (ROI), llamado PP2, además es importante señalar que los puntos, con signo menos y en color rojo, son de la red de primer orden con coordenadas en ED-50, es decir, son los que quedan fijos. Y las columnas de izquierda a derecha nos muestran: el número de punto de estación, longitud, latitud, cota, nombre de la estación y las columnas de ceros significan que las coordenadas no están estacionadas.

Del fichero de OBSERVA.DAT se derivan los ficheros H5 y H6, se utilizaran en la planimetría y en la altimetría respectivamente.

Station	Sight	Direction	Weight
00	75073	77569	.0000000
00	75073	75092	297.3374000
00	75073	77609	326.7054000
00	75092	77609	.0000000
00	75092	77569	86.7837000
00	75092	75073	138.5782000
00	75092	77628	362.0834000
00	75092	77616	385.8836000
00	75190	75231	85.4557000
00	75190	77695	190.6602000
00	75190	77675	233.3922000
00	75190	77668	277.4538000
00	75215	75267	.0000000
00	75215	75235	28.2090000
00	75215	75231	81.1922000
00	75231	75235	.0000000
00	75231	75267	35.7011000
00	75231	75272	77.4479000
00	75231	75240	113.2385000
00	75231	77769	121.8334000
00	75231	77746	165.0920000
00	75231	77715	215.1159000
00	75231	77695	243.2987000
00	75231	75190	278.8190000
00	75231	75215	356.5306000
00	75235	75267	.0000000
00	75235	75272	57.7222000
00	75235	77769	95.4869000
00	75235	75240	106.0966000
00	75235	75231	140.6993000
00	75235	75215	244.2443000
00	75240	75231	.0000000
00	75240	75235	52.1603000
00	75240	75272	142.3889000
00	75240	75281	167.7049000
00	75240	77769	218.3609000
00	75240	77746	289.4851000
00	75240	77715	327.5830000
00	75267	75272	136.6897000
00	75267	77769	152.8332000
00	75267	75231	190.2544000
00	75267	75235	213.8550000

Figura 6.3. Fichero de planimetría y direcciones acimutales

En la figura 6.3, observamos el Fichero de planimetría y direcciones acimutales, llamado H5. Las columnas de izquierda a derecha nos indican: el número de punto de estación, numero de punto de visado, dirección acimutal, peso.

Estación	Punto de Visado	Dirección Cenital	Altura Instrumental	Altura de Mira	Peso
75073	77569	99.9045	1.530	1.180	1.00000
75073	75092	99.7471	1.530	1.180	1.00000
75092	77609	100.1130	1.530	1.200	1.00000
75092	77569	100.1371	1.530	1.180	1.00000
75092	75073	100.3176	1.530	1.180	1.00000
75092	77628	100.2523	1.530	1.310	1.00000
75092	77616	100.3490	1.530	1.180	1.00000
75190	77695	100.0867	1.490	.000	1.00000
75190	77675	99.9766	1.490	.000	1.00000
75190	77668	100.1780	1.490	1.200	1.00000
75215	75235	100.0623	1.490	1.200	1.00000
75231	75235	99.9285	1.490	.000	1.00000
75231	75272	99.0097	1.490	.000	1.00000
75231	75240	100.0230	1.490	.000	1.00000
75231	77769	99.8715	1.490	.000	1.00000
75231	77746	99.6190	1.490	.000	1.00000
75231	77715	100.2890	1.490	.000	1.00000
75231	75190	100.3275	1.490	.000	1.00000
75231	75215	99.9406	1.490	.000	1.00000
75235	75267	99.5313	1.490	1.200	1.00000
75235	75272	99.0555	1.490	.000	1.00000
75235	75240	100.1257	1.490	.000	1.00000
75235	75231	100.1579	1.490	.000	1.00000
75235	75215	100.0075	1.490	.000	1.00000
75240	75231	100.0326	1.490	1.200	1.00000
75240	75235	99.9533	1.490	1.200	1.00000
75240	75272	98.4978	1.490	1.200	1.00000
75240	75281	98.5185	1.490	1.200	1.00000
75240	77769	99.6693	1.490	1.150	1.00000
75240	77746	99.4672	1.490	1.270	1.00000
75267	75272	99.4124	1.410	.000	1.00000
75267	75235	100.5684	1.410	.000	1.00000
75272	75281	99.4138	1.490	1.200	1.00000
75272	77769	101.4385	1.490	1.150	1.00000
75272	75240	101.5683	1.490	1.200	1.00000
75272	75231	101.1014	1.490	1.200	1.00000
75272	75235	101.0491	1.490	1.200	1.00000
75272	75267	100.6790	1.490	1.120	1.00000
75281	77809	101.5955	1.490	1.200	1.00000
75281	77769	101.8335	1.490	1.150	1.00000
75281	75240	101.5656	1.490	.000	1.00000
75281	75272	100.6334	1.490	1.200	1.00000

Figura 6.4. Fichero de altimetría y direcciones cenitales

En la figura 6.4, observamos el Fichero de altimetría y direcciones cenitales, llamado H6. Las columnas de izquierda a derecha nos indican: el número de punto de estación, número de punto de visado, dirección cenital, altura instrumental, altura de mira y peso.

Ahora vemos, en la figura 6.5, el archivo CIERRE.SAL, que se refiere al cierre de triángulos, con una tolerancia en el cierre de 30" cc. Cabe mencionar que algunos triángulos no superaron la tolerancia.

CIERRE - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

ajuste bloque suroeste de tercer orden

TOLERANCIA : .0030

LA VISUAL	93700	93734	94.9552	NO TIENE RECIPROCA
LA VISUAL	93723	93700	184.7245	NO TIENE RECIPROCA
LA VISUAL	96012	95990	.0000	NO TIENE RECIPROCA

ajuste bloque suroeste de tercer orden

VERTICES			ANGULOS			SUMA	CIERRE
75073	77569	75092	102.6626	45.5433	51.7945	200.0004	.0004
75073	77569	77609	73.2946	83.4356	43.2689	199.9991	-.0009
75073	75092	77609	29.3680	138.5782	32.0554	200.0016	.0016
75092	77609	77569	86.7837	75.3243	37.8923	200.0003	.0003
75092	77609	77628	37.9166	131.4230	30.6603	199.9999	-.0001
75092	77609	77616	14.1164	172.5493	13.3342	199.9999	-.0001
75092	77628	77616	23.8002	97.4098	78.7902	200.0002	.0002
75190	75231	77695	105.2045	35.5203	59.2762	200.0010	.0010
75190	77695	77675	42.7320	91.5135	65.7535	199.9990	-.0010
75190	77675	77668	44.0616	71.2211	84.7180	200.0007	.0007
75215	75267	75235	28.2090	16.0342	155.7557	199.9989	-.0011
75215	75267	75231	81.1922	39.6348	79.1705	199.9975	-.0025
75215	75235	75231	52.9832	103.5450	43.4694	199.9976	-.0024
75231	75235	75267	35.7011	140.6993	23.6006	200.0010	.0010
75231	75235	75272	77.4479	82.9771	39.5757	200.0007	.0007
75231	75235	75240	113.2385	34.6027	52.1603	200.0015	.0015
75231	75235	77769	121.8334	45.2124	32.9543	200.0001	.0001
75231	75267	75272	41.7468	53.5647	104.6883	199.9998	-.0002
75231	75267	77769	86.1323	37.4212	76.4468	200.0003	.0003
75231	75272	75240	35.7906	21.8210	142.3889	200.0005	.0005
75231	75272	77769	44.3855	58.4829	97.1319	200.0003	.0003
75231	75272	77746	87.6441	45.5467	66.8108	200.0016	.0016
75231	75240	77769	8.5949	181.6391	9.7643	199.9983	-.0017
75231	75240	77746	51.8535	110.5149	37.6320	200.0004	.0004
75231	75240	77715	101.8774	72.4170	25.7061	200.0005	.0005
75231	77769	77746	43.2586	73.8371	82.9052	200.0009	.0009
75231	77769	77715	93.2825	60.9296	45.7891	200.0012	.0012
75231	77746	77715	50.0320	64.6661	55.3103	200.0002	.0002

Para obtener Ayuda, presione F1

CIERRE - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

75240	75281	77746	121.7802	30.8925	47.3280	200.0007	.0007
75240	77769	77746	71.1242	83.6014	45.2732	199.9988	-.0012
75240	77769	77715	109.2221	70.6939	20.0830	199.9990	-.0010
75240	77746	77715	38.0979	132.2981	29.6041	200.0001	.0001
75267	75272	77769	16.1435	163.1712	20.6851	199.9998	-.0002
75272	75281	77797	14.7401	178.6780	6.5806	199.9987	-.0013
75272	75281	77769	77.0229	90.1422	32.8359	200.0010	.0010
75272	75281	77746	89.9591	91.8920	18.1492	200.0003	.0003
75272	77797	77769	62.2828	43.1185	94.5994	200.0007	.0007
75272	77797	77746	75.2190	67.2167	57.5674	200.0031	.0031
75272	77769	77746	12.9362	170.9690	16.0944	199.9996	-.0004
75281	77809	77826	12.5323	175.1667	12.3000	199.9990	-.0010
75281	77809	77797	40.8952	92.2133	66.8914	199.9999	-.0001
75281	77809	77746	127.6812	47.7030	24.6164	200.0006	.0006
75281	77809	77769	129.4310	34.7988	35.7685	199.9983	-.0017
75281	77826	77797	28.3629	30.5183	141.1202	200.0014	.0014
75281	77797	77746	86.7860	73.7973	39.4182	200.0015	.0015

ajuste bloque suroeste de tercer orden

VERTICES			ANGULOS			SUMA	CIERRE
75281	77797	77769	88.5358	49.6991	61.7635	199.9984	-.0016
75281	77746	77769	1.7498	2.0548	196.1951	199.9997	-.0003
75320	75351	77868	31.7067	122.4145	45.8771	199.9983	-.0017
75320	75351	77857	55.7506	75.4136	68.8351	199.9993	-.0007
75320	75351	77826	125.4928	33.3689	41.1408	200.0025	.0025
75320	75351	77809	198.1008	.7439	1.1565	200.0012	.0012
75320	77868	77857	24.0439	45.4484	130.5093	200.0016	.0016
75320	77868	77844	51.4445	66.3832	82.1735	200.0012	.0012
75320	77857	77844	27.4006	113.2054	59.3938	199.9998	-.0002
75320	77857	77826	69.7422	53.1468	77.1122	200.0012	.0012
75320	77857	77809	142.3502	21.4454	36.2065	200.0021	.0021
75320	77844	77826	42.3416	43.7738	113.8877	200.0031	.0031
75320	77826	77809	72.6080	51.2798	76.1140	200.0018	.0018
75351	75411	77918	18.7379	107.3163	73.9476	200.0018	.0018
75351	75411	77898	29.0311	57.9722	112.9957	199.9990	-.0010
75351	75411	77868	57.2840	24.9512	117.7655	200.0007	.0007
75351	77918	77898	10.2932	27.0770	162.6288	199.9990	-.0010
75351	77918	77868	38.5461	18.5026	142.9494	199.9981	-.0019
75351	77918	77874	57.0628	51.0336	91.9012	199.9976	-.0024
75351	77898	77868	28.2529	23.1748	148.5729	200.0006	.0006
75351	77898	77874	46.7696	74.2992	78.9324	200.0012	.0012
75351	77898	77857	75.2538	39.1579	85.5891	200.0008	.0008
75351	77868	77826	18.5162	163.0620	12.5146	200.0001	.0001

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.5. Fichero de cierre de triángulos

```

COMPEN - WordPad
Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

ajuste bloque suroeste de tercer orden

PROGRAMA COMPRED : COMPENSACION DE REDES GEODESICAS POR VARIACION DE COORDENADAS
SOBRE LA SUPERFICIE DEL ELIPSOIDE INTERNACIONAL DE HAYFORD

D A T O S   D E   E N T R A D A

ELIPSOIDE INTERNACIONAL DE HAYFORD ( DATUM EUROPEO )

EXCENTRICIDAD = 0.0067220022

SEMIEJE MAYOR = 6378388 metros

PARAMETROS DEL W-TEST DE BAARDA DE DETECCION DE ERRORES GROSEROS

NIVEL DE SIGNIFICACION DEL W-TEST      :      .001
POTENCIA DEL W-TEST                    :      .800
NUMERO CRITICO DETECCION DE ERRORES GROSEROS : 3.290

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A   D E   V E R T I C E S   *   HOJA 1

DESIGNACION DEL VERTICE      NUMERO      X      Y      ALTITUD
N O M B R E      NUMERO      DE ORDEN

LA MORRA      75351      1      240447.471      4324129.275      324.26
GUADALPERAL      75320      2      231455.272      4321954.040      272.03
BARCA      75411      3      257245.495      4322756.206      302.62
SILO DE VILLANUEVA      77918      4      257423.350      4317430.242      323.88
SILO DON BENITO      77898      5      252125.427      4317167.871      309.58
REMONGO      77868      6      244170.458      4318562.147      363.43
LA JARILLA      77874      7      244336.518      4311494.291      287.92
SIERRA DE YELBES      77857      8      239253.691      4316167.588      392.60
EL GUIJO      77826      9      230207.058      4314366.737      249.28
GUIJARRO BLANCO      77809      10      225706.692      4320380.350      364.44
LA ATALAYA      77844      11      237147.238      4311585.467      269.08
HORTIGA      77892      12      250414.219      4306746.748      659.10
TAMBORRIO      75430      13      262133.712      4321516.191      354.27
ENCINA GRANDE      77958      14      268135.891      4317406.747      320.35
JALIAS      77946      15      264612.305      4313132.596      334.33
MAGACELA      77933      16      262637.949      4308978.446      561.86
LA TOMA      75452      17      268408.001      4324675.010      304.67

Para obtener Ayuda, presione F1

```

Figura 6.6. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, datos de entrada

En la figura 6.6, observamos los resultados del ajuste de la ROI en el sistema ED50, se utiliza el programa de *compred* (Compensación de redes geodésicas por variación de coordenadas sobre la superficie del Elipsoide Internacional de Hayford), inicialmente se muestran los datos de entrada:

- Elipsoide Internacional de Hayford (Datum Europeo, ED-50),
 - excentricidad = 0.0067220022,
 - semieje mayor = 6378388 metros.

En la detección de errores groseros en las observaciones, tenemos que los parámetros del w-test de baarda de detección de errores groseros, conllevan un nivel de significación $\alpha = 0.001$, una potencia del $\beta = 0.80$ y numero critico $w_0 = 3.290$.

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A D E O B S E R V A C I O N E S * HOJA 1

NUMERO DE ORDEN	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	OBSERVACION (VALOR MEDIDO)	RAIZ PESO A PRIORI	ERROR A PRIORI	CLASE DE OBSERVACION
1	75073	77569	.0000000	.169850	5.8876	DIRECCION
2	75073	75092	297.3374000	.167126	5.9835	DIRECCION
3	75073	77609	326.7054000	.179296	5.5774	DIRECCION
4	75092	77609	.0000000	.164851	6.0661	DIRECCION
5	75092	77569	86.7837000	.177127	5.6457	DIRECCION
6	75092	75073	138.5782000	.167126	5.9835	DIRECCION
7	75092	77628	362.0834000	.179830	5.5608	DIRECCION
8	75092	77616	385.8836000	.180820	5.5304	DIRECCION
9	75190	75231	85.4557000	.181755	5.5019	DIRECCION
10	75190	77695	190.6602000	.173594	5.7606	DIRECCION
11	75190	77675	233.3922000	.176712	5.6589	DIRECCION
12	75190	77668	277.4538000	.175083	5.7116	DIRECCION
13	75215	75267	.0000000	.184957	5.4067	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75215	75235	28.2090000	.165427	6.0450	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75215	75231	81.1922000	.176666	5.6604	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75231	75235	.0000000	.169732	5.8916	DIRECCION
14	75231	75267	35.7011000	.185097	5.4026	DIRECCION
15	75231	75272	77.4479000	.180555	5.5385	DIRECCION
16	75231	75240	113.2385000	.159750	6.2598	DIRECCION
17	75231	77769	121.8334000	.176156	5.6768	DIRECCION
18	75231	77746	165.0920000	.175077	5.7118	DIRECCION
19	75231	77715	215.1159000	.180330	5.5454	DIRECCION
20	75231	77695	243.2987000	.185046	5.4041	DIRECCION
21	75231	75190	278.8190000	.181755	5.5019	DIRECCION
22	75231	75215	356.5306000	.176666	5.6604	DIRECCION
* 22	ERROR	75215 SIN DATOS				
22	75235	75267	.0000000	.178337	5.6074	DIRECCION
23	75235	75272	57.7222000	.180061	5.5537	DIRECCION
24	75235	77769	95.4869000	.182863	5.4686	DIRECCION
25	75235	75240	106.0966000	.176494	5.6659	DIRECCION
26	75235	75231	140.6993000	.169732	5.8916	DIRECCION
27	75235	75215	244.2443000	.165427	6.0450	DIRECCION
* 27	ERROR	75215 SIN DATOS				
27	75240	75231	.0000000	.159750	6.2598	DIRECCION
28	75240	75235	52.1622000	.176156	5.6768	DIRECCION

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.7. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de observaciones

Esta figura 6.7, pertenece al mismo archivo, y se especifica que el error a priori de observaciones angulares esta en segundos centesimales, de distancia en metros. Siguiendo con el mismo archivo, tenemos los parámetros de la red (red de triangulación):

NUMERO DE PUNTOS FIJOS	42
NUMERO DE PUNTOS APROXIMADOS	838
NUMERO TOTAL DE PUNTOS	880
NUMERO DE DIRECCIONES OBSERVADAS	7880
NUMERO DE DISTANCIAS OBSERVADAS	0
NUMERO DE ACIMUTES GEODÉSICOS	0
NUMERO DE ACIMUTES ASTRONÓMICOS	0
NUMERO TOTAL DE OBSERVACIONES	7574

NUMERO DE INCÓGNITAS EN COORDENADAS 1676
 NUMERO DE INCÓGNITAS DE ORIENTACIÓN 880
 NUMERO TOTAL DE INCÓGNITAS 2556
 NUMERO PARÁMETROS SISTEMÁTICOS 0

 GRADOS DE LIBERTAD DEL AJUSTE 5018
 ELEMENTOS DE LA MATRIZ NORMAL 266798

Como resultado del ajuste se alistan en primer lugar las coordenadas UTM en el Huso 30 compensadas y sus correcciones con respecto a las coordenadas aproximadas (fig. 6.8.-Archivo COMPEN.SAL en la carpeta ED50).

ajuste bloque suroeste de tercer orden

RESULTADOS DE LA COMPENSACION * HOJA 1

VERTICE		CORRECCIONES			COORDENADAS COMPENSADAS	
NUMERO	NOMBRE	X	Y	DESPLZ	X	Y
75351	LÀ MORRA	.005	-.003	.006	240447.476	4324129.272
75320	GUADALPERAL	.011	.003	.012	231455.284	4321954.043
75411	BARÇA	.005	.006	.008	257245.500	4322756.212
77918	SILO DE VILLANUEVA	-.011	.003	.011	257423.340	4317430.245
77898	SILO DON BENITO	-.003	.002	.003	252125.424	4317167.874
77868	REMONGO	.006	-.008	.010	244170.463	4318562.139
77874	LÀ JARILLA	-.004	.003	.005	244336.515	4311494.294
77857	SIERRA DE YELBES	.011	.001	.011	239253.702	4316167.588
77826	EL GUIJO	.003	.000	.003	230207.060	4314366.737
77809	GUIJARRO BLANCO	.001	.005	.005	225706.694	4320380.355
77844	LÀ ATALAYA	.000	-.002	.002	237147.238	4311585.465
77892	HORTIGA	.006	-.004	.007	250414.225	4306746.744
75430	TAMBORRIO	-.012	.010	.016	262133.700	4321516.201
77958	ENCINA GRANDE	.005	.014	.015	268135.897	4317406.761
77946	JALIAS	.006	.004	.007	264612.311	4313132.600
77933	HAGACELA				262637.949	4308978.446
75452	LÀ LOHA	-.002	.023	.023	268408.089	4324675.034
77900	CANADA GIL	.016	-.003	.016	255419.646	4302823.755
77979	PELADO	.003	.021	.021	273841.143	4318925.857
77954	PAERILLA	.005	.006	.008	269174.651	4309757.976
77925	GARZONA	.002	.002	.003	258759.610	4311380.691
77851	PEGOTES DE CAMARA	-.001	-.007	.007	240766.770	4306111.170
77822	LÀ ENCINA	.002	.001	.002	231251.029	4307267.676
80458	SIERRA MANCHITA	.001	-.013	.013	240778.250	4300656.559
77797	LOS RETAMALES	.001	.003	.004	222582.897	4316360.206
75281	TERRERO	-.009	.005	.010	219375.070	4324161.130
77801	MAJADA DE LAS CANAS	.002	.003	.004	224438.671	4306517.544
77746	CARIJA				208363.811	4316665.110
77789	LOS BARROS	-.005	.002	.005	213317.839	4320277.040
77941	TORRALBAS	.001	.002	.002	264931.757	4304610.030
80517	CUEVA DEL CIERVO	.020	-.013	.024	257551.806	4297456.582
80503	DEHESA	.028	-.026	.038	255110.932	4289622.608
80488	LAPA	.014	-.010	.018	249252.773	4299939.457
75475	LEGIO	.007	.045	.046	276431.070	4329827.792
75462	MESAS ALTAS	.001	.022	.022	272817.004	4326007.036

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.8. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, resultados de la compensación

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A D E R E S I D U O S * HOJA 1

NUMERO DE OBSERVACION	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	RESIDUO	RAIZ PESO A PRIORI	RESIDUO PONDERADO	CLASE DE OBSERVACION
1	75073	77569	-1.3869	.17	-.2356	DIRECCION
2	75073	75092	2.9942	.17	.5004	DIRECCION
3	75073	77609	-1.3569	.18	-.2433	DIRECCION
4	75092	77609	2.2330	.16	.3681	DIRECCION
5	75092	77569	-2.7964	.18	-.4953	DIRECCION
6	75092	75073	-4.3713	.17	-.7306	DIRECCION
7	75092	77628	3.8343	.18	.6895	DIRECCION
8	75092	77616	.7691	.18	.1391	DIRECCION
9	75190	75231	.4313	.18	.0784	DIRECCION
10	75190	77695	-3.0117	.17	-.5228	DIRECCION
11	75190	77675	1.0067	.18	.1779	DIRECCION
12	75190	77668	1.4704	.18	.2574	DIRECCION
13	75231	75235	1.3389	.17	.2272	DIRECCION
14	75231	75267	-.1574	.19	-.0291	DIRECCION
15	75231	75272	1.5322	.18	.2767	DIRECCION
16	75231	75240	-2.4919	.16	-.3981	DIRECCION
17	75231	77769	-.3404	.18	-.0600	DIRECCION
18	75231	77746	-6.6030	.18	-1.1560	DIRECCION
19	75231	77715	-13.9591	.18	-2.5172	DIRECCION
20	75231	77695	11.8117	.19	2.1657	DIRECCION
21	75231	75190	7.3528	.18	1.3364	DIRECCION
22	75235	75267	1.3193	.18	.2353	DIRECCION
23	75235	75272	.8526	.18	.1535	DIRECCION
24	75235	77769	-1.3652	.18	-.2496	DIRECCION
25	75235	75240	1.9940	.18	.3519	DIRECCION
26	75235	75231	-2.9876	.17	-.5071	DIRECCION
27	75240	75231	4.2067	.16	.6720	DIRECCION
28	75240	75235	-1.7021	.18	-.3004	DIRECCION
29	75240	75272	3.3385	.17	.5762	DIRECCION
30	75240	75281	.5836	.18	.1030	DIRECCION
31	75240	77769	-5.5530	.16	-.8636	DIRECCION
32	75240	77746	-2.5901	.17	-.4342	DIRECCION
33	75240	77715	1.0611	.18	.1931	DIRECCION
34	75267	75272	-1.5559	.18	-.2750	DIRECCION
35	75267	77769	2.3824	.19	.4425	DIRECCION
36	75267	75231	1.2880	.19	.2384	DIRECCION
37	75267	75235	2.4424	.18	.4358	DIRECCION

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.9. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de residuos

Los parámetros de error son:

ERROR MEDIO CUADRÁTICO A PRIORI	1.00
ERROR MEDIO CUADRÁTICO ESTIMADO	0.93
VARIANZA ESTIMADA DEL AJUSTE	0.87
MEDIA DE RESIDUOS PONDERADOS	0.0000

Y los errores medios estimados en el ajuste:

ERROR MEDIO DE UNA DIRECCIÓN (SEG.)	3.3
ERROR DE UNA DIRECCIÓN /KM (METROS)	0.005
ERROR DE UNA DISTANCIA /KM (METROS)	0.000
ERROR DE UNA DIRECCIÓN PARTES MILLÓN	5.1
ERROR DE UNA DISTANCIA PARTES MILLÓN	0.0

Se observa en la fig. 6.10, las elipses de error estándar absolutas de los puntos de la Red y sus medios cuadráticos en X y Y.

