Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en la ingeniería y los métodos analíticos y numéricos para su resolución

Daniel Losada Chanca

Septiembre de 2011

Índice general

0.1. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

0.1.1. Introducción

Las ecuaciones lineales de segundo orden tienen una importancia primordial en el estudio de las ecuaciones diferenciales por dos razones principales. La primera es que las ecuaciones lineales poseen una rica estructura teórica que sustenta varios métodos sistemáticos de resolución. Además, una parte sustancial de esta estructura y estos métodos son comprensibles en un nivel matemático bastante elemental. Otra razón para estudiar las ecuaciones lineales de segundo orden es que son imprescindibles en cualquier investigación

seria de las áreas clásicas de la física-matemática.
Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

en donde f es alguna función dada. Se dice que la ecuación (1) es **lineal** si la función f puede escribirse como

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y \tag{2}$$

en donde g, p y q son funciones especificas de la variable independiente x. La ecuación (1) puede escribirse como,

$$r(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3}$$

Si (1) no es de la forma (3), entonces se dice que es **no lineal**.

0.1.2. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Se dice que una ecuación lineal de segundo orden es **homogénea** si el término $g(x)$ de la ecuación (3) es cero para toda x. En caso contrario, la ecuación es **no homogénea**.
Vamos a centrarnos en las ecuaciones para las que las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son constantes. En este caso la ecuación (3) se transforma en

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4}$$

Veremos que la ecuación (4) tiene soluciones del tipo $y = e^{rx}$, en donde r es un parámetro por determinar. Luego, se sigue que $y' = re^{rx}$ y $y'' = r_2 e^{rx}$. Al sustituir estas expresiones para y, y' y y'' en la ecuación (4), se obtiene

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{5}$$

La ecuación anterior se llama **ecuación característica** de la ecuación diferencial (4).

0.1.3. Raíces complejas de la ecuación característica

Vamos a continuar con el análisis de la ecuación (4) en donde a, b y c son números reales dados. Anteriormente hemos visto que si se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$, entonces r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{6}$$

Si las raíces r_1 yr_1 son reales y diferentes, lo que ocurre siempre que el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces la solución general de (6) es

$$x = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{7}$$

Ahora, suponga que $b^2 - 4ac$ es negativo; entonces las raíces de (6) son números complejos conjugados; se les denota por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \quad r_2 = \lambda - i\mu \tag{8}$$

en donde λ y μ son reales. Las expresiones correspondientes para y son

$$y_1(x) = \exp[(\lambda + i\mu)x], \quad y_2(x) = \exp[(\lambda - i\mu)x] \tag{9}$$

0.1.4. Reducción de orden

Supóngase que se conoce una solución $y_1(x)$, que no sea cero en todo punto, de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{10}$$

Para encontrar una segunda solución, sea

$$y = v(x)y_1(x) \tag{11}$$

entonces

$$\begin{aligned} y' &= v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x), \\ y'' &= v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x) \end{aligned}$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (10) por sus expresiones que acaban de darse y se agrupan los términos, se encuentra que

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0 \tag{12}$$

Dado que y_1 es una solución de (10), el coeficiente de v en la (12) es cero, de modo que la ecuación (12) queda

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0 \tag{13}$$

A pesar de su apariencia, la ecuación (13) es en realidad una ecuación de primer orden para la función v' y es posible resolverla como una ecuación lineal de primer orden o como una ecuación separable.

0.1.5. Variación de parámetros

Si las funciones p, q y g son continuas sobre un intervalo abierto I y si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondientes a la ecuación no homogénea,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{14}$$

entonces una solución particular de (14) es

$$Y(x) = -y_1 \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx - y_2 \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \tag{15}$$

y la solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{16}$$

0.1.6. Ecuación de Cauchy-Euler

Toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = g(x) \tag{17}$$

donde los coeficientes a, b y c son constantes, tiene el nombre de ecuación de Cauchy-Euler, ecuación de Euler o ecuación equidimensional.
$y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación auxiliar

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{18}$$

Hay tres casos distintos por considerar que dependen de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales repetidas (o iguales) o complejas.

