Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en la ingeniería y los métodos analíticos y numéricos para su resolución

Escuela Politécnica Superior De Zamora

Titulación: Ingeniería Técnica Industrial (Mecánica)
Departamento: Matemática Aplicada
Área: Matemática Aplicada
Tutor: D. Higinio Ramos Calle. (Profesor de la U.P.S. Zamora.)
Realizado por: Daniel Losada Chanca
Fecha de adjudicación: Noviembre 2009
Fecha de presentación: Septiembre 2011

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en la ingeniería y los métodos analíticos y numéricos para su resolución

Daniel Losada Chanca

Septiembre de 2011

Índice general

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

1.1. Introducción

Las ecuaciones lineales de segundo orden tienen una importancia primordial en el estudio de las ecuaciones diferenciales por dos razones principales. La primera es que las ecuaciones lineales poseen una rica estructura teórica que sustenta varios métodos sistemáticos de resolución. Además, una parte sustancial de esta estructura y estos métodos son comprensibles en un nivel matemático bastante elemental. Otra razón para estudiar las ecuaciones lineales de segundo orden es que son imprescindibles en cualquier investigación seria de las áreas clásicas de la física-matemática.
Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1.1}$$

en donde f es alguna función dada. Se dice que la ecuación (1.1) es **lineal** si la función f puede escribirse como

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y \tag{1.2}$$

en donde g, p y q son funciones especificas de la variable independiente x. En este caso, la ecuación (1.1) queda,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1.3}$$

en donde los apóstrofos denotan derivación con respecto a x. En vez de (1.3), a menudo se ve la ecuación

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \tag{1.4}$$

por supuesto, si (1.4) se divide en $P(x)$, entonces se reduce a la ecuación (1.3) con

$$p(x) = \frac{Q(x)}{p(x)} \quad q(x) = \frac{R(x)}{p(x)} \quad g(x) = \frac{G(x)}{P(x)} \tag{1.5}$$

Al analizar e intentar resolver (1.3), es necesario restringirse a intervalos en los cuales p, q y g son funciones continuas.
Si (1.1) no es de la forma (1.3) o (1.4), entonces se dice que es **no lineal**. Un análisis extenso de las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden es demasiado difícil para un proyecto de este nivel, por lo que se dirá relativamente poco acerca de ellas. Sin embargo, existen dos tipos especiales de ecuaciones no lineales de segundo orden que se pueden resolver mediante un cambio de variables que las reduce a ecuaciones de primer orden.
Un problema con valor inicial consta de una ecuación diferencial como (1.1), (1.3) o (1.4) junto con un par de condiciones iniciales de la forma

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

en donde y_0 y y'_0 son números dados. Podemos ver que las condiciones iniciales para una ecuación de segundo orden prescriben no sólo un punto particular (x_0, y_0) por el que debe pasar la gráfica de la solución, también la pendiente y'_0 de la gráfica en ese punto. Resulta razonable esperar que para una ecuación de segundo orden se necesiten dos condiciones iniciales porque, en términos generales, para hallar una solución se requieren dos integraciones y cada una introduce una constante arbitraria. Es de supones que bastarán dos condiciones iniciales para determinar los valores de estas dos constantes.
Las ecuaciones lineales de segundo orden surgen en muchas aplicaciones importantes. Por ejemplo, el movimiento de una masa sujeta a un resorte y muchos otros sistemas oscilatorios simples, se describen por una ecuación de la forma

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t) \tag{1.7}$$

en donde m, c y k son constantes y F es una función prescrita. Otro ejemplos son la ecuación de Bessel de orden ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1.8}$$

y la ecuación de Legendre de orden α,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{1.9}$$

en donde ν y α son constantes. La ecuación de Bessel se presenta en muchas situaciones físicas con mayor frecuencia en problemas que comprenden geometría circular, coma la determinación de la distribución de temperaturas en una placa circular. La ecuación de Legendre se encuentra frecuentemente en situaciones físicas que están relacionadas con geometría esférica.

1.2. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Se dice que una ecuación lineal de segundo orden es **homogénea** si el término $g(x)$ de la ecuación (1.3), o el término $G(x)$ de la (1.4), es cero para toda x. En caso contrario, la ecuación es **no homogénea**. Como resultado, el término $g(x)$, o el $G(x)$, algunas veces se le nombra término no homogéneo. Se empezará el análisis con las ecuaciones homogéneas, las que se escribirán en la forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1.10}$$

Más tarde se demostrará que una vez que una vez que se resuelve la ecuación homogénea, siempre es posible resolver la ecuación no homogénea correspondiente (1.4), o por lo menos expresar la solución en términos de una integral. Por tanto, el problema de resolver la ecuación homogénea es el fundamental. Ahora vamos a centrarnos en las ecuaciones para las que las funciones P, Q y R son constantes. En este caso la ecuación (1.10) se transforma en

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.11}$$

en donde a, b y c son constantes dadas. Resulta que la ecuación (1.11) siempre puede resolverse con facilidad en términos de las funciones elementales de cálculo. Por otra parte, suele ser mucho más difícil resolver la ecuación (1.10) si los coeficientes no son constantes.

Antes de abordar la ecuación (1.11) , considérese en primer lugar un ejemplo especialmente sencillo;

$$y'' - y = 0 \tag{1.12}$$

que es de la forma (1.11) con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1$. En otras palabras, la ecuación pide que se busque una función con la propiedad de que la segunda derivada de esa función sea igual a ella misma. Al reflexionar un poco se recordará al menos una conocida función del cálculo con esta propiedad, concretamente $y_1(x) = e^x$, la función exponencial. Con un poco más de reflexión también se puede llegar a una segunda función, $y_2(x) = e^{-x}$. Algunos ensayos más pueden revelar que los múltiplos de estas dos soluciones también son soluciones. Por ejemplo, las funciones $2e^x$ y $5e^{-x}$ también satisfacen la ecuación (1.12), como es posible comprobar si se calculan sus segundas derivadas. De la misma manera, las funciones $c_1y_1(x) = c_1e^x$ y $c_2y_2(x) = c_2e^{-x}$ satisfacen la ecuación diferencial (1.12) para todos los valores de las constantes c_1 y c_2. A continuación, es de suma importancia observar que cualquier suma de soluciones de la ecuación (1.12) también es una solución. En particular, dado que $c_1y_1(x)$ y $c_2y_2(x)$ son soluciones de (1.12), así también lo es de la función

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} \tag{1.13}$$

para valores cualesquiera de c_1 y c_2. Una vez más, esto puede verificarse al calcular la segunda derivada y'' a partir de (1.13). En efecto, se tiene $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$ y $y'' = c_1e^x - c_2e^{-x}$; por lo tanto, y'' es igual a y, y se satisface la ecuación (1.12).
Ahora un resumen de lo que se ha hecho hasta el momento en este ejemplo. Una vez que se observa que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$, son soluciones de ecuación (1.12), se concluye que la combinación lineal general (1.13) de estas funciones también es una solución. Dado que los coeficientes c_1 y c_2 de la ecuación (1.13) son arbitrarios, esta expresión representa una familia doblemente infinita de soluciones de la ecuación diferencial (1.12).
Ahora es posible considerar cómo elegir un miembro en particular de esta familia infinita de soluciones que también satisfaga un conjunto dado de condiciones iniciales. Por ejemplo, supongamos que se busca la solución de la ecuación (1.12) que también satisfaga las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \tag{1.14}$$

En otras palabras, se busca la solución que pasa por el punto $(0, 2)$ y que en ese punto tiene la pendiente -1. Primero, se hace $x = 0$ y $y = 2$ en la ecuación (1.13); con ello se obtiene

$$c_1 + c_2 = 2 \tag{1.15}$$

Luego, se deriva la ecuación (1.13), lo que da por resultado

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x} \tag{1.16}$$

Entonces, al hacer $x = 0$ y $y' = -1$, se obtiene

$$c_1 - c_2 = -1 \tag{1.17}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (1.16) y (1.17) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{2} \tag{1.18}$$

Por último, si se introducen estos valores en (1.13), se obtiene

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x} \tag{1.19}$$

la solución del problema con valor inicial que consta de la ecuación diferencial (1.12) y las condicione iniciales (1.14).
Ahora se regresará a la ecuación más general (1.11);

$$ay'' + by' + cy = 0$$

que tiene coeficientes constantes arbitrarios. Con base en la experiencia adquirida con la ecuación (1.12), también se buscan las soluciones exponenciales de la ecuación anterior. Por lo tanto, se supone que $y = e^{rx}$, en donde r es un parámetro por determinar. Luego, se sigue que $y' = re^{rx}$ y $y'' = r_2e^{rx}$. Al sustituir estas expresiones para y, y' y y'' en la ecuación (1.11), se obtiene

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

o bien, dado que $e^{rx} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{1.20}$$

La ecuación anterior se llama **ecuación característica** de la ecuación diferencial (1.11). Su importancia reside en el hecho de que si r es una raíz de la ecuación polinomial (1.20), entonces $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación diferencial (1.11). Ya que (1.20) es una ecuación cuadrática con coeficientes reales, tiene dos raíces, que pueden ser reales y diferentes, reales pero repetidas, o complejas conjugadas.
Si se supone que las raíces de la ecuación característica (1.20) son reales y diferentes, denótese por r_1 y r_2, en donde, por supuesto, $r_1 \neq r_2$. Entonces $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones de la ecuación (1.11). Así como en el ejemplo anterior, ahora se concluye que

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{1.21}$$

también es una solución de (1.11). Para verificar este hecho, se puede derivar la expresión de la ecuación anterior, con lo que tenemos;

$$\begin{cases} y' = c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x} \\ y'' = c_1r_1^2e^{r_1x} + c_2r_2^2e^{r_2x} \end{cases} \tag{1.22}$$

Si se sustituyen estas expresiones para y, y' y y'' en (1.11), se obtiene;

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 x} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 x} \qquad (1.23)$$

La cantidad entre cada uno de los paréntesis del segundo miembro de la ecuación (1.23) es cero porque r_1 y r_2 son raíces de (1.20); por consiguiente, según está definida por (1.21), en efecto y es una solución de la ecuación (1.11), que era lo que se quería comprobar.
Ahora supongamos que se desea encontrar el miembro particular de la familia de soluciones (1.21) que satisfaga las condiciones iniciales;

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Al sustituir $x = x_0$ y $y = y_0$ en la ecuación (1.21), se obtiene

$$c_1 e^{r_1 x_0} + c_2 e^{r_2 x_0} = y_0 \qquad (1.24)$$

De manera semejante, al hacer $x = x_0$ y $y' = y_0$ en $y' = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x}$, da

$$c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = y_0' \qquad (1.25)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (1.24) y (1.25) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2}\, e^{-r_1 x_0}, \quad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2}\, e^{-r_2 x_0}\,. \qquad (1.26)$$

Por lo tanto, no importa que condiciones iniciales se asignen, es decir, sin importar los valores de x_0, y_0 y y_0' de (1.6), siempre es posible determinar c_1 y c_2 de modo que se satisfagan las condiciones iniciales, es mas, sólo existe una elección posible de c_1 y c_2 para cada conjunto de condiciones iniciales. Con los valores de c_1 y c_2 dados por la ecuación (1.26), la expresión (1.21) es la solución del problema de valores iniciales

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'\,. \qquad (1.27)$$

Es posible demostrar, con base al teorema que veremos a continuación, que todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$ están incluidas en la expresión (1.21), al menos para el caso en el que las raíces de $ar^2 + br + c = 0$ son reales y diferentes. Por lo tanto, la ecuación (1.21) se le conoce como solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$. El hecho de que todas las condiciones iniciales posibles se puedan satisfacer al elegir de manera adecuada las constantes de la ecuación (1.21) hace más fácil ver la idea de que esta expresión

en realidad incluye todas las soluciones de $ay'' + by' + cy = 0$.
Dado que la solución general de (1.21) es la suma de dos funciones exponenciales, su comportamiento geométrico es relativamente sencillo: cuando la x crece, la magnitud de la solución tiende a cero (si los dos exponentes son negativos) o bien, crece con rapidez (si por lo menos un exponente es positivo). También existe un tercer caso que ocurre menos a menudo; la solución tiende a una constante cuando uno de los exponentes es cero y el otro es negativo. Vamos a ver unos ejemplos de estos casos a continuación.

Ejemplo 1 *Hallar la solución del problema con valor inicial*

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(0) = 3$$

Solución: Vamos a calcular la solución general de la ecuación diferencial. Se supone que $y = e^{rx}$ y suponemos que r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0$$

Por tanto, los valores posibles de r son $r_1 = -2$ y $r_2 = -3$. La solución general de la ecuación es, entonces:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

Ahora, para satisfacer la primera condición inicial, se hace $x = 0$ y $y = 2$ en la solución general. Por lo tanto, c_1 y c_2 deben satisfacer

$$c_1 + c_2 = 2$$

Para usar la segunda condición inicial, primero debe derivarse la solución general. Esto da lo siguiente;

$$y' = -2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

Entonces, si se hace $x = 0$ y $y' = 3$ se obtiene

$$-2c_1 - 3c_2 = 3$$

Al resolver las ecuaciones (1.28) y (1.28) se encuentra que $c_1 = 9$ y $c_2 = -7$. Si se usan estos valores en la expresión de la solución general, se obtiene que la solución del problema de valor inicial es

$$y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}\,.$$

En la figura (1.1) se muestra la gráfica de la solución.

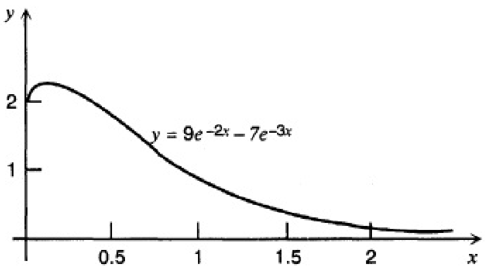

Figura 1.1: Solución de $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y(0) = 3$

Ejemplo 2 *Hallar la solución del problema de valor inicial*

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(0) = 1/2$$

Solución: Si $y = e^{rx}$, entonces la ecuación característica es $4r^2 - 8r + 3 = 0$ y sus raíces son $r = 3/2$ y $r = 1/2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^{x/2}$$

Si se aplican las condiciones iniciales se obtienen las dos ecuaciones siguientes para c_1 y c_2:

$$c_1 + c_2 = 2, \quad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$$

La solución de estas ecuaciones es $c_1 = 1/2$, $c_2 = 5/2$, y la solución del problema con valor inicial es

$$y = -\frac{1}{2}\, e^{3x/2} + \frac{5}{2}\, e^{x/2}$$

En la figura (1.2) se muestra la gráfica de la solución.

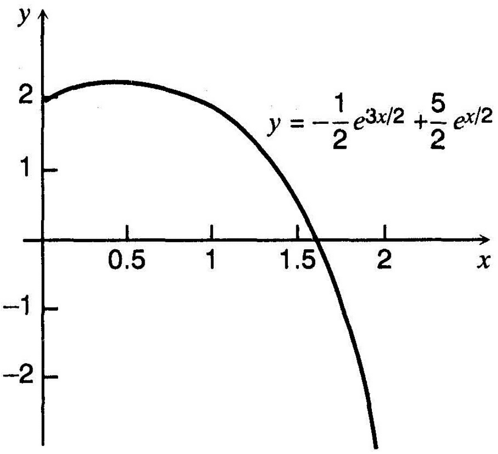

Figura 1.2: Solución de $4y'' - 8y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y(0) = 1/2$

Ejemplo 3 *Encontrar la solución del problema con un valor inicial*

$$y'' + y' - 12y = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 0$$

Solución: La ecuación característica es $r^2 + r - 12 = 0$ con las raíces $r_1 = 3$ y $r_2 = -4$, de modo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$$

Las condiciones iniciales requieren que c_1 y c_2 satisfagan

$$c_1 e^6 + c_2 e^{-8} = 2, \quad 3c_1 e^6 - 4c_2 e^{-8} = 0$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene

$$c_1 = \frac{8}{7}e^{-6}, \quad c_2 = \frac{6}{7}e^8$$

de modo que la solución del problema con valor inicial es:

$$y = \frac{8}{7}\,e^{-6}e^{3x} + \frac{6}{7}\,e^8 e^{-4x} = \frac{8}{7}\,e^{3(x-2)} + \frac{6}{7}\,e^{-4(x-2)}$$

1.3. Propiedades algebraicas de las soluciones fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas

En la sección anterior se ha visto cómo resolver algunas ecuaciones diferenciales de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

en donde a, b, y c son constantes. Ahora vamos a trabajar con estos resultados para dar una visión más clara de la estructura de las soluciones de todas las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden.
En el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, la introducción de un operador diferencial facilita la comprensión. Sean $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas sobre un intervalo abierto I; es decir, para $\alpha < x < \beta$. Se incluyen los casos $\alpha = -\infty$ o $\beta = \infty$, o los dos. Entonces, para cualquier función ϕ que sea dos veces diferenciable sobre I, se define el operador diferencial L por la ecuación

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi \tag{1.28}$$

Obsérvese que $L[\phi]$ es una función sobre I. El valor de $L[\phi]$ en un punto x es

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$$

El operador L suele escribirse como $L = D^2 + pD + q$, en donde D es el operador derivada. Aquí vamos a estudiar la ecuación lineal homogénea de segundo orden $L[\phi](x) = 0$. Dado que se acostumbra usar el símbolo y para denotar $\phi(x)$, por lo general esta ecuación se escribirá en la forma

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.29}$$

A la ecuación (1.29) se le asocia un conjunto de condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad y'(x_0) = y'_0 \tag{1.30}$$

en donde x_0 es cualquier punto en el intervalo I, y y_0 y y'_0 son números reales dados. El resultado teórico fundamental para los problemas con valor inicial de las ecuaciones lineales de segundo orden se enuncia en el siguiente teorema, aplicable también a las ecuaciones no homogéneas.

Teorema 1.3.1 (Teorema de existencia y unicidad) *Considérese el problema de valor inicial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{1.31}$$

Sean $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el intervalo $\alpha < x < \beta$. Entonces existe una y solamente una función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial (1.31) *en todo el intervalo $\alpha < x < \beta$ y las condiciones iniciales prescritas $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_o$.*

Demostración: Podemos demostrar el teorema de existencia y unicidad transformando la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0$$

en un sistema de ecuaciones de primer orden. Sean $z_1 = y$ y $z_2 = y'$, entonces se deduce que $z'_1 = z_2$ y $y'' = z'_2$. Ahora lo sustituimos en la ecuación anterior y nos queda;

$$az'_2 + bz_2 = -cz_1$$

Por lo tanto, z_1 y z_2 satisfacen el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ az'_2 = -cz_1 - bz_2 \end{cases}$$

1. Existencia de soluciones

    - Construcción de soluciones proximadas

    Definición 1.3.1 *Sea $D \subset R^2$ un dominio y $f : D \to R$ continua en D. Sea $x \in I = [x_1, x_2]$. Entonces una función $y(x)$ definida en ese intervalo es una solución de $y' = f(x, y)$ con error ϵ si:*

    a) *$y(x)$ es admisible, es decir, $(x, y(x))$ está en D siempre que x esté en I.*
    b) *$y(x)$ es continua en I.*
    c) *$y(x)$ tiene derivada continua a trozos en I.*
    d) *$|y'(x) - f(x, y(x))| \leq \epsilon$ en I, salvo en un número discreto de puntos.*

Proposición 1.3.2 *Demostremos que, dado* (x_0, y_0) *en* D*, tal que los puntos de un rectángulo de lados a y b, es decir,* $R : |x - x_0| \leq a, |y - y_o| \leq b$*, pertenezcan todos a* D*, y dado* $M \in R$ *tal que* $|f(x,y)| \leq M$ *para todo* $(x,y) \in R$*; se puede construir una solución aproximada* $y(x)$ *de*

$$y' = f(x,y)$$

en el intervalo $|x - x_0| \leq h$*, donde* $h = min(a, b/M)$*; y de manera que* $y(x_0) = y_0$ *y cuyo error* ϵ *sea un número positivo arbitrariamente pequeño.*

Para demostrarlo, considérese el rectángulo $S : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq Mh$, que está contenido en R por la definición de h.

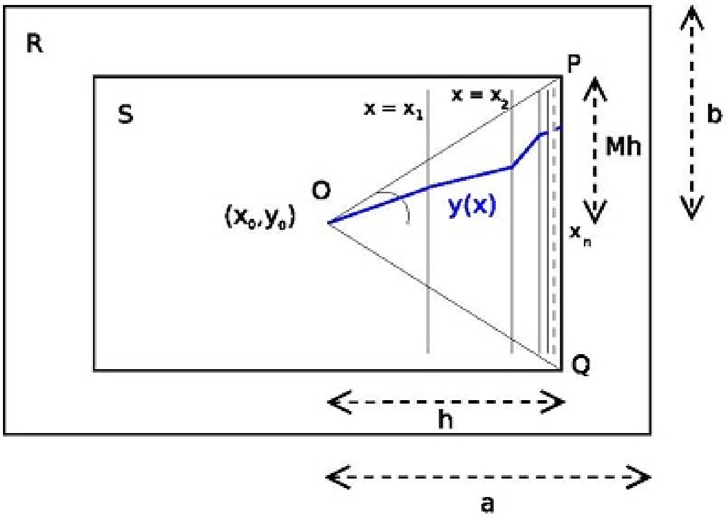

Figura 1.3: Rectángulo $S : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq Mh$

Fijemos el ϵ de la proposición anterior. Dado que $f(x,y)$ es continua en S, lo es uniformemente por ser este un compacto. Por tanto, dado ϵ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(\overline{x}, \overline{y}) - f(x,y)| \leq \epsilon$$

para $(\overline{x}, \overline{y}), (x,y)$ en S, $|\overline{x} - x| \leq \delta, |\overline{y} - y| \leq \delta$.
Sea $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ cualquier conjunto de puntos tales que:

a) $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = x_0 + h$

b) $x_i - x_{i-1} \leq min\left(\delta, \frac{\delta}{M}\right), i = 1, 2, ..., n.$

Vamos a construir una solución aproximada en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + h$; un proceso parecido la determinaría en el intervalo $x_0 - h \leq x \leq x_0$.

La solución aproximada será una poligonal construida de la siguiente manera: a partir de (x_0, y_0) trazamos hacia la derecha un segmento cuya pendiente sea $f(x_0, y_0)$; cortará la recta $x = x_1$ en un punto (x_1, y_1). A partir de (x_1, y_1) trazamos un nuevo segmento hacia la derecha con pendiente OPQ, pues tanto $(\widehat{POx_n} = M)$ y $f(x_0, y_0) \leq M$. Sucesivamente, (x_2, y_2) estará también en OPQ. De aquí que el proceso se pueda continuar hasta $x_n = x_0 + h$. Analíticamente, podemos definir $y(x)$ por expresiones recurrentes:

$$y(x) = y(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

donde $x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, ..., n.$

Por su definición, $y(x)$ es admisible, continua y tiene derivada continua a trozos:

$$y'(x) = f(x_{i-1}, y(x_{i-1}))$$

con $x_{i-1} < x < x_i$ e $i = 1, 2, ..., n$. Además, si $x_{i-1} < x < x_i$, se verifica que

$$|y'(x) - f(x, y(x))| = |f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) - f(x.y(x))|$$

donde hemos sustituido literalmente la expresión anterior para la derivada.

Teniendo en cuenta la segunda propiedad del conjunto de puntos x_i, y la expresión recurrente de $y(x)$,

$$|y(x) - y(x_{i-1})| \leq M|x - x_{i-1}| \leq M\frac{\delta}{M} = \delta$$

De aquí, en virtud de la continuidad uniforme de f,

$$|f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) - f(x, y(x)| \leq \epsilon$$

y, por tanto,

$$|y'(x) - f(x, y(x))| \leq \epsilon$$

salvo en un número finito de puntos. Con lo cual, y verifica todas las hipótesis necesarias, de forma que es una solución aproximada.

- Solución exacta

Teorema 1.3.3 *Si $f(x, y)$ es continua y lipschitziana respecto de y en un dominio D, esto es, existe $k > 0$ de manera que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$; entonces, dado $(x_0, y_0) \in D$ existe una solución exacta de $y' = f(x, y)$ en $|x - x_0| \leq h$, donde h está definida como en la proposición anterior, y tal que:*

$$y(x_0) = y_0$$

Demostración: Dada una sucesión ϵ_n positiva, monótona y que tenga por límite 0, según la proposición anterior existe una sucesión de funciones $y_n(x)$ que satisface que $y_n'(x)$ se diferencia de $f(x, y_n(x))$ en menos de ϵ_n e $y_n(x_0) = y_0$; es decir,

$$|y_n'(x) - f(x, y_n(x))| \leq \epsilon_n |x - x_0| \leq h \tag{1.32}$$

excepto para el número finito de puntos determinado.
Acéptese sin demostración que la sucesión $y_n(x)$ converge uniformemente sobre $|x - x_0| \leq h$ hacia una función continua $y(x)$.
Construimos ahora la sucesión

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx \tag{1.33}$$

que, para $|x - x_0| \leq h$, converge uniformemente a

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{1.34}$$

Para ver esto, tengamos en mente el rectángulo $R : |x - x_o| \leq h$, $|y - y_0| \leq Mh$ incluido en D por hipótesis. Por ser $f(x, y)$ continua en el dominio cerrado R, tenemos que, dado $\epsilon \geq 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \epsilon (x, y_1), (x, y_2) \in R, |y_1 - y_2| \leq \delta$$

Del mismo modo, para este $\delta > 0$ existe un N tal que

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq \epsilon, |x - x_o| \leq h$$

Por tanto, la sucesión $\{f(x, y_n(x))\}$ converge uniformemente a $f(x, y(x))$. Luego, por un conocido teorema, podemos permutar la integración con el paso al límite en la sucesión. Consecuentemente, queda demostrado que (1.33) converge a (1.34).

Completamos la demostración viendo que $y(x)$ es derivable, $y(x_0) = y_0$ e $y'(x) = f(x, y(x))$, para $|x - x_0| \leq h$.
Integramos los dos miembros de (1.32) desde x_0 hasta x obtenemos

$$|\int_{x_0}^{x} \left(\frac{dy_n(t)}{dt} - f(t, y_n(t))dt \right) | \leq \epsilon_n |x - x_0| \leq \epsilon_n h$$

pero puesto que $y_n(t)$ es continua, por el teorema fundamental del cálculo

$$|y_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt| \leq \epsilon_n h$$

Pasando al límite la sucesión como hemos hecho antes, obtenemos

$$y(x) - y(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = 0$$

quedando demostrado el teorema de existencia. $\square$

2. Unicidad

Teorema 1.3.4 *Si $f(x, y)$ es continua y lipschitziana respecto de y en un dominio D, y si (x_0, y_0) está en D, e $y(x)$, $\overline{y}(x)$ son dos soluciones exactas de $y' = f(x, y)$ en un intervalo $|x - x_0| \leq h$ tales que $y(x_0) = \overline{y}(x_0) = y_0$, entonces $y(x) = \overline{y}(x)$ cuando $|x - x_0| \leq h$; es decir, existe como máximo una sola curva integral que pasa por cualquier punto de D.*

Demostración: Haremos la demostración para $x_0 \leq x \leq x_0 + h$.
Sea $p(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Como $y(x)$ e $\overline{y}(x)$ son exactas se verifica

$$|\frac{dy}{dx} - f(x, y)| = 0, |\frac{d\overline{y}}{dx} - f(x, \overline{y}| = 0 \tag{1.35}$$

en el intervalo considerado.
Por otra parte

$$|\frac{dy}{dx} - \frac{d\overline{y}}{dx}| = |\frac{dy}{dx} - \frac{d\overline{y}}{dx} + f(x, y) - f(x, y) + f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{y})|$$

de donde, aplicando la desigualdad triangular, se deduce que

$$|\frac{dy}{dx} - \frac{d\overline{y}}{dx}| \leq |f(x, y) - f(x, \overline{y})| + |\frac{dy}{dx} - f(x, y)| + |\frac{d\overline{y}}{dx} - f(x, y)|$$

Teniendo en cuenta (1.35) y la condición de Lipschitz, se deduce que

$$|\frac{dp}{dx}| \leq k|p|, x_0 \leq x \leq x_0 + h$$

Allá donde $p(x) \geq 0$ (se haría análogamente si fuera negativo y trivialmente si fuera nulo) se cumple

$$\frac{dp}{dx} \leq kp(x)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que la exponencial es siempre positiva, se puede escribir

$$e^{-kx}(p'(x) - kp(x)) \leq 0$$

Integrando entre x_0 y x,

$$\int_{x_0}^{x} e^{-kx}(p'(x) - kp(x))dx \leq 0$$

Con lo que podemos escribir

$$[e^{-kx}p(x)]_x^{x_0} \leq 0$$

o bien

$$p(x) \leq e^{k(x_0 - x)}p(x_0) = 0$$

ya que $p(x_0) = 0$. De aquí se deduce trivialmente que $y(x) = \overline{y}(x)$ en el intervalo considerado, tal y como queríamos demostrar. □

Resumiendo lo expuesto anteriormente, el teorema de existencia y unicidad afirma tres cosas;

1. El problema con valor inicial tiene una solución; en otras palabras, existe una solución.

2. El problema con valor inicial tiene una sola solución; es decir, la solución es única.

3. La solución es una función por lo menos dos veces diferenciable en todo el intervalo I en donde los coeficientes son continuos.

Para algunos problemas, es fácil probar algunas de estas afirmaciones. Por ejemplo, tenemos el problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \tag{1.36}$$

tiene la solución

$$y = \frac{1}{2}\,e^{x} + \frac{3}{2}\,e^{-x} \tag{1.37}$$

El hecho de que se encuentre una solución evidentemente establece que existe una solución para este problema con valor inicial. De manera semejante, la solución (1.37) es dos veces diferenciable, de hecho lo es cualquier número de veces, en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ en donde los coeficientes de la ecuación diferencial son continuos. Por otra parte, no es obvio, y es más difícil demostrar, que el problema con valor inicial (1.36) no tiene otras soluciones que no sean la dada por la ecuación (1.37). Sin embargo, el teorema de existencia y unicidad afirma que esta solución es única, de modo que (1.37) es, de hecho, la única solución del problema con valor inicial (1.36).
Supóngase ahora que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación (1.29); en otras palabras,

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \tag{1.38}$$

y de manera semejante para y_2. Entonces, es posible generar más soluciones mediante la formación de combinaciones lineales de y_1 y y_2 Se enunciará este resultado como un teorema.

Teorema 1.3.5 (Principio de superposición) *Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial* (1.29)*,*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

entonces la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución para cualesquiera valores de las constantes c_1 y c_2.

Demostración: Para demostrar este teorema solamente es necesario sustituir y por

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{1.39}$$

en la ecuación (1.29); el resultado es

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \end{aligned}$$

Dado que $L[y_1]=0$ y $L[y_2]=0$, se deduce también que $L[c_1y_1+c_2y_2]=0$. Por lo tanto, sin importar los valores de c_1 y c_2 en la expresión (1.39), y satisface la ecuación diferencial (1.29) y se ha completado la demostración del teorema anterior, el principio de superposición. $\square$

Un caso especial de este teorema es si c_1 o c_2 son cero. Entonces se concluye que cualquier múltiplo de una solución de la ecuación (1.29) también es una solución.
Ahora se regresará a la cuestión de si pueden elegirse las constantes c_1 y c_2 de modo que satisfagan las condiciones iniciales de (1.30). Estas condiciones iniciales requieren que c_1 y c_2 satisfagan las ecuaciones

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0\,, \qquad c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y_0' \tag{1.40}$$

Al resolver las ecuaciones (1.40) para c_1 y c_2, se encuentra que

$$c_1=\frac{y_0y_2'(x_0)-y_0'y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2(x_0)} \quad c_2=\frac{-y_0'y_1(x_0)+y_0y_1'(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2(x_0)} \tag{1.41}$$

o bien en términos de determinantes,

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}}, \quad c_2=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}} \tag{1.42}$$

Con estos valores de c_1 y c_2, la expresión (1.39) satisface las condiciones iniciales de (1.30), así como la ecuación diferencial (1.29).
A fin de que las expresiones para c_1 y c_2 de las ecuaciones (1.41) o (1.42) tengan sentido, es necesario que los denominadores sean diferentes de cero. Para las dos, c_1 y c_2, el denominador es el mismo; a saber, el determinante

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2(x_0) \tag{1.43}$$

El determinante W se conoce como determinante wronskiano, o simplemente wronskiano, de las soluciones y_1 y y_2. Algunas veces se utiliza la notación más amplia $W(y_1,y_2)(x_0)$ para representar la expresión del segundo miembro de la ecuación (1.43), haciendo resaltar de esta manera que el wronskiano depende de las funciones y_1 y y_2, y que se evalúa en el punto x_0. La argumentación precedente basta para establecer el resultado siguiente.

Teorema 1.3.6 *Supóngase que* y_1 *y* y_2 *son dos soluciones de la ecuación* (1.29),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

y que el wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

es diferente de cero en el punto x_0 *donde se asignan las condiciones iniciales* (1.30)

$$y(x_0) = y_0 \qquad\qquad y'(x_0) = y_0'$$

Entonces existe una elección de las constantes c_1 *y* c_2 *para la que* $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *satisface la ecuación diferencial* (1.29) *y las condiciones iniciales* (1.30).

El siguiente teorema justifica la expresión "solución general" que se introdujo en la sección anterior para la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$.

Teorema 1.3.7 *Si* y_1 *y* y_2 *son dos soluciones de la ecuación diferencial* (1.29),

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

y si existe un punto x_0 *en donde el wronskiano de* y_1 *y* y_2 *es diferente de cero, entonces la familia de soluciones*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

con coeficientes arbitrarios c_1 *y* c_2 *incluye toda solución de la ecuación* (1.29).

Demostración: Sea ϕ cualquier solución de la ecuación (1.29). Para probar el teorema es necesario demostrar que ϕ está incluida en la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$; es decir, para alguna elección de las constantes c_1 y c_2 la combinación lineal es igual a ϕ. Sea x_0 un punto en donde el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero. Entonces, evalúense ϕ y ϕ' en este punto y se llama a estos valores y_0 y y_0', respectivamente. Por tanto,

$$y_0 = \phi(x_0) \qquad\qquad y_0' = \phi'(x_0)$$

A continuación, considérese el problema de valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_0' \tag{1.44}$$

La función ϕ evidentemente es una solución de este problema con valor inicial. Por otra parte, como $W(y_1, y_2)(x_0)$ es diferente de cero, es posible por el teorema (1.3.6) elegir c_1 y c_2 de modo que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también sea una solución del problema con valor inicial (1.44). En efecto, los valores adecuados de c_1 y c_2 los dan las ecuaciones (1.41) o (1.42). La parte de unicidad del teorema (1.3.1) garantiza que estas dos soluciones del mismo problema con valor inicial en realidad son la misma función; por tanto, para la elección adecuada de c_1 y c_2,

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

y por lo tanto, ϕ está incluida en la familia de funciones $c_1y_1 + c_2y_2$. Por último, como ϕ es una solución arbitraria de (1.29), se concluye que toda solución de esta ecuación está incluida en esta familia. Esto completa la demostración del teorema (1.3.7). $\square$

El teorema anterior afirma que, en tanto que el wronskiano de y_1 y y_2 sea diferente de cero, la combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ contiene todas las soluciones de la ecuación (1.29). Por consiguiente, es natural llamar a la expresión

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

con coeficientes constantes arbitrarios, solución general de (1.29). Se dice que las soluciones y_1 y y_2 con wronskiano diferente de cero, forman un conjunto fundamental de soluciones de (1.29).
Puede enunciarse el resultado del teorema (1.3.7) en un lenguaje ligeramente diferente: para encontrar la solución general y, por lo tanto, todas las soluciones de una ecuación de la forma (1.29), basta hallar dos soluciones de la ecuación dada cuyo wronskiano sea diferente de cero.

Ejemplo 4 *Demostrar que $y_1(x) = x^{1/2}$ y $y_2(x) = x^{-1}$ forman un conjunto fundamental de soluciones de*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0$$

Solución: Vamos a comprobar por sustitución directa que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Dado que $y_1' = 1/2x^{-1/2}$ y $y''(x) = -1/4x^{-3/2}$, se tiene

$$2x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) + 3x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - x^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)x^{1/2} = 0$$

De modo semejante, $y_2'(x) = -x^{-2}$ y $y''(x) = 2x^{-3}$, así que

$$2x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0$$

A continuación el wronskiano W de y_1 y y_2:

$$W = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{-3/2}$$

Como $W \neq 0$ para $x > 0$, se concluye que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones allí.

En varios casos ha sido posible hallar un conjunto fundamental de soluciones y, por lo tanto, la solución general de una ecuación diferencial dada. Sin embargo, a menudo esto es una tarea difícil y puede surgir la pregunta de si una ecuación diferencial de la forma (1.29) siempre tiene un conjunto fundamental de soluciones. El siguiente teorema da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 1.3.8 *Considérese la ecuación diferencial* (1.29)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

cuyos coeficientes p y q son continuos sobre algún intervalo abierto I. Elija algún punto x_0 en I. Sea y_1 la solución de la ecuación (1.29) *que también satisface las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0$$

y y_2 la solución de (1.29) *que satisface las condiciones iniciales*

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 1$$

Entonces y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (1.29).

Demostración: Primero, observe que la existencia de las funciones y_1 y y_2 está asegurada por parte de la existencia del teorema (1.3.1). Para demostrar que forman un conjunto fundamental de soluciones, basta calcular su wronskiano en x_0:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ya que su wronskiano es diferente de cero en el punto x_0 las funciones y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, con lo que se completa la demostración del teorema (1.3.8). $\square$

Observe que se justifica la parte difícil de esta demostración, demostrar la existencia de un par de soluciones, con referencia al teorema (2.2.1). Observe también que el teorema (2.2.8) no está dirigido a cómo resolver los problemas con valor inicial especificados, de modo que puedan encontrarse las funciones y_1 y y_2 indicadas en el teorema.

