



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Condiciones de pegado y límite de  
Buchdahl para configuraciones  
realistas en teorías de gravedad  $f(R)$

AUTOR: Raúl Carpio Fernández

TUTOR: Álvaro de la Cruz Dombritz

Curso 2022-2023



Firma del alumno:

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke at the bottom.

Firma del tutor:



# Resumen

El llamado límite de Buchdahl es una relación que aún no se comprende bien en el contexto de teorías extendidas de la gravedad que superan el marco einsteiniano. En este Trabajo de Fin de Máster, presentaremos un enfoque sistemático del problema para teorías  $f(R)$  en el formalismo métrico, comenzando con un análisis exhaustivo de las condiciones de pegado en estas teorías. Esto nos permitirá demostrar que las soluciones de fluido perfecto generalmente no se pueden pegar con un exterior de Schwarzschild. Estudiaremos las soluciones estáticas y esféricamente simétricas en las teorías  $f(R)$  y generalizaremos el límite de Buchdahl para dichas soluciones. Mostraremos que en estas teorías las estrellas pueden tener un contenido material adicional, y su corrimiento al rojo gravitacional puede ser mayor que 2, lo cual está prohibido en Relatividad General. Esto nos proporciona un test observacional para comprobar la validez de la Relatividad General, y por ende de modelos  $f(R)$  que se juzgen viables.

# Abstract

The so-called Buchdahl limit is a relationship that is still not well understood in the context of extended theories of gravity that go beyond the Einstein framework. In this Master's Thesis, we will present a systematic approach to the problem for  $f(R)$  theories in the metric formalism, starting with a comprehensive analysis of the matching conditions in these theories. This will allow us to demonstrate that perfect fluid solutions generally cannot be matched with a Schwarzschild exterior. We will study static and spherically symmetric solutions in  $f(R)$  theories and generalize the Buchdahl limit for such solutions. We will show that in these theories, stars can have additional material content, and their gravitational redshift can be greater than 2, which is prohibited in General Relativity. This provides an observational test to verify the validity of General Relativity and, consequently, of viable  $f(R)$  models.

## Notación

A lo largo de este trabajo vamos a utilizar el sistema de unidades geometrizadas, en el que la velocidad de la luz  $c$  y la constante de gravitación universal  $G$  se fijan en la unidad, es decir, que consideramos  $c = G = 1$ . Además, tendremos en cuenta la signatura  $(-+++)$ . También vamos a usar la siguiente notación:

- Derivada parcial:  $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
- Tensor métrico:  $g_{\mu\nu}$
- Símbolos de Christoffel:  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \equiv \frac{1}{2}g^{\alpha\mu} (\partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\mu} - \partial_\mu g_{\beta\gamma})$
- Tensor de Riemann:  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \equiv \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\nu - \Gamma_{\nu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\nu$
- Tensor de Ricci:  $R_{\mu\nu} \equiv R_{\beta\alpha\delta}^\alpha$
- Escalar de Ricci:  $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
- Derivada covariante:  $\nabla$
- Operador de d'Alembert:  $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$
- Derivadas respecto de  $R$ :  $f_R \equiv \frac{df(R)}{dR}$ ,  $f_{2R} \equiv \frac{d^2 f(R)}{dR^2}$ ,  $f_{3R} \equiv \frac{d^3 f(R)}{dR^3}$
- Derivadas respecto del tiempo  $t$ :  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$ ,  $\ddot{f} \equiv \frac{d^2 f}{dt^2}$

En general, los índices griegos tomarán los valores de 0 a 3 y los índices latinos de 1 a 3.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Gravedad métrica <math>f(R)</math></b>	<b>4</b>
<b>3. Condiciones de pegado</b>	<b>7</b>
3.1. Geometría diferencial de hipersuperficies . . . . .	7
3.2. Condiciones de pegado en Relatividad General . . . . .	10
3.3. Condiciones de pegado en teorías $f(R)$ . . . . .	11
3.4. Ejemplo: Estrella estática y esféricamente simétrica de fluido perfecto en teorías $f(R)$ . . . . .	13
<b>4. Soluciones estáticas y esféricamente simétricas en teorías <math>f(R)</math></b>	<b>15</b>
4.1. Fenomenología en Relatividad General . . . . .	16
4.1.1. Solución interior . . . . .	17
4.1.2. Solución exterior . . . . .	20
4.2. Estrellas de neutrones . . . . .	22
4.3. Fenomenología en $f(R) = R + \alpha R^2$ . . . . .	23
4.4. Integración hacia dentro para $f(R) = R + \alpha R^2$ . . . . .	24
4.5. Soluciones de Clifton en teorías de gravedad modificada . . . . .	28
4.6. Masa gravitacional para un observador lejano . . . . .	29
<b>5. Límite de Buchdahl</b>	<b>31</b>
5.1. Estrellas inmersas en el vacío de Schwarzschild en teorías $f(R)$ . . . . .	32
5.2. Generalización del límite de Buchdahl en teorías $f(R)$ . . . . .	38
<b>6. Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>Apéndices</b>	<b>49</b>
<b>A. Derivación de las ecuaciones de campo en teorías <math>f(R)</math></b>	<b>49</b>
<b>B. Método del disparo para obtener el valor de <math>B(0)</math> en el formalismo métrico</b>	<b>51</b>
<b>C. Cálculo numérico de la masa gravitacional en teorías <math>f(R)</math></b>	<b>51</b>
<b>D. Resultados para comprobar la relación (5.87)</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# 1. Introducción

A pesar de ser la teoría de gravedad más importante, actualmente la Relatividad General (RG) presenta algunos problemas. En primer lugar, no es una teoría renormalizable, lo cual es necesario para poder cuantizarla de manera convencional. Por otro lado, es necesario introducir un nuevo tipo de materia, la materia oscura, para poder explicar algunos efectos gravitacionales, como las curvas de rotación de las galaxias. Además, también es necesario introducir una energía oscura para poder explicar la expansión del universo. Según el modelo  $\Lambda$ CDM y los datos observacionales, se estima que la cantidad de materia y energía del universo se divide aproximadamente de la siguiente manera: un 4% de materia bariónica (materia ordinaria), un 20% de materia oscura y un 76% de energía oscura [1]. Pero a día de hoy no se ha demostrado experimentalmente ni la existencia de la materia oscura ni la de energía oscura, lo cual plantea un gran problema, ya que el 95% del contenido del universo es totalmente desconocido para nosotros.

Las teorías de gravedad modificada o teorías de gravedad extendida son teorías alternativas a la RG de Einstein, que intentan explicar algunos de estos fenómenos sin la necesidad de introducir nuevos tipos de materia o energía. Aunque puede parecer que estas teorías de gravedad son muy actuales, pocos años después de hacerse pública la teoría de la RG, tanto Weyl en 1919 como Eddington en 1923 comenzaron a realizar modificaciones a la teoría [2, 3]. Entre las teorías de gravedad extendida más simples se encuentran las teorías  $f(R)$ , que reemplazan el Lagrangiano de la RG por una función del escalar de Ricci. Estas teorías son interesantes tanto en el campo de la gravitación como en astrofísica y cosmología.

En este trabajo vamos a estudiar las teorías de gravedad métrica  $f(R)$  (o formulación métrica), que se trata de teorías de gravedad de cuarto orden<sup>1</sup>. En la primera parte del trabajo vamos a desarrollar la formulación métrica e introduciremos las ecuaciones de campo para estas teorías, así como algunas propiedades interesantes. También presentaremos algunos modelos de teorías  $f(R)$  y comentaremos sus aplicaciones.

A continuación, hablaremos sobre las condiciones de pegado necesarias para poder juntar diferentes regiones del espacio-tiempo. Para ello, veremos algunos conceptos básicos sobre geometría diferencial de hipersuperficies. Con esto, podremos discutir cuales son las condiciones de pegado, tanto en Relatividad General como en las teorías  $f(R)$ . Además, obtendremos estas condiciones para el caso de una estrella estática y con simetría esférica.

Después, estudiaremos las soluciones de las ecuaciones de campo para el caso de estrellas estáticas y esféricamente simétricas. Primero analizaremos las soluciones que obtendremos para RG, donde obtendremos por separado la solución interior y la exterior. En segundo lugar, resolveremos las ecuaciones de campo para el modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$ , utilizando ecuaciones de estado correspondientes a estrellas de neutrones y discutiremos los resultados. En tercer lugar, hablaremos sobre la definición de masa gravitacional en las teorías de gravedad  $f(R)$ .

Finalmente, trabajaremos con una relación conocida como límite de Buchdahl, que se

---

<sup>1</sup>Se llaman de cuarto orden porque en las ecuaciones de campo van a aparecer derivadas de cuarto orden de la métrica. La gravedad métrica es un ejemplo de este tipo de teoría.

trata de una desigualdad que aparece en Relatividad General. Esta relación da lugar a un límite máximo para la relación entre la masa y el radio que puede tener una estrella. Primero, desarrollaremos el caso particular en el que tenemos una estrella inmersa en el vacío de Schwarzschild para teorías  $f(R)$  y discutiremos la validez de los resultados. Para concluir, generalizaremos la expresión del límite de Buchdahl para el modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$ .

## 2. Gravedad métrica $f(R)$

En las teorías de gravedad, la acción total se descompone habitualmente como

$$S = S_{EH}(g_{\mu\nu}, R) + S_M(g_{\mu\nu}, \phi) \quad (2.1)$$

donde el primer término es la acción de Einstein-Hilbert y el segundo la acción asociada a los campos escalares de materia  $\phi$ . En las teorías  $f(R)$  la acción toma la forma

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (2.2)$$

donde  $\kappa \equiv 8\pi$  y  $\mathcal{L}_M$  es el Lagrangiano asociado a la materia. Lo único que cambia respecto a la RG es que en la acción de Einstein-Hilbert en lugar de  $R$  aparece la función  $f(R)$ , siendo el resto de la expresión exactamente igual. En las formulaciones más usuales de la gravedad  $f(R)$  hay acoplamiento mínimo de la materia con la métrica, es decir, que en el Lagrangiano no hay términos en los que aparezcan juntos los campos de materia y la curvatura, sino que estos se pueden escribir por separado.

En el formalismo métrico, para obtener las ecuaciones de campo se aplica un principio variacional en el que se varía la acción respecto de la métrica [4], obteniendo la expresión

$$R_{\mu\nu} f_R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  se trata del tensor energía-momento asociado a los campos de materia, que se define como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.4)$$

y satisface la ecuación de continuidad  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  [4]. Si tomamos  $f(R) = R$  en la ecuación (2.3), recuperamos las ecuaciones de campo de la RG, es decir,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

La traza de la ecuación (2.3) se obtiene contrayendo índices a ambos lados con la métrica  $g^{\mu\nu}$ , de manera que

$$f_R R - 2f(R) + 3\square f_R = \kappa T \implies R = \frac{\kappa T + 2f(R) - 3\square f_R}{f_R}, \quad (2.6)$$

que se trata de una ecuación dinámica. Sin embargo, en RG sería  $R = -\kappa T$ , que se trata de una ecuación algebraica. Esto hace pensar que las teorías  $f(R)$  van a admitir una mayor cantidad de soluciones que la RG.

Por otro lado, en estas teorías se viola el Teorema de Birkhoff [1], como comprobaremos más adelante. En efecto, en vacío ( $T = 0$ ) ya no tiene por qué cumplirse que  $R$  sea 0 o que sea constante. Las soluciones maximalmente simétricas se obtienen para  $T = 0$  y  $R$  constante, de manera que (2.6) se reduce a

$$f_R R - 2f(R) = 0. \quad (2.7)$$

Esta se puede tratar como una ecuación algebraica en  $R$ . Si consideramos  $R = C$  como la raíz de esta ecuación, donde  $C$  es una constante, tenemos que  $f_R(C) = 2f(C)C$ . Sustituyendo esto en (2.3) (teniendo que cuenta que  $R$  es constante y que  $T = 0$ ), se obtiene que  $R_{\mu\nu} = C g_{\mu\nu}/4$ . Por tanto, existen 3 soluciones maximalmente simétricas:

- $C = 0 \rightarrow$  Minkowski.
- $C > 0 \rightarrow$  de Sitter.
- $C < 0 \rightarrow$  anti-de Sitter.

Podemos observar que, a diferencia de la RG, con esta teoría hemos llegado a las soluciones de de Sitter y anti-de Sitter sin necesidad de introducir una constante cosmológica.

Las ecuaciones de campo (2.3) que se obtienen en las teorías  $f(R)$  se pueden escribir con la forma de las ecuaciones de Einstein de la siguiente manera

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{f_R} \left[ \kappa T_{\mu\nu}^M + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (f(R) - Rf_R) + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R \right], \quad (2.8)$$

donde ahora hemos usado  $T_{\mu\nu}^M$  para denotar al tensor de energía-momento asociado a la materia. Podemos escribir esta ecuación como

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left( \tilde{T}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^R \right) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

siendo  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento total, que está compuesto por una contribución efectiva de la materia

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^M = \frac{T_{\mu\nu}^M}{f_R} \quad (2.10)$$

y una contribución asociada a la curvatura, que viene dada por

$$T_{\mu\nu}^R \equiv \frac{1}{\kappa f_R} \left[ \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (f(R) - Rf_R) + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_R \right] \quad (2.11)$$

y se anula para  $f(R) = R$ . Este procedimiento puede parecer cuestionable y poco natural, puesto que esta no es la teoría de Einstein y estamos forzando a tener una interpretación en términos de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, esta expresión puede resultar útil en algunos casos, como veremos más adelante.

Para estudiar fenómenos astrofísicos y cosmológicos se suele considerar la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que viene dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.12)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Si tomamos  $k = 0$  (espacio-tiempo plano) e introducimos esta métrica en las ecuaciones de campo, se obtienen las ecuaciones

$$H^2 = \frac{\kappa}{3f'(R)} \left[ \rho + \frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right], \quad (2.13)$$

$$2\dot{H} = -\frac{\kappa}{f'(R)} \left[ P + \rho + \dot{R}^2 f'''(R) - H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) \right], \quad (2.14)$$

donde  $\rho$  y  $P$  hacen referencia a la densidad y la presión asociadas a la materia; y  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  es el parámetro de Hubble. Si tomamos  $f(R) = R$ , recuperamos las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho, \quad (2.15)$$

$$2\dot{H} = -\kappa(P + \rho). \quad (2.16)$$

A continuación, vamos a presentar algunos ejemplos de modelos de gravedad  $f(R)$ :

- $f(R) \propto R^2$ . Este modelo es el más sencillo. Sin embargo, tiene una gran utilidad, debido a que para curvaturas altas el término  $R^2$  se comporta como una constante cosmológica efectiva. Por tanto, puede servir para describir la época inflacionaria del universo [5].
- $f(R) = R + eR^q$ . Estos modelos también se pueden utilizar para modelizar la energía oscura. Sin embargo, las teorías con modificaciones de la RG mayores que  $R^2$  están limitadas por los experimentos del sistema solar [6].
- $f(R) = R^n$ . Con estos modelos se pueden obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo, por lo que resulta más sencillo de comparar con las observaciones [7].
- $f(R) = R - m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}$ . Este se conoce como modelo de Hu-Sawicki, que es capaz de explicar la expansión acelerada para valores adecuados de los parámetros. Además, satisface tanto las pruebas en el sistema solar como a nivel cosmológico, sin la necesidad de introducir una constante cosmológica [8].

### 3. Condiciones de pegado

En RG, las condiciones de pegado, también conocidas como condiciones de continuidad o de juntura, son un conjunto de reglas que han de verificarse en las fronteras entre diferentes regiones del espacio-tiempo. Estas condiciones establecen la manera en que las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein deben unirse para que la teoría sea físicamente coherente. Esto es importante porque las ecuaciones de campo son ecuaciones en derivadas parciales que deben ser resueltas en cada punto del espacio-tiempo, así que las soluciones en diferentes regiones deben ser compatibles entre sí para que la solución global tenga sentido físico. El estudio de estas condiciones tiene una gran utilidad ya que los modelos físicos a menudo requieren la unión de soluciones en diferentes regiones del espacio-tiempo, como por ejemplo en el límite entre una estrella y el exterior que la rodea.

#### 3.1. Geometría diferencial de hipersuperficies

Una hipersuperficie es una subvariedad de codimensión 1 embebida en una variedad que actúa como espacio ambiente. La métrica inducida en la hipersuperficie describe la geometría de esta vista desde dentro del espacio ambiente. La métrica inducida se obtiene al restringir el tensor métrico del espacio ambiente al espacio tangente de la hipersuperficie. En otras palabras, es el *pull-back* del tensor métrico del espacio ambiente a la hipersuperficie. La métrica resultante codifica las distancias, ángulos y áreas en la hipersuperficie de una manera intrínseca, es decir, no depende del espacio ambiente.

Para estudiar el espacio-tiempo consideramos una variedad semi-riemanniana  $(V, g)$  de dimensión 4 con signatura  $+2$ . También consideramos una hipersuperficie de  $V$ , es decir, una variedad diferenciable de dimensión 3, que denotaremos por  $\Sigma$ . Entonces podemos definir un mapa diferenciable de clase  $C^3$

$$\Phi : \Sigma \longrightarrow V \quad (3.1)$$

$$y \longmapsto \Phi(y) = x(y) \quad (3.2)$$

que es un embebimiento de  $\Sigma$  en  $V$ . Si consideramos las coordenadas  $\{y^a\}$  en  $\Sigma$  y las coordenadas  $\{x^\alpha\}$  en  $V$ , este embebimiento viene dado por las funciones (ecuaciones paramétricas)

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a). \quad (3.3)$$

De manera local, la hipersuperficie  $\Phi(\Sigma) \in V$  se puede definir a través de una función  $S : V \longrightarrow \mathbb{R}$  que cumple la ecuación

$$S(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (3.4)$$

Los vectores tangentes a  $\Sigma$  se definen como

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (3.5)$$

es decir, que esos son los vectores tangentes a las curvas contenidas en  $\Sigma$ .

Las hipersuperficies, igual que ocurre con los vectores, se pueden clasificar en 3 tipos:

$$\Sigma \text{ es de tipo } \begin{cases} \text{espacio} & \text{si } g^{\alpha\beta} \partial_\alpha S \partial_\beta S < 0. \\ \text{tiempo} & \text{si } g^{\alpha\beta} \partial_\alpha S \partial_\beta S > 0. \\ \text{nulo} & \text{si } g^{\alpha\beta} \partial_\alpha S \partial_\beta S = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

El vector normal (unitario) a la hipersuperficie se define como

$$n_\mu \equiv \varepsilon \frac{\partial_\mu S}{\sqrt{|g^{\alpha\beta} \partial_\alpha S \partial_\beta S|}}, \quad (3.7)$$

de manera que

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es de tipo espacio.} \\ +1 & \text{si } \Sigma \text{ es de tipo tiempo.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Por otra parte, la métrica inducida en  $\Sigma$  es un tensor 2-covariante simétrico y tangente a la hipersuperficie que, actuando sobre dos vectores tangentes a la hipersuperficie, tiene la misma acción que la métrica del espacio-tiempo. Esta métrica se define a través del *pull-back* ( $\Phi^*g$ ),

$$h_{ab} \equiv (\Phi^*g)_{ab} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (3.9)$$

y está definida solamente en la hipersuperficie, por lo que permite subir y bajar índices de tensores tangentes a  $\Sigma$ . Es inmediato verificar que la proyección de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  sobre la hipersuperficie  $\Sigma$  es

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \varepsilon n_\alpha n_\beta, \quad (3.10)$$

que se conoce como proyector o métrica transversa. La relación entre la métrica inducida y la métrica transversa es

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = h_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (3.11)$$

ya que los vectores normales  $n^\alpha$  y  $n^\beta$  son ortogonales al tensor  $h_{\alpha\beta}$ . Por tanto,  $h_{\alpha\beta}$  es una matriz degenerada (debido al vector nulo  $n^\alpha$ ) y  $h_{ab}$  es una matriz no degenerada.

La primera forma fundamental es una forma bilineal simétrica y definida positiva que se define en el espacio tangente de una superficie. Por ejemplo, si  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  definida por

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (3.12)$$

la primera forma fundamental de  $S$  se escribe como

$$I = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

donde

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v. \quad (3.14)$$

Esta define las propiedades métricas de una superficie al especificar cómo está curvada la superficie en su espacio de ambiente. Proporciona una manera de calcular la longitud de una curva en la superficie, el ángulo entre dos vectores tangentes en un punto y el área de una pequeña Sección de la superficie. La métrica inducida en una hipersuperficie es un ejemplo específico de la primera forma fundamental, que es un concepto más general que se puede aplicar a cualquier superficie o subvariedad.

