

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Nuevas propuestas en el estudio matemático de la robustez de las redes de metro

AUTOR: Jorge Contonente Echevarría

TUTORES: Elisa Frutos Bernal

Ángel María Martín del Rey

Curso 2022-2023



VNIVERSIDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Nuevas propuestas en el estudio matemático de la robustez de las redes de metro

AUTOR: Jorge Contonente Echevarría

TUTORES: Elisa Frutos Bernal

Ángel María Martín del Rey

Curso 2022-2023

CERTIFICADO DE LOS/AS TUTORES/AS DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

D^a Elisa Frutos Bernal y D. Ángel Martín del Rey, profesores del Departamento de Estadística y de Matemática Aplicada respectivamente de la Universidad de Salamanca

HACEN CONSTAR

Que el trabajo titulado “Nuevas propuestas en el estudio matemático de la robustez de las redes de metro”, que se presenta, ha sido realizado por Jorge Contonente Echevarría, con DNI número ***60692Q y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo Fin de Máster del Máster Universitario en Modelización Matemática de la Universidad de Salamanca

Salamanca, a fecha de la firma electrónica

Firmado. ...

Índice general

Introducción	1
1. Fundamentos matemáticos	3
1.1. Teoría de grafos y redes complejas	3
1.2. Matriz de adyacencia	7
1.3. Propiedades de la red	8
2. Medidas de robustez teóricas.	13
2.1. Conectividad de nodo	13
2.2. Eficiencia	14
2.3. Coeficiente de asortatividad	14
2.4. Diversidad de grado y límite de percolación	15
2.4.1. Indicador de robustez r^T	15
2.5. Medidas espectrales. Matriz laplaciana	16
2.5.1. Conectividad algebraica	17
2.5.2. Conectividad natural	17
2.5.3. Resistencia y conductancia	18
3. Análisis de redes.	19
3.1. Propiedades de las redes	20
3.1.1. Grado medio	22
3.1.2. Densidad	23
3.1.3. Longitud de camino medio, diámetro y radio	25
3.1.4. Coeficiente de clustering	26
3.2. Medidas de robustez teóricas	27
3.2.1. Eficiencia	27
3.2.2. Coeficiente de asortatividad	28
3.2.3. Diversidad de grado y límite de percolación	30
3.2.4. Índice r^T	31
3.2.5. Conectividad algebraica	32
3.2.6. Conectividad natural	33
3.2.7. Resistencia y conductancia	33
4. Medidas de robustez numéricas.	35
4.1. Simulación LCC	36
4.2. Simulación de eficiencia	43
4.3. Simulación de intermediación media	46

5. Conclusiones.	48
Bibliografía	54
Anexo I: Código índices estructurales y medidas de centralidad	1
Anexo II: Código medidas de robustez teóricas	1
Anexo III: Código medidas de robustez numéricas	1

Índice de figuras

1.	Locomotora de vapor No.23 del metro de Londres. <i>Fuente: London Transport Museum.</i>	1
1.1.	Ejemplo del mismo grafo dirigido y no dirigido.	4
1.2.	Espacios de representación. Imagen extraída de [9]	5
1.3.	Representación del grafo del metro de Berlín y mapa esquemático del metro de Berlín.	7
1.4.	Grafo con 11 vértices destacando la centralidad de grado.	9
1.5.	Ejemplo de redes con distinta densidad.	10
1.6.	Mapa de calor de la centralidad de vector propio.	11
3.1.	Grafo de la red de Hong Kong.	20
3.2.	Grafo de la red de Londres.	21
3.3.	Grafo de la red de París.	21
3.4.	Grafo con mapa de calor de los grados de la red de Tokio.	23
3.5.	Comparación entre Londres y París.	24
3.6.	Grafo de la red de Seúl.	26
3.7.	Mapa de calor del clustering de la red de Barcelona.	27
3.8.	Mapa de calor de grado de nodos de la red de Boston.	29
3.9.	Mapa de calor de grado de nodos de la red de Londres.	30
3.10.	Grafo de la red de Ciudad de México.	32
4.1.	Simulaciones LCC: Londres y París.	37
4.2.	Simulaciones LCC: Nueva York y Seúl.	37
4.3.	Simulaciones LCC: Tokio y Moscú.	38
4.4.	Simulaciones LCC: Ciudad de México y Berlín.	38
4.5.	Simulaciones LCC: Barcelona y Boston.	39
4.6.	Simulaciones LCC: Hong Kong.	39
4.7.	Simulaciones eficiencia: París y Tokio.	43
4.8.	Simulaciones eficiencia: Moscú y Ciudad de México.	43
4.9.	Simulaciones intermediación: París y Tokio.	46
4.10.	Simulaciones intermediación: Moscú y Ciudad de México.	46
5.1.	Grafo de la red de Nueva York.	51

Resumen

En este trabajo se presentan en primer lugar los conceptos básicos de la teoría de grafos. Tras definir algunos coeficientes y medidas de centralidad se exponen distintas medidas de robustez teóricas de redes complejas presentando un indicador de robustez modificado para adaptarse al modelo reducido empleado.

Se realiza un análisis de una serie de redes de metro de distintas ciudades mostrando los valores obtenidos para cada una de ellas de las distintas medidas de centralidad y coeficientes estructurales para después mostrar los distintos resultados obtenidos en las distintas medidas de robustez teóricas.

En las medidas de robustez numéricas se presenta la simulación LCC para todas las redes y se calculan medidas de robustez numéricas basadas en la eficiencia y la intermediación para las redes más robustas. Por último se realiza un análisis de los resultados obtenidos en cada tipo de medida.

Palabras clave: Redes complejas, redes de metro, grafos, robustez.

Abstract

In this study we first present the basic concepts of graph theory. After defining some coefficients and centrality measures, different theoretical robustness measures of complex networks are presented, presenting a modified robustness indicator to adapt to the reduced model used.

An analysis of a series of metro networks in different cities is carried out, showing the values obtained for each of them for the different measures of centrality and structural coefficients, and then showing the different results obtained for the different theoretical robustness measures.

In the numerical robustness measures, the LCC simulation is presented for all the networks and numerical robustness measures based on efficiency and intermediation are calculated for the most robust networks. Finally, an analysis of the results obtained for each type of measure is performed.

Key words: Complex networks, metro networks, graphs, robustness.

Introducción

Tras la revolución industrial, entrado el siglo XIX, la población en las ciudades aumentó de manera exponencial. Se comenzaron a fundar las bases para las grandes metrópolis como París, Londres o Nueva York. Estas ciudades, a medida que crecían, iban absorbiendo núcleos de población próximos y con ello a la gente que allí vivía. Se transformaron por tanto en el hogar de millones de personas, en su gran mayoría trabajadores, que necesitaban recorrer extensas distancias dentro de estas ciudades en su día a día.

Las calles y carreteras no estaban preparadas para grandes flujos de tráfico, ya fuese a motor o de tracción animal, y eran frecuentes los incidentes que podían llegar a bloquear una avenida durante horas. Es por ello que en 1863 se inauguró en Londres un medio de transporte que no tenía que compartir sus caminos. Ajeno a todo lo que pasaba en la superficie, el metro se presentó como un medio de transporte eficaz, que conectaba los puntos más importantes de la ciudad de manera rápida, pudiendo transportar una gran cantidad de pasajeros y ayudando a vaciar las colapsadas calles.



Figura 1: Locomotora de vapor No.23 del metro de Londres.
Fuente: London Transport Museum.

Con unas ciudades en continuo crecimiento la demanda de transportes públicos aumenta cada día más y forma parte de la calidad de vida de las personas tener a su disposición un medio de transporte rápido, cómodo y seguro. Es por ello que las grandes ciudades deben asegurarse de mantener una red de metro que cubra estas necesidades y que siga evolucionando y creciendo para adecuarse a la expansión de las ciudades y al aumento de la población. Además estas redes deben estar preparadas para que en caso de que se produzca algún fallo en algún punto, puedan seguir prestando el mejor servicio posible y no dejen incomunicadas a miles de personas.

Es en este aspecto en el que se centra este trabajo. Aplicando las matemáticas que se esconden detrás del análisis de redes de sistemas complejos se podrán caracterizar distintas redes de metro de una muestra de ciudades alrededor del mundo. Con estas medidas se podrá comparar de forma objetiva el desempeño de las redes.

Se comenzará definiendo los elementos básicos de las redes complejas y grafos para pasar a definir una serie de medidas de distintos parámetros de la red. Después de esto se continuará con la definición de las medidas de robustez teóricas, entendiendo robustez como la capacidad de una red de mantener las medidas que se han definido ante ataques a la red, o lo que es lo mismo, eliminación de nodos. Se aplicarán estas medidas de robustez a las distintas redes de la muestra tratando de comprender cuáles son sus puntos fuertes y débiles.

Por último se calcularán medidas de robustez numéricas mediante simulaciones de ataques a las redes. En primer lugar se simularán ataques aleatorios. Estos puede compararse con fallos fortuitos del sistema o debidos a catástrofes naturales como una inundación, que podrían dejar inhabilitada una estación impidiendo la circulación de convoyes por ella. Otras simulaciones serán de ataques dirigidos, esto es, conociendo las estaciones más relevantes de la red se irán eliminando para ver cómo evoluciona la red.

Capítulo 1

Fundamentos matemáticos

Para poder llevar a cabo los distintos análisis que se realizarán a las redes de metro de la muestra escogida para este trabajo se utilizarán elementos de la teoría de grafos y del estudio de redes complejas. Se entiende como grafo a la representación matemática de la red. A continuación se definen conceptos y propiedades de los grafos que serán necesarios para comprender los modelos que se desarrollarán.

1.1. Teoría de grafos y redes complejas

Sea un sistema en el que distintos elementos están relacionados entre sí, se denomina grafo a la representación matemática de ese sistema. De manera formal,

Definición 1.1.1. Se denomina grafo G a la pareja $G = (V, E)$ donde V es un conjunto no vacío de los vértices o nodos y E es el conjunto de pares de nodos que se denominan arcos o aristas, siendo $|V| = N$ y $|E| = M$.

Cada arista o arco e del conjunto de E conecta dos nodos de V . Para denotar que la arista e conecta los nodos v_i y $v_j \in V$ se denota como $e = (v_i, v_j)$ y se dirá que esos nodos son adyacentes.

Si la arista solo puede recorrerse en un solo sentido, es decir, si por ejemplo solo puede recorrerse desde el nodo u al nodo v se trata de un grafo dirigido. Si se puede recorrer la arista en ambas direcciones, tanto partiendo del nodo u como partiendo del nodo v indistintamente, se habla entonces de un grafo no dirigido.

A continuación se presenta en la Figura 1.1 un ejemplo de un grafo con el mismo número de nodos y de aristas, en un caso se trata de un grafo dirigido, en el que el sentido de recorrido de cada arista se indica mediante una flecha; y en el otro se trata de un grafo no dirigido en el que las aristas se representan por líneas que pueden ser recorridas en ambos sentidos.

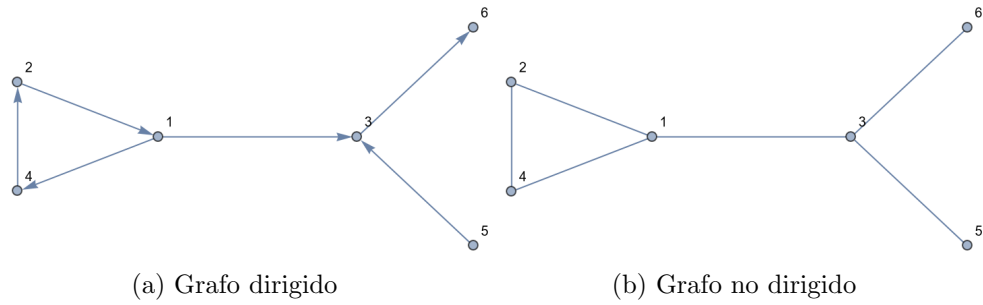


Figura 1.1: Ejemplo del mismo grafo dirigido y no dirigido.

Una vez definidos los elementos básicos de un grafo es posible profundizar más en diferentes características que pueden ayudar a caracterizar la red. Existe la posibilidad de que una arista conecte un nodo consigo mismo, esto es (u, u) , a este tipo de arista se le denomina lazo. También puede darse el caso de que dos nodos (u, v) se encuentren conectados por más de una arista dando lugar a una multiarista. Un grafo se denomina grafo simple si no contiene lazos ni multiaristas. Por último, se denomina camino entre los nodos v_i y v_j a la sucesión de nodos cuyo origen es v_i y cuyo final es v_j y se dirá que el grafo es conexo cuando existe un camino entre dos nodos cualesquiera diferentes del grafo, o lo que es lo mismo, cuando no existan nodos aislados.

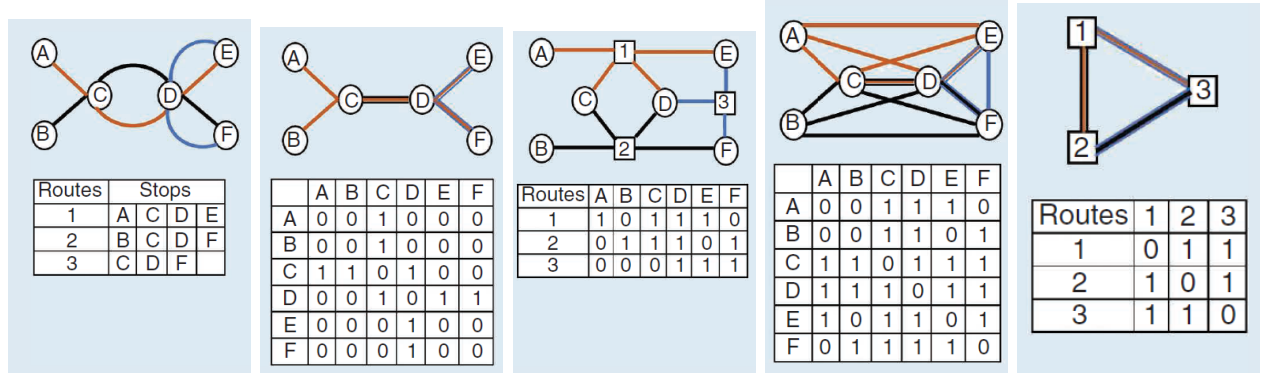
En este trabajo las estaciones de la red de metro se asociarán con los nodos de una red compleja. Estos nodos pueden ser clasificados en nodos monotónicos, transfer y termini en función del papel que juegan las estaciones asociadas en la red de metro. Los nodos monotónicos son aquellos asociados a estaciones que pertenecen a una sola línea, los nodos transfer serán los asociados a estaciones pertenecientes a al menos dos líneas diferentes. En términos de la red de metro los nodos transfer serán los nodos asociados a aquellas estaciones en las que se puede realizar trasbordo entre distintas líneas sin la necesidad de salir de la estación. Por último los nodos termini son los asociados a las estaciones finales de cada línea.

En base a cómo se representen las distintas estaciones y líneas en el modelo, se definen diferentes espacios de representación que se detallarán a continuación.

- **L-Space:** es el método de representación más común para redes de transporte. Tal y como se muestra en la Figura 1.2b en este modelo las estaciones de la red se corresponden con nodos del grafo y existe una arista entre dos nodos si hay al menos una línea de la red de metro que conecte las dos estaciones. En este espacio de representación la estructura de la red es la más similar a los planos de metro habituales que se pueden ver y ofrece información visual de las conexiones entre nodos.
- **B-Space:** en este espacio de representación tanto las estaciones como las rutas se

representan mediante nodos. Puede verse en la Figura 1.2c cómo los nodos ruta se conectan con todas las estaciones por las que pasa y los nodos estación están conectados con todas las rutas que pasan por ellos. No existen conexiones entre nodos del mismo tipo (es decir, entre nodos ruta o entre nodos estación).

- **P-Space:** ofrece una representación de la red en la que cada estación se representa mediante un nodo y se crean aristas entre cada par de estaciones que pertenecen a una misma ruta. El grafo de la red permite visualizar los posibles trasbordos entre líneas ya que los vecinos de un nodo en este grafo son el conjunto de nodos a los que se puede llegar sin realizar trasbordos tal y como se muestra en la Figura 1.2d.
- **C-Space:** Los nodos aquí representan las líneas y dos nodos estarán conectados , como en la Figura 1.2e si ambas líneas comparten una estación en común.



(a) Mapa simplificado de una red de metro con estaciones A-F y líneas 1-3. (b) Grafo L-space. (c) Grafo B-space. (d) Grafo P-space. (e) Grafo C-space.

Figura 1.2: Espacios de representación. Imagen extraída de [9]

En este trabajo se estudiará la robustez de distintas redes de metro. Para ello se empleará un modelo matemático en el que las estaciones que conforman la red de metro se considerarán como los nodos de un grafo, mientras que las líneas de conexión entre estaciones serán las aristas.

En concreto se ha utilizado el modelo L-space reducido. Este modelo es similar al modelo L-space con la salvedad de que solo considera las estaciones transfer y termini, sin que aparezcan en la red las estaciones monotónicas. Utilizar la representación de L-space reducido permite reducir el tamaño de la red. Resulta mucho más sencillo encontrar datos abiertos de redes de metro de ciudades a lo largo del mundo que utilizan este modelo

reducido, mientras que modelizar una red completa conllevaría meses de trabajo manual a partir del propio plano de la red. Aunque las métricas de las redes se ven modificadas en este modelo respecto a la red original, conserva el esqueleto de la red y algunas características topológicas como las distribuciones de grado. También permite identificar características de mundo pequeño que podrían quedar ocultas en una red de gran tamaño, revelando conexiones relevantes entre nodos importantes que podrían pasar desapercibidas. Considerar solo los nodos transfer y termini ayuda a identificar las conexiones más críticas de la red, aquellas que si fallaran tendrían mayor impacto en la red. Además, podrían llegar a obtenerse algunas medidas de la red original mediante técnicas analíticas por lo que este modelo permite obtener resultados que permiten un análisis comparativo de distintas redes. [1].