Ejemplo 5 *Encuentre el conjunto fundamental de soluciones especificado por el teorema* (1.3.8), *para la ecuación diferencial*

$$y'' - y = 0 \tag{1.45}$$

si se utiliza el punto inicial $x_0 = 0$

Solución: Vemos fácilmente que las soluciones de la ecuación (1.45) viendo la sección anterior son $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$. El wronskiano de estas soluciones es $W = -2 \neq 0$, de modo que forman un conjunto fundamental de soluciones. Sin embargo, no son las soluciones fundamentales indicadas por el teorema (1.3.8) porque no satisfacen las condiciones iniciales mencionadas en ese teorema en el punto $x = 0$. A fin de encontrar las soluciones fundamentales especificadas por el teorema es necesario hallar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales adecuadas. Se denota por $y_3(x)$ la solución de la ecuación (1.45) que satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{1.46}$$

La solución general de la solución de la ecuación (1.45) es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \tag{1.47}$$

y satisfacen las condiciones iniciales (1.46) si $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 1/2$. Por lo tanto

$$y_3(x) = \frac{1}{2}\,e^x + \frac{1}{2}\,e^{-x} = cosh(x)$$

De manera semejante, si $y_4(x)$ satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

entonces

$$y_4(x) = \frac{1}{2}\,e^x - \frac{1}{2}\,e^{-x} = senh(x)$$

Como el wronskiano de y_3 y y_4 es

$$W = cosh^2 x - senh^2 x = 1$$

entonces estas funciones también forman un conjunto fundamental de soluciones, como se afirma en el teorema (1.3.8). Por lo tanto, la solución general de (1.45) puede escribirse como

$$y = k_1 cosh(x) + k_2 senh(x) \tag{1.48}$$

así como en la forma (1.47). Se han usado k_1 y k_2 para denotar las constantes arbitrarias de (1.48) porque no son las mismas que las constantes c_1 y c_2 de (1.47).
Una de las finalidades de este ejemplo es aclarar que una ecuación diferencial dada tiene más de un conjunto fundamental de soluciones; de hecho tiene una infinidad. Como regla, debe elegirse el conjunto que resulte más conveniente.

El análisis de esta sección puede resumirse como sigue. Para encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad \alpha < x < \beta$$

primero es necesario hallar dos funciones y_1 y y_2 que satisfagan la ecuación diferencial en el intervalo $\alpha < x < \beta$. En seguida, debe tenerse la seguridad de que existe un punto en el intervalo en el que el wronskiano de y_1 y y_2 es diferente de cero. En estas circunstancias, y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Si se prescriben condiciones iniciales en un punto de $\alpha < x < \beta$, entonces pueden elegirse c_1 y c_2 de modo que satisfagan estas condiciones.

1.4. Independencia lineal y el wronskiano

La representación de la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden como una combinación lineal de dos soluciones cuyo wronskiano es diferente de cero está estrechamente relacionada con el concepto de independencia lineal de dos funciones.
Se dice que dos funciones f y g son linealmente dependientes sobre un intervalo si existen dos constantes k_1 y k_2, no ambas cero, tales que

$$k_1 f(x) + k_2 g(x) = 0 \tag{1.49}$$

para toda x en el intervalo. Se dice que las funciones f y g son linealmente independientes sobre un intervalo si no son linealmente dependientes; es decir, si la ecuación (1.49) se cumple para toda x en el intervalo sólo si $k_1 = k_2 = 0$. Aunque puede ser difícil determinar si un conjunto grande de funciones es linealmente dependiente o independiente, suele ser fácil dar respuesta a esta pregunta para un conjunto de sólo dos funciones: son linealmente dependientes si son proporcionales entre sí y linealmente independientes en caso contrario.

Teorema 1.4.1 *Si f y g son funciones diferenciables sobre un intervalo abierto I y si $W(f,g)(x_0) \neq 0$ para algún punto x_0 en I, entonces f y g son linealmente independientes sobre I. De manera alternativa, si f y g son linealmente dependientes sobre I, entonces $W(f,g)(x) = 0$ para toda x en I.*

Demostración: Para probar la primera parte del teorema considérese una combinación lineal $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ y supóngase que esta expresión es cero en todo el intervalo. Si se evalúan la expresión y su derivada en x_0 se tiene

$$\begin{cases} k_1 f(x_0) + k_2 g(x_0) = 0 \\ k_1 f'(x_0) + k_2 g'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.50}$$

El determinante de los coeficientes de las ecuaciones (1.50) es precisamente $W(f,g)(x_0)$, que por hipótesis es diferente de cero. Por lo tanto, la única solución de las ecuaciones (1.50) es $k_1 = k_2 = 0$, de modo que f y g son linealmente independientes.
La segunda parte del teorema se deduce de manera inmediata a partir de la primera. Sean f y g linealmente dependientes y supóngase que la conclusión es falsa; es decir, $W(f,g)$ no es cero en todo punto de I. Entonces, existe un punto x_0 tal que $W(f,g)(x_0) \neq 0$; por la primera parte del teorema esto significa que f y g son linealmente independientes, lo cual es una contradicción, con lo que se completa la demostración. $\square$

El siguiente teorema da una fórmula explícita simple para el wronskiano de dos soluciones cualesquiera de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Teorema 1.4.2 (Teorema de Abel) *Si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.51}$$

en donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I, entonces el wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ está dado por

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left[-\int p(x)dx\right] \tag{1.52}$$

en donde c es cierta constante que depende de y_1 y y_2, pero no de x. Es mas, $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I (si $c = 0$), o bien, nunca es cero en I (si $c \neq 0$).

Demostración: Para probar el Teorema de Abel, nótese en principio que y_1 y y_2 satisfacen

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases} \tag{1.53}$$

Si se multiplica la primera ecuación por $-y_2$ la segunda por y_1 y se suman las ecuaciones resultantes, se obtiene

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0 \tag{1.54}$$

Si se hace $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ y se observa que

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2 \tag{1.55}$$

es posible escribir la ecuación (1.54) en la forma

$$W' + pW = 0 \tag{1.56}$$

La ecuación (1.56) es una ecuación lineal de primer orden que puede resolverse de inmediato. Por tanto,

$$W(x) = c\, \exp\left[-\int p(x)dx\right] \tag{1.57}$$

en donde c es una constante. El valor de c depende del par de soluciones de (1.50) que intervengan. Sin embargo, dado que la función exponencial nunca es cero, $W(x)$ no es cero a menos que $c = 0$, en cuyo caso $W(x)$ es cero para toda x, con lo que se completa la demostración del teorema. $\square$

Vamos a buscar una versión del teorema anterior si las dos funciones que intervienen son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

Teorema 1.4.3 *Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación* (1.53)

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, y_1 y y_2 son linealmente dependientes sobre I, si y sólo si $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I. De manera alternativa, y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre I si y sólo si $W(y_1, y_2)(x)$ nunca es cero en I.

Demostración: Por el teorema (1.4.2) se sabe que $W(y_1, y_2)(x)$ es cero en todo punto de I, o bien, no es cero en ningún punto de I. Al probar el teorema (1.4.3), observe en primer lugar que si y_1 y y_2 son linealmente dependientes, entonces $W(y_1, y_2)(x)$ es cero para toda x en I, por el teorema (1.4.1). Queda por demostrar la inversa; es decir, si $W(y_1, y_2)(x)$ es cero en todo el intervalo I, entonces y_1 y y_2 son linealmente dependientes. Sea x_0 cualquier punto en I; entonces necesariamente $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. Como consecuencia, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.58}$$

para c_1 y c_1 tiene una solución no trivial. Si se usan estos valores de c_1 y c_1 sea $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, Entonces ϕ es una solución de la ecuación (1.51), y, por las ecuaciones (1.58), ϕ también satisface las condiciones iniciales

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x_0) = 0 \tag{1.59}$$

Por consiguiente, por la parte del Teorema de existencia y unicidad (1.3.1), $\phi(x) = 0$ para toda x en I. Ya que $\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, en donde c_1 y c_2 no son cero las dos, esto significa que y_1 y y_2 son linealmente dependientes. La proposición alternativa del teorema se deduce de inmediato. $\square$

Ahora es posible resumir los hechos acerca de los conjuntos fundamentales de soluciones, wronskianos e independencia lineal de la siguiente manera: sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación (1.51),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en donde p y q son continuas sobre un intervalo abierto I. Entonces, las cuatro proposiciones siguientes son equivalentes, en el sentido de que cada una incluye a las otras tres.

1. Las funciones y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones sobre I.

2. Las funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes sobre I.

3. $W(y_1, y_2) \neq 0$ para algún x_0 en I.

4. $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo x en I.

Es interesante observar la semejanza entre la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden y el álgebra vectorial bidimensional. Se dice que dos vectores a y b son linealmente dependientes si

existen dos escalares k_1 y k_2 , no ambos cero, tales que $k_1 a + k_2 b = 0$; en caso contrario, se dice que son linealmente independientes. Sean i y j vectores unitarios dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y, respectivamente. Como $k_1 i + k_2 j = 0$ sólo si $k_1 = k_2 = 0$, los vectores i y j son linealmente independientes. Además, se sabe que cualquier vector a con componentes a_1 y a_2 puede escribirse como $a = a_1 i + a_2 j$; es decir, como una combinación lineal de los dos vectores linealmente independiente i y j. No es difícil demostrar que cualquier vector en dos dimensiones puede representarse como una combinación lineal de dos vectores bidimensionales linealmente independientes cualesquiera. Se dice que ese par de vectores linealmente independientes forman una base para el espacio vectorial de los vectores bidimensionales.
La expresión espacio vectorial también se aplica a otras colecciones de objetos matemáticos que obedecen las mismas leyes de la adición y la multiplicación por escalares de los vectores geométricos. Por ejemplo, es posible demostrar que el conjunto de funciones que son dos veces diferenciables sobre el intervalo abierto I forma un espacio vectorial. De modo semejante, el conjunto V de funciones que satisfacen la ecuación (1.51) también forma un espacio vectorial.
Dado que todo miembro de V puede expresarse como una combinación lineal de dos miembros linealmente independientes y_1 y y_2 se dice que ese par forma una base para V. Por esto se concluye que V es bidimensional; por lo tanto, es análogo en muchos aspectos al espacio de los vectores geométricos en un plano.

Ejemplo 6 *En el ejemplo 4 de la sección anterior se comprobó que* $y_1(x) = x^{1/2}$ *y* $y_2(x) = x^{-1}$ *son soluciones de la ecuación*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0 \tag{1.60}$$

Comprobar que el wronskiano de y_1 *y* y_2 *está dado por la ecuación* (1.57).

Solución: Con base al ejemplo que acaba de citarse se sabe que $W(y_1, y_2)(x) = -(3/2)x^{-3/2}$. Para utilizar la ecuación (1.57) es necesario escribir la ecuación diferencial (1.60) en la forma estándar con el coeficiente de y'' igual a uno. Por tanto, se obtiene

$$y'' + \frac{3}{2x}\,y' - \frac{1}{2x^2}\,y = 0$$

de modo que $p(x) = 3/(2x)$. De donde,

$$W(y_1, y_2)(x) = c\ exp\left[-\int \frac{3}{2x}dx\right] = c\ exp\left(-\frac{3}{2}ln \quad x\right) = cx^{-3/2} \tag{1.61}$$

La ecuación (1.61) da el wronskiano de cualquier par de soluciones de (1.60). Para las soluciones particulares dadas en este ejemplo es necesario elegir $c = -3/2$.

1.5. Raíces complejas de la ecuación característica

Vamos a continuar con el análisis de la ecuación

$$ay'' + by' + cy' = 0 \tag{1.62}$$

en donde a, b y c son números reales dados. Anteriormente hemos visto que si se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$, entonces r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{1.63}$$

Si las raíces r_1 yr_1 son reales y diferentes, lo que ocurre siempre que el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces la solución general de (1.62) es

$$x = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{1.64}$$

Ahora, suponga que $b^2 - 4ac$ es negativo; entonces las raíces de (1.63) son números complejos conjugados; se les denota por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \quad r_2 = \lambda - i\mu \tag{1.65}$$

en donde λ y μ son reales. Las expresiones correspondientes para y son

$$y_1(x) = \exp[(\lambda + i\mu)x], \quad y_2(x) = \exp[(\lambda - i\mu)x] \tag{1.66}$$

La primera tarea es examinar el significado de estas expresiones, lo cual comprende la evaluación de la función exponencial para un número complejo. Por ejemplo, si $\lambda = -1$, $\mu = 2$ y $x = 3$; entonces, por la ecuación (1.66),

$$y_1(3) = e^{-3+6i} \tag{1.67}$$

Para explicar este resultado, vamos a ver una importante relación conocida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler
Para dar significado a las ecuaciones (1.66) es necesario contar con una definición de la función exponencial compleja. Por supuesto, se desea que la

definición se reduzca a la función exponencial real conocida cuando el exponente es real. Existen varias maneras de realizar esta extensión de la función exponencial. Aquí se aplica un método basado en series infinitas.
Recordemos, por lo visto en cálculo elemental, que la serie de Taylor para e^x en torno $x = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad -\infty < x < \infty \tag{1.68}$$

Si ahora se supone que x puede sustituirse por ix en (1.68), se tiene

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{1.69}$$

en donde la suma se ha separado en sus partes real e imaginaria, aplicando el hecho de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etcétera. La primera serie de la ecuación (1.69) es precisamente la serie de Taylor para cos x en torno a $x = 0$ y la segunda es la serie de Taylor para sen x en torno a $x = 0$. Por tanto, se tiene

$$e^{ix} = cos\ x + isen\ x \tag{1.70}$$

La ecuación (1.70) se conoce como fórmula de Euler y es una relación matemática extremadamente importante. Aunque su deducción se basa en la suposición no verificada de que se puede usar la serie (1.68) para valores complejos, así como para valores reales, de la variable independiente, la intención es utilizar esta deducción solamente para que la ecuación (1.70) parezca razonable. Ahora los hechos se colocan sobre una base firme al adoptar la ecuación (1.70) como la definición de e^{ix} . En otras palabras, siempre que se escribe e^{ix} se refiere a la expresión del segundo miembro de (1.70).
Existen algunas variantes de la fórmula de Euler que también vale la pena hacer notar. Si en (1.70) se sustituye x por μx y se recuerda que $cos(-x) = cos\ x$ y $sen(-x) = -sen\ x$, se tiene

$$e^{-ix} = \cos\ x - i \text{ sen } x \tag{1.71}$$

Además, si en la ecuación (1.70) se sustituye x por μx, entonces se obtiene una versión generalizada de la fórmula de Euler; a saber,

$$e^{i\mu x} = \cos\ \mu x + i \text{ sen } \mu x \tag{1.72}$$

A continuación, se desea ampliar la definición de la función exponencial hacia exponentes complejos arbitrarios de la forma $(\lambda + i\mu)x$. Dado que se desea que las propiedades acostumbradas de la función exponencial se cumplan para los exponentes complejos, es evidente que se desea que $exp[(\lambda + i\mu)x]$ satisfaga

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x}e^{i\mu x} \tag{1.73}$$

Entonces, si se sustituye esta expresión por $e^{i\mu x}$ en (1.72), se obtiene

$$e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x}(cos\ \mu x + isen\ \mu x) = e^{\lambda x}cos\ \mu x + ie^{\lambda x}sen\ \mu x \tag{1.74}$$

Ahora se tomará a la ecuación (1.74) como la definición de $exp[(\lambda + i\mu)x]$. El valor de la función exponencial con un exponente complejo es un número complejo cuyas partes real e imaginaria están dadas por los términos del segundo miembro de (1.74). Observe que las partes real e imaginaria de $exp[(\lambda+i\mu)x]$ se expresan por completo en términos de funciones elementales con valores reales. Por ejemplo, la cantidad de la ecuación (1.67) tiene el valor

$$e^{-3+6i} = e^{-3}cos\ 6 + ie^{-3}sen\ 6 \approx 0{,}0478041 - 0{,}0139113i$$

Con las definiciones (1.70) y (1.74) resulta directo demostrar que las leyes usuales de los exponentes son válidas para la función exponencial compleja. También es fácil verificar que la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx}(e^{rx}) = re^{rx} \tag{1.75}$$

también se cumple para valores complejos r.

Soluciones con valores reales

Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dadas por las ecuaciones (1.68) y con el significado expresado por la (1.74), son soluciones de la ecuación (1.62) cuando las raíces de la ecuación característica (1.63) son los números complejos $\lambda \pm i\mu$. Desafortunadamente, las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son funciones con valores complejos, mientras que en general sería preferible tener soluciones con valores reales, en caso de ser posible. Pueden encontrarse estas soluciones como una consecuencia del teorema (1.3.5), el que afirma que si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de (1.62), entonces cualquier combinación lineal de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ también es una solución. En particular, al formar la suma y después la diferencia de $y_1(x)$ y $y_2(x)$, se tiene

$$y_1(x) + y_2(x) = e^{\lambda x}(cos\ \mu x + isen\ \mu x) + e^{\lambda x}(cos\ \mu x - isen\ \mu x) = 2e^{\lambda x}cos\ \mu x$$

y

$$y_1(x) - y_2(x) = e^{\lambda x}(cos\ \mu x + isen\ \mu x) - e^{\lambda x}(cos\ \mu x - isen\ \mu x) = 2ie^{\lambda x}sen\ \mu x$$

De donde, si se desprecian los factores constantes 2 y $2i$, respectivamente, se obtiene un par de soluciones con valores reales,

$$u(x) = e^{\lambda x} cos\ \mu x, \quad v(x) = e^{\lambda x} sen\ \mu x \tag{1.76}$$

Observe que u y v son tan sólo las partes real e imaginaria, respectivamente, de y_1. Por cálculo directo es posible demostrar que el wronskiano de u y v es

$$W(u,v)(x) = \mu e^{2\lambda x} \tag{1.77}$$

Por tanto, mientras $\mu \neq 0$, el wronskiano W no es cero, de modo que u y v forman un conjunto fundamental de soluciones. (Por supuesto, si $\mu = 0$ entonces las raíces son reales y no es aplicable el análisis de esta sección). Como consecuencia, si las raíces de la ecuación característica son los números complejos $\lambda \pm i\mu$, con $\mu \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación (1.62) es

$$y = c_1 = c_1 e^{\lambda x} cos\ \mu x + c_2 e^{\lambda x} sen\ \mu x \tag{1.78}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Obsérvese que la solución de (1.78) puede escribirse tan pronto como se conocen las valores de λ y μ.

Ejemplo 7 *Encontrar la solución general de*

$$y'' + y' + y = 0 \tag{1.79}$$

Solución: La ecuación característica es

$$r^2 + r + 1 = 0$$

y sus raíces son

$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, $\lambda = -1/2$ y $\mu = \sqrt{3}/2$, de modo que la solución general de la ecuación (1.79) es

$$y = c_1 e^{-x/2} cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + c_2 e^{-x/2} sen \frac{\sqrt{3}x}{2} \tag{1.80}$$

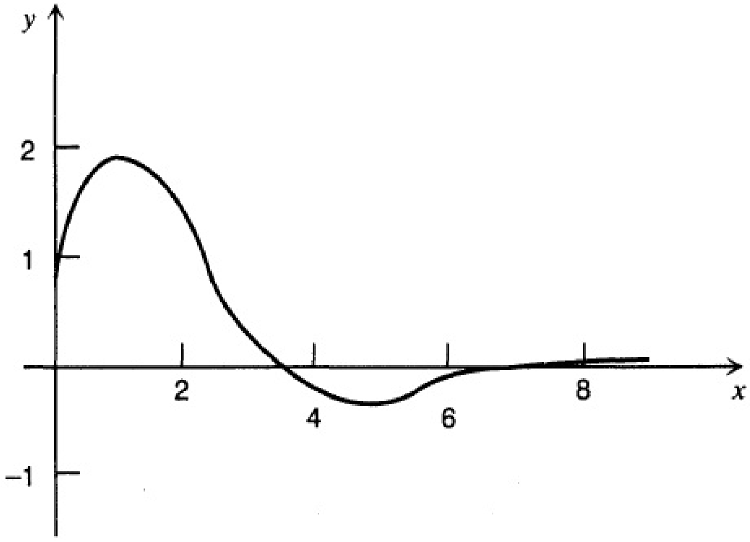

Figura 1.4: Una solución típica de $y'' + y' + y = 0$

Ejemplo 8 *Encontrar la solución general de*

$$y'' + 9y = 0 \tag{1.81}$$

Solución: La ecuación característica es $r^2 + 9 = 0$ con las raíces $r = \pm 3i$; por lo tanto, $\lambda = 0$ y $\mu = 0$. La solución general es

$$y = c_1 cos\ 3x + c_2 sen\ 3x \tag{1.82}$$

obsérvese que si la parte real de las raíces es cero, como en este ejemplo, entonces no hay factor exponencial en la solución.

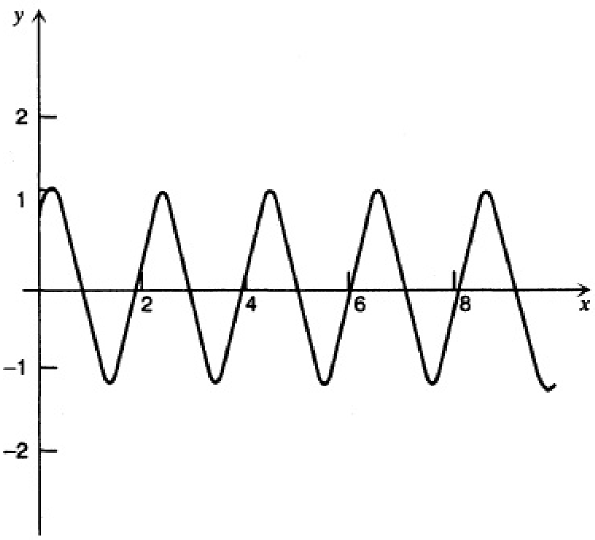

Figura 1.5: Una solución típica de $y'' + 9y = 0$

Ejemplo 9 *Encontrar la solución del problema con valor inicial*

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1 \tag{1.83}$$

Solución: La ecuación característica es $16r^2 - 8r + 145 = 0$ y sus raíces son $r = 1/4 \pm 3i$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{x/4} cos\ 3x + c_2 e^{x/4} sen\ 3x \tag{1.84}$$

Para aplicar la primera condición inicial se hace $x = O$ en la ecuación (1.84); esto da

$$y(0) = c_1 = -2$$

Para la segunda condición inicial es necesario derivar la (1.84) y después hacer $x = 0$. Así, se encuentra que

$$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1$$

de lo cual $c_2 = 1/2$. Si se usan estos valores de c_1 y c_2 en la (1.84), se obtiene

$$y = -2e^{x/4} cos\ 3x + \frac{1}{2}e^{x/4} sen\ 3x \tag{1.85}$$

como la solución del problema con valor inicial (1.83).

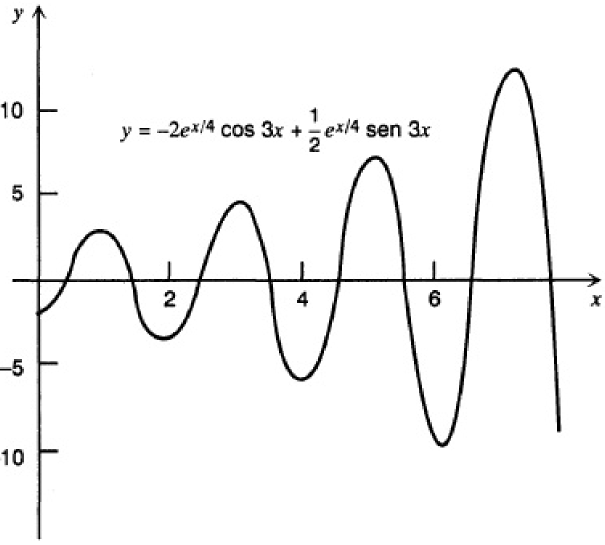

Figura 1.6: Solución de $16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1$

Cada una de las soluciones u y v de las ecuaciones (1.76) representa una oscilación, debido a los factores trigonométricos, y también crece o decae exponencialmente, dependiendo del signo de λ (a menos que $\lambda = 0$). En en ejemplo (7) se tiene $\lambda = -1/2 < 0$, por lo que las soluciones son oscilaciones que se extinguen. En la figura (1.4) se muestra la gráfica de una solución típica de la ecuación (1.79). Por otra parte, $\lambda = 1/4 > 0$ en el ejemplo (9), por lo que las soluciones de la ecuación diferencial (1.84) son oscilaciones crecientes. En la figura (1.6) se muestra la gráfica de la solución(1.85) del problema con valor inicial dado. El caso intermedio se ilustra en el ejemplo (8), en el que $\lambda = 0$. En este caso la solución no crece ni decrece exponencialmente, oscila de manera estable; en la figura (1.5) se muestra una solución típica de la ecuación (1.82).

1.6. Reducción de orden

Anteriormente se ha tratado como resolver la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.86}$$

cuando las raíces de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{1.87}$$

son reales y diferentes, o bien, complejas conjugadas. Ahora se considerará la tercera posibilidad; que las dos raíces r_1 y r_2 sean iguales. Este caso se presenta cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es cero y, por la fórmula cuadrática, se deduce que

$$r_1 = r_2 = -b/2a \tag{1.88}$$

Vemos que la dificultad está en que las dos raíces dan la misma solución

$$y_1(x) = e^{-bx/2a} \tag{1.89}$$

de la ecuación diferencial (1.86), y no se ve a primera vista cómo hallar una segunda solución. Vamos a tratar un ejemplo para intentar aclarar este aspecto.

Ejemplo 10 *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{1.90}$$

Solución: La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Por lo tanto, una solución de la ecuación (1.90) es $y_1(x) = e^{-2x}$. Para encontrar la solución general de (1.90) se necesita una segunda solución que no sea un múltiplo de y_1. Puede hallarse esta segunda solución por un método ideado por D'Alembert en el siglo XVIII. Recordemos que como $y_1(x)$ es una solución de (1.86), también lo es $cy_1(x)$ para cualquier constante c. La idea básica es generalizar esta observación al sustituir c por una función $v(x)$ y luego intentar determinar $v(x)$ de modo que el producto $v(x)y_1(x)$ sea una solución de la ecuación (1.86). Para realizar este procedimiento se sustituye $y = v(x)y_1(x)$ en (1.86) y se usa la ecuación resultante para hallar $v(x)$. Si parte de

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-2x} \tag{1.91}$$

se tiene

$$y' = v'(x)e^{-2x} - 2v(x)e^{-2x} \tag{1.92}$$

y

$$y'' = v''(x)e^{-2x} - 4v'(x)e^{-2x} + 4v(x)e^{-2x} \tag{1.93}$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones (1.91), (1.92) y (1.93) en (1.90) y agrupar términos, se obtiene

$$[v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) + 4v'(x) - 8v(x) + 4v(x)]e^{-2x} = 0$$

que simplifica a

$$v''(x) = 0 \tag{1.94}$$

Por consiguiente

$$v'(x) = c_1$$

y

$$v(x) = c_1 x + c_2 \tag{1.95}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por último, al sustituir $v(x)$ de la ecuación (1.91) por la expresión dada en la (1.95), se obtiene

$$y = c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-2x} \tag{1.96}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (1.96) corresponde a la solución original $y_1(x) = \exp(-2x)$, pero el primer término surge de una segunda solución a saber, $y_2(x) = x\exp(-2x)$. Es evidente que estas dos soluciones no son proporcionales, pero puede verificarse que son linealmente independientes al calcular su wronskiano:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x} \neq 0$$

Por lo tanto,

$$y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = xe^{-2x} \tag{1.97}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (1.90), y la solución general de esa ecuación queda dada por (1.96).

El procedimiento utilizado en el ejemplo (10) puede extenderse a una ecuación general cuya ecuación característica tiene raíces repetidas. Es decir, se supone que los coeficientes de la ecuación (1.86) satisfacen $b^2 - 4ac = 0$, en cuyo caso

$$y_1(x) = e^{-bx/2a}$$

es una solución. Entonces se supone que

$$y = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-bx/2a} \tag{1.98}$$

y se sustituye en (1.86) para determinar $v(x)$. Se tiene

$$y' = v'(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-bx/2a} \tag{1.99}$$

y

$$y'' = v''(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{a}v'(x)e^{-bx/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(x)e^{-bx/2a} \tag{1.100}$$

Entonces, al sustituir en (1.86) se obtiene

$$\left(a\left[v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right]+b\left[v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right]+cv(x)\right)e^{-bx/2a}=0 \tag{1.101}$$

Si se cancela el factor $\exp(-bx/2a)$, que es diferente de cero, y se reagrupan los demás términos, se encuentra que

$$av''(x)+(-b+b)v'(x)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)v(x)=0 \tag{1.102}$$

Es obvio que el término en que aparece $v'(x)$ es cero. Además, el coeficiente de $v(x)$ es $c-(b^2/4a)$, que también es cero porque $b^2-4ac=0$ en el problema que se está considerando. Por tanto, como en el ejemplo (10), la ecuación (1.102) se reduce a

$$v''(x)=0$$

por consiguiente,

$$v(x)=c_1x+c_2$$

De donde, por la ecuación (1.98), se tiene

$$y=c_1xe^{-bx/2a}+c_2e^{-bx/2a} \tag{1.103}$$

Por tanto, y es una combinación lineal de las dos soluciones

$$y(x)=e^{-bx/2a},\quad y_2(x)=xe^{-bx/2a} \tag{1.104}$$

El wronskiano de estas soluciones es

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} e^{-bx/2a} & xe^{-bx/2a} \\ -\frac{b}{2a}e^{-bx/2a} & \left(1-\frac{bx}{2a}e^{-bx/2a}\right) \end{vmatrix}=e^{-bx/2a} \tag{1.105}$$

Dado que $W(y_1,y_2)(x)$ nunca es cero, las soluciones y_1 y y_2 dadas por la ecuación (1.104) son un conjunto fundamental de soluciones. Además, la ecuación (1.103) es la solución general de (1.86) cuando las raíces de la ecuación característica son iguales. En otras palabras, en este caso existe una solución exponencial correspondiente a la raíz repetida, mientras que se obtiene una segunda solución al multiplicar la solución exponencial por x.

Resumen

Vamos a resumir los resultados que se obtuvieron para las ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes,

$$ay''+by'+cy=0$$

Sean r_1 y r_2 las raíces del polinomio característico correspondiente

$$ar^2 + br + c = 0$$

Si r_1 y r_2 son reales pero no iguales, entonces la solución general de la ecuación diferencial (1.86) es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Si r_1 y r_2 son complejas conjugadas, $\lambda \pm i\mu$, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{\lambda x} cos\ \mu x + c_2 e^{\lambda x} sen\ \mu x$$

Si r_1 y r_2, entonces la solución general es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Reducción de orden
El primer procedimiento utilizado en esta sección para las ecuaciones con coeficientes constantes es de aplicación más general. Supóngase que se conoce una solución $y_1(x)$, que no sea cero en todo punto, de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.106}$$

Para encontrar una segunda solución, sea

$$y = v(x)y_1(x) \tag{1.107}$$

entonces

$$\begin{aligned} y' &= v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x), \\ y'' &= v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x) \end{aligned}$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (1.106) por sus expresiones que acaban de darse y se agrupan los términos, se encuentra que

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0 \tag{1.108}$$

Dado que y_1 es una solución de (1.106), el coeficiente de v en la (1.108) es cero, de modo que la ecuación (1.108) queda

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0 \tag{1.109}$$

A pesar de su apariencia, la ecuación (1.109) es en realidad una ecuación de primer orden para la función v' y es posible resolverla como una ecuación lineal de primer orden o como una ecuación separable. Una vez que se encuentra v', entonces se obtiene v por integración. Finalmente, y se determina a partir de la ecuación (1.107). Este procedimiento se llama método de reducción de orden porque el paso decisivo es la solución de una ecuación diferencial de primer orden para v', en vez de la ecuación original de segundo orden para v.

Ejemplo 11 *Dado que $y_1(x) = x^{-1}$ es una solución de*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x \geq 0 \tag{1.110}$$

hallar una segunda solución linealmente independiente.

Solución: Se hace $y = v(x)x^{-1}$; entonces

$$y' = v'x^{-1} - vx^{-2}, \quad y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}$$

Si se sustituyen y, y' y y'' de la ecuación (1.110) y se agrupan términos se obtiene

$$\begin{aligned}
&2x^2(v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}) + 3x(v'x^{-1} - vx^{-2}) - vx^{-1} = \\
&2xv'' + (-4+3)v' + (4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1})v = \\
&2xv'' - v' = 0
\end{aligned}$$

Observe que el coeficiente de v es cero, como debe ser; esto permite tener una útil comprobación de los pasos algebraicos.
Si se separan las variables en la ecuación anterior y se despeja $v'(x)$, se encuentra que

$$v'(x) = cx^{1/2}$$

entonces

$$v(x) = \frac{2}{3}cx^{1/2} + k$$

Se concluye que

$$y = \frac{2}{3}cx^{1/2} + kx^{-1} \tag{1.111}$$

en donde c y k son constantes arbitrarias. El segundo término del segundo miembro de (1.111) es un múltiplo de $y_1(x)$ y se puede cancelar, pero el primer término proporciona una nueva solución independiente. Si se desprecia la constante multiplicativa arbitraria, se tiene $y_2(x) = x^{1/2}$.

Ejemplo 12 *Comprobar que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden uno,*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1 \tag{1.112}$$

y encontrar una segunda solución linealmente independiente.

Solución: Si $y = x$, entonces $y' = 1$ Y $y" = 0$. Si se sustituyen estas cantidades en la ecuación (1.112) se ve que $y = x$ es una solución de esa ecuación. Para encontrar una segunda solución, sea $y = xv(x)$; entonces

$$y' = xv' + v, \quad y'' = xv'' + 2v'$$

Entonces, si se sustituyen y, y' y $y"$ de la ecuación (1.112), se obtiene

$$(1-x^2)(xv'' + 2v') - 2x(xv' + v) + 2xv = 0$$

o bien

$$x(1-x^2)v'' + (2-4x^2)v' = 0 \tag{1.113}$$

Al separar las variables, es posible escribir la ecuación (1.113) en la forma

$$\frac{(v')'}{v'} = -\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}$$

de lo cual se deduce que

$$v'(x) = \frac{c}{x^2(1-x^2)} \tag{1.114}$$

en donde c es una constante arbitraria. Como consecuencia,

$$v(x) = c\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = c\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = c\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Por lo tanto, si se suprime el multiplicador constante, se encuentra que una segunda solución de (1.112) es

$$y_2(x) = xv(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

1.7. Coeficientes indeterminados: método de la superposición

Vamos a considerar ahora la ecuación no homogénea

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1.115}$$

en donde p, q y g son funciones continuas dadas sobre el intervalo abierto I. La ecuación

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.116}$$

en la que $g(x) = 0$ y p y q son las mismas de (1.115), se llama ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (1.115). Los dos resultados siguientes describen la estructura de las soluciones de la ecuación no homogénea (1.115) y proporcionan una base para construir su solución general.

Teorema 1.7.1 *Si Y_1 y Y_2 son dos soluciones de la ecuación no homogénea* (1.115)*, entonces su diferencia $Y_1 - Y_2$ solución de la ecuación homogénea correspondiente* (1.116)*. Si, además y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones de* (1.116)*, entonces*

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{1.117}$$

en donde c_1 y c_2 son ciertas constantes.

Para probar este resultado, observe que Y_1 y Y_2 satisfacen las ecuaciones

$$L[Y_1](x) = g(x), \quad L[Y_2](x) = g(x) \tag{1.118}$$

Si se resta la segunda de estas ecuaciones de la primera, se tiene

$$L[Y_1](x) - L[Y_2](x) = g(x) - g(x) = 0 \tag{1.119}$$

Sin embargo,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2]$$

porque L es un operador lineal, de modo que (1.119) queda

$$L[Y_1 - Y_2] = 0 \tag{1.120}$$

La ecuación (1.120) establece que $Y_1 - Y_2$ es una solución de la ecuación (1.116). Por último, dado que todas las soluciones de (1.116) pueden expresarse como combinaciones lineales de un conjunto fundamental de soluciones, por el teorema (1.3.7), se deduce que la solución $Y_1 - Y_2$ puede escribirse de esa manera. De donde, la ecuación (1.117) se cumple y demostración queda completa. $\square$

Teorema 1.7.2 *La solución general de la ecuación no homogénea* (1.115) *puede escribirse de la forma*

$$y = \phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{1.121}$$

en donde y_1 *y* y_2 *son un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente* (1.116). c_1 *y* c_2 *son constantes arbitrarias y* Y *es alguna solución específica de la ecuación no homogénea* (1.115).

La demostración del teorema anterior se deduce de inmediato a partir del teorema precedente. Observe que (1.117) se cumple si Y_1 se identifica con una solución arbitraria ϕ de (1.115) y Y_2 se identifica con la solución específica Y. A partir de (1.117) se obtiene en consecuencia

$$\phi(x) - Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{1.122}$$

que es equivalente a la ecuación (1.121). Dado que ϕ es una solución arbitraria de (1.115), la expresión del segundo miembro de (1.121) incluye todas las soluciones de (1.115); por tanto, es natural darle el nombre de solución general de la ecuación (1.115).
El teorema anterior afirma que para resolver la ecuación no homogénea (1.115) es necesario realizar tres cosas:

- Hallar la solución general $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente. Esta solución suele denominarse solución complementaria y puede denotarse por $y_c(x)$.

- Encontrar alguna solución sencilla $Y(x)$ de la ecuación no homogénea. A menudo a esta solución se le menciona como solución particular $y_p(x)$.

- Sumar las funciones encontradas en los dos pasos precedentes.

Ya se analizó cómo hallar $y_c(x)$, por lo menos cuando la ecuación homogénea (1.116) tiene coeficientes constantes. Por lo tanto, ahora vamos a tratar de encontrar una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación no homogénea (1.115).