Por otro lado, se define la curvatura extrínseca de una hipersuperficie como la curvatura que se observa desde el espacio ambiente que la contiene. El tensor de curvatura extrínseca

es un tensor 2-covariante simétrico y tangente a una hipersuperficie [9]. De manera general, se define la curvatura extrínseca de  $\Sigma$  en  $V$  como

$$K_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}. \quad (3.15)$$

Las componentes del tensor  $K$  también se pueden escribir en función de las componentes del vector normal<sup>2</sup>,

$$K_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} n_{\beta} - n^{\mu} n_{\alpha} \nabla_{\mu} n_{\beta}. \quad (3.17)$$

Este tensor contiene la información sobre la evolución de la métrica de una superficie a otra, ya que está relacionado con la derivada de Lie de la métrica inducida en la dirección de  $n^{\alpha}$  mediante<sup>3</sup>

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\alpha\beta}. \quad (3.21)$$

Equivalentemente, si la hipersuperficie está parametrizada por  $x^{\alpha}(y^a)$ , el tensor de curvatura extrínseca se puede definir como

$$K_{ab} = e_a^{\alpha} e_b^{\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta} = e_a^{\alpha} e_b^{\beta} K_{\alpha\beta}, \quad (3.22)$$

de manera que solo está definido en  $\Sigma$ . A  $K_{ab}$  también se le conoce como segunda forma fundamental de la hipersuperficie. Este tensor mide cuanto deja de ser «normal» el vector  $n^{\alpha}$  al transportarlo paralelamente sobre la hipersuperficie de un punto a otro.

Por otro lado, el escalar de la curvatura extrínseca viene dado por la traza

$$K = h^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = h^{ab} K_{ab} = \nabla_{\alpha} n^{\alpha}, \quad (3.23)$$

que es igual a la expansión de una congruencia de geodésicas que intersecan ortogonalmente a la hipersuperficie, es decir, que su vector tangente es igual a  $n^{\alpha}$  en la hipersuperficie. Por tanto, se cumple que la hipersuperficie es convexa si  $K > 0$  (la congruencia es divergente) y es cóncava si  $K < 0$  (la congruencia es convergente).

En resumen, mientras que  $h_{ab}$  está asociado a los aspectos puramente intrínsecos de la geometría de la hipersuperficie,  $K_{ab}$  está asociado a los aspectos extrínsecos, ya que describe la forma en que la hipersuperficie está embebida en la variedad ambiente. Estos dos tensores proporcionan una caracterización completa de la hipersuperficie [9].

---

<sup>2</sup>Como  $n \cdot n = 1$  (con el producto escalar de  $\mathbb{R}^3$ ), se cumple que  $n_{\beta} \nabla_{\alpha} n^{\beta} = 0$ . Entonces se comprueba fácilmente que

$$K_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu} = (g_{\alpha}^{\mu} - \varepsilon n^{\mu} n_{\alpha})(g_{\beta}^{\nu} - \varepsilon n^{\nu} n_{\beta}) \nabla_{\mu} n_{\nu} = \nabla_{\alpha} n_{\beta} - n^{\mu} n_{\alpha} \nabla_{\mu} n_{\beta} \quad (3.16)$$

<sup>3</sup>Considerando una conexión métrica y usando que  $n_{\beta} \nabla_{\alpha} n^{\beta} = 0$ , entonces

$$n^{\mu} \nabla_{\mu} h_{\alpha\beta} = n^{\mu} (\nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} - \nabla_{\mu} n_{\alpha} n_{\beta}) = -n^{\mu} n_{\alpha} \nabla_{\mu} n_{\beta} - n^{\mu} n_{\beta} \nabla_{\mu} n_{\alpha} \quad (3.18)$$

$$h_{\mu\beta} \nabla_{\alpha} n^{\mu} = g_{\mu\beta} \nabla_{\alpha} n^{\mu} - n_{\mu} n_{\beta} \nabla_{\alpha} n^{\mu} = \nabla_{\alpha} n_{\beta} \quad (3.19)$$

Con esto se prueba que

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (n^{\mu} \nabla_{\mu} h_{\alpha\beta} + h_{\mu\beta} \nabla_{\alpha} n^{\mu} + h_{\alpha\mu} \nabla_{\beta} n^{\mu}) = \nabla_{\alpha} n_{\beta} - n^{\mu} n_{\alpha} \nabla_{\mu} n_{\beta} = K_{\alpha\beta} \quad (3.20)$$

### 3.2. Condiciones de pegado en Relatividad General

Siguiendo la notación de [9], consideramos dos espacio-tiempos  $V^+$  y  $V^-$  de clase  $C^3$  con respectivas métricas  $g^+$  y  $g^-$  de clase  $C^2$  y fronteras  $\Sigma^+$  y  $\Sigma^-$  (de tipo tiempo), que vamos a identificar como una única hipersuperficie  $\Sigma$  que separa las dos regiones  $V^+$  y  $V^-$  del espacio-tiempo. Para estudiar las condiciones que se deben satisfacer en  $\Sigma$ , se introduce la notación

$$[A] = A(V^+)|_{\Sigma} - A(V^-)|_{\Sigma}, \quad (3.24)$$

donde  $A$  es cualquier magnitud tensorial definida en ambas regiones.

En RG existen diferentes formulaciones de las condiciones de pegado, como por ejemplo la de Darmois-Israel [10,11]. Según esta formulación, la primera condición de pegado indica que la primera forma fundamental de los dos espacio-tiempos  $V^+$  y  $V^-$  en la frontera  $\Sigma$  debe ser la misma, es decir, que

$$[h_{ab}] = 0. \quad (3.25)$$

La segunda condición de pegado se impone sobre el término  $[K_{ab}]$ , pero esta condición depende del tipo de frontera que tengamos. Según [11], podemos diferenciar dos tipos de frontera dependiendo del valor de  $[K_{ab}]$ :

- Si  $[K_{ab}] \neq 0$  se dice que  $\Sigma$  es una hipersuperficie singular de orden 1 o, de manera más descriptiva, una capa superficial. En este caso, la segunda condición de pegado se puede expresar como

$$[K]h_{ab} - [K_{ab}] = \kappa\tau_{ab}, \quad n^a\tau_{ab} = 0, \quad (3.26)$$

donde  $\tau_{\alpha\beta}$  es un tensor que contiene la parte singular del tensor de energía-impulso. Un ejemplo es el de una estrella rodeada por vacío pero con una capa superficial de polvo. Este polvo se trata de una fuente material cuyo tensor de energía-impulso tiene una distribución del tipo delta de Dirac localizada en la frontera.

- Si  $[K_{ab}] = 0$  en toda la frontera, se dice que  $\Sigma$  es una hipersuperficie de orden superior. En este grupo se incluyen todas las hipersuperficies de discontinuidad, que se caracterizan por la existencia de saltos en el tensor de energía-impulso. Un ejemplo es el de la hipersuperficie que separa una estrella perfecta del vacío que la rodea, sin materia de por medio.

Una estrella realista puede tener algún tipo de material en la superficie, como una capa de polvo, por lo que sería una hipersuperficie singular de orden 1. En el caso de que la estrella sea perfecta y en la superficie haya un salto, sería una hipersuperficie de orden superior. A la hora de usar estas condiciones, nosotros consideraremos este último caso, ya que es un modelo más simplista. De manera que cuando hablemos de estrellas, salvo que se indique lo contrario, con  $\Sigma$  nos referiremos a una hipersuperficie de discontinuidad.

Por otro lado, también existen las condiciones de pegado de Lichnerowicz [12], que exigen la continuidad de la métrica y sus derivadas de primer orden en  $\Sigma$  en coordenadas que atraviesan la hipersuperficie, es decir, en un sistema de coordenadas gaussianas normales (estas se conocen como coordenadas admisibles). En [13] y [14] se demuestra que las condiciones de Darmois-Israel y las de Lichnerowicz para hipersuperficies de orden superior son equivalentes en dichas coordenadas. Sin embargo, mientras que las condiciones de Lichnerowicz están restringidas a las coordenadas admisibles, y puede resultar complicado

transformar la métrica a a este sistema de coordenadas, las de Darmais-Israel no tienen esta restricción. Por esta razón, se considera que las condiciones de Darmais-Israel son las condiciones de pegado más apropiadas en RG.

Según [9], en una hipersuperficie se debe cumplir que

$$[e_a^\alpha] = 0 \quad (3.27)$$

ya que las coordenadas deben ser continuas a lo largo de  $\Sigma$ . Por tanto, para hipersuperficies de orden superior las condiciones de pegado son

$$[h_{ab}] = 0 \iff [h_{\alpha\beta}] = 0, \quad (3.28)$$

$$[K_{ab}] = 0 \iff [K_{\alpha\beta}] = 0. \quad (3.29)$$

Además, según [9] el vector normal a  $\Sigma$  también debe ser continuo, es decir, que

$$[n^\alpha] = 0. \quad (3.30)$$

Por tanto, la primera condición de pegado es equivalente a

$$[g_{ab}] = 0 \iff [g_{\alpha\beta}] = 0. \quad (3.31)$$

Por ejemplo, en la métrica de Schwarzschild podemos definir una hipersuperficie de radio constante  $S(r) = r - r_0$  (suponemos que la hipersuperficie es no nula), por lo que el vector normal es

$$n_\alpha = \sqrt{g_{rr}} \delta_\alpha^r = \frac{\delta_\alpha^r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}. \quad (3.32)$$

De manera que la métrica transversa y la curvatura extrínseca son

$$(h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$K = \frac{2}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - \frac{M}{r^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})^3}}. \quad (3.34)$$

### 3.3. Condiciones de pegado en teorías $f(R)$

Ahora vamos a recopilar las condiciones de pegado más generales para el formalismo métrico de las teorías de gravedad  $f(R)$ , tal y como aparecen en [15], donde se diferencian los casos en los que se permite la existencia de capas superficiales o membranas de los que solamente tienen saltos de discontinuidad en el tensor de energía-momento:

- Si se trata de una membrana o capa superficial,  $[K_{\alpha\beta}] \neq 0$ . En este caso se debe cumplir

$$[K] = 0, \quad (3.35)$$

es decir, que la traza de la segunda forma fundamental debe ser continua en la hipersuperficie incluso para el caso de capas superficiales o membranas, lo cual difiere con la RG.

Podemos diferenciar dos casos dependiendo del valor de  $f_{3R}(R)$ :

- $f_{3R}(R) \neq 0$ . En este caso genérico se deben cumplir dos condiciones más:

$$[R] = 0, \quad (3.36)$$

$$\kappa\tau_{\alpha\beta} = f_{2R}(R_\Sigma)n^\mu[\nabla_\mu R]h_{\alpha\beta} - f_R(R_\Sigma)[K_{\alpha\beta}], \quad n^\alpha\tau_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.37)$$

Es decir, que en el caso de una capa superficial en la que  $f_{3R}(R) \neq 0$ , las condiciones de pegado en la hipersuperficie exigen la continuidad de la primera forma fundamental, de la traza de la segunda forma fundamental y del escalar de Ricci. Además, el tensor de energía-momento de la membrana o capa superficial vienen dado por la expresión (3.37).

- $f_{3R}(R) = 0$ . Este caso permite discontinuidades en  $R$ , de manera que podemos tener  $[R] \neq 0$  y el tensor de energía-momento tendría una parte singular. En el caso de una capa superficial en la que  $f_{3R}(R) = 0$ , las condiciones de pegado en la hipersuperficie exigen la continuidad de la primera forma fundamental y de la traza de la segunda forma fundamental. El tensor de energía-momento adquiere una expresión más complicada en términos de distribuciones, tal y como se detalla en [15].
- Si no hay ninguna capa superficial ni membrana,  $[K_{\alpha\beta}] = 0$  y el tensor de energía-momento solo puede tener saltos de discontinuidad. En este caso, además de la condición anterior, también se deben cumplir

$$[R] = 0, \quad (3.38)$$

$$[\nabla_\alpha R] = 0. \quad (3.39)$$

Esto nos indica que necesariamente se deben cumplir las condiciones de pegado de RG, ya que la primera y la segunda forma fundamental deben ser continuas en la hipersuperficie. Sin embargo, estas condiciones no son suficientes, si no que se deben complementar con (3.38) y (3.39).

De estas dos últimas condiciones, deducimos que  $R$ , como función, debe ser diferenciable en todos los puntos, y además se debe cumplir que

$$n^\alpha[R_{\alpha\beta}] = 0. \quad (3.40)$$

Por otro lado, las discontinuidades del tensor energía-momento vienen descritas por la expresión

$$f_R(R_\Sigma)[R_{\alpha\beta}] + Dh_{\alpha\beta}f_{2R}(R_\Sigma) = \kappa[T_{\mu\nu}], \quad (3.41)$$

donde  $D$  es una función definida en  $\Sigma$  y viene dada por

$$D \equiv n^\alpha n^\beta [\nabla_\alpha \nabla_\beta R], \quad (3.42)$$

es decir, que  $D$  representa la discontinuidad de la derivada segunda de  $R$  a través de  $\Sigma$ . Si tomamos la traza,

$$(n-1)Df_{2R}(R_\Sigma) = \kappa[T]. \quad (3.43)$$

Usando (3.40) y (3.41), se llega a la condición

$$n^\alpha[T_{\alpha\beta}] = 0. \quad (3.44)$$

Esto resulta ser idéntico al caso de RG, ya que se exige la continuidad de las componentes normales del tensor de energía-momento a través de la hipersuperficie. Sin embargo, en  $f(R)$  las discontinuidades de  $T_{\alpha\beta}$  no solo se deben al tensor de Ricci, si no también a la discontinuidad de la segunda derivada de  $R$ , representada por  $D$ , como puede verse en la ecuación (3.42).

Generalmente, las soluciones de pegado de RG no son soluciones en teorías  $f(R)$ , ya que estas teorías requieren una mayor cantidad de condiciones. Esto es lo que ocurre en la mayoría de soluciones de RG con vacío en el exterior, como se discute en [15].

### 3.4. Ejemplo: Estrella estática y esféricamente simétrica de fluido perfecto en teorías $f(R)$

A continuación, considerando las teorías  $f(R)$ , vamos a estudiar cuáles son las condiciones de pegado necesarias en el caso de una estrella estática y con simetría esférica, que está formada por un fluido perfecto. En primer lugar, veamos cuáles son las consecuencias de aplicar la condición (3.44) al caso de un fluido perfecto en el interior ( $V^-$ ) y con vacío en el exterior ( $V^+$ ). En esta situación tenemos un tensor de energía-momento de la forma

$$T_{\alpha\beta}(V^+) = 0 \quad (3.45)$$

$$T_{\alpha\beta}(V^-) = (\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}, \quad (3.46)$$

donde  $\rho$  y  $p$  son la densidad y la presión del fluido perfecto, y  $u_\alpha$  es el campo vectorial de velocidades. La condición (3.44) en este caso exige que

$$p|_\Sigma = 0, \quad (3.47)$$

$$\rho n^\alpha u_\alpha|_\Sigma = 0. \quad (3.48)$$

La primera de ellos determina las hipersuperficies de pegado factibles para fluidos perfectos, mientras que la segunda indica que el fluido debe ser o bien tangente a la hipersuperficie o la densidad de energía debe ser nula en  $\Sigma$ . Estas dos condiciones se también se deben cumplir en RG.

Para estudiar el caso de una estrella estática y esféricamente simétrica, consideramos el elemento de línea de la métrica interior

$$ds^{2-} = -B(r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (3.49)$$

donde  $m(r)$  es lo que se conoce como función de masa. Supongamos que en el exterior tenemos la solución Schwarzschild. La hipersuperficie de pegado viene dado por  $r = r_b$ , de modo que

$$p(r_b) = 0 \quad (3.50)$$

y la masa de la solución exterior de Schwarzschild es

$$M = m(r_b). \quad (3.51)$$

Por la condición (3.38), también se debe cumplir

$$\rho(r_b) = 0. \quad (3.52)$$

Lo cual prohíbe el caso de una estrella de densidad constante. Sin embargo, sí que coincide con los casos en los que hay una ecuación de estado  $p = p(\rho)$  tal que  $p(\rho = 0) = 0$ , pero además, según [15] la condición (3.39) exige

$$\frac{d(\rho - 3p)}{dr}(r_b) = 0. \quad (3.53)$$

Es decir, que realmente los únicos casos de RG que cumplen estas condiciones de pegado son aquellos cuyo interior cumple

$$\frac{dp}{dr}(r_b) = \frac{d\rho}{dr}(r_b) = 0. \quad (3.54)$$

Por tanto, aunque en  $f(R)$  hay muchas soluciones interiores estáticas y esféricamente simétricas que se pueden pegar con un exterior de Schwarzschild, las soluciones de fluido perfecto de la RG generalmente no van a estar entre ellas. Además, teniendo en cuenta que en el exterior de Schwarzschild  $R = 0$ , a partir de las condiciones (3.38) y (3.39), se debe cumplir que

$$R(r_b) = 0 = R'(r_b). \quad (3.55)$$

## 4. Soluciones estáticas y esféricamente simétricas en teorías $f(R)$

En esta Sección, vamos a estudiar las soluciones de las ecuaciones de campo en teorías de gravedad  $f(R)$ . En primer lugar, las resolveremos de manera analítica en relatividad general. Después, resolveremos las ecuaciones de campo de manera numérica para un modelo  $f(R)$  particular. Luego, presentaremos varias soluciones analíticas conocidas como soluciones de Clifton. Finalmente, veremos como se define con estas métricas la masa gravitacional que mediría un observador en infinito para las teorías  $f(R)$ .

Como hemos comentado anteriormente, en las teorías de gravedad modificada  $f(R)$  ya no se cumple el teorema de Birkhoff. Este teorema afirma que la única solución de las ecuaciones de campo en vacío que es esféricamente simétrica es la métrica de Schwarzschild [9]. En particular, esta solución es estática y asintóticamente plana. Aunque se ha demostrado que este teorema es cierto en RG, en las teorías de gravedad modificada aparecen otras soluciones válidas que no son Schwarzschild.

Una métrica estática y esféricamente simétrica se puede escribir de manera general de la forma

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.1)$$

Asumiendo que tenemos un objeto que se puede describir como un fluido perfecto, el tensor de energía-momento en el interior del objeto se puede escribir como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (4.1) y (4.2) en las ecuaciones de campo de la formulación  $f(R)$ , y teniendo en cuenta la conservación del tensor de energía-momento  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales independientes para el interior del objeto (desarrollo en Apéndice A):

$$A' = \frac{2rA}{3f_R} \left[ kA(\rho + 3p) + Af(R) - f_R \left( \frac{AR}{2} + \frac{3B'}{2rB} \right) - \left( \frac{3}{r} + \frac{3B'}{2B} \right) f_{2R}R' \right], \quad (4.3)$$

$$B'' = \frac{B'}{2} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{2A'B}{rA} + \frac{2B}{f_R} \left[ -kAp + \left( \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right) f_{2R}R' - \frac{Af(R)}{2} \right], \quad (4.4)$$

$$R'' = R' \left( \frac{A'}{2A} - \frac{B'}{2B} - \frac{2}{r} \right) - \frac{A}{3f_{2R}} [k(\rho - 3p) + f_R R - 2f(R)] - \frac{f_{3R}R'^2}{f_{2R}}, \quad (4.5)$$

$$p' = -\frac{\rho + p}{2} \frac{B'}{B}, \quad (4.6)$$

donde aquí hemos usado el símbolo  $'$  para denotar la derivada respecto a la coordenada radial.

En el interior del objeto, las soluciones que buscamos son  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $R(r)$ ,  $p(r)$  y  $\rho(r)$ . Necesitamos otra ecuación más, ya que tenemos 5 incógnitas y 4 ecuaciones (4.3)-(4.6), por lo que usamos la ecuación de estado, que relaciona la densidad y la presión, de manera que  $\rho = \rho(p)$ . Para resolver las ecuaciones necesitamos dar 6 condiciones iniciales:  $A(0)$ ,  $B(0)$ ,  $B'(0)$ ,  $R(0)$ ,  $R'(0)$  y  $p(0)$ . Según [16], tenemos fijas las condiciones iniciales

$A(0) = 1$ ,  $B'(0) = 0$ ,  $R'(0) = 0$  y  $p(0) = p_c$  (presión central), mientras que  $B(0)$  y  $R(0)$  son dos condiciones iniciales que quedan libres. Para  $R(0)$  se toma el valor que tendría en RG, es decir,  $R(0) = -\kappa T(0)$ , siendo  $T$  la traza de tensor de energía impulso ( $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ ). En cuanto al valor de  $B(0)$ , este se obtiene a partir del método del disparo, que explicamos en el Apéndice B.