A la hora de analizar ataques a la red, ya sea a un nodo o a una arista, aunque dos estaciones puedan estar conectadas por más de una línea, en el modelo utilizado se considerará como una única arista, por lo que un ataque a una estación significará la inutilización de todas las líneas que pasen por esa estación. Tal y como se define este modelo, los grafos que se emplearán serán por tanto, simples y no dirigidos.

A continuación, en la Figura 1.3 se presenta un fragmento de la representación en forma de grafo del metro de Berlín (Berlin U-Bahn) en el modelo L-Space reducido y un fragmento del mapa del Berlin U-Bahn. Se puede apreciar que la ubicación de los nodos no se corresponde con la ubicación de las estaciones en el mapa. Esto se debe a que para el análisis estructural y de robustez de la red, la geolocalización es despreciable, no aporta ninguna información, y la forma de representación en el grafo representa mejor la posición de las estaciones como nodos de la red y las relaciones con estaciones vecinas. Además, esta imagen también sirve para mostrar lo que se mencionó anteriormente. Si por ejemplo se toma la estación *Warschauer Str* y su conexión con la estación *Hallesches Tor*, se puede apreciar en la representación esquemática que son dos líneas de U-Bahn las que conectan estas estaciones, mientras que en el grafo, los nodos asociados a esas mismas estaciones se encuentran conectados por una arista simple. Además las estaciones pertenecientes a una sola línea no aparecen en el grafo, que solo cuenta con las estaciones transfer y termini. Esto se debe a la definición del modelo de representación que se utilizará para el análisis objeto de este trabajo, que contempla un grafo simple en el que si por ejemplo, la estación de *Hallesches Tor* sufre un fallo, todas las líneas que pasan por ella quedarían inutilizadas.

1.3. Propiedades de la red

Teniendo ya definidos los elementos que forman una red y cómo es la representación matemática de esa red, se pueden definir distintas propiedades que permiten caracterizar el grafo y por tanto, la red asociada. Esta caracterización del grafo y de la importancia que tienen en la red los distintos nodos se realiza mediante los coeficientes estructurales y las medidas de centralidad.

Definición 1.3.1. Sea χ un elemento de V o de E se define como coeficiente estructural del grafo G respecto del elemento χ a toda función

$$\begin{aligned} C: \quad \chi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto C(x) \end{aligned}$$

tal que $\forall x \in \chi$ y todo isomorfismo de grafos $\Phi: G \xrightarrow{\sim} H$ se verifica que $C(x) = C(\Phi(x))$

Definición 1.3.2. Una medida de centralidad del grafo G se define como un índice que cuantifica de manera global alguna característica del grafo G .

Definición 1.3.3. Se define el grado de un nodo como el número de aristas que convergen en el nodo. En términos de la matriz de adyacencia, el grado de un nodo v_i es la suma de todos los elementos de la fila i de la matriz, esto es:

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{i,j} \forall i, j \in V \ i \neq j$$

En el modelo que se utiliza en este trabajo, el grado de un nodo se puede interpretar como el número de líneas que pasan por una estación. Y el grado medio será el valor medio del grado de todos los nodos de la red.

Definición 1.3.4. A partir de este parámetro se puede definir la centralidad de grado, es una medida del número medio de vecinos a los que está conectado un nodo v_i , y se obtiene como:

$$C_D(v_i) = \frac{k_i}{N-1}, \quad 0 \leq C_D(v_i) \leq 1;$$

En la Figura 1.4 se muestra un grafo en el que se representa mediante un mapa de calor el grado de cada nodo. El nodo número 11 será el que tenga una mayor centralidad de grado ya que es el nodo que más conexiones tiene con nodos vecinos.

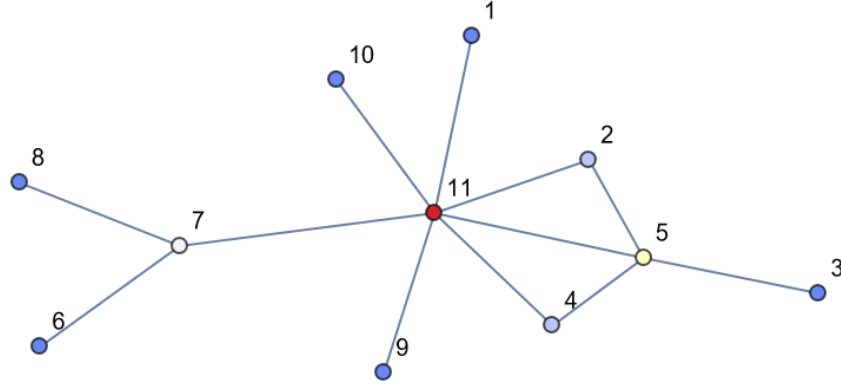


Figura 1.4: Grafo con 11 vértices destacando la centralidad de grado.

Definición 1.3.5. La densidad de una red será el cociente entre el número de aristas y el número de aristas que tendría la red si todos los nodos fuesen adyacentes entre sí. Matemáticamente esto sería:

$$d = \frac{2M}{N(N-1)}$$

En la Figura 1.5 se presenta un ejemplo para mostrar cómo varía la densidad. La red de la Figura 1.5a es una red completa y por tanto, su densidad es igual a 1 mientras que la red de la Figura 1.5b, a pesar de tener el mismo número de nodos, no es una red completa, por lo que, tendrá menos aristas que la red completa y por tanto, su densidad será menor, en concreto, en este caso será $d = 0,218$.

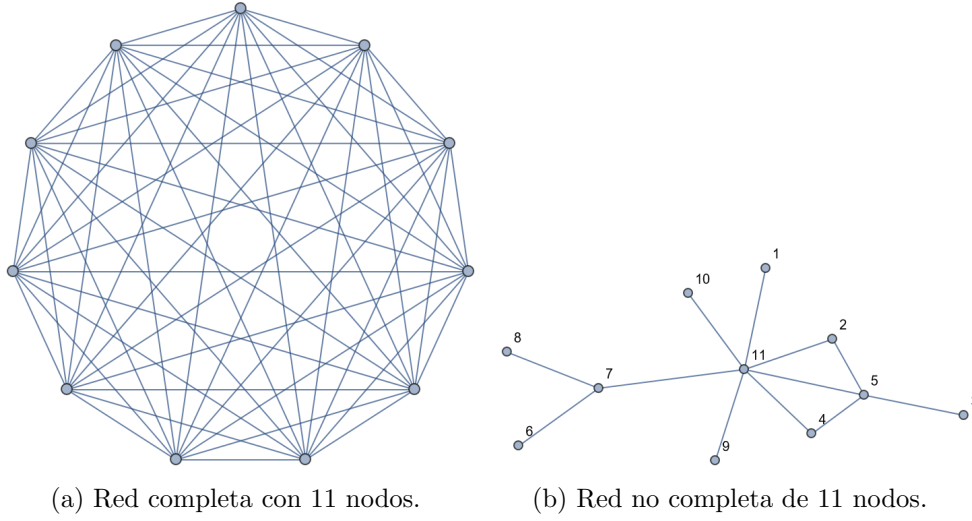


Figura 1.5: Ejemplo de redes con distinta densidad.

Un parámetro básico, y más cuando se habla de redes de transporte, es la distancia entre dos nodos v_i y v_j de la red $d(v_i, v_j)$.

Definición 1.3.6. Se define la distancia entre dos nodos v_i y v_j de la red como el mínimo número de enlaces que se deben atravesar para ir del nodo v_i al nodo v_j . En este trabajo al estudiar las redes desde el L-espacio reducido la distancia se interpretará como el número de estaciones con trasbordo que se deberán atravesar para llegar a un nodo v_j desde un nodo v_i pero sin tener en cuenta las estaciones monotónicas.

Definición 1.3.7. En base a la distancia entre nodos se pueden definir también la longitud de camino medio L que es la distancia media entre pares de nodos.

$$L = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq N} d(v_i, v_j)$$

Definición 1.3.8. La centralidad de intermediación de un nodo v_i da una medida del papel de intermediario que juega dicho nodo en la red [2]. Es una medida de cuán presente está el nodo en los caminos más cortos entre cualquier otro par de nodos. Matemáticamente será:

$$C_B(v_i) = \sum_{\substack{1 \leq r < s \leq N \\ r \neq i, s \neq i}} \frac{l_{rs}(v_i)}{l_{rs}}$$

donde l_{rs} es el número total de caminos más cortos entre los nodos v_r y v_s , y $l_{rs}(v_i)$ es el número de esos caminos más cortos que pasan por el nodo v_i .

Definición 1.3.9. La centralidad de grado mide la importancia de un cierto nodo teniendo en cuenta el número de vecinos que tiene, pero en algunas ocasiones la importancia de un nodo para la red no está dada por cuántos vecinos tiene ese nodo, si no por lo importantes que son a su vez esos nodos vecinos [10]. La centralidad de vector propio de un nodo v_j ofrece una medida de la importancia de dicho nodo de una manera más cualitativa que cuantitativa, es decir, no en función del número de conexiones del propio nodo sino del número de vecinos con elevado número de conexiones. Se define matemáticamente como el vector propio principal $C_G = (C_G(v_1), \dots, C_G(v_N))$ de la matriz de adyacencia, es decir, el vector propio asociado al mayor valor propio de A , λ . La j -ésima componente de C_G será la centralidad del nodo v_j y se cumple que:

$$C_G(v_j) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^N a_{ij} C_G(v_i)$$

En la Figura 1.6 se presenta una red en la que el nodo número 5 presenta la mayor centralidad de vector propio, a pesar de que los nodos 4, 8 y 10 son de mayor grado. Esto ilustra la definición de centralidad de vector propio como medida de la importancia de un nodo sin importar su grado, ya que eliminando el nodo 5 de la red esta se desintegraría en 3 redes de 3 nodos cada una, mientras que si se elimina alguno de los de mayor grado, la red conservaría 9 nodos.

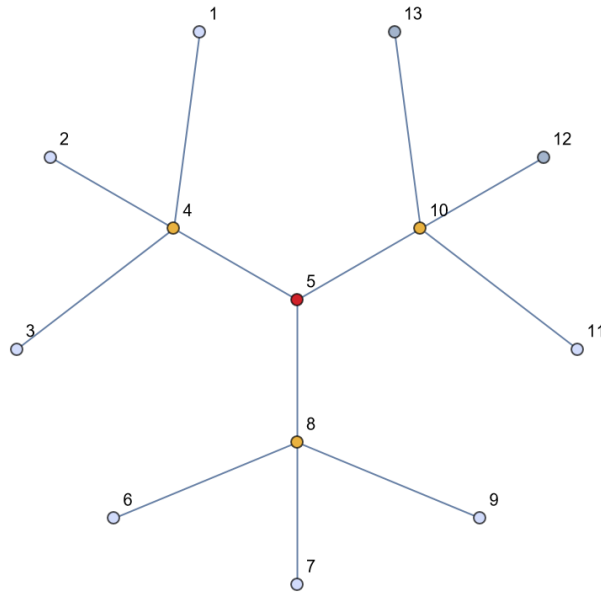


Figura 1.6: Mapa de calor de la centralidad de vector propio.

Definición 1.3.10. El coeficiente de agrupamiento o de clustering mide la conectividad global de la red y evalúa en qué medida los vecinos de un nodo están conectados entre ellos [3]. Para un nodo v_i de la red, el coeficiente de clustering será:

$$C_{CLU}(v_i) = \frac{2\epsilon_i}{k_i(k_i - 1)}$$

donde ϵ_i es el número de conexiones entre los nodos adyacentes al nodo v_i . El coeficiente de clustering medio de la red será:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{CLU} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{CLU}(v_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2\epsilon_i}{k_i(k_i - 1)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i(k_i - 1)} \sum_{j,l=1}^N a_{ij}a_{jl}a_{li} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(A^3)_{ii}}{k_i(k_i - 1)}\end{aligned}$$

Capítulo 2

Medidas de robustez teóricas.

Definidas ya las principales medidas de centralidad y coeficientes que permiten caracterizar grafos y sus redes asociadas, a continuación se procederá presentar distintas medidas de robustez teóricas que tratan de cuantificar la resistencia de la red y la capacidad de recuperación ante la eliminación aleatoria de nodos o aristas [5]. Recuperando el supuesto para el que se aplica este trabajo, sería como inutilizar una estación o un túnel debido a una inundación, incendio o cualquier otro tipo de desastre o accidente que obligase a interrumpir el tráfico de convoyes en esa estación o tramo concreto, y la robustez del grafo vendría dada por la capacidad de alcanzar cualquier destino de la red de transporte utilizando otras líneas o estaciones que no se hayan visto afectadas. Se presentan aquí entre otras, medidas habituales en el estudio de robustez teórica de redes complejas como la conductancia, la diversidad de grado, las conectividades algebraica y natural, o la eficiencia [6].

Se incluye además una posible modificación del indicador de robustez r^T que trata de adaptar este coeficiente a la representación L-Space reducida empleada en este trabajo. Como ya se detalló, el modelo de representación de grafos empleado no toma en cuenta las estaciones monotónicas, solamente las estaciones transfer y termini, por lo que las medidas de robustez empleadas no ofrecen un resultado estrictamente real al emplearse estas medidas sobre una red reducida y en la que se han eliminado los nodos que menos importancia podrían tener para la red. La modificación que se presenta del indicador r^T trata de adaptarse a este modelo reducido de representación.

2.1. Conectividad de nodo

Se define como conectividad de nodo k_V al mínimo número de nodos que se deben desconectar de la red para que esta deje de ser conexa. De manera análoga la conectividad de arista k_E será el mínimo número de aristas que se deben eliminar de la red para que esta deje de ser conexa.

Cuanto mayor sea la conectividad de nodo o arista significará que es necesario eliminar un mayor número de elementos de la red para que esta deje de ser conexa, por lo que un número más elevado será equivalente a una red más robusta y más resistente frente a ataques.

Se debe tener en cuenta que en las redes de metro es habitual que existan zonas de la red conectadas al resto del entramado a través de una única estación, de tal manera que si se elimina esa estación o ese tramo de línea, el grafo dejará de ser conexo, por lo que lo más común será que en el caso que ocupa este trabajo la conectividad, tanto de nodo como de arista sea igual a 1 y por tanto, no será una medida que se pueda utilizar para comparar distintos sistemas de metro de distintas ciudades.

2.2. Eficiencia

La eficiencia de un grafo G es una medida de robustez relacionada con la distancia entre nodos $d(v_i, v_j)$. Matemáticamente se define como:

$$E_G = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{d(v_i, v_j)}$$

Si no existiera ningún camino que uniera el nodo v_i con el nodo v_j la distancia entre ellos sería $d(v_i, v_j) = \infty$ y por tanto, la eficiencia sería $E_G = 0$. Por el contrario, en caso de un grafo completo, la distancia entre dos nodos cualquiera v_i y v_j sería $d(v_i, v_j) = 1$ y por tanto, la eficiencia será $E_G = 1$. Se tendrá entonces que cuanto más próximo a 1 sea el valor de la eficiencia de un grafo, más robusta será la red [3].

2.3. Coeficiente de asortatividad

El coeficiente de asortatividad mide, en promedio, cómo los nodos con un alto grado de la red se conectan con otros nodos de grado elevado también, y cómo los nodos de grados bajos se conectan con nodos de grados bajos. Puede definirse a través del coeficiente de correlación de Pearson [8] como:

$$r = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2M} \right) f_{ij}}{\sum_{1 \leq i, j \leq N} \left(k_i \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{2M} \right) f_{ij}}$$

donde a_{ij} son los elementos de la matriz de adyacencia, δ_{ij} será 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$, $\frac{k_i k_j}{2M}$ es el número esperado de aristas entre dos nodos i y j y f_{ij} es una medida de alguna propiedad estructural sobre la pareja de nodos v_i y v_j . En este caso la medida utilizada será el grado del nodo por lo que $f_i = k_i$.

Este coeficiente tendrá un valor de $-1 \leq r \leq 1$ donde los valores más próximos a -1 mostrarán la tendencia de nodos de grados elevados a conectarse con nodos de grados bajos, lo que se conoce como red disortativa; mientras que valores próximos a 1 mostrarán la tendencia de los nodos a conectarse con otros nodos de grado similar, lo que será una red asortativa. Las redes asortativas serán más robustas, ya que ante un ataque a un nodo de grado alto, existirán otros nodos vecinos de grados altos que no se habrán visto afectados por el ataque, por lo que la longitud de camino apenas se verá alterada y no tendría ningún impacto para la red [9].

2.4. Diversidad de grado y límite de percolación

La diversidad de grado viene κ dada por:

$$\kappa = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$$

donde $\langle k^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^2$

Estrechamente relacionado con la diversidad de grado está el límite de percolación p_c que se define como la fracción de nodos en tanto por 1 que hay que eliminar de la red para que esta se desconecte. Matemáticamente:

$$p_c = \max \left\{ 0, 1 - \frac{1}{\kappa - 1} \right\}$$

Tendrá un valor de $0 \leq p_c < 1$ y cuanto mayor sea el límite de percolación, indicará que más robusta es la red [12].

2.4.1. Indicador de robustez r^T

Este indicador de robustez trata de cuantificar, en términos de número de caminos alternativos, la robustez de una red. Originalmente este indicador se obtiene como

$$r^T = \frac{\mu - M^m}{N_T}$$

donde M^m es el número de enlaces entre dos nodos, N_T sería el número total de estaciones de la red sin reducir y μ es el número ciclomático que determina el número de caminos independientes en un grafo y se define como $\mu = M - N + P$ donde M es el número

de aristas, N el número de nodos y P el número de subgrafos entendiendo por subgrafo una porción bien definida de un grafo. En redes de transporte normalmente $P = 1$ [3]. Al incluir el número de estaciones en el denominador recoge el hecho de que una red de mayor tamaño será más difícil de mantener y por tanto será más probable que un nodo falle [4].