Método de los coeficientes indeterminados: método de la superposición
La función complementaria y_c es la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1.115). Anteriormente vimos cómo resolver estas ecuaciones cuando los coeficientes son constantes. El primero de dos métodos que debemos considerar para obtener una solución particular, y_p, se llama método de los coeficientes indeterminados. La idea básica es una conjetura acerca de

la forma de y_c originada por los tipos de funciones que forman el dato $g(x)$. El método es básicamente directo, pero está limitado a ecuaciones lineales no homogéneas, como la ecuación (1.115), en que los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son constantes y $g(x)$ es una constante k, una función polinomial, una función exponencial e^{ax}, funciones seno o coseno o sumas y productos finitos de esas funciones. Basicamente, $g(x)$ es una combinación lineal de funciones del tipo

$$x^n,\ x^n e^{ax},\ x^n e^{ax} cos\ \beta x \text{ y } x^n e^{ax} sen\ \beta x$$

en donde n es un entero no negativo y α y β son números reales. El método de los coeficientes indeterminados no se aplica a ecuaciones de la forma (1.115) cuando

$$g(x) = lnx,\ g(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = tan\ x,\ g(x) = sen^{-1}x$$

El conjunto de funciones formado por constantes, polinomios, exponenciales e^{ax}, senos y cosenos tiene la notable propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son, de nuevo, sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales e^{ax}, senos y cosenos. Como la combinación lineal de las derivadas de $ay'' + by' + cy$ debe ser idéntica a $g(x)$, parece lógico suponer que y_p tiene la misma forma que $g(x)$.

Ejemplo 13 *Obtener la solución general con coeficientes indeterminados*

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6 \tag{1.123}$$

Solución: Primero resolveremos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. Al aplicar la fórmula cuadrática tenemos que las raíces de la ecuación auxiliar $r^2 + 4r - 2 = 0$ son $r_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $r_1 = -2 + \sqrt{6}$ Entonces, la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$$

Como la función $g(x)$ es un polinomio cuadrático, supondremos una solución particular que también tenga la forma de un polinomio cuadrático:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Tratamos de determinar coeficientes A, B y C específicos para los que y_p sea una solución de (1.123). Sustituimos y_p y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$$

en la ecuación diferencial dada, la ecuación (1.123), y obtenemos

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

Como se supone que esta ecuación es una identidad, los coeficientes de potencias de x de igual grado deben ser iguales:

$$-2A = 2, \quad 8A - 2B = -3, \quad 2A + 4B - 2C = 6$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtienen $A = -1$, $B = -5/2$ y $C = -9$. Así, una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

Ejemplo 14 *Resuelva*

$$y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x} \tag{1.124}$$

Solución: Primero se determina la solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$, solución que es $y_c = c_1 e^{-x} - c_2 e^{3x}$. A continuación, la aparición de $4x - 5$ en $g(x)$ sugiere que la solución particular contiene un polinomio lineal. Además, como la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, también supondremos que en la solución particular hay términos en xe^{2x} y en e^{2x}; en otras palabras, g es la suma de dos tipos básicos de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \text{polinomio} \ + \ \text{exponenciales}$$

En consecuencia, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas sugiere que busquemos una solución particular

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

donde $y_{p1} = Ax + B$ y $y_{p2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituimos

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación dada (1.124) y agrupamos los términos semejantes:

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x} \tag{1.125}$$

De esta identidad se obtienen cuatro ecuaciones:

$$-3A = 4, \quad -2A - 3B = -5, \quad -3C = 6 \quad 2C - 3E = 0$$

La ultima ecuación del sistema proviene de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el lado derecho de (1.125) es cero. Al resolver el sistema llegamos a $A = -4/3$, $B = 23/9$, $C = -2$ y $E = -4/3$. En consecuencia,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}$$

La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}$$

De acuerdo con el principio de superposición, también podemos hacer este ejemplo resolviendo dos problemas más sencillos. Comprobamos que al sustituir

$$y_{p1} = Ax + B \text{ en } y'' - 3y' - 3y = 4x - 5$$

y

$$y_{p2} = Cxe^{2x} - Ee^{2x} \text{ en } y'' - 3y' - 3y = 6xe^{2x}$$

se tiene

$$y_{p1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} \quad y_{p2} = -\left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}$$

Entonces, una solución particular de la ecuación (1.124) es $y_p = y_{p1} + y_{p2}$.

Ahora vamos a ver en un ejemplo cómo la hipótesis obvia de la forma y_p no es una conjetura correcta.

Ejemplo 15 *Determine una solución particular de*

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x$$

Solución: Al derivar e^x no se obtienen funciones nuevas. Así, si procedemos como anteriormente, es lógico suponer una solución particular de la forma

$y_p = Ae^x$. Pero al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial obtenemos la afirmación contradictoria

$$0 = 8e^x$$

y vemos que nuestra hipótesis de y_p fue incorrecta.
Aquí, la dificultad se aclara al examinar la función complementaria $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Vemos que la supuesta Ae^x ya está presente en y_c. Esto quiere decir que e^x es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, y al sustituir un múltiplo constante Ae^x en la ecuación diferencial se obtendrá, necesariamente, cero.
Veamos si podemos tener una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x$$

Sustituimos $y_p' = Axe_x - Ae^x$ y $y_p'' = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial, simplificamos y obtenemos

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = -3Aex^x = 8e^x$$

En esta ecuación vemos que el valor de A es $A = -8/3$; por consiguiente, una solución particular de la ecuación dada es

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x$$

La diferencia entre los procedimientos que empleamos en los ejemplos (13) y (15) nos lleva a considerar dos casos. El primero refleja lo que sucede en los ejemplos (13) a (14).

Caso I
Ninguna función en la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.
En el siguiente cuadro mostramos algunos ejemplos específicos de $g(x)$ en (1.115), con la forma correspondiente de la solución particular. Naturalmente, suponemos que ninguna función, en la solución particular y_p supuesta esta duplicada (o reproducida) por una función en la solución complementaria y_c.

	$g(x)$	Forma de y_p
1.	1 (una constante)	A
2.	$5x+7$	$Ax+B$
3.	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4.	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5.	$\sin 4x$	$A\cos 4x+B\sin 4x$
6.	$\cos 4x$	$A\cos 4x+B\sin 4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}\sin 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x+Be^{3x}\sin 4x$
11.	$5x^2\sin 4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Ex^2+Fx+G)\sin 4x$
12.	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x+(Cx+E)e^{3x}\sin 4x$

Cuadro 1.1: Soluciones particulares tentativas

Vamos a ver un ejemplo;

Ejemplo 16 *Determine la forma de una solución particular de*

$$\text{(a) } y''-8y'+25y=5x^3e^{-x}-7e^{-x} \qquad \text{(b) } y''+4y=xcos\ x$$

Solución:
a)
Podemos escribir $g(x)=(5x^3-7)e^{-x}$. Tomamos nuestro modelo del renglón 9 de la tabla, y suponemos que una solución particular tiene la forma

$$y_p=(Ax^3+Bx^2+Cx+E)e^{-x}$$

Obsérvese que no hay duplicación entre los términos y_p, y los de la función complementaria $y_c=e^{4x}(c_1cos\ 3x+c_2sen\ 3x)$.
b)
La función $g(x)=xcos\ x$ parece a la del renglón 2 de la tabla excepto que usamos un polinomio lineal y no cuadrático, y *cos* x y *sen* x en lugar de *cos* $4x$ y *sen* $4x$, en la forma de y_p:

$$y_p=(Ax+B)cos\ x+(Cx+E)sen\ x$$

Si $g(x)$ está formada por una suma de, m términos del tipo de los de la tabla, entonces, la hipótesis de una solución particular y_p consiste en la suma de las formas tentativas $y_{p1}, y_{p2}, ..., y_{pm}$, que corresponden a los términos

$$y_p=y_{p1}+y_{p2}+\cdots+y_{pm}$$

Lo que acabamos de decir se puede formular también como

Regla de formación para el caso I *La forma de y_p es una combinación lineal de todas las funciones linealmente independientes generadas por diferenciaciones repetidas de $g(x)$.*

Vamos a ver ahora el caso para el ejercicio (15);

Caso II
Una función en la solución particular supuesta también es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

Supongamos de nuevo que $g(x)$ está formada por m términos de los tipos que aparecen en la tabla y que la hipótesis normal de una solución particular es

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \cdots + y_{pm}$$

en donde las $y_{pi},\ i = 1, 2, ..., m$ son formas tentativas de solución particular que corresponden a esos términos. En las condiciones descritas en el caso II podemos establecer la siguiente regla general:

Regla de multiplicación para el caso II *Si alguna y_p contiene términos que duplican los términos en y_c, entonces y_{pi} se debe multiplicar por x^n, donde n es el entero positivo mínimo que elimina esa duplicación.*

1.8. Coeficientes indeterminados: método del anulador

Cualquier ecuación diferencial de segundo orden la podemos escribir de la siguiente forma;

$$a_2 D^2 y + a_1 D y + a_0 y = g(x) \tag{1.126}$$

en donde $Dy = dy/dx$, $D^2 y = d^2 y/dx^2$. Cuando nos convenga, representaremos también esta ecuación en la forma $L(x) = g(x)$, donde L representa el operador diferencial lineal de orden n:

$$L = a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \tag{1.127}$$

La aplicación de los operadores diferenciales nos permite llegar a una solución particular de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Antes de hacerlo, necesitamos examinar dos conceptos:

Factorización de operadores
Cuando las a_i, $i = 0, 1, ...n$ son constantes reales, se puede factorizar un operador diferencial lineal, como es el caso de (1.127), siempre que se factorice el polinomio característico $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_1 m + a_0$. En otras palabras, si r_1 es una raíz de la ecuación

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + ... + a_1 m + a_0 = 0$$

entonces $L = (D - r_1)P(D)$, donde la expresión $P(D)$ es un operador diferencial lineal de orden $n-1$: por ejemplo, si manejamos D como una cantidad algebráica, el operador $D^2 + 5D + 6$ se puede factorizar como $(D+2)(D+3)$ o como $(D+3)(D+2)$. Así la función $y = f(x)$ tiene segunda derivada

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D+2)(D+3)y = (D+3)(D+2)y$$

Lo anterior es un ejemplo de una propiedad general:

Propiedad 1.8.1 *Los factores de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes son conmutativos.*

Una ecuación diferencial como $y'' + 4y' + 4y = 0$ se puede escribir en la forma

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \text{ o sea } (D+2)(D+2)y = 0 \text{ o sea } (D+2)^2 y = 0$$

Operador anulador
Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que

$$L(f(x)) = 0$$

se dice que L es un anulador de la función; por ejemplo, una función constante como $y = k$ es anulada por D porque $Dk = 0$. La función $y = x$ es anulada por el operador diferencial D^2 porque la primera y segunda derivadas de x son 1 y 0, respectivamente. En forma similar, $D^3 x^2 = 0$, etcétera.
El operador D^n anula cada una de las siguientes funciones:

$$1, x, x^2, ..., x^{n-1} \tag{1.128}$$

Como consecuencia inmediata de la ecuación (1.128) y del hecho de que la diferenciación se puede llevar a cabo término a término, un polinomio

$$c_0 + c_1 x + c_2 c^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} \tag{1.129}$$

se puede anular definiendo un operador que anule la potencia máxima de x. Las funciones que anula un operador diferencial lineal L de orden n son aquellas que se pueden obtener de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.
El operador diferencial $(D - \alpha)^n$ anula cada una de las siguientes funciones

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, ...x^{n-1}e^{\alpha x} \tag{1.130}$$

Para comprobarlo, observemos que la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea $(D - \alpha)^n y = 0$ es $(m - \alpha)^n = 0$. Puesto que α es una raíz de multiplicidad n, la solución general es

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x}x + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x} \tag{1.131}$$

Cuando α y β son números reales, la fórmula cuadrática indica que $[m^2 - 2am + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$ tiene las raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ambas de multiplicidad n. Llegamos al siguiente resultado:
El operador diferencial $[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n$ anula cada una de las siguientes funciones:

$$\begin{cases} e^{\alpha x}cos\ \beta x, xe^{\alpha x}cos\ \beta x, x^2e^{\alpha x}cos\ \beta x, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}cos\ \beta x \\ e^{\alpha x}sen\ \beta x, xe^{\alpha x}sen\ \beta x, x^2e^{\alpha x}sen\ \beta x, ..., x^{n-1}e^{\alpha x}sen\ \beta x \end{cases} \tag{1.132}$$

Con frecuencia desearemos anular la suma de dos o más funciones. Si L es un operador diferencial lineal tal que $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces anula la combinación lineal $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. Supongamos que L_1 y L_2 son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, tales que L_1 anula a $y_1(x)$ y L_2 anula a $y_2(x)$, pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$. Entonces, elproducto de los operadores lineales, L_1L_2, anula la suma $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. Esto se demuestra con facilidad aplicando la linealidad y el hecho de que $L_1L_2 = L_2L_1$:

$$\begin{aligned} L_1L_2(y_1 + y_2) &= L_1L_2(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2L_1(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2[L_1(y_1)] + L_1[L_2(y_2)] = 0 \end{aligned}$$

Coeficientes indeterminados
Supongamos que $L(y) = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y que la entrada $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de las funciones mencionadas en (1.128), (1.130) y (1.132), esto es, que $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la forma

$$k(\text{constante}), x^m, x^me^{\alpha x}, x^me^{\alpha x}cos\beta x \text{ y } x^me^{\alpha x}sen\beta x$$

en donde m es un entero no negativo y α y β son números reales. Ya sabemos que esa función $g(x)$ se puede anular con un operador diferencial, L_1, de orden mínimo, formado por un producto de los operadores D^n, $(D-\alpha)^n$ y $(D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2)^n$. Aplicamos L_1 a ambos lados de la ecuación $L(y)=g(x)$ y obtenemos $L_1L(y)=L_1(g(x))=0$. Al resolver la ecuación homogénea y de orden superior $L_1L(y)=0$, descubriremos la forma de una solución particular, y_p, de la ecuación original no homogénea $L(y)=g(x)$. A continuación sustituimos esa forma supuesta en $L(y)=g(x)$ para determinar una solución particular explícita. Este procedimiento de determinación de y_p se llama método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo 17 *Resuelva*

$$y''+3y'+2y=4x^2 \tag{1.133}$$

Solución: Primero resolvemos la ecuación homogénea $y''+3y'+2y=0$. A continuación, a partir de la ecuación auxiliar $m^2+3m+2=(m+1)(m+2)=0$, determinamos que $m_1=-1$ y $m_2=-2$; por lo tanto, la función complementaria es

$$y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

Como el operador diferencial D^3 anula a $4x^2$, vemos que $D^3(D^2+3D+2)y=4D^3x^2$ es lo mismo que

$$D^3(D^2+3D+2)y=0 \tag{1.134}$$

La ecuación auxiliar de la ecuación (1.134), de quinto orden

$$m^3(m^2+3m+2)=0 \quad \text{o sea} \quad m^3(m+1)(m+2)=0$$

tiene las raíces $m_1=m_2=m_3=0$, $m_4=-1$ y $m_5=-2$. Así, su solución general debe ser

$$y=c_1+c_2x+c_3x^2+c^4e^{-x}+c_5e^{-2x} \tag{1.135}$$

Los términos c^4e^{-x} y c_5e^{-2x} de la ecuación (1.135) constituyen la función complementaria de la ecuación original, (1.133). Entonces podemos decir que una solución particular, y_p, de (1.133) también debería satisfacer la ecuación (1.134). Esto significa que los términos restantes en la ecuación (1.135) han de tener la forma básica de y_p:

$$y=A+Bx+Cx^2 \tag{1.136}$$

en donde, por comodidad, hemos sustituido c_1, c_2 y c_3 por A, B y C, respectivamente. Para que la ecuación (1.136) sea una solución particular de la (1.133), se necesita determinar los coeficientes específicos A, B y C. Derivamos la función (1.136) para obtener

$$y_p' = B + 2Cx \quad y_p'' = 2C$$

y sustituimos en (1.133) para llegar a

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2C + X^2 = 4x^2$$

Como se supone que esta ultima ecuación tiene que ser una identidad, los coeficientes de las potencias de igual grado en x deben ser iguales:

$$2C = 4, \; 2B + 6C = 0, \; 2A + 3B + 2C = 0 \tag{1.137}$$

Resolvemos las ecuaciones en (1.137) para obtener $A = 7$, $B = -6$ y $C = 2$. En esta forma, $y_p = 7 - 6x + 2x^2$.
La solución general de la ecuación (1.133) es $y = y_c + y_p$, o sea

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x} + 7 - 6x + 2x^2$$

Resumen del método de los coeficientes indeterminados, método del anulador
La ecuación diferencial $L(y) = g(x)$ tiene coeficientes constantes y la función $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de constantes, polinomios, funciones exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos.

1. Se determina la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

2. Ambos lados de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ se someten a la acción de un operador diferencial L_1 que anule la función $g(x)$.

3. Se determina la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden superior $L_1L(y) = 0$.

4. De la solución obtenida en el paso anterior, se eliminan todos los términos duplicados en la solución complementaria y_c, que se determinó en el primer paso. Se forma una combinación lineal y_p con los términos restantes. Esta será la forma de una solución particular de $L(y)g(x)$.

5. Se construye y_p que se determinó en el cuarto paso en $L(y) = g(x)$. Se igualan los coeficientes desconocidos en y_p del sistema de ecuaciones resultante.

6. Con la solución particular que se determinó en el quinto paso, se forma la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada.

1.9. Variación de parámetros

Vamos a explicar ahora otro método para hallar una solución particular de una ecuación no homogénea. Este método, conocido como variación de parámetros, se debe a Lagrange y complementa bastante bien el método de los coeficientes indeterminados. La ventaja más importante de la variación de parámetros es que se trata de método general; en principio, por lo menos, es posible aplicarlo a cualquier ecuación y no requiere suposiciones detalladas respecto a la forma de la solución. El método de variación de parámetros al final requiere la evaluación de ciertas integrales en las que interviene el término no homogéneo de la ecuación diferencial, lo cual puede presentar dificultades. Antes de considerar el método en el caso general, vamos a ver un ejemplo de su aplicación.

Ejemplo 18 *Encontrar la solución particular de*

$$y'' + 4y = 3csc\ x \tag{1.138}$$

Solución: Vemos que este problema no cae dentro de los límites del método de los coeficientes indeterminados porque el término no homogéneo $g(x) = 3csc\ x$ contiene un cociente (en vez de una suma o un producto) de $sen\ x$ o de $cos\ x$. La ecuación homogénea correspondiente a (1.138) es

$$y'' + 4y = 0 \tag{1.139}$$

y que la solución general de (1.139) es

$$y_c = c_1 cos\ 2x + c_1 sen\ 2x \tag{1.140}$$

La idea básica en el método de variación de parámetros es sustituir las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (1.140) por las funciones u_1 y u_2, respectivamente, y después determinar estas funciones de modo que la expresión resultante

$$y = u_1(x) cos\ 2x + u_2(x) sen\ 2x \tag{1.141}$$

sea una solución de la ecuación no homogénea (1.138).
Para determinar u_1 y u_2 es necesario sustituir y de la ecuación (1.138) por su expresión dada en (1.141). Dado que se tiene una sola ecuación y dos funciones desconocidas, es de esperar que existan muchas posibilidades para u_1 y u_2 que satisfagan las necesidades. Un punto de vista alternativo es que puede imponerse una segunda condición que se desee, para obtener así dos ecuaciones para las dos funciones desconocidas u_1 y u_2. Veremos más adelante que es posible elegir esta segunda condición de una manera que se hagan a los cálculos marcadamente más eficientes.
Se deriva la ecuación (1.141) y se reagrupan los términos, se obtiene

$$y' = -2u(x)sen\ 2x + 2u_2(x)cos\ 2x + u_1'(x)cos\ 2x + u_2'(x)sen\ 2x \quad (1.142)$$

Si se tiene presente la posibilidad de elegir una segunda condición sobre u_1 y u_2, se requiere que los dos últimos términos del segundo miembro de (1.142) sean cero; es decir, que

$$u_1'(x)cos\ 2x + u_2'(x)sen\ 2x = 0 \quad (1.143)$$

Entonces, de la ecuación (1.142) se concluye que

$$y' = -2u_1(x)sen\ 2x + 2u_2(x)cos\ 2x \quad (1.144)$$

Aunque el efecto final de la condición (1.143) aún no es evidente, por lo menos se simplificó la expresión para y'. Además, al derivar la ecuación (1.144) se obtiene

$$y'' = -4u_1(x)cos\ 2x - 4u_2sen\ 2x - 2u_1'(x)sen\ 2x + 2u_2'(x)cos\ 2x \quad (1.145)$$

Entonces, si se sustituyen y y y" de la ecuación (1.138) por sus expresiones dadas en (1.141) y (1.145), respectivamente, se encuentra que u_1 y u_2 deben satisfacer

$$-2u_1'(x)sen\ 2x + 2u_2'(x)cos\ 2x = 3csc\ x \quad (1.146)$$

Resumiendo los resultados hasta este momento, se desea elegir u_1 y u_2 de modo que se satisfagan las ecuaciones (1.143) y (1.146). Estas ecuaciones pueden considerarse como un par de ecuaciones algebraicas lineales para las dos cantidades desconocidas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$. (1.143) y (1.146) pueden resolverse de varias maneras. Por ejemplo, si se despeja u;(x) en $u_2'(x)$, se tiene

$$u_2'(x) = -u_1'(x)\frac{cos\ 2x}{sen\ 2x} \quad (1.147)$$

Luego, si se sustituye $u_2'(x)$ de la (1.146) por esta expresión y se simplifica, se obtiene

$$u_1'(x) - \frac{3csc\ xsen\ 2x}{2} = -3cos\ x \quad (1.148)$$

Además, si se sustituye esta expresión para $u_1'(x)$ en la ecuación (1.147) y se aplican las fórmulas para el doble de un ángulo, se encuentra que

$$u_2'(x) = \frac{3cos\ xsen\ 2x}{sen\ 2x} = \frac{3(1-2sen^2x)}{2sen\ x} = \frac{3}{2}csc\ x - 3sen\ x \tag{1.149}$$

Una vez que se obtuvieron $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, el paso siguiente es integrar para obtener $u_1(x)$ y $u_2(x)$. El resultado es

$$u_1(x) = -3sen\ x + c_1 \tag{1.150}$$

y

$$u_2(x) = \frac{3}{2}ln|csc\ x - cot\ x| + 3cos\ x + c_2 \tag{1.151}$$

Por último, al sustituir estas expresiones en la ecuación (1.141), se tiene

$$y = -3sen\ xcos\ 2x + \frac{3}{2}ln|csc\ x - cot\ x|sen\ 2x + 3cos\ xsen\ 2x + c_1cos\ 2x + c_2sen\ 2x \tag{1.152}$$

Los términos de la ecuación (1.152) en los que aparecen las constantes arbitrarias c_1 y c_1 son la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, mientras que los demás términos son una solución particular de la ecuación no homogénea (1.138). Por lo tanto, (1.152) es la solución general de la ecuación (1.138).

En el ejemplo que acabamos de ver, pudo aplicarse bien el método de variación de parámetros en la determinación de una solución particular y, por lo tanto, de la solución general de la ecuación. Vamos a ver si este procedimiento lo podemos aplicar a una ecuación arbitraria.
Consideramos

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1.153}$$

en donde p, q y g son funciones continuas dadas. Como punto de partida, se supone que se conoce la solución general

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{1.154}$$

de la ecuación homogénea correspondiente

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.155}$$

Esta es una suposición importante porque hasta el momento se ha mostrado cómo resolver la ecuación (1.155) sólo si tiene coeficientes constantes. Si tiene coeficientes que dependen de x entonces, por lo general, para obtener $y_c(x)$

deben usarse series, las cuales veremos más adelante.
La idea fundamental del método de la variación de parámetros, es sustituir las constantes c_1 y c_2 de la ecuación (1.154), por las funciones u_1 y u_2, respectivamente; esto da

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{1.156}$$

Vamos a intentar determinar u_1 y u_2 de manera que la expresión de (1.156) sea una solución de la ecuación no homogénea (1.153), en lugar de serlo de la ecuación homogénea (1.155). Por tanto, se deriva la (1.156) y se obtiene

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x) \tag{1.157}$$

Ahora se igualan a cero los términos de la ecuación (1.157) en los que aparecen $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$; es decir, se requiere que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{1.158}$$

Vemos que, con base en (1.157), se tiene

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) \tag{1.159}$$

Además, al derivar una vez más se obtiene

$$y'' = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x) \tag{1.160}$$

Ahora se sustituyen y, y' y y" de la ecuación (1.153) por sus expresiones dadas en (1.156), (1.159) y (1.160), respectivamente. Después de reordenar los términos de la ecuación resultante se encuentra que

$$\begin{aligned} &u_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + u_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] \\ &+ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{aligned}$$

Cada una de las expresiones entre corchetes de esta ecuación es cero porque tanto y_1 como y_2 son soluciones de la ecuación homogénea (1.155). Por consiguiente, se reduce a

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x) \tag{1.161}$$

Las ecuaciones (1.158) y (1.161) forman un sistema de dos ecuaciones algebraicas lineales para las derivadas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$ de las funciones desconocidas. Al resolver el sistema formado por (1.158) Y (1.161) se obtiene

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}, \quad u_2'(x) = -\frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \tag{1.162}$$

en donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de y_1 y y_2. Vemos que es permisible dividir entre W, porque y_1 y y_2 son un conjunto fundamental de soluciones y, por lo tanto, su wronskiano es diferente de cero. Al integrar las ecuaciones (1.162) se encuentran las funciones deseadas $u_1(x)$ y $u_2(x)$;

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + c_1, \quad u_2(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + c_2 \tag{1.163}$$

Por último, si se sustituyen las expresiones (1.163) en la ecuación (1.156) da la solución general de la ecuación (16). Este resultado se enuncia como un teorema.

Teorema 1.9.1 *Si las funciones p, q y g son continuas sobre un intervalo abierto I y si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea* (1.155) *correspondientes a la ecuación no homogénea* (1.153),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

entonces una solución particular de (1.153) *es*

$$Y(x) = -y_1 \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx - y_2 \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \tag{1.164}$$

y la solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x) \tag{1.165}$$

Al examinar la expresión (1.164) y repasar el proceso mediante el cual se obtuvo, es posible observar que pueden presentarse dos dificultades importantes al aplicar el método de variación de parámetros. Como ya se mencionó, una es la determinación de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (1.155), cuando los coeficientes de esa ecuación no son constantes. La otra dificultad posible está en la evaluación de las integrales que aparecen en la ecuación (1.164). Esto depende por completo de la naturaleza de las funciones y_1, y_2 y g. Por supuesto, aun si no es posible evaluar las integrales por métodos analíticos elementales, por lo común es posible calcularlas de manera aproximada mediante la regla de Simpson o algún otro procedimiento numérico en le caso de que se traten de integrales definidas, si son integrales indefinidas se calcularán por los métodos conocidos.

1.10. Ecuación de Cauchy-Euler

Anteriormente hemos visto que determinar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes se hace con relativa facilidad. No ocurre lo mismo con las ecuaciones lineales de coeficientes variables. Sin embargo, ahora examinaremos un tipo de ecuación con coeficientes variables cuya solución general siempre se puede expresar en términos de potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas y exponenciales.

Toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x) \tag{1.166}$$

donde los coeficientes a, b y c son constantes, tiene el nombre de ecuación de Cauchy-Euler, ecuación de Euler o ecuación equidimensional. La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado de las x coincide con el orden de la diferenciación.

Vamos a empezar el desarrollo examinando detalladamente las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{1.167}$$

Una vez determinada la función complementaria $y_c(x)$ también podemos resolver la ecuación no homogénea $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$ con el método de variación de parámetros.

Vamos a intentar encontrar una solución de la forma $y = x^m$, donde m esta por determinar. La primera y segunda derivadas son, respectivamente

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \tag{1.168}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ax^2m(m-1)x^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m \\ &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m \\ &= x^m(am(m-1) + bm + c) \end{aligned}$$

Así, $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación auxiliar

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{1.169}$$

Hay tres casos distintos por considerar que dependen de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales repetidas (o iguales) o complejas. En el último caso las raíces serán un par conjugado.

Caso I: Raíces reales distintas
Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1.169), tales que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m1}$ y $y_2 = x^{m2}$ forman un conjunto de soluciones. Así pues, la solución general es

$$y = c_1 x^{m1} + c_2 x^{m2} \tag{1.170}$$

Ejemplo 19 *Resuelva*

$$x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$$

Solución: Vamos a suponer que la solución es $y = x^m$. Diferenciamos dos veces

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

y sustituimos en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y &= x^2 m(m-1)x^{m-2} - 2xmx^{m-1} - 4x^m \\ &= x^m(m(m-1) - 2m - 4) = x^m(m^2 - 3m - 4) = 0 \end{aligned}$$

si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Pero $(m+1)(m-4) = 0$ significa que $m_1 = -1$ y $m_2 = 4$, así que

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$$

Caso II: Raíces reales repetidas
Si las raíces de (1.169) son repetidas, esto es, si $m_1 = m_2$, sólo llegaremos a una solución que es $y = x^{m1}$. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática $am^2 + (b-a)m + c = 0$ son iguales, el discriminante de los coeficientes tiene que ser cero. De acuerdo con la fórmula cuadrática, la raíz debe ser $m_1 = -(b-a)/2a$. Podemos formar ahora una segunda solución y_2. Primero escribimos la ecuación de Cauchy-Euler en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0$$

e identificamos $P(x) = b/ax$ y $\int(b/ax)dx = (b/x)lnx$. Así

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)lnx}}{x^{2m_1}} = x^{m_1}\int x^{-b/a}x^{-2m_1}dx \\ &= x^{m_1}\int x^{-b/a}x^{(b-a)/a}dx = x^{m_1}\int\frac{dx}{x} = x^{m_1}lnx \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}lnx \tag{1.171}$$

Ejemplo 20 *Resuelva*

$$4x^2y'' + 8xy' + y = 0$$

Solución: La sustitución $y = x^m$ da

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1) = x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

cuando $4m^2 + 4m + 1 = 0$ o $(2m + 1)^2 = 0$. Como $m_1 = -1/2$, la solución general es

$$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1/2}lnx$$

Caso II: Raíces complejas conjugadas
Si las raíces de (1.169) son el par conjugado $m_1 = \alpha+i\beta$, $m_2 = \alpha-i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, una solución es

$$y = c_1x^{\alpha+i\beta} + c_2x^{\alpha-i\beta}$$

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, conviene formular la solución sólo en términos de funciones reales. Vemos la identidad

$$x^{i\beta} = (e^{lnx})^{i\beta} = e^{i\beta lnx}$$

que, según la fórmula de Euler, es lo mismo que

$$x^{i\beta} = cos(\beta lnx) + isen(\beta lnx)$$

De igual manera

$$x^{-i\beta} = cos(\beta lnx) - isen(\beta lnx)$$

Sumamos y restamos los últimos dos resultados para obtener

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2cos(\beta lnx) \quad \text{y} \quad x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2isen(\beta lnx)$$

respectivamente. Basándonos en que $y = c_1x^{\alpha+i\beta} - c_2x^{\alpha-i\beta}$ es una solución para todos los valores de las constantes, vemos, a la vez para $c_1 = c_2 = 1$ y $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ que

$$y_1 = x^\alpha(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \quad \text{y} \quad y_2 = x^\alpha(x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

o bien

$$y_1 = 2x^\alpha cos(\beta lnx) \quad \text{y} \quad y_2 = 2ix^\alpha sen(\beta lnx)$$

también son soluciones. Como $W(x^\alpha cos(\beta lnx)), x^\alpha sen(\beta lnx) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$, $\beta > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$, llegamos a la conclusión

$$y_1 = x^\alpha cos(\beta lnx) \quad \text{y} \quad y_2 = x^\alpha sen(\beta lnx)$$

forman un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial; por lo tanto, la solución general es

$$y = x^\alpha[c_1cos(\beta lnx) + c_2sen(\beta lnx)] \tag{1.172}$$

Ejemplo 21 *Resuelva el problema de valor inicial*

$$x^2y'' + 3xy' + 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -5$$

Solución: Tenemos que

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 3y = x^m(m(m-1) + 3m + 3) = x^m(m^2 + 2m + 3 = 0$$

cuando $m^2 + 2m + 3 = 0$. Aplicamos la fórmula cuadrática y vemos que $m_1 = -1 + \sqrt{2i}$ y $m_2 = -1 - \sqrt{2i}$. Si identificamos $\alpha = -1$ y $\beta = \sqrt{2}$ de acuerdo con (1.172), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = x^{-1}[c_1cos(\sqrt{2}lnx) + c_2sen(\sqrt{2}lnx)]$$

Al aplicar las condiciones $y(1) = 1$ y $y(1) = -5$ a la solución anterior, resulta que $c_1 = 1$ y $c_2 = -2\sqrt{2}$. Así, la solución al problema de valores iniciales es

$$y = x^{-1}[cos(\sqrt{2}lnx) - 2\sqrt{2}sen(\sqrt{2}lnx)]$$

1.11. Ecuaciones no lineales

Entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales hay varias diferencias importantes. Anteriormente se expuso que las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden tienen la propiedad de que una combinación lineal de soluciones también es una solución. Las ecuaciones no lineales carecen de esta propiedad de superposición: por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = cos\ x$ y $y_4 = sen\ x$ son cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $(y'')^2 - y^2 = 0$. Pero las combinaciones lineales, como $y = c_1e^x + c_3cos\ x$, $y = c_2e^{-x} + c_4sen\ x$ y $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3cos\ x + c_4sen\ x$, no son soluciones de la ecuación para constantes c_i arbitrarias distintas de cero.
Pero la diferencia principal entre las ecuaciones lineales y no lineales de segundo orden es la posibilidad de resolverlas. Dada una ecuación lineal, hay la posibilidad de establecer alguna forma manejable de solución, como una solución explícita o una que tenga la forma de una serie infinita. Por otro lado, la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior es todo un desafío. Esto no quiere decir que una ecuación diferencial no lineal de orden superior no tenga solución, sino más bien que no hay métodos generales para llegar a una solución explícita o implícita.
Ahora vamos a ver un método de sustitución que a veces permite determinar las soluciones explícitas o implícitas de tipos especiales de ecuaciones no lineales.

Uso de sustituciones
Las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden $F(x, y', y'') = 0$ en que falta la variable dependiente y, y las $F(y, y', y'') = 0$ donde falta la variable independiente x, se pueden reducir a ecuaciones de primer orden mediante la sustitución $u = y'$.
El siguiente ejemplo muestra la técnica de sustitución para una ecuación tipo $F(x, y', y'') = 0$. Si $u = y'$ la ecuación diferencial se transforma en $F(x, u, u')$. Si resolvemos esta última ecuación podremos determinar y por integración. Dado que estamos resolviendo una ecuación de segundo orden, su solución tendrá dos constantes arbitrarias.

Ejemplo 22 *Resuelva*

$$y'' = 2x(y')^2$$

Solución: Si $u = y'$, entonces $du/dx = y''$. Después de sustituir, la ecuación de segundo orden se reduce a una de primer orden con variables separables;

la variable independiente es x y la variable dependiente es u:

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{u^2} = 2xdx$$

$$\int u^{-2}du = \int 2xdx$$

$$-u^{-1} = x^2 + c_1^2$$

Por comodidad, la constante de integración se expresa como c_1^2. En los próximos pasos se aclarará la razón. Como $u^{-1} = 1/y'$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2}$$

y así

$$y = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2} \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{1}{c_1} tan^{-1}(\frac{x}{c_1}) + c_2$$

A continuación mostraremos la forma de resolver una ecuación de la forma $F(y, y', y'') = 0$. De nuevo haremos $u = y'$, pero como falta la variable independiente x, usaremos esa sustitución para transformar la ecuación diferencial en una en que la variable independiente sea y y la dependiente sea u. Con este fin usaremos la regla de la cadena para determinar la segunda derivada de y:

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

Ahora, la ecuación de primer orden que debemos resolver es

$$F\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right) = 0$$

Ejemplo 23 *Resolver*

$$yy'' = (y')^2$$

Solución: Con la ayuda de $u = y'$ y de la regla de la cadena que mostramos arriba, la ecuación diferencial se transforma en

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2 \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

Partimos de

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y} \quad \text{obtenemos} \quad ln|u| = ln|y| + c_1$$

Al despejar u de la última ecuación en función de y, obtenemos $u = c_2 y$, en donde hemos redefinido la constante $\pm e^{c_1}$ como c_2. A continuación restituimos $u = dy/dx$, separamos variables, integramos y de nuevo redefinimos las constantes:

$$\int \frac{dy}{y} = c_2 \int dx \quad \text{o sea} \quad ln|y| = c_2 x + c_3 \quad \text{o sea} \quad y = c_4 e^{c_2 x}$$

Uso de la serie de Taylor

En algunos casos se puede aproximar una solución a un problema de valor inicial en que las condiciones iniciales se especifiquen en x_0 mediante una serie de Taylor centrada en x_0. Esta serie la veremos más adelante, ahora no entraremos en explicaciones.

Capítulo 2

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

2.1. Movimiento armónico simple

Supóngase que un cuerpo de masa m está sujeto al extremo de un resorte flexible, de peso despreciable, suspendido de un soporte rígido.
Cuando el peso está en reposo, describimos su posición como la posición de equilibrio. Si el cuerpo se desplaza hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio. Nuestro propósito es estudiar el movimiento del cuerpo, conocido como movimiento armónico simple, en el cual se ignora cualquier fuerza de fricción con el medio que lo rodea.