Por otro lado, en el exterior del objeto consideramos que tenemos vacío, por lo que tanto la presión como la densidad se anulan. En esta región solo buscamos las soluciones para  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $R(r)$ , así que en el espacio-tiempo exterior únicamente tenemos que resolver las tres ecuaciones diferenciales

$$A' = \frac{2rA}{3f_R} \left[ Af(R) - f_R \left( \frac{AR}{2} + \frac{3\psi}{2r} \right) - \left( \frac{3}{r} + \frac{3\psi}{2} \right) f_{2R}R' \right], \quad (4.7)$$

$$B'' = \frac{B'}{2} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{2A'B}{rA} + \frac{2B}{f_R} \left[ \left( \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right) f_{2R}R' - \frac{Af(R)}{2} \right], \quad (4.8)$$

$$R'' = R' \left( \frac{A'}{2A} - \frac{\psi}{2} - \frac{2}{r} \right) - \frac{A}{3f_{2R}} [f_R R - 2f(R)] - \frac{f_{3R}R^2}{f_{2R}}. \quad (4.9)$$

En este caso, las condiciones iniciales se establecen en el radio de la estrella, y debido a las condiciones de pegado, su valor será igual que el de la solución interior en ese radio. De esta manera, conseguimos juntar la solución interior con la exterior. Además, como a distancias muy grandes la métrica deseablemente debe comportarse como la de Schwarzschild, sabemos que estas funciones deben cumplir que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r)B(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0. \quad (4.10)$$

Con esto, ya tendríamos todas las condiciones iniciales y de contorno necesarias para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en el interior y el exterior de la estrella.

## 4.1. Fenomenología en Relatividad General

A continuación vamos a resolver el sistema de ecuaciones de la Sección anterior para el caso de RG, es decir, para  $f(R) = R$ . Pero las ecuaciones que hemos escrito antes son válidas para teorías  $f(R)$  que no son RG, por esa razón aparecen término con  $1/f_{2R}$ , que en RG no tendrían sentido. En este caso, las ecuaciones tienen la bien conocida forma

$$A' = \frac{2rA}{3} \left[ kA(\rho + 3p) + \frac{AR}{2} - \frac{3B'}{2rB} \right], \quad (4.11)$$

$$B'' = \frac{B'}{2} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{2A'B}{rA} - 2kABp - ABR, \quad (4.12)$$

$$R = k(\rho - 3p), \quad (4.13)$$

$$p' = -\frac{\rho + p}{2}\psi. \quad (4.14)$$

De primeras, podemos ver que hemos obtenido que  $R = k(\rho - 3p)$  como cabría esperar, ya que en RG  $R = -kT$  y para un fluido perfecto se cumple que  $T = 3p - \rho$ .

La solución de estas ecuaciones depende de la región donde nos encontremos, ya que en el interior de la estrella tenemos un fluido perfecto y en el exterior hay vacío. Por tanto, en el contexto de la RG la solución será Schwarzschild. Así que vamos a resolver por separado las ecuaciones para cada región.

### 4.1.1. Solución interior

En primer lugar, vamos a obtener la solución interior. En el interior de la estrella hemos dicho que tenemos un fluido perfecto. Vamos a considerar el caso más sencillo, un fluido de densidad constante, que además se puede resolver analíticamente. Por ejemplo, consideramos una estrella con una presión central <sup>4</sup>  $p_c = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$  y una densidad constante  $\rho = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$ . Según [17], en RG el radio de un objeto con esta métrica y con densidad constante viene dado por

$$r_b^2 = \frac{3}{8\pi\rho} \left[ 1 - \left( \frac{\rho + p_c}{\rho + 3p_c} \right)^2 \right], \quad (4.15)$$

por lo que el radio del objeto es  $r_b = 9,07 \text{km}$ . Por otro lado, en el interior de la estrella, la función masa es

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3, \quad (4.16)$$

ya que la densidad es constante. De esta manera, obtenemos que la masa total de la estrella es

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r_b^3 = 2,44 \text{km}. \quad (4.17)$$

En [17], se obtiene que la solución interior para este caso es

$$A(r) = \left( 1 - \frac{2Mr^2}{r_b^3} \right)^{-1}, \quad (4.18)$$

$$B(r) = \frac{1}{4} \left[ 3\sqrt{\left( 1 - \frac{2M}{r_b} \right)} - \sqrt{\left( 1 - \frac{2Mr^2}{r_b^3} \right)} \right]^2, \quad (4.19)$$

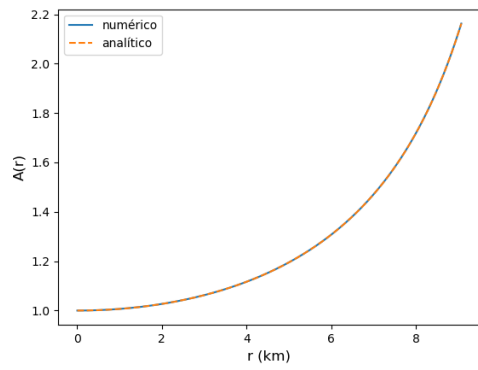
$$p(r) = \rho \frac{(1 - 2Mr^2/r_b^3)^{1/2} - (1 - 2M/r_b)^{1/2}}{(1 - 2M/r_b)^{1/2} - 3(1 - 2Mr^2/r_b^3)^{1/2}}. \quad (4.20)$$

A continuación, vamos a obtener la solución numérica para la región interior, que compararemos con esta solución analítica. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales anterior teniendo en cuenta las condiciones iniciales. Resolvemos el sistema para un cierto conjunto de valores del radio desde  $r = 0$  hasta un valor arbitrario que sea mayor que  $r_b$ . Después, consideramos el valor numérico del radio del objeto como aquel en el que la presión se hace 0. Con el programa se obtiene que este radio es  $r_b = 9,07 \text{km}$ , que coincide con el valor teórico. Por tanto, solamente debemos tener en cuenta las soluciones en el rango  $0 \leq r \leq r_b$ , ya que para valores del radio mayores estaríamos fuera de la estrella y en esa región las ecuaciones son diferentes. Las soluciones que hemos obtenido se muestran en la figura 1 junto con los resultados analíticos. Podemos ver que, en principio, ambas soluciones coinciden con bastante exactitud, y también coinciden con las soluciones obtenidas en [18]. Para conocer la precisión de estas soluciones, es necesario obtener el error numérico relativo correspondiente <sup>5</sup>, como se muestra en la figura 4, en la que se aprecia que los errores relativos de las soluciones son bastante aceptables.

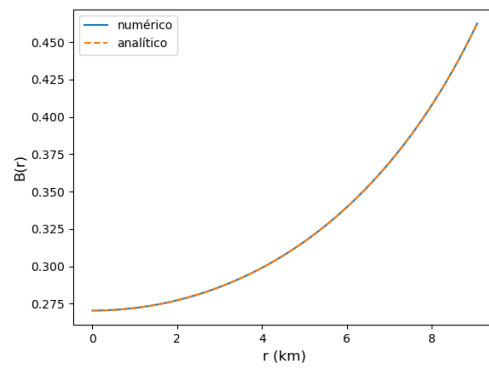
<sup>4</sup>En unidades geometrizadas la masa tiene unidades de [longitud], y la densidad y la presión tienen unidades de [longitud]<sup>-2</sup>

<sup>5</sup>El error numérico relativo de una función  $h(r)$  se puede calcular como

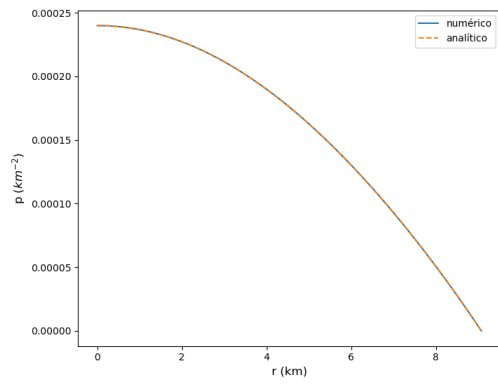
$$\left| \frac{h_{\text{numérico}}(r) - h_{\text{analítico}}(r)}{h_{\text{numérico}}(r)} \right|. \quad (4.21)$$



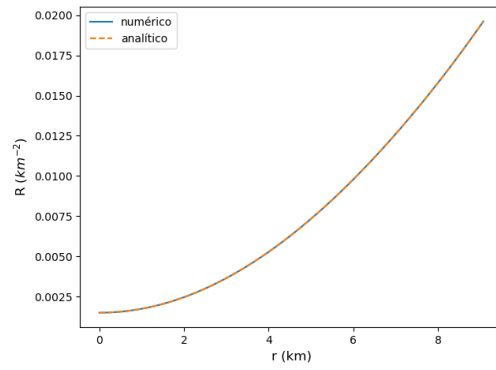
(a)



(b)

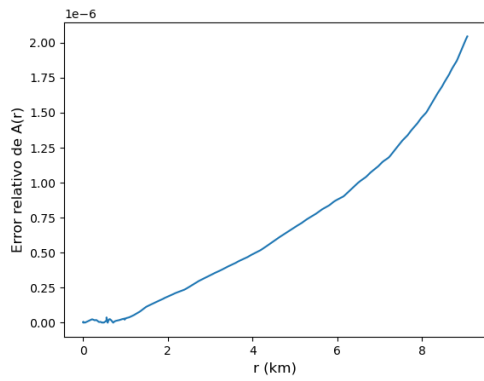


(c)

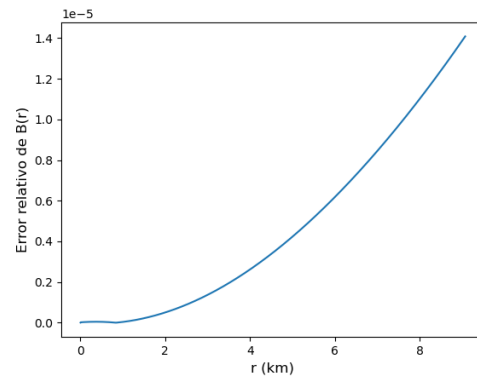


(d)

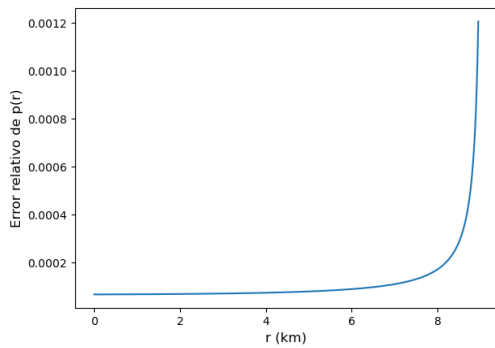
Figura 1: Soluciones interiores de las ecuaciones de campo para RG con densidad constante:  $A(r)$  en (a),  $B(r)$  en (b),  $p(r)$  en (c) y  $R(r)$  en (d).



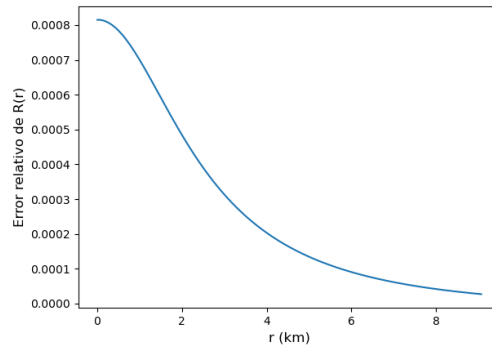
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2: Error numérico relativo de las soluciones interiores de las ecuaciones de campo en RG con densidad constante:  $A(r)$  en (a),  $B(r)$  en (b),  $p(r)$  en (c) y  $R(r)$  en (d).

### 4.1.2. Solución exterior

En el exterior se cumple que  $\rho = p = 0$ , de manera que las ecuaciones son

$$A' = \frac{2rA}{3} \left[ \frac{AR}{2} - \frac{3B'}{2rB} \right], \quad (4.22)$$

$$B'' = \frac{B'}{2} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{2A'B}{rA} - ABR, \quad (4.23)$$

$$R = 0, \quad (4.24)$$

$$p' = 0. \quad (4.25)$$

Teniendo en cuenta que  $R = 0$  y definiendo  $\psi = B'/B$ , solamente nos quedan dos ecuaciones diferenciales

$$A' = -A\psi, \quad (4.26)$$

$$\psi' = \frac{\psi}{2} \left( \frac{A'}{A} - \psi \right) + \frac{2A'}{rA}. \quad (4.27)$$

En primer lugar, vamos a resolver analíticamente estas ecuaciones. Teniendo en cuenta que  $A' = -A\psi$ , la otra ecuación nos queda

$$\psi' = -\psi \left( \psi + \frac{2}{r} \right), \quad (4.28)$$

cuya solución es

$$\psi = \frac{1}{r(Cr - 1)}, \quad (4.29)$$

donde  $C$  es una constante que vamos a tomar como  $C = 1/2M$  para que nos aparezca la solución de Schwarzschild, de manera que

$$A(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \quad (4.30)$$

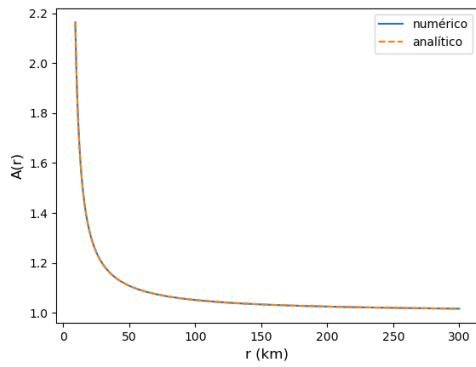
$$B(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (4.31)$$

Con esto, como hemos dicho, se obtiene la métrica de Schwarzschild

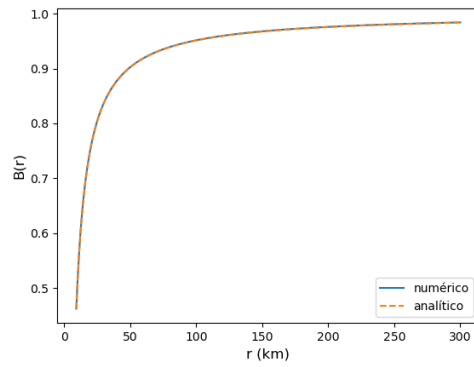
$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega. \quad (4.32)$$

Según el teorema de Birkhoff, en el caso de la RG esta es la única métrica esféricamente simétrica que es solución de las ecuaciones de campo en vacío.

Ahora, teniendo en cuenta las condiciones iniciales en el radio de la estrella, resolvemos numéricamente las ecuaciones (4.26)-(4.27) y representamos las soluciones numéricas junto con las soluciones analíticas, como se muestra en la figura 3. No representamos en este caso la presión y el escalar de Ricci porque en el exterior son idénticamente nulos. Podemos observar que la solución numérica y la analítica son muy similares. En la figura 4 se muestra el error numérico relativo de las soluciones, que resulta ser bastante aceptable, por lo que lo que podemos asumir que nuestro código es aceptable.

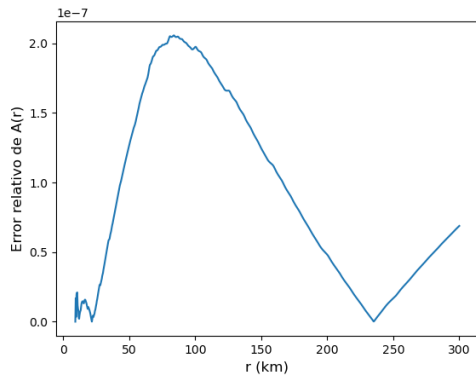


(a)

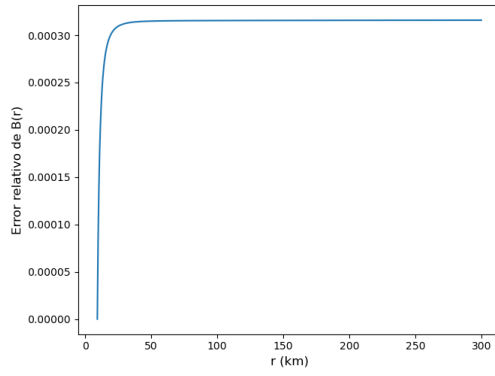


(b)

Figura 3: Soluciones exteriores para RG con densidad constante:  $A(r)$  en (a) y  $B(r)$  en (b). La integración la hemos realizado hasta una distancia  $r = 5000\text{km}$ .

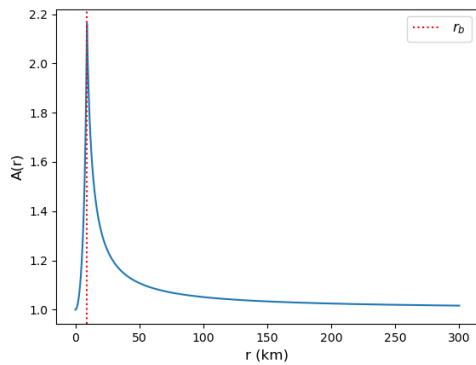


(a)

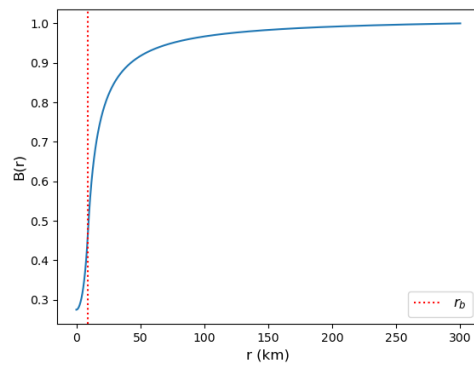


(b)

Figura 4: Error numérico relativo de las soluciones exteriores de las ecuaciones de campo en RG con densidad constante:  $A(r)$  en (a) y  $B(r)$  en (b).



(a)



(b)

Figura 5: Soluciones numéricas para RG con densidad constante:  $A(r)$  en (a) y  $B(r)$  en (b).

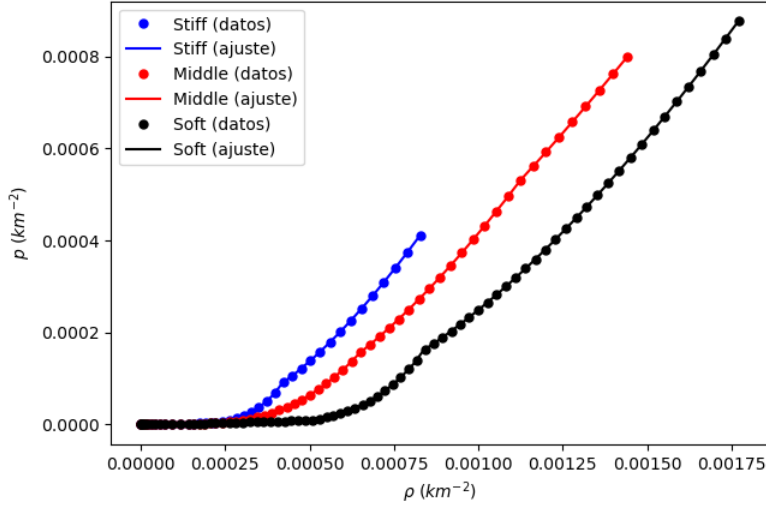


Figura 6: Ecuaciones de estado de [19] para materia formada fundamentalmente por neutrones. Se basan en métodos de teorías de campo efectivas. Los datos se han ajustado por *splines*.

Como ya hemos comprobado que nuestra solución numérica es correcta tanto en la región interior como en la exterior, podemos combinar ambas soluciones, como vemos en la figura 5. Con estas soluciones, comprobamos que para  $r \rightarrow \infty$  se cumple que  $A(r) = 1/B(r) = 1$ , como cabía esperar. Sin embargo, debemos tener en cuenta que, aunque este modelo simplista sirve para hacernos una idea de cómo son las soluciones de las ecuaciones de campo en RG, estas no son soluciones correctas, ya que no cumplen las condiciones de pegado que hemos estudiado en la Sección 3.4. Por ejemplo, a simple vista vemos que no se cumplen las condiciones (3.54) y (3.55).

## 4.2. Estrellas de neutrones

Para poder resolver el sistema de ecuaciones en el interior de objetos compactos, necesitamos una ecuación de estado que relacione la densidad y la presión. Pero esta relación depende del tipo de objeto que estemos considerando. Nosotros vamos a estudiar el caso de las estrellas de neutrones, que son objetos de gran interés en astrofísica y cosmología.

Para estos objetos no existe una ecuación de estado analítica que describa de manera completa la relación entre la densidad y la presión. En estos casos, se recurre a ecuaciones de estado numéricas obtenidas a partir de modelos y resultados observacionales. Nosotros usaremos tres de las ecuaciones de estado que aparecen en [19], que se denominan *Soft*, *Middle* y *Stiff*. En la figura 6, podemos observar los datos de las ecuaciones de estado, así como el ajuste de cada una. Vemos que *Soft* es la ecuación de estado en la que más lentamente crece la presión con la densidad, y *Stiff* es en la que más rápido crece.

### 4.3. Fenomenología en $f(R) = R + \alpha R^2$

En este caso ya no tenemos una función  $f(R)$  que sea lineal, sino que es un polinomio cuadrático en  $R$ , de modo que

$$f_R = 1 + 2\alpha R, \quad (4.33)$$

$$f_{2R} = 2\alpha, \quad (4.34)$$

$$f_{3R} = 0. \quad (4.35)$$

Para tener un modelo realista, debemos tener en cuenta que la RG ha conseguido superar las pruebas a escalas de sistemas estelares. Así que las correcciones que introducen las teorías  $f(R)$  deben ser pequeñas y limitadas al entorno de cuerpos compactos. Esto quiere decir que, a grandes distancias se debe cumplir que  $|\alpha R^2| \ll |R|$ . Con esta consideración, este modelo se puede considerar como la RG con pequeñas desviaciones.