En este trabajo, como se definió al principio, no se consideran multiaristas y se emplea como número de nodos N incluyendo solo estaciones transfer y termini. El número máximo de aristas que podría tener el grafo será $M_{max} = \frac{N(N-1)}{2}$ y en las redes de metro el número de líneas entre estaciones se encuentra muy por debajo de M_{max} . Por tanto se modifica este indicador como [12]

$$r^T = \frac{\ln(M - N + 1)}{N}$$

Este indicador de robustez aumentará con el número de caminos alternativos pero a la vez se verá penalizado en redes grandes recogiendo así la mayor probabilidad de que una estación falle en una red extensa. El valor máximo r_{max}^T se alcanzará cuando $M = M_{max}$ por lo que se puede normalizar $\tilde{r}^T = \frac{r^T}{r_{max}^T}$.

2.5. Medidas espectrales. Matriz laplaciana

Las siguientes medidas de robustez se denominan medidas espectrales, y para poder obtenerlas es necesario calcular la matriz laplaciana.

Definición 2.5.1. La matriz laplaciana es una matriz $N \times N$ definida como $\mathcal{L} = \Delta - A$ donde $\Delta = \text{diag}(k_1 \dots k_N)$ es una matriz $N \times N$ en la que los elementos de la diagonal son los grados de los nodos de la red y A es la matriz de adyacencia de la red. Es una matriz simétrica y semidefinida positiva.

La matriz $\mathcal{L}$ tendrá tantos valores propios nulos como componentes conexas tenga el grafo, por tanto, al menos tendrá un valor propio nulo que será el asociado a la componente conexa del propio grafo, por lo que los valores propios serán $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$.

2.5.1. Conectividad algebraica

La conectividad algebraica da una medida de la conexión de la red. Viene dada por el segundo valor propio más pequeño de la matriz laplaciana, λ_2 como se ha visto anteriormente, y cumple que:

$$0 \leq \lambda_2 \leq k_V \leq k_E \leq \min\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$$

donde k_V y k_E son las conectividades de nodo y arista respectivamente.

Cuanto más alto sea el valor de la conectividad algebraica más difícil será separar la red en distintas componentes y por tanto, más robusta será la red. Se debe tener en cuenta que la conectividad algebraica no es estrictamente creciente cuando se añaden aristas, por lo que se puede obtener la misma conectividad algebraica en grafos que con igual número de nodos, tienen distinto número de aristas, es decir, con distinta densidad d .

2.5.2. Conectividad natural

Como se acaba de ver, para obtener una buena medida de robustez se debe tener en cuenta el número de aristas de la red lo que implica, a su vez, que aumente con la densidad de la misma. Se presenta aquí la conectividad natural, que tendrá en cuenta el espectro completo de los valores propios de L y que en consecuencia, será sensible a las variaciones en el número de aristas [12]. Matemáticamente se define como:

$$\lambda = \ln \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{\lambda_i} \right)$$

El valor máximo que puede tomar es $\lambda = N - \log N$ por lo que se puede normalizar como $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{N - \log N}$.

Si en el grafo existen $0 \leq q < N$ componentes conexas entonces los valores propios de la matriz laplaciana $\mathcal{L}$ serán $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0$ y el primero no nulo será λ_{q+1} por lo que la conectividad natural será:

$$\lambda = \ln \left[\frac{1}{N} (\overbrace{1 + \dots + 1}^q + \sum_{i=q+1}^N e^{\lambda_i}) \right]$$

Si se extiende a $q = N$ será $\lambda = \log \left(\frac{N}{N} \right) = \log(1) = 0$. Por tanto, tenemos que la conectividad natural normalizada tendrá un rango de valores entre 0 para el caso de nodos totalmente desconectados hasta 1 para el caso de un grafo completo.

2.5.3. Resistencia y conductancia

La resistencia efectiva R_G da una medida de la robustez de la red en base al estudio de los caminos posibles entre dos nodos de la red y la longitud de los mismos. Un valor bajo de R_G será sinónimo de una red robusta. Matemáticamente se obtiene como:

$$R_G = N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

Si se normaliza la resistencia efectiva se obtiene la conductancia C_G calculada como:

$$C_G = \frac{N-1}{R_G}$$

En este caso $0 < C_G \leq 1$ y la red será más robusta cuanto más próximo a 1 sea su valor [11].

Capítulo 3

Análisis de redes.

En este capítulo se pondrá en aplicación lo descrito hasta ahora. Se presentará una muestra de redes de metro de distintas ciudades. En primer lugar, se tratará de caracterizar las redes mediante las medidas expuestas en la sección 1.3 para después evaluar su robustez con las medidas descritas en el capítulo 2.

La matriz de adyacencia de cada red ha sido obtenida de la base de datos del *Complex and Sustainable Urban Networks Laboratory* (CSUN) De la University of Illinois Chicago [7]. Partiendo de esta matriz, se ha utilizado el software Mathematica 13.2 para poder representar gráficamente las redes e identificar cada nodo con la estación correspondiente. Posteriormente, con este mismo software se ha procedido a calcular las distintas medidas de centralidad. Para las medidas de robustez, partiendo también de la matriz de adyacencia, se han utilizado algunas herramientas de R para calcular la matriz laplaciana y las diferentes medidas de robustez.

Aunque se han calculado todas las medidas definidas en el capítulo 1.3, aquí solo se presentarán las medidas globales de las redes, mientras que las medidas individuales de los nodos se han utilizado para cálculos de las medidas de robustez teóricas y numéricas que se presentarán más adelante.

Se debe tener en cuenta que este análisis se ha realizado con un espacio de representación reducido respecto al tamaño real de las redes de metro asociadas. Al no tener en cuenta estaciones monotónicas las medidas y coeficientes calculados no pueden tomarse como una representación fiel de la realidad, si no que se utilizan para realizar una comparación cualitativa entre las distintas redes. Conceptos como la longitud de camino no conservan el significado que tendrían en una red completa del espacio L-space, ya que en lugar de representar el número de estaciones de metro que es necesario atravesar para llegar a un cierto punto, en el espacio reducido se entendería como distancia entre estaciones en las que se puede realizar trasbordos. Es por esto que las medidas pueden resultar en cierta manera agresivas, marcando grandes diferencias entre redes que, en caso de tratarse de la red completa, no serían tan apreciables.

3.1. Propiedades de las redes

En primer lugar, se exponen las redes de metro incluidas en la muestra y el número de nodos y aristas de cada una, para poder tener una referencia del tamaño de cada una.

Red	Número de vértices N	Número de aristas M
Barcelona	29	42
Berlín	32	43
Boston	21	22
Hong Kong	17	18
Londres	83	121
Ciudad de México	35	52
Moscú	41	62
Nueva York	77	109
París	78	125
Seúl	71	111
Tokio	62	107

El rango de vértices de las redes de la muestra va desde los 17 nodos de la red de Hong Kong hasta los 83 nodos de la red de Londres. Se puede ver en las Figuras 3.1 y 3.2 las diferencias de tamaño de estas dos redes.

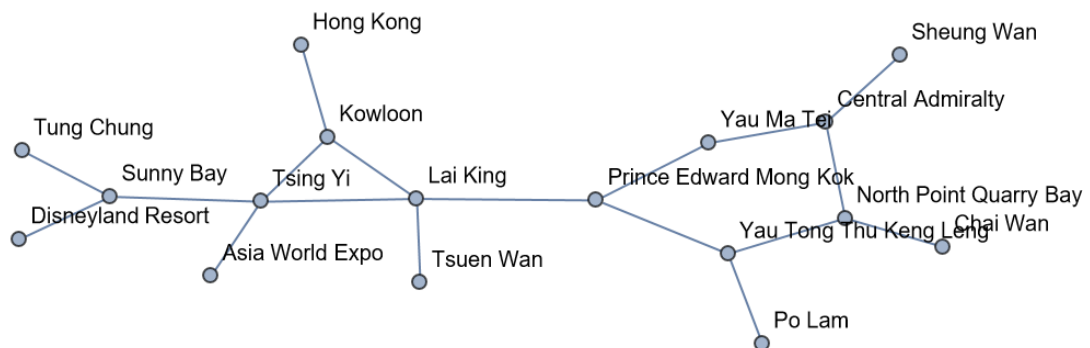


Figura 3.1: Grafo de la red de Hong Kong.



Figura 3.2: Grafo de la red de Londres.

En cuanto al número de aristas, Hong Kong vuelve a ser la red con menor número con 18 aristas. Por otro lado, la red que posee mayor número de aristas no es la misma que la que tenía mayor número de nodos. La red con más aristas es París con 125, como se puede ver en la Figura 3.3.

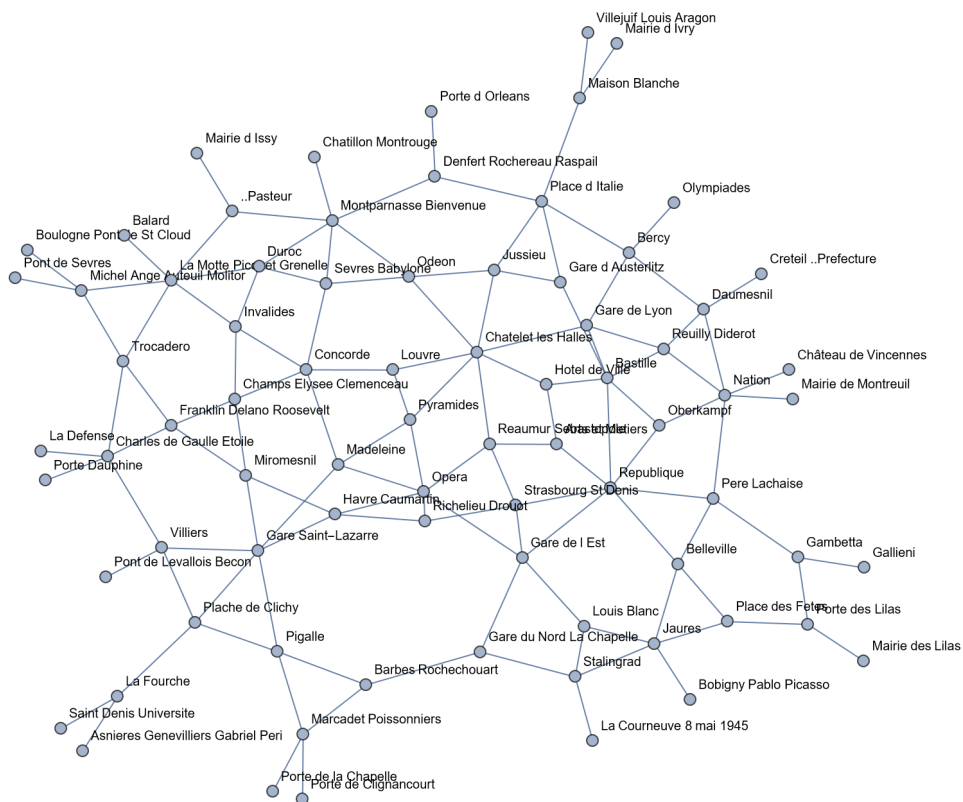


Figura 3.3: Grafo de la red de París.

Se puede ver cómo un mayor número de nodos no tiene por qué estar relacionado con un mayor número de aristas. La red con más aristas en proporción al número de nodos es la de Tokio, mientras que en el extremo opuesto se sitúa la red de Boston como la que menor número de aristas tiene por número de nodos.

De aquí en adelante en las tablas que se presenten, se ordenarán las redes por número de nodos en orden descendente.

3.1.1. Grado medio

A continuación, se presenta la tabla con el grado medio de las redes de la muestra.

Red	Grado medio $\langle k \rangle$
Londres	2.9156
París	3.2051
Nueva York	2.8311
Seúl	3.1267
Tokio	3.4516
Moscú	3.0243
Ciudad de México	2.9714
Berlín	2.6875
Barcelona	2.8965
Boston	2.0952
Hong Kong	2.1176

Como se detalló en la sección 1.3 el grado medio de la red es el número de aristas que, de media, convergen en un nodo. Se tiene aquí que la red de Tokio es la que tiene un mayor grado medio con $\langle k \rangle = 3,4516$, lo que significa que de media, a cada nodo de la red le atraviesan ese número de aristas. En la Figura 3.4 se representa el grafo asociado a la red de Tokio mediante un mapa de calor donde los colores más cálidos representan un mayor grado de los nodos y los más fríos un grado menor. Se destaca la estación de Otemahi con $k = 7$.

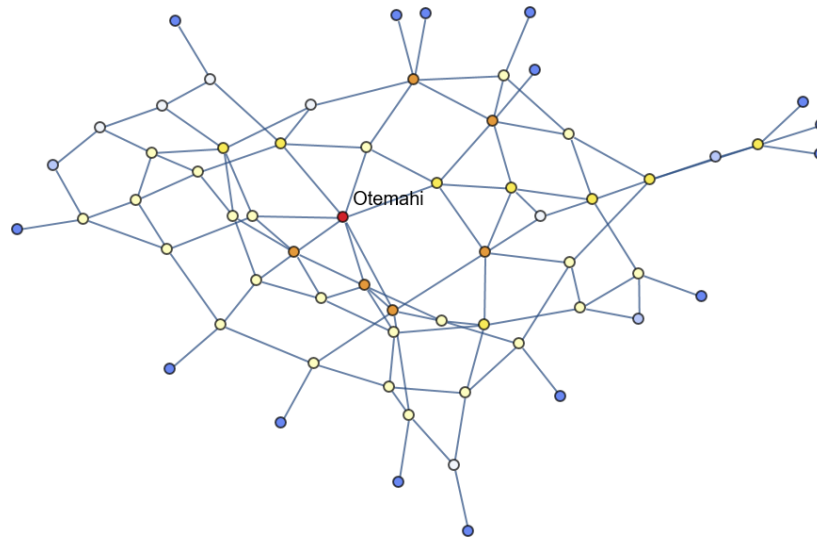


Figura 3.4: Grafo con mapa de calor de los grados de la red de Tokio.

Esto en parte está relacionado con lo que se comentó en la sección anterior respecto a la proporción entre aristas y nodos de las distintas redes. De igual manera, es la red de Boston la que menor grado medio presenta con $\langle k \rangle = 2,0952$.

3.1.2. Densidad

La **densidad** de una red muestra la diferencia entre su grafo y el grafo asociado a una red completa con el mismo número de nodos, por tanto, muestra cuán cerca está una red de ser ideal con todos los nodos conectados entre sí.

Red	Densidad d
Londres	0.03556
París	0.04162
Nueva York	0.03725
Seúl	0.04467
Tokio	0.05658
Moscú	0.07561
Ciudad de México	0.08739
Berlín	0.08669
Barcelona	0.10345
Boston	0.10476
Hong Kong	0.13235

Es lógico que la densidad esté muy lejos de 1 ya que en una red de metro las estaciones se conectarán con otras estaciones cercanas. No sería muy práctico realizar un túnel que atravesase la ciudad para conectar dos estaciones que se encontrasen en extremos opuestos de la ciudad.

La red con una mayor densidad es la de Hong Kong mientras que la menor densidad se corresponde con la red de Londres. Se puede interpretar que para las redes con un número de nodos elevado como Londres o Nueva York, es mucho más difícil conseguir una densidad alta ya que el número de aristas necesarias para ello sería inmenso. Por el contrario, para redes con un número de nodos menor como Hong Kong es más sencillo conseguir densidades más altas, ya que el número de aristas necesarias es significativamente menor.

Destaca la red de París, que presenta una densidad mayor de la que debería si se atiende a la relación entre densidad y número de nodos. Se puede interpretar por tanto, que la red de París cuenta con mayor número de conexiones entre nodos que otras redes de tamaños similares. Si se compara por ejemplo con la red de Londres, se aprecia que la red de París, a pesar de tener un número de nodos menor cuenta con mayor número de aristas, tal y como se aprecia en la Figura 3.5

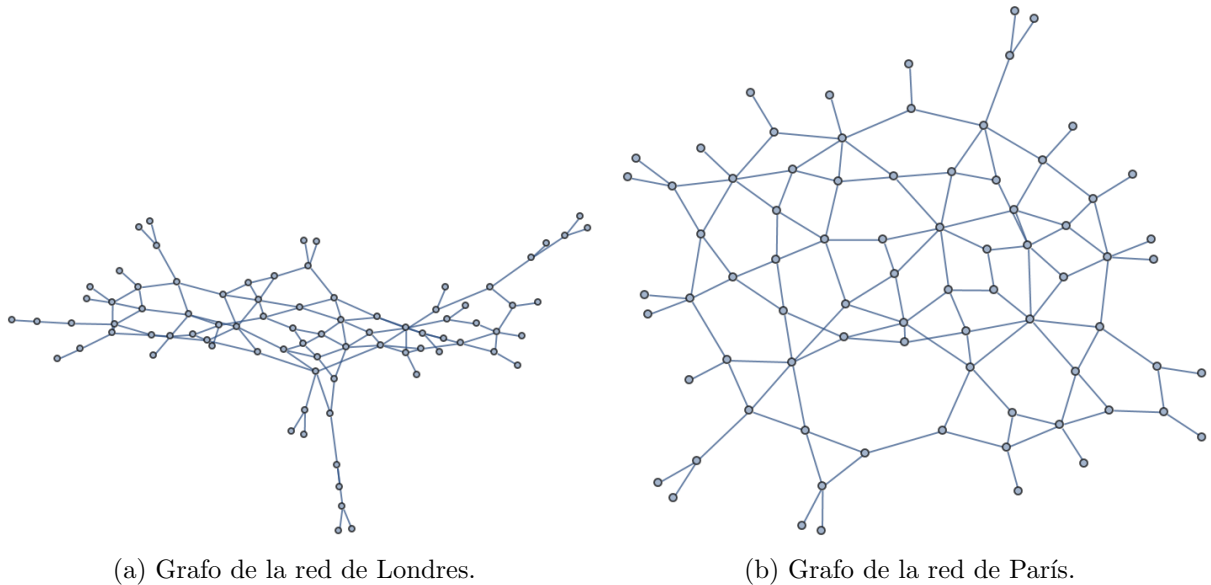


Figura 3.5: Comparación entre Londres y París.

