ISSN: 0214-3402

# RUPTURAS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

## *Breaks in the understanding of the concept of limit in High School students*

Sonsoles BLÁZQUEZ y Tomás ORTEGA.
*Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Universidad de Valladolid*

RESUMEN: Se presenta una investigación sobre la comprensión del concepto de límite funcional por alumnos de 2.° curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (MACS), analizando los datos recogidos en dos entrevistas semiestructuradas a sendas parejas de estudiantes. Las entrevistas versan sobre las tareas realizadas por los alumnos en la última fase de la Investigación-Acción (I-A) y son analizadas a la luz del modelo de comprensión conceptual de Sierpinska. Se transcriben algunas de las respuestas que corroboran las aserciones. Se concluye enunciando los actos de comprensión, cuya observación en el aula mejorará la didáctica del concepto de límite.

*Palabras clave*: actos de comprensión, límite, bachillerato.

ABSTRACT: In this paper we present an investigation of the understanding of limit functional concept for pupils in second course of Mathematics Applied to Social Science. Two half-structured interviews were made to two couples of pupils and all data were analysed. The two interviews deal with the tasks made by the students in the last stage of Action-Research and they have been analysed with Sierpinska's model of conceptual understanding. In order to corroborate the assertions, some answers of the pupils are expounded here. The paper finishes with the understanding actions, whose application will improve the didactics of limit concept in the classroom.

*Key words*: understanding actions, limit, High School.

### INTRODUCCIÓN

El presente trabajo forma parte de uno mucho más amplio en el que se investiga la didáctica del concepto del límite funcional para alumnos de segundo curso de MACS.

En este trabajo (Blázquez, 1999) se hace un amplio estudio de las investigaciones llevadas a cabo anteriormente (Tall, Vinner, Cornú, Artigue, Williams, Robinet, Sánchez, Sierra y cols., Sierpinska, Espinoza, etc.). En esta investigación se considera un marco teórico muy amplio, que, entre otros, contempla al pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991), a la teoría de *la imagen conceptual y la definición conceptual* de D. Tall y S. Vinner (Tall y Vinner, 1981 y Vinner, 1991) y al modelo de comprensión de Sierpinska. La investigación se desarrolla en el marco de I-A, completando tres ciclos experimentales durante los cursos 1994-95, 1995-96 y 1996-97, y un estudio de casos mediante dos entrevistas semiestructuradas a dos parejas de alumnos. En ella se establece una nueva conceptualización de límite funcional, como la aproximación óptima, más apropiada para los alumnos de MACS, y en torno a ella se desarrolla todo el trabajo. En el trabajo que presentamos aquí, que es un análisis de los actos de comprensión de Sierpinska a través de esas entrevistas, se presenta un resumen del modelo, se comenta el diseño de las entrevistas, su desarrollo, el análisis y las conclusiones.

## El modelo de compresión de Sierpinska

Sierpinska se plantea, en uno de sus artículos sobre obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite (Sierpinska, 1990), el significado del concepto de comprensión. La investigadora se basa en el trabajo de algunos autores para proponer la comprensión como un acto que está inmerso en un proceso de interpretación, y que se desarrolla en forma de dialéctica entre conjeturas cada vez más elaboradas, similar, desde el punto de vista de Sierpinska, a lo que Lakatos propone en sus *Pruebas y refutaciones*, o Ricoeur cuando explica el proceso de validación de una conjetura. Hay que señalar que la comprensión así entendida es coherente con lo que Tall llamaba el ciclo de actividad del pensamiento matemático avanzado o con la forma que tiene Brousseau de concebir el conocimiento como interacción dialéctica entre el individuo y el medio. Sierpinska señala también que la comprensión trae consigo un nuevo modo de conocimiento, así que se puede clasificar ésta en función del conocimiento que produce, y propone cuatro categorías de actos de comprensión:

*Identificación*: Este acto consiste en una percepción repentina de objetos que pertenecen a la denotación del concepto (relacionados con el concepto en cuestión) o a la identificación de un término como poseedor de un status científico.

*Discriminación*: Diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que se confundían antes.

*Generalización*: Consiste en darse cuenta de que algunas condiciones no son esenciales o de la posibilidad de extender el rango de aplicaciones.7

*Síntesis*: Consiste en adquirir relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

Para Sierpinska la comprensión y los obstáculos son dos caras de la misma moneda, una es la parte negativa, los obstáculos, puesto que presta atención a lo que es erróneo, mientras que la otra, la comprensión, es la parte positiva puesto que busca nuevas formas de conocimiento. Algunos actos de comprensión son actos de superación de obstáculos y otros se convierten en actos de adquisición de nuevos obstáculos. Para ella una descripción de actos de comprensión de un concepto matemático debería completarse con una lista de obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto, aportando así más información sobre su significado.

Teniendo en cuenta lo anterior, Sierpinska describe un método que permite hacer un estudio epistemológico de conceptos matemáticos. El método parte de que es el sentido, junto con su referencia, el que da significado a una palabra (el sentido es lo que dice la frase y la referencia sobre lo que trata la frase). Así, para analizar un concepto se comienza por una definición informal del mismo, se buscan frases donde las palabras que intervienen en la definición tengan el sentido utilizado, y se busca la relación entre los sentidos y las referencias. Esto lleva a la descripción del significado del concepto. En el mismo artículo, se muestra la aplicación del método anterior para hacer una clasificación de los actos de comprensión y los correspondientes obstáculos que se deben superar en el concepto de límite de una sucesión (ver antecedentes).