Como hemos dicho, vamos a estudiar una pequeña perturbación de la RG, por lo que el escalar de Ricci se podrá escribir como

$$R = R_o + R_p, \quad \text{con } R_p \ll R_o = -kT. \quad (4.36)$$

donde  $R_o$  es el valor para RG y  $R_1$  es una perturbación. Para garantizar la estabilidad de la solución, esta perturbación debe mantenerse acotada y evitar un rápido crecimiento. Sustituyendo la expresión anterior en (4.5) y quedándonos a primer orden en  $R_p$ <sup>6</sup>, obtenemos una ecuación dinámica para  $R_p$ , que viene dada por

$$R_p'' = -R_o'' + R_o' \left( \frac{A'}{2A} - \frac{B'}{2B} - \frac{2}{r} \right) - \frac{f_{3R}(R_o)}{f_{2R}(R_o)} R_o'^2 \quad (4.38)$$

$$- \frac{A}{3f_{2R}(R_o)} (R_o f_R(R_o) - 2f(R_o)) + \delta R_p' + \gamma R_p. \quad (4.39)$$

donde los coeficientes  $\delta$  y  $\gamma$  se definen como

$$\delta = \frac{A'}{2A} - \frac{B'}{2B} - \frac{2}{r} - \frac{2R_o f_{3R}(R_o)}{f_{2R}(R_o)}, \quad (4.40)$$

$$\gamma = \frac{A}{3f_{2R}(R_o)} \left[ R_o f_{2R}(R_o) + f_R(R_o) - \frac{f_{3R}(R_o)}{f_{2R}(R_o)} (2f(R_o) + R_o f_R(R_o)) \right] \quad (4.41)$$

$$+ \frac{R_o'^2}{f_{2R}(R_o)} \left( f_{4R}(R_o) - \frac{f_{3R}^2(R_o)}{f_{2R}(R_o)} \right). \quad (4.42)$$

Para la solución exterior, en la que  $R_o = R_o' = 0$ , el coeficiente  $\gamma$  es

$$\gamma = \frac{A}{3f_{2R}(0)} \left( f_R(0) - \frac{2f_{3R}(0)f(0)}{f_{2R}(0)} \right). \quad (4.43)$$

Para garantizar que la perturbación no crece de manera exponencial, se debe cumplir que  $\gamma < 0$ , de modo que la perturbación en  $R_p$  es una función oscilatoria de  $r$ .

---

<sup>6</sup>Para la función  $f(R)$  usamos una expansión en serie hasta primer orden en  $R_1$ , de modo que

$$f(R) = f(R_o) + R_p f_R(R_o), \quad (4.37)$$

y hacemos el mismo desarrollo para las derivadas  $f_R$ ,  $f_{2R}$  y  $f_{3R}$ .

Por otro lado, como nuestra solución exterior va a ser tipo Schwarzschild, las soluciones para  $r \rightarrow \infty$  tienden a  $B(r) = A^{-1}(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ . Así que  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $B'(r)$  son positivas, mientras que  $A'(r)$  es negativa y  $R_o$  se anula. Entonces, sustituyendo esto en (4.40), tenemos que  $\delta < 0$ , es decir, que  $\delta$  es un término de amortiguamiento que hace que la perturbación disminuya cuando aumenta  $r$ . Por tanto, si  $\gamma < 0$ , una pequeña perturbación en la solución de Schwarzschild dará lugar a oscilaciones amortiguadas. Además, en [20] se demuestra que los modelos  $f(R)$  con  $f(0) \neq 0$  no admiten una solución exterior que se pueda juntar con un espacio-tiempo de Schwarzschild a distancias muy grandes. Como queremos estudiar una pequeña perturbación de la métrica de Schwarzschild, vamos a considerar el caso  $f(0) \approx 0$ , de manera que la ecuación (4.43) queda

$$\gamma = \frac{Af_R(0)}{3f_{2R}(0)} < 0. \quad (4.44)$$

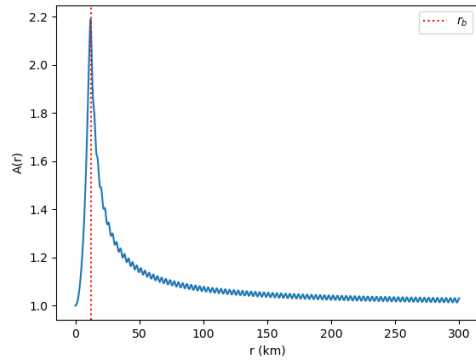
Esta condición de estabilidad constituye un requerimiento teórico que hay que tener en cuenta a priori. Aplicando la condición de estabilidad (4.44) al modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$ , es trivial el parámetro  $\alpha$  debe ser negativo para que las soluciones sean estables.

A continuación, resolviendo numéricamente las ecuaciones (4.3)-(4.6) para el interior y las ecuaciones (4.7)-(4.9) para el exterior, y aplicando las condiciones de pegado estudiadas en la Sección 3.3, obtenemos las soluciones numéricas que se muestran en la figura 7. En este caso hemos obtenido que el radio del objeto es  $r_b = 12,17\text{km}$ . A diferencia de la solución de Schwarzschild, en este caso  $A(r)$  y  $R(r)$  en el exterior se convierten en funciones oscilatorias. Además,  $R(r)$  y  $R'(r)$  ya no se anula en la frontera, por lo que verificamos que esta no es la solución de Schwarzschild. También podemos comprobar que para  $r \rightarrow \infty$  las funciones  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $R(r)$  cumplen las condiciones (4.10). Por otro lado, tanto la presión como la densidad disminuyen conforme aumenta la distancia al centro de la estrella, y en el borde se tiene que  $p(r_b) = \rho(r_b) = 0$ .

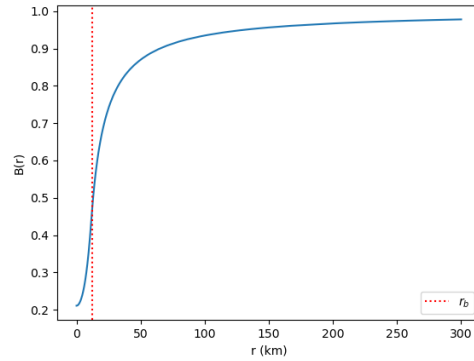
Ahora, para poder confirmar que las ecuaciones diferenciales se han resuelto con precisión, necesitamos calcular el error relativo de las soluciones. En la figura 8 se presentan las soluciones numéricas con sus respectivos errores relativos, donde podemos ver que los errores de las soluciones son muy bajos. En  $r = r_b$  estos errores aumentan para todas las soluciones (aunque siguen siendo errores bajos), lo cual se debe a la precisión con la que se ha calculado el radio del objeto, que hemos considerado que es el radio para el cual la presión es menor que  $1 \cdot 10^{-10}\text{km}$ . Por tanto, como hemos obtenido unas soluciones numéricas con bastante precisión, podemos confiar en los resultados de nuestro código.

#### 4.4. Integración hacia dentro para $f(R) = R + \alpha R^2$

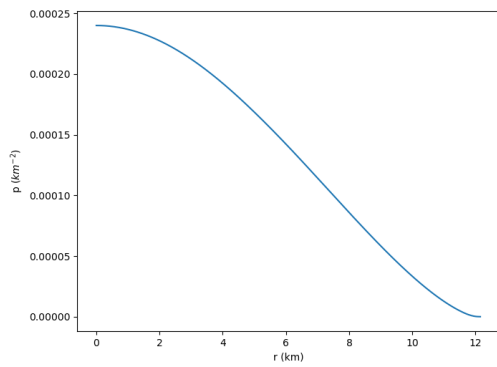
Para comprobar de otra forma la validez de nuestras soluciones, podemos realizar la integración de fuera para dentro, es decir, desde  $r \rightarrow \infty$  hasta  $r = 0$ . Para ello, vamos a empezar a integrar en el mismo valor de  $r$  que el radio final que considerábamos en la figura 7 ( $r = 5000\text{km}$ ). Como valores iniciales de  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $R(r)$  consideramos los valores finales correspondientes para el caso de la integración hacia fuera. Además, consideramos que el radio de la estrella es  $r_b = 12,17\text{km}$ , que se trata del resultado obtenido en el caso anterior. Así que, en primer lugar, integramos las ecuaciones de campo en el exterior desde el radio final hasta  $r = r_b$ . Una vez hecho esto, aplicamos las condiciones de pegado e integramos las ecuaciones de campo en el interior hasta un radio  $r = 0,0001\text{km}$ .



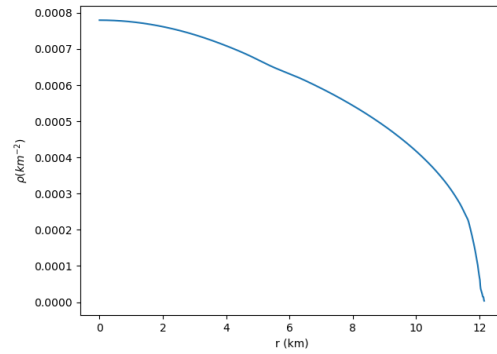
(a)



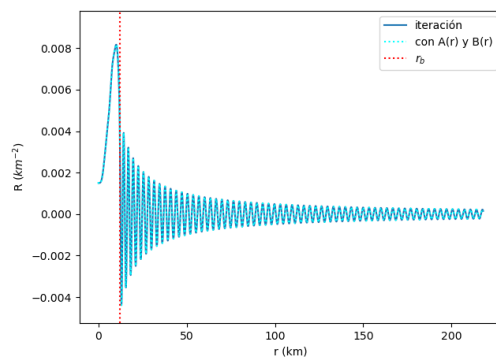
(b)



(c)

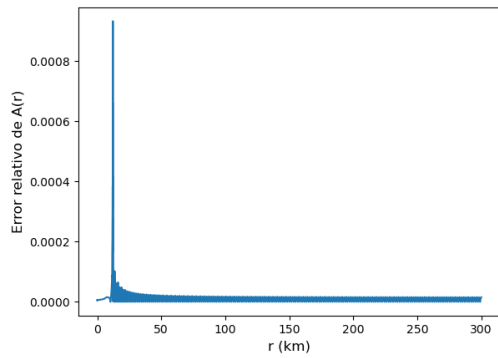


(d)

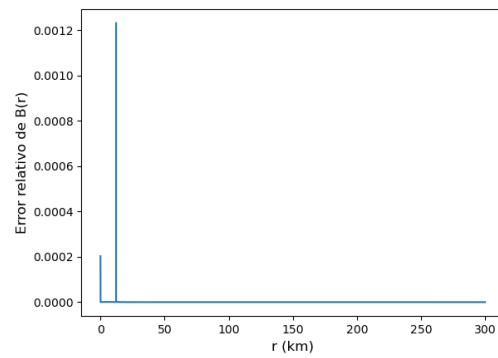


(e)

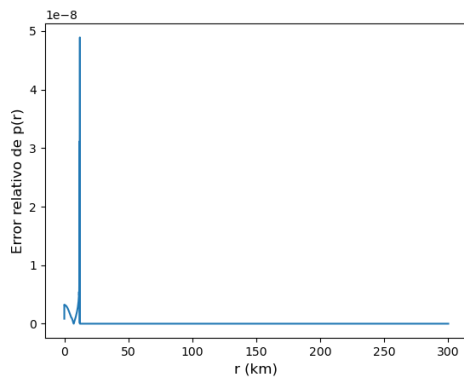
Figura 7: Soluciones numéricas de las ecuaciones de campo para  $f(R) = R + \alpha R^2$  con  $\alpha = -0,05\text{km}^2$ . Hemos considerado una presión central  $p_c = 2,4 \cdot 10^{-4}\text{km}^{-2}$  y la ecuación de estado *Middle*. La integración la hemos realizado desde  $r = 0,0001\text{km}$  hasta  $r = 5000\text{km}$ .



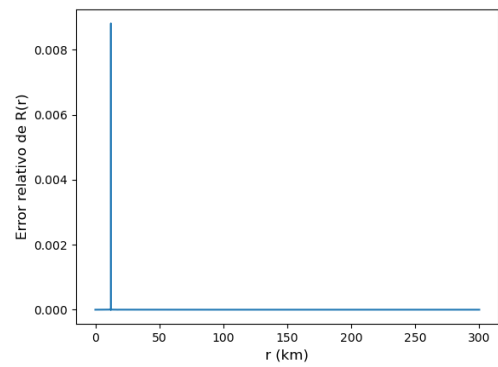
(a)



(b)

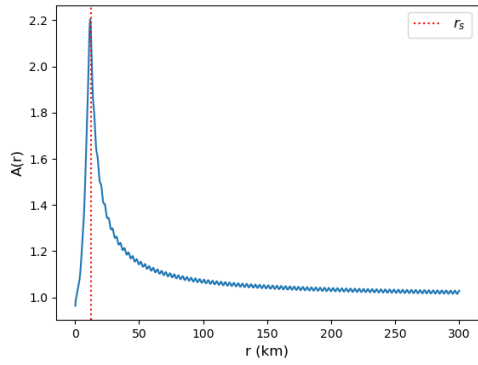


(c)

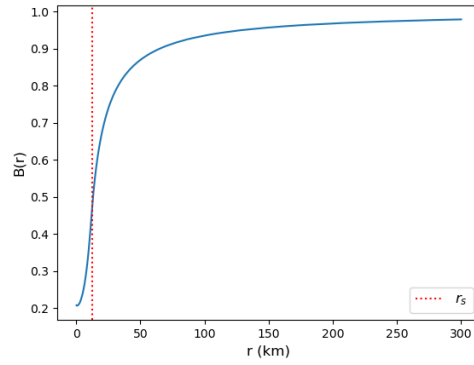


(d)

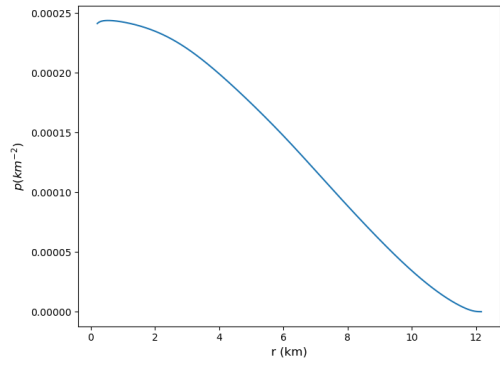
Figura 8: Error numérico relativo de las soluciones de las ecuaciones de campo para  $f(R) = R + \alpha R^2$  con  $\alpha = -0,05 \text{ km}^2$ . Hemos considerado una presión central  $p_c = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$  y la ecuación de estado *Middle*.



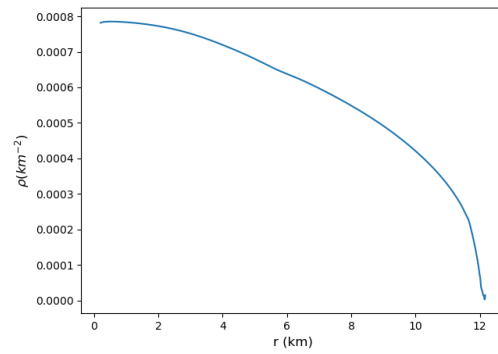
(a)



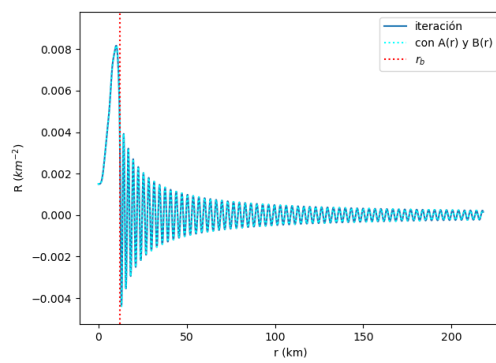
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 9: Integración hacia dentro para resolver numéricamente las ecuaciones de campo para  $f(R) = R + \alpha R^2$  con  $\alpha = -0,05\text{km}^2$ . Hemos utilizado la ecuación de estado *Middle* y hemos integrado desde  $r = 5000\text{km}$  hasta  $r = 0,0001\text{km}$ .

De esta manera, obtenemos las soluciones presentadas en la figura 9. Podemos ver que con la integración hacia dentro obtenemos los mismos resultados que con la integración hacia fuera. Efecto, recuperamos los mismos valores de  $A(0)$ ,  $B(0)$ ,  $p(0)$ ,  $\rho(0)$  y  $R(0)$  que habíamos considerado en la Sección 4.3 como valores iniciales. Por tanto, podemos confiar en la validez de nuestro programa.

## 4.5. Soluciones de Clifton en teorías de gravedad modificada

A continuación, vamos a presentar dos soluciones analíticas de las ecuaciones de campo en vacío y con simetría esférica, para el caso de las teorías de gravedad de cuarto orden. Como buscamos soluciones parecidas a la métrica de Schwarzschild, en la que  $R = 0$  en el exterior, vamos a considerar el límite de curvaturas bajas. Si  $f(R)$  es una expansión en serie de potencias de  $R$ , en este límite el término dominante será aquel con la menor potencia. Teniendo en cuenta esta aproximación, en [21] se considera el modelo  $f(R) = R^{1+\delta}$  (con  $\delta \neq 0$ ), con el cual recuperamos la RG en el límite  $\delta \rightarrow 0$ . En [21] se presentan dos soluciones de las ecuaciones de campo para este caso.

- Solución 1:  $ds^2 = -A_1(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B_1(r)} + r^2d\Omega^2$  donde

$$A_1(r) = r^{2\delta \frac{1+2\delta}{1-\delta}} \left( 1 + \frac{C_1}{r^{\frac{1-2\delta+4\delta^2}{1-\delta}}} \right), \quad (4.45)$$

$$B_1(r) = \frac{(1-\delta)^2}{(1-2\delta+4\delta^2)(1-2\delta(1+\delta))} \left( 1 + \frac{C_1}{r^{\frac{1-2\delta+4\delta^2}{1-\delta}}} \right) \quad (4.46)$$

y  $C_1$  es una constante.

- Solución 2:  $ds^2 = -A_2(r)dt^2 + a^2(t)B_2(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2)$  donde

$$A_2(r) = \left( \frac{1 - \frac{C_2}{r}}{1 + \frac{C_2}{r}} \right)^{2/q}, \quad (4.47)$$

$$B_2(r) = \left( 1 + \frac{C_2}{r} \right)^4 A_2(r)^{q+2\delta-1}, \quad (4.48)$$

$$a(t) = t^{\delta \frac{1+2\delta}{1-\delta}}, \quad (4.49)$$

$$q^2 = 1 - 2\delta + 4\delta^2 \quad (4.50)$$

y  $C_2$  es una constante.

A simple vista vemos que estas dos soluciones se reducen a la métrica de Schwarzschild en el límite  $\delta \rightarrow 0$ . Sin embargo, en el límite  $r \rightarrow \infty$  las soluciones tienen comportamientos diferentes. Mientras que la Solución 2 tiende a una métrica tipo FLRW para un espacio plano, para  $\delta > 0$  las funciones que aparecen en la Solución 1 no tienden a un valor constante e independiente de la coordenada  $r$ , sino que en este límite  $A_1(r) = r^{2\delta \frac{1+2\delta}{1-\delta}}$ . Con la primera métrica demostramos que la solución de las ecuaciones de campo en vacío y con simetría esférica no tiene por qué ser asintóticamente plana, y con la segunda métrica demostramos que en estas condiciones la solución no es única. Con estos ejemplos comprobamos de forma práctica que en las teorías de gravedad métrica  $f(R)$  se viola el teorema de Birkhoff.

## 4.6. Masa gravitacional para un observador lejano

La definición de la masa en teorías  $f(R)$  es diferente a la masa que conocemos en RG. En física newtoniana la masa de un objeto con simetría esférica se define como la integral de volumen de la densidad de dicho objeto, es decir, que la masa es lo que está contenido dentro del radio de la estrella, y se calcula como

$$M = 4\pi \int_0^{r_b} \rho(r)r^2 dr. \quad (4.51)$$

Otra forma de definir la masa es a través del potencial Newtoniano, que para distancias suficientemente grandes es  $-M/r$ . Por tanto, el parámetro  $M$  que aparece en la métrica de Schwarzschild se puede interpretar como la masa Newtoniana que mediría un observador en infinito.