3.1.3. Longitud de camino medio, diámetro y radio

Se presenta en primer lugar, la longitud de camino medio de las redes de la muestra.

Red	Longitud de camino medio L
Londres	5.53277
París	4.96104
Nueva York	5.27512
Seúl	5.11710
Tokio	4.23162
Moscú	3.70488
Ciudad de México	3.60000
Berlín	3.64315
Barcelona	3.53202
Boston	3.56190
Hong Kong	3.36765

Parece que sigue de nuevo la relación con el tamaño de la red. Esto puede tener como explicación que cuanto más grande es la red, menor es la probabilidad de encontrar una pareja de nodos que sean adyacentes.

Cabe destacar el caso de la red de París, que a pesar de tener un número de nodos mayor que la red de Nueva York, rompe con esta tendencia. En este caso la red compensa la distancia que puede existir entre dos nodos en extremos opuestos con elevado número de interacciones entre líneas que provoca que sea más sencillo encontrar un camino entre ambos nodos.

Si se compara por ejemplo el grafo de la red de París de la Figura 3.3 con el grafo de la red de Seúl de la Figura 3.6 se puede apreciar como en el caso de Seúl, en proporción, hay menos líneas intermedias lo que explica que Seúl tenga una mayor longitud de camino medio a pesar de tener un número de nodos significativamente menor.

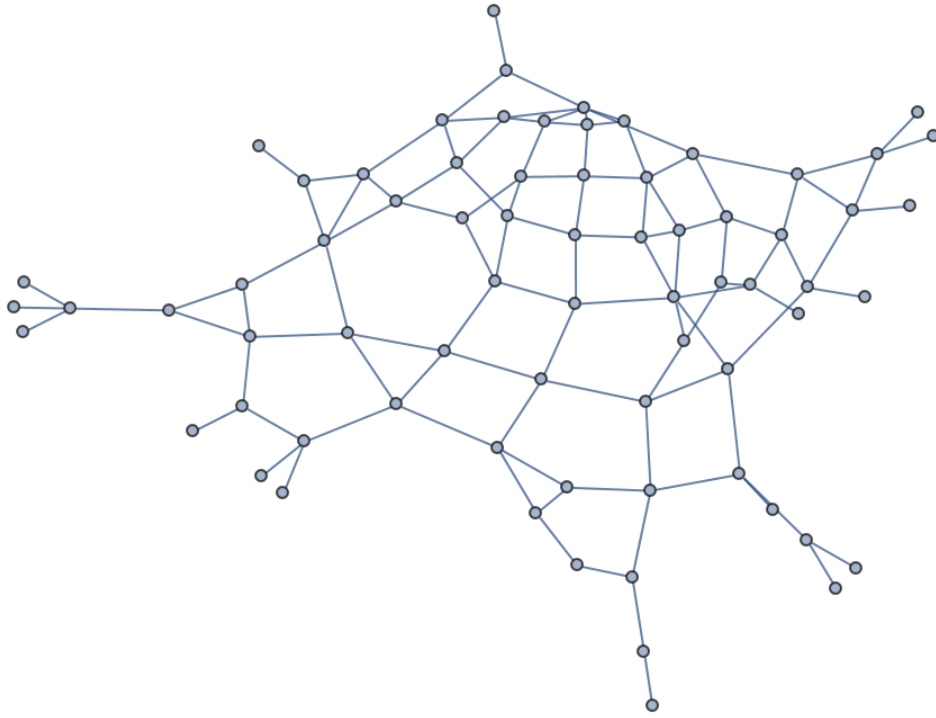


Figura 3.6: Grafo de la red de Seúl.

3.1.4. Coeficiente de clustering

Se puede ver a continuación, el resultado de las diferentes redes del estudio en cuanto a coeficiente de clustering o de agrupamiento.

Red	Clustering $\bar{C}_{CLU}$
Londres	0.1621620
París	0.1787560
Nueva York	0.0640569
Seúl	0.1196010
Tokio	0.1800000
Moscú	0.1727750
Ciudad de México	0.1489360
Berlín	0.1376150
Barcelona	0.2750000
Boston	0.0714286
Hong Kong	0.0967742

Destaca por encima del resto la red de Barcelona y denota claramente que, el tamaño de la red no tiene ninguna relación con el clustering de esta. En el caso de la red de Barcelona, puede verse, concretamente alrededor de la estación de Parallel, donde se desarrolla una estructura de triangulaciones cerradas y por tanto, el coeficiente de clustering de estos nodos es elevado como se ve en la Figura 3.7.

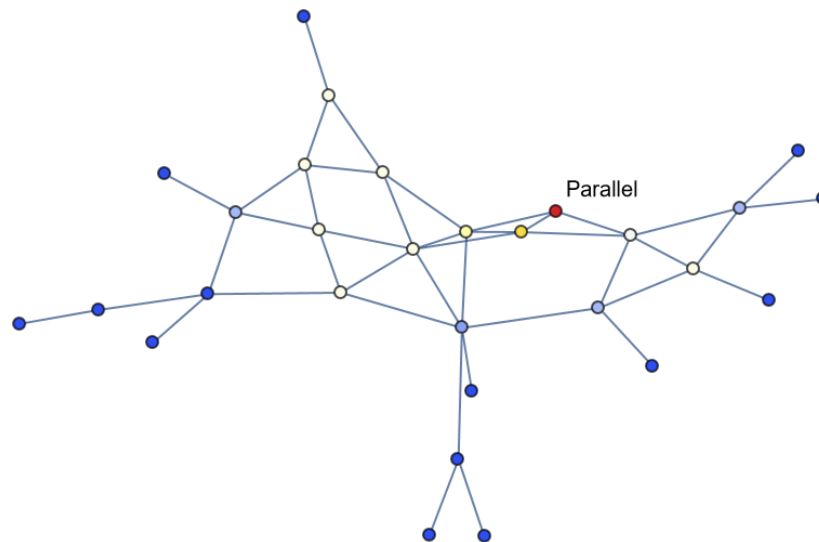


Figura 3.7: Mapa de calor del clustering de la red de Barcelona.

3.2. Medidas de robustez teóricas

Aunque algunas de las propiedades de redes que se acaban de mostrar pueden dar una idea de la resistencia que podrían ofrecer las redes ante ataques, a continuación se presentan los resultados obtenidos con las distintas medidas de robustez definidas en el capítulo 2 que darán unos resultados más fiables de cara al análisis de las redes.

No se expone en esta sección la conectividad de nodo y arista ya que en todos los casos se ha obtenido un valor de 1 siendo por tanto, irrelevante en este estudio.

3.2.1. Eficiencia

En primer lugar se presentan las medidas de eficiencia de las distintas redes.

Red	Eficiencia E_G
Londres	0.2425255
París	0.2663840
Nueva York	0.2531558
Seúl	0.2624400
Tokio	0.3073376
Moscú	0.3453339
Ciudad de México	0.3588095
Berlín	0.3569124
Barcelona	0.3739268
Boston	0.3711451
Hong Kong	0.4022409

Se aprecia una clara influencia del tamaño de la red con el valor de la eficiencia, teniendo las redes con menor número de nodos los valores más elevados de eficiencia. Si se atiende a la definición de eficiencia, tiene sentido esta relación debido a que se basa en la distancia entre nodos, por tanto, redes más pequeñas tendrán menor distancia entre nodos y por tanto, mayor eficiencia.

3.2.2. Coeficiente de asortatividad

Red	Asortatividad r
Londres	0.1721924
París	-0.1130087
Nueva York	0.0497808
Seúl	0.0951306
Tokio	0.0741656
Moscú	0.1507852
Ciudad de México	-0.2168707
Berlín	-0.2305522
Barcelona	0.1409619
Boston	-0.3010753
Hong Kong	-0.2237960

Las redes de París, Ciudad de México, Berlín, Boston y Hong Kong presentan tendencia disortativa, es decir, que los nodos de grado elevado tienen tendencia a conectarse con nodos de grado bajo, entre ellas destaca como más disortativa la red de Boston. En la

imagen 3.8 se puede ver cómo los nodos con mayor grado marcados se conectan en su mayoría con grados de nodo muy bajo lo que la hace muy vulnerable si alguno de esos nodos es atacado.

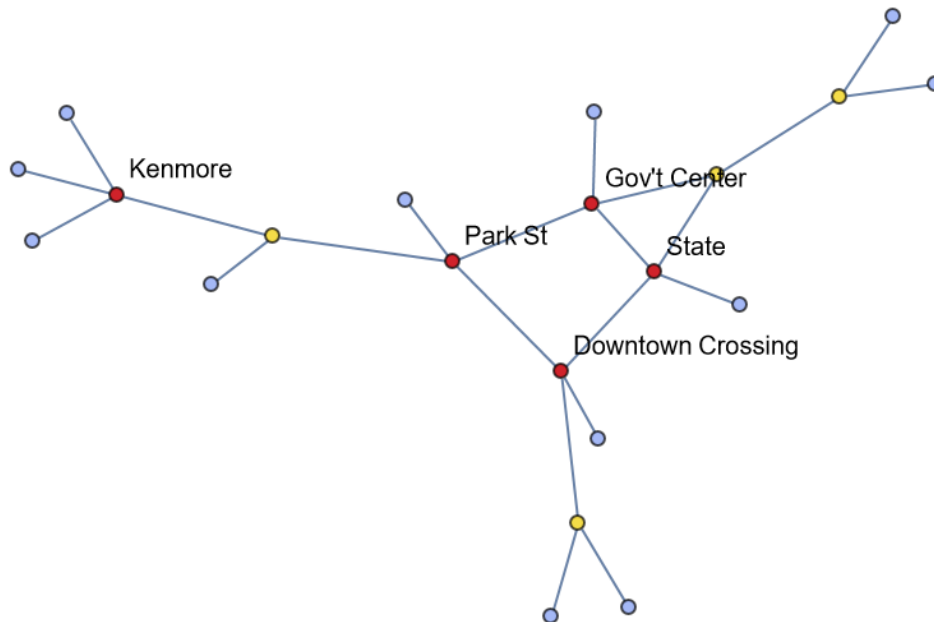


Figura 3.8: Mapa de calor de grado de nodos de la red de Boston.

En el lado contrario, la red que presenta una mayor asortatividad es la de Londres, en la Figura 3.9 se puede apreciar cómo los nodos con un grado elevado en la zona central de la red se conectan con nodos de grados elevados, mientras que en las zonas periféricas están conectados entre sí siendo todos ellos de grados bajos.

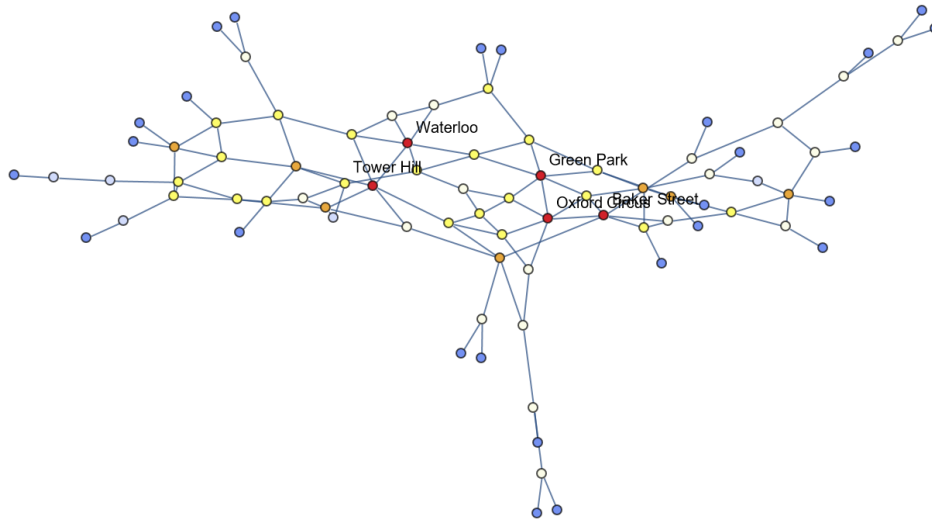


Figura 3.9: Mapa de calor de grado de nodos de la red de Londres.

3.2.3. Diversidad de grado y límite de percolación

A continuación se presenta la diversidad de grado de las distintas redes y el límite de percolación que ofrece una mejor perspectiva al estar normalizada en función del número de nodos.

Red	Diversidad de grado κ	Límite de percolación p_c
Londres	3.752066	0.636636
París	4.088000	0.676165
Nueva York	3.577982	0.612099
Seúl	3.711712	0.631229
Tokio	4.271028	0.694285
Moscú	4.080645	0.675392
Ciudad de México	3.711538	0.631205
Berlín	3.534884	0.605504
Barcelona	3.857143	0.650000
Boston	2.909091	0.476190
Hong Kong	2.722222	0.419354

Como era de esperar las redes con mayor número de nodos presentan una diversidad de grados mayor, ya que está relacionada con el número de nodos. Destaca la red de Tokio, que presenta una diversidad de grado mayor que otras redes con mayor número de nodos.

En cuanto al límite de percolación también se aprecia esa tendencia con el número de nodos ya que está relacionado directamente con la fracción de nodos que se deben eliminar de la red para descomponerla, por tanto, tiene sentido que en redes más pequeñas el número de nodos que se deban eliminar sea menor. Vuelve a destacar la red de Tokio, que puede verse en la Figura 3.4, como especialmente robusta en vista a este resultado, en contraste con la de Hong Kong, mostrada en la Figura 3.1, que es la más débil debido a su bajo número de nodos.

3.2.4. Índice r^T

A continuación se muestra el valor obtenido para cada red del índice r^T modificado y normalizado.

Red	$\tilde{r}^T$
Londres	0,451844
París	0,485028
Nueva York	0,439532
Seúl	0,476744
Tokio	0,509665
Moscú	0,464170
Ciudad de México	0,456635
Berlín	0,404574
Barcelona	0,444668
Boston	0,132103
Hong Kong	0,144783

Destaca de nuevo la red de Tokio como la que presenta un mayor índice de robustez seguida de la de París. En el lado opuesto se encuentran la red de Boston y la red de Hong Kong debido a que estas redes presentan una diversidad de caminos muy pequeña, lo que las convierte en redes vulnerables.

3.2.5. Conectividad algebraica

Continuando con la primera medida espectral, se muestra ahora la conectividad algebraica.

Red	Conectividad algebraica λ
Londres	0.05006568
París	0.10819400
Nueva York	0.05463926
Seúl	0.07829285
Tokio	0.13574930
Moscú	0.21163480
Ciudad de México	0.24026560
Berlín	0.15713820
Barcelona	0.16163690
Boston	0.10001000
Hong Kong	0.10546500

En este caso la red que presenta mayor robustez es la de Ciudad de México mostrada en la Figura 3.10. Esta medida esta relacionada con la dificultad de separar la red en componentes distintas y se basa en el valor del segundo autovalor más pequeño de la matriz laplaciana. Cabe recordar que esta medida no tiene en cuenta la densidad de la red y por tanto, obvia las aristas de la misma, siendo una medida poco fiable.

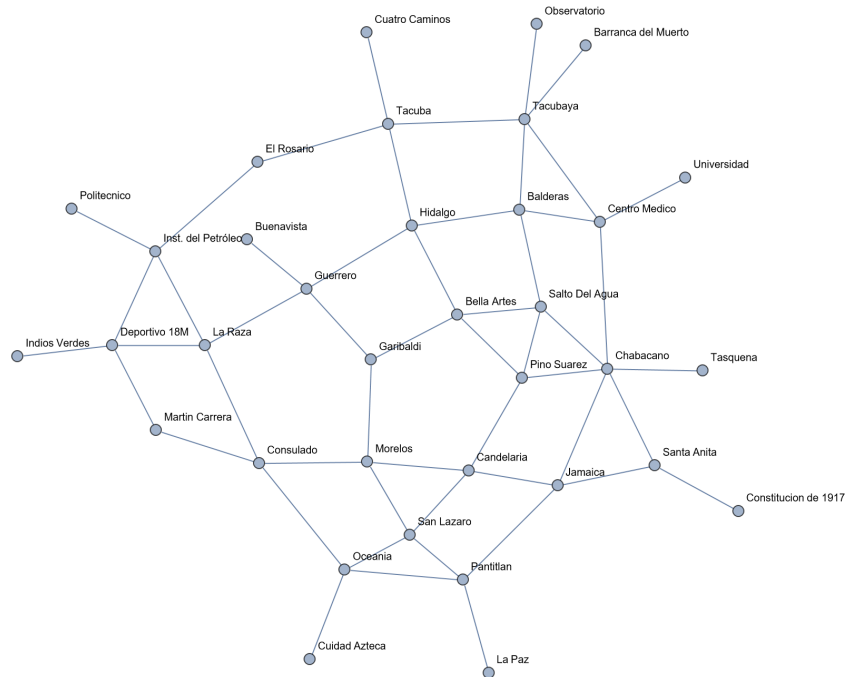


Figura 3.10: Grafo de la red de Ciudad de México.

3.2.6. Conectividad natural

Teniendo en cuenta el espectro completo de valores propios de la matriz laplaciana se tiene a continuación los valores obtenidos para la conectividad natural.