*Nuestra hipótesis de trabajo es que la noción de límite lleva consigo graves dificultades de comprensión, rupturas, sea cual sea la presentación que se haga, y que conocer dichas dificultades, junto con las creencias que los alumnos tienen sobre el límite, es una herramienta eficaz para su enseñanza.*

## ENTREVISTAS

Cuando se elaboró el guión de las entrevistas sobre los trabajos de los alumnos en torno a la secuencia didáctica, ya se habían completado los tres ciclos de I-A y se disponía de abundante material escrito por los alumnos. Esas tareas, que tenían como objetivo el aprendizaje del concepto de límite, fueron analizadas siguiendo la terminología de los actos de comprensión de Sierpinska (1990), y se localizaron los pasos clave en dicho aprendizaje. A continuación se reproducen las tareas y los actos de comprensión asociados a cada una de ellas:

*Tarea 1.* Un conductor observa cada cierto tiempo los km que lleva recorridos y anota lo siguiente:

| Hora (h) | 9:00 | 9:15 | 9:45 | 9:57 |
|---|---|---|---|---|
| Kilómetros | 291,59 | 308,02 | 342,22 | 356,41 |

A las 10:00 llega a un pueblo a 360 km del punto de partida. ¿Qué velocidad llevaba? La siguiente tabla te ayudará a resolver el problema. Complétala:

| h (horas) | Tiempo transcurrido entre h y 10:00 (en minutos) | Espacio recorrido entre h y 10:00 | Velocidad media entre h y 10:00 (en km/h) |
|---|---|---|---|
| | | | |

¿A qué valor se aproximan las velocidades medias cuando el intervalo de tiempo se hace cada vez menor? ¿Qué velocidad llevaba el conductor a las 10:00 h? ¿Por qué?

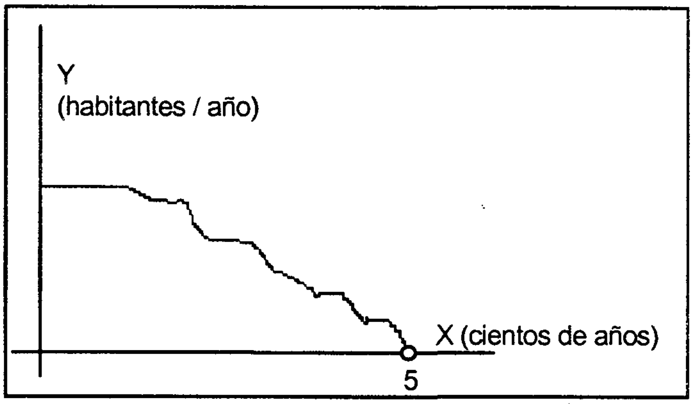
*Actos de Comprensión*: Identificación de la velocidad media como velocidad constante en un intervalo de tiempo, discriminación entre velocidad media y velocidad constante, identificación de la aproximación numérica, síntesis de aproximación y velocidad media, generalización del concepto de velocidad media a velocidad instantánea.

*Tarea 2.* El crecimiento de la población de tres países A, B y C viene dado por las siguientes funciones:

| $x$ (cientos de años) | 4 | 4,9 | 4,99 | 4,9999 | 4,9999 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (miles de habitantes por año) | 10,7846 | 10,7613 | 10,7621 | 10,76203 | 10,7620002 |

Tabla del país A, gráfica del país B y fórmula del país C (x en cientos de años, y en miles de habitantes por año).

$$y = \frac{10 - 2\sqrt{5x}}{5 - x}$$




Vamos a estudiar lo que ocurre en cada país al cabo de 500 años: ¿A qué valor se aproxima el crecimiento en cada país? Comprueba que las imágenes de la función son aproximaciones cada vez mejores del valor anterior, calculando el error de la aproximación. Deduce qué es lo que ocurre al cabo de 500 años en cada país.

*Actos de Comprensión*: Identificación de la aproximación numérica, gráfica y algebraica; identificación del error en el caso numérico, gráfico y algebraico; síntesis de aproximación y menor error; identificación de aproximación «cada vez mejor»; generalización a límite como aproximación óptima.

*Tarea 3.* Observa la tabla siguiente y contesta a las preguntas:

| | 0,87 | 1,02 | 1,005 | 0,9997 | 1,0001 | 0,999995 | 1,0000002 | 0,999999996 | 1,00000000341 | 1,000000000007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3,59 | 2,41 | 2,7 | 3,01 | 3,0025 | 2,9994 | 3,0001 | 2,999995 | 2,9999999998 | 3,000000000001 |

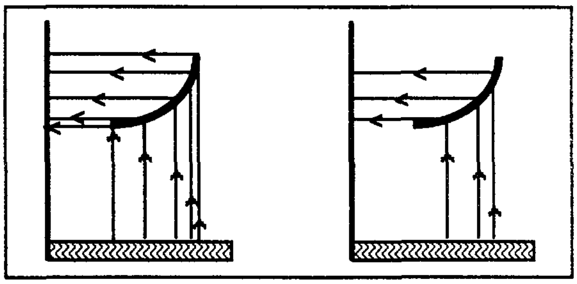
— ¿A qué número $A$ se aproxima $x$? (Calcula los errores) ..............................
— ¿ A qué número $L$ se aproximan sus imágenes f($x$)? ..................................
— Busca una aproximación de $L$ ..........................................................
— Calcula el error que se comete con dicha aproximación ................................
— Busca en la tabla valores de $x$ cuyas imágenes mejoren la aproximación anterior ............................

.........................................................................................................................................

— Busca un entorno de $A$ donde se encuentren los valores anteriores ..................
— Repite el proceso con distintas aproximaciones de $L$ hasta que encuentres el entorno correpondiente.

*Actos de Comprensión*: Identificación de la aproximación numérica de valores de $x$ y de $y$; identificación de la aproximación y el error; síntesis de aproximación y error; mejorar la aproximación; identificación de valores de f(x) que mejoran la aproximación y discriminación de valores de $x$ cuyas imágenes mejoran la aproximación; identificación de entorno reducido de un número; síntesis de entorno del número al que se aproximan los valores de $x$; síntesis de entorno de valores cuya imagen mejora la aproximación; síntesis de aproximación y entorno de valores cuya imagen mejora la aproximación; generalización a límite como valor cuyas aproximaciones se pueden mejorar con imágenes de un entorno.

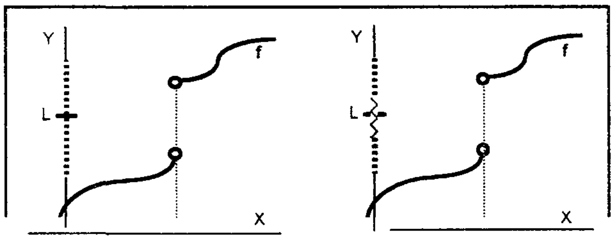
*Tarea 4.* Podemos ver una función como la lente que proyecta lo que está sobre una mesa (el eje X) sobre la pared (el eje Y). Así, existe una zona donde se puede situar la hoja para que se proyecte en una región determinada, y todo lo que no se encuentra en esa zona no se proyecta (ver figura).