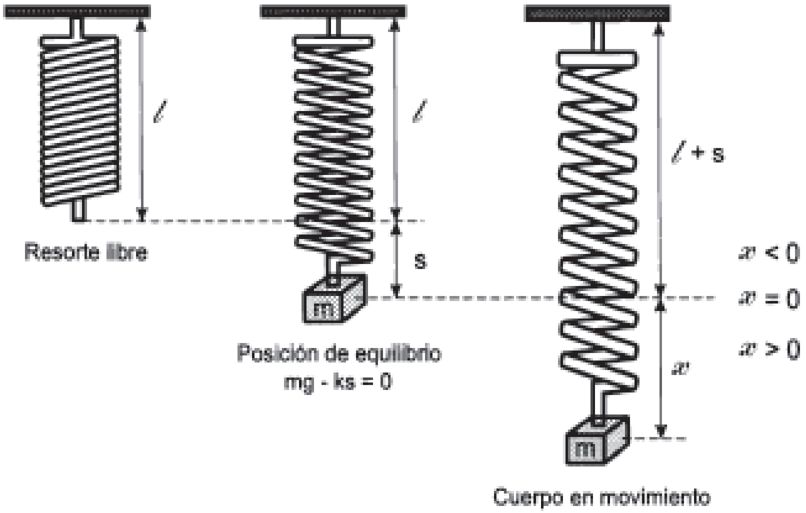

Figura 2.1: Sistema masa-resorte

En este caso, las únicas fuerzas que actúan son:

- Una fuerza de restitución f_r opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a su magnitud (Ley de Hooke). En términos simples $f_r = kd$, donde k es una constante de proporcionalidad y d la magnitud del alargamiento.
- El peso del cuerpo, dado por $P = mg$

Adoptaremos la siguiente convención; todas las cantidades (desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza), medidas hacia abajo desde la posición de equilibrio se considerarán como positivas. Las que se miden hacia arriba, son negativas.
En la posición de equilibrio

$$mg - ks = 0$$

Ahora, al desplazar el cuerpo de esta posición en una magnitud x y soltarla, de la Segunda Ley de Newton se sigue que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(s + x) = mg - ks - kx$$

y usando la condición de equilibrio, resulta

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2.1}$$

El signo negativo indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en dirección opuesta a la del movimiento. Podemos escribir la ecuación (2.1) en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.2}$$

donde $\omega^2 = k/m$.

La ecuación (2.2) es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple o movimiento vibratorio no amortiguado.

Hay dos condiciones iniciales asociadas con (2.2),

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

que representan el desplazamiento y velocidad iniciales, respectivamente. Por ejemplo, si $x_0 < 0$ y $v_0 > 0$ entonces el movimiento se inicia en un punto que está $|x_0|$ unidades arriba de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial dirigida hacia abajo. Si $x_0 > 0$ y $v_0 = 0$, la masa está inicialmente en reposo a x_0 unidades abajo de la posición de equilibrio.

La ecuación auxiliar de (2.2) es

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

cuyas raíces son imaginarias puras

$$r_1 = \omega_i, \quad r_2 = -\omega_i$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (2.2) es

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t) \tag{2.3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes que dependen de x_0 y de v_0. Nótese que independientemente de los valores de c_1 y c_2, la ecuación del movimiento armónico simple (2.3), define una función periódica de periodo $T = 2\pi/\omega$ y describe un movimiento ideal en el que el cuerpo se mueve alternadamente hacia arriba y hacia abajo de la posición de equilibrio, infinitas veces.

El periodo T es el tiempo necesario para que se complete un ciclo y su recíproco $f = 1/T$ se llama frecuencia. El desplazamiento máximo del cuerpo, medido desde la posición de equilibrio, se llama amplitud.

Ejemplo 24 *Se encontró experimentalmente que un peso de 4 libras estira un resorte 6 pulgadas. Si el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 4 pulg/s, determine:*

1. *La ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimiento.*
2. *La ecuación del movimiento*
3. *La posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después.*
4. *El periodo, la frecuencia y la gráfica de la solución.*

Solución: Ya que 6 pulgadas equivalen a 1/2 ft, de la Ley de Hooke tenemos que

$$4 = (k)\frac{1}{2}$$

de donde

$$k = 8\frac{lb}{ft}$$

Además $m = P/g = 4/32 = 1/8slug$

1. Luego, de (2.2), la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{8}{1/8}x = 0$$

   o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0 \tag{2.4}$$

   sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1/3$$

2. La ecuación auxiliar de (2.4) es $r^2 + 64 = 0$, cuyas raíces son $r = \pm 8i$. En consecuencia la solución general de (2.4) viene dada por

$$x(t) = c_1 cos8t + c_2 sen8t$$

   La condición inicial $x(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, mientras que $x'(0) = 1/3$ conduce a $8c_2 = 1/3$. De modo que $c_1 = 0$, $c_2 = 1/24$ y la solución requerida es

$$x(t) = \frac{1}{24}sen8t$$

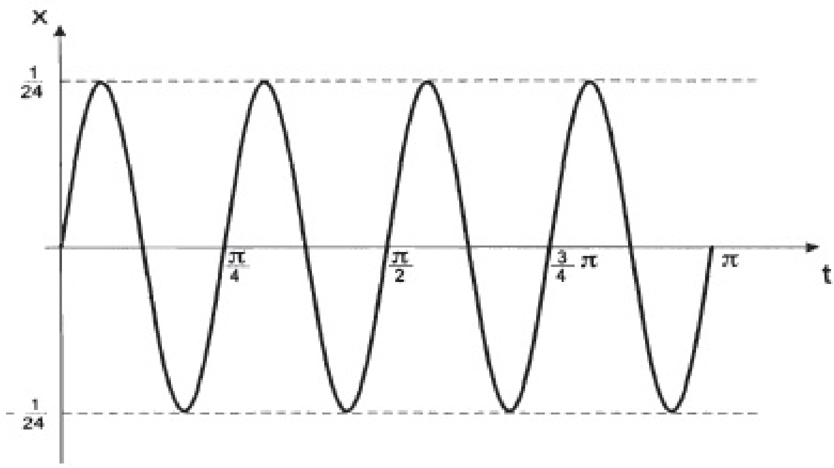

Figura 2.2: Movimiento de la masa

3. La posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después, están dadas, respectivamente por

$$x(2) = \frac{1}{24}sen16 = -0{,}0011996$$
$$x'(2) = \frac{1}{3}cos16 = -0{,}31922$$
$$x''(2) = -\frac{8}{3}sen16 = 0{,}76774$$

lo cual indica que el cuerpo se encuentra a 0.011996 ft arriba de la posición de equilibrio moviéndose hacia arriba.

4. El periodo y la frecuencia son

$$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \quad f = \frac{4}{\pi}$$

Claramente, la amplitud es de 1/24 ft. La solución muestra que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado con la masa desplazándose alternadamente 1/24 ft hacia cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$.

Ejemplo 25 *Una fuerza de 9 lb estira un resorte 3 pulgadas. Un cuerpo que pesa 24 lb se sujeta al resorte y se suelta desde un punto que está 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 36 pulg/s.*

1. *Determine la ecuación del movimiento $x(t)$*

2. *¿En qué instante pasa el cuerpo por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba por tercera vez?*

3. *¿En qué instantes está el cuerpo 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio?*

Solución: Primero debemos observar que es necesario convertir a ft las longitudes expresadas en pulgadas, usando la equivalencia 1 ft = 12 pulgadas.

1. Por la Ley de Hooke, se sigue que el valor de la constante del resorte k es

$$k = \frac{9}{1/4}\frac{lb}{ft} = 36\frac{lb}{ft}$$

Además, $m = 24/32 = 3/4 slug$. De modo que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 48x = 0 \tag{2.5}$$

En este caso, las condiciones iniciales son

$$x(0) = \frac{1}{4}, \quad x'(0) = -3$$

Al resolver el problema de valores iniciales (2.5) y (2.6), obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{4}cos4\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{4}sen4\sqrt{3}t \tag{2.6}$$

2. Escribimos la solución (2.6) en forma alternativa. Tenemos que

$$A = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2}$$

y como $c_2 < 0$

$$\phi = arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$$

Luego

$$x(t) = \frac{1}{2} sen \left(4\sqrt{3}t + \frac{5}{6}\pi \right)$$

La gráfica de la ecuación del movimiento es la siguiente

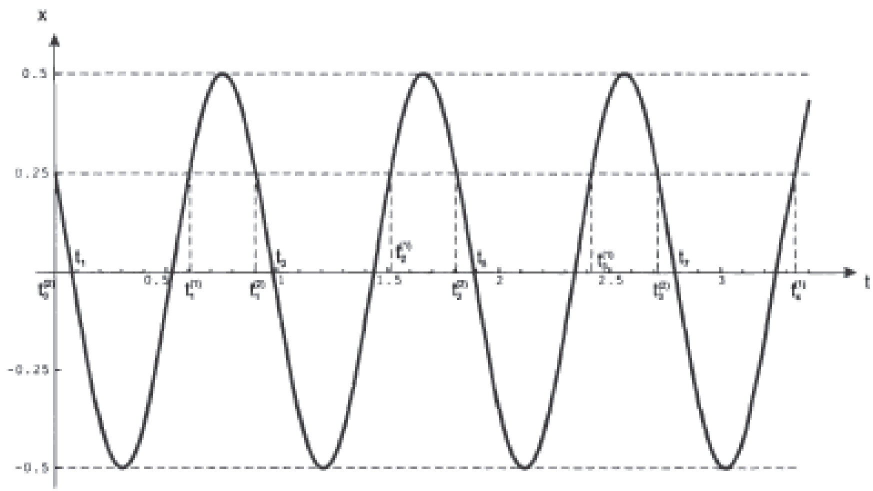

Figura 2.3: Ecuación del movimiento

Los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio vienen dados por las soluciones de la ecuación $x(t) = 0$, es decir

$$\frac{1}{2} sen \left(4\sqrt{3}t + \frac{5}{6}\pi \right) = 0$$

De aquí obtenemos la sucesión de valores de t

$$t_n = \frac{n\pi - \frac{5}{6}\pi}{4\sqrt{3}}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

El tiempo pedido es claramente

$$t_5 = 1{,}18894 \text{ segundos}$$

3. Ahora, debemos hallar los valores de t para los cuales $x(t) = 1/4$, esto es

$$sen \left(4\sqrt{3}t + \frac{5}{6}\pi \right) = \frac{1}{2}$$

Notemos primero que la ecuación $sen\theta = 1/2$ tiene como soluciones todos los números θ de la forma $\pi/6 + 2n\pi$ y $5\pi/6 + 2n\pi$, con n un número entero. Luego, el cuerpo está 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio en los instantes

$$t_n^{(1)} = \frac{-\frac{4}{6}\pi + 2n\pi}{4\sqrt{3}} = \left(n - \frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}\pi \quad n = 1, 2, 3, 4, ...$$

$$t_n^{(2)} = \frac{2n\pi}{4\sqrt{3}} = \frac{n\sqrt{3}\pi}{6} \quad n = 1, 2, 3, 4, ...$$

Obsérvese que en los tiempos $t_n^{(1)}$ el cuerpo se mueve hacia abajo de la posición de equilibrio, mientras que en los tiempos $t_n^{(2)}$ lo hace hacia arriba.

2.2. Movimiento vibratorio amortiguado

En la sección anterior se supuso que no actúan fuerzas retardadoras sobre la masa en movimiento, lo cual no es cierto a menos que se encuentre suspendida en un vacío perfecto.
Vamos a considerar ahora el efecto de la resistencia del medio sobre la masa. Supongamos que sobre el cuerpo actúa una fuerza amortiguadora, dada por un múltiplo constante de la velocidad dx/dt.
De la segunda ley de Newton, en ausencia de fuerzas externas, se sigue que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}$$

donde β es una constante de amortiguación positiva y el signo se debe a que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta al movimiento. Obtenemos así la ecuación diferencial del movimiento vibratorio amortiguado libre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{2.7}$$

con $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$.
La ecuación auxiliar de (2.7) es

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$$

cuyas raíces están dadas por

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \tag{2.8}$$

Dependiendo del valor de $\lambda^2 - \omega^2$, distinguimos los tres casos siguientes;

Primer caso: Movimiento Sobre-Amortiguado.
Si $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, las raíces (2.8) son reales y distintas, y en consecuencia la solución general de (2.7) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right) \tag{2.9}$$

que representa un movimiento suave y no oscilatorio.
Algunas gráficas posibles de (2.9) se muestran en la siguiente figura;

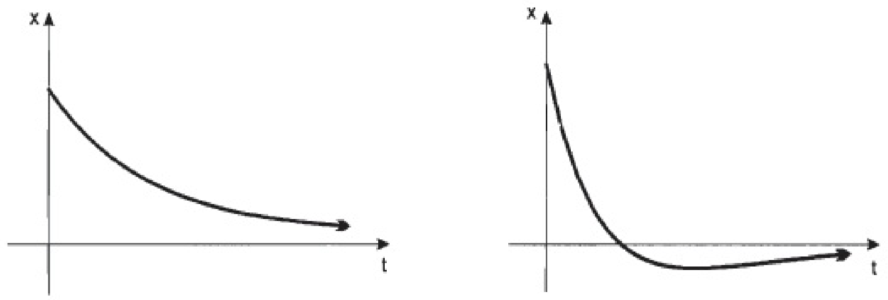

Figura 2.4: Movimiento sobreamortiguado

Segundo caso: Movimiento Críticamente Amortiguado.
Si $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ la solución general de (2.7) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t) \tag{2.10}$$

puesto que $r_1 - r_2 = -\lambda$.
En esta situación, una pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento produciría un movimiento oscilatorio. Algunas gráficas posibles de la solución (2.10) se muestran en la siguiente figura.

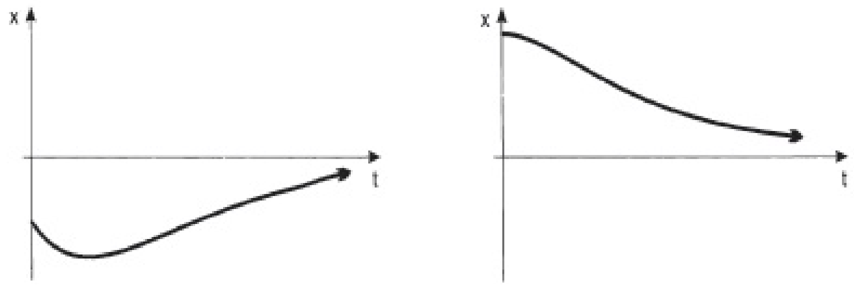

Figura 2.5: Movimiento críticamente amortiguado

Un examen de las derivadas de las soluciones (2.9) y(2.10) del primer y segundo caso respectivamente, permite ver que estas funciones pueden tener a lo más un máximo relativo o un mínimo relativo para $t > 0$, por lo que el cuerpo puede pasar a lo más una vez por la posición de equilibrio.

Tercer caso: Movimiento Subamortiguado.
Si $\lambda^2 < 0$, las raíces (2.8) son complejas y se pueden escribir como

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i, \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}i$$

de modo que la solución general de (2.7) es en este caso

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 sen\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t\right) \tag{2.11}$$

Ahora, el movimiento es oscilatorio, pero la amplitud de las oscilaciones tiende a cero cuando t tiende a infinito.
Nótese que, en analogía a lo que hicimos en el movimiento armónico simple, la solución (2.11) puede expresarse en forma compacta. Cualquier función de la forma de la ecuación (2.11) con $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, puede escribirse como

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} sen\left(\sqrt{\omega^2 - \omega^2}t + \phi\right) \tag{2.12}$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{2.13}$$

y el ángulo de fase ϕ es tal que;

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A} \quad \text{y} \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A}$$

Es decir

$$\phi = \begin{cases} arctan\frac{c_1}{c_2} & \text{si} \quad c_2 > 0 \\ arctan\frac{c_1}{c_2} + \pi & \text{si} \quad c_2 < 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

En la forma alternativa (2.12) el coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ denomina la amplitud amortiguada de las soluciones, $2\pi/\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ es el cuasiperiodo y $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}/2\pi$ es la cuasifrecuencia. El cuasiperiodo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos de $x(t)$, también es igual al doble de tiempo entre dos ceros sucesivos de la solución.

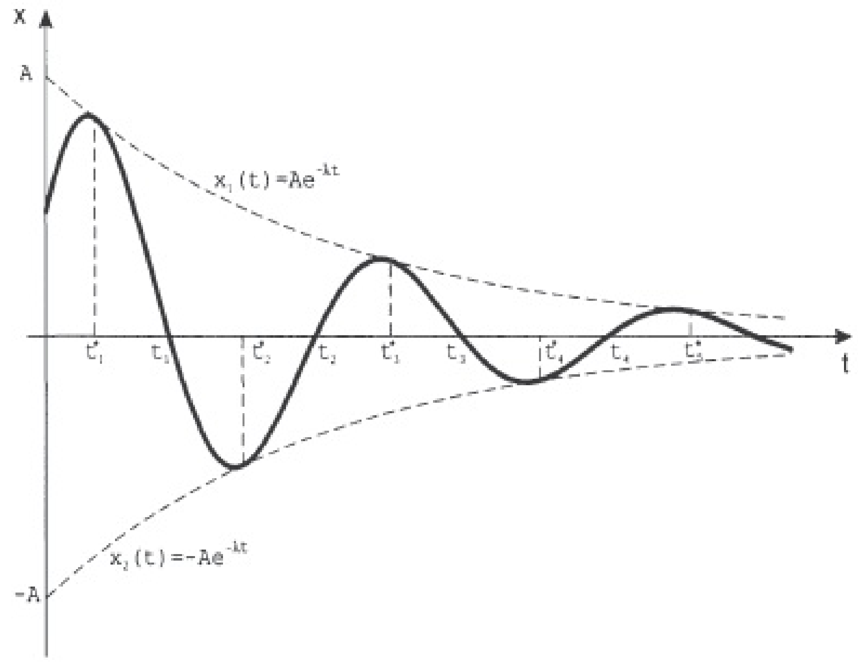

Figura 2.6: Movimiento subamortiguado

Para representar gráficamente la solución (2.12), es útil tomar en cuenta las siguientes observaciones. En primer lugar, las intersecciones con el eje t se obtienen resolviendo la ecuación $x(t) = 0$, esto es

$$sen\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi\right) = 0$$

de donde

$$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi = n\pi, \quad t_n = \frac{n\pi - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Por otra parte, la gráfica de $x(t)$ es tangente a las curvas exponenciales $x_1(t) = Ae^{-\lambda t}$, $x_2(t) = -Ae^{-\lambda t}$ en los valores de t, tales que

$$sen\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi\right) = \pm 1$$

Resolviendo esta ecuación encontramos las soluciones $t = t_k^*$, dadas por

$$t_k^* = \frac{(2k + 1\pi/2 - \phi)}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

con k en N.

Ejemplo 26 *Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4 Ib estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.*

Solución: La ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2{,}5\frac{dx}{dt}$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0 \tag{2.15}$$

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = 1/3, \quad x'(0) = 0$$

La ecuación auxiliar de (2.15) es $r^2 + 20r + 64 = 0$ y sus raíces son $r_1 = -4$ y $r_2 = -16$, de modo que

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$$

La condición $x(0) = 1/3$ implica que

$$c_1 + c_2 = 1/3 \tag{2.16}$$

en tanto que $x'(0) = 0$ nos lleva a

$$-4c_1 - 16c_2 = 0 \tag{2.17}$$

Resolviendo el sistema compuesto por (2.16) y (2.17) obtenemos los valores

$$c_1 = 4/9, \quad c_2 = -1/9$$

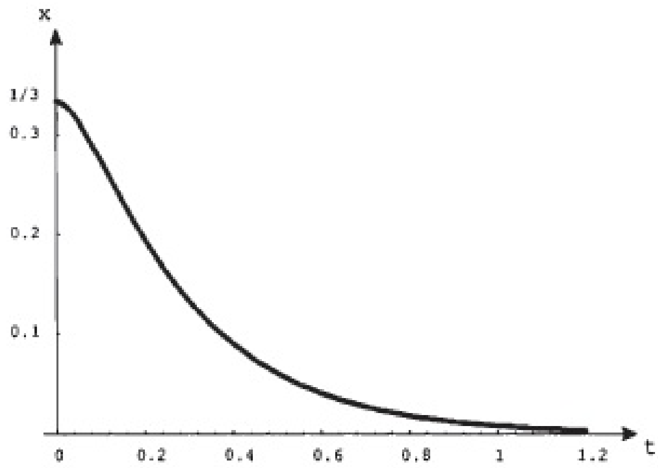

Figura 2.7: Solución del ejemplo

Por consiguiente

$$x(t) = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t} \tag{2.18}$$

Como se observa en la figura, no ocurren oscilaciones ya que el peso tiene tanto amortiguamiento que sólo retorna gradualmente a la posición de equilibrio sin pasar por esta. Se trata de un movimiento sobreamortiguado.

Ejemplo 27 *Después de que un cuerpo que pesa 10 Ib se sujeta a un resorte de 5 ft de largo, el resorte mide 7 ft. Se quita el cuerpo de 10 Ib y se le reemplaza por uno de 8 Ib. El sistema completo se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.*

1. *Obtenga la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que se encuentra 1/2 ft abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 ft/s.*

2. *Encuentre los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia abajo.*

3. *Construya la gráfica de la ecuación del movimiento.*

Solución:

1. De la ley de Hooke es claro que
$$k = \frac{10}{2}\frac{lb}{ft} = 5\frac{lb}{ft}$$
Además
$$m = \frac{8}{32}\frac{lb}{ft/s^2} = \frac{1}{4}slug$$
y $\beta = 1$, así que la ecuación diferencial del movimiento es
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 0 \tag{2.19}$$
Resolviendo (2.19) sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1/2$ ft y $x'(0) = 1$ ft/s, obtenemos
$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(cos4t + sen4t) \tag{2.20}$$

2. Escribimos primero la solución (2.20) en la forma alternativa. Tenemos que
$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\phi = arctan1 = \frac{\pi}{4}$$
De modo que
$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t}sen\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$$
por lo cual $x(t) = 0$ si y sólo si
$$4t + \frac{\pi}{4} = n\pi, \quad n \in N$$
Por lo tanto, los valores
$$t_n = n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$$
con n un entero positivo par, son los instantes en los que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio moviéndose hacia abajo.

3. La gráfica se muestra en la figura siguiente

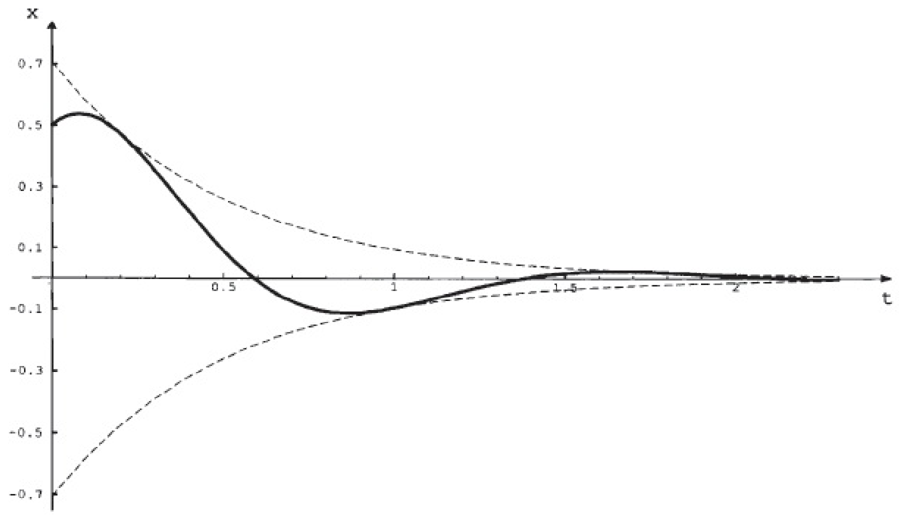

Figura 2.8: Solución del ejemplo

2.3. Movimiento Vibratorio Forzado

En las dos secciones anteriores estudiamos el problema de un resorte donde sólo se consideraron las fuerzas restauradora y amortiguadora. Veremos ahora casos dónde actúan otras fuerzas externas que varían con el tiempo. Dichas fuerzas pueden ocurrir, por ejemplo, cuando el soporte que sostiene al resorte se mueve verticalmente de cierta manera dada, tal como en un movimiento periódico o cuando al peso se le da un pequeño empuje cada vez que alcanza la posición más baja.
Denotemos con $f(t)$ la fuerza exterior que actúa sobre la masa. De la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t) \tag{2.21}$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \tag{2.22}$$

donde $2\lambda = \beta/m$, $w^2 = k/m$ y $F(t) = f(t)/m$.
Para resolver la ecuación no homogénea (2.22) podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros, según sea más conveniente.

Ejemplo 28 *Un resorte vertical con constante de 6 lb/ft tiene suspendida una masa de 1/2 slug. Se aplica una fuerza externa dada por $f(t) = 40sen2t$, $t > 0$. Supóngase que actúa una fuerza amortiguadora numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea y que inicialmente el cuerpo está en reposo en su posición de equilibrio. Determine la posición del cuerpo en cualquier tiempo $t > 0$.*

Solución: Con los valores de $k = 6lb/ft$, $m = 1/2slug$ y $\beta = 2$, la ecuación diferencial de movimiento resultante es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 12x = 80sen2t \tag{2.23}$$

La solución complementaria de (2.23) es

$$x_c(t) = e^{-2t}(c_1cos2\sqrt{2}t + c_2sen2\sqrt{2}t)$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados proponemos una solución particular de (2.23) de la forma

$$x_p(t) = Acos2t + Bsen2t$$

En tal caso

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -2Asen2t + 2Bcos2t \\ x_p''(t) &= -4Acos2t - 4Bsen2t \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.23), se sigue que

$$(8A + 8B)cos2t + (8B - 8A)sen2t = 80sen2t$$

El sistema de ecuaciones resultante:

$$\begin{aligned} 8A + 8B &= 0 \\ -8A + 8B &= 80 \end{aligned}$$

conduce a los valores $A = -5$ y $B = 5$. Así que

$$x(t) = e^{-2t}(c_1cos2\sqrt{2}t + c_2sen2\sqrt{2}) + 5(sen2t - cos2t)$$

Empleando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ encontramos que $c_1 = 5$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto

$$x(t) = 5e^{-2t}cos2\sqrt{2}t + 5(sen2t - cos2t)$$

Obsérvese que en el ejemplo anterior la solución complementaria

$$x_c(t) = 5e^{-2t} cos2\sqrt{2}t$$

tiene la propiedad de que

$$\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0$$

por lo cual se dice que $x_c(t)$ es un término transitorio o una solución transitoria. Así para valores grandes de t, (t) se aproxima a $x_p(t)$. A $x_p(t)$ se le llama solución estacionaria o de estado permanente.

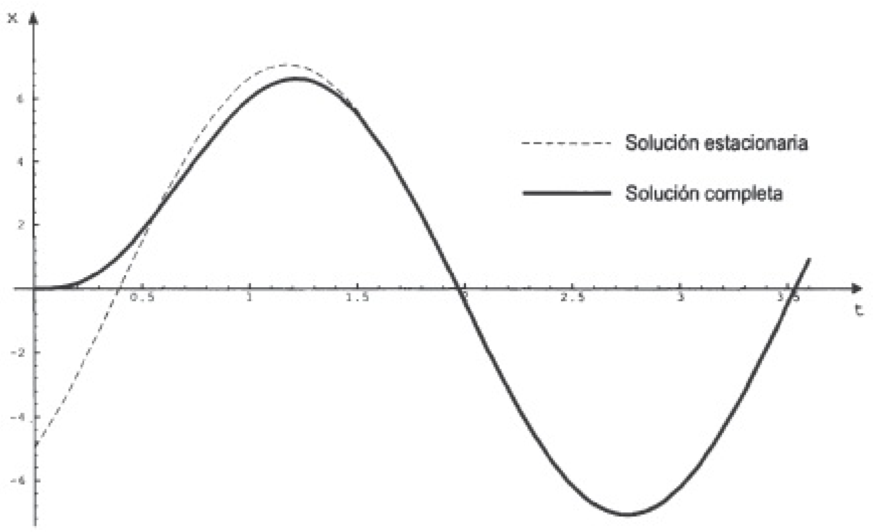

Figura 2.9: Solución del ejemplo

De hecho, si en la ecuación diferencial (2.22) ponemos $F(t) = F_0 sen\alpha t$ o $F(t) = R_0 cos\alpha t$, donde F_0 y α son constantes, entonces su solución general consiste en la suma de dos términos: término transitorio más término estacionario.

2.3.1. Resonancia

Estudiaremos la ecuación (2.22) en el caso especial en que $F(t) = F_0 sen\alpha t$, $t \geq 0$, donde F_0 y α son constantes positivas. La ecuación diferencial básica es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 sen\alpha t \qquad (2.24)$$

donde $2\lambda = \beta/m$ y $w^2 = k/m$.
Supondremos que β es suficientemente pequeño de modo que el amortiguamiento es menor que el crítico. En otras palabras, consideraremos que $\lambda < \omega$. Luego, la solución complementaria de (2.24) tiene la forma

$$x_c(t) = e^{-\lambda t}(c_1 cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 sen\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t)$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias, que dependen de las condiciones iniciales, o equivalentemente

$$x_c(t) = Ae^{-\lambda t}sen(sen\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $sen\phi = c_1/A$ y $cos\phi = c_2/A$.
Ahora determinaremos una solución particular de (2.24), utilizando el método de los coeficientes indeterminados. Sea

$$x_p(t) = Bcos\alpha t + Csen\alpha t$$

Entonces

$$\begin{aligned} x'_t &= -\alpha Bsen\alpha t + \alpha Ccos\alpha t \\ x''_t &= -\alpha^2 Bcos\alpha t - \alpha^2 Csen\alpha t \end{aligned}$$

Sustituyendo $x(t)$, $x'(t)$ y $x''(t)$ en (2.24) se obtiene

$$(-\alpha^2 B + 2\lambda\alpha C + \omega^2 B)cos\alpha t + [(\omega^2 - \alpha^2)C - 2\alpha\lambda B]sen\alpha t = F_0 sen\alpha t$$

Igualando los coeficientes en la última igualdad, resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \alpha^2)B + 2\lambda\alpha C &= 0 \\ -2\lambda\alpha B + (\omega^2 - \alpha^2)C &= F_0 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$B = -\frac{2\alpha\lambda F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2} \qquad C = \frac{(\omega^2 - \alpha^2)F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}$$

Consecuentemente

$$x_p(t) = -\frac{2\alpha\lambda F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}cos\alpha t + \frac{(\omega^2 - \alpha^2)F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}sen\alpha t$$

Podemos escribir $x_p(t)$ en la forma

$$x_p(t) = \widetilde{A}sen(\alpha t + \theta)$$

donde

$$\widetilde{A} = \sqrt{\left[-\frac{2\alpha\lambda F_0}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right]^2 + \left[\frac{(\omega^2-\alpha^2)F_0}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right]^2}$$

es decir, simplificando

$$\widetilde{A} = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}$$

El ángulo θ está determinado por las relaciones

$$sen\theta = -\frac{2\alpha\lambda}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}} \qquad cos\theta = -\frac{\omega^2-\alpha^2}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}$$

Así que

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}} sen(\alpha t+\theta)$$

Obsérvese que la solución completa es la suma de dos términos

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

El primero

$$x_c(t) = Ae^{-\lambda t} sen(\sqrt{\omega^2-\mu^2}t+\phi)$$

representa la oscilación amortiguada, que sería todo el movimiento del sistema si la fuerza externa $F(t)$ no actuara. El segundo término

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}} sen(\alpha t+\theta)$$

que resulta de la presencia de la fuerza externa, representa un movimiento armónico simple de periodo $2\pi/\alpha$ y amplitud

$$g(\alpha) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}$$

Para F_0, ω y λ fijos, la amplitud es función de α. Consideremos la función $g(\alpha)$ en el intervalo $(0,\infty)$. Se tiene que

$$g'(\alpha) = \frac{2F_0\alpha(\omega^2-\alpha^2-2\lambda^2)}{[(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2]^{3/2}}$$

Luego, $g'(\alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha = \alpha_0$ o $\alpha = \alpha_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$. Se puede verificar fácilmente que la amplitud de las oscilaciones alcanza un valor máximo cuando

$$\alpha = \alpha_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$$

El valor máximo de la amplitud es

$$g(\alpha_1) = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$$

Cuando la frecuencia de la fuerza exterior es

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}}{2\pi}$$

5e dice que el sistema está en resonancia.
En un sistema en resonancia $\alpha = \alpha_1$, la amplitud de la oscilación varía inversamente con la constante de amortiguamiento. De hecho, se observa que

$$\lim_{\beta\to 0^+} g(\alpha_1) = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} = \infty$$

$$\lim_{\beta\to 0^+} \alpha_1 = \omega$$

Diremos que hay resonancia pura si $\beta = 0$. En tal caso $\alpha = \alpha_1 = \omega$, o sea que la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural del sistema.
Finalmente obsérvese que la resonancia puede ocurrir solamente si

$$\omega^2 > 2\lambda^2$$

$$\frac{k}{m} > 2\frac{\beta^2}{4m^2}$$

esto es

$$\beta < \sqrt{2km} \tag{2.25}$$

Ejemplo 29 *Un peso de 4 Ib se suspende de un resorte cuya constante es de k=8 lb/ft. Suponga que una fuerza externa dada por $f(t) = 4cos8t$ se aplica al resorte y que no hay amortiguamiento. Describa el movimiento que resulta si se asume que inicialmente el peso está en la posición de equilibrio y que su velocidad inicial es cero.*

Solución: La ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x + 4cos8t$$

Equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 32cos8t \tag{2.26}$$

La solución complementaria de (2.26) es

$$x_c(t) = c_1cos8t + c_2sen8t$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = t(Acos8t + Bsen8t)$$

Sustituyendo en (2.26) se encuentra que $A = 0$ y $B = 2$. Así que

$$x(t) = c_1cos8t + c_2sen8t + 2tsen8t$$

De las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ encontramos que $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Por consiguiente la ecuación del movimiento es

$$x(t) = 2tsen8t$$

Ahora, observamos la gráfica. Vemos que en este caso hay resonancia pura en vista de que $\beta = 0$ y la frecuencia de la fuerza externa aplicada es igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado.

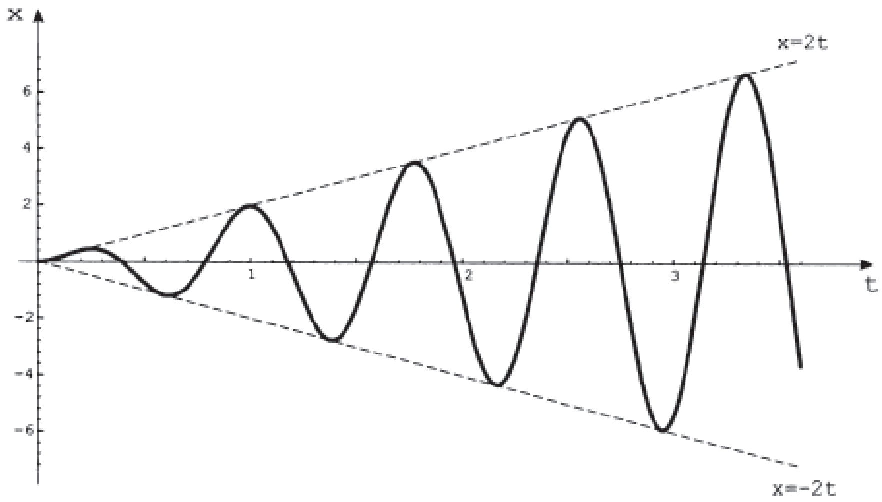

Figura 2.10: Solución del ejemplo

2.4. Circuito LRC en Serie

Ahora aplicaremos la teoría antes vista para determinar la carga $q(t)$ y la corriente $i(t)$ en un circuito como el mostrado en la figura 2.11, en el que se conectan un inductor o bobina de L henrios, una resistencia de R ohmios, un condensador o capacitor de C faradios y un generador de voltaje cuya fuerza electromotriz está dada por una función E(t) voltios.
De la segunda ley de Kirchhoff se tiene

$$L\frac{di}{dt} + R_i + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{2.27}$$

Ya que

$$i = \frac{dq}{dt}\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{2.28}$$

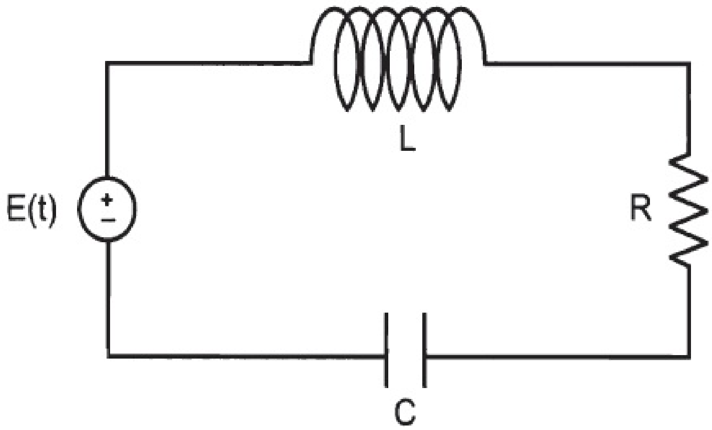

Figura 2.11: Circuito LRC

sustituyendo en (2.27) resulta la ecuación diferencial para la carga eléctrica en el condensador

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{2.29}$$

Noté también que si primero derivamos con respecto a t en (2.27) obtenemos

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

y si luego sustituimos las expresiones (2.28), esto nos conduce a la ecuación diferencial de la corriente eléctrica

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt} \tag{2.30}$$

Cabe además destacar la similitud entre las ecuaciones (2.29) y (2.21), lo cual permite resolver un problema de movimiento vibratorio en base al análisis del correspondiente circuito eléctrico y viceversa, identificando

- la carga q con la posición x,
- la inductancia L con la masa m,
- la resistencia R con la constante de amortiguamiento β,
- el recíproco de la capacitancia $1/C$ con la constante del resorte k,
- la fuerza electromotriz $E(t)$ con la fuerza externa $f(t)$ y

- la corriente eléctrica $i = dq/dt$ con la velocidad $v = dx/dt$.

Es claro entonces que podemos aplicar todos los resultados de la sección anterior al estudio de un circuito LRC en serie.

Ejemplo 30 *Un circuito en serie consta de un inductor de 0.25 H, una resistencia de 40 Ω, un capacitor de* $4x10^{-4}$ *F y una fuerza electromotriz dada por* $E(t) = 5sen100t$ *V. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas cero, determine la carga en el capacitor y la corriente eléctrica del circuito para cualquier tiempo* $t > 0$.