0.1.7. Ecuaciones no lineales

Entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales hay varias diferencias importantes. Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden tienen la propiedad de que una combinación lineal de soluciones también es una solución. Las ecuaciones no lineales carecen de esta propiedad de superposición. La diferencia principal entre las ecuaciones lineales y no lineales de segundo orden es la posibilidad de resolverlas. Dada una ecuación lineal, hay la posibilidad de establecer alguna forma manejable de solución, como una solución explícita o una que tenga la forma de una serie infinita. Por otro lado, la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior es todo un desafío. Esto no quiere decir que una ecuación diferencial no lineal de orden superior no tenga solución, sino más bien que no hay métodos generales para llegar a una solución explícita o implícita.

0.2. Solución de ecuaciones usando series

Hasta ahora, nos hemos restringido al uso de ecuaciones diferenciales que podían resolverse exactamente y con varias aplicaciones que nos conducían a ellas. Hay ciertas ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse exactamente en términos de funciones elementales por cualesquiera de los métodos anteriores.
Vamos a considerar ahora una ecuación diferencial lineal de la siguiente forma:

$$y'' = -\frac{q(x)y' + r(x)y}{p(x)} \tag{19}$$

Si ha de existir una solución, desearíamos que y'' existiera en $x = a$ y no sería bueno que el denominador $p(x)$ fuese cero para $x = a$. Esto nos lleva a introducir el siguiente término;
Punto singular o singularidad Un valor x tal que $p(x) = 0$ se llama punto singular o singularidad de la ecuación diferencial (19). Cualquier otro valor de x se llama entonces un punto ordinario o punto no singular.

0.2.1. El método de la serie de Taylor

El método de la serie de Taylor es un método para hallar soluciones con series de potencias de la ecuación diferencial (20) alrededor de un punto ordinario $x = 0$.

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{20}$$

Este método usa los valores de las derivadas evaluadas en el punto ordinario, los cuales se obtienen de la ecuación diferencial por diferenciación sucesiva. Cuando se encuentran las derivadas, usamos luego la expansión en serie de Taylor

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{y'''(a)(x-a)^3}{3!} + ... \tag{21}$$

dando la solución requerida.

0.2.2. El método de Frobenius

Hemos visto como obtener una solución con series de potencias a la ecuación diferencial

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{22}$$

alrededor de un punto ordinario $x = a$, donde $p(a) \neq 0$. Sería muy ventajoso encontrar las soluciones con series de potencias alrededor de $x = a$ si a es un punto singular cuando nos dan, por ejemplo, las condiciones iniciales en un punto singular. Frobenius utilizó un tipo más general de serie como

$$v = x^c(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) = \sum a_jx^{j+c} \tag{23}$$

donde c es una constante adicional desconocida.

0.3. Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden

La mayor parte de los métodos numéricos existentes han sido diseñados para la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, en la práctica, muchos problemas dan lugar a ecuaciones de segundo orden. Los sistemas dinámicos están basados en fuerzas que provocan aceleraciones, que no son más que la derivada segunda de la posición. Una posibilidad, para la integración de ecuaciones de segundo orden, es la reducción de éstas a un sistema de ecuaciones de primer orden. Pero, debido a la gran cantidad de problemas que se modelan mediante ecuaciones de segundo orden, parece conveniente el desarrollo de métodos específicos para estas ecuaciones.

0.3.1. Métodos de Falkner

Consideremos el problema de valor inicial de segundo orden dado por

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \tag{24}$$

para el que suponemos que se dan las condiciones suficientes para garantizar la existencia de una solución única $y(t)$ sobre un cierto intervalo $I \in \mathbb{R}$ de interés.

Nótese que la característica f la podemos considerar como una función en la única variable independiente t, dado que la función y y su primera derivada y' son funciones de t, y en tal caso podemos replantear el problema anterior en la forma:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \tag{25}$$

La solución exacta del problema (25) evaluada en el punto t_{n+1} seria la siguiente

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)(t_{n+1} - t)dt \tag{26}$$

Método de Falkner

El método de Falkner explícito para resolver el problema en (24) está dado por la pareja de fórmulas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \\ y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n \,. \end{cases} \tag{27}$$

Método de Falkner implícito

El método de Falkner implícito para resolver el problema en (24) está dado por la pareja de fórmulas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta^*_j \nabla^j f_{n+1} \\ y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k} \gamma^*_j \nabla^j f_{n+1} \,. \end{cases} \tag{28}$$

0.3.2. Métodos tipo Runge-Kutta-Nyström

Consideremos el problema de valor inicial;