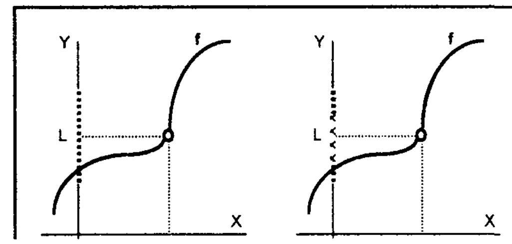


*Observa la función f de las dos figuras, que no está definida en el punto a —la función es la misma en las dos figuras, así como los puntos a y L—.*

Busca un entorno de $a$ que se proyecte dentro de la zona punteada del eje $Y$ de la primera figura. Pinta del mismo color el entorno y la zona. Repite el procedimiento anterior con la zona de cruces de la segunda figura. ¿Qué puntos se proyectan ahora? El conjunto de tales puntos, ¿es menor o mayor que el anterior? ¿Podrías repetir el procedimiento con cualquier zona que incluya a $L$?

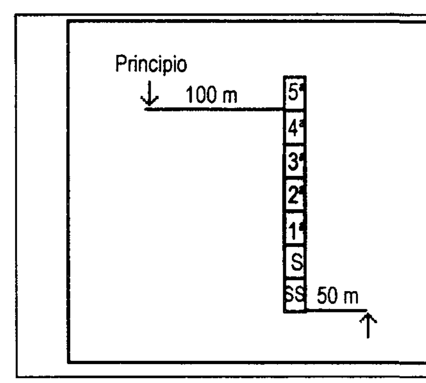
Haz lo mismo para la siguiente función:




*Actos de Comprensión*: Identificación de la gráfica de una función y el espejo de un retroproyector; síntesis de la gráfica de una función como medio de proyectar valores del eje X en el eje Y; discriminación de la gráfica de una misma función en dos figuras diferentes; identificación de un entorno de *L*: búsqueda de un entorno de *a* que se proyecta dentro del entorno de *L*; síntesis de la relación entre los entornos de *L* y de *a*; generalización a límite como punto del eje Y tal que a cada entorno le corresponde uno de *a* que se proyecta dentro.

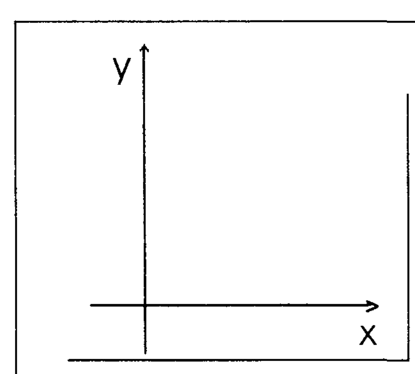
*Tarea 5.* En unos grandes almacenes nos encontramos a 100 m del ascensor en la 5.ª planta. Deseamos bajar al segundo sótano a 50 m del ascensor en sentido contrario. Vamos a describir la relación que existe entre la altura a la que nos encontramos, y, y la situación horizontal, x, considerando como origen la situación inicial en la 5.ª planta (indicación: la distancia entre plantas es de 5 m).




Construye una tabla de valores de la función que se surge de la situación anterior:

| | |
|---|---|
| x (metros en horizontal) | |
| y (metros en vertical) | |

— ¿Qué ocurre cuando x=100?
— Construye la gráfica de la función y deduce la expresión algebraica de la misma.
— ¿Tiene límite la función en x=100? ¿Por qué? Ilustra tu razonamiento de todas las formas posibles (gráfica, algebraica, numérica).
— Utilizando un razonamiento similar al anterior justifica si una función puede tener o no límites distintos en el mismo punto.

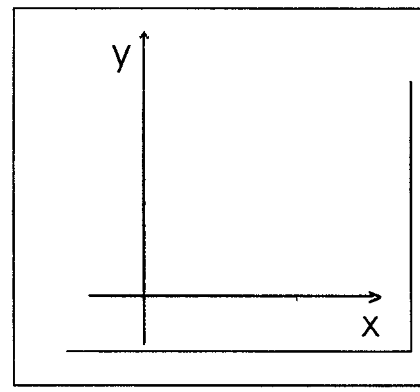


*Actos de Comprensión:* Identificación de la aproximación de forma algebraica; identificación del error de la aproximación de forma algebraica; identificación de la cota de error; discriminación entre valores de *f(x)* y valores del error *e(x)*; síntesis de entorno de valores de *x* tales que el error correspondiente es menor que la cota; identificación de la relación entre la cota y el entorno; generalización al límite como valor tal que cualquier aproximación se puede mejorar con las imágenes de un entorno del punto.

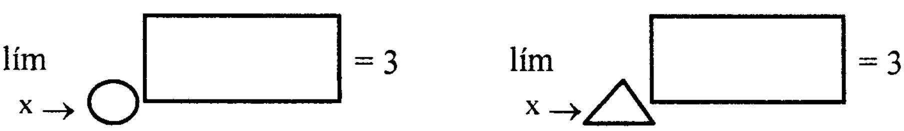
*Tarea 6.* Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en x=2:

f(x)= g(x)=

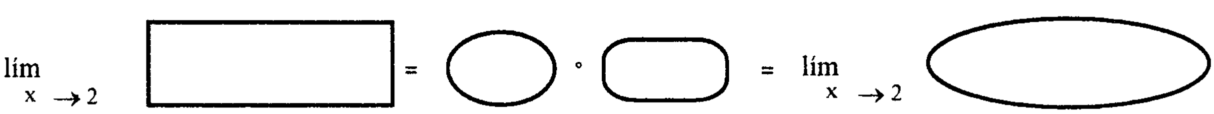
Dibuja dos funciones distintas que tengan el mismo límite en x=2.