Solución: Sustituyendo los valores de L=0.25 H, R=40 Ω, C=$4x10^{-4}$ F y $E(t) = 5sen100t$ V en la ecuación diferencial (2.29) obtenemos

$$(0{,}25)\frac{d^2q}{dt^2} + 40\frac{dq}{dt} + \frac{1}{4x10^{-4}}q = 5sen100t$$

o bien

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10000q = 20sen100t \tag{2.31}$$

La ecuación auxiliar de (2.31) es $r^2 + 160r + 10000 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -80 + 60i$ y $r_2 = -80 - 60i$. Luego

$$q_c(t) = e^{-80t}(c_1cos60t + c_2sen60t)$$

Adicionalmente, empleando el método de coeficientes indeterminados encontramos que una solución particular de (2.31) es

$$q_p(t) = -\frac{1}{800}cos100t$$

En consecuencia, la solución general de (2.31) es

$$q(t) = e^{-80t}(c_1cos60t + c_2sen60t) - \frac{1}{80}cos100t$$

De las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$ se sigue que

$$c_1 - \frac{1}{800} = 0$$

y

$$-80c_1 + 60c_2 = 0$$

respectivamente. A partir de estas ecuaciones encontramos que

$$c_1 = \frac{1}{800} \qquad\qquad c_2 = \frac{1}{600}$$

Por consiguiente, la carga en el capacitor es

$$q(t) = e^{-80t}\left(\frac{1}{800}cos60t + \frac{1}{600}sen60t\right) - \frac{1}{800}cos100t$$

y la corriente eléctrica viene dada por

$$i(t) = -\frac{5}{24}e^{-80t}sen60t + \frac{1}{8}sen100t$$

2.5. Vigas horizontales

El problema consiste en determinar la flexión de una viga rectangular sometida a una carga. Inicialmente la viga es recta y su eje central coincide con el eje x, como se muestra en la figura (2.12). Posteriormente, dicho eje se ha desplazado debido a la acción de la carga en la figura (2.13). Lo que se desea es obtener la ecuación de la curva punteada, llamada curva elástica, que nos da la deformación de la viga.
Por simplicidad consideraremos la curva elástica y un punto $P(x, y)$ sobre ella. De los cursos de Física se sabe que el momento M en el punto P es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre el segmento de la curva. Aquí supondremos que las fuerzas hacia arriba dan momentos positivos y las fuerzas hacia abajo dan momentos negativos. El momento está dado por

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

donde E es el módulo de elasticidad de la viga I es el momento de inercia. Luego, si queremos conocer la ecuación de la curva elástica debemos resolver la ecuación diferencial.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{2.32}$$

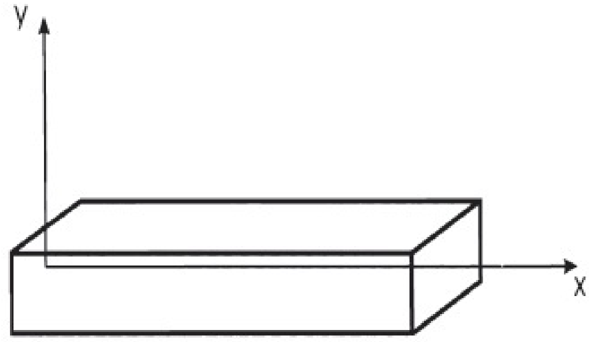

Figura 2.12: Viga horizontal

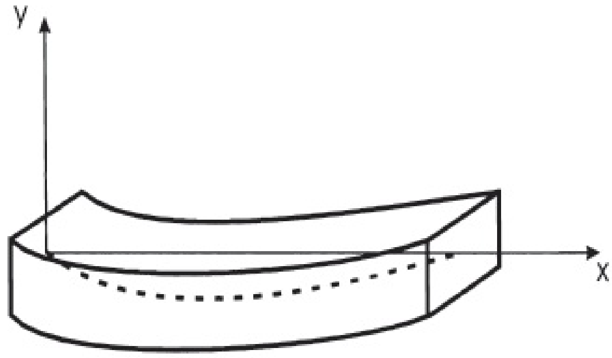

Figura 2.13: Aplicación de una carga a una viga

Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo 31 *Una viga de 8 m de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 500 kg por metro de longitud y una carga al centro de 5000 kg, ¿cuál es la curva elástica de la viga?*

Solución: En la figura (2.14), las fuerzas que actúan sobre OP son

1. Una fuerza aplicada en O a x metros de P, dirigida hacia arriba e igual a la carga total, es decir $1\frac{1}{2}(5000 + 8 \cdot 500)$.

2. Una fuerza de $500x$ dirigida hacia abajo que se supone concentrada en el punto medio de OP.

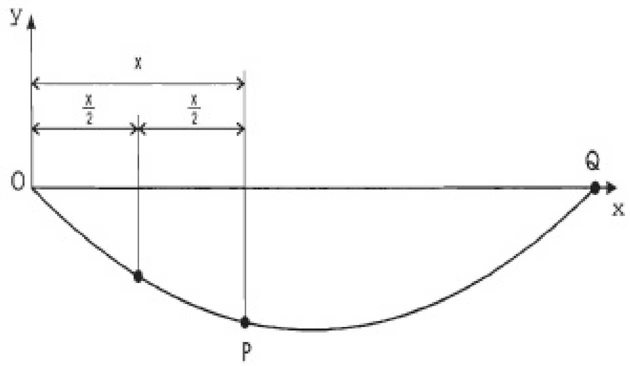

Figura 2.14: Diagrama de momentos flectores

Así el momento flector en P es.

$$M = F_1 d_1 - F_2 d_2 = \frac{1}{2}(5000 + 8 \cdot 500)x - 500x\left(\frac{x}{2}\right) = 4500x - 250x^2$$

y la ecuación diferencial (2.32), en este caso, tiene la forma

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 4500x - 250x^2 \tag{2.33}$$

Podemos resolver (2.33) integrando directamente. Integrando una vez resulta

$$EI\frac{dy}{dx} = 2225x^2 - \frac{250}{3}x^3 + c_1$$

y volviendo a integrar obtenemos

$$EIy = \frac{2225}{3}x^3 - \frac{125}{6}x^4 + c_1 x + c_2$$

En O, $x = y = 0$ de modo que $c_2 = 0$. En Q, $x = 8$ y $y = 0$, por lo cual $c_1 = -36800$. Por lo tanto

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{2225}{3}x^3 - \frac{125}{6}x^4 - 36800x\right)$$

es la curva elástica de la viga.

2.6. Péndulo simple

Un péndulo simple consiste en una partícula de masa m suspendida de una cuerda (o un hilo inelástico) de largo l y de masa despreciable. Suponiendo que la cuerda está siempre tensa, que las oscilaciones son en un plano vertical y que las únicas fuerzas que actúan son el peso de la partícula y la tensión en la cuerda, deseamos hallar la ecuación del movimiento.

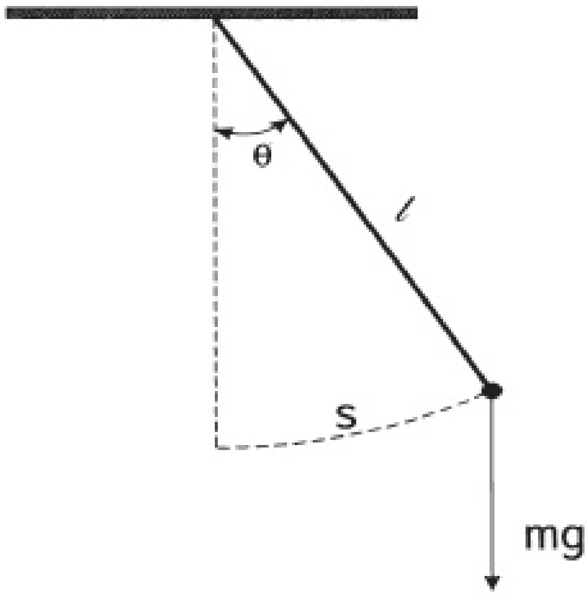

Figura 2.15: Péndulo simple

Sean θ y s como en la figura (2.15). Se tiene que $s = l\theta$, de donde

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Descomponiendo el peso mg en dos componentes, una en la dirección de la tangente a la trayectoria y la otra perpendicular a ésta, vemos que la componente perpendicular se compensa por la tensión. La magnitud de la componente tangencial es $mgsen\theta$. Lo podemos ver en la figura (2.16).
Luego, de la segunda ley de Newton se sigue que

$$ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen\theta$$

Obtenemos así la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} sen\theta$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen\theta = 0 \tag{2.34}$$

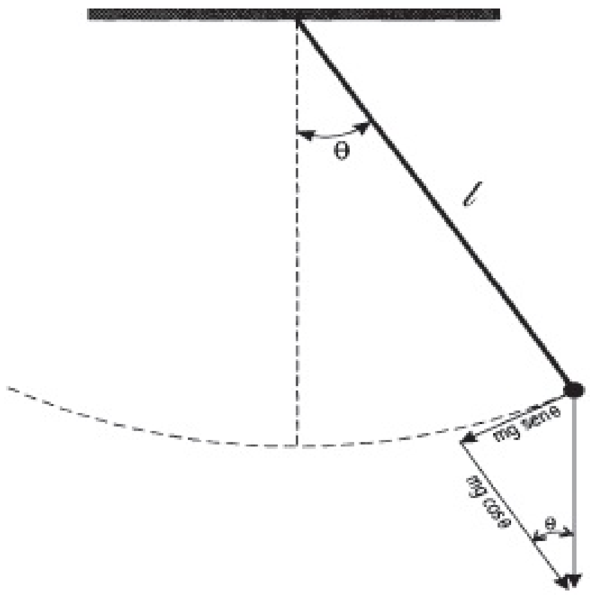

Figura 2.16: Componentes del peso en el péndulo simple

La ecuación (2.34) no es lineal y no puede resolverse en términos de funciones elementales. Sin embargo, para ángulos pequeños $sen\theta \approx \theta$; que sustituyendo en (2.34) nos conduce a la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.35}$$

La solución general de (2.35) es claramente

$$\theta(t) = c_1 cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 sen\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

que corresponde a un movimiento armónico simple con período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Capítulo 3

Solución de ecuaciones usando series

Hasta ahora, nos hemos restringido al uso de ecuaciones diferenciales que podían resolverse exactamente y con varias aplicaciones que nos conducían a ellas. Hay ciertas ecuaciones diferenciales las cuales son de gran importancia en matemáticas e ingeniería o en otras aplicaciones científicas que no pueden resolverse exactamente en términos de funciones elementales por cualesquiera de los métodos anteriores. A continuación vamos a ver un procedimiento que nos ayudarán a encontrar la solución por medio de series de potencias. La idea básica es semejante a la del método de los coeficientes indeterminados: se supone que las soluciones de una ecuación diferencial dada tienen desarrollos en series de potencias y luego se intenta determinar los coeficientes de modo que se satisfaga la ecuación diferencial.

3.1. Generalidades del uso de series

Vamos a considerar una ecuación diferencial, como por ejemplo la siguiente:

$$y'' + y = 0 \tag{3.1}$$

En cálculo aprendimos que gran cantidad de funciones poseen expansiones en serie del tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... \tag{3.2}$$

que con frecuencia se llama serie de potencias. Suponiendo que no podemos resolver la ecuación (3.1), una manera con la cual podríamos empezar a resolverla es asumiendo, que si la solución, si existe, posee una expansión en serie del tipo (3.2). Si (3.1) va a ser una solución en serie, debemos tener;

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... \tag{3.3}$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... \tag{3.4}$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + ... \tag{3.5}$$

Sustituyendo (3.3) y (3.5) en la ecuación diferencial dada y combinando términos similares, da

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + (a_2 + 12a_4)x^2 + (a_3 + 20a_5)x^3 + ... = 0$$

Puesto que el lado derecho es cero, esto puede ser una identidad si y sólo si cada uno de los coeficientes a la izquierda es cero. Así,

$$a_0 + 2a_2 = 0 \quad a_1 + 6a_3 = 0 \quad a_2 + 12a_4 = 0 \quad a_3 + 20a_5 = 0...$$

Esto lleva a

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{6} = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{12} = -\frac{a_2}{4!}$$

Sustituyendo estas en (3.3), tenemos

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4! + ...}\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5! + ...}\right) \tag{3.6}$$

Puesto que (3.6) involucra a dos constantes arbitrarias, sospechamos que ésta representa la solución de la ecuación diferencial dada. Recordando del cálculo

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \quad \text{y} \quad sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

tenemos que $y = a_0 cos\ x + a_1 sen\ x$.

Vamos a considerar ahora una ecuación diferencial lineal de la siguiente forma:

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.7}$$

donde $p(x)$, $g(x)$ y $r(x)$ son polinomios. Al resolver y'' tenemos:

$$y'' = -\frac{q(x)y' + r(x)y}{p(x)} \tag{3.8}$$

Ahora si ha de existir una solución, desearíamos que y'' existiera en $x = a$ y no sería bueno que el denominador $p(x)$ fuese cero para $x = a$. Esto nos lleva a introducir el siguiente término;
Punto singular o singularidad Un valor x tal que $p(x) = 0$ se llama punto singular o singularidad de la ecuación diferencial (3.7). Cualquier otro valor de x se llama entonces un punto ordinario o punto no singular.
Vamos a enunciar un teorema cuya demostración se omitirá;

Teorema 3.1.1 *Sea*

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.9}$$

una ecuación diferencial donde $p(x)$, $q(x)$ *y* $r(x)$ *son polinomios. Supongamos que* a *es cualquier punto ordinario de* (3.9)*, esto es,* $p(a) \neq 0$*. Entonces podemos sacar las dos siguientes conclusiones;*

- *La solución general de* (3.9) *se puede obtener al sustituir la serie de potencias (o serie de Taylor) alrededor de* $x = a$ *dada por*

$$y = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ... = \sum_{i=0} a(x-a)^i \tag{3.10}$$

  en la ecuación diferencial dada. Un resultado equivalente es que la solución general tiene la forma $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$*, donde* $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$ *son soluciones linealmente independientes, cada una teniendo la forma* (3.10)

- *Las soluciones con series obtenidas en la parte 1 convergen para todos los valores de* x *tales que* $|x - a| < R$*, donde* R *es la distancia del punto* a *a la singularidad más próxima.Con frecuencia llamamos* R *al radio de convergencia. Las series pueden o no pueden converger para* $|x - a| = R$*, pero difinitivamente divergen para* $|x - a| > R$

3.2. El método de la serie de Taylor

El método de la serie de Taylor es un método para hallar soluciones con series de potencias de la ecuación diferencial (3.11) alrededor de un punto ordinario $x = 0$.

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.11}$$

Este método usa los valores de las derivadas evaluadas en el punto ordinario, los cuales se obtienen de la ecuación diferencial por diferenciación sucesiva.

Cuando se encuentran las derivadas, usamos luego la expansión en serie de Taylor

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \frac{y''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{y'''(a)(x-a)^3}{3!} + ... \quad (3.12)$$

dando la solución requerida. Vamos a ver un ejemplo para que quede clara la aplicación del método.

Ejemplo 32 *Utilizar el método de Taylor para la resolución de la siguiente ecuación;*

$$xy'' - y = 0, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 3$$

Solución: Por diferencia sucesiva de $xy'' - y = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} &xy''' + y'' - y' = 0 \\ &xy^{IV} + 2y''' - y'' = 0 \\ &xy^{V} + 2y^{IV} - y''' = 0 \\ &xy^{VI} + 2y^{V} - y^{IV} = 0 \end{aligned}$$

Para $x = 2$ estas llegan a ser;

$$\begin{aligned} &2y''(2) + y''(2) - y'(2) = 0 \\ &2y^{IV}(2) + 2y'''(2) - y''(2) = 0 \\ &2y^{V}(2) + 2y^{IV(2)} - y'''(2) = 0 \\ &2y^{VI}(2) + 2y^{V}(2) - y^{IV}(2) = 0 \end{aligned}$$

Usando las condiciones $y(2) = 0$, $y'(2) = 3$, tenemos;

$$\begin{aligned} &y''(2) = 0 \\ &y'''(2) = 3/2 \\ &y^{IV}(2) = -3/2 \\ &y^{V}(2) = 3 \\ &y^{VI}(2) = -27/2 \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} y(x) &= y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{y''(2)(x-2)^2}{2!} + \frac{y'''(2)(x-2)^3}{3!} + \frac{y^{IV}(2)(x-2)^3}{4!} \\ &+ \frac{y^{V}(2)(x-2)^3}{5!} + \frac{y^{VI}(2)(x-2)^3}{6!} \\ &= 0 + 3(x-2) + 0 + \frac{3/2}{3!}(x-2)^3 + \frac{-3/2}{4!}(x-2)^4 + \frac{3}{5!}(x-2)^5 + \frac{-27/2}{6!}(x-2)^6 \\ &= 3(x-2) + \frac{(x-2)^3}{4} - \frac{(x-2)^4}{16} + \frac{(x-2)^5}{40} - \frac{3((x-2)^6)}{160} \end{aligned}$$

El método de Taylor también lo podemos usar para obtener soluciones con series para ecuaciones diferenciales no lineales.
El teorema (3.1.1) no puede generalizarse al caso donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son series de potencias en $x - a$ en vez de polinomios. El teorema fundamental en tal caso es el siguiente,

Teorema 3.2.1 *Sea*

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.13}$$

una ecuación diferencial dada. Sea $x = a$ un punto ordinario (esto es, $p(a) \neq 0$) y R la distancia de a a la singularidad más próxima. Suponga también que las funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ tienen expansiones en series de potencias de la forma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 ... \tag{3.14}$$

las cuales son convergentes para $|x - a| < R$, esto es, dentro del círculo de radio R con centro en a (las funciones en tal caso se dice con frecuencia que son analíticas dentro del círculo). Entonces podemos sacar las dos siguientes conclusiones:

- *La solución general de* (3.13) *se puede encontrar al sustituir la serie*

$$y = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... = \sum a_j(x-a)^j \tag{3.15}$$

  en (3.13) *usando la serie de potencias en $x - a$ para $p(x)$, $q(x)$, y $r(x)$. En forma equivalente, la solución general tiene la forma $y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones linealmente independientes cada una teniendo la forma* (3.15)*.*

- *Las soluciones con series obtenidas en la parte anterior, convergen para todos los valores de x tales que $|x-a| < R$ (esto es, dentro del círculo), y divergen para todos los valores de x tales que $|x - a| > R$ (esto es, fuera del círculo). Para los valores tales de x que $|x - a| = R$ (esto es, sobre el círculo), las series pueden o no pueden converger.*

3.3. El método de Frobenius

Anteriormente hemos visto como obtener una solución con series de potencias a la ecuación diferencial

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.16}$$

alrededor de un punto ordinario $x = a$, donde $p(a) \neq 0$. Sería muy ventajoso encontrar las soluciones con series de potencias alrededor de $x = a$ si a es un punto singular cuando nos dan, por ejemplo, las condiciones iniciales en un punto singular.
Frobenius se interesó por esta cuestion a finales del siglo XIX y la investigó. Como una primera etapa en la investigación, decidió mirar a la ecuación diferencial de Euler, la cual tiene un punto singular. Consideró varios ejemplos de ecuaciones diferenciales de este tipo junto con sus soluciones generales, tales como;

$$\begin{aligned} &2x^2y'' + 2xy' + y = 0, \quad y = c_1x + c_2x^2 \\ &x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y = c_1x^2 + c_2x \\ &x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y = c_1x + c_2xlnx \end{aligned}$$

En estos ejemplos se ve que aunque las ecuaciones diferenciales son muy similares entre sí, sus soluciones son bastante diferentes.
Al asumir una solución con series de potencias de la forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum a_jx^j \tag{3.17}$$

en cada una de estas ecuaciones entraríamos la solución general en el segundo caso, una solución en el tercer caso y ninguna en el primero, a parte de la trivial $y = 0$. Frobenius se dio cuenta de que el problema estaba en la serie asumida en (3.17). Utilizó un tipo más general de serie como

$$v = x^c(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) = \sum a_jx^{j+c} \tag{3.18}$$

donde c es una constante adicional desconocida y esta serie se reduce al caso (3.17) cuando la $c = 0$. Ahora el primer y el segundo caso tienen solución general, y el tercero una solución.
Vamos a ver, bajo que condiciones sobre $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ donde $x = 0$ es un punto singular, la ecuación diferencial (3.16) tendrá una solución del tipo (3.18).
Comparemos la ecuación general de Euler de segundo orden

$$k_0x^2y'' + k_1xy' + k_2y = 0 \tag{3.19}$$

donde k_0, k_1, y k_2 son constantes en (3.16). Dividamos la ecuación (3.16) por $p(x)$ y (3.19) por k_0x^2 de modo que el coeficiente de y'' en ambos casos sea 1, con lo que tenemos;

$$y'' + \frac{q(x)}{p(x)}y' + \frac{r(x)}{p(x)}y = 0, \quad y'' + \frac{k_1}{k_0x}y' + \frac{k_2}{k_0z^2}y = 0$$

Ahora si tomamos
$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{k_1}{k_0 x}, \quad \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{k_2}{k_0 x^2}$$
o en forma equivalente, si
$$\frac{xq(x)}{p(x)} = \text{una constante} \quad \frac{x^2 r(x)}{p(x)} = \text{una constante} \tag{3.20}$$
entonces (3.16) es precisamente la ecuación de Euler.
Si no tenemos (3.20) pero si tenemos;
$$\lim_{x\to 0} \frac{xq(x)}{p(x)} = \text{una constante}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 r(x)}{p(x)} = \text{una constante} \tag{3.21}$$
significa que los límites en (3.21) existen, entonces (3.16) no será la ecuación de Euler, pero debería ser muy cercana a la ecuación de Euler si tomamos x lo suficientemente cercano a cero. En este caso, suponemos que (3.16) tiene una solución del tipo Frobenius (3.18).
Antes de enunciar el teorema, notemos primero que al imponer las condiciones (3.21) estamos colocando una restricción sobre el punto singular $x = 0$ puesto que el requerimiento puede o no puede cumplirse. Esto nos lleva a distinguir entre dos clases de puntos singulares como se expresan en la siguiente definición. Enunciamos esta definición en una forma aplicable a cualquier punto singular $x = a$ en vez de $x = 0$.

Definición 3.3.1 Punto singular regular *Sea $x = a$ un punto singular de la ecuación diferencial* (3.16). *Entonces si*
$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)q(x)}{p(x)}, \quad \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2 r(x)}{p(x)} \tag{3.22}$$
existen ambos, llamamos $x = a$ punto singular regular; en caso contrario se llama un punto singular irregular.

Vamos a ver un ejemplo para aclarar la definición.

Ejemplo 33 *Dada la ecuación*
$$x^3(1-x)y'' + (3x+2)y' + x^4 y = 0$$
tenemos $p(x) = x^3(1-x)$, $q(x) = 3x + 2$ y $r(x) = x^4$ y hay dos puntos singulares $x = 0$ y $x = 1$. Se tiene que
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)(3x+2)}{x^3(1-x)}$$

no existe, mientras que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2)(x^4)}{x^3(1-x)} = 0$$

Puesto que uno de los límites no existe, $x = 0$ es un punto singular irregular. Puesto que

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{x^3(1-x)} = -5 \quad \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x^4}{x^3(1-x)} = 0$$

existen ambos límites y $x = 1$ es un punto singular regular.

Con todo esto, vamos a enunciar el teorema siguiente;

Teorema 3.3.1 *Sea $x = a$ un punto singular regular de la ecuación diferencial*

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.23}$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios, y supongamos que

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)q(x)}{p(x)} \quad y \quad \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^2 r(x)}{p(x)} \tag{3.24}$$

existen ambos. Entonces (3.23) tiene una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = (x-a)^c(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ...) = \sum a_j(x-a)^{j+c} \tag{3.25}$$

donde la serie aparte del factor $(x-a)^c$ converge para todo x tal que $|x-a| < R$ y donde R es la distancia de $x = a$ a la singularidad mas próxima distinta de a. La serie puede o no puede converger para $|x-a| = R$ pero definitivamente diverge para $|x-a| > R$.

Ejemplo 34 *Dada la ecuación $x^3(1-x)y'' + (3x+2)y' + x^4y = 0$, sabemos del ejemplo anterior que $x = 1$ es un punto singular regular, mientras que $x = 0$ es un punto singular irregular. Así existe una solución tipo Frobenius de la forma (3.25) donde la serie aparte del factor $(x-1)^c$ es convergente para $|x-1| < 1$ puesto que la distancia de 1 a la singularidad más próxima, 0, es 1. La serie puede o no puede converger para $|x-1| = 1$, pero definitivamente diverge para $|x-1| > 1$.*
Puesto que $x = 0$ es un punto singular irregular, no podemos concluir a partir del teorema (3.3.1) si hay soluciones tipo Frobenius de la forma (3.25).

Como se ha visto en este ejemplo, el teorema (3.3.1) no nos permite sacar ninguna conclusión que concierne soluciones tipo Frobenius en el caso de un punto singular irregular. En tal caso siempre podemos obtener una solución con series alrededor de un punto ordinario y luego usar el Teorema (3.1.1).

Ejemplo 35 *Encontrar soluciones tipo Frobenius de*

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

Solución: Tenemos $p(x) = 4x$, $q(x) = 2$, $r(x) = 1$ y $x = 0$ es un punto singular regular. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{xq(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x)(2)}{4x} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 r(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)(1)}{4x} = 0$$

existen ambos, vemos que $x = 0$ es un punto singular regular, de modo que existe una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = \sum a_j x^{j+c} \tag{3.26}$$

donde se omiten los límites del sumatorio $-\infty$ y ∞, donde $a_j = 0$ para los enteros negativos j. La diferenciación de (3.26) produce

$$y' = \sum (j+c)a_j x^{j+c-1}, \quad y'' = \sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c-2} \tag{3.27}$$

Sustituyendo (3.26) y (3.27) en la ecuación diferencial dada, tenemos

$$\begin{aligned}
4xy'' + 2y' + y &= \sum 4(j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c-1} + \sum 2(j+c)a_j x^{j+c-1} + \sum a_j x^{j+c} \\
&= \sum 4(j+c+1)(j+c)a_{j+1} x^{j+c} + \sum 2(j+c+1)a_{j+1} x^{j+c} + \sum a_j x^{j+c} \\
&= \sum (4(j+c+1)(j+c)a_{j+1} + 2(j+c+1)a_{j+1} + a_{j+1} + a_j) x_{j+c} \\
&= \sum ((2j+2c+2)(2j+2c+1)a_{j+1} + a_j) x_{j+c} = 0
\end{aligned}$$

de donde

$$(2j+2c+2)(2j+2c+1)a_{j+1} + a_j = 0 \tag{3.28}$$

Puesto que $a_1 = 0$ para $j < 0$, el primer valor de j para el cual obtenemos alguna información de (3.28) es $j = -1$;

$$(2c)(2c-1)a_0 = 0 \tag{3.29}$$

puesto que $a_0 \neq 0$

$$(2c)(2c-1) = 0 \tag{3.30}$$

de donde $c = 0, 1/2$. La ecuación (3.30) para determinar c con frecuencia se llama ecuación indicial, y los valores de c se llaman raíces indiciales, en este caso $c = 0$ y $c = 1/2$. Hay dos casos que deben ser considerados, correspondientes a los valores de c:

- **Caso I,** $c = 0$**.** En este caso (3.28) llega a ser

$$(2j+2)(2j+1)a_{j+1} + a_j = 0, \quad a_{j+1} = -\frac{a_j}{(2j+2)(2j+1)}$$

Tomando $j = 0, 1, 2$, encontramos;

$$a_1 = -\frac{a_0}{2!}, \quad a_2 = \frac{a_1}{4 \cdot 3} = -\frac{a_0}{4!}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}$$

de donde

$$y = \sum a_j x^j = a_0 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + ...\right) \tag{3.31}$$

- **Caso II,** $c = 1/2$**.**En este caso (3.28) llega a ser;

$$(2j+3)(2j+2)a_{j+1} + a_j = 0, \quad a_{j+1} = -\frac{a_j}{(2j+3)(2j+2)}$$

Tomando $j = 0, 1, 2$, encontramos

$$a_1 = -\frac{a_0}{\Delta!}, \quad a_2 = \frac{a_1}{5 \cdot 4} = -\frac{a_0}{5!}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 6} = -\frac{a_0}{7!}$$

de donde

$$y = \sum a_j x^{j+1/2} = a_0 \left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \frac{x^{7/2}}{7!} + ...\right) \tag{3.32}$$

De las soluciones (3.31) y (3.32) encontramos la solución general

$$y = A\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + ...\right) + B\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \frac{x^{7/2}}{7!} + ...\right) \tag{3.33}$$

Vemos que las series de la ecuación (3.33) representan, respectivamente, $cos\sqrt{x}$ y $sen\sqrt{x}$, de modo que la solución general queda de la siguiente forma;

$$y = Acos\sqrt{x} + Bsen\sqrt{x} \tag{3.34}$$

También vemos que las series de la ecuación (3.33) convergen para todos los valores de x, ya que $x = 0$ es el único punto singular.

Ejemplo 36 *Encontrar soluciones de tipo Frobenius para*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Solución: Aquí $p(x) = x^2$, $q(x) = x$, $r(x) = x^2 - 1$ y $x = 0$ es un punto singular. Puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{xp(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x)}{x^2} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 r(x)}{p(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-1)}{x^2} = -1$$

sigue que $x = 0$ es un punto singular regular de modo que, por el teorema (3.1.1), hay una solución tipo Frobenius de la forma

$$y = \sum a_j x^{j+c}$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial dada produce

$$x^2 \sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c-2} + \sum (j+c)a_j x^{j+c-1} + (x^2-1)\sum a_j x^{j+c} = 0$$

o

$$\sum (j+c)(j+c-1)a_j x^{j+c} + \sum (j+c)a_j x^{j+c} + \sum a_j x^{j+c+2} - \sum a_j x^{j+c} = 0$$

lo cual se puede escribir como un solo sumatorio

$$\sum ((j+c)(j+c-1)a_j + (j+c)a_j + a_{j-2} - a_j)x^{j+c}$$

Haciendo los coeficientes de x^{j+c} igual a cero y simplificando, obtenemos

$$(j+c+1)(j+c-1)a_j + a_{j-2} = 0 \tag{3.35}$$

Tomando $j = 0$ en (3.35) produce $(c+1)(c-1)a_0 = 0$, lo cual puesto que $a_0 \neq 0$ produce la ecuación indicial

$$(c+1)(c-1) = 0$$

de modo que $c = -1$ y $c = 1$ son raíces indiciales. Tenemos los dos casos;
Caso I, c=-1. Tomando $c = -1$ en (3.35), tenemos

$$j(j-2)a_j + a_{j-2} = 0, \quad a_j = -\frac{a_{j-2}}{j(j-2)}$$

Tomando $j = 1$ conduce a $a_1 = a_{-1}$, pero colocando $j = 2$ nos conduce a algo sin sentido para a_2 puesto que asumimos que $a_0 \neq 0$. Así no podemos encontrar ninguna solución en este caso.
Caso II, c=1. Tomando $c = 1$ en (3.35), produce

$$(j+2)ja_j + a_{j-2} = 0, \quad a_j = -\frac{a_{j-2}}{j(j+2)}$$

Tomando $j = 1, 2, 3, ...$, conduce a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 4}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6}$$

$$a_5 = 0, \quad a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 8} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}$$

Todos los a con j impar son cero porque son todos múltiplos de $a_1 = 0$. La solución requerida está así dada por

$$y = \sum a_j x^{j+1} = a_0 \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + ... \right) \tag{3.36}$$

Vemos según el teorema (3.1.1) que esta serie converge para todo x puesto que $x = 0$ es el único punto singular.
En este caso vemos que llegamos a una sola solución. Para encontrar la solución general necesitamos encontrara otra solución linealmente independientes. Podemos encontrarla haciendo $y = vY_1$. Lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 37 *Encontrar la solución general de*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Solución: Haciendo $y = vY_1$, tenemos

$$\begin{aligned} y' &= vY_1' + v'Y_1 \\ y'' &= 2v'Y_1' + v''Y_1 + vY_1'' \end{aligned}$$

de modo que la ecuación dada queda,

$$x^2(2v'Y_1' + v''Y_1 + vY_1'') + x(vY_1' + v'Y_1) + (x^2 - 1)vY_1 = 0$$

o

$$x^2Y_1v'' + (2x^2Y_1' + xY_1)v' + (Y_1''x^2 + xY_1' + (x^2 - 1)Y_1)v = 0 \tag{3.37}$$

Pero puesto que Y_1 satisface la ecuación dada $x^2Y_1'' + xY_1' + (x^2 - 1)Y_1 = 0$, de modo que el último término de la ecuación (3.37) es cero y tenemos

$$x^2Y_1v'' + (2x^2Y_1' + xY_1)v' = 0$$

una ecuación de primer orden en v'. Haciendo el cambio $v' = u$, llegamos a;

$$x^2Y_1u' + (2x^2Y_1' + xY_1)u = 0$$

y que al dividir por $x^2 Y_1 u$ queda

$$\frac{u'}{u} + \frac{2Y_1'}{Y_1} + \frac{1}{x} = 0$$

Integrando y denotando la constante de integración por LnA, tenemos

$$lnu + 2lnY_1 + lnx = lnA, \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad jn(uY_1^2 x) = lnA$$

esto es

$$uY_1^2 x = A, \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad v' = \frac{A}{Y_1^2 x}$$

de donde

$$v = A \int \frac{dx}{Y_1^2 x} + B$$

donde B es otra constante de integración. De $y = vY_1$ obtenemos ahora

$$y = AY_1 \int \frac{dx}{Y_1^2 x} + BY_1 \tag{3.38}$$

la cual es la solución general. El resultado (3.38) muestra que además de Y_1 tenemos otra solución linealmente independiente

$$Y_2 = Y_1 \int \frac{dx}{xY_1^2} \tag{3.39}$$

Vamos a ver en que se convierte (3.39) si usamos la solución conocida Y_1, la cual tomamos como la serie en (3.36) aparte de la constante arbitraria a_0, esto es,

$$Y_1 = x - \frac{x^3}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} ... \tag{3.40}$$

Tenemos de (3.40)

$$\frac{1}{Y_1} = \frac{1}{x(1 - x^2/8 + x^4/192...)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \alpha_1 x^4 + ...\right) \tag{3.41}$$

donde hemos usado la división sucesiva en el segundo factor y hemos denotado el coeficiente de x^4 por α_1, el cual no necesitamos determinar explícitamente. Si ahora elevamos al cuadrado (3.41) y multiplicamos por $1/x$ tenemos

$$\frac{1}{Y_1^2} = \frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{x^2}{4} + \alpha_2 x^4 + ...\right) \tag{3.42}$$

donde el nuevo coeficiente de x^4 se denota por α^2. La integración de (3.42) conduce a

$$\int \frac{dx}{xY_1^2} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4}lnx + \frac{\alpha_2 x''}{2} + ... \tag{3.43}$$

Multiplicando (3.43) por Y_1 muestra que

$$Y_2 = \frac{1}{4}lnx + F \tag{3.44}$$

donde F es una serie tipo Frobenius. Sin embargo, debido al término que contiene lnx vemos que Y_2 no se puede representar por una serie de Frobenius y se ve por qué no se obtuvo la solución general en el ejemplo (36).

Vemos con los ejemplo anteriores que las soluciones tipo Frobenius que obtenemos dependen de las raíces indiciales y que pueden surgir varios casos;

1. Si las raíces indiciales difieren en una constante que no es un entero siempre se obtiene la solución general.

2. Si las raíces indiciales difieren en un entero no igual a cero, hay dos posibilidades:

    a) No se obtiene solución al usar la raíz indicial más pequeña. Sin embargo, en todos los casos se puede determinar una solución al usar la raíz más grande.

    b) La solución se obtiene al usar la raíz indicial más pequeña.

3. Si las raíces indiciales difieren en cero, esto es, son iguales, se obtiene solamente una solución.

En los casos (2a) y (3) se obtiene solamente una solución y debemos encontrar otra solución independiente para determinar la solución general. Para hacer esto usamos el siguiente teorema;

Teorema 3.3.2 *Supongamos que se cumples las condiciones del teorema* (3.3.1) *de modo que una solución del tipo Frobenius de la forma*

$$(x-a)^{c_1} \sum a_j (x-a)^j$$

existe correspondiente a la raíz indicial c_1. Entonces si la segunda solución no es una solución tipo Frobenius, ésta debe tener la forma

$$(4-a)^{c_2} (\sum b_j (x-a)^j + kln|x-a| \sum a_j (x-a)^j)$$

donde k y c_2 son constantes y donde la serie de potencias $\sum a_j (x-a)^j$ y $\sum b_j (x-a)^j$ convergen para $|x-a| < R$, donde R es la distancia de a al punto singular más próximo.

3.4. Soluciones con series de algunas ecuaciones diferenciales importantes

En el proceso de formular diferentes problemas aplicados han sido encontradas varias ecuaciones diferenciales que conducen a funciones especiales que llevan el nombre de sus descubridores. Una de tales ecuaciones se llama la ecuación diferencial de Bessel, en honor del astrónomo alemán Wilhelm Friedrich Bessel, quien la descubrió al formular un problema de movimiento planetario. Otra se llama la ecuación diferencial de Legendre, en referencia al matemático y astrónomo francés Adrien Marie Legendre.

3.4.1. Ecuación de Bessel

La ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{3.45}$$

donde n puede tener cualquier valor pero generalmente toma valor entero, se conoce como la ecuación de Bessel de orden n. Vemos que la ecuación tiene un punto singular regular en $x = 0$, con lo cual existe una solución de tipo Frobenius de la forma,

$$y = \sum a_j x^{j+c}, \quad a_j = 0 \quad \text{para} \quad j < 0 \tag{3.46}$$

Si sustituimos (3.46) en la ecuación dada, tenemos,

$$x^2\sum(j+c)(j+c-1)a_jx^{j+c-2}+x\sum(j+c)a_jx^{j+c-1}+x^2\sum a_jx^{j+c}-n^2\sum a_jx^{j+c} = 0$$

Lo podemos escribir;

$$\sum((j + c)(j + c - 1)a_j + (j + c)a_j + a_{j-2} - n^2a_j)x^{j+c} = 0$$

Con lo que tenemos;

$$((j + c)^2 + n^2)a_j + a_{j-2} = 0 \tag{3.47}$$

Tomando $j = 0$ en (3.47) y suponiendo que $a_{j-2} = 0$ mientras que $a_0 \neq 0$, esto se reduce a

$$(c^2 + n^2)a_0 = 0 \longrightarrow c^2 - n^2 = 0$$

lo cual produce las raíces indiciales requeridas $c = \pm n$. Consideramos dos casos, $c = n$, $n \geq 0$ y $c = -n$, $n > 0$.