Sin embargo, sabemos que en las teorías  $f(R)$  podemos tener soluciones que no son Schwarzschild, en las cuales el potencial gravitatorio puede ser diferente. Siguiendo el razonamiento de [16], resulta útil usar una parametrización de la métrica del tipo

$$B(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad A(r) = \frac{1 + U(r)}{B(r)}, \quad (4.52)$$

donde  $M(r)$  y  $U(r)$  son funciones arbitrarias que dependen únicamente de la coordenada radial. En este caso,  $M(r)$  no es un parámetro constante como ocurre en RG, sino que se trata de una función que depende de la distancia. Como en el infinito sabemos que la métrica tiende a la de Schwarzschild, las funciones de (4.52) deben cumplir las condiciones

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r} = 0. \quad (4.53)$$

Como se discute en [16], al elegir la definición de masa en teorías  $f(R)$ , debemos tener en cuenta que las correcciones que introducen estos modelos deben ser pequeñas y limitadas al entorno de objetos compactos. De modo que, al observar una estrella desde lejos, es necesario recuperar el potencial newtoniano tradicional  $-M/r$ , que permite interpretar la masa total de una estrella de manera natural. El potencial efectivo en este caso es  $-M(r)/(r(1 + U(r)))$ , así que al igualarlo al potencial newtoniano, se puede identificar la función de masa gravitacional como

$$M_{f(R)}(r) = \frac{M(r)}{1 + U(r)}, \quad (4.54)$$

de modo que la masa que mediría un observador en el infinito sería

$$M_{f(R)}^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} M_{f(R)}(r). \quad (4.55)$$

Siguiendo el procedimiento numérico desarrollado en el Apéndice C, obtenemos el resultado que se muestra en la figura 10. La función  $M_{f(R)}(r)$  oscila siempre entorno a  $M(r)$ , por lo que aparece como una banda con cierta anchura. Sin embargo, pero en el infinito tiende a un valor constante, que es  $M_{f(R)}^\infty$ , igual que ocurre con  $M(r)$ . En este caso, la masa que mediría un observador en infinito sería  $M_{f(R)}^\infty = 4\text{km} = 2,7M_\odot$ .

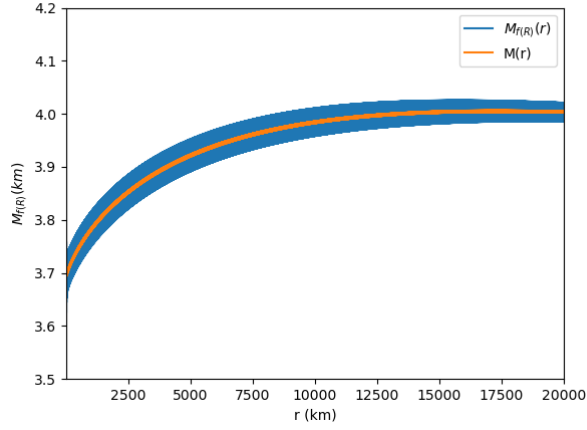


Figura 10:  $M(r)$  y  $M_{f(R)}(r)$  para  $f(R) = R + \alpha R^2$  con  $\alpha = -0,05 \text{ km}^2$ . Hemos considerado  $p_c = 1 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-2}$  y la ecuación de estado *Middle*. La función  $M_{f(R)}(r)$  es oscilatoria y se muestra como una banda debido a que la longitud de las oscilaciones son menores que la escala de distancias.

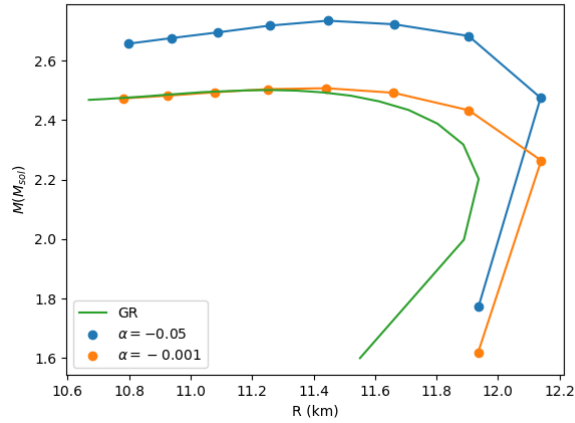


Figura 11: Diagrama masa-radio para GR y  $f(R) = R + \alpha R^2$  con  $\alpha = -0,001, -0,05 \text{ km}^2$ . Utilizamos la ecuación de estado *Middle* y presiones centrales  $p_c \in [1 \cdot 10^{-4}, 1,5 \cdot 10^{-3}] \text{ km}^{-2}$ .

Una vez que sabemos cómo calcular la masa que mediría un observador en infinito tanto para RG como en teorías  $f(R)$ , podemos crear un diagrama masa-radio considerando una ecuación de estado y diferentes valores de la presión central. De esta manera, podemos comparar la relación masa-radio que se obtiene en RG, con la que se obtiene en la teoría  $f(R) = R + \alpha R^2$  para diferentes valores de  $\alpha$ . A partir de los programas utilizados en las secciones 4.1 y 4.3, obtenemos el diagrama masa-radio que se muestra en la figura 11. En dicha figura, podemos observar que cuando la teoría  $f(R)$  se aleja de la RG, podemos tener estrellas compactas con mayor masa. Esto nos da un indicio de que, en teorías de gravedad  $f(R)$  los objetos compactos pueden tener una cantidad de masa extra.

## 5. Límite de Buchdahl

Cuando en RG consideramos una métrica en vacío estática y con simetría esférica, sabemos que un objeto realista no pueden tener cualquier masa o cualquier radio. Esto se debe a que en este caso tenemos la métrica de Schwarzschild en el exterior, y esta presenta una singularidad coordinada en  $r = 2M$ , que se conoce como radio de Schwarzschild. De manera que si un objeto tiene un radio menor que  $2M$ , sabemos que se trata de un agujero negro. Por tanto, en principio cualquier estrella debe tener un radio  $r_b > 2M$ . Además, en este tipo de métrica aparece otra restricción para la relación masa-radio. De la ecuación (4.20) tenemos que para el caso de un fluido perfecto con densidad constante, la presión central de un objeto viene dada por

$$p_c = \rho \frac{1 - (1 - 2M/r_b)^{1/2}}{(1 - 2M/r_b)^{1/2} - 3}. \quad (5.1)$$

Para que se trate de un objeto realista desde el punto de vista físico, se debe cumplir la condición de energía débil, es decir, que la presión y la densidad no pueden ser negativas. De la expresión (5.1) se deduce que para que la presión central sea mayor o igual que cero, la relación masa-radio que se debe cumplir es  $r_b > \frac{9}{4}M$ . Esta condición se conoce como límite de Buchdahl y es más restrictiva que la del radio de Schwarzschild. Por tanto, según este límite, no podemos tener ninguna estrella estable cuyo radio se encuentre en el rango

$$2M < r_b < \frac{9}{4}M, \quad (5.2)$$

es decir, que se trata de un rango prohibido en RG. Además, en [17] se demuestra que en RG el límite de Buchdahl es independiente del modelo, es decir, que se cumple para cualquier ecuación de estado. Una consecuencia de esta restricción es que el corrimiento al rojo (o *redshift*) gravitacional  $z$  en la superficie de la estrella, que según [22] viene dado por

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}}} - 1, \quad (5.3)$$

cumple que  $z < 2$ , ya que  $r_b > \frac{9}{4}M$ .

Al modificar la teoría de gravedad, es natural preguntarse si es posible tener estrellas más masivas en estas teorías. O lo que es lo mismo, si la relación masa radio de una estrella compacta puede situarse en la región prohibida en RG, lo cual implicaría que el redshift gravitacional de la estrella fuera mayor que 2. En la Sección 4.6 ya hemos visto que en teorías  $f(R)$  podemos tener estrellas con mayor masa que en RG, de manera que la relación masa-radio es diferente. Así que ahora nos interesa estudiar cómo se modifica el límite de Buchdahl para estas teorías. La resolución de este problema tiene una gran importancia debido a que, si podemos probar que el redshift gravitacional de una estrella compacta puede ser mayor que 2, esto serviría como test experimental para probar la validez de la RG en el régimen de gravedad fuerte.

El redshift gravitacional se puede medir a través de observaciones terrestres, del sistema solar y astronómicas. Por ejemplo, el redshift gravitacional se puede calcular a través del desplazamiento hacia el rojo de las líneas espectrales, conocida la composición de la estrella [23]. Otra posibilidad es medir esta magnitud en el Sol utilizando métodos ópticos, como se detalla en [24].

## 5.1. Estrellas inmersas en el vacío de Schwarzschild en teorías $f(R)$

En esta Sección vamos a reproducir los resultados desarrollados en [25]. Para ello, vamos a considerar un modelo  $f(R)$  general en el que tenemos una estrella formada por un fluido perfecto que está inmersa en el vacío de Schwarzschild. Como hemos razonado en la Sección 3.4, las soluciones de fluido perfecto para estrellas estáticas y esféricamente simétricas generalmente no se pueden pegar con un exterior de Schwarzschild, ya que no se cumplirían las condiciones de pegado, en concreto la condición (3.54). Sin embargo, vamos a estudiar este caso porque además de ser el más simple, se ha probado que la métrica de Schwarzschild es un buen modelo para describir el exterior de una estrella, como por ejemplo el Sol.

Como ya hemos visto anteriormente, para estudiar estrellas estáticas y esféricamente simétricas podemos considerar una métrica de la forma

$$ds^2 = -c^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.4)$$

donde hemos redefinido  $c(r) \equiv \sqrt{B(r)}$ , y tanto  $c(r)$  como  $m(r)$  son funciones al menos de clase  $C^2$ . También consideramos que la materia que forma la estrella se comporta como un fluido perfecto.

Como hemos visto en la ecuación (2.9), en las teorías  $f(R)$  podemos expresar las ecuaciones de campo en función del tensor de energía-momento total, que tiene una contribución de materia  $T_{\mu\nu}^M$  y otra de curvatura  $T_{\mu\nu}^R$ . Para el caso que vamos a estudiar, el tensor energía-momento total se puede expresar como

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag} [-\rho(r), p_r(r), p_{\theta}(r), p_{\theta}(r)], \quad (5.5)$$

donde hemos definido

$$\rho(r) = \frac{\rho^M(r)}{f_R} + \rho^R(r), \quad (5.6)$$

$$p_r(r) = \frac{p^M(r)}{f_R} + p_r^R(r), \quad (5.7)$$

$$p_{\theta}(r) = \frac{p^M(r)}{f_R} + p_{\theta}^R(r), \quad (5.8)$$

separando las correspondientes contribuciones de materia y curvatura. Como podemos ver, al considerar un fluido perfecto no tenemos anisotropías en la presión asociada a la materia, es decir, que en  $p_r(r)$  y  $p_{\theta}(r)$  la contribución de la materia es la misma. Sin embargo, no podemos imponer la misma condición sobre la parte de la curvatura. Haciendo uso de la definición (2.11) para  $T_{\mu\nu}^R$  y de la métrica (5.4), tenemos que la anisotropía de la presión asociada a la curvatura es

$$p_{\theta}^R - p_r^R = \frac{1}{\kappa f_R} \left[ \left( \frac{m'}{r} - \frac{m}{r^2} \right) R' f_{2RR} - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( (R' f_{2R})' + f_{2R} \frac{R'}{r} \right) \right] \quad (5.9)$$

Por otro lado, dado que estamos considerando una estrella inmersa en un exterior vacío de Schwarzschild, la masa efectiva total de la estrella será igual a la masa de Schwarzschild

en el exterior, que denotaremos por  $M$ . A partir de la ecuación de campo  $G_0^0 = \kappa T_0^0$  llegamos a que

$$\rho = \frac{2m'}{\kappa r} \implies m(r) = \frac{\kappa}{2} \int_0^r \rho(x)x^2 dx, \quad (5.10)$$

de modo que podemos interpretar la función  $m(r)$  como la masa efectiva encerrada en una esfera de radio  $r$ , que está generada tanto por la materia como por la curvatura. En la superficie de la estrella  $m(r_b) = M$  es la masa efectiva total de la estrella, que en la región exterior se corresponde con la masa de Schwarzschild. El resto de ecuaciones de estado sirven para relacionar la masa efectiva con los términos de presión. Por ejemplo, desarrollando  $G_1^1 = \kappa T_1^1$  tenemos que

$$p_r = \frac{2c'}{rc} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \frac{2m}{r^3}. \quad (5.11)$$

Además, usando la segunda identidad de Bianchi  $\nabla_a G_r^a = 0 = \nabla_a T_r^a$  llegamos a la siguiente expresión

$$(cp_r)' + c'\rho = \frac{2c}{r}(p_\theta - p_r). \quad (5.12)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (5.10) y (5.11) en la izquierda de la ecuación (5.12) y simplificando, obtenemos

$$\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} c' \right] = c \left[ \left( \frac{m}{r^3} \right)' + \frac{p_\theta - p_r}{r} \right]. \quad (5.13)$$

La ecuación (5.13) se utiliza a menudo en la literatura para estudiar variaciones del límite de Buchdahl en el caso de estrellas con anisotropías en la presión. Pero debemos tener en cuenta que estas anisotropías aparecen por el hecho de haber introducido términos de curvatura en el tensor de energía-momento. Por esta razón, la anisotropía depende del escalar de Ricci y su derivada.

Como no hay anisotropías asociadas a la materia, de las ecuaciones (5.7) y (5.8) vemos que  $p_\theta - p_r = p_\theta^R - p_r^R$ . Entonces, usando las ecuaciones (5.9) y (5.13) y simplificando, obtenemos

$$\frac{cf_R}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \frac{d}{dr} \left( \frac{m}{r^3} \right) = f_R \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} c' \right] + c \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} (f_R)' \right]. \quad (5.14)$$

El término  $m/r^3$  del lado izquierdo se trata de la densidad media efectiva de la estrella para un radio  $r$ . Podemos observar en la expresión anterior que las funciones  $c(r)$  y  $f_R$  juegan un papel simétrico en la parte de la derecha. Además, para  $f_R = 1$  recuperamos la expresión que aparecen en RG, que se puede usar directamente para obtener el límite de Buchdahl.

Con el fin de construir un modelo estelar estable (en lo que a la termodinámica se refiere) y continuo que se pueda juntar con un exterior vacío de Schwarzschild, es necesario imponer ciertas condiciones de pegado a las componentes de la métrica interior, así como establecer restricciones a las diferentes cantidades termodinámicas de la estrella. Aunque ya hemos mencionado anteriormente que en esta situación no se pueden cumplir

todas las condiciones de pegado necesarias, vamos a seguir el desarrollo de [25]. Además, para evitar la presencia de fantasmas o taquiones y garantizar que la solución de Schwarzschild sea una solución viable de la teoría, existen ciertas condiciones sobre la función  $f(R)$ .

En primer lugar, para asegurar la naturaleza atractiva de la gravedad, es decir, la ausencia de fantasmas y taquiones, en el interior de la estrella debemos tener

$$f_R > 0, \quad f_{2R} \leq 0. \quad (5.15)$$

Adicionalmente, como se demuestra en para que el espacio-tiempo de Schwarzschild sea solución, la función  $f(R)$  debe ser al menos de clase  $C^3$  con

$$f(0) = 0, \quad f_R(0) \neq 0. \quad (5.16)$$

A continuación, veamos cuales son las condiciones de pegado que se imponen en [25]. Dado que tenemos conocimiento de que todos los objetos astrofísicos se encuentran inmersos en un espacio-tiempo que es mayoritariamente vacío, la geometría de Schwarzschild es una posible aproximación para describir la región externa alrededor de una estrella con simetría esférica.

En nuestro caso, vamos a pegar dos espacio-tiempos  $V^+$  y  $V^-$  en una frontera  $\Sigma$ , que consideramos como una hipersuperficie de discontinuidad, y que se trata de una esfera de radio  $r = r_b$ . Como ya hemos visto en la Sección 3, las condiciones de pegado en RG exigen la continuidad de la primera y segunda forma fundamental en la hipersuperficie  $\Sigma$ . Además, en esa misma Sección comentamos que para teorías  $f(R)$  hay condiciones adicionales, como la continuidad del escalar de Ricci y su derivada a lo largo de  $\Sigma$ .

Por un lado, la continuidad de la métrica requiere que

$$c^2(r_b) = \left(1 - \frac{2M}{r_b}\right). \quad (5.17)$$

Mientras que la continuidad de la curvatura extrínseca implica que  $p_r(r_b) = 0$ , es decir, que la componente radial de presión total debe anularse en la superficie de la estrella (se cumple que  $p_r^M(r_b) = p_r^R(r_b) = 0$ ). Usando esta expresión en (5.11), tenemos que

$$c'(r_b) = \frac{1}{r_b^2} \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}}}. \quad (5.18)$$

Por otro lado, las condiciones de pegado extra para teorías  $f(R)$  imponen que

$$R(r_b) = 0 = R'(r_b). \quad (5.19)$$

Ya que en el exterior de Schwarzschild estas cantidades se anulan.

Ahora vamos a introducir las condiciones que nos impone la termodinámica. Por una parte, se exige que las componentes de la métrica y las funciones termodinámicas deben ser al menos de clase  $C^2$  en el interior de la estrella. Entonces, en el centro de la estrella, las derivadas respecto del radio de dichas funciones deben anularse, esto es

$$c'(0) = p'(0) = \rho'(0) = R'(0) = 0. \quad (5.20)$$

Estas condiciones en [25] se denominan condiciones de regularidad. A partir de las condiciones mencionadas hasta ahora, podemos ver que  $c'(r_b) \geq 0$  y  $c'(0) = 0$ . Como  $c(r)$  está relacionado con el potencial gravitacional, para que la estrella sea termodinámicamente estable esta función no debe tener ningún extremo local en ningún punto que no sea el centro. Por tanto, en el interior se debe cumplir

$$c'(r) \geq 0. \quad (5.21)$$

Así que  $c(r)$  debe ser una función monótona creciente y positiva.

Por otra parte, para que la estrella sea estable su densidad total efectiva debe ser una función decreciente con el radio, es decir, que

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{m}{r^3} \right) \leq 0. \quad (5.22)$$

Por último, según [25] para evitar que dentro de la estrella tengamos  $f_R = 0$ , debemos imponer que

$$R(r) \geq 0. \quad (5.23)$$

Por tanto, como  $R(0) \geq 0$  y  $R(r_b) = 0$ , para tener un modelo estelar que sea viable, también debemos imponer que  $R(r)$  sea una función decreciente, es decir, que

$$R'(r) \geq 0. \quad (5.24)$$

Ahora vamos a pasar a calcular el límite de Buchdahl para el caso de una estrella que cumple todas las condiciones anteriores, desde (5.15) hasta (5.24). Vamos a definir la función

$$\phi(r) = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad (5.25)$$

de modo que

$$\phi(r_b) = \frac{1}{r_b} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}}. \quad (5.26)$$

Veamos la siguiente proposición

**Proposición 1.** Con las condiciones (5.15)-(5.24), para el caso de un exterior de Schwarzschild se cumple que para cualquier radio  $r$  en el espacio-tiempo interior, la función  $f_R(R(r))c'(r)$  es positiva y está acotada inferiormente.

**Demostración.** Usando las ecuaciones (5.14) y (5.22), tenemos

$$f_R(r) \frac{d}{dr} [\phi(r)c'(r)] + c(r) \frac{d}{dr} [\phi(r)f'_R(r)] \leq 0. \quad (5.27)$$

Integrando esta expresión desde  $r$  a  $r_b$  (con  $r \in [0, r_b]$ ) y reordenando, nos queda

$$[f_R \phi c']_r^{r_b} + [c \phi f'_R]_r^{r_b} \leq 2 \int_r^{r_b} f_{2R} R' c' \phi dr. \quad (5.28)$$

Por las condiciones de la proposición, en el interior las funciones  $R'$ ,  $c'$  y  $\phi$  son positivas y  $f_{2R} \leq 0$ , de modo que la integral de la derecha será menor que 0. Entonces, desarrollando los términos de la izquierda, nos queda

$$f_R(R(r_b)) \phi(r_b) c'(r_b) - f_R(R(r)) \phi(r) c'(r) + c(r_b) \phi(r_b) f_{2R}(R(r_b)) R'(r_b)$$

$$-c(r)\phi(r)f_{2R}(R(r))R'(r) \leq 0. \quad (5.29)$$

Por el mismo razonamiento, podemos quitar el último término de la expresión anterior sin alterar la desigualdad. Además, usando la condición (5.19), vemos que el tercer término de la última expresión se anula. Sustituyendo pues, (5.18) en la expresión (5.29), concluimos que

$$f_R(R(r))c'(r) \geq \frac{f_R(0)}{r_b^3} \frac{Mr}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}. \quad (5.30)$$

□

Puesto que esta desigualdad es cierta  $\forall r \in [0, r_b]$  y ningún término cambia de signo, podemos realizar la integral en este intervalo en ambos lados, de modo que

$$f_R(0)c(r_b) - f_R(R(0))c(0) - \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr \geq \frac{f_R(0)M}{r_b^3} \int_0^{r_b} \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} dr. \quad (5.31)$$

Para quitarnos la integral de la parte derecha de la expresión anterior, veamos cómo podemos acotarla inferiormente:

**Proposición 2.** Para un modelo estelar con un exterior de Schwarzschild, que sea estable desde el punto de vista termodinámico y cumpla con las condiciones (5.15)-(5.24), se verifica que la integral de  $(1/\phi(r))$  desde 0 hasta  $r_b$  está acotada inferiormente por  $(r_b^3/2M)[1 - r_b\phi(r_b)]$ .