Red	Conectividad natural λ	Normalizada $\tilde{\lambda}$
Londres	5.402243	0.068747
París	5.886648	0.079934
Nueva York	5.287829	0.072778
Seúl	5.251431	0.078688
Tokio	6.065576	0.104808
Moscú	5.752514	0.154279
Ciudad de México	5.152090	0.163846
Berlín	4.809841	0.168563
Barcelona	5.377344	0.209784
Boston	4.067768	0.226547
Hong Kong	3.765273	0.265781

Se observa una clara relación de esta medida con el número de nodos donde ya no destaca ninguna red que salga de esta tendencia.

3.2.7. Resistencia y conductancia

Por último, se presenta la resistencia y la conductancia, fruto de normalizar la primera.

Red	Resistencia R_G	Conductancia C_G
Londres	9318.662	0.008799
París	5795.059	0.013287
Nueva York	7573.783	0.010034
Seúl	5287.291	0.013239
Tokio	2983.427	0.020446
Moscú	1520.933	0.026299
Ciudad de México	985.8759	0.034487
Berlín	992.3655	0.031238
Barcelona	844.2489	0.033165
Boston	651.4545	0.030700
Hong Kong	384.9333	0.041565

En estas medidas será sinónimo de robustez un bajo valor de resistencia y un valor cercano

a 1 de conductancia. Se ve claramente la influencia del tamaño de red en los valores, en parte producido porque estas medidas dependen de la longitud de camino y por tanto, cuanto menor sea más robusta será la red en estas medidas. Nuevamente destacar la red de Ciudad de México con unos valores que indican mayor robustez que redes de tamaño similar.

Capítulo 4

Medidas de robustez numéricas.

Por último, se presentan las medidas de robustez numéricas. Para estas medidas se han realizado una serie de simulaciones para comprobar cómo evoluciona la red ante distintos ataques. Estas simulaciones se han llevado a cabo eliminando nodos uno a uno hasta destruir la red. Se emplean tres estrategias para eliminar nodos:

- **Eliminación de nodos aleatoriamente:** se escoge aleatoriamente un nodo de la red y se elimina. Se repite este procedimiento hasta descomponer la red.
- **Eliminación de nodos por grado de centralidad:** Se elimina el nodo con mayor grado de la red, después se vuelve a calcular el grado de la red resultante y se elimina el nodo de mayor grado de esa red. Se continúa así hasta descomponer la red.
- **Eliminación de nodos por centralidad de intermediación:** se elimina el nodo con mayor centralidad de intermediación de la red, después se vuelve a calcular la centralidad de intermediación de los nodos de la red resultante y se elimina de nuevo el de mayor centralidad de intermediación. Se continúa así hasta descomponer la red.

Para analizar cómo cambia la red durante el proceso de eliminación de nodos se se evalúa la variación de la mayor componente conexa o LCC (Largest Connected Cluster). Además en este trabajo se han añadido simulaciones sobre la eficiencia de la red y la intermediación media de la red para obtener unas medidas de robustez numéricas basadas en estos parámetros.

4.1. Simulación LCC

La mayor componente conexa o LCC se define como:

$$LCC = \frac{N'}{N}$$

donde N' es el número de nodos de la mayor componente conexa después de haber eliminado nodos de la red original. Se entiende como componente conexa de un grafo a un subgrafo en el que dos vértices cualesquiera están conectados mediante un camino. Según se van eliminando nodos de la red se encontrará que algunos subgrafos pueden quedar desconectados de otros, sin que exista ningún camino que los conecte.

Se parte de la red inicial a la que se le elimina un nodo. Este nodo puede ser elegido aleatoriamente o, en caso de ataques dirigidos, elegido por ser el de mayor grado o mayor intermediación. Al eliminar ese nodo se comprueba cuál es el tamaño de la mayor componente conexa resultante. En caso de tener dos subgrafos se tomará el de mayor tamaño y se repite la eliminación de otro nodo en este subgrafo. Se prosigue de esta manera hasta conseguir desconectar totalmente todos los nodos.

Como indica su nombre, esta simulación trata de mostrar cuán grande es la red según se van eliminando nodos. Se representa el valor de LCC frente al número de nodos eliminados de donde se obtienen dos puntos relevantes $f_{90\%}$ y f_c . El primero, $f_{90\%}$ se define como la fracción de nodos que deben ser eliminados de la red para que la mayor componente conexa contenga un 90 % de los nodos de la red original. Por otro lado, f_c representa la fracción de nodos que deben ser eliminados para desintegrar por completo la red, o lo que es lo mismo, que la mayor componente conexa tenga solo 1 nodo.

A continuación se presentan los resultados de esta simulación donde para el caso de ataques aleatorios se han realizado 100 simulaciones. Se representa mediante una línea sólida verde la simulación realizada mediante ataques aleatorios, línea sólida azul para los ataques realizados por grado y línea sólida amarilla para los ataques por intermediación. Por último, las dos líneas punteadas rojas representan LCC igual al 90 % de la red y el caso de 1 solo nodo como mayor componente conexa respectivamente.

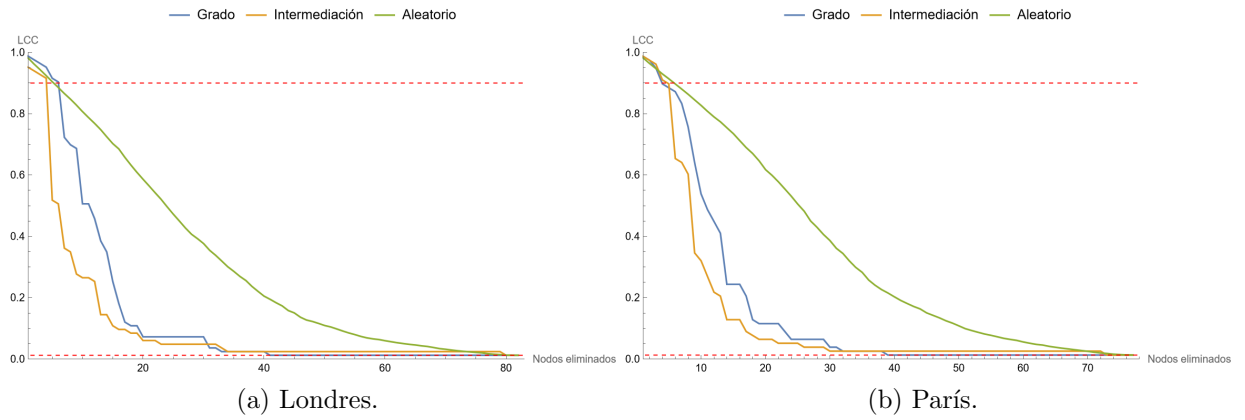


Figura 4.1: Simulaciones LCC: Londres y París.

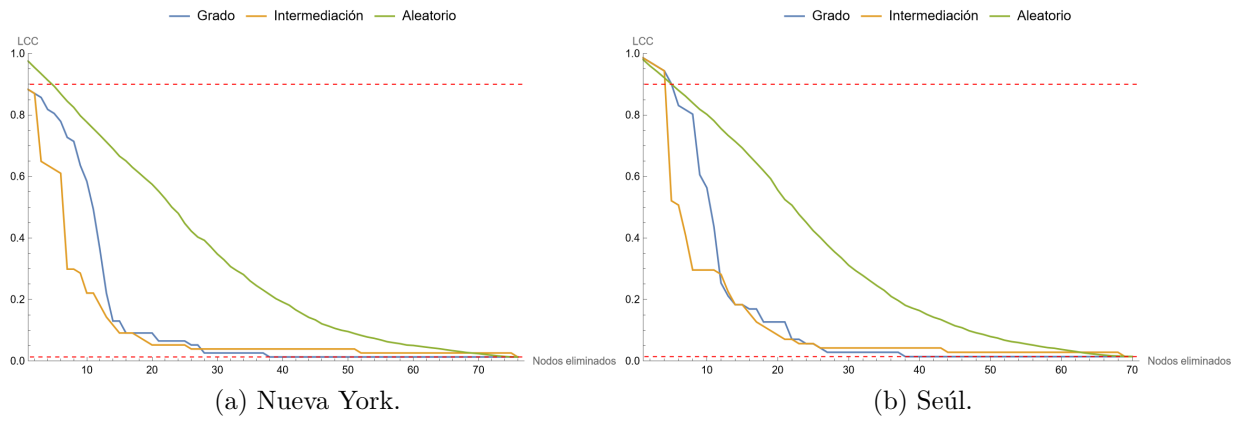


Figura 4.2: Simulaciones LCC: Nueva York y Seúl.

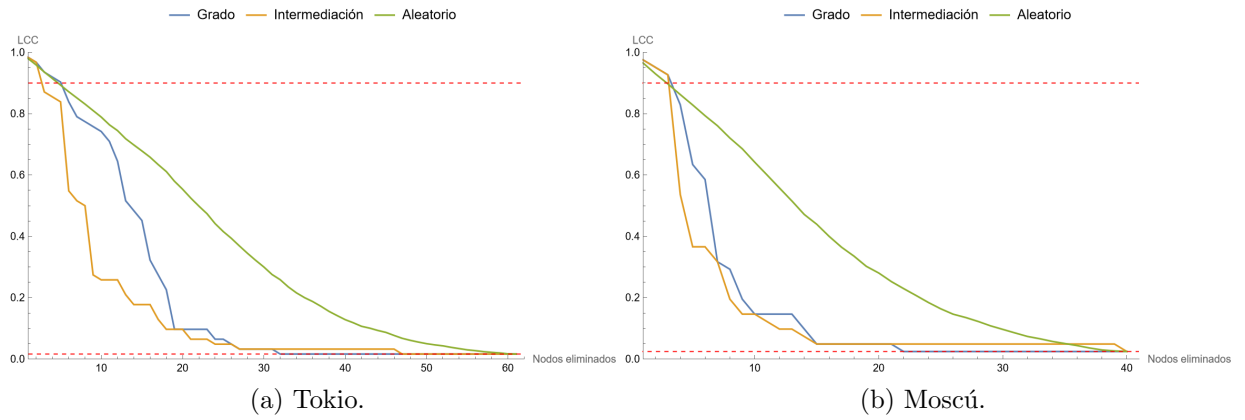


Figura 4.3: Simulaciones LCC: Tokio y Moscú.

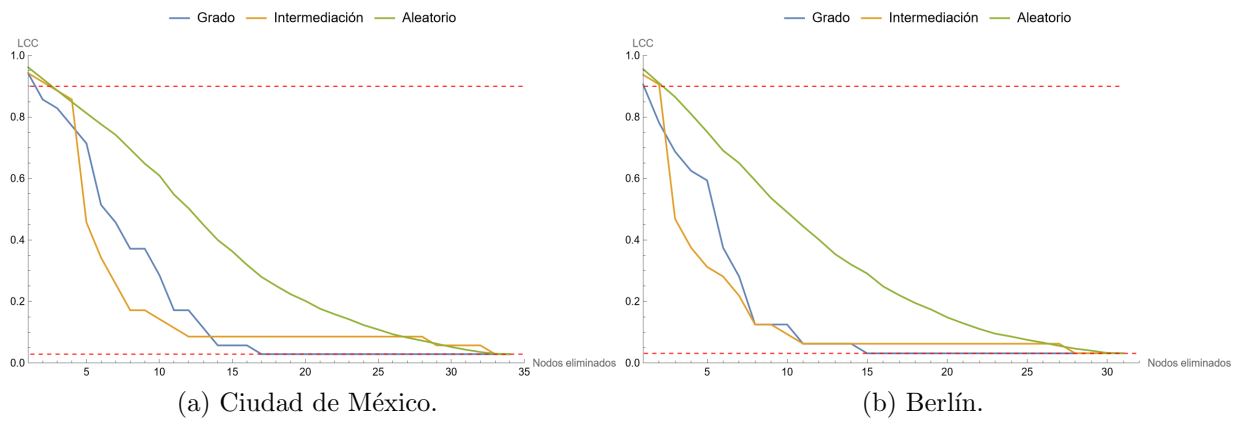


Figura 4.4: Simulaciones LCC: Ciudad de México y Berlín.

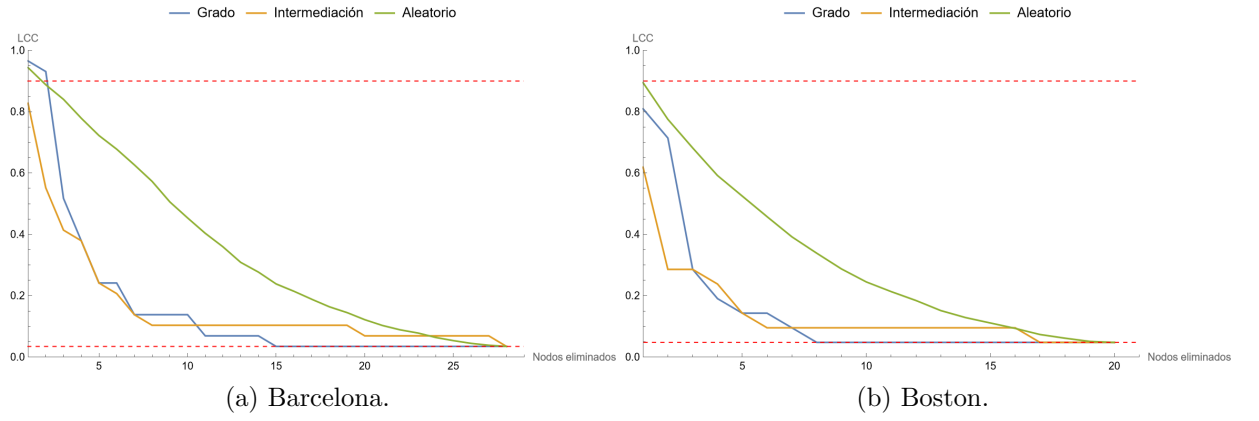


Figura 4.5: Simulaciones LCC: Barcelona y Boston.

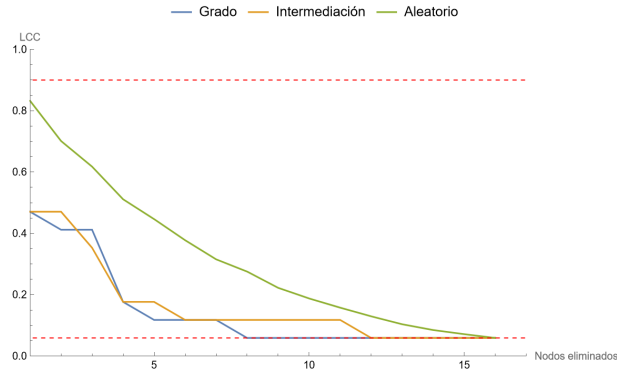


Figura 4.6: Simulaciones LCC: Hong Kong.

En todas las Figuras presentadas se puede apreciar claramente cómo los ataques basados en eliminación aleatoria de nodos son los que disminuyen de manera más lenta la mayor componente conexas, mientras que los ataques dirigidos ya sea por grado o intermediación consiguen provocar un daño mucho mayor a la red con un número bastante reducido de nodos eliminados.

A continuación se presenta los valores de $f_{90\%}$ y f_c para los ataques aleatorios a las distintas redes de la muestra.

Red	$f_{90\%}$	f_c
Londres	0.0634	0.9518
París	0.0707	0.9766
Nueva York	0.0601	0.9584
Seúl	0.0632	0.9698
Tokio	0.0778	0.9812
Moscú	0.0667	0.9756
Ciudad de México	0.0799	0.9708
Berlín	0.0710	0.9651
Barcelona	0.0634	0.9592
Boston	-	0.9500
Hong Kong	-	0.9294

Tanto en la red de Boston como en la de Hong Kong al eliminar un nodo de manera aleatoria la mayor componente conexa es inferior al 90 % de la red original, por eso no aparece ningún valor para $f_{90\%}$ en estas redes.

En la columna de $f_{90\%}$ destacan la red de Ciudad de México y Tokio como las que conservan mayor componente conexa ante los primeros ataques aleatorios. En la columna de f_c obtienen los mayores valores la red de Tokio y la red de París por lo que serán estas redes las que más ataques aleatorios soporten antes de su desconexión total. Como contrapartida, las redes de Boston y Hong Kong vuelven a ser las más débiles produciéndose su desconexión total antes que en el resto de redes, lo que muestra la debilidad de las redes más pequeñas.

Continuamos con la siguiente tabla, donde se presentan los valores de $f_{90\%}$ y f_c para ataques dirigidos por grado.

Red	$f_{90\%}$	f_c
Londres	0.0730	0.4939
París	0.0490	0.5000
Nueva York	-	0.4935
Seúl	0.0672	0.5352
Tokio	0.0818	0.5161
Moscú	0.0786	0.5365
Ciudad de México	0.0483	0.4857
Berlín	0.0329	0.4687
Barcelona	0.0721	0.5172
Boston	-	0.3809
Hong Kong	-	0.4705

Los ataques dirigidos por grado han resultado ser más efectivos que los ataques aleatorios en todas las redes. En la columna de $f_{90\%}$ sigue destacando Tokio como la red en la que se debe eliminar mayor porcentaje de nodos para que la mayor componente conexa sea el 90 % de la red inicial. En el lado opuesto, como redes a las que al eliminar un solo nodo ya contaban con menos del 90 % de la red inicial se sitúan Nueva York, Boston y Hong Kong. Llama la atención el caso de Nueva York, al ser la tercera red más grande de la muestra y aún así ser de las más débiles ante los primeros ataques dirigidos por grado.

En la columna de f_c solo hay 4 redes en las que sea necesario eliminar más de la mitad de los nodos de la red para desintegrarlas entre las que destaca como más robusta la red de Moscú. Boston continua siendo la red más débil siendo necesario eliminar un 38 % de los nodos de la red para su descomposición total.

Se muestran ahora los resultados para $f_{90\%}$ y f_c obtenidos de la simulación de ataques dirigidos por intermediación.