TABLA DE ELIPSES DE ERROR ABSOLUTAS						* HOJA 1
NUMERO VERTICE	E.M.C. X	E.M.C. Y	PARAMETROS DE LA ELIPSE DE ERROR		ORIENTACION	
			SEMIEJE MENOR	SEMIEJE MAYOR		
75351	.0620	.0533	.0533	.0619	277.69	
75320	.0653	.0511	.0511	.0652	84.21	
75411	.0468	.0472	.0423	.0512	316.94	
77918	.0346	.0333	.0319	.0358	306.74	
77898	.0475	.0345	.0346	.0474	273.43	
77868	.0508	.0406	.0407	.0506	88.84	
77874	.0430	.0375	.0376	.0428	84.89	
77857	.0475	.0394	.0395	.0473	85.16	
77826	.0465	.0397	.0394	.0467	284.03	
77809	.0587	.0413	.0415	.0585	89.84	
77844	.0445	.0364	.0365	.0443	271.33	
77892	.0353	.0318	.0319	.0352	272.98	
75430	.0410	.0400	.0386	.0424	50.90	
77958	.0350	.0339	.0290	.0391	47.53	
77946	.0270	.0303	.0239	.0327	33.52	
77933	.0000	.0000	.0000	.0000	.00	PUNTO FIJO
75452	.0497	.0496	.0403	.0574	44.74	
77900	.0364	.0357	.0347	.0373	51.22	
77979	.0427	.0329	.0285	.0457	62.15	
77954	.0320	.0286	.0286	.0319	81.61	
77925	.0336	.0277	.0258	.0351	295.97	
77851	.0376	.0360	.0356	.0380	62.58	
77822	.0384	.0339	.0335	.0387	71.79	
80458	.0386	.0345	.0345	.0385	82.75	
77797	.0472	.0388	.0389	.0470	273.20	
75281	.0640	.0459	.0460	.0638	86.13	
77801	.0387	.0354	.0351	.0370	61.31	
77746	.0000	.0000	.0000	.0000	.00	PUNTO FIJO
77769	.0408	.0342	.0313	.0429	61.63	
77941	.0291	.0334	.0267	.0353	330.42	
80517	.0326	.0375	.0326	.0375	358.75	
80503	.0393	.0413	.0382	.0423	329.80	
80488	.0399	.0396	.0352	.0438	45.54	
75475	.0721	.0660	.0583	.0784	53.32	
75463	.0596	.0506	.0441	.0644	57.96	
75490	.0574	.0349	.0279	.0609	67.16	
77925	.0424	.0348	.0345	.0425	72.52	

Figura 6.10. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de elipse de error estándar absolutas

Al final de la tabla de elipse de error absolutas, tenemos que el:

ERROR ABSOLUTO MEDIO EN X (METROS): .051

ERROR ABSOLUTO MEDIO EN Y (METROS): .050

En la siguiente tabla se dan los errores a priori y a posteriori de las observaciones en unidades de segundos centesimales y, metros y ppm para las direcciones, los errores medios cuadráticos y de los residuos y los residuos

tipificados sobre los que se realiza el w-test de Baarda, rechazándose las observaciones cuyo residuo tipificado exceda en valor absoluto la cantidad de 3.29, con un nivel de confianza de $\alpha = 0,001$, es decir, se rechazan las observaciones con una confianza del 99%. Se dan también los parámetros de redundancia QB y el número crítico que indica el mínimo error que tienen que tener una observación para ser detectada como errónea por el w-test.

TABLA DE ERRORES DE LAS OBSERVACIONES Y PARAMETROS DE REDUNDANCIA *											HOJA 1	
N.OBS	NPE	NPV	E.M.C. OBSERVACION			E.M.C. POSTERIORI OBSERVACION			E.M.C. RESIDUO RESIDUO TIPIF.	FIABILIDAD		
			SEG	MET	PPM	SEG	MET	PPM		QB	SB	
1	75073	77569	5.888	.066		4.531	.051		3.326	-.417	.681	35.851
2	75073	75092	5.984	.061		4.276	.043		3.846	.779	.587	32.024
3	75073	77609	5.577	.097		3.583	.062		4.044	-.336	.474	26.462
4	75092	77609	6.066	.057		3.677	.034		4.611	.484	.422	27.453
5	75092	77569	5.646	.087		3.934	.061		3.754	-.745	.558	29.210
6	75092	75073	5.984	.061		4.525	.046		3.503	-1.248	.657	35.156
7	75092	77628	5.561	.099		3.565	.064		4.039	.949	.472	26.334
8	75092	77616	5.530	.104		3.009	.057		4.492	.171	.340	23.422
9	75190	75231	5.502	.110		4.122	.082		3.278	.132	.645	31.769
10	75190	77695	5.761	.076		3.879	.051		3.986	-.756	.521	28.638
11	75190	77675	5.659	.086		3.564	.054		4.175	.241	.456	26.389
12	75190	77668	5.712	.080		4.159	.058		3.570	.412	.609	31.437
13	75231	75235	5.892	.066		3.921	.044		4.128	.324	.509	28.926
14	75231	75267	5.403	.134		3.103	.077		4.257	-.037	.379	23.585
15	75231	75272	5.538	.103		2.971	.055		4.531	.338	.331	23.288
16	75231	75240	6.260	.050		3.523	.028		4.992	-.499	.364	27.004
17	75231	77769	5.677	.084		2.563	.038		4.968	-.069	.234	22.315
18	75231	77746	5.712	.080		3.028	.043		4.699	-1.405	.323	23.882
19	75231	77715	5.545	.102		2.998	.055		4.519	-3.089	.336	23.407
20	75231	77695	5.404	.134		2.931	.072		4.397	2.686	.338	22.849
21	75231	75190	5.502	.110		3.617	.072		3.904	1.884	.497	26.676
22	75235	75267	5.607	.092		4.150	.068		3.413	.387	.630	31.692
23	75235	75272	5.554	.100		3.558	.064		4.036	.211	.472	26.286
24	75235	77769	5.469	.117		2.700	.058		4.640	-.294	.280	22.173
25	75235	75240	5.666	.085		2.974	.045		4.684	.426	.317	23.579
26	75235	75231	5.892	.066		3.972	.045		4.071	-.734	.522	29.329
27	75240	75231	6.260	.050		3.996	.032		4.565	.922	.468	29.531
28	75240	75235	5.666	.085		3.711	.056		4.035	-.422	.493	27.372
29	75240	75272	5.794	.073		3.591	.045		4.331	.771	.441	26.671
30	75240	75281	5.665	.085		3.235	.049		4.479	.130	.375	24.648
31	75240	77769	6.430	.045		3.955	.028		4.834	-1.149	.435	29.423
32	75240	77746	5.965	.062		3.624	.038		4.527	-.572	.424	27.041
33	75240	77715	5.495	.111		3.001	.061		4.455	-.238	.343	23.319
34	75267	75272	5.658	.086		3.768	.057		3.962	-.393	.510	27.801
35	75267	77769	5.384	.140		2.941	.076		4.365	.546	.343	22.850
36	75267	75231	5.403	.134		3.061	.076		4.292	.300	.369	23.394
37	75267	75235	5.607	.092		3.001	.064		3.735	.654	.556	28.050

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.11. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de errores de las observaciones y parámetros de redundancia

Al final de esta tabla, observamos que la fiabilidad media de la red es 0,337. Lo cual indica que es una fiabilidad aceptable.

COMPEN - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

TABLA DE ELIPSES DE ERROR RELATIVAS * HOJA 1

NUMERO	E. M. C.		PARAMETROS DE LA ELIPSE DE ERROR		ORIENTACION	NPE	NPV
	X	Y	SEMIEJE MENOR	SEMIEJE MAYOR			
1	.0651	.0817	.0620	.0840	20.41	75073	77569
2	.0809	.0601	.0546	.0847	292.84	75073	75092
3	.0828	.0866	.0720	.0957	319.58	75073	77609
4	.0505	.0656	.0416	.0716	330.53	75092	77609
5	.0797	.0732	.0721	.0807	69.43	75092	77569
6	.0809	.0601	.0546	.0847	292.84	75092	75073
7	.0793	.0785	.0646	.0910	314.09	75092	77628
8	.0711	.0790	.0613	.0868	324.13	75092	77616
9	.0846	.0710	.0605	.0924	57.85	75190	75231
10	.0547	.0692	.0512	.0718	22.52	75190	77695
11	.0708	.0670	.0523	.0823	48.72	75190	77675
12	.0886	.0601	.0512	.0940	66.45	75190	77668
13	.0472	.0870	.0471	.0871	2.42	75231	75235
14	.0965	.1294	.0816	.1393	27.13	75231	75267
15	.0721	.0546	.0544	.0723	84.57	75231	75272
16	.0487	.0333	.0305	.0505	289.25	75231	75240
17	.0563	.0418	.0387	.0585	291.08	75231	77769
18	.0508	.0494	.0487	.0515	299.83	75231	77746
19	.0596	.0529	.0519	.0604	70.69	75231	77715
20	.0674	.0565	.0558	.0680	77.10	75231	77695
21	.0846	.0710	.0605	.0924	57.85	75231	75190
22	.0944	.0939	.0751	.1099	45.43	75235	75267
23	.0798	.0894	.0674	.0990	323.92	75235	75272
24	.0706	.0979	.0633	.1027	337.34	75235	77769
25	.0616	.0914	.0563	.0948	340.78	75235	75240
26	.0472	.0870	.0471	.0871	2.42	75235	75231
27	.0487	.0333	.0305	.0505	289.25	75240	75231
28	.0616	.0914	.0563	.0948	340.78	75240	75235
29	.0529	.0461	.0450	.0539	69.55	75240	75272
30	.0629	.0436	.0425	.0637	281.86	75240	75281
31	.0376	.0316	.0270	.0409	302.00	75240	77769
32	.0384	.0429	.0367	.0443	26.77	75240	77746
33	.0553	.0507	.0482	.0575	60.01	75240	77715
34	.0664	.1227	.0663	.1228	1.62	75267	75272
35	.0833	.1369	.0814	.1380	9.12	75267	77769
36	.0965	.1294	.0816	.1393	27.13	75267	75231
37	.0944	.0939	.0751	.1099	45.43	75267	75235
38	.0442	.0463	.0228	.0560	216.10	75272	75281

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.12. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de elipses de error relativas

Y con esta tabla finaliza el archivo de la compensación planimétrica de la ROI en el sistema ED50.

Una vez realizada la compensación planimétrica, procedemos a realizar la compensación altimétrica. Los datos de los que partimos son: archivo H6 (carpeta ED50), es decir de los archivos cenitales obtenemos los desniveles, que quedan en el archivo DESNIVEL.SAL, esta en la carpeta ED50 del CD q les entrego, (figura 6.13). El fichero ALTIM.SAL, esta en la carpeta ED50, es el utilizado para el ajuste altimétrico. Los puntos de la red de primer orden (ED50) son los fijos.

DESIVEL - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

CALCULO DE DESNIVELES NIVELACION TRIGONOMETRICA

ajuste bloque suroeste de tercer orden

NPE	NPV	DESNIVEL DIRECTO	DESNIVEL RECIPROCO	DESNIVEL MEDIO	DIFERENCIA METROS	DISTANCIA
75073	77569	14.591	-14.787	14.689	-.196	7165.292
75073	75092	28.886	-29.071	28.979	-.185	6466.867
75092	77609	-7.840	7.804	-7.822	-.036	5965.732
75092	77569	-14.267	13.974	-14.121	-.292	9850.674
75092	77628	-35.985	37.252	-36.619	1.267	11341.945
75190	77695	-5.144	5.379	-5.262	.235	8364.294
75190	77675	11.376	-11.796	11.586	-.420	9653.473
75190	77668	-19.273	19.222	-19.248	-.051	8940.150
75215	75235	-3.148	3.294	-3.221	.146	6088.467
75231	75235	12.967	-12.747	12.857	.220	7135.086
75231	75272	194.834	-194.687	194.760	.147	11816.149
75231	75240	1.400	-.562	.981	.838	5050.004
75231	77769	26.477	-25.974	26.226	.503	9400.819
75231	77746	60.425	-58.464	59.444	1.961	8938.475
75231	77715	-42.216	43.180	-42.698	.964	11665.164
75235	75267	84.881	-84.664	84.773	.217	10474.780
75235	75272	180.987	-180.130	180.559	.857	11490.844
75235	75240	-11.169	13.508	-12.338	2.339	9554.557
75240	75272	193.706	-192.718	193.212	.988	8009.306
75240	75281	229.158	-227.573	228.365	1.586	9564.267
75240	77769	24.800	-24.638	24.719	.162	4449.005
75240	77746	58.347	-57.408	57.878	.939	6591.447
75267	75272	96.974	-96.368	96.671	.606	9663.742
75272	75281	36.183	-36.459	36.321	-.276	3791.120
75272	77769	-167.394	167.861	-167.628	.467	7594.583
75281	77809	-180.797	181.356	-181.076	.558	7370.460
75281	77769	-203.340	204.345	-203.842	1.005	7191.301
75320	75351	52.563	-51.930	52.247	.633	9247.279
75320	77826	-22.846	22.996	-22.921	.150	7685.508
75351	77868	39.200	-39.098	39.149	.103	6694.473
75351	77857	68.360	-68.392	68.376	-.031	8047.200
75411	77918	21.415	-21.234	21.324	.180	5327.201
75411	77898	6.860	-7.009	6.935	-.150	7576.623
75430	75452	-49.653	49.649	-49.651	-.004	7022.691
75430	77958	-33.561	34.160	-33.860	.599	7272.127
75430	77946	10.067	-10.042	10.062	.150	8720.783

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.13. Fichero del cálculo de desniveles

ALTM - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

75073	77569	14.6892	.000	.000	1.00000	1
75073	75092	28.9785	.000	.000	1.00000	1
75092	77609	-7.8220	.000	.000	1.00000	1
75092	77569	-14.1206	.000	.000	1.00000	1
75092	77628	-36.6186	.000	.000	1.00000	1
75190	77695	-5.2619	.000	.000	1.00000	1
75190	77675	11.5860	.000	.000	1.00000	1
75190	77668	-19.2477	.000	.000	1.00000	1
75215	75235	-3.2207	.000	.000	1.00000	1
75231	75235	12.8566	.000	.000	1.00000	1
75231	75272	194.7603	.000	.000	1.00000	1
75231	75240	.9808	.000	.000	1.00000	1
75231	77769	26.2259	.000	.000	1.00000	1
75231	77746	59.4441	.000	.000	1.00000	1
75231	77715	-42.6981	.000	.000	1.00000	1
75235	75267	84.7727	.000	.000	1.00000	1
75235	75272	180.5585	.000	.000	1.00000	1
75235	75240	-12.3384	.000	.000	1.00000	1
75240	75272	193.2121	.000	.000	1.00000	1
75240	75281	228.3654	.000	.000	1.00000	1
75240	77769	24.7186	.000	.000	1.00000	1
75240	77746	57.8778	.000	.000	1.00000	1
75267	75272	96.6706	.000	.000	1.00000	1
75272	75281	36.3212	.000	.000	1.00000	1
75272	77769	-167.6276	.000	.000	1.00000	1
75281	77809	-181.0763	.000	.000	1.00000	1
75281	77769	-203.8423	.000	.000	1.00000	1
75320	75351	52.2467	.000	.000	1.00000	1
75320	77826	-22.9213	.000	.000	1.00000	1
75351	77868	39.1492	.000	.000	1.00000	1
75351	77857	68.3761	.000	.000	1.00000	1
75411	77918	21.3244	.000	.000	1.00000	1
75411	77898	6.9346	.000	.000	1.00000	1
75430	75452	-49.6509	.000	.000	1.00000	1
75430	77958	-33.8603	.000	.000	1.00000	1
75430	77946	-20.0420	.000	.000	1.00000	1
75430	77918	-30.3626	.000	.000	1.00000	1
75452	75463	32.6922	.000	.000	1.00000	1
75452	77979	68.1075	.000	.000	1.00000	1
75463	75490	66.2699	.000	.000	1.00000	1
75463	77979	35.4312	.000	.000	1.00000	1
75463	75475	-24.5544	.000	.000	1.00000	1
75475	75502	410.8546	.000	.000	1.00000	1
75475	75490	01.3803	.000	.000	1.00000	1

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.14. Fichero de desniveles para el ajuste altimétrico

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

PROGRAMA ALTIM2 DE COMPENSACION DE REDES DE NIVELACION TRIGONOMETRICA POR VARIACION DE COORDENADAS

ERROR KILOMETRICO : .050

ELIPSOIDE INTERNACIONAL DE HAYFORD (DATUM EUROPEO)

EXCENTRICIDAD = 0.0067220022
SEMIEJE MAYOR = 6378388 metros

PARAMETROS DEL W-TEST DE BAARDA

NIVEL DE SIGNIFICACION DEL W-TEST : .001
POTENCIA DEL W-TEST : .800
NUMERO CRITICO DETECCION DE ERRORES GROSEROS : 3.290

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A D E V E R T I C E S *** H O J A 1

DESIGNACION DEL VERTICE N O M B R E	NUMERO DE ORDEN	X	Y	ALTITUD		
LA MORRA	1	75351	240447.476	4324129.272	324.264	
GUADALPERAL	2	75320	751044.346	4321376.795	272.029	
BARCA	3	75411	257245.500	4322756.212	302.620	
SILO DE VILLANUEVA	4	77918	257423.340	4317430.245	323.882	
SILO DON BENITO	5	77898	252125.424	4317167.873	309.580	
REHONGO	6	77868	244170.464	4318562.139	363.430	
LA JARILLA	7	77874	244336.515	4311494.294	287.915	
SIERRA DE YELBES	8	77857	759206.447	4316116.850	392.604	
EL GUIJO	9	77826	750298.541	4313724.667	249.282	
GUIJARRO BLANCO	10	77809	745412.768	4319428.057	364.443	
LA ATALAYA	11	77844	757406.082	4311406.161	269.084	
HORTIGA	12	77892	250414.225	4306746.744	659.104	
TAMBORRIO	13	75430	262133.700	4321516.201	354.270	
ENCINA GRANDE	14	77958	268135.897	4317406.760	320.350	
JALIAS	15	77946	264612.311	4313132.600	334.332	
MAGACELA	16	77933	262637.949	4308978.445	561.859	PUNTO FIJO
LA LOMA	17	75452	268408.089	4324675.033	304.667	
CANADA GIL	18	77900	255419.646	4302823.754	411.268	
PELADO	19	77979	273841.143	4318925.856	372.893	
PAERILLA	20	77954	269174.651	4309757.976	392.372	
PARZOMA	21	77925	258250.610	4311380.601	368.382	

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.15. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de vértices

Como se puede observar en la figura 6.15, el ajuste alimétrico inicia con unos datos básicos para el cálculo, como son, el error kilométrico del orden de 0,05 metros por kilómetro, las características del elipsoide internacional de Hayford y los parámetros de w-test e Baarda.

