



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MATEMÁTICAS

ENDOMORFISMOS DE POTENCIA FINITA Y APLICACIONES ARITMÉTICAS

Autor:

JUAN SALVAT DE ÁLVARO

Tutor:

FERNANDO PABLOS ROMO

Salamanca, Julio 2024



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MATEMÁTICAS

ENDOMORFISMOS DE POTENCIA FINITA Y APLICACIONES ARITMÉTICAS

Autor:

Tutor:

Juan Salvat

FDO: JUAN SALVAT DE ÁLVARO

FDO: FERNANDO PABLOS ROMO

Salamanca, Julio 2024

D. Fernando Pablos Romo, profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca,

HACE CONSTAR:

Que el trabajo titulado “*Endomorfismos de Potencia Finita y Aplicaciones Aritméticas*”, que se presenta, ha sido realizado por D. Juan Salvat de Álvaro, con DNI *****0469L y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas en esta Universidad.

Salamanca, a fecha de firma electrónica.

Fdo.: Fernando Pablos Romo

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Determinante, traza e índice de endomorfismos en espacios de dimensión finita	3
2.2. Descomposición CN de matrices en dimensión finita	4
2.3. Espacios vectoriales de dimensión infinita	4
2.4. Conmensurabilidad	5
2.5. Curvas en Geometría Algebraica	6
2.6. Residuos en Análisis Complejo	8
2.7. Operadores de clase de traza	8
2.8. El 2-cociclo de Segal-Wilson	10
3. Endomorfismos de potencia finita	13
3.1. Definición	13
3.2. Clasificación	16
3.3. Traza	20
3.4. Determinante	23
3.4.1. Generalización de la definición de Grothendieck	25
3.4.2. Relación con el producto exterior infinito	26
3.4.3. Relación con los valores propios	27
3.5. Exponencial	29
3.6. Ejemplo	30
4. Teoría de Tate para los residuos	33
4.1. Residuos en curvas algebraicas	39
4.2. Ejemplo	41
5. Ley de reciprocidad de Segal-Wilson	45
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

El concepto de residuo de una 1-forma diferencial en un punto del plano complejo es una de las nociones principales que estudia el Análisis Complejo. El cálculo de residuos posibilita el cómputo de múltiples integrales definidas y sumas infinitas.

En 1968 el matemático estadounidense John Tate da en [20] una definición algebraica de este concepto, hasta entonces puramente analítico. Para ello, introduce, de manera auxiliar, una nueva noción en el ámbito del Álgebra Lineal: un endomorfismo en un espacio vectorial infinito dimensional será «de potencia finita» si la imagen de alguna de sus potencias es de dimensión finita. Como en un espacio vectorial de dimensión finita todo endomorfismo verifica esto, podemos pensar los endomorfismos de potencia finita como una generalización del concepto ya conocido de endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita. La noción de endomorfismo de potencia finita también generaliza los conceptos de endomorfismo nilpotente y endomorfismo de rango finito.

En este trabajo se pretende recopilar un estudio de estos endomorfismos para comprender después su aplicación en la definición de Tate de residuo.

En el Capítulo 2, comenzamos dando una serie de nociones preliminares que serán de gran utilidad a lo largo del trabajo. Entre otras cosas: se introducen conceptos asociados a endomorfismos en dimensión finita para luego generalizarlos; se dan algunas propiedades de los espacios vectoriales de dimensión infinita de uso recurrente en el trabajo y se define la relación de «commensurabilidad» entre sus subespacios; y se comenta la noción de curva en Geometría Algebraica así como la definición clásica de residuo del Análisis Complejo. El Capítulo se cierra con una breve exposición del estudio publicado en 1985 por Graeme Segal y George Wilson en [18], pues es a partir de este que los profesores de la USAL Daniel Hernández Serrano y Fernando Pablos Romo introducen en 2013 en [7] un análogo multiplicativo al estudio del residuo de Tate.