Red	$f_{90\%}$	f_c
Londres	0.0489	0.9518
París	0.0578	0.9358
Nueva York	-	0.9870
Seúl	0.0568	0.9718
Tokio	0.0462	0.7580
Moscú	0.0738	0.9756
Ciudad de México	0.0775	0.9428
Berlín	0.0636	0.8750
Barcelona	-	0.9655
Boston	-	0.8095
Hong Kong	-	0.7058

Teniendo en cuenta la columna de $f_{90\%}$ vuelven a presentarse como redes más débiles las más pequeñas junto con la red de Nueva York, ya que al eliminar el nodo con mayor centralidad de intermediación la mayor componente conexas de la red era inferior al 90 % de la red original. Como red más robusta ante estos ataques se encuentra la red de Ciudad de México en la que es necesario eliminar casi el 8 % de la red para que el tamaño de la mayor componente conexas disminuya un 10 %.

En las Figuras 4.1 a 4.5 se puede ver cómo los ataques dirigidos por intermediación producen una disminución mucho más rápida en la mayor componente conexas que los ataques dirigidos por grado en los primeros ataques de la simulación. Sin embargo, cuando la LCC baja por debajo de 10 los ataques dirigidos por intermediación parecen no afectar mucho a la red, manteniéndose constante la LCC en algunos casos a pesar de continuar eliminando nodos y necesitando eliminar más de un 95 % de los nodos de la red para lograr la desconexión equiparándose así a los ataques aleatorios a la red.

En la red de Hong Kong, la más pequeña de la muestra, cuyos resultados de la simulación se presentan en la Figura 4.6, este efecto de resistencia a los ataques dirigidos por intermediación cuando la LCC se sitúa en torno a los 10 nodos produce que los ataques dirigidos por grado y los ataques dirigidos por intermediación afecten de manera muy similar al tamaño de la LCC desde los primeros ataques, ya que desde el inicio esta red posee un número de nodos cercano a ese límite en el que los ataques dirigidos por intermediación son menos dañinos para la red.

4.2. Simulación de eficiencia

La siguiente medida de robustez numérica presenta cómo varía la eficiencia de la red cuando se van eliminando los nodos de esta. Al igual que antes, las estrategias de eliminación de nodos serán la eliminación de nodos aleatoriamente, realizando 100 simulaciones, la eliminación por grado de centralidad y la eliminación por intermediación. Para esta simulación se procede de manera análoga a la simulación anterior, solo que ahora se calcula la eficiencia de la mayor componente conexas que se obtiene después de cada eliminación.

En las siguientes Figuras se presentan los resultados de las redes que en la simulación *LCC* han mostrado mayor resistencia a los ataques, siendo estas las redes de París, Tokio, Moscú y Ciudad de México.

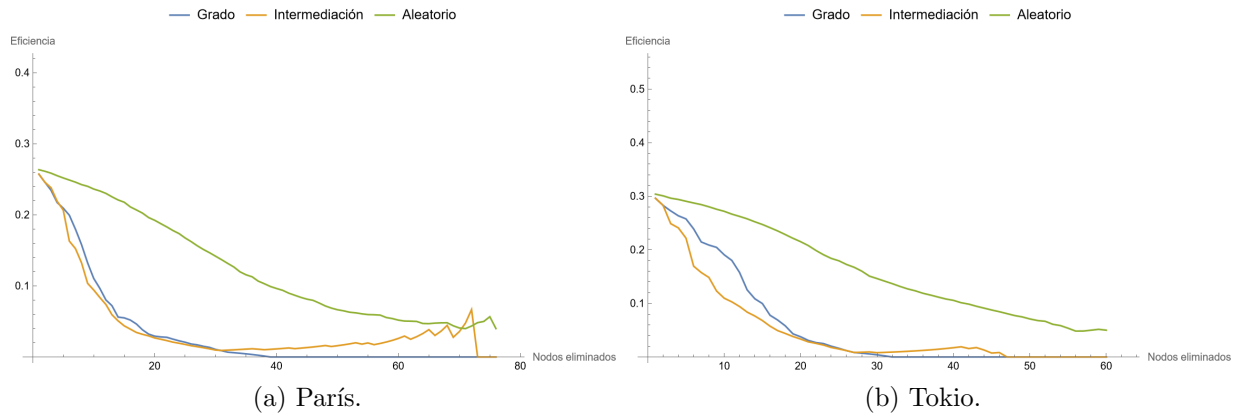


Figura 4.7: Simulaciones eficiencia: París y Tokio.

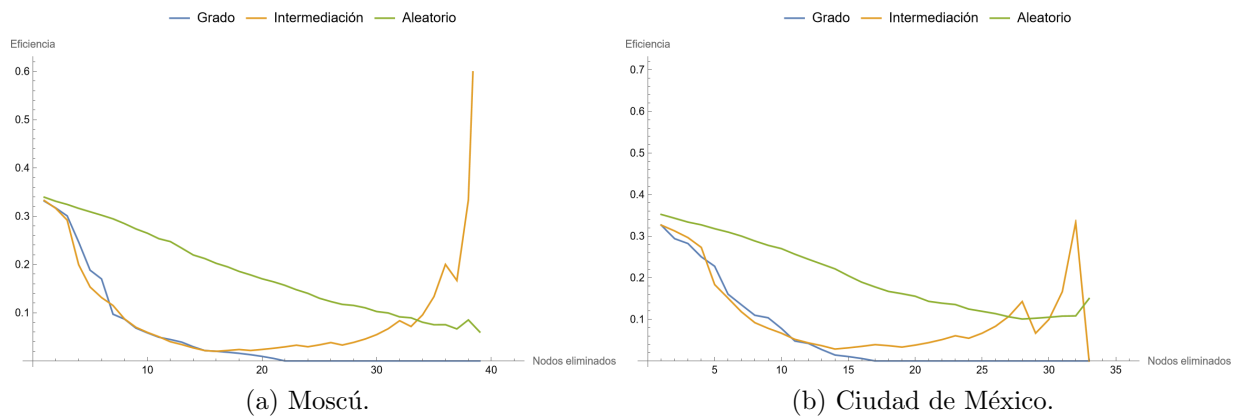


Figura 4.8: Simulaciones eficiencia: Moscú y Ciudad de México.

Al igual que en la simulación *LCC* los ataques aleatorios vuelven a ser los menos efectivos contra la red. Se presenta en la siguiente tabla la eficiencia mínima alcanzada por los ataques aleatorios y la disminución que esta supone respecto a la eficiencia inicial de la red.

Red	E_G mínima	Variación E_G (%)
París	0.0388	85.44
Tokio	0.0486	84.18
Moscú	0.0601	82.59
Ciudad de México	0.0999	72.16

La red que presenta una mayor robustez frente a los ataques aleatorios es por tanto, la red de Ciudad de México, algo que también se destacaba en la simulación *LCC*. Por el contrario, de esta selección de redes la que ve su eficiencia más resentida por estos ataques es la red de París. Cabe destacar que de estas cuatro redes, la que presentaba una mayor eficiencia inicial era la red de Ciudad de México, mientras que la red de París era la que contaba con menor eficiencia inicial. Parece por tanto, que cuanto mayor eficiencia presenta una red más difícil es conseguir que esta disminuya mediante ataques aleatorios.

En todas las redes los ataques dirigidos por grado consiguen lograr una eficiencia igual a 0 y como era de esperar, esta eficiencia nula se alcanza eliminando el mismo porcentaje de nodos de la red que indicaba la medida f_c de la simulación *LCC*, ya que una eficiencia igual a 0 implica que la distancia entre nodos es infinita, o lo que es lo mismo, que no existe conexión entre nodos. En la siguiente tabla se presenta el porcentaje de nodos eliminados por grado que provoca que la eficiencia sea nula en cada red.

Red	Nodos para $E_G = 0$ (%)
París	50.00
Tokio	51.61
Moscú	53.66
Ciudad de México	48.57

Los resultados concuerdan con los obtenidos en la simulación *LCC* para ataques dirigidos por grado, siendo la red de Moscú la más robusta de esta selección de redes y la red de Ciudad de México la más vulnerable.

En los ataques dirigidos por intermediación se aprecia el mismo fenómeno que en la simulación *LCC*. Con los primeros ataques la eficiencia desciende de manera rápida pero a partir de cierto porcentaje de nodos eliminados la eficiencia comienza a aumentar. Esto se debe a que a medida que se hace la red más pequeña las distancias entre nodos comienzan a disminuir, esto provoca que aumente la eficiencia [13], hasta que se produce la desconexión total lo que provoca que la eficiencia sea igual a 0.

Se presentan en la siguiente tabla el porcentaje de nodos que es necesario eliminar de la red para que la curva de eficiencia alcance ese mínimo y la variación que existe en la eficiencia entre la eficiencia inicial y la eficiencia en el mínimo de la curva.

Red	Nodos eliminados E_G mínima (%)	Variación E_G mínima (%)
París	38.46	96.53
Tokio	48.39	97.07
Moscú	39.02	93.97
Ciudad de México	40.00	92.17

Se ha decidido tomar este punto de referencia en lugar del punto donde la eficiencia se hace 0 porque al seguir eliminando nodos la eficiencia aumenta no porque la red se repare, si no porque disminuye el tamaño de la red. Se tienen entonces dos parámetros que denotan la resistencia de la red frente a ataques de intermediación, por un lado la red con menor reducción de la eficiencia es la de Ciudad de México, mientras que la red en la que es necesario eliminar mayor porcentaje de nodos para alcanzar ese mínimo es la de Tokio.

4.3. Simulación de intermediación media

La última medida de robustez numérica presenta la evolución de la intermediación media de la red según se van eliminando nodos de manera aleatoria o por grado o intermediación. Según se van eliminando nodos de la red se va calculando la centralidad de intermediación lo que permite ver cómo evoluciona. Se presentan a continuación las Figuras de las cuatro redes que en la simulación *LCC* presentaron mayor robustez, París, Tokio, Moscú y Ciudad de México.

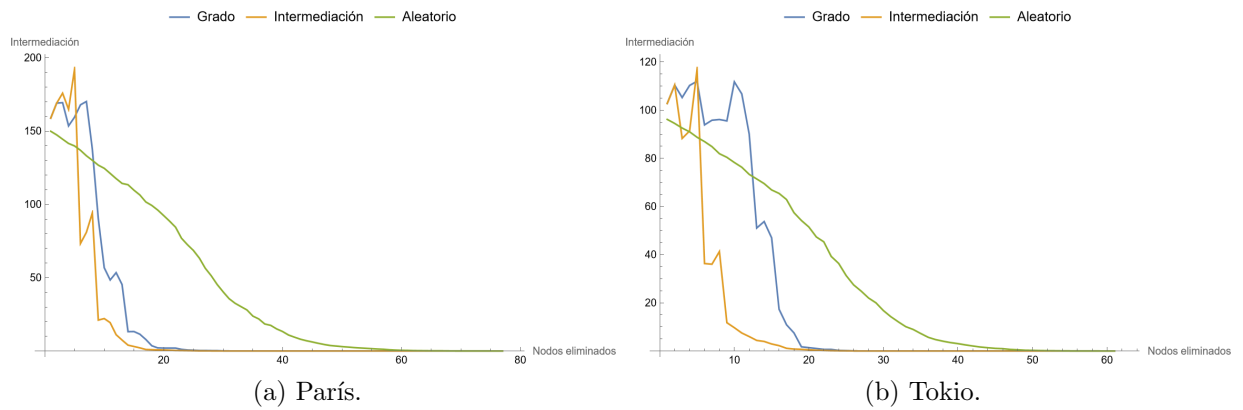


Figura 4.9: Simulaciones intermediación: París y Tokio.

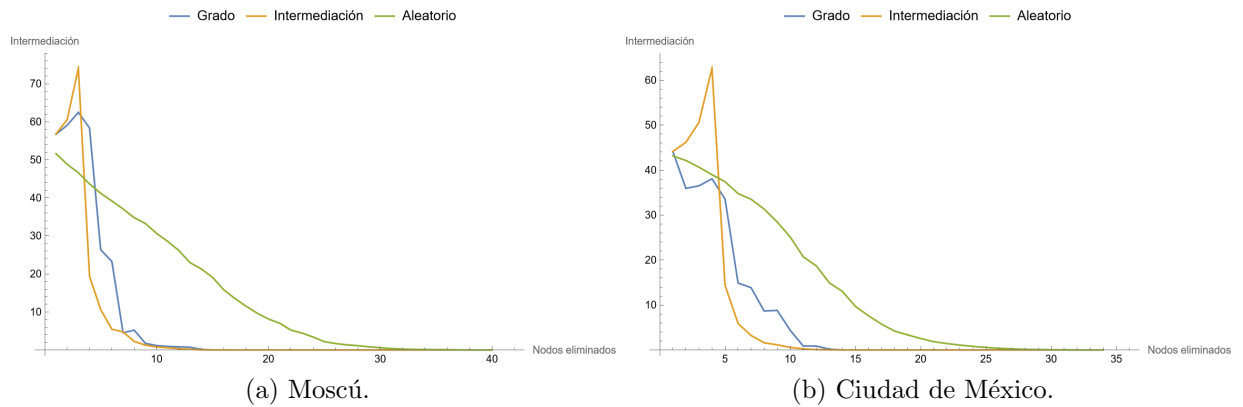


Figura 4.10: Simulaciones intermediación: Moscú y Ciudad de México.

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de nodos eliminados aleatoriamente que reduce la intermediación media a 0.

Red	Nodos eliminados $\overline{C}_B = 0$ (%)
París	81.83
Tokio	84.84
Moscú	88.68
Ciudad de México	85.71

De nuevo los ataques aleatorios son los menos efectivos contra todas las redes. Se puede extraer de esta tabla que la red que presenta mayor resistencia en esta simulación frente a ataques aleatorios es la de Moscú.

En cuanto a los ataques por grado como por intermediación se observa en las Figuras 4.9a y 4.10 cómo la centralidad de intermediación aumenta con los primeros nodos eliminados. Esto se debe a que al eliminar esos primeros nodos se mantiene el número de componentes conexas y, como se están eliminando nodos con valores de centralidad elevados, desaparecen una gran cantidad de caminos entre dos pares de nodos cualesquiera, lo que provoca que aumente la intermediación media.

Se presenta en la siguiente tabla el porcentaje de nodos que se deben eliminar en ambas simulaciones de ataques dirigidos para que la intermediación media sea igual a 0.

Red	Nodos eliminados por grado $\overline{C}_B = 0$ (%)	Nodos eliminados por intermediación $\overline{C}_B = 0$ (%)
París	33.33	29.49
Tokio	40.32	37.10
Moscú	36.59	34.15
Ciudad de México	40.00	34.29

Los valores de porcentaje de nodos eliminados para reducir la intermediación media a 0 no coinciden con los valores de las simulaciones anteriores de LCC y eficiencia, ya que mientras que una $LCC = 1$ y una eficiencia $E_G = 0$ implican una red totalmente desconectada, una intermediación media $\overline{C}_B = 0$ no implica la desconexión completa.

En ambos casos de ataques dirigidos, la red de Tokio resulta ser la más robusta ya que el porcentaje de nodos que es necesario eliminar para lograr $\overline{C}_B = 0$ es el más elevado.

Capítulo 5

Conclusiones.

En este trabajo se han definido los fundamentos de la teoría de redes, partiendo de cómo puede ser la representación de estas en forma matemática. Una vez transformado un plano de metro en una matriz con la que poder trabajar, se han definido distintas medidas de centralidad y parámetros que más adelante permitirían caracterizar las redes. Una vez presentadas las distintas medidas de centralidad se han definido medidas de robustez que serán útiles para poder comparar la capacidad que tendrán las redes de mantener su estructura y sus propiedades frente a ataques. Para ello también ha sido necesario introducir la matriz laplaciana, de la que se obtendrán medidas espectrales muy útiles en la caracterización de redes.

Definidos ya los fundamentos en los que se basa este trabajo se ha procedido con el análisis de una muestra de redes de metro. En primer lugar se ha relacionado el tamaño de la red como el número de nodos de la misma. A partir de ese punto y a lo largo de todo el trabajo se han ordenado las redes según este parámetro para ayudar a identificar dependencias de las medidas de centralidad y robustez con el número de nodos. En esta clasificación se determina que la red de Londres es la de mayor tamaño con 83 nodos, seguida muy de cerca por la red de París con 78 y la de Nueva York con 77.

En cuanto al grado medio de las redes, la red de Tokio se presenta como la que cuenta con un valor más alto, lo que significa que esta red presenta el mayor número de aristas que, de media, convergen en cada nodo. La red de Tokio es la quinta en tamaño y supera en este parámetro a otras redes con mayor número de nodos por lo que se puede determinar que el grado medio no depende del tamaño de la red.

Respecto a la densidad de la red, la red que presenta mayor densidad es la de Hong Kong, pero esto se debe al reducido número de nodos que presenta. Para las redes de gran tamaño tener una densidad elevada supone la existencia de un gran número de aristas, lo que trasladado al estudio de redes de metro significa la existencia de un gran número de túneles. Un valor alto de densidad ayudará a que la red de metro sea robusta, ya que ante un fallo en alguna estación, existirán alternativas que permitan sortear la incidencia

y que esta afecte lo menos posible al funcionamiento de la red. Es por ello que en lo que a este parámetro se refiere destaca como especialmente débil la red de Nueva York ya que presenta una densidad inferior que otras redes con mayor número de nodos como París.

Como ya se ha mencionado, al emplear un modelo de representación reducido solo se están teniendo en cuenta las estaciones transfer y termini, por lo que la longitud de camino medio no puede traducirse como el tiempo o el número de paradas que deberá atravesar un pasajero para llegar de una estación a otra. En este caso se puede interpretar como la distancia entre estaciones principales que existen en la red, entendiéndose como principales a estaciones por las que discurre más de una línea. Como era de esperar esta medida se ve afectada por el tamaño de la red, ya que cuanto mayor es el tamaño de esta mayor será el número de estaciones que podrá atravesar la línea de metro. Es por ello que destaca como especialmente eficiente o rápida la red de metro de París, ya que presenta una longitud de camino medio inferior a otras con mayor número de nodos.