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

T A B L A D E O B S E R V A C I O N E S *							
NUMERO	NPE	NPV	OBSERVACION	ALTI	AM	HOJA	CLASE
1	75073	77569	14.689	.000	.000	4.276	1
2	75073	75092	28.979	.000	.000	4.402	1
3	75092	77609	-7.822	.000	.000	4.502	1
4	75092	77569	-14.121	.000	.000	3.892	1
5	75092	77628	-36.619	.000	.000	3.726	1
6	75190	77695	-5.262	.000	.000	4.088	1
7	75190	77675	11.586	.000	.000	3.916	1
8	75190	77668	-19.248	.000	.000	4.008	1
***	9	ERROR	**** SIN DATOS				
9	75231	75235	12.857	.000	.000	4.282	1
10	75231	75272	194.760	.000	.000	3.678	1
11	75231	75240	.981	.000	.000	4.709	1
12	75231	77769	26.226	.000	.000	3.948	1
13	75231	77746	59.444	.000	.000	4.008	1
14	75231	77715	-42.698	.000	.000	3.693	1
15	75235	75267	84.773	.000	.000	3.819	1
16	75235	75272	180.559	.000	.000	3.711	1
17	75235	75240	-12.338	.000	.000	3.928	1
18	75240	75272	193.212	.000	.000	4.141	1
19	75240	75281	228.365	.000	.000	3.927	1
20	75240	77769	24.719	.000	.000	4.867	1
21	75240	77746	57.878	.000	.000	4.379	1
22	75267	75272	96.671	.000	.000	3.915	1
23	75272	75281	36.321	.000	.000	5.067	1
24	75272	77769	-167.628	.000	.000	4.205	1
25	75281	77809	-181.076	.000	.000	4.242	1
26	75281	77769	-203.842	.000	.000	4.272	1
27	75320	75351	52.247	.000	.000	3.968	1
28	75320	77826	-22.921	.000	.000	4.191	1
29	75351	77868	39.149	.000	.000	4.360	1
30	75351	77857	68.376	.000	.000	4.135	1
31	75411	77918	21.324	.000	.000	4.642	1
32	75411	77898	6.935	.000	.000	4.208	1
33	75430	75452	-49.651	.000	.000	4.301	1
34	75430	77958	-33.860	.000	.000	4.258	1
35	75430	77946	-20.042	.000	.000	4.035	1
36	75430	77918	-30.363	.000	.000	4.448	1
37	75452	75463	32.692	.000	.000	4.824	1
38	75452	77979	68.108	.000	.000	4.156	1
39	75463	75490	66.270	.000	.000	4.021	1

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.16. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de observaciones

Al final de la tabla de observaciones, vemos los parámetros de la red:

NUMERO TOTAL DE VÉRTICES = 880
 NUMERO DE PUNTOS FIJOS = 42
 NUMERO TOTAL DE RELACIONES DE OBSERVACIÓN = 2474
 ELEMENTOS DE LA MATRIZ NORMAL 22041

A continuación se muestra la relación completa de todos los residuos de las observaciones (figura 6.17), sin ponderar y ponderados, así como la raíz del peso a priori:

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

T A B L A D E R E S I D U O S * H O J A 1

NUMERO DE OBSERVACION	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	RESIDUO	RAIZ PESO A PRIORI	RESIDUO PONDERADO
1	75073	77569	-.0797	4.276	-.3408
2	75073	75092	.0752	4.402	.3311
3	75092	77609	-.1646	4.502	-.7412
4	75092	77569	.0138	3.892	.0537
5	75092	77628	.3303	3.726	1.2306
6	75190	77695	-.0250	4.088	-.1021
7	75190	77675	-.2003	3.916	-.7845
8	75190	77668	.2172	4.008	.8706
9	75231	75235	-.3175	4.282	-1.3594
10	75231	75272	.6874	3.678	2.5284
11	75231	75240	-.1922	4.709	-.9048
12	75231	77769	.0655	3.948	.2585
13	75231	77746	.3591	4.008	1.4395
14	75231	77715	-.4406	3.693	-1.6270
15	75235	75267	.2790	3.819	1.0655
16	75235	75272	-.3403	3.711	-1.2627
17	75235	75240	-.3372	3.928	-1.3249
18	75240	75272	.3122	4.141	1.2926
19	75240	75281	-.5053	3.927	-1.9843
20	75240	77769	-.2689	4.867	-1.3086
21	75240	77746	-.0342	4.379	-.1498
22	75267	75272	.2655	3.915	1.0395
23	75272	75281	.3505	5.067	1.7759
24	75272	77769	.2849	4.205	1.1979
25	75281	77809	.0256	4.242	.1084
26	75281	77769	.0409	4.272	.1746
27	75320	75351	.1207	3.968	.4787
28	75320	77826	-.1081	4.191	-.4532
29	75351	77868	.0136	4.360	.0591
30	75351	77857	.0960	4.135	.3969
31	75411	77918	.0128	4.642	.0593
32	75411	77898	-.0155	4.208	-.0654
33	75430	75452	-.0497	4.301	-.2137
34	75430	77958	.0789	4.258	.3358
35	75430	77946	-.0929	4.035	-.3749
36	75430	77918	.0507	4.448	.2253
37	75452	75463	.0163	4.824	.0786
38	75452	77970	.0752	4.156	.3120

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.17. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de residuos

Y posteriormente aparecen los parámetros de error del ajuste:

ERROR MEDIO CUADRÁTICO A PRIORI	1.00
ERROR MEDIO CUADRÁTICO ESTIMADO	0.84
MEDIA DE RESIDUOS PONDERADOS	0.03
ERROR KILOMÉTRICO MEDIO	0.043

A continuación se observa en la figura 6.18, la compensación altimétrica, esto es, altitud compensada, error medio cuadrático y corrección respecto a las altitudes aproximadas dadas anteriormente:

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

"RESULTADOS DE LA COMPENSACION * HOJA 1

NOMBRE	NUMERO	ALTITUD	E. M. C.	CORRECCION
LA MORRA	75351	324.180	.069	-.084
GUADALPERAL	75320	272.054	.076	.025
BARCA	75411	302.481	.068	-.139
SILO DE VILLANUEVA	77918	323.793	.046	-.089
SILO DON BENITO	77898	309.431	.048	-.149
REMONGO	77868	363.316	.059	-.114
LA JARILLA	77874	287.717	.054	-.198
SIERRA DE YELBES	77857	392.460	.053	-.144
EL GUIJO	77826	249.241	.048	-.041
GUIJARRO BLANCO	77809	364.552	.062	.109
LA ATALAYA	77844	268.966	.052	-.118
HORTIGA	77892	658.992	.051	-.112
TAMBORRIO	75430	354.206	.053	-.064
ENCINA GRANDE	77958	320.267	.049	-.083
JALIAS	77946	334.257	.042	-.075
MAGACELA	77933	561.859		PUNTO FIJO
LA LOMA	75452	304.605	.064	-.062
CANADA GIL	77900	411.224	.042	-.044
PELADO	77979	372.787	.053	-.106
PAERILLA	77954	392.308	.041	-.064
GARZONA	77925	368.229	.040	-.053
PEGOTES DE CAMARA	77851	347.658	.048	-.021
LA ENCINA	77822	297.620	.042	-.200
SIERRA MANCHITA	80458	578.623	.045	-.038
LOS RETAMALES	77797	337.262	.061	.137
TERRERO	75281	545.654	.055	.080
MAJADA DE LAS CANAS	77801	265.571	.042	-.113
CARIJA	77746	374.695		PUNTO FIJO
LOS BARROS	77769	341.770	.042	.140
TORRALBAS	77941	398.549	.042	-.027
CUEVA DEL CIERVO	80517	666.917	.048	-.015
DEHESA	80503	530.391	.045	.009
LAPA	80488	536.898	.048	-.054
LEGIO	75475	312.606	.067	-.128
MESAS ALTAS	75463	337.281	.062	-.063
SILO DE ORELLANA	75490	403.602	.057	-.123
HERRADON	77975	384.150	.051	-.103
WENTAMILLAS	80570	455.202	.040	.122

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.18. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, resultados de la compensación

En esta figura observamos el resultado de la compensación. Y la cota ortométrica ajustada. Al final de la tabla aparece el error medio cuadrático que fue de 0,049, que es muy bueno.

Por ultimo se muestra la tabla de errores a priori y a posteriori, así como el error medio cuadrático de los residuos, residuo tipificado y los parámetros de redundancia para la compensación altimétrica:

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

TABLA DE ERRORES Y REDUNDANCIAS DE LAS OBSERVACIONES * HOJA 1

N.OBS	NPE	NPV	DESNIVEL COMPENSADO	E.M.C. PRIORI	E.M.C. POSTERIORI	RESIDUO TIPIFICADO	E.M.C. RESIDUO	FIABILIDAD QB	SB
1	75073	77569	14.769	.234	.157	-.560	.142	.630	1.050
2	75073	75092	28.903	.227	.155	.560	.134	.651	1.067
3	75092	77609	-7.657	.222	.138	-1.095	.150	.542	.831
4	75092	77569	-14.134	.257	.146	.073	.190	.452	.803
5	75092	77628	-36.949	.268	.148	1.629	.203	.429	.800
6	75190	77695	-5.237	.245	.154	-.153	.163	.557	.943
7	75190	77675	11.786	.255	.144	-1.056	.190	.448	.791
8	75190	77668	-19.465	.249	.147	1.219	.178	.490	.842
9	75231	75235	13.174	.234	.132	-1.830	.174	.448	.724
10	75231	75272	194.073	.272	.119	2.955	.233	.268	.566
11	75231	75240	1.173	.212	.107	-1.130	.170	.359	.547
12	75231	77769	26.160	.253	.112	.303	.216	.274	.536
13	75231	77746	59.085	.249	.113	1.709	.210	.290	.549
14	75231	77715	-42.258	.271	.138	-2.045	.215	.367	.710
15	75235	75267	84.494	.262	.168	1.641	.170	.578	1.055
16	75235	75272	180.899	.269	.130	-1.538	.221	.326	.645
17	75235	75240	-12.001	.255	.132	-1.676	.201	.375	.678
18	75240	75272	192.900	.242	.111	1.540	.203	.295	.538
19	75240	75281	228.871	.255	.122	-2.413	.209	.324	.606
20	75240	77769	24.987	.205	.104	-1.631	.165	.356	.526
21	75240	77746	57.912	.228	.113	-.185	.185	.345	.570
22	75267	75272	96.405	.255	.167	1.641	.162	.599	1.073
23	75272	75281	35.971	.197	.119	2.544	.138	.513	.696
24	75272	77769	-167.912	.238	.114	1.453	.196	.320	.561
25	75281	77809	-181.102	.236	.149	.163	.156	.560	.914
26	75281	77769	-203.883	.234	.118	.218	.187	.359	.603
27	75320	75351	52.126	.252	.169	.789	.153	.632	1.135
28	75320	77826	-22.813	.239	.165	-.789	.137	.670	1.169
29	75351	77868	39.136	.229	.143	.088	.155	.544	.862
30	75351	77857	68.280	.242	.141	.547	.175	.474	.790
31	75411	77918	21.312	.215	.144	.098	.131	.631	.969
32	75411	77898	6.950	.238	.149	-.098	.159	.551	.906
33	75430	75452	-49.601	.233	.147	-.324	.154	.564	.910
34	75430	77958	-33.939	.235	.128	.440	.179	.419	.686
35	75430	77946	-19.949	.248	.128	-.474	.196	.374	.659
36	75430	77918	-30.413	.225	.137	.325	.156	.519	.804
37	75452	75463	22.676	.207	.124	.122	.122	.566	.848

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.19. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema ED50, tabla de errores y redundancias de las observaciones

De estos valores (fig. 6.19) se obtiene la fiabilidad de la red que es de 0,339. La cual es buena.

En estos ficheros (fig. 6.20), ED50.GEO y ED50.UTM respectivamente, se muestran las coordenadas geodésicas y en UTM compensadas de la ROI en el sistema ED50, $(\phi, \lambda, H)_{ED-50}$.

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75073	-6.56212470	39.03283751	232.567	GALLINA	
75092	-6.52051281	39.02244392	261.471	MATAMOROS	
75190	-6.32560872	39.00111949	262.828	CIERVO	
75231	-6.24181731	39.01263883	315.610	GATO	
75235	-6.23339557	39.05151710	328.784	LA MORRA	
75240	-6.21015574	39.00290468	316.783	EL AGUILA	
75267	-6.17090991	39.07547456	413.278	VALDEMANTILLA	
75272	-6.16170884	39.02440162	509.683	EL MORO	
75281	-6.14284073	39.01149796	545.654	TERRERO	
75320	-6.06036871	39.00171382	272.054	GUADALPERAL	
75351	-5.95333354	39.01373719	324.180	LA MORRA	
75411	-5.48138480	39.01102520	302.481	BARCA	
75430	-5.44492587	39.00349071	354.206	TAMBORRIO	
75452	-5.40325312	39.02233267	304.605	LA LOMA	
75463	-5.37308913	39.03106575	337.281	MESAS ALTAS	
75475	-5.35052475	39.05178305	312.606	LEGIO	
75490	-5.32101261	39.00506515	403.602	SILO DE ORELLANA	
75502	-5.30375271	39.02283732	723.572	SIERRA MORENA	
75512	-5.27343138	39.02374712	697.670	REPICA	
75545	-5.21386685	39.05264378	394.555	EL RISQUILLO	
75551	-5.20354909	39.01280359	490.420	LOS CASTILLEJOS	
75574	-5.15491114	39.04409645	431.281	CALERA	
75603	-5.11025124	39.03566393	494.214	EL CALDERERO	
75626	-5.05403324	39.06014615	773.210	SANTA CATALINA	
75641	-5.02042607	39.01203461	483.039	VILLAR	
77555	-6.59353230	38.55081462	231.200	LAS CUESTAS	
77560	-6.58479750	38.50349292	233.011	BOTE	
77569	-6.58036943	38.59502010	247.336	LIVIANA	
77583	-6.53339350	38.53043442	238.373	ROSTROS	
77586	-6.54380629	38.56444982	205.206	SAGRAJAS	
77609	-6.50528820	38.59193820	253.813	CARBONERAS	
77611	-6.48596478	38.51553420	246.458	POTOSI	
77616	-6.47587825	38.56464214	206.397	ATALAYA	
77628	-6.45585988	38.58331760	224.522	MADRONO	
77640	-6.42478651	38.50255907	271.134	TORRE F2	
77646	-6.42095136	38.56272489	216.091	RESCARBADO	
77661	-6.37193561	38.51075623	253.055	LOBON	
77668	-6.38497322	38.58424789	243.363	CERRO GORDO	
77675	-6.36317456	38.55472930	274.614	CENTINELA	
77695	-6.32203740	38.55414020	257.591	CASARENTE	
77715	-6.27209007	38.55360435	273.352	CABEZA RASA	
77721	-6.25333410	38.51485398	607.951	SAN SERVAN	
77733	-6.23315730	38.53446018	262.398	CANTA RANA	

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75073	159101.661	4330663.366	232.567	GALLINA	
75092	165176.383	4328426.710	261.471	MATAMOROS	
75190	192651.794	4323189.381	262.828	CIERVO	
75231	205200.992	4325031.605	315.610	GATO	
75235	206528.181	4332046.956	328.784	LA MORRA	
75240	209865.403	4323087.586	316.783	EL AGUILA	
75267	215955.696	4336627.512	413.278	VALDEMANTILLA	
75272	216859.536	4327000.384	509.683	EL MORO	
75281	219375.070	4324161.128	545.654	TERRERO	
75320	231455.285	4321954.043	272.054	GUADALPERAL	
75351	240447.476	4324129.272	324.180	LA MORRA	
75411	257245.500	4322756.212	302.481	BARCA	
75430	262133.700	4321516.200	354.206	TAMBORRIO	
75452	268408.089	4324675.032	304.605	LA LOMA	
75463	272817.995	4326007.035	337.281	MESAS ALTAS	
75475	276431.071	4329827.793	312.606	LEGIO	
75490	280409.251	4321471.289	403.602	SILO DE ORELLANA	
75502	282719.853	4324422.500	723.572	SIERRA MORENA	
75512	287132.826	4324582.588	697.670	REPICA	
75545	295819.304	4329565.442	394.555	EL RISQUILLO	
75551	297147.806	4322175.762	490.420	LOS CASTILLEJOS	
75574	304183.404	4327949.588	431.281	CALERA	
75603	311038.002	4326414.389	494.214	EL CALDERERO	
75626	318870.511	4330080.464	773.210	SANTA CATALINA	
75641	323867.303	4321295.516	483.039	VILLAR	
77555	153757.177	4315439.294	231.200	LAS CUESTAS	
77560	154529.975	4306962.952	233.011	BOTE	
77569	156344.260	4324041.783	247.336	LIVIANA	
77583	162301.255	4311244.109	238.373	ROSTROS	
77586	161046.992	4318100.051	205.206	SAGRAJAS	
77609	166672.389	4322645.594	253.813	CARBONERAS	
77611	168823.856	4308836.415	246.458	POTOSI	
77616	170665.833	4317752.030	206.397	ATALAYA	
77628	173696.572	4320924.036	224.522	MADRONO	
77640	177675.221	4305698.401	271.134	TORRE F2	
77646	179053.382	4316814.091	216.091	RESCARBADO	
77661	185649.888	4306674.219	253.055	LOBON	
77668	184032.226	4320790.224	243.363	CERRO GORDO	
77675	187139.589	4315255.220	274.614	CENTINELA	
77695	193187.575	4314835.911	257.591	CASARENTE	
77715	200395.067	4314393.638	273.352	CABEZA RASA	
77721	202722.292	4307280.143	607.951	SAN SERVAN	
77733	205791.232	4310749.421	262.398	CANTA RANA	

Figura 6.20. Fichero de las coordenadas compensadas de la ROI en el sistema ED50

Ahora veremos el ajuste mínimo cuadrático de ROI en planimetría y en el sistema WGS-84 (ETRF-89), tomando como fijos, es decir como sistema de referencia, los vértices de la red de primer orden en dicho sistema, es decir, el sistema de referencia $(\phi, \lambda)_{WGS-84}$ respecto a la red de primer orden.

```

ajuste bloque suroeste de tercer orden

PROGRAMA COMPRED : COMPENSACION DE REDES GEODESICAS POR VARIACION DE COORDENADAS
                   SOBRE LA SUPERFICIE DEL ELIPSOIDE WGS-84

D A T O S   D E   E N T R A D A

ELIPSOIDE WGS-84:   - EXCENTRICIDAD = 0.0066943800
                   - SEMIEJE MAYOR = 6378137 metros

PARAMETROS DEL W-TEST DE BAARDA DE DETECCION DE ERRORES GROSEROS

NIVEL DE SIGNIFICACION DEL W-TEST       :   .001
POTENCIA DEL W-TEST                     :   .800
NUMERO CRITICO DETECCION DE ERRORES GROSEROS :   3.290

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A   D E   V E R T I C E S   *   HOJA 1

DESIGNACION DEL VERTICE          *
N O M B R E          NUMERO      DE ORDEN      X          Y          ALTITUD
LA MORRA              75351        1          240338.106  4323923.450  324.18
GUADALPERAL          75320        2          231346.000  4321748.308  272.05
BARCA                 75411        3          257135.926  4322550.312  302.48
SILO DE VILLANUEVA   77918        4          257313.730  4317224.397  323.79
SILO DON BENITO      77898        5          252015.874  4316962.057  309.43
REMONGO              77868        6          244061.014  4318356.354  363.32
LA JARILLA           77874        7          244227.017  4311288.581  287.72
SIERRA DE YELBES     77857        8          239144.294  4315961.859  392.46
EL GUIJO             77826        9          230097.733  4314161.092  249.24
GUIJARRO BLANCO     77809        10         225597.462  4320174.685  364.55
LA ATALAYA           77844        11         237037.826  4311379.796  322.68
HORTIGA              77892        12         250304.615  4306541.044  658.99
TAMBORRIO           75430        13         262024.066  4321310.290  354.21
ENCINA GRANDE       77958        14         268026.192  4317200.852  320.27
JALIAS              77946        15         264502.616  4312926.724  388.05
MAGACELA            77933        16         262528.277  4308772.788  562.14
LA LOMA              75452        17         268298.428  4324469.072  304.61
CANADA GIL          77900        18         255309.949  4302618.063  411.22
DELIAO              77900        19         232221.004  4318910.012  379.70

```

Figura 6.21. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), datos de entrada

En la figura 6.21, observamos los resultados del ajuste de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), se utiliza el programa de *compred* (Compensación de redes geodésicas por variación de coordenadas sobre la superficie del Elipsoide Internacional de Hayford), inicialmente se muestran los datos de entrada:

- Elipsoide Internacional de Hayford (Datum Europeo, ED-50),
- excentricidad = 0.0067220022,
- semieje mayor = 6378388 metros.