El Capítulo 3 se centra en los endomorfismos de potencia finita. Inicialmente, definimos endomorfismo de potencia finita mediante tres caracterizaciones distintas, introduciendo las nociones de «descomposición AST» del espacio vectorial y de «descomposición Core-Nilpotente» del endomorfismo. Estas dos descomposiciones las extraemos, respectivamente, de lo hecho en 2007 en [1] por Martin Argerami, Fernando Szechtman y Ryan Tifenbach y del trabajo de Fernando Pablos publicado en 2020 en [13]. A continuación, basándonos

en la clasificación ya conocida de los endomorfismos en espacios vectoriales de dimensión finita, se da, según [12], una clasificación de los endomorfismos nilpotentes en dimensión arbitraria, que se generaliza a los de potencia finita. Cabe mencionar que el estudio de descomposiciones y clasificación que se efectúa hasta este punto depende en gran medida del hecho de que los endomorfismos de potencia finita de un cierto espacio vectorial admiten un polinomio anulador. Esto puede observarse en [11], donde se generaliza la clasificación aquí dada a una válida para todo endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión arbitraria que tenga un polinomio anulador.

Una particularidad de los endomorfismos de potencia finita es que, al igual que para los operadores de clase de traza que analizamos en los preliminares, es posible definir para ellos nociones de traza y determinante, de modo que dichas definiciones generalicen las ya conocidas en dimensión finita. Es en esto en lo que fijaremos nuestro interés durante el resto del Capítulo 3, dando múltiples propiedades y comparando estas definiciones con otras como, por ejemplo, la definición de Alexander Grothendieck de determinante dada en 1956 en [4] para operadores de rango finito.

Para finalizar el Capítulo 3, se ejemplifica este estudio para un endomorfismo concreto con el fin de facilitar la comprensión del lector.

Los Capítulos 4 y 5 sirven de conclusión al trabajo, aplicando lo aprendido sobre los endomorfismos de potencia finita al análisis de Tate del residuo y a su análogo multiplicativo. Ambos capítulos terminan también centrando nuestra atención en un ejemplo específico para una mejor asimilación de los contenidos.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Determinante, traza e índice de endomorfismos en espacios de dimensión finita

Sean k un cuerpo, V un k -espacio vectorial de dimensión finita n y $T \in \text{End}_k(V)$.

Si suponemos $\text{ch}(k) \neq 2$ y denotamos $\Omega_n(V)$ al conjunto de los tensores hemisimétricos n -covariantes, se tiene un endomorfismo $\Omega_n(T) : \Omega_n(V) \longrightarrow \Omega_n(V)$ definido por

$$[\Omega_n(T)(\Omega'_n)](v_1, \dots, v_n) := \Omega'_n(T(v_1), \dots, T(v_n)).$$

Como $\dim_k(\Omega_n(V)) = 1$, $\Omega_n(T)$ ha de ser una homotecia, i.e., $\Omega_n(T)(\Omega'_n) = \lambda \Omega'_n$ para cierto escalar λ .

DEFINICIÓN 2.1. Se define el **determinante de T** como el escalar $\det(T)$ dado por la homotecia $\Omega_n(T)$.

Para más detalles sobre esta definición, consúltase [5].

Omitiendo ya las suposiciones sobre la característica del cuerpo, damos las dos definiciones siguientes:

DEFINICIÓN 2.2. Se define la **traza de T**, $\text{Tr}(T)$, como la traza de la matriz asociada a T en cualquier base.

DEFINICIÓN 2.3. Se define el **índice de T**, $i(T)$, como el índice de la matriz asociada a T en cualquier base; i.e., si A es la matriz de T en cierta base, $i(T)$ es el mínimo $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{rk}(A^m) = \text{rk}(A^{m+1})$, donde $\text{rk}(A)$ denota al rango de la matriz.

Observación 2.4. Estas definiciones de determinante, traza e índice son válidas para V no trivial, i.e., $V \neq 0$. Si fuese de otro modo, se impone por definición que la traza y el índice son nulos y el determinante es 1.

Observación 2.5. Si $c_T(x)$ es el polinomio característico de T , entonces $(-1)^n \det(T)$ es su término independiente y $-\text{Tr}(T)$ su coeficiente de grado $n - 1$.

2.2. Descomposición CN de matrices en dimensión finita

Sean k un cuerpo, V un k -espacio vectorial de dimensión finita n y $T \in \text{End}_k(V)$.