El último de los coeficientes presentados es el de clustering, que ofrece una medida de las triangulaciones cerradas que presenta la red. Un valor alto de este coeficiente ayudará a que la red sea robusta ya que al tener tríos de nodos conectados entre ellos mediante triángulos cerrados se asegurará que ante el fallo de uno de ellos, la conexión entre los dos restantes se mantendrá. En este aspecto la red de Barcelona presenta un coeficiente de clustering elevado ya que es una red de pequeño tamaño que presenta un área alrededor de la estación de Parallel con un gran número de triángulos cerrados.

En cuanto a la eficiencia, la primera medida de robustez teórica, presenta una dependencia muy elevada con el tamaño de la red. Las redes más grandes cuentan con una eficiencia menor que las redes más pequeñas. Esto se explica mediante la propia definición de eficiencia. Al depender de la distancia entre nodos, las redes más pequeñas contarán con una distancia muy inferior a las redes de mayor tamaño y por tanto una eficiencia mucho mayor. No se puede destacar ninguna red en este sentido ya que todas siguen la misma tendencia respecto al tamaño.

La asortatividad también puede ayudar a determinar la robustez de una red. Una mayor asortatividad implica que los nodos con grado elevado se conectarán con nodos de grados elevados también, mientras que los nodos de bajo grado se conectarán entre ellos. Esto implica que, si el fallo se produce en un nodo de grado elevado, existirán otros nodos a su alrededor de grado también elevado que podrán asumir el tráfico que no puede pasar por el nodo afectado, y gracias a todas sus conexiones se podrá seguir accediendo al resto de la red sin que afecte mucho la incidencia. Si la incidencia se produce en un nodo de grado bajo, los nodos a los que estará conectado serán también de grado bajo, por lo que el porcentaje de estaciones de la red de metro que podrían quedar desconectadas del resto de la red sería bajo. En este aspecto destaca la red de Londres con una zona central de la red que cuenta con un número considerable de estaciones que presentan un grado

elevado, mientras que las estaciones de la periferia tienen a estar conectadas entre ellas siendo todas ellas de grados bajos.

El límite de percolación parece verse afectado también por el número de nodos de la red, ya que refleja que en las redes de mayor tamaño será necesario eliminar mayor porcentaje de nodos para descomponerla. Rompen la tendencia las redes de París y Tokio, presentando límites de percolación mayores que otras redes de menor tamaño. Esta última en concreto es la que presenta el valor de límite de percolación más elevado. En el lado opuesto se encuentra la red de Nueva York como especialmente débil en comparación a su tamaño.

El índice r^T introducido refleja un comportamiento similar al del resto de medidas de robustez teóricas. Penaliza a las redes de pequeño tamaño, debido a la poca diversidad de caminos entre nodos que presentan. Concuerda con otras medidas al señalar la red de Tokio como la más robusta a pesar de no ser de las redes de mayor tamaño de la muestra, seguida por la de París.

En la conectividad algebraica se presenta la red de Ciudad de México como la que exige un mayor esfuerzo para separar la red en componentes distintas. Esta medida al no tener en cuenta el número de aristas puede infravalorar redes con densidades altas, por lo que se presenta la conectividad natural que incluye el espectro completo de valores propios de la matriz laplaciana. En este caso se sigue una tendencia creciente según se disminuye el número de nodos, sin que sea destacable ninguna red.

Por último, la conductancia ofrece una medida en función de los caminos posibles entre dos nodos de la red y la longitud de los mismos. Las redes más pequeñas por tanto, obtendrán valores más elevados de conductancia al ser las que cuentan con caminos más cortos. Aquí destaca la red de Ciudad de México presentando una conductancia mayor que otras redes con menor número de estaciones.

Puede resumirse por tanto que atendiendo al estudio realizado, las redes que presentan mayor robustez respecto a las medidas teóricas son las redes de París, Tokio y Ciudad de México, al haber sido destacadas en varios de los parámetros. Llama la atención que en el caso de las redes de Tokio y Ciudad de México no son de las redes más grandes de la muestra. Estas redes presentan un mallado denso, sin líneas periféricas largas y con unas zonas centrales muy interconectadas. Por otro lado, en cuanto a las redes más débiles se muestra una tendencia por parte de las redes más pequeñas a contar con los menores índices de robustez, salvo por un caso: la red de Nueva York. Siendo la tercera en tamaño, la red de Nueva York ha sido la peor parada en varios análisis, en parte debido al número de apéndices de la red que presenta y la longitud de camino de los mismos tal y como se aprecia en la Figura 5.1.



Figura 5.1: Grafo de la red de Nueva York.

En cuanto a las medidas de robustez numéricas, obtenidas mediante simulaciones, todas las redes han demostrado gran resistencia frente a los ataques aleatorios. En la simulación *LCC* en todas las redes ha sido necesario eliminar más de un 90 % de los nodos de cada red para conseguir la desconexión completa, por lo que parece complicado que ataques a la red debidos a fallos fortuitos o catástrofes ambientales puedan llegar a desconectar ninguna de las redes de la muestra. En concreto las redes que han demostrado ser más robustas ante este tipo de ataques han sido las de las ciudades de Ciudad de México, Tokio y París.

Los ataques dirigidos por grado han sido los más efectivos para lograr la desconexión completa de las redes. Vuelve a destacar Nueva York como una red débil, ya que eliminando solo el nodo con mayor centralidad de grado, la red resultante disminuye en un 10 % su tamaño, y es necesario eliminar menos del 50 % de los nodos para lograr la desconexión total. Las redes más robustas frente a este tipo de ataques dirigidos son las de Moscú y Tokio.

Los ataques dirigidos por centralidad de intermediación resultan ser muy efectivos al eliminar los primeros nodos pero pasado un umbral de un 40 % aproximadamente de los nodos eliminados, este tipo de ataques pierde eficacia, siendo necesario en algunos casos eliminar más del 90 % de los nodos. Esta medida de robustez numérica concuerda en resultados cualitativos con la mayoría de resultados obtenidos de las medidas de robustez teóricas, lo que no hace si no respaldar los resultados obtenidos.

Las simulaciones realizadas sobre la eficiencia de las redes confirman lo detallado en la simulación anterior. Las redes analizadas son robustas frente a ataques aleatorios, destacando la red de Ciudad de México. Los ataques dirigidos por grado son muy efectivos, llegando a anular la eficiencia de todas las redes, lo que es sinónimo de la desconexión total. El porcentaje de nodos eliminados para lograr esta eficiencia nula coincide con el porcentaje de nodos eliminados de f_c . En los ataques dirigidos por intermediación vuelve a apreciarse que según se eliminan nodos estos ataques dirigidos pierden eficacia. Esto se debe a que al reducir el tamaño de la red, disminuyen las longitudes de camino y por tanto aumenta la distancia. La red que aquí presenta menor reducción de la eficiencia es la red de Ciudad de México mientras que la red en la que es necesario eliminar mayor número de estaciones para alcanzar un mínimo en la eficiencia es la de Tokio.

Por último, las simulaciones realizadas sobre intermediación no hacen sino confirmar lo constatado con las simulaciones anteriores. Las redes son robustas frente a ataques aleatorios pero débiles frente a ataques dirigidos. La red que presenta mayor robustez frente a estos ataques dirigidos es la de Tokio, conservando la intermediación media entre nodos durante más ataques.

Bibliografía

- [1] De Bona. A. et al. «A reduced model for complex network analysis of public transportation systems». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* Vol. 567 (2020).
- [2] U. Bandes et al. *Network Analysis*. 1st. Springer, 2005.
- [3] G. Chen et al. *Fundamentals of complex networks*. 1st. Higher Education Press, 2015.
- [4] S. Derrible et al. «The complexity and robustness of metro networks». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* Vol. 389 (2010).
- [5] W. Ellens. *Effective resistance and other graph measures for network robustness*. 2011.
- [6] E. Frutos Bernal et al. «Study of the structural and robustness characteristics of madrid metro network». En: *Sustainability* Vol. 11 (12) (2019).
- [7] University of Illinois Chicago. «Complex and Sustainable Urban Networks Laboratory». En: <http://csun.uic.edu/datasets.html> (July 2023).
- [8] M. E. Newmann. «Assortative mixing in networks». En: *Physical Review Letters* Vol. 89 (2002).
- [9] T. Shanmukhappa et al. «Recent Development in Public Transport Network Analysis from the Complex Network Perspective». En: *IEEE Circuits and Systems Magazine* Vol. 19 (2019).
- [10] H. Soh et al. «Weighted complex network analysis of travel routes on the Singapore public transportation system». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* Vol. 389 (2010).
- [11] M. A. P. Taylor. *Vulnerability Analysis for Transportation Networks*. 1st. Elsevier, 2017.
- [12] X. Wang et al. «Multi-criteria robustness analysis of metro networks». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* Vol. 19 (2019).
- [13] G. Zhang et al. «Enhancing the transmission efficiency by edge deletion in scale-free networks.» En: *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics* 76 1 Pt 2 (2007).

Anexo I: Código en Mathematica para índices estructurales y medidas de centralidad

Importación de datos

Se importa el archivo .dat con la matriz de adyacencia de la red

```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];  
[establece direct...][directorio de cuaderno]  
Grafo = Import["Barcelona.dat", "Table"];  
[importa][tabla]
```

Se muestra la matriz de adyacencia y el grafo de la red, en este caso la red de metro de Barcelona. Se identifica por su nombre a cada estación.

```
BarcelonaB =  
AdjacencyGraph[Grafo, VertexLabels → {1 → "Fondo", 2 → "Sagrada Familia",  
[grafo con adyacencia][etiquetas de vértices]  
4 → "Verdaguer", 5 → "Diagonal Provenca", 6 → "Sants Estacio", 7 → "Placa de Sants",  
[diagonal]  
8 → "Av. Carrilet", 9 → "Hospital de Bellvitge", 10 → "Moli Nui Cuitat Cooperativa",  
11 → "Comelia Centre", 12 → "Espanya", 13 → "Parallel", 14 → "Universitat",  
15 → "Catalunya", 16 → "Passeig de Gracia", 17 → "Urquinaona", 18 → "Clot",  
19 → "La Pau", 20 → "Pep Ventura", 21 → "Can Cuíes", 22 → "Trinitat Nova",  
23 → "Maragall", 24 → "Horta", 25 → "Canyelles", 26 → "Av Tibidabo",  
27 → "Gracia", 28 → "Reina Elisenda", 29 → "Zona Universitaria"}]
```

Estudio estructural de la red

Número de vértices y aristas

```
Nv = VertexCount[BarcelonaB]  
[número de vértices]  
Na = EdgeCount[BarcelonaB]  
[conteo de aristas]
```

Análisis de grados, grado medio y centralidad de grado

```
In[*]:= Cg = DegreeCentrality[BarcelonaB] / (Nv - 1) // N  
[centralidad de grado][v:]
```

Se puede identificar cuál es el nodo con mayor centralidad de grado

```
In[*]:= Max[Cg]  
[máximo]  
Position[Cg, Max[Cg]] [[1, 1]]  
[posición][máximo]
```

Se representa la centralidad de grado mediante un mapa de calor

```
In[*]:= HighlightGraph[BarcelonaB,
  destaca grafo
  Table[Style[VertexList[BarcelonaB][[i]], ColorData["TemperatureMap"][Cg[[i]] / Max[Cg]]],
    tabla estilo lista de vértices datos de colores máximo
    {i, 1, Nv}], PlotLabel → "Distribución en la red de los grados de los nodos"]
  etiqueta de representación
```

Grado medio

```
In[*]:= Total[DegreeCentrality[BarcelonaB]] / Nv // N
total centralidad de grado valor numérico
```

Densidad

```
In[*]:= N[GraphDensity[BarcelonaB]]
densidad de grafo
```

Longitud media de camino

```
In[*]:= longitudCaminos = 0;
Do[
  repite
  Do[
    repite
    longitudCaminos = longitudCaminos + Length[FindShortestPath[BarcelonaB, i, j]] - 1
      longitud encuentra camino más corto
    , {j, i + 1, Nv}]
  , {i, 1, Nv}]
Lmedia = (2 / (Nv * (Nv - 1))) * longitudCaminos // N
valor numérico
```

Centralidad de intermediación

```
In[*]:= Ci = 
$$\frac{2}{(Nv - 1) * (Nv - 2)}$$
 BetweennessCentrality[BarcelonaB]
centralidad de intermediación
```

Se representa en un mapa de calor

```
In[*]:= HighlightGraph[BarcelonaB,
  destaca grafo
  Table[Style[VertexList[BarcelonaB][[i]], ColorData["TemperatureMap"][Ci[[i]] / Max[Ci]]],
    tabla estilo lista de vértices datos de colores máximo
    {i, 1, Nv}], PlotLabel → "Centralidad de intermediación de los nodos"]
  etiqueta de representación
```

Se puede comprobar este cálculo del índice de intermediación

```

In[*]:= Cim = {};
Do[
  repite
  indice = 0;
  Do[
    repite

    Do[
      repite
      If[r ≠ i && s ≠ i,
        si
        pths = FindPath[BarcelonaB, s, r, {GraphDistance[BarcelonaB, s, r]}, All];
          encuentra un camino distancia en grafo todo
        (*Calcula todos los caminos más cortos entre r y s*)
        indi = 0;
        Do[ If[MemberQ[pths[[k]], i], indi = indi + 1], {k, 1, Length[pths]}];
          repite si ¿contenido en? longitud
        (*Comprueba si i está en ese camino*)
        indice = indice + indi / Length[pths];
          longitud
      ]

      , {r, s + 1, Nv}]

      , {s, 1, Nv}];

Cim = Append[Cim, indice],
añade
{i, 1, Nv}]

In[*]:= Cim *  $\frac{2}{(Nv - 1) * (Nv - 2)}$  // N
valor numérico

```

Centralidad de vector propio

```

In[*]:= Cvp = EigenvectorCentrality[BarcelonaB]
centralidad de autovector

```

Se representa en un mapa de calor

```

In[*]:= HighlightGraph[BarcelonaB, Table[
  destaca grafo tabla
  Style[VertexList[BarcelonaB][[i]], ColorData["TemperatureMap"][Cvp[[i]] / Max[Cvp]]],
  estilo lista de vértices datos de colores máximo
  {i, 1, Nv}], PlotLabel → "Centralidad de vector propio de los nodos"]
etiqueta de representación

```

Coeficiente de clustering local y global

Coeficiente de clustering global

```
In[*]:= GlobalClusteringCoefficient[BarcelonaB] // N
      |_____|_coeficiente de acumulación global_ |_____|_valor numérico_
```

Coeficiente de clustering de cada nodo

```
In[*]:= LC = LocalClusteringCoefficient[BarcelonaB] // N
      |_____|_coeficiente de acumulación local_ |_____|_v_i_
```

Se representa en un mapa de calor

```
In[*]:= HighlightGraph[BarcelonaB,
      |_____|_destaca grafo_
      Table[Style[VertexList[BarcelonaB][[i]], ColorData["TemperatureMap"][LC[[i]] / Max[LC]]],
      |_____|_tabla_ |_____|_estilo_ |_____|_lista de vértices_ |_____|_datos de colores_ |_____|_máximo_
      {i, 1, Nv}], PlotLabel -> "Coeficientes de clustering local de los nodos"]
      |_____|_etiqueta de representación_
```

Anexo II: Código en R para medidas de robustez teóricas

```

---
title: "Medidas de robustez"
author: "Jorge Contonente"
output:
  html_document: default
  pdf_document: default
---
```{r setup, include=FALSE}
knitr::opts_chunk$set(echo = TRUE)
...

```{r, include=FALSE}
library(igraph)
...

# Lectura del grafo

En este apartado se lee el grafo del archivo csv y se muestra
por pantalla.

```{r}
dat = read.csv('Tokio.csv', header=FALSE)
mat = as.matrix(dat)
g = graph.adjacency(mat, mode = c('undirected'))
plot(g)
...

Propiedades básicas número de vértices y de aristas

```{r}
Nv=gorder(g)
Na=gsize(g)
...

# Conectividad de nodo y arista

```{r}
vertex_connectivity(g)
...

```

```

```{r}
edge_connectivity(g)
```

Eficiencia
La eficiencia de la red es

```{r}
global_efficiency(g, directed = FALSE)
```

Coeficiente de asortatividad
El coeficiente de asortatividad de grado es
```{r}
assortativity_degree(g, directed = FALSE)
```

Basados en medidas espectrales
Para calcular las medidas espectrales se empieza calculando la
matriz laplaciana y sus valores propios

```{r}
matLap=laplacian_matrix(g)
ev <- eigen(matLap)
values <- ev$values

```

Una vez calculada se calculan los diferentes coeficientes de
robustez basados en medidas espectrales.

Conectividad algebraica
La conectividad algebraica es el segundo valor propio más
pequeño.
```{r}
sort(values)[[2]]

```

```



### Conectividad natural

La conectividad natural es

```{r}

$\log((1/N_v) * \sum(\exp(\text{values})))$

...

Si se normaliza queda

```{r}

$\log((1/N_v) * \sum(\exp(\text{values}))) / (N_v - \log(N_v))$

...

### Resistencia y conductancia efectiva

La resistencia efectiva es

```{r}

$\text{Ref} = N_v * \sum(1/\text{tail}(\text{sort}(\text{values}), N_v - 1))$

Ref

...

y la conductancia efectiva

```{r}

$(N_v - 1) / \text{Ref}$

...

# Diversidad de grado y límite de percolación

Para calcular la diversidad de grado es necesario obtener los grados de todos los nodos de la red

```{r}

$\text{grados} = \text{degree}(g)$

...