1. **Caso I $c = n$, $n \geq 0$.** En este caos (3.47) llega a ser

$$j(2n+j)a_j + a_{j-2} = 0 \quad \text{esto es,} \quad a_j = \frac{-a_{j-2}}{j(2n+j)} \tag{3.48}$$

Si suponemos $j = 1$, (3.48) muestra que $a_1 = 0$ puesto que $a_{-1} = 0$. Además, (3.48) también muestra que $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, $a_7 = 0$, lo que significa que todas las a con subíndice impar son cero.
Tomando $j = 2, 4, 6, ...$ se produce

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+2)}, \quad a_4 = \frac{-a_2}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{2(2n+2)} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

donde la regla de formación es aparente. La solución con series requerida está así dada por;

$$y = \sum a_j x^{j+n} = a_0 x^n \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + ... \right)$$

que también podemos escribir

$$y = a_0 x^n \left(1 - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+1)(n+2)(n+3)} + ...\right)$$

Al mirar los términos de la serie vemos que los denominadores contienen factoriales. También están presentes en estos denominadores $(n+1)$, $(n+l)(n+2)$, $(n+l)(n+2)(n+3)$,...,los cuales llegarían a ser factoriales si multiplicarnos cada término por $n!$. Otra cosa que vemos es que todos los términos de la serie contienen $x/2$, mientras que el factor multiplicativo en frente involucra solamente a x. Una solución particular proporcionando estos factoriales e introduciendo $x/2$ en vez de x en el factor se obtiene al escoger

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}$$

en cuyo caso, (1) se convierte en

$$(x/2)^n \left(\frac{1}{n!} - \frac{(x/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(x/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(x/2)^6}{3!(n+3)!} + ...\right) \tag{3.49}$$

Esta es una solución para $n = 0, 1, 2, ...$, donde definimos $O! = 1$ de modo que (3.49) concuerde con (1) para $n = 0$. Para permitir la posibilidad de que n sea cualquier número positivo, podemos usar la generalización del factorial llamada la función gamma. Esta función está definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du, \quad n > 0 \tag{3.50}$$

Tenemos la fórmula de recurrencia

$$1 - (n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(1) = 1 \tag{3.51}$$

Así si n es un entero positivo, entonces en general

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.52}$$

Tenemos el valor especial

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{3.53}$$

de modo que al usar (3.51)

$$\Gamma(3/2) = 1/2\Gamma(1/2) = 1/2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(5/2) = 3/2\Gamma(3/2) = 3/2 \cdot 1/2\sqrt{\pi}, ...$$

Para determinar la función gamma para cualquier número positivo, es suficiente debido a (3.51) saber sus valores para los números entre 0 y 1. Estos están disponibles en tablas. Con este uso de la función gamma para generalizar factoriales podemos escribir (3.49) como

$$(x/2)^n \left(\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{(x/2)^2}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^4}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(x/2)^6}{3!\Gamma(n+4)} + ... \right) \tag{3.54}$$

la cual es una solución de la ecuación de Bessel para todo $n \geq 0$. Denotamos a (3.54) por $J_{,,}(x)$.

$$J_n(x) = \frac{(x/2)^n}{\Gamma(n+1)} - \frac{(x/2)^{n+2}}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(x/2)^{n+4}}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(x/2)^{n+6}}{3!\Gamma(n+4)} + ... \tag{3.55}$$

2. **Caso II** $c = -n$**,** $n > 0$**.** Para tratar este caso reemplazamos en (3.55) n por $-n$, lo que nos lleva a

$$J_{n-1}(x) = \frac{(x/2)^{-n}}{\Gamma(-n+1)} - \frac{(x/2)^{-n+2}}{1!\Gamma(-n+2)} + \frac{(x/2)^{-n+4}}{2!\Gamma(-n+3)} - \frac{(x/2)^{-n+6}}{3!\Gamma(-n+4)} + ... \tag{3.56}$$

Vamos a ver como se interpretaría la función Gamma para un número negativo. Por ejemplo, si $n = 5/2$, los dos primeros denominadores en (3.56) son $\Gamma(-3/2)$ y $\Gamma(-1/2)$. La definición (3.50) no se puede usar puesto que sólo es aplicable para $n > 0$ donde la integral converja. Podemos, sin embargo extender el rango de definición para $n < 0$ usando (3.51), esto es

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{3.57}$$

para todo n. Así, por ejemplo, colocando $n = -1/2$ y $n = 3/2$ en (3.57), encontramos

$$\Gamma(-1/2) = -\frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-3/2) = -\frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

Si colocamos $n = 0$ en (3.57), tenemos $1 = 0\Gamma(0)$, lo cual nos conduce a definir $1/\Gamma(0) = 0$ o $\Gamma(0)$ como infinito. En forma similar, si colocamos $n = -1$ en (3.57), tenemos $\Gamma(0) = -1\Gamma(-1)$ o $1/\Gamma(-1) = 0$. El proceso puede continuarse y encontramos

$$\frac{1}{\Gamma(0) = 0}, \quad \frac{1}{\Gamma(-1) = 0}, \quad \frac{1}{\Gamma(-2) = 0}, \quad \frac{1}{\Gamma(-3) = 0}, \tag{3.58}$$

Usando estas interpretaciones, (3.56) llega a tener sentido para todo $n > 0$ y representa una solución de (3.45).
Ahora si n es positivo pero no es un entero, la solución (3.56) no está acotada en $x = 0$ mientras que (3.54) está acotada (y de hecho es cero) en $x = 0$. Esto implica que las dos soluciones son linealmente independientes de modo que la solución general de (3.45) es

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \quad n \neq 0, 1, 2, ... \tag{3.59}$$

donde también hemos incluido $n \neq 0$ en (3.59), puesto que para $n = 0$, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ se reducen a $J_0(x)$, y (3.59) claramente no da la solución general. Si n es un entero $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes. De hecho tenemos

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{3.60}$$

Por ejemplo si $n = 3$, (3.56) se convierte al usar (3.58) en

$$J_{-3}(x) = -\frac{(x/2)^3}{3!} + \frac{(x/2)^5}{4!1!} - \frac{(x/2)^7}{5!2!} + ... \tag{3.61}$$

También de (3.55) tenemos si $n = 3$

$$J_3(x) = \frac{(x/2)^3}{3!} - \frac{(x/2)^5}{4!1!} + \frac{(x/2)^7}{5!2!} \tag{3.62}$$

Comparando (3.61) y (3.62), vemos que $J_{-3}(x) = J_3(x)$ concordando con (3.60) para $n = 3$. En forma similar (3.60) se puede establecer para todos los enteros n.

Vamos a buscar una solución que sea linealmente independiente de $J_n(x)$ en el caso de que n sea un entero. Encontramos para la solución general

$$y = AJ_n(x) + BJ_n(x) \int \frac{dx}{x(J_n(x))^2} \tag{3.63}$$

Esta es la solución general independiente de si n es entero o no y así incluye a (3.59). Una desventaja de la segunda solución en (3.63) es que no la tenemos en forma explícita de modo que no la podemos graficar. Para obtener una segunda solución en forma explícita, suponemos que n no es un entero, tenemos que $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ so soluciones de (3.45) y que una solución está dada por

$$Y_n(x) = \frac{cosn\pi J_n(x) J_{-n}(x)}{senn\pi} \tag{3.64}$$

y que esta solución es linealmente independiente de $J_n(x)$. Si por otro lado n es un entero, (3.64) asume una forma indeterminada 0/0 debido a (3.60), puesto que $cosn\pi = (-1)_n$. Así nos lleva a considerar como una posible solución para n igual a un entero;

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \frac{cosp\pi J_p(x) - J_p(-x)}{senp\pi} \tag{3.65}$$

LLamamos a esta solución, la cual es linealmente independiente de $J_n(x)$ sea o no sea n un entero, la función de Bessel de segunda clase de orden n, reservando el nombre de función de Bessel de primera clase de orden n para $J_n(x)$. Usando esto podemos así escribir la solución general de (3.45) para todo n como

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \tag{3.66}$$

Vamos a intentar verle un uso práctico a esta función de Bessel. Vamos a empezar con el caso mas simple donde $n = 0$. La función de Bessel de primera clase en este caso está dada por

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + ... \tag{3.67}$$

Ahora podemos hacer con (3.67) tanto como con e^x. Por ejemplo, después de algunos cálculos podemos tabular los siguientes resultados,

$$J_0(0) = 1, \quad J_0(1) = 0{,}77, \quad J_0(2) = -0{,}22 \quad J_0(3) = -0{,}26 \quad J_0(4) = -0{,}40$$

Podemos dibujar $J_0(x)$ para $x \geq 0$ y obtener la gráfica de la figura (3.1).

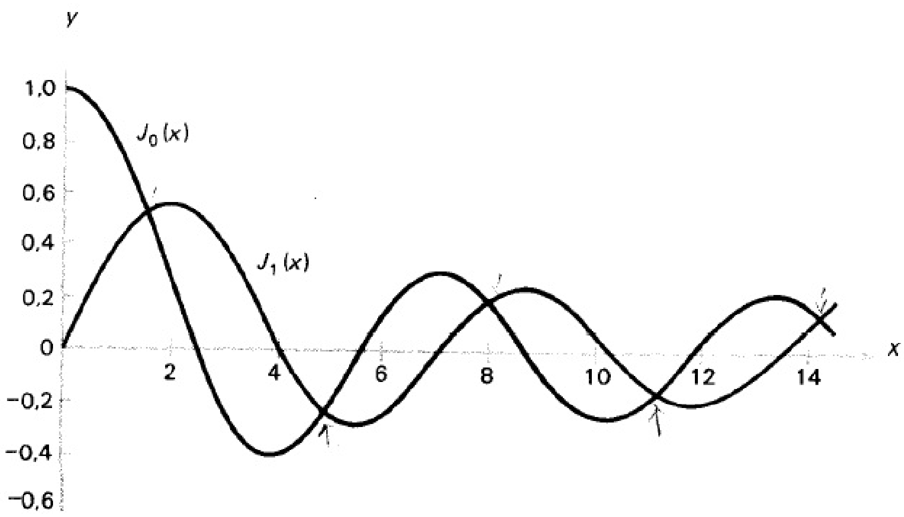

Figura 3.1:

Se ve que el gráfico es de carácter oscilatorio, asemejándose a los gráficos de las vibraciones con amortiguamiento. También revela que hay raíces de la ecuación $J_0(x) = 0$, llamadas ceros de $J_0(x)$, obtenidos como los puntos de intersección del gráfico con el eje x. La investigación revela que hay infinitas raíces las cuales todas son reales y positivas.
De manera similar, para $J_1(x)$ tenemos

$$J_1(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 4} - \frac{x^5}{2^2 4^2 6} + ... \tag{3.68}$$

cuyo gráfico es similar al de la figura (3.1). Para otros valores de n los gráficos de $J_n(x)$ son similares. Es posible mostrar que las raíces de $J_n(x) = 0$ son todas reales, y que entre cualesquiera dos raíces positivas sucesivas de $J_n(x) = 0$ hay una y solamente una raíz de $J_{n+1}(x) = 0$. Esto lo podemos ver en el cuadro (3.1) en la cual hemos listado para propósitos de referencia los primeros ceros positivos de $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ y $J_3(x)$.
Vemos que si tomamos las diferencias entre ceros sucesivos de $J_0(n)$ tienden al valor de π. Con las diferencias de ceros sucesivos de $J_1(n)$, $J_2(n)$ también pasa. Esto se debe a que los ceros sucesivos de $senx$ o $cosx$ difieren en π, con lo que la descripción aproximada de la función de Bessel $J_n(x)$ como una "onda seno amortiguada" queda clara.

Ceros de	1	2	3	4	5
$J_0(x)$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309
$J_1(x)$	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
$J_2(x)$	5,1356	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598
$J_3(x)$	6,3802	9,7610	13,0152	16,2235	19,4094

Cuadro 3.1: Ceros positivos de algunas funciones de Bessel

3.4.2. Ecuación de Legendre

La ecuación

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{3.69}$$

es conocida como la ecuación de Legendre de orden n. Se ve que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación, de modo que podemos obtener soluciones de la forma

$$y = \sum a_j x^j \tag{3.70}$$

Podríamos también usar una solución de tipo Frobenius pero resultaría con $c = 0$, lo cual es equivalente a (3.70). Puesto que $x \pm 1$ son puntos singulares de (3.69), la serie (3.70) que se obtiene debería al menos converger en el intervalo $-l < x < l$.
Sustituyendo (3.70) en (3.69) tenemos;

$$\sum j(j-1)a_j x^{j-2} - \sum j(j-1)a_j x^j - \sum 2ja_j x^j + \sum n(n+1)a_j x^j = 0$$

que queda de la siguiente forma,

$$(j+2)(j+1)a_{j+2} + (n(n+1) - j(j+1))a_j = 0 \tag{3.71}$$

Tomando $j = -2$ en la ecuación (3.71) se ve que a_0 es arbitraria. Tomando $j = -1$ en la misma ecuación sucede lo mismo con a_1. Así podemos esperar en obtener dos constantes arbitrarias y por tanto la solución general. Dándole valores $j = 0, 1, 2, ...$ a la ecuación (3.71), la ecuación (3.70) se convierte en;

$$\begin{aligned} y =& a_0 \left(-\frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n(n+1) - 2\cdot 3)}{4!} - ... \right) \\ &+ a_1 \left(x - \frac{(n(n+1) - 1\cdot 2)}{3!}x^3 + \frac{(n(n+1) - 1\cdot 2(n(n+1) - 3\cdot 4}{5!}x^5 - ... \right) \end{aligned} \tag{3.72}$$

Si n no es un entero, estas dos series convergen para $-1 < x < 1$, pero se puede mostrar que ellas divergen para $x = \pm 1$. Si n es un entero positivo o

cero, una de estas series se termina, esto es, es un polinomio, mientras que la otra serie converge para $-1 < x < 1$ pero diverge para $x = \pm 1$.
Vamos a buscar solamente las soluciones polinómicas. Para $n = 0, 1, 2, 3, ...$ obtenemos

$$1, \quad x, \quad 1 - 3x^2, ...$$

los cuales son polinomios de grado $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Es conveniente multiplicar cada uno de estos por una constante elegida para que el polinomio resultante tenga el valor de 1 cuando $x = 1$. Los polinomios resultantes son llamados polinomios de Legendre y se denotan por $P_n(x)$. Algunos de los primeros están dados por

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1)...$$

Para cualquier polinomio de Legendre tenemos

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)''$$

Debería notarse que los polinomios de Legendre son las únicas soluciones de la ecuación de Legendre las cuales están acotadas en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, puesto que las series que producen todas las otras soluciones divergen para $x = \pm 1$.
Puesto que sabemos que $P_n(x)$ es una solución de la ecuación de Legendre, encontramos;

$$y = AP_n(x) + BP_n(x) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)(P_n(x))^2} \tag{3.73}$$

Esta segunda solución está relacionada con la serie en (3.73). Si denotamos la segunda solución por $Q_n(x)$, la solución general se puede escribir

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x) \tag{3.74}$$

Estas funciones son a menudo conocidas colectivamente como funciones de Legendre. Algunos resultados importantes que involucran a los polinomios de Legendre son los siguientes:

- $$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \tag{3.75}$$

  Esto es una fórmula de recurrencia para los polinomios de Legendre.

- $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1) \tag{3.76}$$

  Esta es conocida como la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre.

-
$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{x} P_n(x)t^n \tag{3.77}$$

Esta se llama la función generatriz para los polinomios de Legendre.

3.4.3. Ecuación de Hermite

Esta ecuación de la forma

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

tiene soluciones llamadas polinomios de Hermite para el caso $n = 0, 1, 2, 3....$ Estos polinomios denotados por $H_n(x)$ tienen muchas propiedades importantes análogas a las funciones de Bessel y a los polinomios de Legendre. Esta analogía se establece por los siguientes resultados;

-
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad \text{(Fórmula de recurrencia)}$$

-
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad \text{(Fórmula de Rodrigues)}$$

-
$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} \quad \text{(Función generatriz)}$$

3.4.4. Ecuación de Laguerre

Es una ecuación del tipo

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

y tiene soluciones llamadas polinomios de Laguerre denotados por $L_n(x)$. Tienen las siguientes propiedades;

-
$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad \text{Fórmula de recurrencia}$$

-
$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e - x) \quad \text{Fórmula de Rodrigues}$$

-
$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}) \quad \text{Fórmula generatriz}$$

3.4.5. Ecuación de Gauss

Es una ecuación del tipo;

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

en la que α, β y γ son constantes dadas. Esta ecuación se llama también ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones se llaman funciones hipergeométricas, a menudo denotadas por $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Capítulo 4

Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

La mayor parte de los métodos numéricos existentes han sido diseñados para la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, en la práctica, muchos problemas dan lugar a ecuaciones de segundo orden. Los sistemas dinámicos están basados en fuerzas que provocan aceleraciones, que no son más que la derivada segunda de la posición. Una posibilidad, para la integración de ecuaciones de segundo orden, es la reducción de éstas a un sistema de ecuaciones de primer orden. Pero, debido a la gran cantidad de problemas que se modelan mediante ecuaciones de segundo orden, parece conveniente el desarrollo de métodos específicos para estas ecuaciones.

4.1. Métodos de Falkner

4.1.1. Solución exacta del problema en forma integral

Consideremos el problema de valor inicial de segundo orden dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

para el que suponemos que se dan las condiciones suficientes para garantizar la existencia de una solución única $y(t)$ sobre un cierto intervalo $I \in \mathbb{R}$ de interés.
Nótese que la característica f la podemos considerar como una función en la única variable independiente t, dado que la función y y su primera derivada y' son funciones de t, y en tal caso podemos replantear el problema anterior en la forma:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

donde, sin lugar a confusión, entenderemos que la función $f(t)$ puede adoptar distintas formas, según que aparezcan como argumentos sólo la variable independiente, o también las variables $y(t)$ o $y'(t)$. Es decir, $f(t)$ hace referencia a la forma más general $f(t, y(t), y'(t))$, donde alguno de los argumentos puede ser nulo.
Para obtener la solución exacta trataremos de seguir los pasos para la resolución de una ecuación lineal de segundo orden mediante el método de variación de parámetros.
Para ello se requiere del conocimiento de la solución general de la ecuación $y''(t) = 0$ (ecuación homogénea) y una solución particular de la ecuación completa, a la vez que la determinación de las constantes involucradas en la expresión de la solución de la ecuación homogénea de forma que se satisfagan las condiciones iniciales dadas.
Dado que $y''(t) = 0$ lleva asociada como ecuación característica $\lambda^2 = 0$, de raíces $\lambda = 0$ con multiplicidad dos, una solución para esta ecuación homogénea la constituyen las funciones (e^{0t}, te^{0t}), esto es $(1, t)$, y así la solución correspondiente a la ecuación homogénea será:

$$y_h(t) = A + B\,t \text{ con } A, B \in \mathbb{R}$$

Consideremos una solución particular de la ecuación completa, de la forma

$$y_p(t) = A(t) + B(t)t$$

Derivando esta solución particular con respecto a la variable independiente t se tiene que

$$y'_p(t) = [A'(t) + B'(t)t] + B(t) = B(t)$$

ya que $[A'(t) + B'(t)t]$ se anula por ser una solución de y_p; y a la vez

$$y''_p(t) = B'(t)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación dada resulta el sistema:

$$y_p''(t) = f(t, y(t), y'(t)) = B'(t)$$
$$-B'(t)t = -f(t, y(t), y'(t))t = A'(t)$$

porque $[A'(t) + B'(t)t]$ se anula.
Es decir, se tendrán como coeficientes que permitan expresar la solución particular del problema completo

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} -tf(t)dt$$
$$B(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt$$

La solución general buscada puede escribirse entonces en la forma

$$y(t) = A + Bt + \int_{t_0}^{t} -sf(s)ds + t\int_{t_0}^{t} f(s)ds \tag{4.3}$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales señaladas: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0'$ resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(t_0) = A + Bt_0 \\ \dot{y_0} = y'(t_0) = B + (-f(t_0)t_0) + t_0 f(t_0) = B \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que la solución es:

$$A = y_0 - \dot{y_0}t_0$$
$$B = \dot{y_0}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la solución exacta del problema, (4.3), resulta que ésta se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 - \dot{y_0}t_0 + \dot{y_0}t + \textstyle\int_{t_0}^{t} -f(s)sds + t\int_{t_0}^{t} f(s)ds \\ &= y_0 + (t - t_0)\dot{y_0} + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(s)(t-s)ds \end{aligned}$$

siendo $f(s) = f(s, y(s), y'(s))$, esto es

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)\, y'(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), y'(s))(t-s)ds \tag{4.5}$$

Si en la fórmula de la solución exacta (4.5) en lugar de considerar el intervalo $[t_0, t]$, consideramos el intervalo genérico $[t_n, t_{n+1}]$ de la red de puntos discreta, dentro de un cierto intervalo $I \in \mathbb{R}$ donde está definida la solución de la ecuación $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$, y siendo $h = t_{n+1} - t_n$ el tamaño del paso, resulta la fórmula:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)(t_{n+1} - t)dt \tag{4.6}$$

la cual nos da el valor de la solución exacta del problema (4.2) evaluada en el punto t_{n+1}.

4.1.2. Formulación del método de Falkner explícito

La fórmula en (4.5) resulta ser la ecuación integral equivalente al problema de valor inicial en (4.1). Dicha ecuación integral en general es implícita, y la dificultad para su aplicación resulta en la evaluación de la integral. Si la función f es lo suficientemente sencilla como para que la integral se pueda evaluar, entonces tendremos la solución exacta del problema (4.1). Pero en general, esto no será posible, así que lo que haremos será buscar la manera que nos permita obtener un método para resolver de forma discreta el problema. Ello se consigue aproximando la integral que aparece en (4.6). Distintas formas de aproximar la función darán lugar a los correspondientes métodos numéricos. La manera más usual de aproximar la función es mediante el polinomio de interpolación, y esa es la forma en que se obtienen los métodos de Falkner (de manera parecida a como se hace para obtener los métodos de Adams en el caso de ecuaciones de primer orden).
Consideramos $k+1$ puntos igualmente espaciados, $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n, t_{n+1}$ siendo el tamaño del paso h. El polinomio de interpolación de Newton en los primeros k nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n$ se puede escribir en la forma

$$p(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \,,$$

donde, como es usual, los términos $\binom{-s}{j}$ son los coeficientes binomiales, y $\nabla^j f_n$ son las diferencias regresivas de orden n siendo $f_n = f(t_n)$. Si en la fórmula (4.6) aproximamos $f(t)$ por el polinomio de interpolación anterior, y llamamos y_k a la aproximación de $y(t_k)$ para $k = n, n+1$, resulta la fórmula:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, y_n' + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)(t_{n+1} - t)dt \\ &= y_n + h\, y_n' + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \right) (t_{n+1} - t)dt \end{aligned}$$

Para calcular la integral anterior efectuamos el cambio de variable $s = \frac{t-t_n}{h}$, con lo que resulta $t = sh + t_n$, $dt = hds$, obteniendo como nuevos límites de integración

$$\begin{cases} t = t_n \Rightarrow s = 0 \\ t = t_{n+1} \Rightarrow s = 1 \end{cases}$$

siendo $t_{n+1} - t = t_n + h - (sh + t_n) = h(1 - s)$, con lo que la fórmula anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s) h \nabla^j f_n\, h\, ds \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left[\int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s)\, ds \right] \nabla^j f_n\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Denotando a los coeficientes por

$$\beta_j = \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s) ds, \tag{4.8}$$

se tendrá como ecuación de recurrencia para el método de Falkner explícito la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \tag{4.9}$$

La fórmula en (4.9) será la que usemos en la implementación de los métodos, según veremos más adelante. Pero también es usual la presentación de fórmulas concretas expresadas en términos de las f_{n-j}. Para obtenerlas utilizaremos la fórmula

$$\nabla^j f_n = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n-l}\,.$$

Partiendo de la fórmula en (4.9) y sustituyendo la anterior y reordenando se obtiene:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \\
&= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n-l} \\
&= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \left[(-1)^l \sum_{j=l}^{k-1} \binom{j}{l} \beta_j \right] f_{n-l} \\
&= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \bar{\beta}_l f_{n-l} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

siendo los coeficientes $\bar{\beta}_l$ los dados por

$$
\bar{\beta}_l = (-1)^l \sum_{j=l}^{k-1} \binom{j}{l} \beta_j \, . \qquad (4.11)
$$

Cálculo de los coeficientes.

Para la determinación de los coeficientes de la fórmula anterior utilizaremos la técnica de las funciones generatrices de Euler. Pondremos

$$
F_\beta(t) \;\; = \;\; \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \, t^j
$$

y sustituiremos los coeficientes β_j por el valor dado en (4.8). Podemos escribir por tanto

$$
\begin{aligned}
F_\beta(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s) ds \right) t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} (1-s) ds \\
&= \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-s}{j} (1-s) ds \\
&= \int_0^1 (1-t)^{-s} (1-s) ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{(1-t)^s} ds
\end{aligned}
$$

Esta última integral se puede resolver utilizando la técnica de integración por partes, donde ponemos

$$u = 1 - s\,, \qquad v = \frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}\,,$$

siendo por tanto

$$du = -ds\,, \qquad dv = \frac{ds}{(1-t)^s}$$

y resultando que

$$\begin{aligned}
F_\beta(t) &= (1-s)\frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}\Bigg]_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \frac{1}{\ln(1-t)}\frac{1}{(1-t)^s}\,ds \\
&= \frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{(1-t)^{-s}}{(\ln(1-t))^2}\Bigg]_{s=0}^{s=1} \\
&= \frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{1}{(1-t)(\ln(1-t))^2} - \frac{1}{(\ln(1-t))^2} \\
&= \frac{(1-t)\ln(1-t) + 1 - (1-t)}{(1-t)(\ln(1-t))^2} \\
&= \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{(1-t)\,\ln^2(1-t)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

De esta manera, para calcular los coeficientes bastará hacer el desarrollo en potencias de t de la función $F_\beta(t)$ y los coeficientes que se obtengan son los β_j que aparecen en la ecuación de recurrencia del método. Por otro lado, si lo que se quiere es la forma explícita de las fórmulas dadas en (4.10), basta tener en cuenta la expresión de los coeficientes dados en (4.11) en función de los β_j.

4.1.3. Error de truncamiento local para el método Falkner explícito

Cualquier algoritmo numérico proporciona una manera aproximada de calcular el valor de la solución buscada. La medida del error que se comete en cada paso se denomina usualmente error de truncamiento local, y depende del propio algoritmo, del tamaño del paso, y en el contexto en que nos situamos, por supuesto de la ecuación diferencial que se ha de resolver. En la determinación del error de truncamiento local se presupone la llamada hipótesis de localización, que consiste en suponer que los valores numéricos previamente calculados son exactos. Al igual que para otros esquemas numéricos consideramos una serie de definiciones en relación con los métodos numéricos que se abordan en esta memoria.

Definición 4.1.1 *El* **operador en diferencias** $\mathcal{L}_\beta$ *asociado con la fórmula que aparece en* (4.9) *se define como*

$$\mathcal{L}_\beta\,(z(t),h) \;=\; z(t+h)-z(t)-h\,z'(t)-h^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\nabla^j f(t,z(t),z'(t)),$$

siendo $z(t)\in[t_0,b]\in\mathbb{R}$ *una función cualquiera suficientemente diferenciable.*

Definición 4.1.2 *El método numérico para resolver el problema* (4.1)*, dado por la fórmula* (4.9) *se dice* **consistente de orden** p *si* [1]

$$\mathcal{L}_\beta\,(z(t),h)=\mathcal{O}(h^{p+2})$$

En particular, si p *es al menos uno, el método simplemente se dice que es* **consistente**.

Definición 4.1.3 *Dada la fórmula de Falkner explícita en* (4.9) *se define el* **error de truncamiento local** *como el defecto de la solución* $y(t)$ *respecto de la ecuación en diferencias, esto es,*

$$\mathcal{L}_\beta\,(y(t),h)=y(t+h)-y(t)-h\,y'(t)-h^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\nabla^j f(t,y(t),y'(t))$$

Para obtener la expresión del error de truncamiento local del método de Falkner explícito partiremos de la fórmula en (4.6). Pasando todos los términos a un lado se tiene

$$0 \;=\; y(t_n+h)-y(t_n)-h\,y'(t_n)-\int_{t_n}^{t_n+h} f(t)(t_n+h-t)\,dt\,.$$

Efectuando el cambio de variable $t=t_n+s\,h$, $dt=h\,ds$ en la integral resulta,

$$\begin{cases} t=t_n \Rightarrow s=0\\ t=t_n+h \Rightarrow s=1\end{cases}$$

con lo que podemos escribir la fórmula anterior como

$$0=y(t_n+h)-y(t_n)-h\,y'(t_n)-\int_0^1 f(t_n+s\,h)(h-sh)h\,ds\,.$$

[1] Se dice que $g(h)=\mathcal{O}(h^p)$ si existe $C>0$ tal que $|g(h)|<C\,h^p$ cuando $h\to 0$.

Si ahora consideramos la igualdad que expresa a $f(t)$ como la suma del polinomio de interpolación en los nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n$ más el error de interpolación correspondiente,

$$f(t) = f(t_n + s\,h) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n + (-1)^k \binom{-s}{k} h^k\, y^{k+2)}(\xi_s)$$

y sustituimos esta expresión en la integral, resulta:

$$\begin{aligned}
0 &= y(t_n + h) - y(t_n) - h\, y'(t_n) \\
&\quad - \int_0^1 \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n + (-1)^k \binom{-s}{k} h^k\, y^{k+2)}(\xi_s) \right] (1-s)\, h^2\, ds \\
&= y(t_n + h) - y(t_n) - h\, y'(t_n) \\
&\quad - h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s)\, ds \nabla^j f_n \\
&\quad - h^{k+2} \int_0^1 (-1)^k \binom{-s}{k} (1-s)\, y^{k+2)}(\xi_s)\, ds \\
&= y(t_n + h) - y(t_n) - h\, y'(t_n) \\
&\quad - h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n - h^{k+2} \int_0^1 (-1)^k \binom{-s}{k} (1-s)\, y^{k+2)}(\xi_s)\, ds \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta en la última igualdad la expresión de los coeficientes β_j dada en (4.8). En la integral última que aparece en la fórmula anterior, como $(-1)^k \binom{-s}{j} (1-s)$ no cambia de signo en el intervalo $[0, 1]$, por el Teorema generalizado del valor medio podemos poner

$$\int_0^1 (-1)^k \binom{-s}{k} (1-s)\, y^{k+2)}(\xi_s)\, ds = y^{k+2)}(\bar{\xi}) \int_0^1 (-1)^k \binom{-s}{k} (1-s)\; ds$$

lo que se traduce en

$$\int_0^1 (-1)^k \binom{-s}{k} (1-s)\, y^{k+2)}(\xi_s)\, ds = y^{k+2)}(\bar{\xi}) \beta_k\,.$$

Si sustituimos en la fórmula (4.13) el valor obtenido para esta última integral y tenemos en cuenta la definición del error de truncamiento local en (4.1.3) resulta finalmente

$$
\begin{aligned}
0 &= y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) - h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \\
&\quad - h^{k+2} y^{k+2)}(\bar{\xi})\beta_k \\
&= \mathcal{L}_\beta\left(y(t_n), h\right) - h^{k+2} y^{k+2)}(\bar{\xi})\beta_k
\end{aligned}
$$

es decir, el error de truncamiento local en el punto t_n resulta ser

$$
\mathcal{L}_\beta\left(y(t_n), h\right) \;=\; \beta_k\, h^{k+2} y^{k+2)}(\bar{\xi})\,,
$$

lo cual indica que el método de Falkner explícito de k pasos es un método de orden k y tiene como constante del error β_k.

4.1.4. Fórmula para seguir la derivada

La fórmula explícita de Falkner obtenida en (4.9) resulta insuficiente. Como observamos, en dicha fórmula aparece y'_n, la aproximación de la derivada en el punto t_n. En el primer paso este valor es conocido puesto que es parte de los datos iniciales, el y'_0, pero cuando volvamos a querer aplicar el método necesitaremos el valor de la derivada en el punto siguiente de la red, esto es, el valor y'_1, y así sucesivamente. Para poder obtener estas aproximaciones de la derivada en los diferentes puntos de la red se necesita otra fórmula. Considerando la ecuación diferencial del problema (4.1) escrita en la forma $(y')' = f(t)$, la podemos interpretar como una ecuación diferencial de primer orden de la función y' y aplicar el método de Adams-Bashforth de k pasos para obtener la aproximación y'_{n+1}, suponiendo conocido el valor anterior y'_n. El esquema numérico resultante queda

$$
y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n\,,
$$

donde los coeficientes del método vienen dados por

$$
\gamma_j = \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j}\, ds\,.
$$

La función generatriz de los coeficientes está dada en este caso por

$$
F_\gamma = \frac{-t}{(1-t)\ln(1-t)}
$$

y el error de truncamiento local se expresa en la forma

$$\mathcal{L}_\gamma\,(y(t_n),h) \;\;=\;\; \gamma_k\,h^{k+1}y^{k+2)}(\bar{\xi})\,,$$

correspondiendo a un método de orden k, y donde la constante del error está dada por el coeficiente γ_k.
Teniendo en cuenta la fórmula en (4.9) junto con la anterior para la derivada, podemos concluir que el método de Falkner explícito para resolver el problema en (4.1) está dado por la pareja de fórmulas

$$\left\{\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + h^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\nabla^j f_n \\ y'_{n+1} &= y'_n + h\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j\nabla^j f_n\,. \end{aligned}\right. \tag{4.14}$$

4.1.5. Formulación del método Falkner implícito

La obtención de la fórmula de Falkner implícita, los coeficientes correspondientes, y la expresión del error de truncamiento local siguen un proceso similar al del caso explícito. La única diferencia está en que la aproximación de la función $f(t)$ se realiza mediante el polinomio de interpolación en los nodos $t_{n-(k-1)},\ldots,t_n,t_{n+1}$. Precisamente la consideración del nodo añadido t_{n+1} es lo que le confiere el carácter implícito a la fórmula que se obtiene. Ahora el polinomio de interpolación se escribe

$$p(t) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j f_{n+1}\,,$$

de manera que, si en la fórmula (4.6) aproximamos $f(t)$ por el polinomio de interpolación anterior, y llamamos y_k a la aproximación de $y(t_k)$ para $k=n,n+1$, resulta:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)(t_{n+1}-t)\,dt \\ &= y_n + h\,y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j f_{n+1}\right)(t_{n+1}-t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Si ahora realizamos el cambio de variable en la integral dado por

$$\left\{\begin{aligned} &t = t_{n+1} + s\,h \\ &t_{n+1} - t = -s\,h \\ &dt = h\,ds \end{aligned}\right.$$

resultan los nuevos límites de integración

$$\left\{\begin{array}{l} t = t_{n+1} \Rightarrow -s\,h = 0 \Rightarrow s = 0 \\ t = t_n \Rightarrow h = -s\,h \Rightarrow s = -1 \end{array}\right.$$

y la fórmula anterior se puede poner como

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)\,(t_{n+1} - t)\,dt \\ &= y_n + h\,y'_n + \int_{-1}^{0} p(t_{n+1} + sh)(-sh)h\,ds \\ &= y_n + h\,y'_n - h^2 \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1}\,s\,ds \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \left[- \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} s\,ds \right] \nabla^j f_{n+1} \qquad (4.15) \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1} \end{aligned}$$

Denotando a los coeficientes que aparecen en el sumatorio anterior por

$$\beta_j^* = - \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} s\,ds \qquad (4.16)$$

se obtiene como ecuación de recurrencia para el método de Falkner implícito la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^*\, \nabla^j f_{n+1}\,. \qquad (4.17)$$

Al igual que en en caso explícito, si se quiere expresar la fórmula (4.17) en términos de las f_{n+1-j}, se considera la igualdad

$$\nabla^j f_{n+1} = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n+1-l}\,,$$

y sustituyendo y reordenando en la fórmula del método, resulta:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \,\nabla^j f_{n+1} \\
&= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n+1-l} \\
&= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \left[(-1)^l \sum_{j=l}^{k} \binom{j}{l} \beta_j^* \right] f_{n+1-l} \\
&= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_l^* f_{n+1-l}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

estando los coeficientes $\bar{\beta}_l^*$ dados por

$$
\bar{\beta}_l^* = (-1)^l \sum_{j=l}^{k} \binom{j}{l} \beta_j^* \,. \tag{4.19}
$$

Cálculo de los coeficientes.

De nuevo, para la determinación de los coeficientes β_j^* utilizamos la técnica de las funciones generatrices de Euler. Si llamamos

$$
F_{\beta^*}(t) \;\; = \;\; \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^* t^j
$$

y tenemos en cuenta la expresión de los coeficientes en (4.16), resulta

$$
\begin{aligned}
F_{\beta^*}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^* t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(- \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} \, s\,ds \right) t^j \\
&= - \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-s}{j} t^j s\,ds \\
&= - \int_{-1}^{0} (1-t)^{-s} s\,ds \,.
\end{aligned}
$$

Esta última integral se puede obtener mediante el método de integración por partes, tomando

$$u = s\,, \qquad dv = (1-t)^{-s}\,ds$$

con lo que se obtiene finalmente que la función generatriz para los coeficientes del método implícito es

$$F_{\beta^*}(t) = \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{\ln^2(1-t)}\,.$$

En cuanto a los coeficientes $\bar{\beta}_l^*$ que aparecen en la fórmula (4.18), una vez que se conocen los coeficientes β_j^*, pueden obtenerse sin dificultad a partir de la fórmula en (4.19).