En la detección de errores groseros en las observaciones, tenemos que los parámetros del w-test de baarda de detección de errores groseros, conllevan un nivel de significación $\alpha = 0.001$, una potencia del $\beta = 0.80$ y numero critico $w_0 = 3.290$.

ajuste bloque suroeste de tercer orden
T A B L A D E O B S E R V A C I O N E S * HOJA 1

NUMERO DE ORDEN	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	OBSERVACION (VALOR MEDIDO)	RAIZ PESO A PRIORI	ERROR A PRIORI	CLASE DE OBSERVACION
1	75073	77569	.0000000	.169850	5.8876	DIRECCION
2	75073	75092	297.3374000	.167126	5.9835	DIRECCION
3	75073	77609	326.7054000	.179296	5.5774	DIRECCION
4	75092	77609	.0000000	.164851	6.0661	DIRECCION
5	75092	77569	86.7837000	.177127	5.6457	DIRECCION
6	75092	75073	138.5782000	.167126	5.9835	DIRECCION
7	75092	77628	362.0834000	.179830	5.5608	DIRECCION
8	75092	77616	385.8836000	.180820	5.5304	DIRECCION
9	75190	75231	85.4557000	.181755	5.5019	DIRECCION
10	75190	77695	190.6602000	.173594	5.7606	DIRECCION
11	75190	77675	233.3922000	.176712	5.6589	DIRECCION
12	75190	77668	277.4538000	.175083	5.7116	DIRECCION
13	75215	75267	.0000000	.184957	5.4067	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75215	75235	28.2090000	.165427	6.0450	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75215	75231	81.1922000	.176666	5.6604	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75231	75235	.0000000	.169732	5.8916	DIRECCION
14	75231	75267	35.7011000	.185097	5.4026	DIRECCION
15	75231	75272	77.4479000	.180555	5.5385	DIRECCION
16	75231	75240	113.2385000	.159750	6.2598	DIRECCION
17	75231	77769	121.8334000	.176156	5.6768	DIRECCION
18	75231	77746	165.0920000	.175077	5.7118	DIRECCION
19	75231	77715	215.1159000	.180330	5.5454	DIRECCION
20	75231	77695	243.2987000	.185046	5.4041	DIRECCION
21	75231	75190	278.8190000	.181755	5.5019	DIRECCION
22	75231	75215	356.5306000	.176666	5.6604	DIRECCION
* 22	ERROR	75215 SIN DATOS				
22	75235	75267	.0000000	.178337	5.6074	DIRECCION
23	75235	75272	57.7222000	.180061	5.5537	DIRECCION
24	75235	77769	95.4869000	.182863	5.4686	DIRECCION
25	75235	75240	106.0966000	.176494	5.6659	DIRECCION
26	75235	75231	140.6993000	.169732	5.8916	DIRECCION
27	75235	75215	244.2443000	.165427	6.0450	DIRECCION
* 27	ERROR	75215 SIN DATOS				
27	75240	75231	.0000000	.150750	6.2598	DIRECCION

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.22. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), tabla de observaciones

Esta figura 6.22, pertenece al mismo archivo, y se especifica que el error a priori de observaciones angulares esta en segundos centesimales, de distancia en metros. Siguiendo con el mismo archivo, tenemos los parámetros de la red (red de triangulación):

NUMERO DE PUNTOS FIJOS	42
NUMERO DE PUNTOS APROXIMADOS	838
NUMERO TOTAL DE PUNTOS	880

NUMERO DE DIRECCIONES OBSERVADAS	7880
NUMERO DE DISTANCIAS OBSERVADAS	0
NUMERO DE ACIMUTES GEODÉSICOS	0
NUMERO DE ACIMUTES ASTRONÓMICOS	0
NUMERO TOTAL DE OBSERVACIONES	7574

NUMERO DE INCÓGNITAS EN COORDENADAS	1676
NUMERO DE INCÓGNITAS DE ORIENTACIÓN	880
NUMERO TOTAL DE INCÓGNITAS	2556
NUMERO PARÁMETROS SISTEMÁTICOS	0

GRADOS DE LIBERTAD DEL AJUSTE	5018
-------------------------------	------

ELEMENTOS DE LA MATRIZ NORMAL	266798
-------------------------------	--------

Como resultado del ajuste se alistan en primer lugar las coordenadas UTM en el Huso 30 compensadas y sus correcciones con respecto a las coordenadas aproximadas (fig. 6.23.-Archivo COMPEN.SAL en la carpeta EUREF).

ajuste bloque suroeste de tercer orden

RESULTADOS DE LA COMPENSACION * HOJA 1

VERTICE		CORRECCIONES			COORDENADAS COMPENSADAS	
NUMERO	NOMBRE	X	Y	DESPLZ	X	Y
75351	LA MORRA	.009	.118	.119	240338.119	4323923.568
75320	GUADALPERAL	.012	.102	.103	231346.016	4321748.410
75411	BARCA	.036	.134	.139	257135.966	4322550.444
77918	SILO DE VILLANUEVA	.039	.131	.137	257313.773	4317224.527
77898	SILO DON BENITO	.031	.129	.133	252015.909	4316962.185
77868	REMONGO	.017	.122	.124	244061.036	4318356.476
77874	LA JARILLA	.025	.117	.120	244227.046	4311288.698
77857	SIERRA DE YELBES	.015	.116	.117	239144.313	4315961.974
77826	EL GUIJO	.028	.103	.107	230097.765	4314161.194
77809	GUIJARRO BLANCO	.023	.091	.094	225597.488	4320174.775
77844	LA ATALAYA	.014	.114	.114	237037.843	4311379.909
77892	HORTIGA	.038	.115	.121	250304.657	4306541.158
75430	TAMBORRIO	.040	.132	.138	262024.110	4321310.421
77958	ENCINA GRANDE	.036	.133	.138	268026.231	4317200.984
77946	JALIAS	.026	.158	.161	264502.647	4312926.882
77933	MAGACELA				262528.277	4308772.788
75452	LA LOHA	.036	.127	.132	268298.467	4324469.197
77900	CANADA GIL	.046	.111	.120	255309.998	4302618.172
77979	PELADO	.038	.123	.129	273731.446	4318720.033
77954	PAERILLA	.056	.119	.131	269064.936	4309552.250
77925	GARZONA	.036	.137	.142	258649.997	4311175.026
77851	PEGOTES DE CAMARA	.028	.114	.118	240657.304	4305905.644
77822	LA ENCINA	.035	.113	.118	231141.678	4307062.196
80458	SIERRA MANCHITA	.032	.113	.117	240668.747	4300451.081
77797	LOS RETAMALES	.038	.085	.094	222473.703	4316154.689
75281	TERRERO	.016	.071	.073	219265.955	4323955.549
77801	MAJADA DE LAS CANA	.052	.109	.121	224329.399	4306312.112
77746	CARIJA				208254.795	4316459.705
77769	LOS BARROS	.034	.051	.061	213208.773	4320071.544
77941	TORRALBAS	.056	.101	.115	264822.044	4304404.359
80517	CUEVA DEL CIERVO	.062	.083	.104	257442.108	4297251.006
80503	DEHESA	.077	.080	.111	255001.203	4289417.109
80488	LAPA	.050	.111	.121	249143.174	4299733.937
75475	LEGIO	.037	.120	.126	276321.424	4329621.877
75462	MESAS ALTAS	.040	.122	.120	273208.240	4325801.166

Para obtener Ayuda, presione F1

TABLA DE RESIDUOS * HOJA 2

NUMERO DE OBSERVACION	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	RESIDUO	RAIZ PESO A PRIORI	RESIDUO PONDERADO	CLASE DE OBSERVACION
51	75281	75240	-.9985	.18	-.1762	DIRECCION
52	75281	75272	-.1843	.15	-.0276	DIRECCION
53	75320	75351	1.9217	.18	.3378	DIRECCION
54	75320	77868	3.8505	.18	.7022	DIRECCION
55	75320	77857	5.0166	.18	.8870	DIRECCION
56	75320	77844	1.5536	.18	.2805	DIRECCION
57	75320	77826	-4.9275	.17	-.8455	DIRECCION
58	75320	77809	-9.2005	.16	-1.5162	DIRECCION
59	75351	75411	2.1289	.19	.3959	DIRECCION
60	75351	77918	-7.3028	.19	-1.3653	DIRECCION
61	75351	77898	1.1461	.18	.2096	DIRECCION
62	75351	77868	.9464	.17	.1590	DIRECCION
63	75351	77874	4.6143	.18	.8418	DIRECCION
64	75351	77857	-5.4100	.17	-.9342	DIRECCION
65	75351	77826	8.6389	.18	1.5851	DIRECCION
66	75351	77809	-5.5521	.18	-1.0246	DIRECCION
67	75351	75320	.7314	.18	.1286	DIRECCION
68	75411	77918	5.9404	.16	.9589	DIRECCION
69	75411	77892	.2047	.19	.0381	DIRECCION
70	75411	77898	-3.0502	.17	-.5223	DIRECCION
71	75411	77868	-2.4249	.18	-.4438	DIRECCION
72	75411	75351	3.4254	.19	.6370	DIRECCION
73	75411	75430	2.2053	.16	.3522	DIRECCION
74	75411	77958	-3.9163	.18	-.7089	DIRECCION
75	75411	77946	-6.5380	.18	-1.1833	DIRECCION
76	75411	77933	5.2062	.18	.9587	DIRECCION
77	75430	75475	5.7366	.19	1.0653	DIRECCION
78	75430	75452	2.3290	.17	.3943	DIRECCION
79	75430	75463	-2.3715	.18	-.4274	DIRECCION
80	75430	75490	-.7839	.19	-.1466	DIRECCION
81	75430	77979	-2.7440	.18	-.4961	DIRECCION
82	75430	77958	-14.6454	.17	-2.4927	DIRECCION
83	75430	77975	-.2499	.19	-.0465	DIRECCION
84	75430	77954	-3.0449	.18	-.5572	DIRECCION
85	75430	77946	3.3034	.17	.5767	DIRECCION
86	75430	77933	7.4349	.18	1.3500	DIRECCION
87	75430	77918	-1.3804	.17	-.2293	DIRECCION
88	75430	77898	4.0028	.18	.7121	DIRECCION

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.23. Ficheros de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), resultados de la compensación y tabla de residuos

Los parámetros de error son:

ERROR MEDIO CUADRÁTICO A PRIORI	1.00
ERROR MEDIO CUADRÁTICO ESTIMADO	0.92
VARIANZA ESTIMADA DEL AJUSTE	0.84
MEDIA DE RESIDUOS PONDERADOS	0.0000

Y los errores medios estimados en el ajuste:

ERROR MEDIO DE UNA DIRECCIÓN (SEG.)	3.2
ERROR DE UNA DIRECCIÓN /KM (METROS)	0.005
ERROR DE UNA DISTANCIA /KM (METROS)	0.000
ERROR DE UNA DIRECCIÓN PARTES MILLÓN	5.0
ERROR DE UNA DISTANCIA PARTES MILLÓN	0.0

Se observa en la fig. 6.24, las elipses de error estándar absolutas de los puntos de la Red y sus medios cuadráticos en X y Y.

TABLA DE ELIPSES DE ERROR ABSOLUTAS						* HOJA 1
NUMERO VERTICE	E.M.C. X	E.M.C. Y	PARAMETROS DE LA ELIPSE DE ERROR		ORIENTACION	
			SEMIEJE MENOR	SEMIEJE MAYOR		
75351	.0609	.0522	.0523	.0608	277.69	
75320	.0641	.0501	.0501	.0639	84.21	
75411	.0459	.0463	.0415	.0502	316.94	
77918	.0339	.0327	.0313	.0352	306.73	
77898	.0466	.0338	.0339	.0465	273.43	
77868	.0499	.0398	.0400	.0497	88.84	
77874	.0421	.0368	.0369	.0420	84.89	
77857	.0466	.0387	.0388	.0464	85.16	
77826	.0456	.0389	.0386	.0458	284.02	
77809	.0576	.0406	.0407	.0574	89.84	
77844	.0436	.0357	.0358	.0434	271.33	
77892	.0346	.0312	.0313	.0345	272.98	
75430	.0402	.0393	.0379	.0416	50.91	
77958	.0343	.0333	.0284	.0384	47.53	
77946	.0264	.0297	.0235	.0321	33.53	
77933	.0000	.0000	.0000	.0000	.00 PUNTO FIJO	
75452	.0487	.0487	.0395	.0563	44.74	
77900	.0357	.0350	.0341	.0365	51.23	
77979	.0419	.0323	.0280	.0448	62.15	
77954	.0314	.0280	.0281	.0313	81.61	
77925	.0330	.0272	.0253	.0344	295.97	
77851	.0369	.0353	.0349	.0373	62.59	
77822	.0377	.0333	.0329	.0380	71.79	
80458	.0379	.0338	.0339	.0378	82.75	
77797	.0463	.0381	.0382	.0461	273.20	
75281	.0628	.0450	.0451	.0626	86.13	
77801	.0360	.0348	.0344	.0363	61.31	
77746	.0000	.0000	.0000	.0000	.00 PUNTO FIJO	
77769	.0400	.0335	.0307	.0421	61.63	
77941	.0285	.0328	.0262	.0347	330.42	
80517	.0319	.0368	.0319	.0368	358.75	
80503	.0386	.0405	.0375	.0415	329.80	
80488	.0391	.0388	.0345	.0429	45.54	
75475	.0707	.0648	.0572	.0769	53.32	
75463	.0585	.0496	.0433	.0632	57.96	
75490	.0563	.0342	.0274	.0598	67.16	
75025	.0416	.0344	.0320	.0417	72.52	

Figura 6.24. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), tabla de elipse de error absolutas

Al final de la tabla de elipse de error absolutas, tenemos que el:

ERROR ABSOLUTO MEDIO EN X (METROS): .050

ERROR ABSOLUTO MEDIO EN Y (METROS): .049

En la siguiente tabla se dan los errores a priori y a posteriori de las observaciones en unidades de segundos centesimales y, metros y ppm para las direcciones, los errores medios cuadráticos y de los residuos y los residuos tipificados sobre los que se realiza el w-test de Baarda, rechazándose las observaciones cuyo residuo tipificado exceda en valor absoluto la cantidad de

3.29, con un nivel de confianza de $\alpha = 0,001$, es decir, se rechazan las observaciones con una confianza del 99%. Se dan también los parámetros de redundancia QB y el número crítico que indica el mínimo error que tienen que tener una observación para ser detectada como errónea por el w-test.

N.OBS	NPE	NPV	E.M.C. PRIORI OBSERVACION			E.M.C. POSTERIORI OBSERVACION			E.M.C. RESIDUO RESIDUO TIPIF.	FIABILIDAD		
			SEG	MET	PPH	SEG	MET	PPH		QB	SB	
1	75073	77569	5.888	.066		4.445	.050		3.326	-.468	.681	35.851
2	75073	75092	5.984	.061		4.195	.043		3.846	.787	.587	32.024
3	75073	77609	5.577	.097		3.515	.061		4.044	-.305	.474	26.462
4	75092	77609	6.066	.057		3.607	.034		4.611	.486	.422	27.453
5	75092	77569	5.646	.087		3.859	.060		3.754	-.783	.558	29.210
6	75092	75073	5.984	.061		4.439	.045		3.503	-1.279	.657	35.156
7	75092	77628	5.561	.099		3.497	.062		4.039	1.049	.472	26.334
8	75092	77616	5.530	.104		2.952	.056		4.492	.134	.340	23.422
9	75190	75231	5.502	.110		4.044	.081		3.278	-.030	.645	31.769
10	75190	77695	5.761	.076		3.805	.050		3.986	-.614	.521	28.638
11	75190	77675	5.659	.086		3.496	.053		4.175	.183	.456	26.389
12	75190	77668	5.712	.080		4.080	.057		3.570	.427	.609	31.437
13	75231	75235	5.892	.066		3.847	.043		4.128	.347	.509	28.926
14	75231	75267	5.403	.134		3.044	.076		4.257	-.001	.379	23.584
15	75231	75272	5.538	.103		2.914	.054		4.531	.345	.331	23.288
16	75231	75240	6.260	.050		3.456	.027		4.992	-.481	.364	27.004
17	75231	77769	5.677	.084		2.514	.037		4.968	.001	.234	22.315
18	75231	77746	5.712	.080		2.971	.042		4.699	-1.470	.323	23.882
19	75231	77715	5.545	.102		2.941	.054		4.519	-2.808	.336	23.407
20	75231	77695	5.404	.134		2.875	.071		4.397	2.507	.338	22.849
21	75231	75190	5.502	.110		3.548	.071		3.904	1.673	.497	26.676
22	75235	75267	5.607	.092		4.071	.067		3.413	.384	.630	31.691
23	75235	75272	5.554	.100		3.490	.063		4.036	.194	.472	26.286
24	75235	77769	5.469	.117		2.649	.056		4.640	-.251	.280	22.173
25	75235	75240	5.666	.085		2.918	.044		4.684	.442	.317	23.579
26	75235	75231	5.892	.066		3.897	.044		4.071	-.790	.522	29.329
27	75240	75231	6.260	.050		3.920	.031		4.565	.867	.468	29.531
28	75240	75235	5.666	.085		3.640	.055		4.035	-.406	.493	27.372
29	75240	75272	5.794	.073		3.523	.044		4.331	.747	.441	26.671
30	75240	75281	5.665	.085		3.174	.048		4.479	.118	.375	24.648
31	75240	77769	6.430	.045		3.880	.027		4.834	-1.088	.435	29.423
32	75240	77746	5.965	.062		3.555	.037		4.527	-.605	.424	27.041
33	75240	77715	5.495	.111		2.944	.059		4.455	.280	.343	23.319
34	75267	75272	5.658	.086		3.697	.056		3.962	-.397	.510	27.801
35	75267	77769	5.384	.140		2.885	.075		4.365	.586	.343	22.850
36	75267	75231	5.403	.134		3.003	.075		4.292	.262	.369	23.394
37	75267	75235	5.607	.092		3.827	.063		3.735	-.655	.556	28.959
38	75272	75281	5.678	.080		3.207	.036		4.727	.826	.407	23.286

Figura 6.25. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), tabla de errores de las observaciones y parámetros de redundancia

Al final de esta tabla, observamos que la fiabilidad media de la red es 0,337. Lo cual indica que es una fiabilidad aceptable.

En estos ficheros (fig. 6.26), EUREF.GEO y EUREF.UTM, de la carpeta EUREF respectivamente, se muestran las coordenadas geodésicas y en UTM compensadas de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89), $(x, y)_{ETRF-89}$.

EUREF - WordPad							
Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda							
75351-	5.595818041	39.013294533	324.180	LA MORRA	00	0	
75320-	6.060853710	39.001270781	272.054	GUADALPERAL	00	0	
75411-	5.481868099	39.010583004	302.481	BARCA	00	0	
77918-	5.480448478	38.581343715	323.793	SILO DE VILLANUEVA	00	0	
77898-	5.514403443	38.575959708	309.431	SILO DON BENITO	00	0	
77868-	5.571604398	38.583653577	363.316	REMONGO	00	0	
77874-	5.565965155	38.544772801	287.717	LA JARILLA	00	0	
77857-	6.003682116	38.571374237	392.460	SIERRA DE YELBES	00	0	
77826-	6.064958212	38.560555263	249.241	EL GUIJO	00	0	
77809-	6.100490374	38.591531615	364.552	GUIJARRO BLANCO	00	0	
77844-	6.015788782	38.544303798	322.683	LA ATALAYA	00	0	
77892-	5.524139532	38.522020383	658.992	HORTIGA	00	0	
75430-	5.445408783	39.003048598	354.206	TAMBORRIO	00	0	
77958-	5.403977842	38.582312081	320.267	ENCINA GRANDE	00	0	
77946-	5.430075700	38.560123613	388.051	JALIAS	00	0	
-77933-	5.441749250	38.534471009	562.140	MAGACELA	00	0	
75452-	5.403735661	39.021890950	304.605	LA LOMA	00	0	
77900-	5.490890600	38.501815598	411.224	CANADA GIL	00	0	
77979-	5.364473820	38.591772068	372.787	PELADO	00	0	
77954-	5.394737557	38.541624335	392.308	PAERILLA	00	0	
77925-	5.470134688	38.545874513	368.229	GARZONA	00	0	
77851-	5.592036262	38.514956231	347.658	PEGOTES DE CAMARA	00	0	
77822-	6.055627464	38.521674276	297.620	LA ENCINA	00	0	
80458-	5.591249228	38.485285985	578.623	SIERRA MANCHITA	00	0	
77797-	6.120867780	38.570156107	337.262	LOS RETAMALES	00	0	
75281-	6.143326555	39.011054721	545.654	TERRERO	00	0	
77801-	6.103746802	38.514485374	265.571	MAJADA DE LAS CANA	00	0	
-77746-	6.215888429	38.565482650	375.120	CARIJA	00	0	
77769-	6.183887199	38.585768474	341.770	LOS BARROS	00	0	
77941-	5.423699536	38.512537176	398.549	TORRALBAS	00	0	
80517-	5.473377252	38.472636649	666.917	CUEVA DEL CIERVO	00	0	
80503-	5.490483811	38.431009639	530.391	DEHESA	00	0	
80488-	5.532060543	38.483845698	536.898	LAPA	00	0	
75475-	5.351006814	39.051341899	312.606	LEGIO	00	0	
75463-	5.373571362	39.030624246	337.281	MESAS ALTAS	00	0	
75490-	5.321494058	39.004623570	403.602	SILO DE ORELLANA	00	0	
77975-	5.351370172	38.551602472	384.150	HERRADON	00	0	
80579-	5.361235788	38.494266222	455.203	HONTANILLAS	00	0	
80568-	5.390435341	38.483661276	448.558	CENSO	00	0	
80533-	5.443313645	38.435502098	640.597	AGALLA	00	0	
75502-	5.304234058	39.022396013	723.572	SIERRA MORENA	00	0	
-75512-	5.273912410	39.023305940	697.630	REPICA	00	0	
77996-	5.313075500	38.562991877	389.988	CABEZA PELADA	00	0	
80475-	5.562675117	38.452122215	612.012	LA UTRERA	00	0	

Para obtener Ayuda, presione F1

EUREF - WordPad							
Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda							
75351	759749.409	4323926.457	324.180	LA MORRA			
75320	750920.727	4321163.496	272.054	GUADALPERAL			
75411	776603.059	4323663.653	302.481	BARCA			
77918	777131.487	4318359.864	323.793	SILO DE VILLANUEVA			
77898	771861.411	4317749.129	309.431	SILO DON BENITO			
77868	763831.172	4318616.644	363.316	REMONGO			
77874	764462.011	4311574.741	287.717	LA JARILLA			
77857	759082.685	4315903.557	392.460	SIERRA DE YELBES			
77826	750174.877	4313511.469	249.241	EL GUIJO			
77809	745289.213	4319214.829	364.552	GUIJARRO BLANCO			
77844	757282.305	4311192.935	322.683	LA ATALAYA			
77892	770839.185	4307236.594	658.992	HORTIGA			
75430	781563.532	4322748.281	354.206	TAMBORRIO			
77958	787825.332	4319042.008	320.267	ENCINA GRANDE			
77946	784589.652	4314543.721	388.051	JALIAS			
77933	782892.264	4310267.471	562.140	MAGACELA			
75452	787617.920	4326314.962	304.605	LA LOMA			
77900	776092.288	4303650.259	411.224	CANADA GIL			
77979	793420.306	4320934.281	372.787	PELADO			
77954	789365.681	4311475.439	392.308	PAERILLA			
77925	778863.340	4312410.047	368.229	GARZONA			
77851	761253.727	4305968.488	347.658	PEGOTES DE CAMARA			
77822	751683.140	4306497.305	297.620	LA ENCINA			
80458	761623.314	4300526.375	578.623	SIERRA MANCHITA			
77797	742437.507	4314998.640	337.262	LOS RETAMALES			
75281	738723.794	4322569.393	545.654	TERRERO			
77801	744935.899	4305301.439	265.571	MAJADA DE LAS CANA			
77746	728233.841	4314367.293	375.120	CARIJA			
77769	732937.483	4318296.008	341.770	LOS BARROS			
77941	785468.942	4306057.933	398.549	TORRALBAS			
80517	778572.577	4298433.464	666.917	CUEVA DEL CIERVO			
80503	776649.969	4290454.693	530.391	DEHESA			
80488	770127.124	4300366.905	536.898	LAPA			
75475	795286.534	4331988.095	312.606	LEGIO			
75463	791932.010	4327935.516	337.281	MESAS ALTAS			
75490	799809.392	4323908.324	403.602	SILO DE ORELLANA			
77975	795890.649	4313563.096	384.150	HERRADON			
80579	794860.600	4303230.642	455.203	HONTANILLAS			
80568	790786.737	4301040.669	448.558	CENSO			
80533	783163.958	4292070.879	640.597	AGALLA			
75502	801921.508	4327007.057	723.572	SIERRA MORENA			
75512	806316.774	4327458.070	697.630	REPICA			
77996	801174.307	4316044.813	389.988	CABEZA PELADA			
80475	756920.002	4304457.628	612.012	LA UTRERA			