Una vez calculados los grados se calcula el grado medio de la red y el momento de segundo orden del grado

```
```{r}
```

```
gradoMedio=(1/Nv)*sum(grados)
```

```
momSegundoOrden=(1/Nv)*sum(grados^2)
```

```
```
```

Por último, la diversidad de grado viene dada por

```
```{r}
```

```
dk=momSegundoOrden/gradoMedio
```

```
dk
```

```
```
```

El límite de percolación es

```
```{r}
```

```
max(0,1-(1/(dk-1)))
```

```
```
```

Anexo III: Código en MAtemática para medidas de robustez numéricas

Medidas de robustez numéricas

Lectura de datos

```
In[*]:= SetDirectory[NotebookDirectory[]];  
         |establece direct... |directorio de cuaderno  
  
In[*]:= MatrizAdy = Import["Barcelona.dat", "Data"];  
         |importa  
  
         GrafoNm = AdjacencyGraph[MatrizAdy, VertexSize → 1.25,  
         |grafo con adyacencia |tamaño de vértice  
         VertexLabels → Table[i → Placed[vi, Center], {i, VertexCount[GrafoNm]}]];  
         |etiquetas de vérti... |tabla |colocado |centro |número de vértices  
  
In[*]:= Grafo = AdjacencyGraph[MatrizAdy]  
         |grafo con adyacencia  
  
         Nv = VertexCount[Grafo]  
         |número de vértices  
  
         Na = EdgeCount[Grafo]  
         |conteo de aristas
```

Simulación LCC

Eliminación de nodos según el grado de centralidad

```

GrafoAux = Grafo;
i = 1;
While[i ≤ Nv,
  mientras
  NvOrdered =
    Part[VertexList[GrafoAux], Ordering[DegreeCentrality[GrafoAux], All, Greater]]
    parte lista de vértices ordenación centralidad de grado todo mayor
  (* Se ordenan los vértices de mayor a menor centralidad de grado *);
  verticeRem = NvOrdered[[1]];
  (* Se elimina el vértice con mayor grado de centralidad *)
  GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
  elimina vértice
  (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
  aux = ConnectedComponents[GrafoAux];
  componentes conexas
  (* Número de componentes conexas del nuevo grafo *)
  longitudes = Table[Length[aux[[i]]], {i, 1, Length[aux]}];
  tabla longitud longitud
  (* Se guardan las longitudes,
  que permitirán conocer el número de elementos conectados en la nueva red *)
  maxsize[i] = Max[longitudes]; (* Se guarda la longitud de
  máximo
  la componente conexa que tenga más vértices conectados entre sí *)
  i++]
numerocomponentes1 = Table[maxsize[i], {i, 1, Nv}];
tabla
(* Se va eliminando cada vez el vértice con mayor centralidad de
grado y se guardan las longitudes de la "mayor" componente conexa *)

ListPlot[numerocomponentes1, AxesLabel → {"Número de nodos eliminados",
representación de lista etiqueta de ejes
  "Tamaño de la mayor componente conexa de la red"}, ImageSize → Large]
tamaño de i... grande
(* Se representa dicha longitud en función del número de vértices eliminados *)

```

Eliminación de nodos según la centralidad de intermediación

```

GrafoAux = Grafo;
i = 1;
While[i ≤ Nv,
  mientras
    NvOrdered =
      Part[VertexList[GrafoAux], Ordering[BetweennessCentrality[GrafoAux], All, Greater]]
      parte lista de vértices ordenación centralidad de intermediación todo mayor
    (* Se ordenan los vértices de mayor a menor centralidad de intermediación *);
    verticeRem = NvOrdered[[1]];
    (* Se elimina el vértice con mayor centralidad de intermediación *)
    GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
    elimina vértice
    (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
    aux = ConnectedComponents[GrafoAux];
    componentes conexas
    (* Número de componentes conexas del nuevo grafo *)
    longitudes = Table[Length[aux[[i]], {i, 1, Length[aux]}];
    tabla longitud longitud
    (* Se guardan las longitudes,
    que permitirán conocer el número de elementos conectados en la nueva red *)
    maxsize[i] = Max[longitudes]; (* Se guarda la longitud de
    máximo
    la componente conexas que tenga más vértices conectados entre sí *)
    i++];
numerocomponentes2 = Table[maxsize[i], {i, 1, Nv}];
tabla

(* Se va eliminando cada vez el vértice con mayor centralidad de
grado y se guardan las longitudes de la "mayor" componente conexas *)

ListPlot[numerocomponentes2, AxesLabel → {"Número de nodos eliminados",
representación de lista etiqueta de ejes
  "Tamaño de la mayor componente conexas de la red"}, ImageSize → Large]
tamaño de i... grande

(* Se representa dicha longitud en función del número de vértices eliminados *)

```

Eliminación de nodos aleatoriamente

```

NSim = 100; (* Número de simulaciones a realizar *)
Do[maxsize[k] = 0, {k, 1, Nv}];
  [repite
j = 1;
While[j ≤ NSim,
  [mientras
    i = 1;
    Secuencia = RandomSample[Range[Nv], UpTo[Nv]]; (* Se generan en
      [muestra aleatoria [rango [hasta
    cada iteración una secuencia de números aleatorios entre 1 y Nv *)
    GrafoAux = Grafo;
    While[i ≤ Nv,
      [mientras
        verticeRem = Secuencia[[i]]; (* Se van eliminando los
          vértices conforme aparecen en la lista de vértices aleatorios *)
        GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
          [elimina vértice
        (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
        aux = ConnectedComponents[GrafoAux];
          [componentes conexas
        (* Número de componentes conexas del nuevo grafo *)

        longitudes = Table[Length[aux[[i]]], {i, 1, Length[aux]}]; (* Se guardan las
          [tabla [longitud [longitud
        longitudes, que permitirá saber el número de elementos conectados en la red *)

        maxsize[i] = maxsize[i] + Max[longitudes]; (* Se guarda la longitud
          [máximo
        de la componente conexas que tenga más vértices conectados entre
        sí. Importante: se van añadiendo todas las máximas longitudes en cada simulación,
        ya que se quiere hacer un promedio de las NSim *)
        i++;
      ];
      j++;
    ];
    numerocomponentes3 = Table[maxsize[i] / NSim, {i, 1, Nv}];
      [tabla
    (* Se va eliminando cada vez el vértice aleatoriamente y se guardan las longitudes
    de la "mayor" componente conexas (sumándolas) para las NSim simulaciones,
    haciendo posteriormente el promedio *)

In[*]:= ListPlot[numerocomponentes3, AxesLabel → {"Número de nodos eliminados",
  [representación de lista [etiqueta de ejes
    "Tamaño de la mayor componente conexas de la red"}, ImageSize → Large]
  [tamaño de i... [grande

```

Salida gráfica conjunta

```
In[*]:= grafico =
  ListLinePlot[{numerocomponentes1 / Nv, numerocomponentes2 / Nv, numerocomponentes3 / Nv},
    gráfico de línea de una lista
    PlotLegends → Placed[{"Grado", "Intermediación", "Aleatorio"}, Above],
    leyendas de rep... colocado encima
    ImageSize → Large, AxesLabel → {"Nodos eliminados", "LCC"},
    tamaño de i... grande etiqueta de ejes
    PlotRange → {{1, Nv}, {0, 1}}]
    rango de representación

In[*]:= lineasHorizontales =
  {Dashed, Red, Line[{{0, 0.9}, {Nv, 0.9}}], Line[{{0, 1 / Nv}, {Nv, 1 / Nv}}]};
  rayado rojo línea

In[*]:= Show[grafico, Epilog → lineasHorizontales]
  muestra epílogo
```

Simulación eficiencia

(*Se define la eficiencia como una función*)

```
In[*]:= GlobalEfficiency[w_] := Module[{lv},
  módulo

  lv = VertexList[w];
  lista de vértices

  2 * 
$$\left( \left( \sum_{i=1}^{\text{VertexCount}[w]-1} \sum_{j=i+1}^{\text{VertexCount}[w]} \frac{1}{\text{GraphDistance}[w, \text{lv}[[i]], \text{lv}[[j]]]} \right) / \right.$$

    (VertexCount[w] * (VertexCount[w] - 1)) // N];
    número de vértices número de vértices valor numérico
```


Eliminación de nodos según el grado de centralidad

```

GrafoAux = Grafo;
i = 1;
While[i ≤ Nv,
  mientras
    NvOrdered =
      Part[VertexList[GrafoAux], Ordering[DegreeCentrality[GrafoAux], All, Greater]]
      parte lista de vértices ordenación centralidad de grado todo mayor
    (* Se ordenan los vértices de mayor a menor centralidad de grado *);
    verticeRem = NvOrdered[[1]];
    (* Se elimina el vértice con mayor grado de centralidad *)
    GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
    elimina vértice
    (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
    efficiency[i] = GlobalEfficiency[GrafoAux];
    (* Se calcula la eficiencia del nuevo grafo *)
    i++]
eficiencia1 = Table[efficiency[k], {k, 1, i}];
tabla

(* Se va eliminando cada vez el vértice con mayor centralidad de
grado y se guardan las longitudes de la "mayor" componente conexa *)

In[ ]:= ListPlot[eficiencia1,
  representación de lista
  AxesLabel → {"Número de nodos eliminados", "Eficiencia"}, ImageSize → Large]
  etiqueta de ejes tamaño de i... grande
ListPlot[Table[{k / Nv, eficiencia1[[k]]}, {k, 1, Length[eficiencia1]}],
  represent... tabla longitud
  AxesLabel → {"Fracción de nodos eliminados", "Eficiencia"}, ImageSize → Large]
  etiqueta de ejes tamaño de i... grande

```

Eliminación de nodos según centralidad de intermediación

```

GrafoAux = Grafo;
i = 1;
While[i ≤ Nv,
  mientras
    NvOrdered =
      Part[VertexList[GrafoAux], Ordering[BetweennessCentrality[GrafoAux], All, Greater]]
      parte lista de vértices ordenación centralidad de intermediación todo mayor
    (* Se ordenan los vértices de mayor a menor centralidad de grado *);
    verticeRem = NvOrdered[[1]];
    (* Se elimina el vértice con mayor grado de centralidad *)
    GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
    elimina vértice
    (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
    efficiency[i] = GlobalEfficiency[GrafoAux];
    (* Cálculo de la eficiencia del nuevo grafo *)
    i++]
eficiencia2 = Table[efficiency[k], {k, 1, i}];
tabla

(* Se va eliminando cada vez el vértice con mayor centralidad de
grado y se guardan las longitudes de la "mayor" componente conexa *)

```

```

In[*]:= ListPlot[eficiencia1,
  representación de lista
  AxesLabel → {"Número de nodos eliminados", "Eficiencia"}, ImageSize → Large]
  etiqueta de ejes tamaño de i... grande
ListPlot[Table[{k / Nv, eficiencia1[[k]]}, {k, 1, Length[eficiencia1]}],
  represent... tabla longitud
  AxesLabel → {"Fracción de nodos eliminados", "Eficiencia"}, ImageSize → Large]
  etiqueta de ejes tamaño de i... grande

```

Eliminación de nodos aleatoriamente

```

NSim = 100; (* Número de simulaciones a realizar *)
Do[efficiency[k] = 0, {k, 1, Nv}];
repite
(* Se da valor inicial 0 a las variables efficiency *)
j = 1;
While[j ≤ NSim,
mientras
  i = 1;
  Secuencia = RandomSample[Range[Nv], UpTo[Nv]];
muestra aleatoria rango hasta
  (* Se genera en cada iteración una secuencia de números aleatorios entre 1 y Nv *)
  GrafoAux = Grafo;
  While[i ≤ Nv,
mientras
    verticeRem = Secuencia[[i]]; (* Se van eliminando los
    vértices conforme aparecen en la lista de vértices aleatorios *)
    GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
elimina vértice
    (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
    efficiency[i] = efficiency[i] + GlobalEfficiency[GrafoAux];
    (* Se calcula la eficiencia del nuevo grafo.
    Importante: se van añadiendo todas las nuevas eficiencias en cada simulación,
    ya que se quiere hacer un promedio de las NSim *)
    i++;
  ];
  j++;
];
eficiencia3 = Table[efficiency[k] / NSim, {k, 1, i}];
tabla

```

```

In[ ]:= ListPlot[eficiencia3,
representación de lista
  AxesLabel → {"Número de nodos eliminados", "Eficiencia"}, ImageSize → Large]
etiqueta de ejes tamaño de i... grande
ListPlot[Table[{k / Nv, eficiencia3[[k]]}, {k, 1, Length[eficiencia1]}],
represent... tabla longitud
  AxesLabel → {"Fracción de nodos eliminados", "Eficiencia"}, ImageSize → Large]
etiqueta de ejes tamaño de i... grande

```

Salida gráfica conjunta

```

In[ ]:= ListLinePlot[{eficiencia1, eficiencia2, eficiencia3},
gráfico de línea de una lista
  PlotLegends → Placed[{"Grado", "Intermediación", "Aleatorio"}, Above],
leyendas de rep... colocado encima
  ImageSize → Large, AxesLabel → {"Nodos eliminados", "Eficiencia"}]
tamaño de i... grande etiqueta de ejes

```

Simulación de intermediación

Eliminación de nodos según grado de centralidad

```

GrafoAux = Grafo;
i = 1;
While[i ≤ Nv,
  mientras
  NvOrdered =
    Part[VertexList[GrafoAux], Ordering[DegreeCentrality[GrafoAux], All, Greater]]
    [parte [lista de vértices] [ordenación [centralidad de grado] [todo [mayor]
  (* Se ordenan los vértices de mayor a menor centralidad de grado *)
  verticeRem = NvOrdered[[1]];
  (* Se elimina el vértice con mayor grado de centralidad *)
  GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
  [elimina vértice
  (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
  betweeness[i] =
    (Sum[BetweennessCentrality[GrafoAux][[j]], {j, 1, VertexCount[GrafoAux]}]) /
    [s... [centralidad de intermediación] [número de vértices]
    VertexCount[GrafoAux];
    [número de vértices
  (* Se calcula la intermediación del nuevo grafo *)
  i++]
  betweeness1 = Table[betweeness[i], {i, 1, Nv}];
  [tabla
  (* Se va eliminando cada vez el vértice con mayor centralidad
  de grado y se guardan las intermediaciones de cada grafo *)

In[*]:= ListPlot[betweeness1,
  [representación de lista
  AxesLabel → {"Número de nodos eliminados", "Betweenness"}, ImageSize → Large]
  [etiqueta de ejes] [tamaño de i... [grande

```

Eliminación de nodos según centralidad de intermediación

```

GrafoAux = Grafo;
i = 1;
While[i ≤ Nv,
  mientras
  NvOrdered =
    Part[VertexList[GrafoAux], Ordering[BetweennessCentrality[GrafoAux], All, Greater]]
    parte lista de vértices ordenación centralidad de intermediación todo mayor
  (* Se ordenan los vértices de mayor a menor centralidad de grado *);
  verticeRem = NvOrdered[[1]];
  (* Se elimina el vértice con mayor grado de centralidad *)
  GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
  elimina vértice
  (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
  betweeness[i] =
    (Sum[BetweennessCentrality[GrafoAux][[j]], {j, 1, VertexCount[GrafoAux]}]) /
    s... centralidad de intermediación número de vértices
    VertexCount[GrafoAux];
    número de vértices
  i++]
betweeness2 = Table[betweeness[i], {i, 1, Nv}];
tabla

(* Se va eliminando cada vez el vértice con mayor centralidad
de grado y guardamos las intermediaciones de cada grafo *)

In[*]:= ListPlot[betweeness2,
  representación de lista
  AxesLabel → {"Número de nodos eliminados", "Betweenness"}, ImageSize → Large]
  etiqueta de ejes tamaño de i... grande

```

Eliminación de nodos aleatoriamente

```

NSim = 100; (* Número de simulaciones a realizar *)
Do[betweeness[k] = 0, {k, 1, Nv}];
repite
(* Se da valor inicial 0 a las variables betweeness *)
j = 1;
While[j ≤ NSim,
mientras
  i = 1;
  Secuencia = RandomSample[Range[Nv], UpTo[Nv]];
  muestra aleatoria rango hasta
  (* Se genera en cada iteración una secuencia de números aleatorios entre 1 y Nv *)
  GrafoAux = Grafo;
  While[i ≤ Nv,
mientras
    verticeRem = Secuencia[[i]]; (* Se van eliminando los
    vértices conforme aparecen en la lista de vértices aleatorios *)
    GrafoAux = VertexDelete[GrafoAux, verticeRem];
    elimina vértice
    (* Se guarda el nuevo grafo con el vértice eliminado *)
    betweeness[i] = betweeness[i] + (Sum[BetweennessCentrality[GrafoAux][[j]],
    s... centralidad de intermediación
      {j, 1, VertexCount[GrafoAux]}]) / VertexCount[GrafoAux];
    número de vértices número de vértices
    (* Se calcula la intermediación del nuevo grafo. Importante:
    se van añadiendo todas los nuevos valores de intermediación en cada simulación,
    ya que se quiere hacer un promedio de las NSim *)
    i++;
  ];
  j++;
];
betweeness3 = Table[betweeness[k] / NSim, {k, 1, i}];
tabla

In[*]:= ListPlot[betweeness3,
representación de lista
  AxesLabel → {"Número de nodos eliminados", "Betweenness"}, ImageSize → Large]
etiqueta de ejes tamaño de i... grande

```

Salida gráfica conjunta

```

In[*]:= ListLinePlot[{betweeness1, betweeness2, betweeness3},
gráfico de línea de una lista
  PlotLegends → Placed[{"Grado", "Intermediación", "Aleatorio"}, Above],
leyendas de rep... colocado encima
  ImageSize → Large, AxesLabel → {"Nodos eliminados", "Intermediación"}]
tamaño de i... grande etiqueta de ejes

```