Nota
Una vez que se conocen los coeficientes β_j, a partir de la relación de las funciones generatrices correspondientes, es posible obtener una relación de recurrencia que permite obtener los coeficientes β_j^*, pues se tiene

$$F_{\beta^*}(t) = (1-t)\,F_\beta(t)\,,$$

de donde resulta

$$\beta_0^* + \beta_1^*\,t + \beta_2^*\,t^2 + \cdots = \beta_0 + (\beta_1 - \beta_0)\,t + (\beta_2 - \beta_1)\,t^2 + \ldots$$

e igualando los coeficientes de los términos de igual grado se obtiene la recurrencia

$$\beta_0^* = \beta_0\,, \qquad \beta_j^* = \beta_j - \beta_{j-1}\,.$$

4.1.6. Error de truncamiento local en el método de Falkner implícito

En el caso del método implícito las definiciones del caso explícito se trasladan con mínimas variaciones.

Definición 4.1.4 *El operador en diferencias $\mathcal{L}_{\beta^*}$ asociado con la fórmula que aparece en* (4.17) *se define como*

$$\mathcal{L}_{\beta^*}\,(z(t),h) \;=\; z(t+h) - z(t) - h\,z'(t) - h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f(t+h, z(t+h), z'(t+h))\,,$$

siendo $z(t) \in [t_0, b] \in \mathbb{R}$ una función cualquiera suficientemente diferenciable.

Definición 4.1.5 *El método numérico para resolver el problema* (4.1)*, dado por la fórmula* (4.17) *se dice consistente de orden* p *si*

$$\mathcal{L}^*_\beta\,(z(t),h) = \mathcal{O}(h^{p+2})\,.$$

En particular, si p *es al menos uno, el método simplemente se dice que es* **consistente**.

Definición 4.1.6 *Dada la fórmula de Falkner implícita en* (4.17) *se define el* **error de truncamiento local** *como el defecto de la solución* $y(t)$ *respecto de la ecuación en diferencias, esto es,*

$$\mathcal{L}^*_\beta\,(y(t),h) = y(t+h) - y(t) - h\,y'(t) - h^2\,\sum_{j=0}^{k} \beta^*_j \nabla^j f(t+h, y(t+h), y'(t+h))\,.$$

Para obtener la expresión del error de truncamiento local del método de Falkner implícito partiremos de nuevo de la fórmula exacta en (4.6), la cual escribimos en la forma

$$0 = y(t_n+h) - y(t_n) - hy'(t_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)(t_n+h-t)\,dt$$

y tras hacer el cambio de variable $t = t_{n+1} + s\,h$, $dt = h\,ds$ en la integral y sustituir la función $f(t)$ por la suma del polinomio de interpolación en los nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n, t_{n+1}$ más el error de interpolación correspondiente,

$$f(t) = f(t_{n+1}+s\,h) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j f_{n+1} + (-1)^{k+1}\binom{-s}{k+1}\,h^{k+1}\,y^{k+3)}(\xi_s)$$

resulta:

$$\begin{aligned}
0 &= y(t_n+h) - y(t_n) - hy'(t_n) \\
&- \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1} + (-1)^{k+1} \binom{-s}{k+1} h^{k+1} y^{k+3)}(\xi)\, sh\, h\, ds \\
&= y(t_n+h) - y(t_n) - hy'(t_n) \\
&- h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1} - \int_{-1}^{0} (-1)^{k+1} \binom{-s}{k+1} h^{k+1} y^{k+3)}(\xi)\, sh\, h\, ds \\
&= y(t_n+h) - y(t_n) - hy'(t_n) \\
&- h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1} - \left[\int_{-1}^{0} (-1)^{k+1} \binom{-s}{k+1} s\, ds \right] h^{k+3} y^{k+3)}(\xi_s) \\
&= y(t_n+h) - y(t_n) - hy'(t_n) - h^2 \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1} \\
&- \beta_{k+1}^* h^{k+3} y^{k+3)}(\xi_s) \\
&= \mathcal{L}_\beta^* \left(y(t_n), h\right) - \beta_{k+1}^* h^{k+3} y^{k+3)}(\bar{\xi})
\end{aligned}$$

de donde resulta que el error de truncamiento local en el punto t_n es

$$\mathcal{L}_\beta^* \left(y(t_n), h\right) = \beta_{k+1}^*\, h^{k+3} y^{k+3)}(\bar{\xi})\,,$$

lo que indica que el método de Falkner implícito de k pasos es un método de orden $k+1$ con constante de error β_{k+1}^*.

4.1.7. Fórmula para seguir la derivada

Al igual que en el caso explícito, la fórmula implícita de Falkner obtenida en (4.17) resulta insuficiente. Se necesita otra fórmula poder obtener las aproximaciones de la derivada primera en los diferentes puntos de la red para poder ir dando sucesivos pasos en la integración. Considerando la ecuación diferencial del problema (4.1) escrita en la forma $(y')' = f(t)$, la podemos interpretar como una ecuación diferencial de primer orden de la función y' y aplicar el método de Adams-Moulton de k pasos para obtener la aproximación y'_{n+1}, suponiendo conocido el valor anterior y'_n. El esquema numérico resultante queda

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1}\,,$$

donde los coeficientes del método vienen dados por

$$\gamma_j^* = \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} \, ds \, .$$

La función generatriz de los coeficientes está dada en este caso por

$$F_{\gamma^*} = \frac{-t}{\ln(1-t)}$$

y el error de truncamiento local se expresa en la forma

$$\mathcal{L}_{\gamma^*}\left(y(t_n), h\right) \;\; = \;\; \gamma_{k+1}^* \, h^{k+2} y^{k+3)}(\bar{\xi}) \, ,$$

correspondiendo a un método de orden $k+1$, y donde la constante del error está dada por el coeficiente γ_{k+1}^*.
Teniendo en cuenta la fórmula en (4.17) junto con la fórmula que acabamos de indicar para la derivada primera, podemos concluir que el método de Falkner implícito para resolver el problema en (4.1) está dado por la pareja de fórmulas

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h \, y_n' + h^2 \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1} \\ y_{n+1}' = y_n' + h \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1} \, . \end{array} \right. \tag{4.20}$$

4.1.8. Obtención de los Métodos de Störmer-Cowell a partir de los de Falkner

Métodos de Störmer

La fórmula de la que se parte, es la misma que la del método de Falkner Explícito, pero cambiando el segundo término a negativo, es decir,

$$y(t_{n-1}) = y(t_n) - h \, y'(t_n) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, y(t)) \, (t_{n-1} - t) \, dt$$

y tenemos por lo tanto, que,

$$\begin{aligned} y(t_{n-1}) &= y(t_n) - h \, y'(t_n) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, y(t)) \, (t_{n-1} - t) \, dt \\ &\simeq y(t_n) - h \, y'(t_n) + \int_{0}^{-1} p\,(t)(-h - s\, h) \, h \, ds \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable, $t = t_n + s\,h$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
y(t_{n-1}) \simeq y(t_n) - h\,y'(t_n) &+ \int_0^{-1} p\,(t)(-h - s\,h)\,h\,ds \\
&= y_n - h\,y'_n + \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n\, h^2 (1+s)\,ds \\
&= y_n - h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left[\int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} (1+s)\,ds \right] \nabla^j f_n \\
&= y_n - h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{\beta}_j \nabla^j f_n
\end{aligned}
$$

siendo

$$\widetilde{\beta}_j = \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} (1+s)\,ds$$

La función generatriz que se obtiene es:

$$
\begin{aligned}
F_{\widetilde{\beta}_j}(t) &= \int_{-1}^{0} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-s}{j} \right] (1+s)\,ds \\
&= \int_{-1}^{0} (1-t)^{-s} (1+s)\,ds = \frac{-t - \ln(1-t)}{\ln^2(1-t)} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Sumando la ecuación de Störmer con la de Falkner Explícito, tenemos,

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1} = \\
&\qquad h^2 \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[\int_0^1 \binom{-s}{j} (1-s)\,ds + \int_{-1}^{0} \binom{-s}{j} (1+s)\,ds \right] \nabla^j f_n
\end{aligned}
$$

haciendo el cambio de variable $s=-v$ y por tanto $ds=-dv$, tenemos,

$$\begin{aligned}
& y_{n+1}-2\,y_n+y_{n-1} \\
&\quad = h^2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left[\int_0^1\binom{-s}{j}(1-s)\,ds+\int_{-1}^0\binom{-s}{j}(1+s)\,ds\right]\nabla^j f_n \\
&\quad = h^2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\int_0^1\left[\binom{-s}{j}(1-s)+\binom{s}{j}(1-s)\right]ds\nabla^j f_n \\
&\quad = h^2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\int_0^1(1-s)\left[\binom{s}{j}+\binom{-s}{j}\right]ds\nabla^j f_n \\
&\quad = h^2\sum_{j=0}^{k-1}\delta_j\nabla^j f_n
\end{aligned}$$

siendo $\delta_j=(-1)^j\int_0^1(1-s)\left[\binom{s}{j}+\binom{-s}{j}\right]ds$ los coeficientes de Störmer Explícito.
Sumando los coeficientes de la función generatriz de Falkner Explícito con h (4.12) con los de $-h$ (4.21), tenemos

$$\begin{aligned}
F_{\beta_j}+F_{\widetilde{\beta}_j} &= \frac{t+(1-t)\ln(1-t)+(1-t)(-t-\ln(1-t))}{(1-t)\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{t+\ln(1-t)-t\ln(1-t)-t-\ln(1-t)+t^2+t\ln(1-t)}{(1-t)\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{t^2}{(1-t)\ln^2(1-t)} \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

que es la función generatriz de los coeficientes del método de Störmer.

Métodos de Cowell

Se hace de forma similar, partiendo de la siguiente fórmula:

$$y(t_{n+1})=y(t_n)-h\,y'(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n-h}}f(t,y(t))\,(t_{n-1}-t)\,dt$$

y tenemos por lo tanto, que,

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n)-h\,y'(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n-h}}f(t,y(t))\,(t_n-t)\,dt \\
&\simeq y(t_n)-h\,y'(t_n)+\int_{-1}^{0}p\,(t)(-s\,h)\,h\,ds
\end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable $t = t_{n+1} + s\,h$, tenemos

$$y_{n+1} = y(t_n) - h\,y'(t_n) + \int_{-1}^{-2} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1}(2h - s\,h)\,h\,ds \quad (4.23)$$

$$= y(t_n) - h\,y'(t_n) + h^2 \sum_{j=0}^{k} \left[\int_{-2}^{-1} (-1)^j \binom{-s}{j} (2+s)\,ds \right] \nabla^j f_{n+1} \quad (4.24)$$

siendo $\int_{-2}^{-1} (-1)^j \binom{-s}{j} (2+s)\,ds$ los coeficientes $\widetilde{\beta}_j^*$.
Sumando la fórmula de Falkner Implícito con h (**??**) y con la de $-h$ (4.23), tenemos

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{k} (\beta_j^* + \widetilde{\beta}_j^*) \nabla^j f_{n+1}$$

La función generatriz de dichos coeficientes es

$$\begin{aligned}
F_{\widetilde{\beta}_j^*}(t) &= \int_{-2}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-s}{j} (2+s)\,ds \\
&= \int_{-2}^{-1} (1-t)^{-s} (2+s)\,ds \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{2+s}{(1-t)^s}\,ds \\
&= (2+s) \frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)} \Bigg]_{s=-2}^{s=-1} + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\ln(1-t)} \frac{1}{(1-t)^s}\,ds
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = 2+s$, $dv = \frac{ds}{(1-t)^s}$, $du = ds$ y $v = \frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
F_{\widetilde{\beta}_j^*}(t) &= \frac{-(1-t)}{\ln(1-t)} - \frac{(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)} \Bigg]_{s=-2}^{s=-1} \\
&= \frac{-(1-t)}{\ln(1-t)} - \frac{(1-t)}{\ln^2(1-t)} + \frac{(1-t)^2}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{-(1-t)\ln(1-t) - 1 + t + 1 + t^2 - 2t}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{t^2 - t - (1-t)\ln(1-t)}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{(t-1)[t + \ln(1-t)]}{\ln^2(1-t)}
\end{aligned}$$

Sumando entonces los coeficientes de las funciones generatrices tenemos

$$F_{\beta_j^*} + F_{\widetilde{\beta}_j^*} = \frac{t^2}{\ln^2(1-t)}$$

que es la función generatriz de los coeficientes del método de Cowell.

4.2. Métodos numéricos tipo Runge-Kutta-Nyström

4.2.1. Métodos clásicos de un paso Runge-Kutta-Nyström

Consideremos el problema de valor inicial;

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{4.25}$$

Si reescribimos la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden obtenemos

$$\frac{d}{dx}(y\,, y') = (y'\,, f(x, y, y'))$$

Aplicando una fórmula Runge-Kutta explícita para sistemas de primer orden obtenemos la siguiente aproximación numérica:

$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i \overline{k}_i, \tag{4.26}$$

$$y'_1 = y'_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \tag{4.27}$$

$$\overline{k}_i = y'_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} k_j, \tag{4.28}$$

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij}\overline{k}_j, y'_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} k_j), \tag{4.29}$$

$i = 1, ..., s$

Insertando (4.28) en (4.26), (4.27) y (4.29), obtenemos la expresión del siguiente método

$$
\begin{aligned}
&y_1 = y_0 + hy_0' + h^2 \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i k_i, \\
&y_1' = y_0' + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \\
&k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + c_i h y_0' + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, y_0' + h \sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} k_j), \\
&i = 1, ..., s
\end{aligned}
$$

con

$$a_{ij} = \sum_k \overline{a}_{ik} \overline{a}_{kj} \qquad\qquad \bar{b}_i = \sum_j b_j \overline{a}_{ij} \tag{4.30}$$

Estos métodos de tipo Runge-Kutta diseñados para ecuaciones diferenciales de segundo orden se denominan habitualmente métodos Runge- Kutta-Nyström ya que fueron introducidos por Nyström en 1925, aunque Nyström construyó métodos que no satisfacían necesariamente las condiciones (4.30). Para este tipo de métodos se suelen usar las abreviaturas RKNG o RKN, aunque habitualmente se reserva esta última abreviatura para los métodos específicamente diseñados para problemas en los que la función no contiene explícitamente a la derivada de la solución.

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \tag{4.31}$$

Para este tipo de problemas las fórmulas del método serían de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
&y_1 = y_0 + hy_0' + h^2 \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i k_i, \\
&y_1' = y_0' + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i, \\
&k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + c_i h y_0' + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \\
&i = 1, ..., s
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Nótese que los coeficientes $\overline{a}_{ij}$ ya no aparecen en las fórmulas del algoritmo. En este caso, puede alcanzarse una gran simplificación tanto en la implementación del método como en el coste computacional requerido. El interés de estas fórmulas radica en el amplio espectro de problemas que pueden reducirse a ecuaciones de este tipo tras un adecuado cambio de variables. A menudo los coeficientes de un método Runge-Kutta-Nyström para la resolución de un problema de valor inicial con una ecuación de segundo orden especial (sin la presencia de la derivada) se disponen en tablas que ayudan a visualizar el método como queda reflejado en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cc|ccccc}
 & c_1 & & & a_{ij} & & \\
c_i & c_2 & a_{21} & & & & \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 & c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss-1} & \\
\hline
 & \overline{b}_i & \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \dots & \overline{b}_{s-1} & \overline{b}_s \\
\hline
 & b_i & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

Para métodos de tipo RKN específicamente diseñados para la integración numérica de ecuaciones diferenciales de segundo orden se suele definir el orden del método de la siguiente forma.

Definición 4.2.1 *Se dice que un método RKN tiene orden p si para problemas suficientemente regulares se verifica*

$$\begin{aligned}
y(x_0 + h) - y_1 &= O(h^{p+1}) \\
y'(x_0 + h) - y'_1 &= O(h^{p+1})
\end{aligned}$$

4.2.2. Métodos explícitos Runge-Kutta-Nyström de orden 3 y 3 etapas

Vamos a tratar los métodos de 3 etapas y orden 3 para problemas de valor inicial de la forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{4.33}$$

en la cual la función depende de y'. Vamos a considerar el método RKN explícito de tres etapas, definido por;

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + hy'_k + h^2(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3) + T_k(h) \\
y'_{k+1} &= y'_k + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) + T'_k(h)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

donde

$$k_1 = f(x_k + \alpha_1 h, y_k + \alpha_1 h y'_k, y'_k),$$
$$k_2 = f(x_k + \alpha_2 h, y_k + \alpha_2 h y'_k + h^2 \beta_{21} k_1, y'_k + h\gamma_{21} k_1),$$
$$k_3 = f(x_k + \alpha_3 h, y_k + \alpha_3 h y'_k + h^2(\beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), y'_k + h(\gamma_{31} k_1 + \gamma_{32} k_2)),$$

y $T_k(h)$, $T'_k(h) = O(h^4)$. Contrariamente a la expansión en series de Taylor, la cual usa operadores diferenciales, Hairer y Wanner han conseguido encontrar la manera de obtener las ecuaciones necesarias para utilizar métodos RKN de varios órdenes. También indican cómo los métodos numéricos se puede obtener desde las ecuaciones de condiciones; sin embargo, no hay soluciones completas de estas ecuaciones de condiciones de momento.
Vamos a obtener todas la familias posibles de métodos RKN explícitos de 3 etapas y orden 3 para el problema de valor inicial (4.33).

Condiciones de orden y sus soluciones

A fin de que $T_k(h^4), T'_k(h^4) = O(h^4)$ para el método descrito por (4.34), tenemos el siguiente sistema de 12 ecuaciones necesario para el orden 3;

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1/2 \tag{4.35}$$
$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 1/6 \tag{4.36}$$
$$a_2\gamma_{21} + a_3(\gamma_{31} + \gamma_{32}) = 1/6 \tag{4.37}$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \tag{4.38}$$
$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 1/2 \tag{4.39}$$
$$b_1\alpha_1^2 + b_2\alpha_2^2 + b_3\alpha_3^2 = 1/3 \tag{4.40}$$
$$b_2\gamma_{21} + b_3(\gamma_{31} + \gamma_{32}) = 1/2 \tag{4.41}$$
$$b_2\gamma_{21}^2 + b_3(\gamma_{31} + \gamma_{32})^2 = 1/3 \tag{4.42}$$
$$b_2\alpha_2\gamma_{21} + b_3\alpha_3(\gamma_{31} + \gamma_{32}) = 1/3 \tag{4.43}$$
$$b_2\gamma_{21}\alpha_1 + b_3(\gamma_{31}\alpha_1 + \gamma_{32}\alpha_2) = 1/6 \tag{4.44}$$
$$b_3\gamma_{32}\gamma_{21} = 1/6 \tag{4.45}$$
$$b_2\beta_{21} + b_3(\beta_{31} + \beta_{32}) = 1/6 \tag{4.46}$$

De (4.45), resulta que

$$b_3 \neq 0, \quad \gamma_{32} \neq 0, \quad \gamma_{21} \neq 0 \tag{4.47}$$

En primer lugar, vamos a establecer los siguientes resultados que ayudan en la obtención completa de las soluciones de las ecuaciones (4.35) a (4.46). Tenemos;

$$d_1 = -\alpha_1, \quad d_2 = \gamma_{21} - \alpha_2, \quad d_3 = \gamma_{31} + \gamma_{32} - \alpha_3 \tag{4.48}$$

Proposición 4.2.1 *El sistema* (4.35) *a* (4.46) *necesariamente implica que*

$$b_1d_1 = b_2d_2 = b_3d_3 = 0 \tag{4.49}$$

Demostración: Consideramos las matrices U, V y W

$$U = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1\alpha_1 & b_2\alpha_2 & b_3\alpha_3 \\ b_1d_1 & b_2d_2 & b_3d_3 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & d_1 \\ 1 & \alpha_2 & d_2 \\ 1 & \alpha_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene que $UV = W$. Puesto que W es singular bien U o bien V es singular. Si $u^TU = 0$ entonces $u^TW = 0$ y resulta que u^T ha de ser un múltiplo escalar del vector $(0, 0, 1)$. Así $u^TU = 0$ implica (4.49). De forma similar si V es singular, entonces $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ implicando también (4.49). □

Proposición 4.2.2 *El sistema* (4.35) *a* (4.46) *necesariamente implica que*

$$d_2 = d_3 = 0 \tag{4.50}$$

Demostración: De (4.45) y (4.49) obtenemos $d_3 = 0$. Para $\alpha_1 = 0$ en (4.44) obtenemos $d_2 = 0$; para $\alpha_1 \neq 0$ de (4.39) (4.49) tenemos que $d_2 = 0$. □

Como consecuencia de esta proposición, de (4.36) y (4.37), (4.39) y (4.41), (4.44) y (4.45) tenemos

$$a_1\alpha_1 = b_1\alpha_1 = (b_2\gamma_{21} + b_3\gamma_{31})\alpha_1 = 0 \tag{4.51}$$

Ahora, de los resultados anteriores tenemos que el sistema (4.35) a (4.46) es equivalente al siguiente sistema S, de 8 ecuaciones,

$$S : (4.35), (4.36), (4.38), (4.39), (4.45), (4.46), (4.50), (4.51)$$

Entonces todos los métodos RKN de tercer orden están caracterizados por el sistema S y todas las familias de métodos RKN de tercer orden pueden ser obtenidas a partir de este sistema.

Familias RKN de tercer orden para $\alpha_1 = 0$ Para el caso $\alpha_1 = 0$, las ecuaciones en (4.51) son satisfechas y el sistema S se reduce a un sistema con 14 parámetros y por tanto se puede obtener una familia de métodos con 5 parámetros. Con α_2, α_3, $\beta 21$, $\beta 32$ elegidos como parámetros libres, los restantes parámetros quedan;

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0,\\
&a_1 = [3\alpha_2 - 1 + 6a_3(\alpha_3 - \alpha_2)]/(6\alpha_2),\\
&a_2 = (1 - 6a_3\alpha_3)/(6\alpha_2),\\
&b_2 = (3\alpha_3 - 2)/[6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)],\\
&b_3 = (3\alpha_2 - 2)/[6\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)],\\
&b_1 = 1 - b_2 - b_3,\\
&\gamma_{21} = \alpha_2,\\
&\gamma_{32} = [\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)]/[\alpha_2(3\alpha_2 - 2)],\\
&\gamma_{31} = \alpha_3 - \gamma_{32},\\
&\beta_{31} = 1/6b_3 - (b_2/b_3)\beta_{21} - \beta_{32}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Esta solución es válida teniendo en cuenta que $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 2/3$, $\alpha_3 \neq 0$ y $\alpha_2 \neq \alpha_3$. A esta familia la denotamos por $M_3(\alpha_2, \alpha_3; a_3; \beta_{21}, \beta_{32})$.
Ahora de (4.45) y (4.45) resulta que $\alpha_2 \neq 0$. Desde $b_3 \neq 0$, de la expresión superior para b_3, es fácil ver que α_2 no puede ser igual a $2/3$ a menos que $\alpha_3 = 0$ o $\alpha_2 = \alpha_3$; vamos a ver estos dos casos;

1. **Familias de métodos para $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 = 0$**
   Con a_3, b_3, β_{21} y β_{32} elegidos como parámetros libres, los restantes nos quedan;

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 = 2/3,\\
&a_1 = 1/4 - a_3, \quad a_2 = 1/4,\\
&b_1 = 1/4 - b_3, \quad b_2 = 3/4,\\
&\gamma_{21} = 2/3, \quad \gamma_{31} = -1/4b_3, \quad \gamma_{32} = -1/4b_3,\\
&\beta_{31} = 1/6b_3 - (3/4b_3)\beta_{21} + \beta_{32}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

   Esta familia de métodos RKN de tercer orden se denota como $M_3^{(1)}(a_3, b_3; \beta_{21}, \beta_{32})$.

2. **Familias de métodos para $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \alpha_3$**
   Con a_3, b_3, β_{21} y β_{32} elegidos como parámetros libres, los restantes nos

quedan;

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 2/3, \\
&a_1 = 1/4, \quad a_2 = 1/4 - a_3, \\
&b_1 = 1/4, \quad b_2 = 3/4 - b_3, \\
&\gamma_{21} = 2/3, \quad \gamma_{31} = -1/4b_3, \quad \gamma_{32} = -1/4b_3, \\
&\beta_{31} = 1/6b_3 - (b_2/b_3)\beta_{21} - \beta_{32}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Esta familia de métodos RKN de tercer orden se denota como $M_3^{(2)}(a_3, b_3; \beta_{21}, \beta_{32})$.

Familias RKN de tercer orden para $\alpha_1 \neq 0$. En este caso por (4.51) sabemos que $a_1 = b_1 = 0$; por tanto en el sistema S hay 13 parámetros de donde resulta una familia de métodos con tres parámetros. Con α_1, β_{21} y β_{32} elegidas como parámetros libres, los restantes quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 = 1/3, \quad \alpha_3 = \alpha_3 = 1, \\
&a_1 = 0, \quad a_2 = 1/2, \quad a_3 = 0, \\
&b_1 = 0, \quad b_2 = 3/4, \quad b_4 = 1/4, \\
&\gamma_{21} = 1/3, \quad \gamma_{31} = -1, \quad \gamma_{32} = 2, \\
&\beta_{31} = 2/3 - 3\beta_{21} - \beta_{32}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Esta familia de métodos RKN de tercer orden se denota como $M_3^*(a_3, b_3; \beta_{21}, \beta_{32})$.

Métodos RKN de 3 etapas y tercer orden que se aplican a la ecuación $y'' = f(x, y)$

Vimos anteriormente las familias de métodos RKN de 3 etapas y tercer orden para el problema de valor inicial (4.33). Ahora vamos a encontrar estos métodos para la ecuación diferencial

$$y'' = f(x, y) \tag{4.56}$$

que posee alguna de las dos siguientes propiedades;
(P1) Sigue siendo un método de orden 3 pero tiene dos etapas cuando se aplica en (4.56),
(P2) Sigue siendo un método de 3 etapas pero alcanza orden 4 cuando se aplica a (4.56).

Métodos que poseen la propiedad P1 El método general RKN de 3 etapas dado por (4.34) se reducirá a 2 etapas para $y'' = f(x, y)$ siempre, si al menos una de las siguientes condiciones se cumple;

$$
\begin{aligned}
& k_1 = k_2, \quad k_2 = k_3, \quad k_3 = k_1 \\
& a_1 = b_1 = \beta_{21} = \beta_{31} = 0, \quad a_2 = b_2 = \beta_{32} = 0
\end{aligned}
$$

Podemos verificar que los siguientes métodos de $M_3(\alpha_2, \alpha_3; a_3; \beta_{21}, \beta_{32})$, $M_3^{(1)}(a_3, b_3; a_3; \beta_{21}, \beta_{32})$, $M_3^{(2)}(a_3, b_3; a_3; \beta_{21}, \beta_{32})$ y $M_3^*(\alpha_1 : \beta_{21}, \beta_{32})$ poseen la propiedad P1:

$$
\begin{aligned}
& M_3(\overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3; \overline{\alpha}_3; 0, \overline{\beta}_{32}), \quad M_3(\alpha_2, 2/3; 1/4; \beta_{21}, 0) \quad M_3^{(1)}(a_3, b_3; 2/9, 0) \\
& M_3^{(1)}(1/4; 1/4; 0, 2/3), \quad M_3^{(2)}(a_3, b_3; 2/9, 0), \quad M_3^{(2)}(1/4, 3/4; \beta_{21}, 0) \\
& M_3^*(1/3; 0, \beta_{32}), \quad M_3^*(1; 2/9, 0), \quad M_3^*(\alpha_1; 0, 2/3)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
& \overline{\alpha}_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{3(1 - 2\alpha_2)}, \quad \overline{a}_3 = \frac{(1 - 2\alpha_2)(1 - 3\alpha_2)}{4(1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_2^2)} \\
& \overline{\beta}_{32} = \frac{2(1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_2^2)}{9(1 - 2\alpha_2)^2}, \quad (\alpha_2 \neq 1/2)
\end{aligned}
$$

Vemos que para los métodos $M_3^{(1)}(1/4, 1/4; 2/9, 0)$ y $M_3^{(2)}(1/4, 3/4; 2/9, 0)$ se reducen al clásico método RKN de tercer orden y 2 etapas cuando y' no está.

Métodos que poseen la propiedad P2 Se puede verificar que ningún método de $M_3^{(1)}(a_3, b_3; \beta_{21}, \beta_{32})$, $M_3^{(2)}(a_3, b_3; \beta_{21}, \beta_{32})$ o $M_3^*(\alpha_1; \beta_{21}, \beta_{32})$ tienen cuarto orden de precisión cuando y' no está. Podemos ver que cada método de la subfamilia $M_3^{(}\alpha_2, \alpha_3^*; \beta_{21}^*, \beta_{32}^*)$ con

$$
\begin{aligned}
& \alpha_3^* = \frac{3 - 4\alpha_2}{2(2 - 3\alpha_2)}, \quad (\alpha_2 \neq 2/3, 3/4), \quad a_3^* = b_3(1 - \alpha_3^*), \\
& \beta_{21}^* = 1/2\alpha_2^2, \quad \beta_{32}^* = 1/(24 b_3 \alpha_2)
\end{aligned}
$$

poseen la propiedad P2. Vemos que el método $M_3(1/2, 1; 0; 1/8, 1/2)$se reduce al clásico método RKN de 3 etapas y cuarto orden cuando la y' no está.

Ejemplo numérico y conclusiones

En esta sección se ilustrará numéricamente el funcionamiento de alguno de los métodos anteriores. Vamos a seleccionar dos métodos de la familia

Método	a_3	Tiempo	Error y
$M_3(1/2, 1; 0; 0, 0)$	$a_3 = 0$	0,406	$5{,}86354 \cdot 10^{-2}$
$M_3(1/2, 1; 1/6; 0, 0)$	$a_3 = 1/6$	0,078	$9{,}0876 \cdot 10^{-4}$

Cuadro 4.1: $y'' = 2y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

$M_3(\alpha_2, \alpha_3; a_3; \beta_{21}, \beta_{32})$ que corresponde a $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_{21} = \beta_{32} = 0$, y seleccionamos $a_3 = 0$ resultando el método $M_3(1/2, 1; 0; 0, 0)$ y $a_3 = 1/6$ resultando el método $M_3(1/2, 1; 1/6; 0, 0)$. Utilizamos estos métodos para resolver el problema de valor inicial;

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \tag{4.57}$$

que tiene como solución exacta $y(x) = 1/1 + x$. Vamos a hacerlo con un paso de $h = 0{,}01$.
Se demuestra claramente el deterioro del error relativo del método $M_3(1/2, 1; 0; 0, 0)$ y se confirma las mejores capacidades del método $M_3(1/2, 1; 1/6; 0, 0)$ el cual satisface la condición de estabilidad vista en [17] sobre el método $M_3(1/2, 1; 0; 0, 0)$, que no la satisface.

4.2.3. Método de la diagonal individual implícito Runge-Kutta-Nyström de sexto orden con una primera etapa explícita

Vamos a construir otro método semiimplícito Runge-Kutta-Nyström de sexto orden con una primera etapa explícita para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Introducción

La solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{4.58}$$

en la cual y' no está de forma explícita puede ser resuelta como hemos visto de forma directa usando métodos RKN. El método que vamos a usar proporciona aproximaciones de y_{n+1} y y'_{n+1} a $y(x_{n+1})$ y $y'(x_{n+1})$ como sigue:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + h^2 \sum_{j=1}^{s} b_j k_j, \quad y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=1}^{s} b'_j k_j \tag{4.59}$$

donde

$$k_j = f(x_n + c_j h, y_n + c_j h y'_n + h^2 \sum_{l=1}^{s} a_{ij} k_j), \quad j = 1, 2, ..., s \tag{4.60}$$

Los coeficientes c_j, a_{ij}, b_jy b'_j del método RKN se suponen reales y s es el número de etapas. Aquí $c = [c_1, c_2, ..., c_s]^T$, $b = [b_1, b_2, ..., b_s]$, $b' = [b'_1, b'_2, ..., b'_s]$ y $A = [a_{ij}]$ es una matriz sxs y el método puede ser representado usando la tabla de Butcher.
Vamos a construir el método RKN diagonal implícito con $a_{11} = 0$ y el resto de los elementos de la diagonal iguales entre sí.

Construcción del método

La estrategia seguida en la construcción del método está basada en el criterio visto en [20]. Según éste criterio las siguientes ecuaciones de orden son necesarias para satisfacer que el método RKN sea de sexto orden;

1. Ecuaciones RKN para y

1. $\tau_1^{(2)} = \sum_i b_i - \frac{1}{2}$

2. $\tau_1^{(3)} = \sum_i b_i c_i - \frac{1}{6}$

3. $\tau_1^{(4)} = \frac{1}{2} \sum b_i c_i^2 - \frac{1}{24}$

4. $\tau_1^{(5)} = \frac{1}{6} \sum b_i c_i^3 - \frac{1}{120}$

5. $\tau_3^{(5)} = \sum b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{120}$

6. $\tau_1^{(6)} = \frac{1}{24} \sum_i b_i c_i^4 = \frac{1}{720}$

7. $\tau_4^{(6)} = \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{180}$

8. $\tau_5^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_j a_{ij} c_j - \frac{1}{720}$

9. $\tau_5^{(7)} = \frac{1}{120} \sum_i b_i c_i^5 - \frac{1}{5040}$

10. $\tau_4^{(7)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i c_i^2 a_{ij} c_j - \frac{1}{504}$

11. $\tau_6^{(7)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j^2 - \frac{1}{1008}$

12. $\tau_7^{(7)} = \frac{1}{6} \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^3 = \frac{1}{5040}$

13. $\tau_{10}^{(7)} = \sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{5040}$

donde $\tau_j^{(i)}$ es el coeficiente de error para el método de orden i.

2. Ecuaciones equivalentes independientes RKN para y

1. $\tau_1^{(2)} = \sum_i b_i - \frac{1}{2}$	**8**. $2\tau_5^{(6)} - 2\tau_1^{(6)} = \frac{1}{2}\sum_i b_i Q_{i2}$
2. $\tau_1^{(3)} = \sum_i b_i c_i - \frac{1}{6}$	**9**. $\tau_1^{(7)} = \frac{1}{120}\sum_i b_i c_i^5 - \frac{1}{5040}$
3. $\tau_1^{(4)} = \frac{1}{2}\sum b_i c_i^2 - \frac{1}{24}$	**10**. $2\tau_4^{(7)} - 20\tau_1^{(7)} = \sum_j b_i c_i^2 Q_{i1}$
4. $\tau_1^{(5)} = \frac{1}{6}\sum b_i c_i^3 - \frac{1}{120}$	**11**. $2\tau_6^{(7)} - 10\tau_1^{(7)} = \sum_i b_i c_i Q_{i2}$
5. $\tau_3^{(5)} - \tau_1^{(5)} = \sum b_i Q_{i1}$	**12**. $6\tau_7^{(7)} - 6\tau_1^{(7)} = \sum_i b_i Q_{i3}$
6. $\tau_1^{(6)} = \frac{1}{24}\sum_i b_i c_i^4 = \frac{1}{720}$	**13**. $\tau_{10}^{(7)} - \tau_7^{(7)} = \sum_{ij} b_i a_{ij} Q_{j1}$
7. $\tau_4^{(6)} - 4\tau_1^{(6)} = \sum_{ij} b_i c_i Q_{i1}$	

donde

$$Q_{ik} = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} c_j^k \frac{c_j^{k+2}}{(k+2)(k+1)}, \quad (i = 1, ..., s; \quad k = 1, 2, ...)$$

3. Ecuaciones equivalentes independientes RKN para y'.
Las ecuaciones correspondientes para y' se obtienen reemplazando $\tau_j^{(i)}$ por $\tau_j^{\prime(i-1)}$ y b por b' y multiplicando la parte derecha de las ecuaciones

que no tengan Q por i.

1. $\tau_1^{'(1)} = \sum_i b_i' - 1$	**8**. $2\tau_5^{'(5)} - 2\tau_1^{'(5)} = \sum_i b_i' Q_{i2}$
2. $\tau_1^{'(2)} = \sum_i b_i' c_i - \frac{1}{2}$	**9**. $\tau_1^{'(6)} = \frac{1}{120} \sum_i b_i' c_i^5 - \frac{1}{720}$
3. $\tau_1^{'(3)} = \frac{1}{2} \sum b_i' c_i^2 - \frac{1}{6}$	**10**. $2\tau_4^{'(6)} - 20\tau_1^{'(6)} = \sum_i b_i' c_i^2 Q_{i1}$
4. $\tau_1^{'(4)} = \frac{1}{6} \sum b_i' c_i^3 - \frac{1}{24}$	**11**. $2\tau_6^{'(6)} - 10\tau_1^{'(6)} = \sum_i b_i' c_i Q_{i2}$
5. $\tau_3^{'(4)} - \tau_1^{'(4)} = \sum_i b_i' Q_{i1}$	**12**. $6\tau_7^{'(6)} - 6\tau_1^{'(6)} = \sum_i b_i' Q_{i3}$
6. $\tau_1^{'(5)} = \frac{1}{24} \sum_i b_i' c_i^4 = \frac{1}{120}$	**13**. $\tau_{10}^{'(6)} - \tau_7^{'(6)} = \sum_{ij} b_i' a_{ij} Q_{j1}$
7. $\tau_4^{'(5)} - 4\tau_1^{'(5)} = \sum_j b_i' c_i Q_{i1}$	

De las dos últimas tablas, las siguientes ecuaciones necesitan ser satisfechas por el método RKN de sexto orden para y.

$$\sum_i b_i c_i^{(k)} = \frac{1}{(k+2)!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{4.61}$$

$$\sum_i b_i Q_{i1} = 0 \tag{4.62}$$

$$\sum_i b_i c_i Q_{i1} = 0 \tag{4.63}$$

$$\sum_i b_i Q_{i2} = 0 \tag{4.64}$$

y las siguientes ecuaciones necesitan ser satisfechas para y'

$$\sum_i b'_i c_i^k = \frac{1}{(k+1)!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \tag{4.65}$$

$$\sum_i b'_i Q_{i1} = 0 \tag{4.66}$$

$$\sum_i b'_i c_i Q_{i1} = 0 \tag{4.67}$$

$$\sum_i b'_i c_i Q_{i2} = 0 \tag{4.68}$$

$$\sum_i b'_i c_i^2 Q_{i1} = 0 \tag{4.69}$$

$$\sum_i b'_i c_i Q_{i2} = 0 \tag{4.70}$$

$$\sum_i b'_i Q_{i3} = 0 \tag{4.71}$$

$$\sum_{ij} b'_i c_{ij} Q_{j1} = 0 \tag{4.72}$$

donde

$$Q_{i1} = \sum_{ij} a_{ij} c_j - \frac{c_i^3}{6} \tag{4.73}$$

$$Q_{i2} = \sum_{ij} a_{ij} c_j - \frac{c_i^4}{12} \tag{4.74}$$

$$Q_{i3} = \sum_{ij} a_{ij} c_j - \frac{c_i^5}{20} \tag{4.75}$$

Junto con la ecuación;

$$\sum_j a_{ij} = \frac{c_i^2}{2} \tag{4.76}$$

La ecuación (4.61) puede ser reemplazada por;

$$b_i = b'_i(1 - c_i) \tag{4.77}$$

Vamos a ver cómo se obtienen los coeficientes, usando γ como elementos diagonales;

1. La única forma de que (4.73), (4.74) y (4.75) sean satisfechas para $i = 1$ es que $a_{11} = c_1 = 0$

2. Para $i = 2$ de (4.73), tenemos;

$$\gamma c_2 = \frac{c_2^3}{6} \longrightarrow c_2 = \sqrt{6\gamma} \tag{4.78}$$

   La ecuación (4.74) no se puede cumplir para $i = 2$, así de la ecuación (4.74) tenemos que tener $b_2 c_2 = 0$ y es satisfecha si $b_2 = 0$. De forma similar para la y' de (4.74) y (4.75) no pueden ser satisfechas para $i = 2$, así que $b'_2 = 0$ y por tanto se verifican las ecuaciones (4.68), (4.70) y (4.71).