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.26. Fichero de las coordenadas compensadas de la ROI en el sistema WGS-84(ETRF-89)

Ahora veremos el ajuste mínimo cuadrático de ROI en planimetría y en el sistema REGENTE, tomando como fijos, es decir como sistema de referencia REGENTE, es decir, el sistema de referencia $(\phi, \lambda)_{\text{WGS-84}}$ respecto a REGENTE.

```

COMPEN - WordPad
Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

ajuste bloque suroeste de tercer orden

PROGRAMA COMPRED : COMPENSACION DE REDES GEODESICAS POR VARIACION DE COORDENADAS
SOBRE LA SUPERFICIE DEL ELIPSOIDE WGS-84

D A T O S   D E   E N T R A D A

ELIPSOIDE WGS-84      - EXCENTRICIDAD = 0.0066943800
                      - SEMIEJE MAYOR = 6378137 metros

PARAMETROS DEL W-TEST DE BAARDA DE DETECCION DE ERRORES GROSEROS

NIVEL DE SIGNIFICACION DEL W-TEST      :      .001
POTENCIA DEL W-TEST                     :      .800
NUMERO CRITICO DETECCION DE ERRORES GROSEROS : 3.290

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A   D E   V E R T I C E S   *   HOJA 1

DESIGNACION DEL VERTICE      NUMERO      X      Y      ALTITUD
N O M B R E      NUMERO      DE ORDEN

LA MORRA      75351      1      240338.105      4323923.449      324.18
GUADALPERAL      75320      2      231346.000      4321748.309      272.05
BARCA      75411      3      257135.927      4322550.311      302.48
SILO DE VILLANUEVA      77918      4      257313.731      4317224.396      323.79
SILO DON BENITO      77898      5      252015.873      4316962.058      309.43
REMONGO      77868      6      244061.014      4318356.353      363.32
LA JARILLA      77874      7      244227.016      4311288.581      287.72
SIERRA DE YELBES      77857      8      239144.294      4315961.858      392.46
EL GUIJO      77826      9      230097.734      4314161.091      249.24
GUIJARRO BLANCO      77809      10      225597.461      4320174.686      364.55
LA ATALAYA      77844      11      237037.826      4311379.796      322.68      PUNTO FIJO
HORTIGA      77892      12      250304.615      4306541.044      658.99
TAMBORRIO      75430      13      262024.066      4321310.290      354.21
ENCINA GRANDE      77958      14      268026.193      4317200.852      320.27
JALIAS      77946      15      264502.616      4312926.724      388.05      PUNTO FIJO
MAGACELA      77933      16      262528.225      4308772.667      561.86
LA LOMA      75452      17      268298.427      4324469.073      304.61
CANADA GIL      77900      18      255309.950      4302618.062      411.22
PELADO      77920      19      272731.403      4318710.011      372.20

Para obtener Ayuda, presione F1
MAY

```

Figura 6.27. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, datos de entrada

En la figura 6.27, observamos los resultados del ajuste de la ROI en el sistema REGENTE, se utiliza el programa de *compred* (Compensación de redes geodésicas por variación de coordenadas sobre la superficie del Elipsoide Internacional de Hayford), inicialmente se muestran los datos de entrada:

- Elipsoide Internacional de Hayford (Datum Europeo, ED-50),
- excentricidad = 0.0067220022,
- semieje mayor = 6378388 metros.

En la detección de errores groseros en las observaciones, tenemos que los parámetros del w-test de baarda de detección de errores groseros, conllevan un nivel de significación $\alpha = 0.001$, una potencia del $\beta = 0.80$ y numero critico $w_0 = 3.290$.

NUMERO DE ORDEN	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	OBSERVACION (VALOR MEDIDO)	RAIZ PESO A PRIORI	ERROR A PRIORI	CLASE DE OBSERVACION
1	75073	77569	.0000000	.169850	5.8876	DIRECCION
2	75073	75092	297.3374000	.167126	5.9835	DIRECCION
3	75073	77609	326.7054000	.179296	5.5774	DIRECCION
4	75092	77609	.0000000	.164851	6.0661	DIRECCION
5	75092	77569	86.7837000	.177127	5.6457	DIRECCION
6	75092	75073	138.5782000	.167126	5.9835	DIRECCION
7	75092	77628	362.0834000	.179830	5.5608	DIRECCION
8	75092	77616	385.8836000	.180820	5.5304	DIRECCION
9	75190	75231	85.4557000	.181755	5.5019	DIRECCION
10	75190	77695	190.6602000	.173594	5.7606	DIRECCION
11	75190	77675	233.3922000	.176712	5.6589	DIRECCION
12	75190	77668	277.4538000	.175083	5.7116	DIRECCION
13	75215	75267	.0000000	.184957	5.4067	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75215	75235	28.2090000	.165427	6.0450	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75215	75231	81.1922000	.176666	5.6604	DIRECCION
* 13	ERROR	75215 SIN DATOS				
13	75231	75235	.0000000	.169732	5.8916	DIRECCION
14	75231	75267	35.7011000	.185097	5.4026	DIRECCION
15	75231	75272	77.4479000	.180555	5.5385	DIRECCION
16	75231	75240	113.2385000	.159750	6.2598	DIRECCION
17	75231	77769	121.8334000	.176156	5.6768	DIRECCION
18	75231	77746	165.0920000	.175077	5.7118	DIRECCION
19	75231	77715	215.1159000	.180330	5.5454	DIRECCION
20	75231	77695	243.2987000	.185046	5.4041	DIRECCION
21	75231	75190	278.8190000	.181755	5.5019	DIRECCION
22	75231	75215	356.5306000	.176666	5.6604	DIRECCION
* 22	ERROR	75215 SIN DATOS				
22	75235	75267	.0000000	.178337	5.6074	DIRECCION
23	75235	75272	57.7222000	.180061	5.5537	DIRECCION
24	75235	77769	95.4869000	.182863	5.4686	DIRECCION
25	75235	75240	106.0966000	.176494	5.6659	DIRECCION
26	75235	75231	140.6993000	.169732	5.8916	DIRECCION
27	75235	75215	244.2443000	.165427	6.0450	DIRECCION
* 27	ERROR	75215 SIN DATOS				
27	75240	75231	.0000000	.159750	6.2598	DIRECCION
28	75240	75235	52.1603000	.176494	5.6659	DIRECCION
29	75240	75272	102.2880000	.173594	5.7606	DIRECCION

Figura 6.28. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de observaciones

Esta figura 6.28, pertenece al mismo archivo, y se especifica que el error a priori de observaciones angulares esta en segundos centesimales, de distancia en metros. Siguiendo con el mismo archivo, tenemos los parámetros de la red (red de triangulación):

NUMERO DE PUNTOS FIJOS	92
NUMERO DE PUNTOS APROXIMADOS	788
NUMERO TOTAL DE PUNTOS	880

NUMERO DE DIRECCIONES OBSERVADAS	7880
NUMERO DE DISTANCIAS OBSERVADAS	0
NUMERO DE ACIMUTES GEODÉSICOS	0
NUMERO DE ACIMUTES ASTRONÓMICOS	0
NUMERO TOTAL DE OBSERVACIONES	7574

NUMERO DE INCÓGNITAS EN COORDENADAS	1576
NUMERO DE INCÓGNITAS DE ORIENTACIÓN	880
NUMERO TOTAL DE INCÓGNITAS	2456
NUMERO PARÁMETROS SISTEMÁTICOS	0

GRADOS DE LIBERTAD DEL AJUSTE	5118
-------------------------------	------

ELEMENTOS DE LA MATRIZ NORMAL	247354
-------------------------------	--------

Como resultado del ajuste se alistan en primer lugar las coordenadas UTM en el Huso 30 compensadas y sus correcciones con respecto a las coordenadas aproximadas (fig. 6.29.-Archivo COMPEN.SAL en la carpeta REGENTE).

ajuste bloque suroeste de tercer orden

R E S U L T A D O S D E L A C O M P E N S A C I O N * HOJA 1

VERTICE		CORRECCIONES			COORDENADAS COMPENSADAS	
NUMERO	NOMBRE	X	Y	DESPLZ	X	Y
75351	LÀ MORRA	.000	.000	.000	240338.106	4323923.449
75320	GUADALPERAL	.000	.000	.000	231346.000	4321748.309
75411	BARCA	.000	.000	.000	257135.927	4322550.311
77918	SILO DE VILLANUEVA	.000	.000	.000	257313.731	4317224.396
77898	SILO DON BENITO	.000	.000	.000	252015.874	4316962.057
77868	REMONGO	.000	.000	.000	244061.014	4318356.353
77874	LÀ JARILLA	.000	.000	.000	244227.016	4311288.580
77857	SIERRA DE YELBES	.000	.000	.000	239144.294	4315961.858
77826	EL GUIJO	.000	.000	.000	230097.734	4314161.091
77809	GUIJARRO BLANCO	.000	.000	.000	225597.461	4320174.686
77844	LÀ ATALAYA				237037.826	4311379.796
77892	HORTIGA	.000	.000	.000	250304.615	4306541.044
75430	TAMBORRIO	.000	.000	.000	262024.066	4321310.290
77958	ENCINA GRANDE	.000	.000	.000	268026.193	4317200.852
77946	JALIAS				264502.616	4312926.724
77933	HAGACELA	.000	.000	.000	262528.225	4308772.667
75452	LÀ LOHA	.000	.000	.000	268298.427	4324469.073
77900	CANADA GIL	.000	.000	.000	255309.950	4302618.062
77979	PELADO	.000	.000	.000	273731.403	4318719.911
77954	PAERILLA	.000	.000	.000	269064.877	4309552.133
77925	GARZONA	.000	.000	.000	258649.956	4311174.891
77851	PEGOTES DE CAMARA	.000	.000	.000	240657.272	4305905.530
77822	LÀ ENCINA	.000	.000	.000	231141.639	4307062.083
80458	SIERRA MANCHITA	.000	.000	.000	240668.711	4300450.970
77797	LOS RETAMALES	.000	.000	.000	222473.662	4316154.607
75281	TERRERO	.000	.000	.000	219265.936	4323955.478
77801	MAJADA DE LAS CANA	.000	.000	.000	224329.342	4306312.004
77746	CARIJA	.000	.000	.000	208254.738	4316459.697
77769	LOS BARROS	.000	.000	.000	213208.736	4320071.495
77941	TORRALBAS	.000	.000	.000	264821.985	4304404.258
80517	CUEVA DEL CIERVO	.000	.000	.000	257442.043	4297250.925
80503	DEHESA	.000	.000	.000	255001.124	4289417.031
80488	LÀFA	.000	.000	.000	249143.120	4299733.829
75475	LETO	.000	.000	.000	276231.383	4320621.750

Para obtener Ayuda, presione F1

MAY

Figura 6.29. Archivos de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, resultados de la compensación

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A D E R E S I D U O S * HOJA 2

NUMERO DE OBSERVACION	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	RESIDUO	RAIZ PESO A PRIORI	RESIDUO PONDERADO	CLASE DE OBSERVACION
51	75281	75240	-.9656	.18	-.1705	DIRECCION
52	75281	75272	.5473	.15	.0820	DIRECCION
53	75320	75351	2.1071	.18	.3704	DIRECCION
54	75320	77868	3.8900	.18	.7094	DIRECCION
55	75320	77857	4.8784	.18	.8626	DIRECCION
56	75320	77844	-.6783	.18	-.1586	DIRECCION
57	75320	77826	-4.7453	.17	-.8142	DIRECCION
58	75320	77809	-8.6873	.16	-1.4316	DIRECCION
59	75351	75411	1.8670	.19	.3472	DIRECCION
60	75351	77918	-7.4434	.19	-1.3916	DIRECCION
61	75351	77898	1.1090	.18	.2028	DIRECCION
62	75351	77868	.9084	.17	.1527	DIRECCION
63	75351	77874	4.4270	.18	.8076	DIRECCION
64	75351	77857	-5.8428	.17	-1.0090	DIRECCION
65	75351	77826	8.8540	.18	1.6246	DIRECCION
66	75351	77809	-5.0605	.18	-.9339	DIRECCION
67	75351	75320	1.1015	.18	.1936	DIRECCION
68	75411	77918	6.0153	.16	.9710	DIRECCION
69	75411	77892	-.3216	.19	-.0599	DIRECCION
70	75411	77898	-3.1686	.17	-.5426	DIRECCION
71	75411	77868	-2.4534	.18	-.4490	DIRECCION
72	75411	75351	3.7972	.19	.7061	DIRECCION
73	75411	75430	1.7678	.16	.2823	DIRECCION
74	75411	77958	-4.2552	.18	-.7702	DIRECCION
75	75411	77946	-6.3567	.18	-1.1505	DIRECCION
76	75411	77933	5.2615	.18	.9689	DIRECCION
77	75430	75475	5.5368	.19	1.0282	DIRECCION
78	75430	75452	2.2400	.17	.3793	DIRECCION
79	75430	75463	-2.5875	.18	-.4663	DIRECCION
80	75430	75490	-.9864	.19	-.1844	DIRECCION
81	75430	77979	-3.0010	.18	-.5426	DIRECCION
82	75430	77958	-14.6433	.17	-2.4924	DIRECCION
83	75430	77975	-.6708	.19	-.1248	DIRECCION
84	75430	77954	-2.5885	.18	-.4737	DIRECCION
85	75430	77946	3.1239	.17	.5454	DIRECCION
86	75430	77933	2.0872	.18	.4400	DIRECCION

Para obtener Ayuda, presione F1 MAY

Figura 6.30. Ficheros de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de residuos

Los parámetros de error son:

ERROR MEDIO CUADRÁTICO A PRIORI	1.00
ERROR MEDIO CUADRÁTICO ESTIMADO	0.93
VARIANZA ESTIMADA DEL AJUSTE	0.87
MEDIA DE RESIDUOS PONDERADOS	0.0000

Y los errores medios estimados en el ajuste:

ERROR MEDIO DE UNA DIRECCIÓN (SEG.)	3.3
ERROR DE UNA DIRECCIÓN /KM (METROS)	0.005
ERROR DE UNA DISTANCIA /KM (METROS)	0.000
ERROR DE UNA DIRECCIÓN PARTES MILLÓN	5.2
ERROR DE UNA DISTANCIA PARTES MILLÓN	0.0

Se observa en la fig. 6.31, las elipses de error estándar absolutas de los puntos de la Red y sus medios cuadráticos en X y Y.

ajuste bloque suroeste de tercer orden

TABLA DE ELIPSES DE ERROR ABSOLUTAS * HOJA 1

NUMERO VERTICE	E.M.C.		PARAMETROS DE LA ELIPSE DE ERROR		ORIENTACION	
	X	Y	SEMIEJE MENOR	SEMIEJE MAYOR		
75351	.0505	.0474	.0475	.0504	79.08	
75320	.0546	.0453	.0454	.0544	88.89	
75411	.0462	.0410	.0385	.0482	299.67	
77918	.0347	.0295	.0294	.0347	280.07	
77898	.0457	.0305	.0303	.0458	83.01	
77868	.0396	.0334	.0317	.0409	65.22	
77874	.0334	.0296	.0296	.0334	80.04	
77857	.0292	.0311	.0263	.0335	37.22	
77826	.0380	.0318	.0304	.0390	292.80	
77809	.0516	.0387	.0389	.0514	273.00	
77844	.0000	.0000	.0000	.0000	.00	PUNTO FIJO
77892	.0324	.0298	.0296	.0324	286.18	
75430	.0388	.0358	.0358	.0387	279.93	
77958	.0312	.0315	.0267	.0353	43.73	
77946	.0000	.0000	.0000	.0000	.00	PUNTO FIJO
77933	.0226	.0261	.0217	.0268	22.59	
75452	.0475	.0496	.0412	.0550	40.22	
77900	.0365	.0360	.0359	.0366	55.43	
77979	.0422	.0340	.0310	.0444	63.20	
77954	.0294	.0277	.0260	.0309	306.24	
77925	.0347	.0292	.0293	.0345	86.04	
77851	.0267	.0309	.0261	.0315	341.09	
77822	.0332	.0292	.0279	.0343	63.07	
80458	.0315	.0335	.0308	.0342	333.01	
77797	.0421	.0367	.0359	.0427	290.19	
75281	.0533	.0480	.0450	.0558	301.23	
77801	.0373	.0344	.0342	.0374	71.73	
77746	.0349	.0453	.0342	.0459	13.71	
77769	.0416	.0429	.0415	.0430	342.48	
77941	.0323	.0340	.0309	.0353	326.83	
80517	.0312	.0344	.0312	.0344	.44	
80503	.0355	.0368	.0337	.0384	323.80	
80488	.0370	.0384	.0343	.0408	38.23	
75475	.0736	.0724	.0633	.0815	46.33	
75463	.0597	.0534	.0479	.0641	56.07	
75400	.0506	.0422	.0271	.0622	66.64	

Para obtener Ayuda, presione F1 MAY

Figura 6.31. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de elipse de error absolutas

Al final de la tabla de elipse de error absolutas, tenemos que el:

ERROR ABSOLUTO MEDIO EN X (METROS): .043

ERROR ABSOLUTO MEDIO EN Y (METROS): .041

En la siguiente tabla se dan los errores a priori y a posteriori de las observaciones en unidades de segundos centesimales y, metros y ppm para las direcciones, los errores medios cuadráticos y de los residuos y los residuos tipificados sobre los que se realiza el w-test de Baarda, rechazándose las

observaciones cuyo residuo tipificado exceda en valor absoluto la cantidad de 3.29, con un nivel de confianza de $\alpha = 0,001$, es decir, se rechazan las observaciones con una confianza del 99%. Se dan también los parámetros de redundancia QB y el número crítico que indica el mínimo error que tienen que tener una observación para ser detectada como errónea por el w-test.

ajuste bloque suroeste de tercer orden

TABLA DE ERRORES DE LAS OBSERVACIONES Y PARAMETROS DE REDUNDANCIA * HOJA 1

N.OBS	NPE	NPV	E.M.C. PRIORI OBSERVACION			E.M.C. POSTERIORI OBSERVACION			E.M.C. RESIDUO RESIDUO TIPIF.		FIABILIDAD	
			SEG	MET	PPM	SEG	MET	PPM	RESIDUO	TIPIF.	QB	SB
1	75073	77569	5.888	.066		4.495	.051		3.381	-.397	.670	35.265
2	75073	75092	5.984	.061		4.241	.043		3.888	.950	.578	31.675
3	75073	77609	5.577	.097		3.470	.060		4.155	-.482	.445	25.757
4	75092	77609	6.066	.057		3.625	.034		4.657	.648	.411	27.182
5	75092	77569	5.646	.087		3.624	.056		4.095	-.493	.474	26.773
6	75092	75073	5.984	.061		4.495	.046		3.545	-1.276	.649	34.739
7	75092	77628	5.561	.099		3.137	.056		4.428	.677	.366	24.025
8	75092	77616	5.530	.104		2.969	.056		4.522	.072	.331	23.268
9	75190	75231	5.502	.110		4.047	.081		3.382	.188	.622	30.791
10	75190	77695	5.761	.076		3.869	.051		3.996	-.403	.519	28.563
11	75190	77675	5.659	.086		3.557	.054		4.180	.416	.454	26.354
12	75190	77668	5.712	.080		4.151	.058		3.579	-.244	.607	31.357
13	75231	75235	5.892	.066		3.882	.044		4.169	.841	.499	28.644
14	75231	75267	5.403	.134		2.793	.069		4.496	1.177	.307	22.331
15	75231	75272	5.538	.103		2.784	.052		4.665	.239	.291	22.620
16	75231	75240	6.260	.050		3.502	.028		5.008	-.649	.360	26.917
17	75231	77769	5.677	.084		2.511	.037		4.997	-.106	.225	22.184
18	75231	77746	5.712	.080		3.068	.043		4.669	-1.382	.332	24.036
19	75231	77715	5.545	.102		3.053	.056		4.476	-2.338	.349	23.635
20	75231	77695	5.404	.134		2.913	.072		4.410	2.048	.334	22.782
21	75231	75190	5.502	.110		3.507	.070		4.016	.072	.467	25.932
22	75235	75267	5.607	.092		3.887	.064		3.751	1.442	.553	28.838
23	75235	75272	5.554	.100		3.198	.058		4.368	-.443	.381	24.289
24	75235	77769	5.469	.117		2.638	.056		4.680	-.516	.268	21.982
25	75235	75240	5.666	.085		2.975	.045		4.682	.392	.317	23.586
26	75235	75231	5.892	.066		3.852	.043		4.201	-.708	.492	28.423
27	75240	75231	6.260	.050		3.963	.031		4.596	.680	.461	29.327
28	75240	75235	5.666	.085		3.691	.055		4.054	-.007	.488	27.238
29	75240	75272	5.794	.073		3.534	.044		4.383	1.002	.428	26.351
30	75240	75281	5.665	.085		3.189	.048		4.517	-.089	.364	24.443
31	75240	77769	6.430	.045		3.945	.028		4.843	-1.209	.433	29.371
32	75240	77746	5.965	.062		3.627	.038		4.523	-.485	.425	27.062
33	75240	77715	5.495	.111		2.978	.060		4.472	.041	.338	23.230
34	75267	75272	5.658	.086		3.360	.051		4.363	-.319	.405	25.243
35	75267	77769	5.384	.140		2.881	.078		4.410	1.458	.320	22.616

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.32. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema REGENTE, tabla de errores de las observaciones y parámetros de redundancia

Al final de esta tabla, observamos que la fiabilidad media de la red es 0,324. Lo cual indica que es una fiabilidad aceptable.