**Demostración.** Usando la condición (5.22), tenemos que la densidad efectiva en el interior de la estrella debe ser una función decreciente, lo cual implica que

$$2M \frac{r^3}{r_b^3} \leq 2m \quad \forall r \in [0, r_b]. \quad (5.32)$$

Por lo tanto, se cumple

$$\int_0^{r_b} \frac{rdr}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \geq \int_0^{r_b} \frac{rdr}{\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{r_b^3}}} \equiv \frac{r_b^3}{2M} [1 - r_b\phi(r_b)]. \quad (5.33)$$

□

Usando este resultado en el lado derecho de (5.31), tenemos

$$f_R(0)c(r_b) - f_R(R(0))c_0 - \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr \geq \frac{f_R(0)}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}} \right). \quad (5.34)$$

Debido a que  $f_{2R} \leq 0$  y tanto  $R'$  como  $c$  son positivos en el interior, podemos escribir

$$- \int_0^{r_b} f_{2R}R'c(r)dr = \left| \int_0^{r_b} f_{2R}R'c(r)dr \right|. \quad (5.35)$$

Por otra parte, también hemos visto que  $c(r_b) \geq c(r) \forall r \in [0, r_b]$ , entonces

$$\left| \int_0^{r_b} f_{2R}R'c(r)dr \right| \leq c(r_b) \left| \int_0^{r_b} f_{2R}R'dr \right| \equiv c(r_b) (f_R(R(0)) - f_R(0)), \quad (5.36)$$

de modo que podemos usar esta desigualdad en (5.34). Usando también la expresión (5.17) y reordenando, nos queda

$$\sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}} \left[ \frac{f_R(0)}{2} + f_R(R(0)) \right] - \frac{f_R(0)}{2} \geq f_R(R(0)) c_0. \quad (5.37)$$

Finalmente, veamos el siguiente teorema:

**Teorema 1.** En teorías de gravedad  $f(R)$ , en el caso de una estrella estática y esféricamente simétrica de radio  $r_b$ , inmersa en el vacío de Schwarzschild, se establece un límite máximo para la masa total efectiva de la estrella debido a las condiciones de regularidad y estabilidad termodinámica. Este límite superior se encuentra en un punto intermedio entre el límite de Buchdahl de la RG y el límite de Schwarzschild dado por  $r_b = 2M$ .

**Demostración.** Debido a las condiciones (5.15) y (5.20), el término de la derecha de (5.37) es siempre positivo en el interior de la estrella, así que

$$\sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}} \left[ \frac{f_R(0)}{2} + f_R(R(0)) \right] - \frac{f_R(0)}{2} > 0. \quad (5.38)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la expresión y reordenando, nos queda

$$\left[ 1 + 2 \frac{f_R(R(0))}{f_R(0)} \right]^2 \left( 1 - \frac{2M}{r_b} \right) > 1. \quad (5.39)$$

Despejando el término  $2M$ , finalmente obtenemos

$$2M < \frac{4 \frac{f_R(R(0))}{f_R(0)} \left[ 1 + \frac{f_R(R(0))}{f_R(0)} \right]}{\left[ 1 + 2 \frac{f_R(R(0))}{f_R(0)} \right]^2} r_b. \quad (5.40)$$

Por las condiciones (5.15), sabemos que  $\frac{f_R(R(0))}{f_R(0)} \geq 1$ . Cuando se alcanza la igualdad recuperamos el límite de Buchdahl dado por  $2M < (8/9)r_b$ , y cuando esa fracción es mucho mayor que la unidad, la expresión tiende al límite de Schwarzschild  $r_b = 2M$ .  $\square$

Este teorema nos garantiza que al modificar la teoría de la RG mediante una función  $f(R) \neq R$ , es posible tener estrellas esféricas y estables con cuya masa se encuentre en el rango  $(8/9)r_b \leq 2M \leq r_b$ , que es considerado una región prohibida en RG. Esto implica que en estas teorías podemos tener estrellas compactas más masivas pero estables, lo cual que podría ofrecer una solución al problema de la materia oscura [1].

Si ahora consideramos una pequeña perturbación de la RG, podemos escribir

$$\frac{f_R(R(0))}{f_R(0)} = 1 + \beta, \quad 0 \leq \beta \ll 1. \quad (5.41)$$

En este caso, el límite de Buchdahl a primer orden en  $\beta$  se expresa como

$$2M < \frac{8}{9} \left( 1 + \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{6} \right) r_b. \quad (5.42)$$

Luego, el incremento de masa relativo, definido como  $\delta M = (M - M_{GR})/M_{GR}$  (siendo  $M_{GR}$  el límite superior en RG), se puede escribir como

$$\frac{\delta M}{M_{GR}} = \frac{4}{27}\beta(1 - \beta). \quad (5.43)$$

Por tanto, vemos que esta teoría proporciona una explicación sencilla y natural para la presencia de estrellas de neutrones extremadamente masivas en el universo. Además, nos permite calcular el corrimiento al rojo superficial máximo para estas estrellas <sup>7</sup>

$$z < z_{\text{máx}} = 2(1 + \beta). \quad (5.45)$$

que puede tener un valor mayor que 2. Así que, en principio, cualquier variación de la RG en el régimen de curvaturas altas podría verificarse experimentalmente a partir de los datos observacionales de las estrellas compactas.

Análogamente a lo que ocurría en RG, este límite se obtiene imponiendo solamente condiciones de pegado y condiciones para la estabilidad termodinámica. También hemos visto que el resultado obtenido es independiente del modelo. Sin embargo, en la Sección 3.4 hemos llegado a la conclusión de que las soluciones de fluido perfecto generalmente no van a poder juntarse con un exterior de Schwarzschild, ya que no se cumplen todas las condiciones de pegado. En concreto, cuando en [25] se habla de las condiciones de pegado, no se menciona la condición (3.54), la cual no se cumple para las soluciones de fluido perfecto. Por tanto, los resultados que se obtienen, y que hemos reproducido en esta Sección, no son correctos. La única posibilidad de pegar un exterior de Schwarzschild con una solución de fluido perfecto, sería considerando algún tipo de capa superficial en la estrella. Por lo que hemos discutido en 3.3, en el modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$ , a pesar de la continuidad de la primera y segunda forma fundamental, tendríamos que  $[R] \neq 0$ . Por tanto, cabría la posibilidad de pegar las soluciones mencionadas.

## 5.2. Generalización del límite de Buchdahl en teorías $f(R)$

A pesar de que se ha probado que la métrica exterior de Schwarzschild es un buen modelo para las estrellas, como por ejemplo el Sol, esto no significa que sea la única solución. En efecto, como hemos visto en la Sección 4.3, en teorías  $f(R)$  podemos tener otras soluciones que se parecen a Schwarzschild a grandes distancias. Además, ya sabemos que un exterior de Schwarzschild no se puede pegar con una solución de fluido perfecto.

A continuación vamos a tratar de generalizar el límite de Buchdahl para una métrica exterior cualquiera, que sea estática y esféricamente simétrica. Para ello, vamos a seguir un procedimiento análogo al descrito en la Sección 5.1, pero sin considerar que en el exterior tenemos la métrica de Schwarzschild. En este caso, seguimos considerando la métrica dada por (5.4). Por tanto, como en el interior tenemos las mismas condiciones que las presentadas en la Sección 5.1, las ecuaciones (5.5)-(5.15) siguen siendo válidas. Sin

---

<sup>7</sup>Con la ecuación (5.3) y el límite de Buchdahl, vemos que

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_b}}} - 1 < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{8}{9} - \frac{4\beta}{27} + \frac{4\beta^2}{27}}} - 1 \approx 2(1 + \beta) + \mathcal{O}(\alpha^3) \equiv z_{\text{máx}}, \quad (5.44)$$

donde nos hemos quedado a segundo orden en  $\beta$ .

embargo, como ahora Schwarzschild no tiene por qué ser la solución exterior resultante, no tenemos las condiciones de (5.16) (aunque  $f(R)$  debe seguir siendo al menos de clase  $C^3$ ). Además, debemos tener en cuenta que ahora no se va a cumplir que  $m(r_b) = M$ , ya que ahora la definición de masa es diferente.

Las condiciones de pegado que vamos a aplicar siguen siendo las mismas. Por la continuidad de la curvatura extrínseca sabemos que  $p_r^M(r_b) = 0$ . Sin embargo, ahora  $p_r(r_b) = p_r^R(r_b)$  no tiene por qué ser 0. En efecto, usando la ecuación (2.11) tenemos que

$$p_r^R = (T^R)_r = \frac{1}{f_R} \left[ \frac{1}{2}(f - Rf_R) + \nabla_r \nabla^r f_R - \square f_R \right], \quad (5.46)$$

que siempre es cero en RG, pero en teorías  $f(R)$  no tiene por qué anularse. Ahora, evaluando la ecuación (5.11) en  $r = r_b$  y despejando  $c'(r_b)$ , tenemos

$$c'(r_b) = \frac{m(r_b)}{r_b^2} \frac{c(r_b)}{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}} + \frac{p_r^R(r_b)r_b}{2} \frac{c(r_b)}{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}. \quad (5.47)$$

De nuevo, como no tenemos Schwarzschild en el exterior, no podemos imponer que  $R(r_b) = 0 = R'(r_b)$ .

En cuanto a las condiciones de regularidad y estabilidad termodinámica, puesto que se establecen para el interior de la estrella, las condiciones (5.20)-(5.22) siguen siendo ciertas en este caso. Por último, en general no es necesario considerar las condiciones (5.23) y (5.24), ya que en la Sección 4.3 hemos visto que no tienen por qué cumplirse.

Veamos en este caso cómo podemos demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 3.** En el caso general, con las condiciones (5.20)-(5.22), se cumple que para cualquier radio  $r$  en el espacio-tiempo interior la función  $f_R(R(r))c'(r)$  está acotada inferiormente.

**Demostración.** De nuevo, usando la ecuación (5.14) y la condición (5.22) nos queda

$$f_R(r) \frac{d}{dr} [\phi(r)c'(r)] + c(r) \frac{d}{dr} [\phi(r)f'_R(r)] \leq 0 \leq 0. \quad (5.48)$$

Integrando desde  $r$  a  $r_b$  (con  $r \in [0, r_b]$ ) y reordenando, tenemos

$$[f_R \phi c']_r^{r_b} + [c \phi f'_R]_r^{r_b} - 2 \int_r^{r_b} f_{2R} R' c' \phi d\tilde{r} \leq 0. \quad (5.49)$$

Como ahora no sabemos si  $R'$  es positivo o negativo, no podemos deshacernos del tercer término. Sin embargo, sí que podemos quitar  $c(r)\phi(r)f_{2R}R'$ , ya que es negativo. Así que, desarrollando esta expresión y reordenando, nos queda

$$\begin{aligned} f_R(R(r))c' &\geq \frac{f_R(R(r_b))}{r_b^3} \frac{m(r_b)c(r_b)r}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} + \frac{f_R(R(r_b))}{2} \frac{p_r^R(r_b)c(r_b)r}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \\ &+ \frac{f_{2R}(R(r_b))R'(r_b)}{r_b} \frac{c(r_b)r \sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} - 2 \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \int_r^{r_b} f_{2R} R' c' \phi d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

□

Si tuviéramos en cuenta las consideraciones del caso anterior, recuperaríamos la expresión (5.30). Pero en este caso, aunque sí que obtenemos que  $f_R(R(r))c'$  está acotada inferiormente, no podemos asegurar que la función sea positiva.

A continuación, para conocer el comportamiento de los términos que aparecen en (5.50), necesitamos considerar un modelo  $f(R)$  particular. Por ejemplo, vamos a estudiar el caso  $f(R) = R + \alpha R^2$ , para el cual hemos obtenido las soluciones de las ecuaciones de campo en la Sección 4.3. Basándonos en estos resultados, podemos realizar algunas consideraciones.

En primer lugar, vamos a considerar

$$p_r^R(r_b) > 0, \quad (5.51)$$

lo cual es cierto para nuestro modelo, ya que

$$p_r^R(r_b) = \frac{-\alpha R(r_b)}{2 + 4\alpha R(r_b)} = -\frac{f_{2R}(r_b)R(r_b)}{2f_R(r_b)}. \quad (5.52)$$

Además, en la figura 7 vemos que  $R(r_b)$  es positivo. Por tanto, podemos quitar el término con  $p_r^R$  de la desigualdad (5.50), ya que siempre es positivo, con lo que nos queda

$$f_R(R(r))c' \geq \frac{f_R(R(r_b))}{r_b^3} \frac{m(r_b)c(r_b)r}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} + \frac{f_{2R}(R(r_b))R'(r_b)}{r_b} \frac{c(r_b)r\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \quad (5.53)$$

$$-2 \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \int_r^{r_b} f_{2R}R'c'\phi d\tilde{r}. \quad (5.54)$$

En segundo lugar, para nuestro modelo también se cumple que

$$- \int_r^{r_b} f_{2R}R'c'\phi d\tilde{r} \geq 0. \quad (5.55)$$

Con esta condición se simplifica la desigualdad anterior, ya que podemos eliminar el último término, de modo que

$$f_R(R(r))c' \geq \frac{f_R(R(r_b))}{r_b^3} \frac{m(r_b)c(r_b)r}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} + \frac{f_{2R}(R(r_b))R'(r_b)}{r_b} \frac{c(r_b)r\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}. \quad (5.56)$$

Por otro lado, como hemos comentado anteriormente, se cumple que

$$R'(r_b) < 0. \quad (5.57)$$

Con esto, tenemos que el último término de la desigualdad (5.56) es positivo, así que nos queda

$$f_R(R(r))c' \geq \frac{f_R(R(r_b))}{r_b^3} \frac{m(r_b)c(r_b)r}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}. \quad (5.58)$$

Puesto que la expresión anterior es cierta para todo  $r \in [0, r_b]$ , podemos integrar en ese intervalo sin que cambie la desigualdad, de modo que

$$f_R(R(r_b))c(r_b) - f_R(R(0))c_0 - \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr \geq \frac{f_R(R(r_b))}{r_b^3} \frac{m(r_b)c(r_b)}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}} \int_0^{r_b} \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} dr. \quad (5.59)$$

Para simplificar la integral del miembro derecho, usamos la siguiente proposición:

**Proposición 4.** En general, para cualquier modelo estelar que sea estable desde el punto de vista termodinámico y cumpla con las condiciones (5.15)-(5.24), se verifica que la integral de  $(1/\phi(r))$  desde 0 hasta  $r_b$  está acotada inferiormente por  $(r_b^3/2M) [1 - r_b\phi(r_b)]$ .

**Demostración.** Usando la condición (5.22), tenemos que en el interior de la estrella se verifica

$$2m(r_b) \frac{r^3}{r_b^3} \leq 2m \quad \forall r \in [0, r_b]. \quad (5.60)$$

Por tanto, se cumple

$$\int_0^{r_b} \frac{rdr}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \geq \int_0^{r_b} \frac{rdr}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)r^2}{r_b^3}}} = \frac{r_b^3}{2m(r_b)} [1 - r_b\phi(r_b)] = \frac{r_b^3}{2m(r_b)} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}} \right]. \quad (5.61)$$

□

Usando este resultado, tenemos que la ecuación (5.59) queda

$$f_R(R(r_b))c(r_b) - f_R(R(0))c_0 - \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr \geq \frac{f_R(R(r_b))}{2} c(r_b) \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}} - 1 \right]. \quad (5.62)$$

Ahora, teniendo en cuenta la condición (5.55) y que  $c(r_b) \geq c(r) \forall r \in [0, r_b]$ , tenemos que

$$- \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr = \left| \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr \right| \leq c(r_b) \left| \int_0^{r_b} f_{2R}R'dr \right| = c(r_b) |f_R(R(0)) - f_R(R(r_b))|. \quad (5.63)$$

Por último, vamos a tener en cuenta que  $f_R(R(0)) - f_R(R(r_b)) > 0$ , ya que en nuestro modelo

$$f_R(R(0)) - f_R(R(r_b)) = 2\alpha(R(0) - R(r_b)) > 0, \quad (5.64)$$

y en nuestro caso se cumple que  $R(0) < R_b$  y  $\alpha < 0$ . Con esta condición, se cumple que

$$- \int_0^{r_b} f_{2R}R'cdr \leq c(r_b)(f_R(R(0)) - f_R(R(r_b))). \quad (5.65)$$

Aplicando este resultado a la ecuación (5.62) y quitando el término  $f_R(R(0))c_0$ , que es positivo, tenemos que

$$f_R(R(r_b))c(r_b) + c(r_b)(f_R(R(0)) - f_R(R(r_b))) > \frac{f_R(R(r_b))}{2} c(r_b) \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}}} - 1 \right]. \quad (5.66)$$

Simplificando esta expresión, nos queda que

$$\sqrt{1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}} \left(1 + 2 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))}\right) > 1. \quad (5.67)$$

Elevando al cuadrado ambos lados, tenemos que

$$\left(1 - \frac{2m(r_b)}{r_b}\right) \left(1 + 2 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))}\right)^2 > 1 \quad (5.68)$$

. Despejando  $2m(r_b)$  llegamos a la desigualdad que buscábamos

$$2m(r_b) < \frac{4 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} \left[1 + \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))}\right]}{\left[1 + 2 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))}\right]^2} r_b \quad (5.69)$$

. Podemos ver claramente que si tenemos en cuenta las consideraciones de la Sección 5.1 para el caso de Schwarzschild en el exterior, recuperamos la ecuación (5.40). La ecuación (5.69) sería la expresión del límite de Buchdahl en teorías  $f(R)$  para una métrica exterior que cumpla las condiciones (5.51), (5.55), (5.57) y (5.64).

En RG se cumple que  $f_R(R(0)) = f_R(R(r_b)) = 1$ . Por tanto, para considerar una pequeña perturbación de la RG, podemos escribir

$$\frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} = 1 + \gamma \quad 0 \leq \gamma \ll 1 \quad (5.70)$$

de modo que podemos expresar la relación (5.69) como

$$2m(r_b) < \frac{8}{9} \left(1 + \frac{\gamma}{6} - \frac{\gamma^2}{6}\right) r_b, \quad (5.71)$$

donde nos hemos quedado a segundo orden en  $\gamma$ . Por tanto, el corrimiento al rojo superficial para estas estrellas cumple

$$z < z_{max} = 2(1 + \gamma), \quad (5.72)$$

Por ejemplo, en el caso en que  $f(R) = R + \alpha R^2$ , en el cual ya hemos visto que se cumplen las consideraciones anteriores, tendríamos que a segundo orden en  $\alpha$

$$\frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} = \frac{1 + 2\alpha R(0)}{1 + 2\alpha R(r_b)} \approx 1 + 2\alpha (R(0) - R(r_b)) - 4\alpha^2 R(r_b) (R(0) - R(r_b)). \quad (5.73)$$

De modo que en este caso  $\gamma = 2\alpha (R(0) - R(r_b)) - 4\alpha^2 R(r_b) (R(0) - R(r_b))$ . Sustituyendo esta relación en (5.71) y desarrollando a orden 2 en  $\alpha$ , nos quedaría la expresión

$$2m(r_b) < \frac{8}{9} \left[1 + \frac{1}{3}\alpha (R(0) - R(r_b)) - \frac{2}{3}\alpha^2 R(0) (R(0) - R(r_b))\right] r_b. \quad (5.74)$$

Por tanto, el corrimiento al rojo a segundo orden en  $\alpha$  sería

$$z < z_{max} = 2(1 + 4\alpha (R(0) - R(r_b)) - 24\alpha^2 R(r_b) (R(0) - R(r_b))). \quad (5.75)$$

de modo que, igual que ocurría en para un exterior de Schwarzschild, podemos tener un corrimiento al rojo mayor que 2.