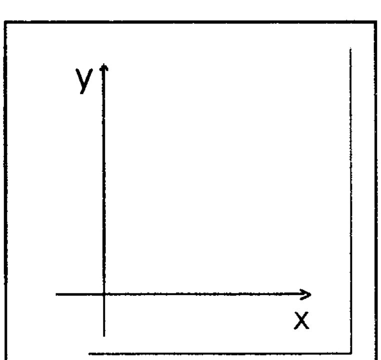

Escribe una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes:

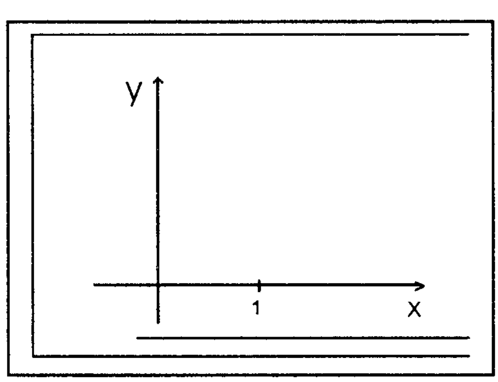


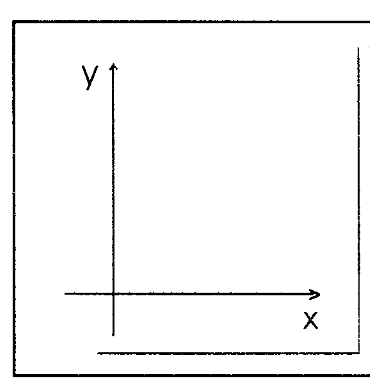

Escribe dos funciones que en x=-2 tengan distinto límite:




Dibuja una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes.
Dibuja dos funciones que en x=-2 tengan distinto límite.
¿Puede tener dos límites distintos una función en un mismo punto? Razona la respuesta.
Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en x=1, f(x)=
Dibuja la gráfica de una función que no tenga límite en x=1.
Elabora una tabla de valores de una función que no tenga límite en x=1.



*Actos de Comprensión:* Identificación de las variables de la función; identificación de la relación entre las variables de forma numérica; discriminación del valor en *a*; generalización a la relación entre las variables de forma gráfica; generalización a la relación entre las variables de forma algebraica; identificación del concepto de límite de forma numérica, gráfica y algebraica; determinación de la existencia del límite en *a* como síntesis; justificación de la unicidad del límite.

DESARROLLO DE LAS ENTREVISTAS, RECOGIDA DE DATOS Y ANÁLISIS

Las consideraciones anteriores permitieron escribir un guión previo, que se probó con un colaborador externo con el fin de controlar su duración y de detectar posibles pautas poco apropiadas. Con ello se elaboró el guión definitivo, y las entrevistas se realizaron a finales de curso, cuando ya había pasado un trimestre desde el desarrollo de la secuencia, lo que permitió hacer un análisis de la evolución de las ideas de los alumnos con el paso del tiempo. Para que éstos recordaran lo que habían hecho, debieron revisar sus tareas antes de cada sesión. Ambas entrevistas duraron algo más de 5 horas, siendo la segunda un poco más larga. Se grabaron íntegramente en audio.

Los alumnos se escogieron en función de dos criterios básicos: el primero, que hubieran trabajado por sí mismos las tareas; y, el segundo, que en dichas tareas se detectasen errores y que dichos errores fueran la manifestación de una serie de dificultades para la comprensión del concepto. Se optó por hacer las entrevistas por parejas, en vez de individuales, pensando así en provocar mejor la discusión entre los alumnos, de manera que pudieran explicitar sus concepciones más claramente y que sirviera como triangularización de datos, amén de que se sintieran menos intimidados. Una de las parejas elegidas para llevar a cabo la entrevista (pareja A) estaba formada por dos alumnas de diferente nivel intelectual, pero que habían trabajado la mayoría de las tareas de forma conjunta, en clase o fuera de ella. La otra pareja escogida (pareja B), formada por un chico y una chica de un nivel similar, habían trabajado las tareas por separado, de forma individual o con otras personas. Las intervenciones de los alumnos fueron más equilibradas en la pareja A, ya que en la B, la chica intervenía sólo cuando estaba segura de lo que iba a decir. Al principio estaban poco centrados en el tema, pero poco a poco se iban posicionando en el mismo a través del diálogo con la profesora, intentando que ella les facilitara las respuestas. El número de intervenciones de ambas entrevistas se contabiliza en la tabla 1.

| | Profesor | Alumno 1 | Alumno 2 |
|---|---|---|---|
| Grupo A | 1.082 | 793 | 839 |
| Grupo B | 969 | 388 | 804 |

Tabla 1

El análisis de las grabaciones muestra que el ritmo de aprendizaje de estos alumnos debe ser más lento y completamente dirigido por el profesor. Por otro lado, se observa que los alumnos tienden a personalizar las situaciones sintiéndose protagonistas del enunciado y, por tanto, están lejos de la objetividad conceptual. A continuación se da cuenta del análisis de los actos de comprensión que se manifiestan en las entrevistas sobre las 5 tareas descritas. En las transcripciones los identifican con A1, A2, B1 y B2.

Durante las entrevistas se constata la gran dificultad, observada ya en las secuencias, que tienen los alumnos para entender la necesidad del límite como herramienta para definir el concepto de velocidad instantánea, concepto que se opone claramente a la idea de velocidad como espacio partido por tiempo (velocidad constante) que los alumnos han manejado durante su formación, y que choca con la búsqueda de fórmulas similares para la velocidad instantánea (una vez que descubren que son cosas distintas). De entrada no saben bien lo que es la velocidad media ni cómo se calcula (incluso alguno la identifica con media de velocidades), ni la relación que existe entre ésta y la idea que tienen ellos del cociente entre el espacio y el tiempo. Ahora bien, el diálogo que se produce en la entrevista les hace reflexionar sobre lo que se pretende y descubren que lo que se busca es una relación entre espacio y tiempo, que no siempre es constante, y que una buena forma es calcular la velocidad media en un intervalo pequeño de tiempo. De ahí a la utilidad del límite hay un paso, a veces, insalvable.

A1: *Pues, primero hallas ésta, espacio partido tiempo, y aquí espacio partido tiempo y haces dos, pues es como hallar la media entre dos notas, igual, si tienes un 2,5 y un 3 hallas la media.*

A2: *Es que yo no entiendo igual velocidad media que media de dos números. Creo que son cosas distintas.*

A2: *Es que yo entiendo que la velocidad media no es la media entre las dos, es la velocidad que lleva..., o sea que por término medio lleva, ¿no?*

..........................................................................................