En estos ficheros (fig. 6.33), WGS84.GEO y WGS84a.UTM respectivamente, se muestran las coordenadas geodésicas y en UTM compensadas de la ROI en el sistema REGENTE, $(x, y)_{WGS-84}$.

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75351	-5.59581808	39.01329415	378.142	LA MORRA	
75320	-6.06085376	39.00127045	326.117	GUADALPERAL	
75411	-5.48186825	39.01058257	356.039	BARCA	
77918	-5.48044864	38.58134329	377.213	SILO DE VILLANUEVA	
77898	-5.51440357	38.57595929	362.971	SILO DON BENITO	
77868	-5.57160447	38.58365318	417.068	REMONGO	
77874	-5.56596526	38.54477242	341.334	LA JARILLA	
77857	-6.00368218	38.57137386	446.273	SIERRA DE YELBES	
77826	-6.06495833	38.56055493	303.099	EL GUIJO	
77809	-6.10049047	38.59153132	418.709	GUIJARRO BLANCO	
77844	-6.01578884	38.54430343	322.683	LA ATALAYA	
77892	-5.52413969	38.52202001	712.262	HORTIGA	
75430	-5.44540895	39.00304817	407.658	TAMBORRIO	
77958	-5.40397799	38.58231165	373.514	ENCINA GRANDE	
77946	-5.43007581	38.56012310	387.427	JALIAS	
77933	-5.44174945	38.53447061	614.908	MAGACELA	
75452	-5.40373581	39.02189054	358.061	LA LOMA	
77900	-5.49089079	38.50181524	464.302	CANADA GIL	
77979	-5.36447398	38.59177167	426.011	PELADO	
77954	-5.39473779	38.54162395	445.342	PAERILLA	
77925	-5.47013484	38.54587407	421.457	GARZONA	
77851	-5.59203638	38.51495586	401.166	PEGOTES DE CAMARA	
77822	-6.05562761	38.52167391	351.228	LA ENCINA	
80458	-5.59124936	38.48528562	631.941	SIERRA MANCHITA	
77797	-6.12086794	38.57015583	391.372	LOS RETAMALES	
75281	-6.14332662	39.01105449	600.123	TERRERO	
77801	-6.10374702	38.51448502	319.275	MAJADA DE LAS CANA	
77746	-6.21588866	38.56548262	429.194	CARIJA	
77769	-6.18388734	38.58576831	396.154	LOS BARROS	
77941	-5.42369977	38.51253685	451.515	TORRALBAS	
80517	-5.47337751	38.47263638	719.836	CUEVA DEL CIERVO	
80503	-5.49048413	38.43100938	583.132	DEHESA	
80488	-5.53206075	38.48384534	590.034	LAPA	
75475	-5.35100697	39.05134151	366.135	LEGIO	
75463	-5.37357153	39.03062385	390.720	MESAS ALTAS	
75490	-5.32149422	39.00462318	456.790	SILO DE ORELLANA	
77975	-5.35137039	38.55160214	437.112	HERRADON	
80579	-5.36123609	38.49426596	507.896	HONTANILLAS	
80568	-5.39043561	38.48366103	501.320	CENSO	
80533	-5.44331398	38.43550185	693.266	AGALLA	
75502	-5.30423421	39.02239566	776.855	SIERRA MORENA	
75512	-5.27391218	39.02330560	750.930	REPICA	
77996	-5.31307561	38.56299161	442.942	CABEZA PELADA	
80475	-5.52222222	38.45212222	655.066	LA UTRERA	

Para obtener Ayuda, presione F1

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75351	240338.105	4323923.451	378.142	LA MORRA	
75320	231345.999	4321748.309	326.117	GUADALPERAL	
75411	257135.925	4322550.312	356.039	BARCA	
77918	257313.729	4317224.397	377.213	SILO DE VILLANUEVA	
77898	252015.873	4316962.057	362.971	SILO DON BENITO	
77868	244061.013	4318356.355	417.068	REMONGO	
77874	244227.016	4311288.582	341.334	LA JARILLA	
77857	239144.293	4315961.859	446.273	SIERRA DE YELBES	
77826	230097.732	4314161.093	303.099	EL GUIJO	
77809	225597.460	4320174.686	418.709	GUIJARRO BLANCO	
77844	237037.824	4311379.797	322.683	LA ATALAYA	
77892	250304.614	4306541.045	712.262	HORTIGA	
75430	262024.065	4321310.291	407.658	TAMBORRIO	
77958	268026.191	4317200.852	373.514	ENCINA GRANDE	
77946	264502.615	4312926.725	387.427	JALIAS	
77933	262528.224	4308772.667	614.908	MAGACELA	
75452	268298.427	4324469.073	358.061	LA LOMA	
77900	255309.948	4302618.063	464.302	CANADA GIL	
77979	273731.403	4318719.912	426.011	PELADO	
77954	269064.875	4309552.134	445.342	PAERILLA	
77925	258649.955	4311174.891	421.457	GARZONA	
77851	240657.271	4305905.531	401.166	PEGOTES DE CAMARA	
77822	231141.638	4307062.085	351.228	LA ENCINA	
80458	240668.711	4300450.970	631.941	SIERRA MANCHITA	
77797	222473.660	4316154.606	391.372	LOS RETAMALES	
75281	219265.935	4323955.479	600.123	TERRERO	
77801	224329.341	4306312.005	319.275	MAJADA DE LAS CANA	
77746	208254.738	4316459.698	429.194	CARIJA	
77769	213208.735	4320071.495	396.154	LOS BARROS	
77941	264821.983	4304404.260	451.515	TORRALBAS	
80517	257442.042	4297250.925	719.836	CUEVA DEL CIERVO	
80503	255001.122	4289417.032	583.132	DEHESA	
80488	249143.120	4299733.828	590.034	LAPA	
75475	276321.382	4329621.759	366.135	LEGIO	
75463	272708.305	4325801.046	390.720	MESAS ALTAS	
75490	280299.481	4321265.291	456.790	SILO DE ORELLANA	
77975	275710.256	4311205.455	437.112	HERRADON	
80579	274004.177	4300967.657	507.896	HONTANILLAS	
80568	269797.111	4299050.602	501.320	CENSO	
80533	261605.362	4290602.777	693.266	AGALLA	
75502	282610.091	4324216.484	776.855	SIERRA MORENA	
75512	287023.116	4324376.544	750.930	REPICA	
77996	281143.103	4313333.118	442.942	CABEZA PELADA	
80475	244422.122	4304110.322	655.066	LA UTRERA	

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.33. Fichero de las coordenadas compensadas de la ROI en el sistema REGENTE

Siguiendo con los objetivos de la investigación surge, un interrogante, ¿será necesario REGENTE para tener a ROI en WGS-84?, para dar respuesta a esta pregunta, comparamos las coordenadas geodésicas de regente con las de la red de primer orden, es decir, REGENTE y ED50, mediante una transformación de Helmert bidimensional y un análisis de residuales, para obtener el análisis de precisión y fiabilidad. Primero teniendo las coordenadas UTM de ED50 y REGENTE (fig. 6.34, archivo HELMERT1 de la carpeta HELMERT), determinamos unos parámetros aproximados, realizando la media de los parámetros obtenidos con los puntos comunes. Estos parámetros aproximados (fig. 6.35) son:

$$\begin{aligned} \text{DELTA X (METROS)} = T_x &= -110.704 \\ \text{DELTA Y (METROS)} = T_y &= -204.54 \\ \text{ROTACION (GRADOS CENT.)} = w &= -.000846 \\ \text{ESCALA} = dL &= 0.999994 \end{aligned}$$

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75351	240447.476	4324129.272	324.180	LA MORRA	
75320	231455.285	4321954.043	272.054	GUADALPERAL	
75411	257245.500	4322756.212	302.481	BARCA	
77918	257423.341	4317430.246	323.793	SILO DE VILLANUEVA	
77898	252125.424	4317167.874	309.431	SILO DON BENITO	
77868	244170.465	4318562.138	363.316	REMONGO	
77874	244336.516	4311494.295	287.717	LA JARILLA	
77857	239253.701	4316167.587	392.460	SIERRA DE YELBES	
77826	230207.060	4314366.737	249.241	EL GUIJO	
77809	225706.693	4320380.356	364.552	GUIJARRO BLANCO	
77844	237147.238	4311585.464	268.966	LA ATALAYA	
77892	250414.224	4306746.745	658.992	HORTIGA	
75430	262133.700	4321516.200	354.206	TAMBORRIO	
77958	268135.896	4317406.760	320.267	ENCINA GRANDE	
77946	264612.310	4313132.599	334.257	JALIAS	
77933	262637.949	4308978.446	561.859	MAGACELA	
75452	268408.089	4324675.032	304.605	LA LOMA	
77900	255419.647	4302823.754	411.224	CANADA GIL	
77979	273841.142	4318925.857	372.787	PELADO	
77954	269174.651	4309757.976	392.308	PAERILLA	
77925	258759.610	4311380.692	368.229	GARZONA	
77851	240766.771	4306111.171	347.658	PEGOTES DE CAMARA	
77822	231251.029	4307267.675	297.620	LA ENCINA	
80458	240778.251	4300656.559	578.623	SIERRA MANCHITA	
77797	222582.896	4316360.206	337.262	LOS RETAMALES	
75281	219375.070	4324161.128	545.654	TERRERO	
77801	224438.671	4306517.544	265.571	MAJADA DE LAS CANAS	
77746	208363.811	4316665.110	374.695	CARIJA	
77769	213317.839	4320277.042	341.770	LOS BARROS	
77941	264931.757	4304610.032	398.549	TORRALBAS	
80517	257551.806	4297456.583	666.917	CUEVA DEL CIERVO	
80503	255110.933	4289622.607	530.391	DEHESA	
80488	249252.773	4299939.458	536.898	LAPA	
75475	276431.071	4329827.793	312.606	LEGIO	
75463	272817.995	4326007.035	337.281	MESAS ALTAS	
75490	280409.251	4321471.289	403.602	SILO DE ORELLANA	
77975	275820.073	4311411.345	384.150	HERRADON	
80579	274114.063	4301173.475	455.203	HONTANILLAS	
80568	269906.969	4299256.363	448.558	CENSO	
80533	261715.232	4290808.417	640.597	AGALLA	
75502	282719.853	4324422.500	723.572	SIERRA MORENA	
75512	287132.826	4324582.588	697.670	REPICA	
77996	281252.916	4313539.047	389.988	CABEZA PELADA	
80425	244526.220	4304325.220	612.012	LA UTRERA	

Para obtener Ayuda, presione F1

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75351	240338.105	4323923.451	378.068	LA MORRA	
75320	231345.999	4321748.309	325.972	GUADALPERAL	
75411	257135.925	4322550.312	356.379	BARCA	
77918	257313.729	4317224.397	377.668	SILO DE VILLANUEVA	
77898	252015.873	4316962.057	363.319	SILO DON BENITO	
77868	244061.013	4318356.355	417.170	REMONGO	
77874	244227.016	4311288.582	341.507	LA JARILLA	
77857	239144.293	4315961.859	446.297	SIERRA DE YELBES	
77826	230097.732	4314161.093	303.101	EL GUIJO	
77809	225597.460	4320174.686	418.356	GUIJARRO BLANCO	
77844	237037.824	4311379.797	322.683	LA ATALAYA	
77892	250304.614	4306541.045	712.951	HORTIGA	
75430	262024.065	4321310.291	408.103	TAMBORRIO	
77958	268026.191	4317200.852	374.109	ENCINA GRANDE	
77946	264502.615	4312926.725	388.051	JALIAS	
77933	262528.224	4308772.667	615.626	MAGACELA	
75452	268298.427	4324469.073	358.523	LA LOMA	
77900	255309.948	4302618.063	465.136	CANADA GIL	
77979	273731.403	4318719.912	426.636	PELADO	
77954	269064.875	4309552.134	446.091	PAERILLA	
77925	258649.955	4311174.891	422.077	GARZONA	
77851	240657.271	4305905.531	401.503	PEGOTES DE CAMARA	
77822	231141.638	4307062.085	351.560	LA ENCINA	
80458	240668.711	4300450.970	632.630	SIERRA MANCHITA	
77797	222473.660	4316154.606	391.094	LOS RETAMALES	
75281	219265.935	4323955.479	599.392	TERRERO	
77801	224329.341	4306312.005	319.540	MAJADA DE LAS CANA	
77746	208254.738	4316459.698	428.672	CARIJA	
77769	213208.735	4320071.495	395.593	LOS BARROS	
77941	264821.983	4304404.260	452.374	TORRALBAS	
80517	257442.042	4297250.925	720.905	CUEVA DEL CIERVO	
80503	255001.122	4289417.032	584.521	DEHESA	
80488	249143.120	4299733.828	590.926	LAPA	
75475	276321.382	4329621.759	366.516	LEGIO	
75463	272708.305	4325801.046	391.184	MESAS ALTAS	
75490	280299.481	4321265.291	457.425	SILO DE ORELLANA	
77975	275710.256	4311205.455	437.928	HERRADON	
80579	274004.177	4300967.657	508.949	HONTANILLAS	
80568	269797.111	4299050.602	502.362	CENSO	
80533	261605.362	4290602.777	694.654	AGALLA	
75502	282610.091	4324216.484	777.409	SIERRA MORENA	
75512	287023.116	4324376.544	751.494	REPICA	
77996	281143.103	4313333.118	443.779	CABEZA PELADA	
80425	244422.120	4304310.220	622.046	LA UTRERA	

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.34. Coordenadas (x, y) de ED-50 y REGENTE respectivamente

HELMERT1 - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

TRANSFORMACION BIDIMENSIONAL ENTRE ED-50 Y WGS-84 PARA EL BLOQUE DE LA ROI SUROESTE.

RESULTADOS APROXIMADOS DE LA TRANSFORMACION

DELTA X (METROS) : -110.704

DELTA Y (METROS) : -204.545

ROTACION (GRADOS CENT.) : -.000846

ESCALA : .999994

PUNTOS COMUNES A AMBOS SISTEMAS (despues de la transformacion aproximada)

NOMBRE	NUMERO	X	Y	X	Y	DIF. X	DIF. Y
PUNTOS FIJOS							
LA MORRA	75351	240338.105	4323923.451	240338.576	4323923.800	-.471	-.349
GUADALPERAL	75320	231345.999	4321748.309	231346.411	4321748.704	-.412	-.395
BARCA	75411	257135.925	4322550.312	257136.478	4322550.525	-.553	-.213
SILO DE VILLANUEVA	77918	257313.729	4317224.397	257314.247	4317224.590	-.518	-.193
SILO DON BENITO	77898	252015.873	4316962.057	252016.359	4316962.290	-.486	-.233
REMONGO	77868	244061.013	4318356.355	244061.468	4318356.651	-.455	-.296
LA JARILLA	77874	244227.016	4311288.582	244227.424	4311288.849	-.408	-.267
SIERRA DE YELBES	77857	239144.293	4315961.859	239144.702	4315962.180	-.409	-.321
EL GUIJO	77826	230097.732	4314161.093	230098.093	4314161.462	-.361	-.369
GUIJARRO BLANCO	77809	225597.460	4320174.686	225597.834	4320175.103	-.374	-.417
LA ATALAYA	77844	237037.824	4311379.797	237038.191	4311380.113	-.367	-.316
HORTIGA	77892	250304.614	4306541.045	250305.031	4306541.248	-.417	-.203
TAMBORRIO	75430	262024.065	4321310.291	262024.631	4321310.456	-.566	-.165
ENCINA GRANDE	77958	268026.191	4317200.852	268026.736	4317200.962	-.545	-.110
JALIAS	77946	264502.615	4312926.725	264503.114	4312926.874	-.499	-.149
HAGACELA	77933	262528.224	4308772.667	262528.710	4308772.773	-.486	-.106
LA LOMA	75452	268298.427	4324469.073	268299.024	4324469.185	-.597	-.112
CANADA GIL	77900	255309.948	4302618.063	255310.371	4302618.214	-.423	-.151
PELADO	77979	273731.403	4318719.912	273731.967	4318719.973	-.564	-.061
NAERTIA	77954	260064.875	4300552.134	260065.382	4300552.211	-.508	-.077

Para obtener Ayuda, presione F1

MAY

Figura 6.35. Puntos comunes a ambos sistemas

Con estos parámetros aproximados, calculamos unas nuevas coordenadas transformadas de los puntos comunes, determinando los residuos o diferencias con las coordenadas reales. Esto nos da una idea, de la garantía de nuestros datos, detectando errores groseros (fig. 6.35). Una vez realizada esta comprobación, determinamos la transformación de Helmert bidimensional, aplicando el método de MM.CC., llevando el origen de la transformación al baricentro de la zona de trabajo, es decir, baricentro de la figura de la zona suroeste peninsular. Las coordenadas del baricentro son:

X: 234663.824

Y: 4185663.942

Los parámetros determinados en la transformación son:

$T_x = -110.704$ E.M.C. : .011

$T_y = -204.545$ E.M.C. : .011
 $w = -.0008$ E.M.C. : .0000
 $dL = 0.999991$ E.M.C. : .000000

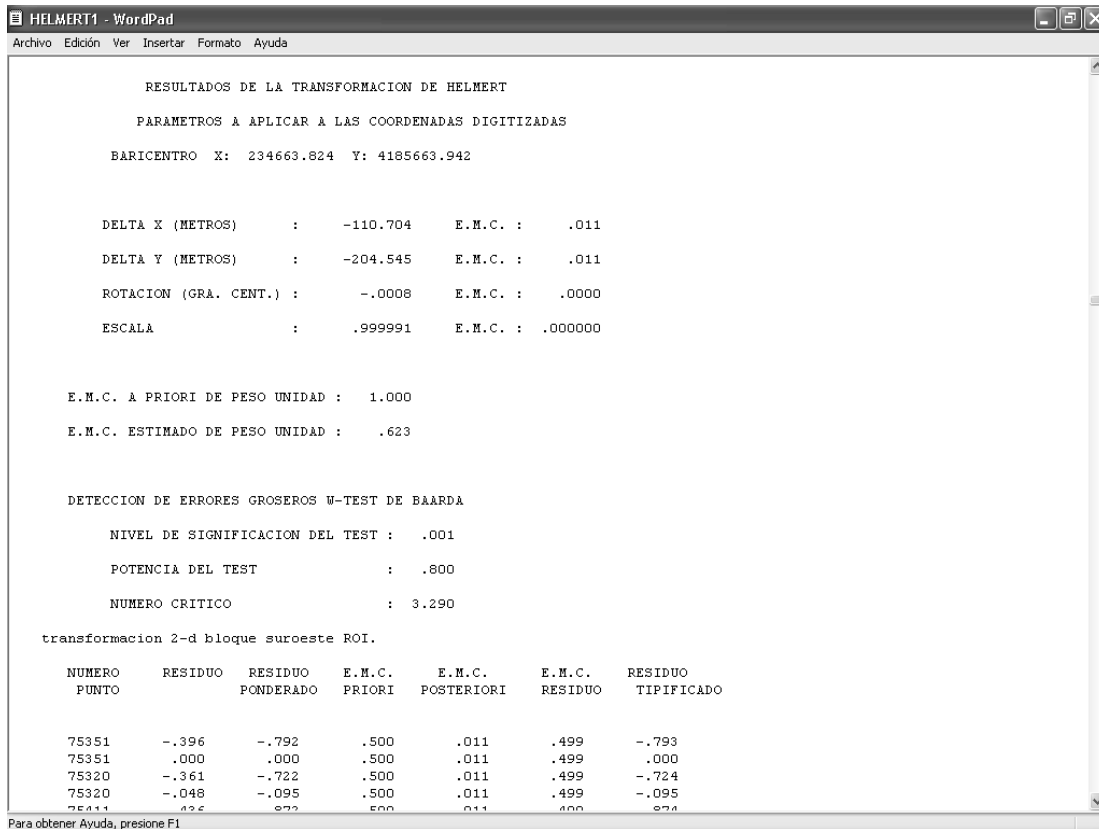


Figura 6.36. Resultados e la transformación de Helmert

Observamos que los parámetros obtenidos después del ajuste, son idénticos a los aproximados. A continuación se realizó una detección de errores groseros mediante el w-test de Baarda, determinando los residuos tipificados y eliminando aquellos posibles puntos cuyo residuo tipificado excediera 3,290. Afortunadamente ninguno sobrepasó este parámetro. Y el error medio cuadrático de peso estimado fue inferior al error medio cuadrático a priori, lo que nos proporciona una buena precisión del resultado. La media valor absoluto de residuos en x es igual a 0.204 y la media valor absoluto de residuos en y es igual a 0.236.

Una vez resuelta la pregunta anterior, procedemos a realizar la compensación alimétrica, para obtener las cotas ortométricas ROI, tomando como

referencia la Red de Nivelación de Alta Precisión (NAP), y a través de los ángulos cenitales observados, igualmente observándose su precisión y fiabilidad. Los datos de los que partimos son los del archivo WGS84.GEO, presente en la carpeta WGS84, y se refiere a las coordenadas geodésicas de ROI tomando como fijos los puntos de REGENTE, así de esta manera, vemos a continuación los resultados de la compensación.