Como hemos discutido en la Sección 4.6, la masa que aparece en estas ecuaciones no es la que mediría un observador en infinito, por lo que nos interesa obtener una expresión como (5.74) pero que dependa de la masa en el infinito. Para ello, debemos trabajar con la métrica en el exterior de la estrella. Como podemos ver en los resultados de la Sección 4.3, la función  $\frac{1}{1-2m(r)/r}$  en el exterior, habitualmente tiende a 1 de manera oscilatoria. Por tanto, en el exterior la función  $m(r)$  no es una buena definición de la masa, ya que no tiene sentido que sea una función que oscila. Así que, para estudiar el espacio-tiempo exterior es más adecuado considerar la métrica de la forma

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (5.76)$$

Así que, como mencionamos en la Sección 4.6, usamos la parametrización de (4.52) (donde  $M(r)$  no es la masa de Schwarzschild ni la masa  $m(r)$  utilizada en esta Sección). Para obtener un resultado del límite de Buchdahl que dependa de estas funciones que aparecen en la métrica, comparamos directamente las métricas (5.4) y (5.76), de manera que tenemos las siguientes identificaciones

$$c^2(r) = B(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r} \quad (5.77)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} = A(r) = \frac{1 + U(r)}{1 - \frac{2M(r)}{r}}. \quad (5.78)$$

Despejando  $m(r)$  de (5.78) nos queda

$$m(r) = \frac{M(r)}{1 + U(r)} + \frac{r}{2} \frac{U(r)}{1 + U(r)} = M_{f(R)}(r) + \frac{r}{2} \frac{U(r)}{1 + U(r)}. \quad (5.79)$$

En el infinito,  $A(r)$  y  $B(r)$  deberían coincidir, de modo, que también lo deben hacer  $m(r)$  y  $M(r)$ . Para que esto sea cierto, usando las condiciones (4.53) en la expresión anterior, se debe cumplir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rU(r) = 0. \quad (5.80)$$

Es decir,  $U(r)$  es una función que a grandes distancias decrece más rápido que  $1/r$ . Usando las condiciones para  $U(r)$  en (5.79), se verifica que

$$m(r) \geq M_{f(R)}(r). \quad (5.81)$$

Con esta relación, la expresión del límite de Buchdahl de (5.69) quedaría

$$2M_{f(R)}(r_b) < \frac{4 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} \left[ 1 + \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} \right]}{\left[ 1 + 2 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} \right]^2} r_b. \quad (5.82)$$

Sin embargo, antes hemos mencionado que nosotros no podemos medir experimentalmente el valor de  $M_{f(R)}(r_b)$ , así que queremos encontrar alguna relación entre esta magnitud y la masa que mediría realmente un observador en infinito, que es  $M_{f(R)}^\infty$ . Por tanto, proponemos la siguiente relación

$$F[f(R(r_b))]M_{f(R)}^\infty \leq M_{f(R)}(r_b), \quad (5.83)$$

donde  $F[f(R(r_b))]$  es un funcional que depende de la función  $f(R)$  evaluada en  $r = r_b$ . Sabemos que para  $f(R) = R$ , este funcional debe tener un valor igual a 1, ya que en RG la masa  $M$  en el borde de la estrella se corresponde con la masa Newtoniana que mide un observador en infinito. Además, sabemos que conforme la teoría se diferencie más de la RG, el valor de  $M_{f(R)}^\infty/M_{f(R)}(r_b)$  aumenta, ya que cada vez la masa en el infinito se diferencia más de la masa en  $r = r_b$ . Así que la función  $F$  debe ser menor que 1 cuando consideremos perturbaciones de la RG.

Proponemos una expresión del tipo

$$F[f(R(r_b))] = [1 + f_{2R}(R(r_b))]^n, \quad (5.84)$$

con  $n$  un número real positivo. Estudiemos ahora la validez de este funcional para el caso  $f(R) = R + \alpha R^2$ , en el que

$$F[f(R(r_b))] = \left(1 + 2\frac{\alpha}{1\text{km}^2}\right)^n, \quad (5.85)$$

que cumple las condiciones mencionadas. En la expresión anterior hemos escrito  $\alpha/(1\text{km}^2)$  para conseguir una expresión que sea adimensional, ya que en este modelo  $f_{2R}(R(r_b)) = 2\alpha$  tiene unidades de  $\text{km}^2$ . Si redefinimos el parámetro  $\alpha \equiv \alpha/(1\text{km}^2)$ , la relación (5.83) tendría la forma

$$(1 + 2\alpha)^n M_{f(R)}^\infty \leq M_{f(R)}(r_b). \quad (5.86)$$

A partir de los resultados obtenidos en la Sección 4.6, calculamos la relación entre  $M_{f(R)}^\infty$  y  $M_{f(R)}(r_b)$ . De esta manera, podemos verificar si existe algún valor de  $n$  para el cual la desigualdad anterior cierta para cualquier ecuación de estado (de las tres que estamos estudiando) y para cualquier valor de  $\alpha$  (que cumpla  $|\alpha| \ll 1$ , pues estamos considerando pequeñas perturbaciones de la RG). Como podemos comprobar en las figuras 18, 19 y 20, para  $n = 4$  la relación 5.86 es cierta en todos los casos, de modo que tenemos la relación

$$(1 + 2\alpha)^4 M_{f(R)}^\infty \leq M_{f(R)}(r_b), \quad (5.87)$$

que solamente alcanza la igualdad para  $\alpha = 0$ , como cabía esperar. También podemos ver que para las ecuaciones de estado *Stiff* y *Middle* la relación (5.86) con  $n = 4$  da lugar a una desigualdad muy poco restrictiva. Por lo que  $n = 1,5$  daría una cota más precisa en estos casos.

Por otra parte, observamos que para la ecuación de estado *Soft*, la relación  $M_{f(R)}(r_b)/M_{f(R)}^\infty$  en función de  $\alpha$  es menor que para *Middle*, que a su vez es menor que para *Stiff*. Por tanto, cuanto más lentamente crece la presión con la densidad, menor es la relación  $M_{f(R)}(r_b)/M_{f(R)}^\infty$  en función de  $\alpha$ . Entonces, como  $(1 + 2\alpha)^4$  es una buena cota para *Soft*, en principio la relación (5.87) es cierta para cualquier ecuación de estado en la que la presión crezca más rápidamente con la densidad que en *Soft*.

Finalmente, sustituyendo la relación anterior en (5.82), nos queda el resultado

$$2M_{f(R)}^\infty < \frac{1}{[1 + f_{2R}(R(r_b))]^4} \frac{4 \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))} \left[1 + \frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))}\right]}{\left[1 + 2\frac{f_R(R(0))}{f_R(R(r_b))}\right]^2} r_b. \quad (5.88)$$

Puesto que solamente hemos comprobado la veracidad de estos resultado para la familia de funciones  $f(R) = R + \alpha R^2$ , únicamente podemos asegurar que esta relación es válida

para este modelo. Si de nuevo consideramos pequeñas perturbaciones de RG, que para nuestro modelo sería tomando  $|\alpha| \ll 1$ , y desarrollamos la expresión anterior a segundo orden en  $\alpha$ , tendríamos que

$$2M_{f(R)}^\infty < \frac{8}{9} \left[ 1 + \frac{1}{3}\alpha (R(0) - R(r_b) - 24) - \frac{2}{3}\alpha^2 (R(0) + 4) (R(0) - R(r_b) - 60) \right] r_b. \quad (5.89)$$

donde hemos redefinido  $R \equiv R/(1\text{km}^{-2})$  para que sea adimensional, igual que  $\alpha$ . Entonces, el incremento de masa con respecto a la masa de RG es

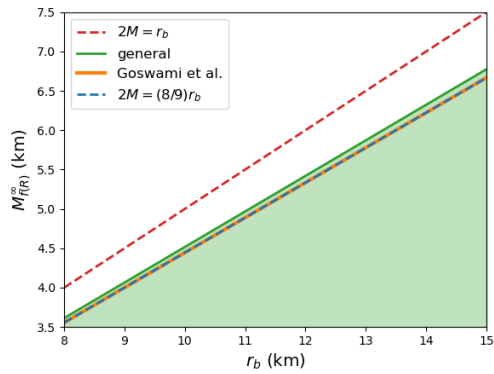
$$\frac{\delta M}{M_{GR}} = \frac{8}{27} \left[ \alpha (R(0) - R(r_b) - 24) - 2\alpha^2 (R(0) + 4) (R(0) - R(r_b) - 60) \right]. \quad (5.90)$$

A continuación, vamos a comparar la desigualdad (5.40) obtenida en [25] para el caso de un exterior de Schwarzschild con la expresión generalizada (5.88) que hemos obtenido nosotros, con el fin de dilucidar cual de las dos desigualdades es más restrictiva. Para ello, representamos la masa que mediría un observador en infinito en función del radio de la estrella, usando las dos desigualdades mencionadas. En la figura 12 vemos que conforme el valor de  $\alpha$  aumenta, hay una mayor diferencia entre nuestro límite y el de la RG. Para valores de  $\alpha$  alrededor de  $-0,015\text{km}^2$ , nuestro límite de Buchdahl sobrepasa el límite de  $r_b = 2M$ , por lo que deja de ser una solución válida. Por tanto, confirmamos que nuestro resultado solamente es cierto en el régimen de pequeñas desviaciones de la RG, que en el caso que representamos sería para  $|\alpha| \leq 0,014\text{km}^2$ . Además, vemos que conforme  $\alpha$  es más próximo a cero, nuestro límite se aproxima al límite de la RG.

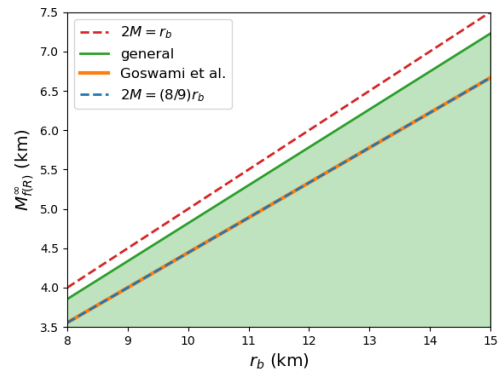
Por otro lado, podemos observar que nuestra expresión generalizada del límite de Buchdahl es menos restrictiva que la obtenida para un exterior de Schwarzschild, es decir, que permite un mayor rango de masas y radios. El límite obtenido en [25] es muy poco restrictivo, ya que para valores pequeños de  $\alpha$  el resultado siempre es muy próximo al límite de Buchdahl de la RG. Se necesitarían valores de  $\alpha$  más grandes para ver una diferencia, pero entonces ya no estaríamos realizando pequeñas perturbaciones de la RG. Así que, además de no ser un resultado correcto, tampoco aporta información nueva. En la figura 12 no representamos los resultados para otras ecuaciones de estado y otras presiones centrales porque no se observan cambios significativos. Por tanto, nuestro resultado es válido para las tres ecuaciones de estado que estudiamos.

Para cuantificar la masa extra que introduce nuestra expresión (5.88) del límite de Buchdahl, en la figura 13 representamos el incremento de masa relativo, que hemos calculado usando la expresión (5.90). Además, en esta figura también se muestra el incremento de masa correspondiente al resultado obtenido en [25], que hemos calculado con la ecuación (5.43). En ambos casos, tenemos que la diferencia de masa relativa es positiva y que esta aumenta conforme nos alejamos de la RG, es decir, conforme aumentamos el valor de  $\alpha$ . Observamos que la masa extra que introduce el resultado para un exterior de Schwarzschild, para el rango de valores de  $\alpha$  que estamos considerando, es del orden de  $1 \cdot 10^{-3}\%$ , por lo se trata de valores muy complicados de medir. En cuanto a la masa extra que introduce nuestro resultado, vemos que para estos valores de  $\alpha$  es está entre un 2% y un 10%.

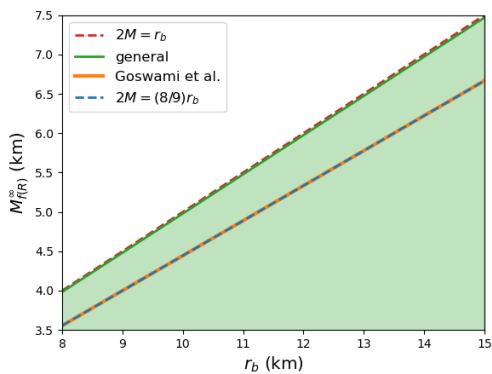
Para finalizar, en la figura 14 mostramos el valor del redshift máximo  $z_{\text{máx}}$  que obtenemos con nuestros resultados, usando la ecuación (5.75), junto con los resultados obtenidos para un exterior de Schwarzschild, usando la expresión (5.45). Vemos que para los dos



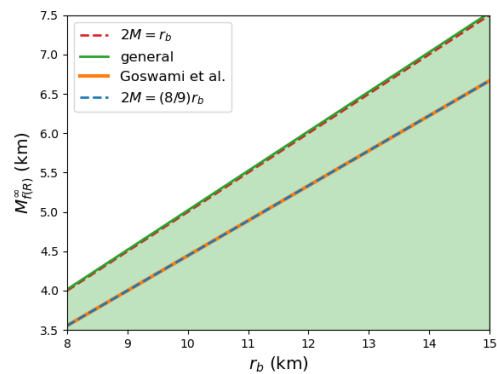
(a)  $\alpha = -0,002\text{km}^2$



(b)  $\alpha = -0,01\text{km}^2$



(c)  $\alpha = -0,014\text{km}^2$



(d)  $\alpha = -0,015\text{km}^2$

Figura 12: Comparación de nuestro límite de Buchdahl generalizado («general») con el obtenido en [25] («Goswami et al.») para el modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$  con distintos valores de  $\alpha$ . Hemos considerado la ecuación de estado *Middle* y  $p_c = 5 \cdot 10^{-4}\text{km}^{-2}$ . También se han representado los límites  $2M = (8/9)r_b$  y  $2M = r_b$ .

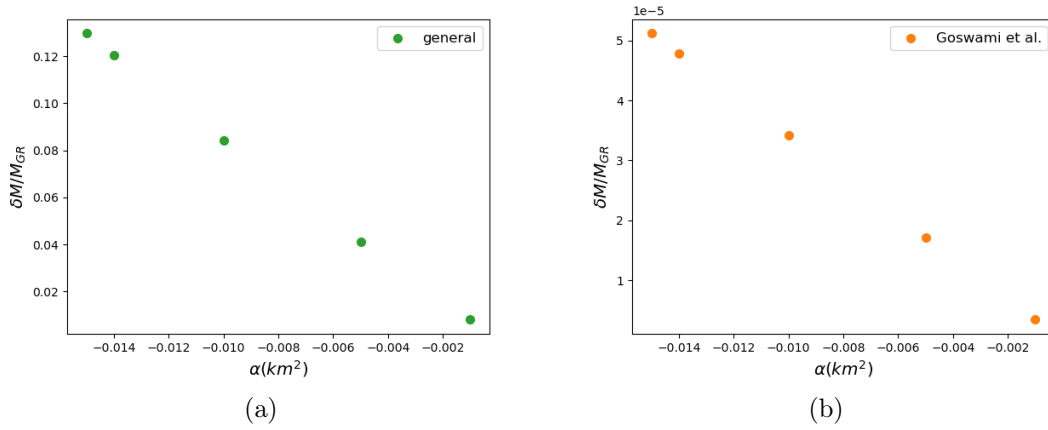


Figura 13: Incremento de masa relativo que se introduce en un modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Hemos considerado la ecuación de estado *Middle* y una presión central  $p_c = 5 \cdot 10^{-4} km^{-2}$ . El panel (a) muestra el resultado para nuestro límite de Buchdahl («general»). El panel (b) muestra el resultado para el límite de Buchdahl obtenido en [25] («Goswami et al.»). Como los valores de  $\alpha$  son negativos, cuanto menor es su valor, más nos alejamos de RG.

resultados, cuando aumenta el valor de  $\alpha$ , también aumenta el valor de  $z_{m\acute{a}x}$ . Además, para todos los valores de  $\alpha$  el nuestro resultado es mayor que el que se obtiene para un exterior de Schwarzschild.

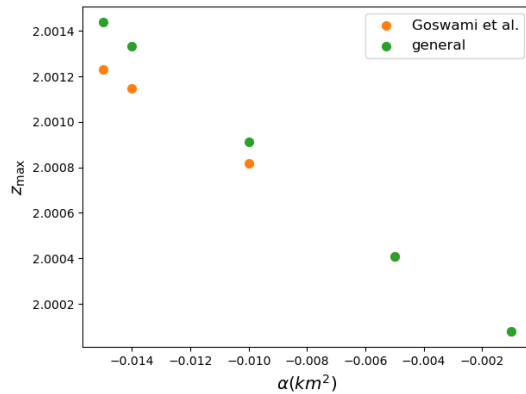


Figura 14: Comparación de  $z_{m\acute{a}x}$  obtenido con nuestro límite de Buchdahl («general») comparado con el de [25] («Goswami et al.») para el modelo  $f(R) = R + \alpha R^2$  en función de  $\alpha$ . Hemos utilizado la ecuación de estado *Middle* y una presión central  $p_c = 5 \cdot 10^{-4} km^{-2}$ .

## 6. Conclusiones

En este Trabajo de Fin de Máster hemos presentado la formulación métrica de las teorías de gravedad  $f(R)$  y hemos estudiado el límite de Buchdahl en estas teorías para el caso de soluciones estáticas y esféricamente simétricas.

Hemos estudiado el límite de Buchdahl en teorías  $f(R)$  en el caso de una solución de fluido perfecto con un exterior de Schwarzschild. Sin embargo, hemos confirmado que en teorías  $f(R)$ , generalmente estas soluciones no se pueden pegar, ya que no se cumplen las condiciones de pegado necesarias. Para poder pegar estas soluciones, sería necesario considerar una capa superficial en la frontera de la estrella.

Después, hemos generalizado la expresión del límite de Buchdahl en teorías  $f(R)$  para una métrica exterior cualquiera, que cumpla las condiciones de pegado correspondientes. Al contrario de lo que ocurre imponiendo un exterior de Schwarzschild, nuestro análisis no necesita introducir ninguna capa superficial para garantizar el cumplimiento de las condiciones de pegado. Para este caso, hemos comprobado todos nuestros resultados numéricamente utilizando tres ecuaciones de estado que describen la materia formada por neutrones. La expresión del límite de Buchdahl obtenida en este trabajo, además de ser válida para las tres ecuaciones de estado que hemos estudiado, también se cumple para cualquier ecuación de estado cuya presión decrezca más rápidamente con la densidad que en *Soft*.

Finalmente, hemos podido comprobar que las teorías  $f(R)$  permiten la existencia de estrellas cuya masa y radio se encuentra el rango  $2M < r_b < 9M/4$ , que se trata de un rango prohibido en Relatividad General. Una consecuencia de este suceso, es la posibilidad de tener redshift gravitacional mayor que 2. Este efecto puede servir como test experimental para probar la validez de la Relatividad General en el régimen de gravedad fuerte, lo cual podría verificarse experimentalmente a partir de los datos observacionales de las estrellas compactas.

Para continuar avanzando en este tema, se podría estudiar el caso de una solución de fluido perfecto que se pega con un exterior de Schwarzschild, pero considerando una capa superficial en la frontera. Otra posibilidad sería entender cómo se comportan las expresiones que hemos obtenido en el caso de ecuaciones de estado que describan otro tipo de materia, como estrellas de quarks. También sería interesante tratar de mejorar la expresión del límite de Buchdahl que hemos obtenido en este trabajo.

# Apéndices

## A. Derivación de las ecuaciones de campo en teorías $f(R)$

El caso que vamos a estudiar es el de una métrica estática y esféricamente simétrica, que de forma general se puede escribir como

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (\text{A.1})$$

Asumiendo que tenemos un objeto que se puede describir como un fluido perfecto, el tensor de energía-momento en el interior del objeto se puede escribir como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

Como la métrica estática, consideramos que el fluido está en reposo, de manera que las componentes espaciales de la velocidad son cero. Además, si normalizamos la velocidad, se debe cumplir que  $u_\mu u^\mu = -1$ , así que las componentes de la cuadrivelocidad son  $u = \sqrt{B}(1, 0, 0, 0)$ . Esto hace que el tensor de energía-momento sea diagonal, siendo sus componentes

$$T_{tt} = \rho(r)B(r), \quad (\text{A.3})$$

$$T_{rr} = p(r)A(r), \quad (\text{A.4})$$

$$T_{\theta\theta} = p(r)r^2, \quad (\text{A.5})$$

$$T_{\phi\phi} = T_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (\text{A.6})$$

De manera que el escalar asociado al tensor de energía-momento es

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 3p - \rho. \quad (\text{A.7})$$

A continuación, vamos a calcular las componentes del tensor de Ricci, que se obtienen a partir de los símbolos de Christoffel como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\sigma\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\rho. \quad (\text{A.8})$$

Según [17], para esta métrica los símbolos de Christoffel diferentes de cero son

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{tr}^t = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta. \quad (\text{A.10})$$

Por tanto, las únicas componentes del tensor de Ricci que son diferentes de cero son

$$R_{tt} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{B'}{rA}, \quad (\text{A.11})$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{A'}{rA}, \quad (\text{A.12})$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{A} - \frac{r}{2A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right), \quad (\text{A.13})$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (\text{A.14})$$

Así que el escalar de Ricci es

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{B'}{2AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B''}{AB} - \frac{2B'}{rAB} + \frac{2A'}{rA^2} - \frac{2}{Ar^2} + \frac{2}{r^2}. \quad (\text{A.15})$$

Una vez que conocemos las componentes de los tensores  $g_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  y  $R_{\mu\nu}$ , las sustituimos en las ecuaciones de campo (2.3), de manera que se obtienen tres ecuaciones independientes:

$$\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{B'}{rA} = \frac{1}{f_R} \left[ \kappa\rho B - B \left( \frac{A'}{2A^2} - \frac{2}{rA} \right) f'_R + \frac{B}{A} f''_R - \frac{B}{2} f(R) \right], \quad (\text{A.16})$$

$$-\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{A'}{rA} = \frac{1}{f_R} \left[ \kappa p A - \left( \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} \right) f'_R + \frac{A}{2} f(R) \right], \quad (\text{A.17})$$

$$1 - \frac{1}{A} - \frac{r}{2A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) = \frac{1}{f_R} \left[ \kappa p r^2 - \frac{r^2}{A} f''_R - \left( \frac{B' r^2}{2AB} - \frac{A' r^2}{2A^2} + \frac{r}{A} \right) f'_R + \frac{r^2}{2} f(R) \right]. \quad (\text{A.18})$$

Si imponemos la conservación del tensor de energía-momento, es decir, que  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , obtenemos otra ecuación,

$$p' = -\frac{p + \rho B'}{2B}. \quad (\text{A.19})$$

Con esta última, tenemos cuatro ecuaciones independientes.