3. Para $i = 3$ de (4.73) y (4.74) podemos resolver a_{32} y c_3 y (4.75) no puede satisfacer para $i = 3$, así que tenemos que tener $b'_3 = 0$.

4. De (4.73), (4.74) y (4.75) para $i = 3$, podemos resolver a_{42}, a_{43} y c_4.

5. Usamos (4.65) para resolver b'_1, b'_4, b'_5, b'_6, c_5 y c_6.

6. Usando el valor de c_5, podemos resolver a_{52}, a_{53} y a_{54} de (4.73), (4.74) y (4.75) para $i = 5$.

7. Con el valor a_{62}, usando las mismas ecuaciones para $i = 6$, sacamos a_{63}, a_{64} y a_{65}.

8. De (4.77), usando los valores de b'_1, b'_3, b'_4, b'_5 y b'_6 sacamos b_1, b_3, b_4, b_5 y b_6.

9. Obtenemos los valores a_{i1} de $\sum_{ij} a_{ij} = \frac{c_i^2}{2}$

Los siguientes valores corresponden a un método RKN de sexto orden usando dos parámetros libres, los cuales son $\gamma = 0{,}0125$ y $a_{62} = 0{,}1$.

$c_1 = 0$

$c_2 = 0{,}2738612787525831$

$c_3 = 0{,}1886608940314241$

$c_4 = 0{,}6738586935043744$

$c_5 = 0{,}2566805968955829$

$c_6 = 0{,}9512307140517206$

$a_{11} = 0$

$a_{22} = 0{,}0125$

$a_{32} = -0{,}0045245367394127$

$a_{33} = 0{,}0125$

$a_{42} = 0{,}1489085855945041$

$a_{43} = 0{,}009512934089365918$

$a_{44} = 0{,}0125$

$a_{52} = -0{,}02068731943544002$

$a_{53} = 0{,}02693123126991072$

$a_{54} = 0{,}0002888468100561654$

$a_{55} = 0{,}0125$

$a_{62} = 0{,}1$

$a_{63} = -0{,}2952864321984637$

$a_{64} = 0{,}06718974733768617$

$a_{65} = 0{,}4465004730680855$

$a_{66} = 0{,}0125$

$b_1 = 0{,}07734510038470967$

$b_2 = 0$

$b_3 = 0$

$b_4 = 0{,}127804911906989$

$b_5 = 0{,}2878498605756483$

$b_6 = 0{,}007000147848943234$

$b'_1 = 0{,}07734510038470967$

$b'_2 = 0$

$b'_3 = 0$

$b'_4 = 0{,}3918696854561508$

$b'_5 = 0{,}3872492220349222$

$b'_6 = 0{,}1435359921242174$

Method	Stepsize	FCN	STEP	EMAX
RKN 6	0,5	160	10	$3{,}77691414 \cdot 10^{-3}$
RKN 4				$> 10^{-2}$
RKN 6	0,25	320	20	$9{,}4506899 \cdot 10^{-5}$
RKN 4		200	20	$7{,}6876863 \cdot 10^{-2}$
RKN 6	0,1	800	50	$4{,}6889523 \cdot 10^{-7}$
RKN 4		500	50	$1{,}839075 \cdot 10^{-3}$
RKN 6	0,05	1600	100	$7{,}593153 \cdot 10^{-9}$
RKN 4		1000	100	$1{,}15573229 \cdot 10^{-4}$
RKN 6	0,025	3200	200	$1{,}2000925 \cdot 10^{-10}$
RKN 4		2000	200	$7{,}2532044 \cdot 10^{-6}$
RKN 6	0,01	8000	500	$4{,}7826865 \cdot 10^{-13}$
RKN 4		5000	500	$1{,}86182912 \cdot 10^{-7}$
RKN 6	0,005	16000	1000	$8{,}83521635 \cdot 10^{-14}$
RKN 4		10000	1000	$1{,}164704247 \cdot 10^{-8}$

Cuadro 4.2: Resultados numéricos del ejemplo

Ejemplos numéricos

Vamos a hacer un ejercicio y comparar este método con un RKN de cuarto orden propuesto en [21]. En las tablas aparecerá el término FCN (número de funciones evaluadas), STEP (es el número de pasos) y EMAX (solución obtenida por éste método menos la solución real).

Ejemplo 38

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad 0 \leq x \leq 5$$

cuya solución es;

$$y(x) = \frac{1}{1+x}$$

En la tabla (4.2) nos muestra los resultados del método, y vemos que este nuevo método proporciona mucha más precisión que el método RKN4.

Capítulo 5

Estudio práctico de los métodos

En este capítulo vamos a ver como se comportan algunos de los métodos numéricos vistos anteriormente para una ecuación diferencial dada. Vamos a considerar el siguiente problema de valor inicial

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \tag{5.1}$$

evaluado entre $0 \leq x \leq 5$, y cuya solución exacta es la siguiente

$$y(x) = \frac{1}{1+x} \tag{5.2}$$

5.1. Método de Falkner explícito

Vamos a aplicar el método de Falkner explícito para el problema de valor inicial (5.1). Vemos que en la ecuación no aparece de forma explícita la y', pero para éste método no importaría, los resultados siguen siendo validos. Lo primero que hacemos escribir el problema y sus condiciones, especificando el número de etapas, que es $k = n + 1$.

```
g[t_, y_, yp_] := 2 y^3;
t0 = 0.;
yt0 = 1.;
ypt0 = -1.;
xfin = 5;
n = 4;
```

Ahora escribimos la solución del problema, la cual conocemos, y que nos servirá para hallar los errores que se comenten con el método numérico, y los coeficientes β_j y γ_j del mismo (obtenidos según vimos a partir de las correspondientes funciones generatrices)

```
solmath = {{y -> Function[{x}, 1/(x + 1)]}};
sol = solmath[[1, 1, 2]];
solp = D[sol[x], x] // Simplify;
bet[0] = 1/2;
bet[1] = 1/6; bet[2] = 1/8; bet[3] = 19/180;
bet[4] = 3/32; bet[5] = 863/10080; bet[6] = 275/3456;
bet[7] = 33953/453600; bet[8] = 8183/115200;
bet[9] = 3250433/47900160; bet[10] = 4671/71680;
bet[11] = 13695779093/217945728000; bet[12] = 2224234463/36578304000;
bet[13] = 132282840127/2241727488000; bet[14] = 2639651053/45984153600;

gam[0] = 1;
gam[1] = 1/2; gam[2] = 5 /12; gam[3] = 3 /8;
gam[4] = 251 /720; gam[5] = 95 /288; gam[6] = 19087 /60480;
gam[7] = 5257 /17280; gam[8] = 1070017 /3628800;
gam[9] = 25713 /89600; gam[10] = 26842253 /95800320;
gam[11] = 4777223 /17418240; gam[12] = 703604254357 /2615348736000;
gam[13] = 106364763817 /402361344000;
gam[14] = 1166309819657 /4483454976000;
```

Tomamos un número de pasos múltiplo de 250, con lo que el tamaño del paso será variable e igual a la longitud del intervalo de integración dividido entre el número de pasos.

```
Do[
 npasos = 250 kk;

 h = (xfin - t0)/npasos;
```

Y ahora obtenemos los valores de y_{n+1} y y'_{n+1};

```
 yn[0] = sol[t0];
 d[0] = g[t0, sol[t0], solp /. x -> t0];
 tiem1 =
  Timing[Do[{yn[i] = sol[t0 + i h], ypn[i] = solp /. x -> t0 + i h,
     d[i] = g[t0 + i h, yn[i], ypn[i]]}, {i, 1, n}];
   Do[Do[d[i] = d[i + 1] - d[i], {i, 0, n - k}], {k, 1, n}];
   listasol = {};

   t = t0 + n h;
```

```
  nit = IntegerPart[Abs[(xfin - t)/h]];
  Do[{s = bet[0] d[n]; sp = gam[0]*d[n];
    Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
    Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
    ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
    ypnn = ypn[n] + h*sp;
    t = t + h; p = g[t, ynn, ypnn];

     Do[{pp = p - d[j], d[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];

    yn[n] = ynn;
    ypn[n] = ypnn;
```

Ahora tabulamos los resultados;

```
listasol = Append[listasol, {t, yn[n], ypn[n]}];}, {ni, 1, nit}];];
 Print[npasos, tiem1,
  Max[Abs[solmath[[1, 1, 2]][listasol[[All, 1]]] -
     listasol[[All, 2]]]],
  Max[Abs[(solp /. x -> listasol[[All, 1]]) -
     listasol[[All, 3]]]]] , {kk, 1, 4}]
```

Obtenemos los siguientes resultados;

Pasos	Tiempo	Error y	Error y'
250	0,016	0,0000167698	$8{,}39095 \cdot 10^{-6}$
500	0,047	$6{,}44328 \cdot 10^{-7}$	$3{,}22352 \cdot 10^{-7}$
750	0,062	$9{,}10388 \cdot 10^{-8}$	$4{,}55443 \cdot 10^{-8}$
1000	0,078	$2{,}23846 \cdot 10^{-8}$	$1{,}11982 \cdot 10^{-8}$

Ahora dibujamos las gráficas de la solución, la derivada, y la trayectoria en el plano fase:

```
p1 = ListPlot[Transpose[{listasol[[All, 1]], listasol[[All, 2]]}],
  Joined -> True, PlotRange -> All]
```

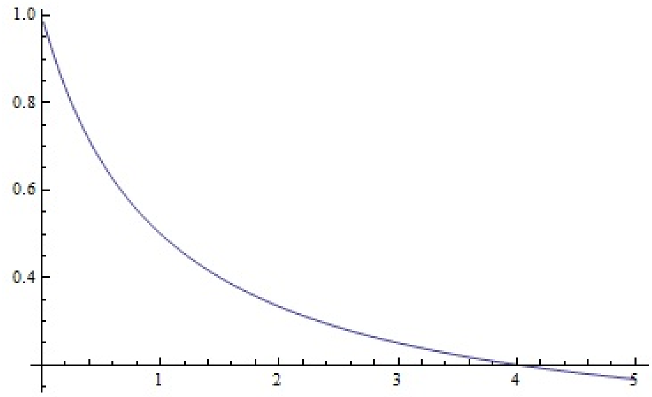

Figura 5.1: Gráfica P1

```
p2 = ListPlot[Transpose[{listasol[[All, 1]], listasol[[All, 3]]}],
  Joined -> True, PlotRange -> All]
```

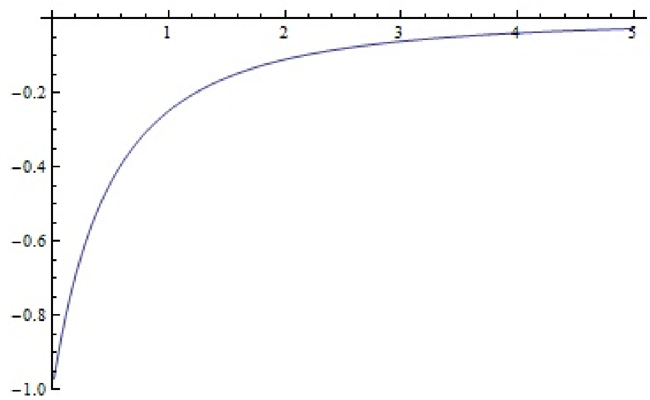

Figura 5.2: Gráfica P2

```
ListPlot[Transpose[{listasol[[All, 2]], listasol[[All, 3]]}],
 Joined -> True, PlotRange -> All]
```

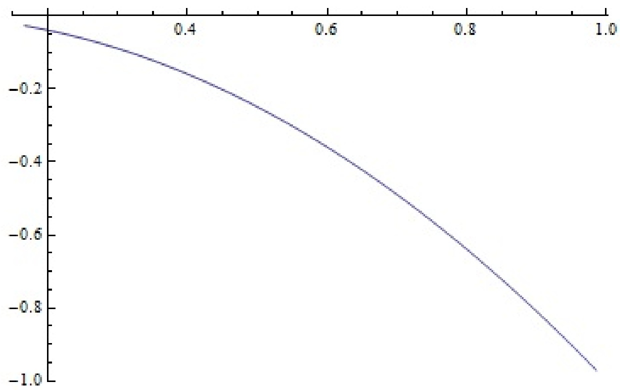

Figura 5.3: Gráfica P3

5.2. Variante del método de Falkner explícito

En este caso vamos a utilizar el método de Falkner explícito para obtener la y_{n+1} y el método de Falkner implícito para obtener la y'_{n+1}. Esperamos obtener con esta variante del método de Falkner explícito mayor precisión que con el método original.
Lo primero que hacemos escribir el problema y sus condiciones, especificando el número de etapas, que es $k = n + 1$.

```
g[t_, y_] := 2 y^3;
t0 = 0.;
yt0 = 1.;
ypt0 = -1.;
xfin = 5;
n = 4;
```

Ahora escribimos la solución de la función, la cual conocemos, y los coeficientes del método β_j y γ_j^* (nótese que estos últimos son los coeficientes de la fórmula implícita para la derivada):

```
solmath = {{y -> Function[{x}, 1/(x + 1)]}};
sol = solmath[[1, 1, 2]];
solp = D[sol[x], x] // Simplify;
bet[0] = 1/2;
bet[1] = 1/6; bet[2] = 1/8; bet[3] = 19/180;
bet[4] = 3/32; bet[5] = 863/10080; bet[6] = 275/3456;
bet[7] = 33953/453600; bet[8] = 8183/115200;
```

```
bet[9] = 3250433/47900160; bet[10] = 4671/71680;
bet[11] = 13695779093/217945728000; bet[12] = 2224234463/36578304000;
bet[13] = 132282840127/2241727488000; bet[14] = 2639651053/45984153600;


gamI[0] = 1;
gamI[1] = -(1/2); gamI[2] = -(1/12); gamI[3] = -(1/24);
gamI[4] = -(19/720); gamI[5] = -(3/160); gamI[6] = -(863/60480);
gamI[7] = -(275/24192); gamI[8] = -(33953/3628800);
gamI[9] = -(8183/1036800); gamI[10] = -(3250433/479001600);
gamI[11] = -(4671/788480); gamI[12] = -(13695779093/2615348736000);
gamI[13] = -(2224234463/475517952000);
gamI[14] = -(132282840127/31384184832000);
```

Tomamos igual que antes un número de pasos múltiplo de 250:

```
Do[
 npasos = 250 kk;

 h = (xfin - t0)/npasos;
```

Y ahora obtenemos los valores de y_{n+1} y y'_{n+1};

```
yn[0] = sol[t0];
d[0] = g[t0, sol[t0]];
tiem1 = Timing[
  Do[{yn[i] = sol[t0 + i h], d[i] = g[t0 + i h, yn[i]]}, {i, 1, n}];
  Do[Do[d[i] = d[i + 1] - d[i], {i, 0, n - k}], {k, 1, n}];
  listasol = {};

  t = t0 + n h;
  ypn[n] = solp /. x -> t;
  nit = IntegerPart[Abs[(xfin - t)/h]];
  Do[{s = bet[0] d[n]; Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
    ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
    t = t + h; p = g[t, ynn];

     Do[{pp = p - d[j], d[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
    spI = gamI[0]*d[n]; Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
    spI = spI + p*gamI[n + 1];
    ypnn = ypn[n] + h*spI;
```

```
    yn[n] = ynn;
    ypn[n] = ypnn;
```

Ahora tabulamos los resultados;

```
listasol = Append[listasol, {t, yn[n], ypn[n]}];}, {ni, 1, nit}];];
 Print[npasos, tiem1,
  Max[Abs[solmath[[1, 1, 2]][listasol[[All, 1]]] -
     listasol[[All, 2]]]],
  Max[Abs[(solp /. x -> listasol[[All, 1]]) -
     listasol[[All, 3]]]]] , {kk, 1, 4}]
```

Obtenemos los siguientes resultados;

Pasos	Tiempo	Error y	Error y'
250	0,016	$2{,}41735 \cdot 10^{-7}$	$1{,}2083 \cdot 10^{-6}$
500	0,032	$4{,}82460 \cdot 10^{-9}$	$2{,}41168 \cdot 10^{-9}$
750	0,078	$4{,}60397 \cdot 10^{-10}$	$2{,}30141 \cdot 10^{-10}$
1000	0,093	$8{,}54929 \cdot 10^{-11}$	$4{,}27383 \cdot 10^{-11}$

Ahora dibujamos las gráficas;

```
p1 = ListPlot[Transpose[{listasol[[All, 1]], listasol[[All, 2]]}],
  Joined -> True, PlotRange -> All]
```

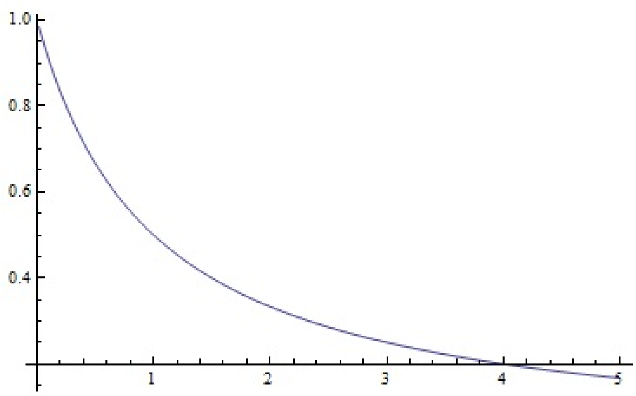

Figura 5.4: Gráfica P1

```
p2 = ListPlot[Transpose[{listasol[[All, 1]], listasol[[All, 3]]}],
  Joined -> True, PlotRange -> All]
```

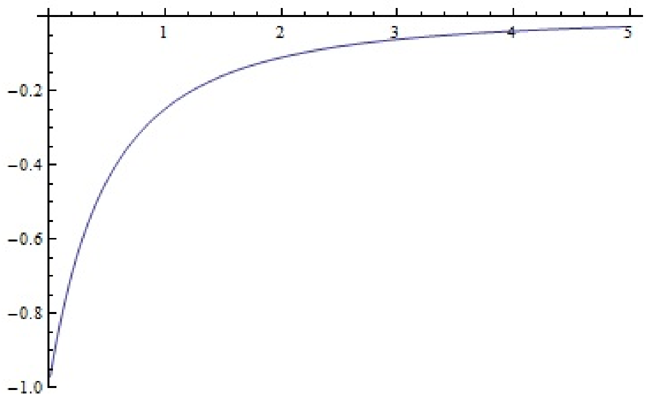

Figura 5.5: Gráfica P2

```
ListPlot[Transpose[{listasol[[All, 2]], listasol[[All, 3]]}],
 Joined -> True, PlotRange -> All]
```

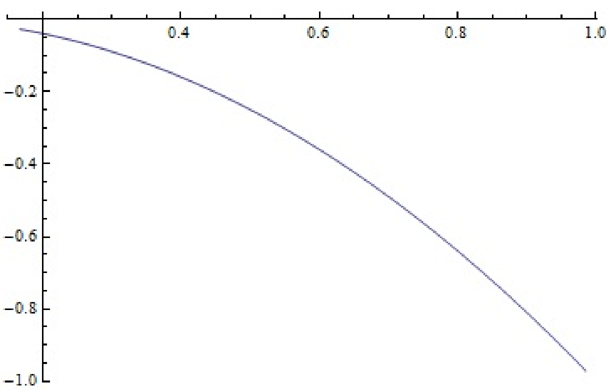

Figura 5.6: Gráfica P3

5.3. Método de Runge-Kutta-Nyström explícito usando coeficientes clásicos

Lo primero que hacemos escribir el problema y sus condiciones;

```
f[x_, y_, y1_] = 2 y^3;
x[0] = 0;
```

```
y[0] = 1;
y1[0] = -1;
xfin = 5;
```

Ponemos 500 pasos, con lo que el tamaño del paso, será;

```
h = 0.01;
k = IntegerPart[(xfin - x[0])/h]
500
s = 4;
```

Escribimos los coeficientes del método como aparecen en [19]

```
Do[x[n] = x[n - 1] + h, {n, k}];
a = {{0, 0, 0, 0}, {1/8, 0, 0, 0}, {1/8, 0, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0}};
a1 = {{0, 0, 0, 0}, {1/2, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}};
b = {1/6, 1/6, 1/6, 0};
b1 = {1/6, 1/3, 1/3, 1/6};
c = {0, 1/2, 1/2, 1};
```

Ahora resolvemos;

```
tiem = Timing[Do[{
     Do[{
       Y[j] = y[n - 1] + c[[j]] h y1[n - 1] + (h^2) \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(j - 1\)]\((\
            a[\([\)\(j, i\)\(]\)] f[x[n - 1] + c[\([\)\(i\)\(]\)] h,
              Y[i], Y1[i]]\ )\)\),
       Y1[j] = y1[n - 1] + h \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(i = 1\), \(j -
             1\)]\((a1[\([\)\(j, i\)\(]\)] f[
              x[n - 1] + c[\([\)\(i\)\(]\)] h, Y[i], Y1[i]])\)\)
       }, {j, s}],
     y[n] = y[n - 1] + h y1[n - 1] + (h^2) \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j =
           1\), \(s\)]\((b[\([\)\(j\)\(]\)] f[
            x[n - 1] + c[\([\)\(j\)\(]\)] h, Y[j]\ , Y1[j]])\)\),
      y1[n] = y1[n - 1] + h \!\(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(j =
           1\), \(s\)]\((b1[\([\)\(j\)\(]\)] f[
            x[n - 1] + c[\([\)\(j\)\(]\)] h, Y[j], Y1[j]])\)\)}
     , {n, k}];]
     {0.313, Null}
```

Ahora tabulamos los resultados;

```
w = Table[{x[n - 1], y[n - 1], N[1/(x[n - 1] + 1)],
    N[1/(x[n - 1] + 1)] - (y[n - 1])}, {n, k + 1}];
TableForm[w, TableHeadings ->
   {None, {"x", "y", "1/(x+1)", "Error"}}]
```

Obtendríamos los siguientes resultados;

Pasos	Tiempo	Error y	Error y'
250	0,062	$1{,}57882 \cdot 10^{-6}$	$7{,}8935 \cdot 10^{-7}$
500	0,110	$9{,}88624 \cdot 10^{-8}$	$4{,}94273 \cdot 10^{-8}$
750	0,172	$1{,}94737 \cdot 10^{-8}$	$9{,}74965 \cdot 10^{-9}$
1000	0,250	$6{,}18372 \cdot 10^{-9}$	$3{,}09162 \cdot 10^{-9}$

Ahora dibujamos las gráficas; la primera corresponde a la solución numérica, la segunda la solución exacta, y la tercera una comparación de las dos anteriores superponiéndolas.

```
g1 = ListPlot[Transpose[{w[[All, 1]], w[[All, 2]]}],
  PlotStyle -> {PointSize[0.005], RGBColor[1, 0, 0]}]
```

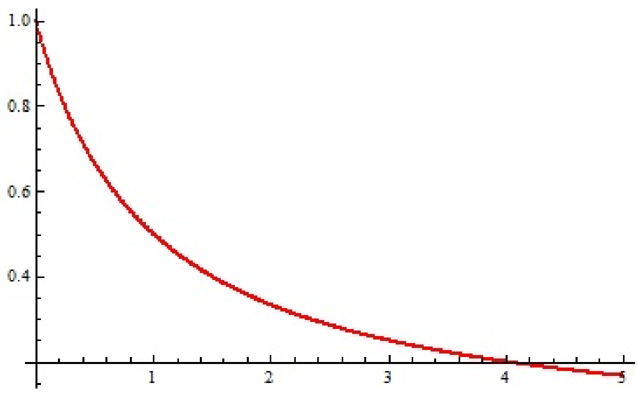

Figura 5.7: Gráfica G1

```
g2 = Plot[1/(x + 1), {x, 0, 1}]
```

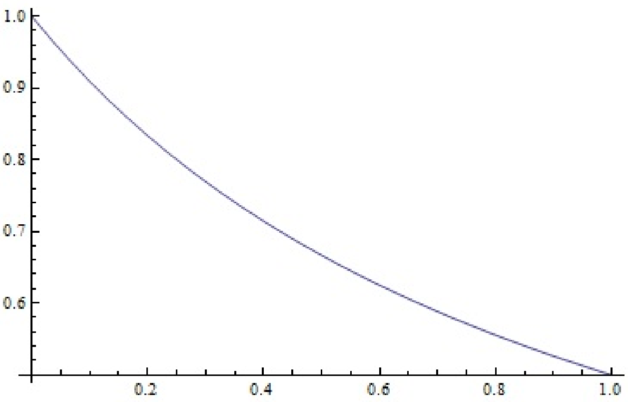

Figura 5.8: Gráfica G2

```
Show[g1, g2]
```

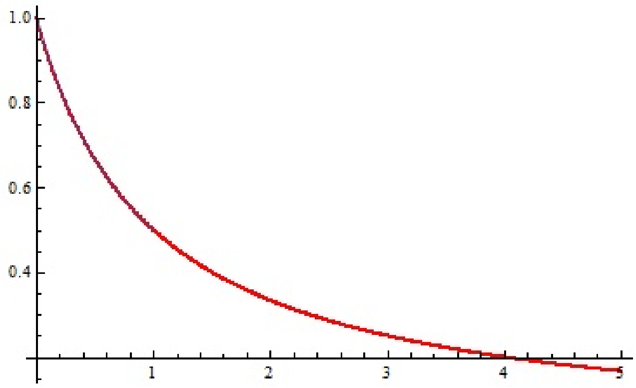

Figura 5.9: Comparación G1-G2

5.4. Método de Stormer-Cowell implícito

Vamos a escribir el problema y sus condiciones;

```
f[t_, y_] := 2 y^3;
t0 = 0.;
yt0 = 1.;
ypt0 = -1;
xfin = 5 ;
```

Ponemos la solución exacta de la ecuación, que es

```
solmath = {{y -> Function[{x}, 1/(1 + x)]}};
sol = solmath[[1, 1, 2]]; solp = D[sol[x], x]
```

con

```
n = 4;
```

Ahora ponemos los coeficientes σ_j, σ_j^* y γ_j^*;

```
sig[0] = 1;
sig[1] = 0; sig[2] = 1/12; sig[3] = 1/12;
sig[4] = 19/240; sig[5] = 3/40; sig[6] = 863/12096;
sig[7] = 275/4032; sig[8] = 33953/518400; sig[9] = 8183/129600;
sig[10] = 3250433/53222400; sig[11] = 4671/78848;
sig[12] = 13695779093/237758976000;
sig[13] = 2224234463/39626496000; sig[14] = 132282840127/2414168064000;


sigI[0] = 1;
sigI[1] = -1; sigI[2] = 1/12; sigI[3] = 0;
sigI[4] = -(1/240); sigI[5] = -(1/240); sigI[6] = -(221/60480);
sigI[7] = -(19/6048);
sigI[8] = -(9829/3628800); sigI[9] = -(407/172800);
sigI[10] = -(330157/159667200); sigI[11] = -(24377/13305600);
sigI[12] = -(4281164477/2615348736000);
sigI[13] = -(70074463/47551795200);
sigI[14] = -(1197622087/896690995200);


gamI[0] = 1;
gamI[1] = -(1/2); gamI[2] = -(1/12); gamI[3] = -(1/24);
gamI[4] = -(19/720); gamI[5] = -(3/160); gamI[6] = -(863/60480);
gamI[7] = -(275/24192); gamI[8] = -(33953/3628800);
gamI[9] = -(8183/1036800); gamI[10] = -(3250433/479001600);
gamI[11] = -(4671/788480); gamI[12] = -(13695779093/2615348736000);
gamI[13] = -(2224234463/475517952000);
gamI[14] = -(132282840127/31384184832000);
```

Tomamos igual que antes un número de pasos múltiplo de 250

```
Do[
```

```
 npasos = 250 kk;
 h = (xfin - t0)/npasos;
```

Y ahora obtenemos los valores aproximados de y y de y';

```
SetPrecision[
  yn[0] = sol[t0];
  dd[0] = d[0] = f[t0, yn[0]];
  Do[{yn[i] = sol[t0 + i h], dd[i] = d[i] = f[t0 + i h, yn[i]]}, {i,
    1, n}];
  Do[Do[dd[i] = d[i] = d[i + 1] - d[i], {i, 0, n - k}], {k, 1, n}];

  listasol =
   Table[{t0 + i h, yn[i], (solp /. x -> t0 + i h)}, {i, 0, n}];
  t = t0 + n h;
  ypn[n] = solp /. x -> t;
  nit = IntegerPart[Abs[(xfin - t)/h]];, 20];

tiem = Timing[Do[SetPrecision[
    s = sig[0] dd[n]; Do[s = s + dd[n - i] sig[i], {i, 1, n}];
    ynn = 2 yn[n] - yn[n - 1] + s*h^2;
    t = t + h; p = f[t, ynn];


     Do[{pp = p - d[j], d[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];

    sI = sigI[0]*d[n]; Do[sI = sI + d[n - i]*sigI[i], {i, 1, n}];
    sI = sI + p*sigI[n + 1];
    ynn = 2 yn[n] - yn[n - 1] + sI*h^2;

    sp = gamI[0]*d[n]; Do[sp = sp + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
    sp = sp + p*gamI[n + 1];
    ypn[n] = ypn[n] + h*sp;

    p = f[t, ynn];
    Do[{pp = p - dd[j], d[j] = dd[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];


    yn[n - 1] = yn[n];
    yn[n] = ynn;
```

Tabulamos;

```
istasol = Append[listasol, {t, yn[n], ypn[n]}];, 20], {ni, 1, nit}];];
 Print[npasos, "   ", tiem[[1]], "   ", l h, "   ",
  Max[Abs[solmath[[1, 1, 2]][listasol[[All, 1]]] -
     listasol[[All, 2]]]], "   ",
  Max[Abs[(solp /. x -> listasol[[All, 1]]) -
     listasol[[All, 3]]]]] , {kk, 1, 4}]
```

Obtenemos los siguientes resultados;

Pasos	Tiempo	Error y	Error y'
250	0,046	$2{,}52601 \cdot 10^{-8}$	$1{,}50987 \cdot 10^{-8}$
500	0,078	$4{,}99937 \cdot 10^{-10}$	$2{,}95338 \cdot 10^{-10}$
750	0,110	$4{,}84946 \cdot 10^{-11}$	$2{,}83885 \cdot 10^{-11}$
1000	0,187	$3{,}09047 \cdot 10^{-12}$	$2{,}44823 \cdot 10^{-12}$

Dibujamos la gráficas de los errores de la solución y su derivada en escala logarítmica

```
ListLogPlot[Transpose[{listasol[[All, 1]], erry}], Joined -> True]
```

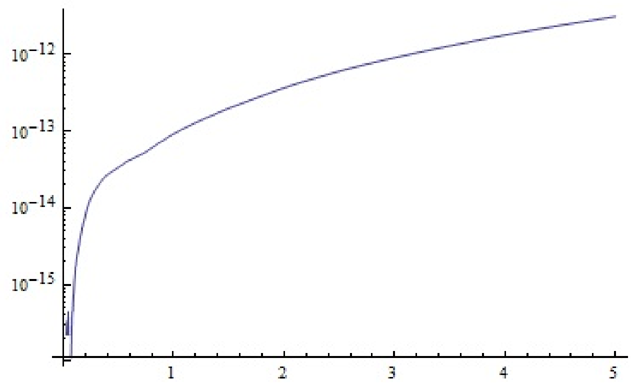

Figura 5.10: Error en y

```
ListLogPlot[Transpose[{listasol[[All, 1]], erryp}], Joined -> True]
```

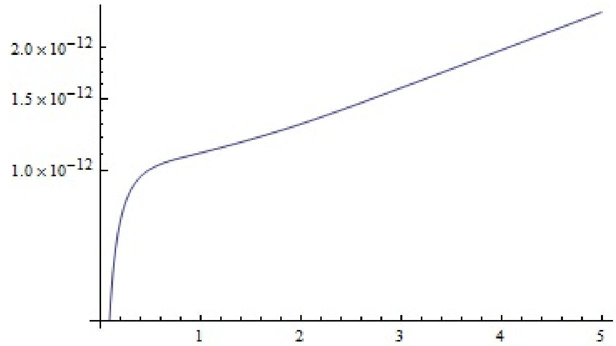

Figura 5.11: Error en y'

5.5. Conclusiones

Vamos a tabular los resultados de estos métodos para 500 pasos;

Metodo	Tiempo	Error y	Error y'
Falkner explícito	0,047	$6{,}44328 \cdot 10^{-7}$	$3{,}22352 \cdot 10^{-7}$
Variante Falkner	0,032	$4{,}82460 \cdot 10^{-9}$	$2{,}41168 \cdot 10^{-9}$
RKN explícito	0,110	$9{,}88624 \cdot 10^{-8}$	$4{,}94273 \cdot 10^{-8}$
Stormer-Cowell implícito	0,078	$4{,}99937 \cdot 10^{-10}$	$2{,}95338 \cdot 10^{-10}$

Vemos que el mejor método desde el punto de vista de la disminución del error es el Stömer-Cowell, aunque el tiempo que tarda en realizar los cálculos es mayor que cualquiera de los métodos de Falkner. En el caso de la variante del método de Falkner, consigue menores errores con menor tiempo de cálculo respecto al método de Falkner explícito. La elección entre los dos métodos de Falkner está clara; es mucho mejor la variante de Falkner, vemos que la utilización de la fórmula implícita para calcular la y' aporta más precisión en este método explícito.
En el caso del método de RNK explícito el orden del error es 10^{-8}, con lo que tanto el de Stormer-Cowell implícito y la variante de Falkner explícita son mejores.
La duda la tenemos entre estos dos, para la elección de uno u otro tendríamos que considerar;

- Si queremos que el tiempo computacional sea lo más bajo posible, debemos elegir la variante del método de Falkner, consigue errores del orden de 10^{-9} con menor gasto de tiempo que el método de Stormer-Cowell.

- Si queremos más precisión y el tiempo de cálculo no es relevante, debemos usar el método de Stormer-Cowell, ya que consigue valores del error del orden de 10^{-10}.

Bibliografía

[1] Álvaro Tejero Cantero, Pablo Ruiz Múzquiz, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, libro abierto / serie matemágicas (2003)

[2] Dennis G.Zill, Michael R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems 7ed*, Brooks/Cole

[3] Kiseliov, Krasnov, Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Mir (1984)

[4] Eduardo Espinoza Ramos, *Ecuaciones diferenciales*, Lima-Perú (1996)

[5] Martin Braun, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo editorial Iberoamérica (1990)

[6] Boyce di Prima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley

[7] Paul Balchard, *Ecuaciones diferenciales*, Thomson Editores (1998)

[8] Murray R Spiegel, *Schaum's Outline Of Theory And Problems Of Fourier Analysis With Applications To Boundary Value Problems*, McGraw-Hill (1974)

[9] Emanuele Schiavi y Ana Isabel Muñoz, *Apuntes de métodos numéricos para la resolución de Problemas de Valor inicial.*, UPM

[10] G B Thomas, M D Weir, J Hass, F R Giordano, *Calculus*,

[11] J. Undurraga L. y R. Venegas C., *Introducción a la Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales*,

[12] Gerahd Kristensson, *Second Order Differential Equations - Special Functions and Their Classification*, Springer (2010)

[13] José Ventura Becerril Espinosa, David Elizarraz Martínez, *Ecuaciones diferenciales, técnicas de solución y aplicaciones*, Azcapotzalco (2004)

[14] L.Esgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional*, Mir (1969)

[15] Murray Spiegel, *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Prentice Hall. (1983)

[16] Amelia García Garrosa, *Métodos numéricos tipo RKN para la integración eficiente de problemad oscilatorios*, Tésis Doctoral (2001)

[17] M. M. Chawla and S. R. Sharma, *Families of Three-stage third order Runge-Kutta-Nyström methods for explicit problem*, Australian Mathematical Society (1980)

[18] Fudziah Ismail, *Sixth Order Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta Nystrom Method with Explicit First Stage for Solving Second Order Ordinary Differential Equations*, European Journal of Scientific Research

[19] L. Collatz, *The numerical treatment of differential equations*, Springer-Verlag Berlin 1960, p. 537

[20] Dormand, J. R. El-Mikkawy M. E. A and Prince P. J., *Families of Runge-Kutta-Nystrom Formulae*, IMA Journal of Numerical Analysis 7 1987, p. 235-250

[21] Sharp. P.W and Fine. J. M., *Some Nystrom pairs for the general second-order initialvalue problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics 42 1992, p. 279-291