ID	X	Y	Z	Nombre
75351	-5.59581650	39.01329412	324.180	LA MORRA
75320	-6.06085232	39.00127057	272.054	GUADALPERAL
75411	-5.48186648	39.01058215	302.481	BARCA
77918	-5.48044701	38.58134284	323.793	SILO DE VILLANUEVA
77898	-5.51440202	38.57595896	309.431	SILO DON BENITO
77868	-5.57160298	38.58365303	363.316	REMONGO
77874	-5.56596394	38.54477223	287.717	LA JARILLA
77857	-6.00368082	38.57137380	392.460	SIERRA DE YELBES
77826	-6.06495707	38.56055502	249.241	EL GUIJO
77809	-6.10048913	38.59153151	364.552	GUIJARRO BLANCO
77844	-6.01578885	38.54430343	322.683	LA ATALAYA
77892	-5.52413838	38.52201967	658.992	HORTIGA
75430	-5.44540718	39.00304762	354.206	TAMBORRIO
77958	-5.40397635	38.58231096	320.267	ENCINA GRANDE
77946	-5.43007581	38.56012310	388.051	JALIAS
77933	-5.44174798	38.53446996	561.859	MAGACELA
75452	-5.40373398	39.02188980	304.605	LA LOMA
77900	-5.49088949	38.50181477	411.224	CANADA GIL
77979	-5.36447232	38.59177082	372.787	PELADO
77954	-5.39473630	38.54162322	392.308	PAERILLA
77925	-5.47013339	38.54587358	368.229	GARZONA
77851	-5.59203522	38.51495573	347.658	PEGOTES DE CAMARA
77822	-6.05562650	38.52167398	297.620	LA ENCINA
80458	-5.59124831	38.48528548	578.623	SIERRA MANCHITA
77797	-6.12086669	38.57015603	337.262	LOS RETAMALES
75281	-6.14332526	39.01105476	545.654	TERRERO
77801	-6.10374596	38.51448522	265.571	MAJADA DE LAS CANAS
77746	-6.21588755	38.56548278	374.695	CARIJA
77769	-6.18388610	38.58576861	341.770	LOS BARROS
77941	-5.42369841	38.51253621	398.549	TORRALBAS
80517	-5.47337630	38.47263587	666.917	CUEVA DEL CIERVO
80503	-5.49048305	38.43100892	530.391	DEHESA
80488	-5.53205957	38.48384501	536.898	LAPA
75475	-5.35100504	39.05134054	312.606	LEGIO
75463	-5.37356967	39.03062299	337.281	MESAS ALTAS
75490	-5.32149254	39.00462216	403.602	SILO DE ORELLANA
77975	-5.35136888	38.55160124	384.150	HERRADON
80579	-5.36123477	38.49426518	455.203	HONTANILLAS
80568	-5.39043435	38.48366030	448.558	CENSO
80533	-5.44331283	38.43550130	640.597	AGALLA
75502	-5.30423249	39.02239452	723.572	SIERRA MORENA
75512	-5.27391082	39.02330436	697.670	REPICA
77996	-5.31307419	38.56299055	389.988	CABEZA PELADA
80475	-5.52272002	38.48217216	612.012	LA HERRERA

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.37. Fichero con los datos de partida para el ajuste altimétrico

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

PROGRAMA ALTIM2 DE COMPENSACION DE REDES DE NIVELACION TRIGONOMETRICA POR VARIACION DE COORDENADAS

ERROR KILOMETRICO : .050

ELIPSOIDE UGS-84

EXCENTRICIDAD = 0.006694380029
SEMIEJE MAYOR = 6378137 metros

PARAMETROS DEL W-TEST DE BAARDA

NIVEL DE SIGNIFICACION DEL W-TEST : .001
POTENCIA DEL W-TEST : .800
NUMERO CRITICO DETECCION DE ERRORES GROSEROS : 3.290

ajuste bloque suroeste de tercer orden

T A B L A D E V E R T I C E S *** H O J A 1

DESIGNACION DEL VERTICE N O M B R E	NUMERO DE ORDEN	X	Y	ALTITUD		
LA MORRA	1	75351	240338.106	4323923.449	324.180	
GUADALPERAL	2	75320	750920.717	4321163.393	272.054	
BARCA	3	75411	257135.927	4322550.310	302.481	
SILO DE VILLANUEVA	4	77918	257313.731	4317224.396	323.793	
SILO DON BENITO	5	77898	252015.874	4316962.057	309.431	
REMONGO	6	77868	244061.014	4318356.353	363.316	
LA JARILLA	7	77874	244227.017	4311288.580	287.717	
SIERRA DE YELBES	8	77857	759082.673	4315903.439	392.460	
EL GUIJO	9	77826	750174.851	4313511.364	249.241	
GUIJARRO BLANCO	10	77809	745289.191	4319214.737	364.552	
LA ATALAYA	11	77844	757282.294	4311192.820	322.683	PUNTO FIJO
HORTIGA	12	77892	250304.615	4306541.044	658.992	
TAMBORRIO	13	75430	262024.066	4321310.290	354.206	
ENCINA GRANDE	14	77958	268026.193	4317200.851	320.267	
JALIAS	15	77946	264502.616	4312926.724	388.051	PUNTO FIJO
MAGACELA	16	77933	262528.225	4308772.667	561.859	
LA TORRE	17	75450	262228.225	4308772.667	561.859	

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.38. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de vértices

Como se puede observar en la figura 6.38, el ajuste altimétrico inicia con unos datos básicos para el cálculo, como son, el error kilométrico del orden de 0,05 metros por kilómetro, las características del elipsoide internacional de Hayford y los parámetros de w-test e Baarda.

ALTIHC - WordPad
 Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

T A B L A D E O B S E R V A C I O N E S * HOJA 1							
NUMERO	NPE	NPV	OBSERVACION	ALTI	AM	PESO	CLASE
1	75073	77569	14.689	.000	.000	4.276	1
2	75073	75092	28.939	.000	.000	4.402	1
3	75092	77609	-7.852	.000	.000	4.502	1
4	75092	77569	-14.081	.000	.000	3.892	1
5	75092	77628	-36.699	.000	.000	3.726	1
6	75190	77695	-5.312	.000	.000	4.088	1
7	75190	77675	11.586	.000	.000	3.916	1
8	75190	77668	-19.198	.000	.000	4.008	1
*** 9	ERROR	**** SIN DATOS					
9	75231	75235	12.887	.000	.000	4.282	1
10	75231	75272	194.680	.000	.000	3.678	1
11	75231	75240	.941	.000	.000	4.709	1
12	75231	77769	26.136	.000	.000	3.948	1
13	75231	77746	59.384	.000	.000	4.008	1
14	75231	77715	-42.708	.000	.000	3.693	1
15	75235	75267	84.713	.000	.000	3.819	1
16	75235	75272	180.449	.000	.000	3.711	1
17	75235	75240	-12.408	.000	.000	3.928	1
18	75240	75272	193.172	.000	.000	4.141	1
19	75240	75281	228.295	.000	.000	3.927	1
20	75240	77769	24.669	.000	.000	4.867	1
21	75240	77746	57.858	.000	.000	4.379	1
22	75267	75272	96.621	.000	.000	3.915	1
23	75272	75281	36.291	.000	.000	5.067	1
24	75272	77769	-167.638	.000	.000	4.205	1
25	75281	77809	-181.156	.000	.000	4.242	1
26	75281	77769	-203.822	.000	.000	4.272	1
27	75320	75351	52.187	.000	.000	3.968	1
28	75320	77826	-22.951	.000	.000	4.191	1
29	75351	77868	39.079	.000	.000	4.360	1
30	75351	77857	68.336	.000	.000	4.135	1
31	75411	77918	21.284	.000	.000	4.642	1
32	75411	77898	6.945	.000	.000	4.208	1
33	75430	75452	-49.681	.000	.000	4.301	1
34	75430	77958	-33.940	.000	.000	4.258	1
35	75430	77946	-20.112	.000	.000	4.035	1
36	75430	77918	-30.343	.000	.000	4.448	1
37	75452	75463	32.652	.000	.000	4.824	1
38	75452	77920	22.817	.000	.000	4.122	1

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.39. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de observaciones

Al final de la tabla de observaciones, vemos los parámetros de la red:

NUMERO TOTAL DE VÉRTICES = 880
 NUMERO DE PUNTOS FIJOS = 90
 NUMERO TOTAL DE RELACIONES DE OBSERVACIÓN =2467
 ELEMENTOS DE LA MATRIZ NORMAL 19321

A continuación se muestra la relación completa de todos los residuos de las observaciones (figura 6.40), sin ponderar y ponderados, así como la raíz del peso a priori:

T A B L A D E R E S I D U O S * H O J A 1					
NUMERO DE OBSERVACION	PUNTO DE ESTACION	PUNTO VISADO	RESIDUO	RAIZ PESO A PRIORI	RESIDUO PONDERADO
1	75073	77569	-.0359	4.276	-.1534
2	75073	75092	.0338	4.402	.1490
3	75092	77609	-.0844	4.502	-.3799
4	75092	77569	-.0990	3.892	-.3852
5	75092	77628	.7200	3.726	2.6625
6	75190	77695	-.2344	4.088	-.9583
7	75190	77675	-.0979	3.916	-.3835
8	75190	77668	.3374	4.008	1.3521
9	75231	75235	-.0890	4.282	-.3611
10	75231	75272	.8319	3.678	3.0600
**** OBSERVACION RECHAZABLE ****					
11	75231	75240	-.1837	4.709	-.8652
12	75231	77769	.0030	3.948	.0119
13	75231	77746	.1717	4.008	.6883
14	75231	77715	-.6126	3.693	-2.2623
15	75235	75267	.8783	3.819	3.3544
**** OBSERVACION RECHAZABLE ****					
16	75235	75272	-.4243	3.711	-1.5743
17	75235	75240	-.5573	3.928	-2.1895
18	75240	75272	.4483	4.141	1.8562
19	75240	75281	-.5124	3.927	-2.0123
20	75240	77769	-.3398	4.867	-1.6536
21	75240	77746	-.2300	4.379	-1.0073
22	75267	75272	-.4177	3.915	-1.6353
23	75272	75281	.2072	5.067	1.0500
24	75272	77769	.0779	4.205	.3275
25	75281	77809	-.1203	4.242	-.5105
26	75281	77769	-.0229	4.272	-.0976
27	75320	75351	-.0901	3.968	-.3576
28	75320	77826	-.0808	4.191	-.3385
29	75351	77868	-.0223	4.360	-.0971
30	75351	77857	.1077	4.135	.4454
31	75411	77918	-.0040	4.642	-.0186
32	75411	77898	.0049	4.208	.0206
33	75430	75452	-.1005	4.301	-.4322
34	75430	77958	.0543	4.258	.2313
35	75430	77946	-.0595	4.035	-.2403
36	75430	77918	.0932	4.448	.4145

Figura 6.40. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de residuos

Y posteriormente aparecen los parámetros de error del ajuste:

ERROR MEDIO CUADRÁTICO A PRIORI	1.00
ERROR MEDIO CUADRÁTICO ESTIMADO	1.17
MEDIA DE RESIDUOS PONDERADOS	0.04
ERROR KILOMÉTRICO MEDIO	0.062

A continuación se observa en la figura 6.41, la compensación altimétrica, esto es, altitud compensada, error medio cuadrático y corrección respecto a las altitudes aproximadas dadas anteriormente:

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

"RESULTADOS DE LA COMPENSACION * HOJA 1

NOMBRE	NUMERO	ALTITUD	E. M. C.	CORRECCION
LA MORRA	75351	378.068	.086	53.888
GUADALPERAL	75320	325.972	.099	53.918
BARCA	75411	356.379	.094	53.898
SILO DE VILLANUEVA	77918	377.668	.066	53.875
SILO DON BENITO	77898	363.319	.065	53.888
REMONGO	77868	417.170	.072	53.854
LA JARILLA	77874	341.507	.060	53.790
SIERRA DE YELBES	77857	446.297	.057	53.837
EL GUIJO	77826	303.101	.057	53.860
GUIJARRO BLANCO	77809	418.356	.084	53.804
LA ATALAYA	77844	322.683		PUNTO FIJO
HORTIGA	77892	712.951	.072	53.959
TAMBORRIO	75430	408.103	.067	53.897
ENCINA GRANDE	77958	374.109	.060	53.842
JALIAS	77946	388.051		PUNTO FIJO
MAGACELA	77933	615.626	.053	53.767
LA LOMA	75452	358.523	.087	53.918
CANADA GIL	77900	465.136	.061	53.912
PELADO	77979	426.636	.072	53.849
PAERILLA	77954	446.091	.054	53.783
GARZONA	77925	422.077	.057	53.848
PEGOTES DE CAMARA	77851	401.503	.055	53.845
LA ENCINA	77822	351.560	.054	53.940
SIERRA MANCHITA	80458	632.630	.060	54.007
LOS RETAMALES	77797	391.094	.084	53.832
TERRERO	75281	599.392	.076	53.738
MAJADA DE LAS CANA	77801	319.540	.062	53.969
CARIJA	77746	428.672	.065	53.977
LOS BARROS	77769	395.593	.065	53.823
TORRALBAS	77941	452.374	.062	53.825
CUEVA DEL CIERVO	80517	720.905	.064	53.988
DEHESA	80503	584.521	.058	54.130
LAPA	80488	590.926	.066	54.028
LEGIO	75475	366.516	.102	53.910
MESAS ALTAS	75463	391.184	.089	53.903
SILO DE ORELLANA	75490	457.425	.086	53.823
HERRADON	77975	437.928	.067	53.778
WENTMILLAS	80570	608.040	.057	53.746

Para obtener Ayuda, presione F1

MAY

Figura 6.41. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, resultados de la compensación

En esta figura observamos el resultado de la compensación. Y la cota ortométrica ajustada. Al final de la tabla aparece el error medio cuadrático que fue de 0,062, que es muy bueno.

Por último se muestra la tabla de errores a priori y a posteriori, así como el error medio cuadrático de los residuos, residuo tipificado y los parámetros de redundancia para la compensación altimétrica:

ALTIMC - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

TABLA DE ERRORES Y REDUNDANCIAS DE LAS OBSERVACIONES * HOJA 1

N.OBS	NPE	NPV	DESNIVEL COMPENSADO	E.M.C. PRIORI	E.M.C. POSTERIORI	RESIDUO TIPIFICADO	E.M.C. RESIDUO	FIABILIDAD QB	SB
1	75073	77569	14.725	.234	.215	-.249	.144	.621	1.030
2	75073	75092	28.905	.227	.213	.249	.136	.642	1.047
3	75092	77609	-7.936	.222	.151	.467	.181	.338	.546
4	75092	77569	-14.180	.257	.195	.508	.195	.424	.758
5	75092	77628	-37.419	.268	.134	2.965	.243	.182	.435
6	75190	77695	-5.077	.245	.209	-1.402	.167	.533	.898
7	75190	77675	11.684	.255	.199	-.515	.190	.446	.788
8	75190	77668	-19.535	.249	.202	1.873	.180	.479	.823
9	75231	75235	12.976	.234	.174	-.495	.180	.408	.667
10	75231	75272	193.848	.272	.161	3.547	.235	.256	.548
11	75231	75240	1.125	.212	.149	-1.081	.170	.359	.547
12	75231	77769	26.133	.253	.155	.014	.216	.273	.534
13	75231	77746	59.212	.249	.160	.823	.209	.301	.563
14	75231	77715	-42.096	.271	.185	-2.786	.220	.341	.670
15	75235	75267	83.834	.262	.185	4.216	.208	.367	.686
16	75235	75272	180.873	.269	.179	-1.912	.222	.322	.639
17	75235	75240	-11.851	.255	.175	-2.709	.206	.347	.638
18	75240	75272	192.724	.242	.150	2.195	.204	.285	.524
19	75240	75281	228.808	.255	.170	-2.452	.209	.326	.610
20	75240	77769	25.008	.205	.143	-2.056	.165	.353	.523
21	75240	77746	58.088	.228	.158	-1.249	.184	.349	.576
22	75267	75272	97.038	.255	.166	-1.968	.212	.309	.588
23	75272	75281	36.084	.197	.161	1.471	.141	.490	.666
24	75272	77769	-167.715	.238	.150	.389	.200	.291	.524
25	75281	77809	-181.036	.236	.203	-.757	.159	.546	.889
26	75281	77769	-203.799	.234	.163	-.122	.188	.357	.600
27	75320	75351	52.097	.252	.234	.589	.153	.632	1.136
28	75320	77826	-22.871	.239	.228	-.589	.137	.670	1.170
29	75351	77868	39.101	.229	.198	-.144	.155	.544	.863
30	75351	77857	68.228	.242	.194	.613	.176	.472	.787
31	75411	77918	21.288	.215	.200	-.031	.131	.630	.966
32	75411	77898	6.940	.238	.206	.031	.160	.549	.902
33	75430	75452	-49.580	.233	.205	-.660	.152	.572	.924
34	75430	77958	-33.995	.235	.177	.303	.179	.418	.684
35	75430	77946	-20.052	.248	.168	-.295	.202	.336	.606
36	75430	77918	-30.436	.225	.188	.592	.157	.510	.790
37	75452	75463	22.661	.207	.187	.066	.123	.505	.866

Para obtener Ayuda, presione F1

MAY

Figura 6.42. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, tabla de errores y redundancias de las observaciones

De estos valores (fig. 6.42) se obtiene la fiabilidad de la red que es de 0,319. La cual es buena.

En estos ficheros (fig. 6.43), COORGEOSAL respectivamente, se muestran las coordenadas geodésicas compensadas de la ROI en el sistema REGENTE, $(\phi, \lambda, H)_{WGS-84}$.

Archivo	Edición	Ver	Insertar	Formato	Ayuda
75351	-5.59581808	39.01329415	378.068	LA MORRA	
75320	-6.06085376	39.00127045	325.972	GUADALPERAL	
75411	-5.48186825	39.01058257	356.379	BARCA	
77918	-5.48044864	38.58134329	377.668	SILO DE VILLANUEVA	
77898	-5.51440357	38.57595929	363.319	SILO DON BENITO	
77868	-5.57160447	38.58365318	417.170	REMONGO	
77874	-5.56596526	38.54477242	341.507	LA JARILLA	
77857	-6.00368218	38.57137386	446.297	SIERRA DE YELBES	
77826	-6.06495833	38.56055493	303.101	EL GUIJO	
77809	-6.10049047	38.59153132	418.356	GUIJARRO BLANCO	
77844	-6.01578884	38.54430343	322.683	LA ATALAYA	
77892	-5.52413969	38.52202001	712.951	HORTIGA	
75430	-5.44540895	39.00304817	408.103	TAMBORRIO	
77958	-5.40397799	38.58231165	374.109	ENCINA GRANDE	
77946	-5.43007581	38.56012310	388.051	JALIAS	
77933	-5.44174945	38.53447061	615.626	MAGACELA	
75452	-5.40373581	39.02189054	358.523	LA LOMA	
77900	-5.49089079	38.50181524	465.136	CANADA GIL	
77979	-5.36447398	38.59177167	426.636	PELADO	
77954	-5.39473779	38.54162395	446.091	PAERILLA	
77925	-5.47013484	38.54587407	422.077	GARZONA	
77851	-5.59203638	38.51495586	401.503	PEGOTES DE CAMARA	
77822	-6.05562761	38.52167391	351.560	LA ENCINA	
80458	-5.59124936	38.48528562	632.630	SIERRA MANCHITA	
77797	-6.12086794	38.57015583	391.094	LOS RETAMALES	
75281	-6.14332662	39.01105449	599.392	TERRERO	
77801	-6.10374702	38.51448502	319.540	MAJADA DE LAS CANA	
77746	-6.21588866	38.56548262	428.672	CARIJA	
77769	-6.18388734	38.58576831	395.593	LOS BARROS	
77941	-5.42369977	38.51253685	452.374	TORRALBAS	
80517	-5.47337751	38.47263638	720.905	CUEVA DEL CIERVO	
80503	-5.49048413	38.43100938	584.521	DEHESA	
80488	-5.53206075	38.48384534	590.926	LAPA	
75475	-5.35100697	39.05134151	366.516	LEGIO	
75463	-5.37357153	39.03062385	391.184	MESAS ALTAS	
75490	-5.32149422	39.00462318	457.425	SILO DE ORELLANA	
77975	-5.35137039	38.55160214	437.928	HERRADON	
80579	-5.36123609	38.49426596	508.949	HONTANILLAS	
80568	-5.39043561	38.48366103	502.362	CENSO	
80533	-5.44331398	38.43550185	694.654	AGALLA	
75502	-5.30423421	39.02239566	777.409	SIERRA MORENA	
75512	-5.27391218	39.02330560	751.494	REPICA	
77996	-5.31307561	38.56299161	443.779	CABEZA PELADA	
80475	-5.52222003	38.45212241	652.045	LA UTRERA	

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.43. Fichero de la compensación de la ROI en el sistema RNAP, cotas ortométricas H de ROI

Ahora para determinar las alturas elipsoidales en todos los puntos de ROI, a partir de REGENTE (h elipsoidales en WGS-84) y de IBERGEO 95 (geoide gravimétrico; Ng), para esto tenemos el archivo ALTIM.OBS (esta en la carpeta WGS84), el cual consiste en las diferencias ortométricas deducidas de los ángulos cenitales:

$$\Delta H_{ij} = H_j - H_i$$

De esta manera, podemos obtener las diferencias de altitudes elipsoidales desarrollando la siguiente expresión:

$$\Delta h_{ij} = h_j - h_i = (H_j + N_j) - (H_i + N_i) = \Delta H_{ij} + \Delta N_{ij}$$

De donde ΔN_{ij} se ha deducido de IBERGEO 95. Las alturas elipsoidales quedan registradas en el archivo ALTIM.ELI (esta en la carpeta WGS84).