P: *Tú imagínate que vas en un coche y vas apuntando, a las 9 vas mirando el cuentakilómetros y ves esto, a las 9 y cuarto esto, ¿vas a la misma velocidad siempre?*

B2: *No.*

P: *¿Por qué sabes que no?*

A1: *Si haces la cuentas...*

P: *¿Pero qué cuentas harías?*

B2: *Porque,..., a ver, pues si entre las 9 y las 9 y cuarto recorre la diferencia que hay entre estos dos* (señala la tabla de la tarea) *y hacemos la cuenta y entre las 9 y cuarto y las 9 y media, que hay otro cuarto de hora hay más kilómetros que así..., bueno..., hay media hora.*

..........................................................................................

P: *¿Habrá alguna formulilla para la velocidad a las 10? ¿Pensáis que hay alguna fórmula? ¿Como ésta?*

A1: *No, a no ser que pongas un intervalo aquí pequeñito ..., pero eso ya es inventarlo.*

P: *Ya es pequeñito ahí, ¿eh? Fíjate, a las 9:57 ya son tres minutos.*

A1: *Sí, pero yo creo que es poner..., por ejemplo..., con 99..., y eso ya son las 10, ¿no?..., 9,999..., es un punto fijo, ¿no?*

..........................................................................................

A1: *Es una aproximación, la velocidad...*

P: *¡A ver! ¡A ver! ¡A ver!*

A1: *..., instantánea es una aproximación.*

P: *Es una aproximación, ¿a qué?*

A2: *A la velocidad media.*

— Con la otra tarea de motivación, en la que el límite es la herramienta para definir una función en un punto donde no está definida, no se consigue el objetivo hasta el final de la discusión, pues los alumnos se resisten a asignar un valor a una función en un punto donde no está definida, aunque utilicen dicho valor en la práctica como imagen del punto (sin embargo esto choca con la identificación que hacen de límite e imagen de la función en el punto). Interpretan la tarea como estudio de la evolución de la población cuando lo que se pretende es estudiarla en un punto concreto. Al final de la discusión los alumnos aceptan la búsqueda de un valor «lo más exacto posible».

P: *Se aproxima a 5, ¿por qué?*

B1: *Porque este número cada vez es más..., más aproximado a 5.*

P: *Pero tú, ¿cómo sabes que es más aproximado?*

B1: *Pues si le restas 5 cada vez da un número más..., peque..., más..., bueno, pequeño.*

B2: *Porque empezamos por 4 y luego el siguiente es..., la siguiente x es 4,9, es 4,90 y luego sigue 4'99 que es más aún y la siguiente es 4,999...*

.......................................................................................

B2: *Yo he puesto a 10,76.*

P: *Y, ¿por qué?*

B2: *Porque de más llega a menos, aquí, empieza 7846* (el decimal es 10,7846), *éste va a menos, va a 76 ya, ya es en las centenas* (se refiere a las centésimas), *vas (-).*

B1: *A 762.*

P: *A 10,762. ¿Y tú por qué dices 10,762?*

B1: *Porque es un número y los números que le siguen cada vez son más,..., pequeños, entonces se van aproximando más a éste, al 2.*

.......................................................................................

P: *Vale, y entonces, ¿qué significa cuando yo digo «aproximaciones cada vez mejores de un número»?*

B1: *Pues más pequeñas.*

P: *¿Más pequeñas las aproximaciones?*

B2: *Este punto..., ésta..., esta aproximación, ¿cómo?, ¿cómo ha dicho?*

P: *Si yo tengo muchas aproximaciones, digo «aproximaciones cada vez mejores».*

B2: *Pues esta aproximación sería mejor que ésta y que ésta.*

B1: *Claro. La resta de ésta que sea cada vez más pequeña.*

.......................................................................................

P: *...estás diciendo que 0 es el valor que le das al 5.*

A1: *O sea, que sí tiene valor. ¿Y es de verdad...?*

P: *Es verdad porque en principio no tiene...*

A1: *Pero tampoco es el 0 porque no...*

A2: *Si no está definida.*

P: *Entonces, si yo te pregunto qué pasa, te parece lógico contestar que no hay crecimiento de la población (-) te aproximas.*

A1: *Sí.*

A2: *Pues yo diría que no hay crecimiento pero sólo porque no está definida ahí. Y que va disminuyendo*

.......................................................................................

P: *No, yo quiero ver exactamente qué pasa en los 500..., a los 500 años. No quiero ver evolución ninguna.*

B2: *No tienes que estudiar lo que (-)...*

B1: *Claro, tienes que saber una aproximación lo más exacta posible.*

P: *¿Por qué una aproximación y no en 500?*

B2: *Porque en 500 no está definida.*

.......................................................................................

P: *¿Parece que el 0 es el mejor? De todas las aproximaciones, tú dices 0,0001, pero siempre hay alguna...*

B2: *Siempre hay alguna mejor.*

P: *¿Hay alguna que mejore el 0?*

B2: *No, ¿cómo va a mejorar el 0?, ¡que no!*

— También se constatan las dificultades de índole numérica. Tienen problemas con el orden cuando los números se expresan en forma decimal, observan aproximaciones dando poca importancia al error (se fijan en la forma del número y, así, cuando la parte decimal no son «nueves» suelen escoger una aproximación que no es la mejor), tienen problemas con el cálculo de errores y, sobre todo, no siempre los utilizan para comparar aproximaciones (alguno de ellos compara dos aproximaciones restándolas entre sí, no restándolas del número que aproximan). Además, cuando tienen que buscar aproximaciones, éstas no son muy buenas puesto que no aceptan los números racionales y suelen tomar números naturales (con lo cual no es posible aproximarse demasiado a números que no sean naturales). Pero también se observan las dificultades en otros registros. En el gráfico queda claro que se fijan en los puntos de la curva y no los valores de los ejes cuando tienen que observan una aproximación, confirmándose que para ellos la gráfica sólo es un conjunto de puntos o un dibujo, pero no una forma de relacionar las variables.