Ahora, con el objetivo de poder resolver las ecuaciones numéricamente, lo que queremos es aislar las derivadas de orden superior y escribirlas en función del resto de términos. Realizando la combinación  $\frac{(\text{A.16})}{2B} + \frac{(\text{A.17})}{2A} + \frac{(\text{A.18})}{r^2}$ , obtenemos

$$-\frac{1}{Ar^2} + \frac{A'}{rA^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{f_R} \left[ \frac{k}{2}(\rho + 3p) - \frac{1}{2A} f''_R - \left( \frac{3B'}{4AB} - \frac{A'}{4A^2} + \frac{1}{rA} \right) f'_R + \frac{1}{2} f(R) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Para aislar  $A'$ , necesitamos expresar  $f''_R$  en función de derivadas de orden inferior. Para ello, realizando la combinación  $\frac{3A}{r^2}(\text{A.18}) + \frac{A}{B}(\text{A.16}) - 2A(\text{A.20})$  y despejando  $f''_R$ , se obtiene la expresión

$$f''_R = f_R \left( \frac{AR}{2} - \frac{A'}{2rA} - \frac{2A}{r^2} + \frac{2}{r^2} + \frac{3B'}{2rB} \right) + f'_R \left( \frac{A'}{2A} + \frac{1}{r} \right). \quad (\text{A.21})$$

Introduciendo esta ecuación en (A.20) y reordenando los términos <sup>8</sup>, se obtiene la ecuación (4.3). Por otro lado, usando la relación  $f''_R = f_{3R} R'^2 + f_{2R} R''$  y teniendo en cuenta la expresión (A.15) del escalar de Ricci, podemos aislar el término  $R''$  de manera que se obtiene la ecuación (4.5). Por último, la expresión para  $B''$  se obtiene a partir de la ecuación (A.17), sustituyendo  $A'$  por la relación que aparece en (4.3). Con esto, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales independientes en las que tenemos aisladas las derivadas de orden superior.

<sup>8</sup>Se usa que  $f'_R = \frac{df_R}{dr} = \frac{df_R}{dR} \frac{dR}{dr} = f_{2R} R'$

## B. Método del disparo para obtener el valor de $B(0)$ en el formalismo métrico

Para emplear este método, vamos a seguir el procedimiento de [16], que es válido para cualquier teoría  $f(R)$ . Nosotros lo usaremos para determinar el valor de  $B(0)$ , solamente haciendo uso de la condición

$$\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1, \quad (\text{B.1})$$

que se debe a que, a distancias muy grandes, la métrica se debe comportar como la de Schwarzschild. La idea principal del método del disparo es empezar con un valor cualquiera de  $B(0)$  e integrar el sistema de ecuaciones hasta un cierto radio. El resultado que obtenemos de  $B(r)$  normalmente no va a satisfacer la condición anterior, pero nos sirve para dar un valor más acertado de  $B(0)$ . Este proceso se repite de manera iterativa hasta que conseguimos una solución de  $B(r)$  que satisface la condición mencionada de manera suficientemente buena.

Para aplicar este método, debemos elegir un radio de referencia suficientemente grande hasta el cual vamos a realizar la integración, que vamos a denotar por  $ar_b$ , siendo  $r_b$  el radio de la estrella y  $a$  un parámetro. Para cada valor de  $a$ , elegimos  $B_a(0)$  de manera que se cumpla que

$$B_a(ar_b) = 1. \quad (\text{B.2})$$

Después, vamos aumentando el valor de  $a$  y calculando los respectivos  $B_a(0)$  que hacen que se cumpla (B.2). Con esto, podemos representar los valores que hemos obtenido de  $B_a(0)$  en función de  $a$  y realizamos un ajuste con una función del tipo  $b_1 + b_2/a^{b_3}$ , siendo los  $b^i$  parámetros del ajuste, como podemos observar en la figura 15. Esta figura se ha realizado para el caso  $f(R) = R + \alpha R^2$  con  $\alpha = -0,05\text{km}^2$  y una presión central  $p_c = 1 \cdot 10^{-3}\text{km}^{-2}$ . Con este ajuste, podemos calcular  $B_{a \rightarrow \infty}(r=0)$ , que se corresponde con el valor inicial  $B(0)$  que satisface la condición (B.1). Con esto, ya podemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para obtener las funciones  $A(r)$ ,  $B(r)$ ,  $R(r)$  y  $p(r)$ , que cumplen todas las condiciones iniciales y condiciones de frontera.

## C. Cálculo numérico de la masa gravitacional en teorías $f(R)$

En esta parte vamos a seguir el procedimiento desarrollado en [16], de modo que consideramos la parametrización del tipo

$$B(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad A(r) = \frac{1 + U(r)}{B(r)}, \quad (\text{C.1})$$

con  $M(r)$  y  $U(r)$  funciones arbitrarias. Para calcular correctamente la función  $M(r)$  a partir de  $B(r)$ , teniendo en cuenta que el método del disparo explicado en B introduce cierto error, se define la función

$$M(\beta, r) = \beta r + M(r), \quad (\text{C.2})$$

donde  $\beta$  es un parámetro. En la figura 16 representamos la función  $M(r)/r$  directamente calculada a partir de  $B(r)$ . Por otro lado, en la figura 17 se representa la función  $M(\beta, r)$  en

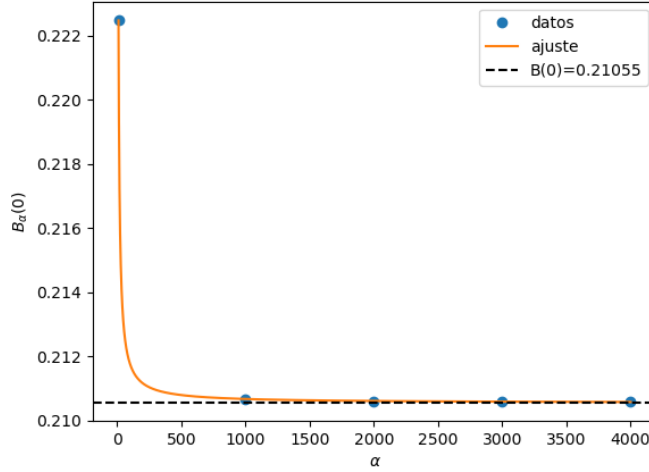


Figura 15: Valor inicial  $B_a(0)$  en función del parámetro  $a$  que hace que se cumpla la condición de contorno en  $r = ar_b$ . Extrapolando  $a \rightarrow \infty$  obtenemos  $B_\infty(0) = 0,21055$ . Hemos utilizado la ecuación de estado *Middle* y una presión central  $p_c = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$ .

función de la distancia, y podemos observar que decrece de manera lineal para distancias muy grandes, debido al error que introduce el método del disparo. Por tanto, de esta última figura no podemos obtener el valor de la masa para  $r \rightarrow \infty$ . Sin embargo, podemos realizar un ajuste de la función representada en la figura 17 para calcular el valor de  $\beta$  correspondiente y así poder obtener la función  $M(r)$ , que en infinito debe tender a un valor constante. Además, una vez que hemos resuelto  $A(r)$  y  $B(r)$  correctamente, podemos calcular la masa gravitacional en  $f(R)$ , que se define como

$$M_{f(R)}(r) = \frac{M(r)}{1 + U(r)}. \quad (\text{C.3})$$

De modo que podemos comparar  $M_{f(R)}(r)$  con  $M(r)$ , como se muestra en la figura 10.

## D. Resultados para comprobar la relación (5.87)

Queremos comprobar para qué valores de  $\alpha$  es cierta la relación (5.87). Para cada ecuación de estado de las tres que estamos estudiando, y para tres presiones centrales diferentes, vamos a representar  $M_{f(R)}(r_b)/M_{f(R)}^\infty$  para varios valores de  $\alpha$ , así como la curva  $(1 + 2\alpha)^n$  para  $n = 1,5$  y  $n = 4$ . Los resultados se encuentran en las figuras (18), (19) y (20). Vemos que la curva para  $n = 1,5$  es una buena cota para las ecuaciones de estado *Middle* y *Stiff*, pero no para *Soft*. Sin embargo, la curva para  $n = 4$  es válida para las tres ecuaciones de estado.

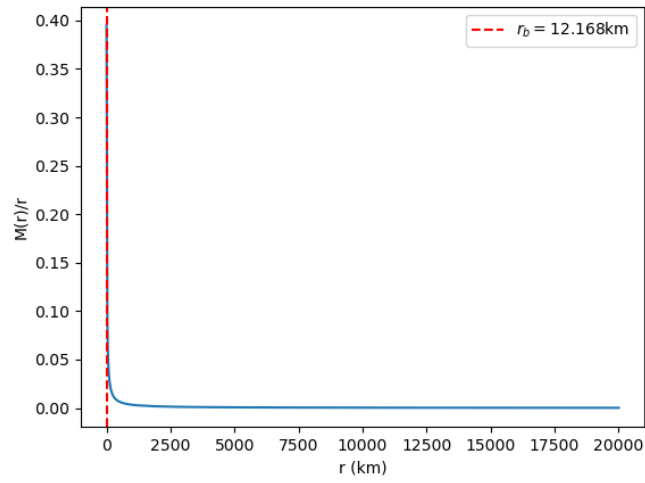


Figura 16:  $M(r)/r$  para el  $B(0)$  obtenido con el método del disparo. Hemos utilizado la ecuación de estado *Middle* y una presión central  $p_c = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$ . Como cabría esperar,  $M(r)/r$  se trata de una función que decrece con la distancia.

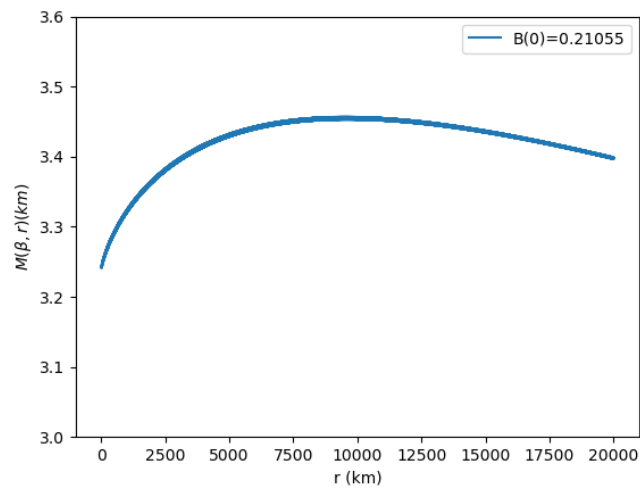
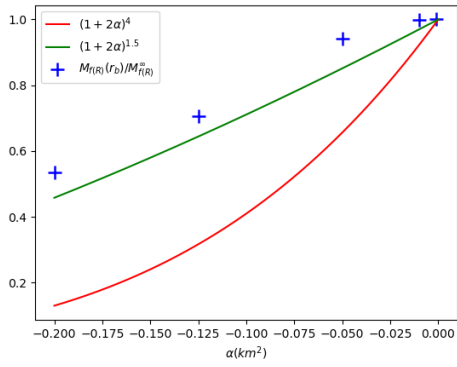
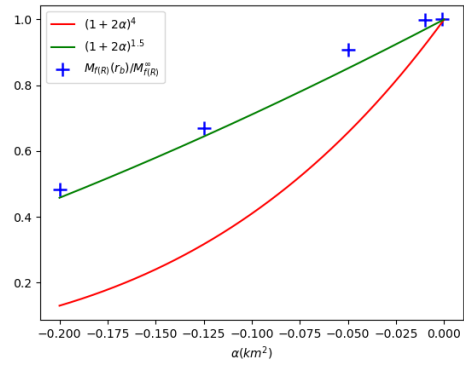


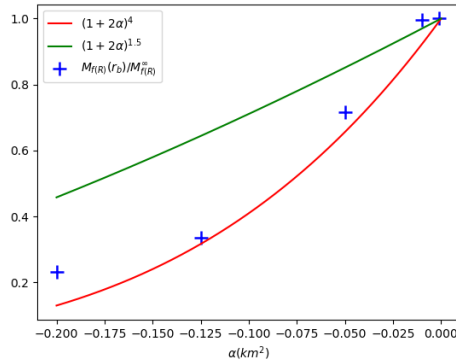
Figura 17:  $M(\beta, r)$  para el  $B(0)$  obtenido con el método del disparo. Hemos utilizado la ecuación de estado *Middle* y una presión central  $p_c = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$ . Esta función decrece de manera lineal con  $r$  a partir de distancias del orden de 13000km, lo cual se debe al factor  $\beta r$ .



(a) Ecuación de estado *Stiff*.

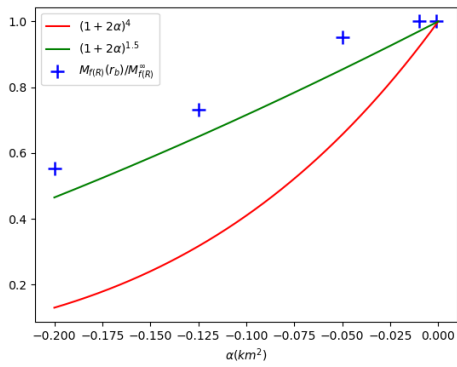


(b) Ecuación de estado *Middle*.

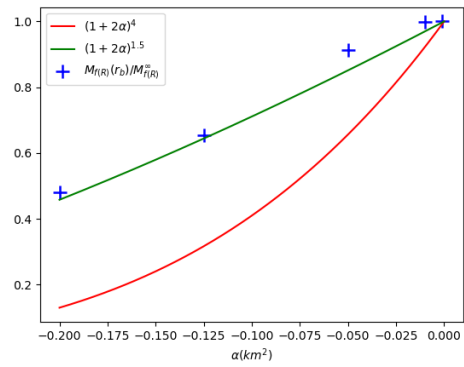


(c) Ecuación de estado *Soft*.

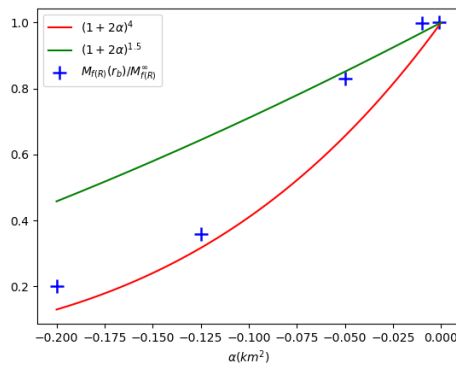
Figura 18:  $M_{f(R)}(r_b)/M_{f(R)}^\infty$ ,  $(1+2\alpha)^4$  y  $(1+2\alpha)^{1,5}$  en función de  $\alpha$ , para  $p_c = 5 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$  y diferentes ecuaciones de estado.



(a) Ecuación de estado *Stiff*.

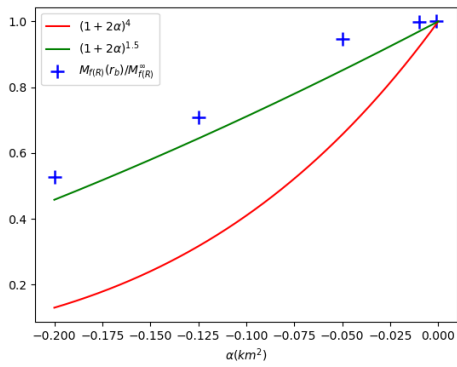


(b) Ecuación de estado *Middle*.

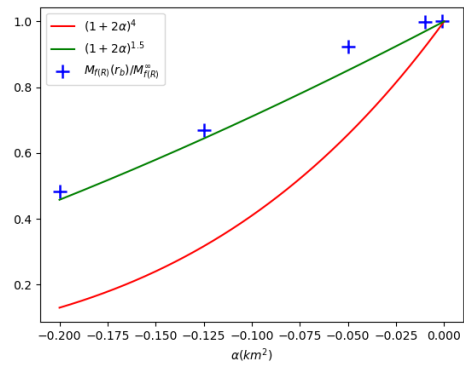


(c) Ecuación de estado *Soft*.

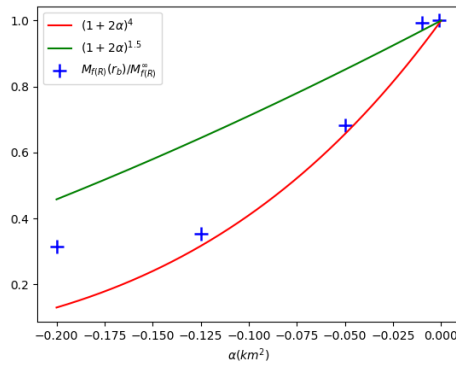
Figura 19:  $M_{f(R)}(r_b)/M_{f(R)}^\infty$ ,  $(1+2\alpha)^4$  y  $(1+2\alpha)^{1.5}$  en función de  $\alpha$ , para  $p_c = 1 \cdot 10^{-4} \text{km}^{-2}$  y diferentes ecuaciones de estado.



(a) Ecuación de estado *Stiff*.



(b) Ecuación de estado *Middle*.



(c) Ecuación de estado *Soft*.

Figura 20:  $M_{f(R)}(r_b)/M_{f(R)}^\infty$ ,  $(1+2\alpha)^4$  y  $(1+2\alpha)^{1,5}$  en función de  $\alpha$ , para  $p_c = 1 \cdot 10^{-3} \text{km}^{-2}$  y diferentes ecuaciones de estado.

## Referencias

- [1] Thomas P Sotiriou and Valerio Faraoni.  $f(r)$  theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451, 2010.
- [2] Hermann Weyl. A new extension of the theory of relativity. *Ann. Phys*, 59:101, 1919.
- [3] Arthur Stanley Eddington. *The mathematical theory of relativity*. The University Press, 1923.
- [4] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa.  $f(r)$  theories. *Living Reviews in Relativity*, 13(1):1–161, 2010.
- [5] Alexei A Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 91(1):99–102, 1980.
- [6] Shin’ichi Nojiri and Sergei D Odintsov. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration. *physical Review D*, 68(12):123512, 2003.
- [7] Salvatore Capozziello, Sante Carloni, and Antonio Troisi. Quintessence without scalar fields. *arXiv preprint astro-ph/0303041*, 2003.
- [8] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of  $f(r)$  cosmic acceleration that evade solar system tests. *Physical Review D*, 76(6):064004, 2007.
- [9] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [10] Georges Darmois. Les équations de la gravitation einsteinienne. *Memorial des Sciences Mathématiques*, 25, 1927.
- [11] Werner Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44(1):1–14, 1966.
- [12] André Lichnerowicz. Théories relativistes de la gravitation et de l’électromagnétisme masson, paris. *Chapitre III*, 1955.
- [13] WB Bonnor and PA Vickers. Junction conditions in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 13:29–36, 1981.
- [14] Kayll Lake. Revisiting the darmois and lichnerowicz junction conditions. *General Relativity and Gravitation*, 49(10):134, 2017.
- [15] José MM Senovilla. Junction conditions for  $f(r)$  gravity and their consequences. *Physical Review D*, 88(6):064015, 2013.
- [16] Miguel Aparicio Resco, Álvaro de la Cruz-Dombriz, Felipe J Llanes Estrada, and Víctor Zapatero Castrillo. On neutron stars in  $f(r)$  theories: Small radii, large masses and large energy emitted in a merger. *Physics of the dark universe*, 13:147–161, 2016.
- [17] Thanu Padmanabhan. *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.

- [18] Kirtika Juhi Hurgobin et al. Stability and Gravitational Collapse in Extended Theories of Gravity: from Singularities to Bouncing Scenarios. Master's thesis, University of Cape Town, 2019.
- [19] K Hebeler, JM Lattimer, Christopher J Pethick, and A Schwenk. Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation. *The Astrophysical Journal*, 773(1):11, 2013.
- [20] A de La Cruz-Dombriz, A Dobado, and AL Maroto. Black holes in  $f(r)$  theories. *Physical Review D*, 80(12):124011, 2009.
- [21] T Clifton. Spherically Symmetric Solutions to Fourth-Order Theories of Gravity. *Classical and quantum gravity*, 23(24):7445, 2006.
- [22] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [23] Jay B Holberg. Sirius b and the measurement of the gravitational redshift. *Journal for the History of Astronomy*, 41(1):41–64, 2010.
- [24] James William Brault. *The gravitational red shift in the solar spectrum*. Princeton University, 1962.
- [25] Rituparno Goswami, Sunil D Maharaj, and Anne Marie Nzioki. Buchdahl-bondi limit in modified gravity: Packing extra effective mass in relativistic compact stars. *Physical Review D*, 92(6):064002, 2015.