ALTIM - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

75073	77569	14.6892	.000	.000	1.00000	1
75073	75092	28.9785	.000	.000	1.00000	1
75092	77609	-7.8220	.000	.000	1.00000	1
75092	77569	-14.1206	.000	.000	1.00000	1
75092	77628	-36.6186	.000	.000	1.00000	1
75190	77695	-5.2619	.000	.000	1.00000	1
75190	77675	11.5860	.000	.000	1.00000	1
75190	77668	-19.2477	.000	.000	1.00000	1
75215	75235	-3.2207	.000	.000	1.00000	1
75231	75235	12.8566	.000	.000	1.00000	1
75231	75272	194.7603	.000	.000	1.00000	1
75231	75240	.9808	.000	.000	1.00000	1
75231	77769	26.2259	.000	.000	1.00000	1
75231	77746	59.4441	.000	.000	1.00000	1
75231	77715	-42.6981	.000	.000	1.00000	1
75235	75267	84.7727	.000	.000	1.00000	1
75235	75272	180.5585	.000	.000	1.00000	1
75235	75240	-12.3384	.000	.000	1.00000	1
75240	75272	193.2121	.000	.000	1.00000	1
75240	75281	228.3654	.000	.000	1.00000	1
75240	77769	24.7186	.000	.000	1.00000	1
75240	77746	57.8778	.000	.000	1.00000	1
75267	75272	96.6706	.000	.000	1.00000	1
75272	75281	36.3212	.000	.000	1.00000	1
75272	77769	-167.6276	.000	.000	1.00000	1
75281	77809	-181.0763	.000	.000	1.00000	1
75281	77769	-203.8423	.000	.000	1.00000	1
75320	75351	52.2467	.000	.000	1.00000	1
75320	77826	-22.9213	.000	.000	1.00000	1
75351	77868	39.1492	.000	.000	1.00000	1
75351	77857	68.3761	.000	.000	1.00000	1
75411	77918	21.3244	.000	.000	1.00000	1
75411	77898	6.9346	.000	.000	1.00000	1
75430	75452	-49.6509	.000	.000	1.00000	1
75430	77958	-33.8603	.000	.000	1.00000	1
75430	77946	-20.0420	.000	.000	1.00000	1
75430	77918	-30.3626	.000	.000	1.00000	1
75452	75463	32.6922	.000	.000	1.00000	1
75452	77979	68.1075	.000	.000	1.00000	1
75463	75490	66.2699	.000	.000	1.00000	1
75463	77979	35.4312	.000	.000	1.00000	1
75463	75475	-24.5544	.000	.000	1.00000	1
75475	75502	410.8546	.000	.000	1.00000	1
75475	75490	81.2802	.000	.000	1.00000	1

Para obtener Ayuda, presione F1

ALTIM - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

75073	77569	14.6892	.000	.000	1.00000	1
75073	75092	28.9385	.000	.000	1.00000	1
75092	77609	-7.8520	.000	.000	1.00000	1
75092	77569	-14.0806	.000	.000	1.00000	1
75092	77628	-36.6986	.000	.000	1.00000	1
75190	77695	-5.3119	.000	.000	1.00000	1
75190	77675	11.5860	.000	.000	1.00000	1
75190	77668	-19.1977	.000	.000	1.00000	1
75215	75235	-3.2707	.000	.000	1.00000	1
75231	75235	12.8866	.000	.000	1.00000	1
75231	75272	194.6803	.000	.000	1.00000	1
75231	75240	.9408	.000	.000	1.00000	1
75231	77769	26.1359	.000	.000	1.00000	1
75231	77746	59.3841	.000	.000	1.00000	1
75231	77715	-42.7081	.000	.000	1.00000	1
75235	75267	84.7127	.000	.000	1.00000	1
75235	75272	180.4485	.000	.000	1.00000	1
75235	75240	-12.4084	.000	.000	1.00000	1
75240	75272	193.1721	.000	.000	1.00000	1
75240	75281	228.2954	.000	.000	1.00000	1
75240	77769	24.6686	.000	.000	1.00000	1
75240	77746	57.8578	.000	.000	1.00000	1
75267	75272	96.6206	.000	.000	1.00000	1
75272	75281	36.2912	.000	.000	1.00000	1
75272	77769	-167.6376	.000	.000	1.00000	1
75281	77809	-181.1563	.000	.000	1.00000	1
75281	77769	-203.8223	.000	.000	1.00000	1
75320	75351	52.1867	.000	.000	1.00000	1
75320	77826	-22.9513	.000	.000	1.00000	1
75351	77868	39.0792	.000	.000	1.00000	1
75351	77857	68.3361	.000	.000	1.00000	1
75411	77918	21.2844	.000	.000	1.00000	1
75411	77898	6.9446	.000	.000	1.00000	1
75430	75452	-49.6809	.000	.000	1.00000	1
75430	77958	-33.9403	.000	.000	1.00000	1
75430	77946	-20.1120	.000	.000	1.00000	1
75430	77918	-30.3426	.000	.000	1.00000	1
75452	75463	32.6522	.000	.000	1.00000	1
75452	77979	68.0175	.000	.000	1.00000	1
75463	75490	66.1699	.000	.000	1.00000	1
75463	77979	35.3812	.000	.000	1.00000	1
75463	75475	-24.5644	.000	.000	1.00000	1
75475	75502	410.7646	.000	.000	1.00000	1
75475	75490	81.1802	.000	.000	1.00000	1

Para obtener Ayuda, presione F1

Figura 6.44. Ficheros ALTIM.OBS y ALTIM.ELI, respectivamente

Tenemos altitudes ortométricas y elipsoidales en todos los vértices de ROI, a partir de RNAP, REGENTE y IBERGEO95 (en forma relativa ΔN), entonces podemos obtener ondulaciones del geoide N en toda la ROI:

$$N_{ROI} = h - H,$$

Las alturas elipsoidales y las alturas ortométricas están representadas en los archivos ALTIM.ELI y ALTIM.ORT, que se encuentran en la carpeta GEOIDE. Por tanto el geoide determinado en ROI esta expresado en el fichero GEOIDE.WGS, que igualmente se encuentra en la carpeta GEOIDE.

ID	Altura Elipsoidal (m)	Altura Ortométrica (m)	Ondulación (m)
75351	54.07	-0.04	.05
75320	54.13	-0.04	.05
75411	53.91	-0.04	.05
77918	53.87	-0.04	.06
77898	53.92	-0.04	.06
77868	54.00	-0.04	.06
77874	53.95	-0.04	.06
77857	54.03	-0.04	.06
77826	54.10	-0.04	.06
77809	54.17	-0.04	.05
77844	54.02	-0.04	.06
77892	53.87	-0.05	.07
75430	53.85	-0.04	.05
77958	53.77	-0.04	.06
77946	53.78	-0.05	.06
-77933	53.77	-0.05	.07
75452	53.82	-0.04	.05
77900	53.79	-0.05	.08
77979	53.73	-0.04	.06
77954	53.71	-0.05	.07
77925	53.82	-0.05	.06
77851	53.95	-0.05	.07
77822	54.05	-0.04	.07
80458	53.91	-0.05	.08
77797	54.18	-0.04	.05
75281	54.25	-0.04	.05
77801	54.10	-0.04	.07
-77746	54.30	-0.04	.05
77769	54.27	-0.04	.05
77941	53.71	-0.05	.07
80517	53.73	-0.05	.09
80503	53.69	-0.06	.10
80488	53.83	-0.05	.08
75475	53.77	-0.04	.05
75463	53.78	-0.04	.05
75490	53.68	-0.04	.06
77975	53.66	-0.05	.07
80579	53.60	-0.05	.08
80568	53.62	-0.05	.08
80533	53.64	-0.06	.10
75502	53.68	-0.04	.05
-75512	53.64	-0.04	.05
78018	53.59	-0.05	.06
78006	53.59	-0.05	.06

Figura 6.45. Fichero GEOIDE.WGS

ALTIM - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

75073	77569	14.6892	.000	.000	1.00000	1
75073	75092	28.9385	.000	.000	1.00000	1
75092	77609	-7.8520	.000	.000	1.00000	1
75092	77569	-14.0806	.000	.000	1.00000	1
75092	77628	-36.6986	.000	.000	1.00000	1
75190	77695	-5.3119	.000	.000	1.00000	1
75190	77675	11.5860	.000	.000	1.00000	1
75190	77668	-19.1977	.000	.000	1.00000	1
75215	75235	-3.2707	.000	.000	1.00000	1
75231	75235	12.8866	.000	.000	1.00000	1
75231	75272	194.6803	.000	.000	1.00000	1
75231	75240	.9408	.000	.000	1.00000	1
75231	77769	26.1359	.000	.000	1.00000	1
75231	77746	59.3841	.000	.000	1.00000	1
75231	77715	-42.7081	.000	.000	1.00000	1
75235	75267	84.7127	.000	.000	1.00000	1
75235	75272	180.4485	.000	.000	1.00000	1
75235	75240	-12.4084	.000	.000	1.00000	1
75240	75272	193.1721	.000	.000	1.00000	1
75240	75281	228.2954	.000	.000	1.00000	1
75240	77769	24.6686	.000	.000	1.00000	1
75240	77746	57.8578	.000	.000	1.00000	1
75267	75272	96.6206	.000	.000	1.00000	1
75272	75281	36.2912	.000	.000	1.00000	1
75272	77769	-167.6376	.000	.000	1.00000	1
75281	77809	-181.1563	.000	.000	1.00000	1
75281	77769	-203.8223	.000	.000	1.00000	1
75320	75351	52.1867	.000	.000	1.00000	1
75320	77826	-22.9513	.000	.000	1.00000	1
75351	77868	39.0792	.000	.000	1.00000	1
75351	77857	68.3361	.000	.000	1.00000	1
75411	77918	21.2844	.000	.000	1.00000	1
75411	77898	6.9446	.000	.000	1.00000	1
75430	75452	-49.6809	.000	.000	1.00000	1
75430	77958	-33.9403	.000	.000	1.00000	1
75430	77946	-20.1120	.000	.000	1.00000	1
75430	77918	-30.3426	.000	.000	1.00000	1
75452	75463	32.6522	.000	.000	1.00000	1
75452	77979	68.0175	.000	.000	1.00000	1
75463	75490	66.1699	.000	.000	1.00000	1
75463	77979	35.3812	.000	.000	1.00000	1
75463	75475	-24.5644	.000	.000	1.00000	1
75475	75502	410.7646	.000	.000	1.00000	1
75475	75490	61.2802	.000	.000	1.00000	1

Para obtener Ayuda, presione F1

MAY

ALTIM - WordPad

Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

75073	77569	14.6892	.000	.000	1.00000	1
75073	75092	28.9785	.000	.000	1.00000	1
75092	77609	-7.8220	.000	.000	1.00000	1
75092	77569	-14.1206	.000	.000	1.00000	1
75092	77628	-36.6186	.000	.000	1.00000	1
75190	77695	-5.2619	.000	.000	1.00000	1
75190	77675	11.5860	.000	.000	1.00000	1
75190	77668	-19.2477	.000	.000	1.00000	1
75215	75235	-3.2207	.000	.000	1.00000	1
75231	75235	12.8566	.000	.000	1.00000	1
75231	75272	194.7603	.000	.000	1.00000	1
75231	75240	.9808	.000	.000	1.00000	1
75231	77769	26.2259	.000	.000	1.00000	1
75231	77746	59.4441	.000	.000	1.00000	1
75231	77715	-42.6981	.000	.000	1.00000	1
75235	75267	84.7727	.000	.000	1.00000	1
75235	75272	180.5585	.000	.000	1.00000	1
75235	75240	-12.3384	.000	.000	1.00000	1
75240	75272	193.2121	.000	.000	1.00000	1
75240	75281	228.3654	.000	.000	1.00000	1
75240	77769	24.7186	.000	.000	1.00000	1
75240	77746	57.8778	.000	.000	1.00000	1
75267	75272	96.6706	.000	.000	1.00000	1
75272	75281	36.3212	.000	.000	1.00000	1
75272	77769	-167.6276	.000	.000	1.00000	1
75281	77809	-181.0763	.000	.000	1.00000	1
75281	77769	-203.8423	.000	.000	1.00000	1
75320	75351	52.2467	.000	.000	1.00000	1
75320	77826	-22.9213	.000	.000	1.00000	1
75351	77868	39.1492	.000	.000	1.00000	1
75351	77857	68.3761	.000	.000	1.00000	1
75411	77918	21.3244	.000	.000	1.00000	1
75411	77898	6.9346	.000	.000	1.00000	1
75430	75452	-49.6509	.000	.000	1.00000	1
75430	77958	-33.8603	.000	.000	1.00000	1
75430	77946	-20.0420	.000	.000	1.00000	1
75430	77918	-30.3626	.000	.000	1.00000	1
75452	75463	32.6922	.000	.000	1.00000	1
75452	77979	68.1075	.000	.000	1.00000	1
75463	75490	66.2699	.000	.000	1.00000	1
75463	77979	35.4312	.000	.000	1.00000	1
75463	75475	-24.5544	.000	.000	1.00000	1
75475	75502	410.8546	.000	.000	1.00000	1
75475	75490	61.2802	.000	.000	1.00000	1

Para obtener Ayuda, presione F1

MAY

Figura 6.46. Ficheros ALTIM.ELI y ALTIM.ORT, respectivamente

Así de esta manera, hemos cumplido con los objetivos propuestos al principio del proyecto.

Asimismo como líneas abiertas quedan seguir estudiando aspectos como la calidad de los datos, de los resultados, de las coordenadas y el tratamiento de los mismos, comparar las ondulaciones del geoide obtenidas en ROI con las ondulaciones de IBERGEO95 y así determinar la precisión de los desniveles de ortométricos de REGENTE, entre otras que puedan surgir a medida en que se avanza en las posibles investigaciones que tengan lugar dicho tema.

BIBLIOGRAFÍA

- Amiri-Simkooei, A. (2001a). "Comparison of reliability and geometrical strength criteria in geodetic networks". *Journal of Surveying Engineering*, 75(4), 227-233.
- Amiri-Simkooei, A. (2001b). "Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength." *Journal of Surveying Engineering*, 127(3), 104-117.
- Amiri-Simkooei, A., y, Sharifi, M.A., (2004). "Approach for Equivalent Accuracy Design of Different Types of Observations". *Journal of surveying engineering*.
- Barandillo Fernández, A., y, Quirós Dónate, R. (1996). "Proyecto REGENTE. Una nueva Red Geodésica Nacional". *Publicación Técnica núm. 8*. Madrid, Servicio de Publicaciones U.C.M.; 23-38.
- Baarda, W. (1968). "A testing procedure for use in geodetic networks". Netherlands Geodetic Commission, Publication on Geodesy, New Series 2. No. 5, Delft, Netherlands.
- Beutler G. (1996). GPS Satellite Orbits, Capítulo 2 en GPS for geodesy, Kleusberg A. y P. Teunissen (Eds), Lecture notes in Earth Sciences No. 60, pp. 95-97, Springer-Verlag.
- Brunini C. (1998). Global Ionospheric models from GPS measurements. Tesis Doctoral, FCAG, Universidad Nacional de La Plata.

- Cartula Sánchez de Neira, J.L., y, Agria Torres, J. (1996). "El proyecto IBERIA 95". *Publicación Técnica núm. 8*. Madrid, Servicio de Publicaciones U.C.M.; 13-22.
- Caspary, W. (1988). "Concepts of Network and Deformation Analysis". Volume 11 of Monograph. UNSW, School of Surveying, Sydney, Australia.
- Castañeda, R. M. (1986). "Ensaio para determinação de parâmetros de transformação entre o SAD-69 y NSWS-9Z2". Maestría en la Universidad Federal de Paraná. 180 p. Curitiba, Brasil.
- Cid Palacios, R., y, Ferrer Martínez, S. (1997). "Geodesia. Geométrica, Física y por Satélites". Madrid, Instituto Geográfico Nacional.
- Gemael, C. (1994). "Introdução ao Adjustamento de Observações: Aplicações Geodésicas". Editorial UFPR. Curitiba, 319p.
- Grafarend, E. W. (1974). "Optimization of geodetic networks." *Boll. Geodesia Sci. Affini*, 33(4), 351-406.
- Hennberg, H. (1985). "Redes de alta precisión". III curso de Geodesia superior. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- Hirvonen, R.A. (1971). "Adjustment by least squares in geodesy and photogrammetry". New York, Frederick Ungar Publishing Co., Inc.
- Joeckel, R. y Stober, M. (1999). "Elektronische Entfernungs und Richtungsmessun". 3. Aufl. Wittwer, Stuttgart.
- Kahmen, H. (1978). "Elektronische Meßverfahren in der Geodäsie. 3. Aufl. Wichmann, Karlsruhe.

- Kuang, S. (1996). "Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications". Ann Arbor Press Inc., Chelsea, Michigan, USA.
- Kuusniemi, H. (2005). "User-Level Reliability and Quality Monitoring in Satellite-Based Personal Navigation". Thesis for the degree of Doctor of Technology, Publication 544 of the Tampere University of Technology. Tampere, Finlandia.
- Leick, A. (1995). "Gps Satellite Surveying". Second Edition. New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Leick, A. (2004). "GPS Satellite Surveying". 3rd edition. New Jersey, JohnWiley and Sons, Inc., Hoboken.
- Levallois, J. J. (1970). "Geodesie générale". Tomo 2. París.
- López Amador, S. (2002). "las ciencias de la medida de la tierra. Métodos de determinación del geoide. - geodesia espacial. Recientes actividades geodésicas". Mapping Interactivo: Revista Internacional de Ciencias de la Tierra, noviembre/diciembre. Madrid.
- López González, M. D. (1998). "Aplicación de la teoría de la visibilidad al diseño optimo de redes geodésicas". Mapping Interactivo: Revista Internacional de Ciencias de la Tierra, septiembre/octubre. Madrid.
- Moraes, R. V., Fitzgibbon, K. T., Walter, F. (1998). O Sistema GPS, Divisao de Engenharia Aeronáutica e electronica, ITA, GPS Brasil.
- Musyoka, S. M. (1999). "A model for a four-dimensional integrated regional geodetic network". Tesis para la obtención del titulo de Doctor en

Ingeniería, Fakultät für Bauingenieur und Vermessungswesen der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), Germany.

Palmero Hernández, N., y, Rozo Frontela, R. (2002). "Algunas consideraciones acerca de las tareas de la geodesia superior. Su concepción en el diseño curricular del ingeniero en hidrografía y geodesia". Simposio Latinoamericano y del Caribe, La Educación, La Ciencia y la Cultura en la Sociedad de la Información, SimpLAC 2002. La Habana, Cuba.

Petovello, M. (2003). "Real-Time Integration of a Tactical-Grade IMU and GPS for High-Accuracy Positioning and Navigation". PhD thesis, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Calgary, Canada.

Ribas, E. B., Saraiva, C. C. S. (1997). Parametros para Utilizaçao do GPS na Reambulaçao de Mapas Municipais: Viabilidade e Restriçoes, GisBrasil.

Rodríguez Pujol, E., y, Cartula Sánchez de Neira, J.L. (1999). "IBERIA 95: Red Peninsular de Orden Cero". Publicación Técnica núm. 30. Madrid, Instituto Geográfico Nacional.

Rüeger, J.M. (1997). "Electronic distance measurements, an introduction". 4 edition. Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

Ryan, S. (2002). "Augmentation of DGPS for Marine Navigation". PhD thesis, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, Calgary, Canada.

Salkind, Neil. J. (1997). "Métodos de investigación". México, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

- Sevilla, M. J., y Núñez-García, A. (1979). "Estudio de errores en nivelación astrogeodésica", 111. Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica. Madrid.
- Sevilla, M. J., y Núñez-García, A. (1979). "Determinación de la latitud por el método de Sterneck". Revista Topográfica.
- Schlemmer, H. (1996). "Grundlagen der Sensorik". Wichmann-Hüthig. Heidelberg, Alemania.
- Seeber, G. (1993). "Satellite Geodesy. Foundations, Methods and Applications". Walter de Gruyter. Berlin - NewYork, 530 p.
- Segantine, Paulo C. L., (1995). "Estabelecimento e ajuste de uma rede geodésica no Estado de São Paulo, com o sistema de posicionamento NAVSTAR/GPS". Tesis para la obtención del título de Doctor en Ingeniería. Escuela Politécnica, Universidad de Sao Paulo. Brasil.
- Silva, M. A. (2002). "Obtenção de um modelo geoidal para o Estado de Sao Paulo". Tesis para obtención del título de Master en Ingeniería. Escuela Politécnica, Universidad de Sao Paulo. Brasil.
- Silva, A. S., y Grip Junior, J. (1996). "Geodesia Geométrica". Universidad Federal de Viosa, p. 131.
- Tiberius, C. C. J. M. (1998). "Quality control in positioning". Hydrographic Journal, 90(10).
- Torge, W. (1983). "Geodesia". Editora Diana, Mexico. Primera Edición, 289p.
- Torge, W. (2001). "Geodesy". 3rd Edition. Berlín, Walter de Gruyter.

- Teunissen, P. J. G. (1990). "Quality control in integrated navigation systems". In Proc. IEEE Position, Location and Navigation Symposium, Las Vegas, UT, USA.
- Teunissen, P. J. G. (2003). "Adjustment theory. An introduction". Second edition. The Netherlands, Delf University Press.
- Van Dierendonck, A., Russel, S., Kopitzke, E., Birnbaum, M. (1978). The GPS navigation message, Journal of the Institute of Navigation, Vol. 25 No. 2 pp. 147-165.
- Vaníček, P., Krakiwsky, E. J., Craymer, M. R., Gao, Y., and Ong, P. S. (1990). "Robustness analysis." Technical Rep. No. 156, Univ. of New Brunswick, Fredericton, Canada.
- Vázquez Maure, F., y, Martín López, J. (1987). "Lectura de Mapas". Madrid. Pág. 309.
- Vidal, G. (1974). "Reducción geométrica de las observaciones y técnicas espaciales para la determinación de distancias con gran precisión". Curso de medición electrónica de distancia. Asociación Nacional de Ingenieros Geógrafos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS DE INTERNET

<http://www.euref-iag.net/> (La subcomisión EUREF).

<http://www.fomento.es/> (Ministerio de Fomento de España).

<http://www.geo.ign.es/servidor/geod/geod.html> (Instituto Geográfico Nacional).

<http://www.iag.csic.es/> (Instituto de Astronomía y Geodesia perteneciente a la Universidad Complutense de Madrid).

<http://www.iag-aig.org/> (International Association of Geodesy).

<http://www.mappinginteractivo.com/> (MAPPING Interactivo: Revista Internacional de Ciencias de la Tierra).

<http://www.ngs.noaa.gov/> (National Geodetic Survey: National Oceanic and Atmospheric Administration).

<http://www.nima.mil/> (National Geospatial-Intelligence Agency).