P: *¿Como el que tiene más números?* (Se ríe) *¿Cómo comparáis decimales? ¿Cómo sabéis cuál decimal es más grande?*

A1: *A ver, yo primero los cuento, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once y doce...*

P: *¿Qué cuentas?*

A2: *Yo, sinceramente, cuento los ceros.*

P: *¿Y si no tienes ceros?*

A1: *Bueno, o los números, yo cuento los números* (sigue contando) *Doce y uno, dos, ..., y once. Pues así, en el primer momento, es mayor éste.*

..........................................................................................

P: *Estos puntos son..., puntos cualesquiera.*

A2: *Sí, eran aproximaciones.*

P: *¿Ellos eran las aproximaciones?*

A1: *No.*

A2: *No, eran errores.*

P: *¿Que eran errores ahora* (se ríe)*?*

A2: *No, no, estoy diciendo bobadas.*

A1: *Eran las imágenes esas raras, ¿no?*

A2: *Seguro que si nos dices, que si cuando* x *tiende a 1 a qué tiende la* y, *ya se nos ocurre lo del límite, porque si no...*

— En la ilustración numérica siguen todos los pasos con algunas dificultades, como el paso de la observación de las aproximaciones de las imágenes a la observación de los valores de la variable independiente y la búsqueda de entornos. Son capaces de construir entornos adecuados en la ilustración numérica si son dirigidos adecuadamente a tal fin (cuestiones a las que no llegaban por sí mismos en las tareas). Ahora bien, la división de la tarea en pequeños pasos hace que pierdan la visión global de lo que hacen y no sean capaces de enunciar la propiedad que cumple el candidato a límite. De hecho, no son capaces de distinguir una simple aproximación del límite basándose en la tarea.

P: *... ¿qué es un entorno de un número?*

A1: *Pues lo que está alrededor...*

A2: *Un intervalo.*

..........................................................................................

B2: *Es entre ..., es un espacio en el cual se encuentra ese número y las mejores..., es que no sé como decirlo, es que, esto es un entorno hombre* (señala un intervalo de la tarea).

B2: *Un entorno de 1 podría ser éste* (lo dibuja) *este entorno. Éste sería 0,9 y 1,1.*

P: *Vale, 0,9 y 1,1 se escribe así...*

B2: *Es un error de 0,1.*

— El modelo del retroproyector utilizado en la ilustración gráfica cumple su objetivo de convertir la gráfica en una forma de relacionar las variables, aunque les cuesta encontrar el valor cuando se da la imagen del mismo. Los alumnos no identifican de entrada la zona sombreada que contiene a *L* (el supuesto límite) con un entorno de dicho punto, lo que abunda en las dificultades que tienen con los entornos, pero, una vez superado este obstáculo, no tienen dificultad para encontrar el entorno de a que se proyecta dentro de la zona señalada, y se dan cuenta de que es la zona de *L* la que determina la de *a* y no al revés. Se confirma que a algunos alumnos les cuesta aceptar que esta propiedad no se cumple siempre, a pesar de tener el ejemplo en la misma tarea. Pero, como ya señalábamos en el desarrollo de la secuencia, la mayor dificultad está en relacionar este hecho con la definición de límite dada (y la no verificación del hecho con la no-existencia del límite), es decir, el paso del registro gráfico al numérico, lo que se consigue después de la discusión, cuando consiguen ver las imágenes como aproximaciones de *L*, y la diferencia entre que las aproximaciones se puedan mejorar o no.

A1: *Pues,..., por las imágenes. Porque si éstos son los puntos..., por ejemplo el ése..., el proyector ése o como se llame, pues enfoca a un sitio y las imágenes en otro..., pues igual la gráfica, las imágenes son éstas, ¿no?*

.........................................................................................

P: *Sí. ¿Hacia dónde te vas para buscar el entorno?*

B2: *¿Hacia donde iría?, ¿hasta qué punto de* a*?*

P: *Sí. Hasta qué punto para volver al eje* X. *Tú has partido de ahí* (una de las fronteras del entorno) *para buscar un punto del eje* X *y has hecho así:* (repite la acción).

B2: *No, hasta aquí.*

P: *¿Por qué hasta ahí?, ¿dónde está la gráfica?*

B2: *¡Ah, claro!*

.........................................................................................

P: *¿Cuál es el límite de esta función en el punto* a*?*

A2: *Si en el punto* a *no está definida la función.*

A1: *No hay límite.*

P: *Yo tengo un punto de aquí y me voy aquí..., se proyecta ahí. Éste, ¿tiene algo que ver con* L*?, estamos tratando..., ¿tiene alguna relación?*

A1: *Pues que se va acercando. Es el límite.*

A2: *Que* L *es el límite.*

.........................................................................................

P: *Y ahí, ¿qué pasa?, que entonces puedo coger un entorno..., éste..., fijaos que éste sí que tenía un entorno aquí porque si yo lo cojo muy grande...*

A2: *Claro pero al hacerlo más pequeño...*

P: *Pero al hacerlo más pequeño yo no encuentro puntos aquí que estén ahí dentro. Eso, pensando en aproximación, ¿qué querrá decir?*

A2: *Pues que son malas.*

.........................................................................................

B2: *Yo creo que esta función no tiene límite.* (-) *cuando tenía dos asíntotas diferentes no tenía.*

P: *...¿en qué se distinguen uno y otro? Porque es verdad que a* L *se aproximan las imágenes.*

B1: *¿Éste de éste?*

P: *Sí.*

B1: *Que éste tiene mejor aproximación, ..., porque sí. Porque éste tiene más distancia de aquí a aquí* (señala en la tarea).

— El aspecto algebraico requiere demasiada generalización para este tipo de alumnos, que necesita ver números, y no expresiones algebraicas, para constatar cualquier hecho o propiedad. Como ya se había señalado en el desarrollo de la secuencia, la idea de mejor aproximación se pierde en cuestiones como el manejo de cotas (que se muestra claramente como una manipulación nueva para ellos), en la visión estática que proporciona una expresión algebraica (tienden a «resolver» como si se tratara de una ecuación), en la resolución de inecuaciones y búsqueda del entorno correspondiente, y en la relación entre la cota y el entorno. Al centrar el razonamiento en las cotas y errores, los alumnos olvidan que están trabajando con las imágenes de ciertos valores y con una aproximación de estas imágenes. Si en la ilustración numérica perdían la visión global del proceso, en la algebraica este hecho es mucho más acusado, entre otras cosas porque tardan mucho más en comprender los pasos.