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{29}$$

Si reescribimos la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden obtenemos

$$\frac{d}{dx}\,(y\,,y') = (y'\,,f(x,y,y'))$$

Aplicando una fórmula Runge-Kutta explícita para sistemas de primer orden obtenemos la siguiente aproximación numérica:

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i\overline{k}_i, \tag{30}$$

$$y_1' = y_0' + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{31}$$

$$\overline{k}_i = y_0' + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} k_j, \tag{32}$$

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij}\overline{k}_j, y_0' + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} k_j), \tag{33}$$

$$i = 1, ..., s$$

Insertando (32) en (30), (31) y (33), obtenemos la expresión del siguiente método

$$y_1 = y_0 + hy_0' + h^2\sum_{i=1}^{s} \overline{b}_i k_i,$$

$$y_1' = y_0' + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + c_i h y_0' + h^2\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, y_0' + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} k_j),$$

$$i = 1, ..., s$$

con

$$a_{ij} = \sum_k \overline{a}_{ik}\overline{a}_{kj} \qquad\qquad \overline{b}_i = \sum_j b_j\overline{a}_{ij} \tag{34}$$

Estos métodos de tipo Runge-Kutta diseñados para ecuaciones diferenciales de segundo orden se denominan habitualmente métodos Runge- Kutta-Nyström ya que fueron introducidos por Nyström en 1925, aunque Nyström construyó métodos que no satisfacían necesariamente las condiciones (34). Para este tipo de métodos se suelen usar las abreviaturas RKNG o RKN, aunque habitualmente se reserva esta última abreviatura para los métodos específicamente diseñados para problemas en los que la función no contiene explícitamente a la derivada de la solución.

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{35}$$

Para este tipo de problemas las fórmulas del método serían de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&y_1 = y_0 + hy'_0 + h^2 \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i k_i, \\
&y'_1 = y'_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \\
&k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + c_i h y'_0 + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \\
&i = 1, ..., s
\end{aligned} \tag{36}$$

Nótese que los coeficientes $\overline{a}_{ij}$ ya no aparecen en las fórmulas del algoritmo. En este caso, puede alcanzarse una gran simplificación tanto en la implementación del método como en el coste computacional requerido. El interés de estas fórmulas radica en el amplio espectro de problemas que pueden reducirse a ecuaciones de este tipo tras un adecuado cambio de variables. A menudo los coeficientes de un método Runge-Kutta-Nyström para la resolución de un problema de valor inicial con una ecuación de segundo orden especial (sin la presencia de la derivada) se disponen en tablas que ayudan a visualizar el método como queda reflejado en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cc|ccccc}
 & c_1 & & & a_{ij} & & \\
c_i & c_2 & a_{21} & & & & \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 & c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss-1} & \\
\hline
 & \bar{b}_i & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_{s-1} & \bar{b}_s \\
\hline
 & b_i & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

0.4. Estudio práctico de los métodos

Vamos a ver como se comportan algunos de los métodos numéricos estudiados para una ecuación diferencial dada. Vamos a considerar el siguiente problema de valor inicial

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \tag{37}$$

evaluado entre $0 \leq x \leq 5$, y cuya solución exacta es la siguiente

$$y(x) = \frac{1}{1+x} \tag{38}$$

Mediante la utilización de programas vamos a tabular los resultados de estos métodos para 500 pasos;

Metodo	Tiempo	Error y	Error y'
Falkner explícito	0,047	$6{,}44328 \cdot 10^{-7}$	$3{,}22352 \cdot 10^{-7}$
Variante Falkner	0,032	$4{,}82460 \cdot 10^{-9}$	$2{,}41168 \cdot 10^{-9}$
RKN explícito	0,110	$9{,}88624 \cdot 10^{-8}$	$4{,}94273 \cdot 10^{-8}$
Stormer-Cowell implícito	0,078	$4{,}99937 \cdot 10^{-10}$	$2{,}95338 \cdot 10^{-10}$

Llegamos a las siguientes conclusiones;

- Si queremos que el tiempo computacional sea lo más bajo posible, debemos elegir la variante del método de Falkner, consigue errores del orden de 10^{-9} con menor gasto de tiempo que el método de Stormer-Cowell.
- Si queremos más precisión y el tiempo de cálculo no es relevante, debemos usar el método de Stormer-Cowell, ya que consigue valores del error del orden de 10^{-10}.