P: *Cogéis la expresión, si es mayor o menor que 72, ¿y qué haces con el 72?*
B2: *Se resuelve ésa...*
P: *¿Qué resuelves?*
B2: *Igualamos a 0 y ya está, o pasamos este 72...*

........................................................................

B2: *Yo creo que el intervalo será..., yo creo que será mayor ¿eh? Porque aquí dividimos un número más grande entre el mismo número, el numerador es más grande y el denominador es más pequeño, o sea, intervalo más...*
P: *Entonces estamos diciendo que haces la cota más grande.*
B2: *La cota más grande.*

........................................................................

P: *Pero también cuando* x *se aproximan a 10 éstos se aproximan a 73..., y a 74..., ¿qué tiene el 72 que no tenga el 73?* (se ríe)
A1: *Pues un punto* (se ríe). *Un error tiene.*
A2: *Errores más pequeños.*

........................................................................

B2: *Para, para* x *igual a 10, para* x *10, el error...*
B1: *El error que se comete es más pequeño.*
P: *No puedes dar a* x *el valor 10.*
B2: *Para la* y *en ese punto...*
P: *Sólo puedes acercarte a 10 pero no puedes darle.*
B2: *Pues en ese punto que no está definido 10...*

........................................................................

B2: *Éste es el 72, pues si es el 72,001 aquí, y aquí 71'99, pues siempre habrá un error, por ejemplo aquí será éste y aquí será éste* (señala los errores en la hoja).
P: *Pero con los valores de la función, la cuestión es que nos estamos aproximando con los valores de la función, no es que cojamos números al azar y los aproximemos sin más, sino que estos valores que puede tomar la función cuando* x *está cerca de 10, pues están cerca de 72...*

........................................................................

B2: *Mejor aproximación..., para un valor dado, los valores que se aproximan a ese número, pues..., ninguno es mejor que ella misma.*

— Los alumnos se resisten a aceptar la no-existencia de límite y, en consecuencia, la búsqueda del mismo lleva a una situación en la que afloran obstáculos como la identificación del límite con el valor de la función en el punto (que es muy fuerte porque les sirve para justificar propiedades como la unicidad) o la confusión entre el valor al que tiende $x$ y el límite. El tipo de función es en sí un obstáculo porque el hecho de que sólo alcance dos valores les lleva a desconcierto, tanto en el dominio numérico como en el gráfico (el modelo de proyección es mal utilizado). Se ve también cómo olvidan que es todo un entorno el que debe de cumplir la propiedad de que sus imágenes mejoren cierta aproximación y les basta con que alguna imagen lo cumpla.

P: *No, en el 100 está el ascensor. ¿Qué pasaba ahí entonces en el 100?, ¿por qué no habéis dado valor al 100?, que es una de las preguntas que os hacía, ¿qué ocurre cuando* x *era igual a 100?*

A2: *Pues que estamos bajando.*

A1: *Está bajando y se encuentra en todas las plantas.*

P: *..., el ascensor, claro, entonces, ¿qué valor de* y *le podemos dar si el ascensor está bajando?*

A1: *Todos.*

.......................................................................................

P: *Sí, o sea, hay que dibujar una gráfica entre 0 y 150, eso sí, el 100 que estará por aquí, ése lo tenemos que evitar, ¿cómo la dibujamos?*

B2: *Los primeros 100 metros..., estamos a 20 metros de altura.*

B1: *Claro, es que..., estamos a..., bueno 20 metros de altura, siempre.*

P: *Claro.*

B1: *Y llegamos aquí, no hay función, y luego aquí estamos también a lo mismo.*

.......................................................................................

P: *Las dos son aproximaciones, ¿alguna de las dos es mejor que la otra?*

A1: *No, son las dos buenas, yo creo.*

P: *Son las dos buenas.*

A2: *No, a lo mejor no, no son las dos buenas.*

A1: *Pero, ¿cuál va a ser mejor que éstas?*

A2: *A lo mejor es mejor ésta* (señala -10).

A1: *¿Por qué?, ¿por ser más pequeña?, pero no tiene que ver porque son..., valores distintos los que tú das.*

.......................................................................................

P: *¿Sabríais verlo con la expresión algebraica? O sea, con la gráfica hemos visto lo de las proyecciones, con lo..., la tabla pues mirando a ver los errores si podemos hacerlos pequeños o no. ¿Con la ecuación lo sabríais hacer?*

A1: *Yo no lo sabría así, ¿se puede hacer así?*

.......................................................................................

P: *¿No me lo podéis decir o no existe?* (se ríen)

B2: *No, que no existe. Yo creo que no existe.*

P: *Pero, ¿por qué no?*

B2: *Porque no lo vemos.*

P: *¿Dónde lo ves? Cuando miras la tabla, ¿dónde ves el límite?*

B2: *En, ..., aquí en* y, *en los metros en vertical.*

P: *¿Y qué es lo que no ves en* y*? Sí que ves cosas.*

B2: *Pues no vemos la imagen de, ..., de 100.*

.......................................................................................

B2: *Pero aquí no hay, no tienen imágenes, no tienen imágenes porque no hay representación.*

P: *¿Y?*

B2: *Pues, no podemos proyectar nada en el eje* Y.

P: *Sí, se proyecta aquí y aquí* (señala 20 y -10 en el eje Y).

.......................................................................................

B2: *Pues el límite sería 20.*

P: *Pues no..., yo no veo los nueves esos que tú quieres ver.*

B2: *Bueno, pero sé que la mejor es 20 porque es la mejor el 20.*

P: *¿Y ahí?*

B2: *Y aquí no sé si es mejor el 20 o el -10. Hay una diferencia de 30 números ahí, no sé. Aquí también puede ser 0, como puede ser 5, como puede ser..., 10, aquí (-).*

.......................................................................................

P: *Y ahora, según todo lo que habéis dicho, ¿tiene la función límite en el 100?*

A2: *No,..., ésos, ésos desde luego, ¿eh?, el -10 y el 20 no eran límites.*

P: *No eran.*

A2: *Y no hemos encontrado tampoco otro por ahí.*

.......................................................................................

P: *... Bueno, entonces, según todo esto, ¿tendría límite la función en 100? Ahí le hemos dado vueltas a la misma función, expresada de formas distintas...*

B2: *No, no.*

P: *¿Por qué?*

B1: *Porque no está dentro de la función.*

B2: *Y por no estar definida.*

.......................................................................................

A1: *¡Noo!, imposible. Si los límites son las imágenes, ¿cómo van a tener,...?*

P: *¿Cómo que los límites son las imágenes?*

A1: *¡Quieta!, no, ¡espera!, eso es como si no lo hubiera dicho* (hablan todas a la vez y se ríen).

P: *Eso quiere decir que sigues empeñada en que el límite es la imagen en el punto.*

A1: *No, yo me entero así. Yo busco los límites aquí, es como si fueran imágenes.*

— Por último, hay que señalar que la instrucción influye positivamente a la hora de dotar al alumno de herramientas con las que trabajar situaciones de aproximación (se dan cuenta, por ejemplo, de la importancia de estimar el error). Sin embargo, también se observa que los alumnos olvidan rápidamente los conceptos estudiados, de manera que, en lugar de incorporar a su estructura mental nuevos conceptos, relacionándolos con los adquiridos, los nuevos conocimientos «desplazan» a los antiguos. En teoría, el carácter interdependiente entre conceptos matemáticos debiera afianzar los antiguos cuando el alumno adquiere otros nuevos relacionados con aquéllos, pero en la práctica no ocurre así. Más aún, en las entrevistas se manifiesta claramente la facilidad con la que los alumnos olvidan los conceptos. Es un problema abierto estudiar las causas que propician este hecho.

## CONCLUSIONES

Como ya se ha señalado en el análisis, la secuencia ha permitido detectar y, sobre todo, ha confirmado multitud de dificultades asociadas al concepto de límite y a su enseñanza, puestas de manifiesto en otras investigaciones, y también ha permitido localizar aquellos momentos que resultan cruciales en la adquisición de los conceptos puestos en juego y que son claves a la hora de superar dichas dificultades, hechos éstos que confirma la hipótesis. Estos momentos que, siguiendo la terminología de Sierpinska hemos llamado actos de comprensión, se enuncian a partir de la reflexión sobre la acción en cada uno de los tres ciclos de la secuencia, donde se han ido confirmando y completando, reflexión que se ha obtenido a través del análisis de las transcripciones de las sesiones, el cuaderno del profesor y las producciones escritas de los alumnos.

El conocimiento de las dificultades permitió localizar los momentos claves de la secuencia, en lo que a comprensión se refiere, lo cual abunda en la mejora de la puesta en práctica de la misma, puesto que de esta manera se sabe en qué aspectos se debe incidir. Así, se proponen los siguientes actos de comprensión relacionados con el límite funcional:

- Generalizar la idea de tendencia añadiendo la combinación de tendencias finitas.
- Sintetizar las ideas de aproximación y velocidad media, y generalizar ésta para definir la velocidad instantánea como la mejor de las aproximaciones de las velocidades medias en pequeños intervalos de tiempo, a la velocidad en un instante.
- Discriminar entre velocidad media y velocidad instantánea o, en general, entre una variación media y una variación instantánea.
- Identificar los valores a los que se aproximan la variable dependiente y la independiente, mediante la observación de las imágenes y el cálculo de errores, o mediante la interpretación correcta de la gráfica de la función.
- Sintetizar las tendencias de la variable dependiente e independiente en un único proceso.

- Discriminar entre aproximación y tendencia (aproximación óptima) y entre tendencia y movimiento.
- Discriminar el límite y las tendencias funcionales como herramientas distintas que resuelven problemas distintos.
- Discriminar límite y límite lateral, y límite y valor de la función en el punto.

## Referencias Bibliográficas

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. y GÓMEZ, P. (eds.) (1995): *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

ARTIGUE, M. (1997): «L'Évolution récente de l'enseignement secondaire des mathématiques en France: entre principes et réalité». *Actas de las 8.ª JAEM.* Salamanca: SCLPM, 11-20.

AZCÁRATE, C.; CASADEVALL, M.; CASELLAS, E. y BOSH, D. (1996): *Cálculo Diferencial e Integral.* Madrid: Síntesis.

BLÁZQUEZ, S. (2000): *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid.

BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2000): «El concepto de límite en la educación secundaria». *El futuro del cálculo infinitesimal ICME-8, Sevilla.* Grupo Editorial Iberoamericana SA de CV. Capítulo XIII, 331-354.

— (2001a): *Nueva definición de límite funcional.* Pendiente de publicación.

— (2001b): *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite.* Pendiente de publicación.

BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques.* La pensée sauvage édition. Francia: Grenoble.

CORNU, B. (1983): *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

DREYFUS, T. (1991): «Advanced Mathematical Thinking Processes». En D. TALL (ed.): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, 25-41.

ESPINOZA, L. (1998): *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los* momentos *del estudio.* Tesis doctoral. Dpto. de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

RICO, L. (1992): *Investigaciones sobre errores de aprendizaje en educación matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

ROBINET, J. (1983): «Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction». *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 4.3, 223-292.

SIERPINSKA, A. (1985): «Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite». *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 6.1, 5-67.

— (1987): «Humanities students and epistemological obstacles related to limits». *Educational Studies in Mathematics,* vol. 18, 371-397.

SIERPINSKA, A. (1990): «Some remarks on understanding in mathematics». *For the Learning of Mathematics,* vol. 10.3, 24-36.

SIERRA, M.; GONZÁLEZ, M. T. y LÓPEZ, C. (2000): «Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad». *Relime,* vol. 3.1, 71-86. México.

TALL, D. (1991): «The Psychology of Advanced Mathematical Thinking». En D. TALL, (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, pp. 3-21.

TALL, D. (1996): «Functions and Calculus. En A. BISHOP, (ed.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer, 289-325.

TALL, D. y VINNER, S. (1981): «Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity». *Educational Studies in Mathematics,* vol. 12, 151-169.

VINNER, S. (1991): *The Role of Definitions in the Theaching and Learning of Mathematics.* En D. TALL, (ed.): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, 65-81.