Denotando $a_T(x)$ al polinomio anulador de T , se tiene que $a_T(x) = x^m p(x)$ con $(x, p(x)) = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. V descompone entonces como $V = \ker p(T) \oplus \ker T^m$. Denotando, respectivamente, por W y U a dichos subespacios y considerando la base de Jordan del endomorfismo, la matriz de T en dicha base es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

donde D es la matriz de $T|_W$, que es invertible, y N la de $T|_U$, que es nilpotente.

Por lo tanto, sean A la matriz de T en alguna base y P el cambio de base a dicha base desde la de Jordan, A descompone de modo único como suma de dos matrices A_1 y A_2 , verificando:

- $i(A_1) \leq 1$,
- A_2 es nilpotente y
- $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$.

En efecto, basta tomar

$$A_1 = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{y} \quad A_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La unicidad de esta descomposición se tendrá posteriormente, como consecuencia del Teorema 3.5. A esta descomposición se le denomina descomposición Core-Nilpotente (CN), siendo A_1 la parte Core ($i(A_1) \leq 1$) y A_2 la nilpotente.

Observación 2.6. A partir de las definiciones dadas con anterioridad, se verifica que $\det(1 + T) = \det(1 + T|_W)$, $\text{Tr}(T) = \text{Tr}(T|_W)$ e $i(T) = i(T|_U)$, i.e, el orden de nilpotencia de N o, lo que es lo mismo, el exponente de x en el anulador.

2.3. Espacios vectoriales de dimensión infinita

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión infinita.

DEFINICIÓN 2.7. ▪ Un subconjunto de V es **linealmente independiente** si todos sus subconjuntos finitos lo son.

- El **subespacio generado por un subconjunto** es el subespacio formado por las combinaciones lineales finitas de elementos de dicho subconjunto.
- Un subconjunto de V es una **base (de Hamel)** de V si es linealmente independiente y V es el subespacio que genera.

Los lectores pueden encontrar en [8, 9] los siguientes resultados:

Proposición 2.8. ■ *Todo vector no nulo se escribe de modo único como combinación lineal finita de elementos de cualquier base.*

- *Todo sistema de generadores no nulo contiene una base. En particular, todo espacio vectorial no nulo admite una base.*
- *Las bases de V tienen el mismo cardinal, por lo que puede definirse la **dimensión** de V precisamente como dicho cardinal.*
- *Todo conjunto de vectores linealmente independiente puede completarse, añadiendo vectores de cualquier base, hasta formar una base.*
- *Todo subespacio admite suplementario.*

2.4. Conmensurabilidad

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria.

En [20], Tate define un preorden en el conjunto de subespacios de V : sean A, B dos subespacios cualesquiera, $A < B$ si y solo si $(A + B)/B$ es de dimensión finita (o, equivalentemente, si $A \subset B + W$, con W de dimensión finita). A partir de este preorden, se define la relación de equivalencia de conmensurabilidad:

DEFINICIÓN 2.9. [20] Se dice que dos subespacios A, B de V son **conmensurables** si $A < B$ y $B < A$.

Proposición 2.10. [7] *Se verifica que dos subespacios A, B de V son conmensurables si difieren en uno de dimensión finita, i.e., $\dim((A + B)/(A \cap B)) < \infty$. Esto equivale a que A y B descompongan como suma directa de su intersección y un subespacio de dimensión finita.*

Demostración. Es fácil ver que si dos subespacios son conmensurables según esta nueva definición, lo son según la dada por Tate. El recíproco se tiene también sin dificultad considerando la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow A/(A \cap B) & \longrightarrow & (A + B)/(A \cap B) & \longrightarrow & (A + B)/A & \longrightarrow & 0 \\ & & [a] \longmapsto [a] & ; & [a + b] \longmapsto [a + b] & & \end{array}$$

pues $A/(A \cap B) \simeq (A + B)/B$, luego el espacio intermedio será de dimensión finita al serlo los de los extremos. $\square$

Propiedades. [20] Sean $A, B, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ subespacios de V y $\varphi \in \text{Hom}_k(V, E)$ con E un k -espacio vectorial arbitrario:

- Si A es un subespacio de B , entonces $A < B$.
- $A < B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$.

■

$$\sum_{i=1}^m A_i < \bigcap_{j=1}^n B_j \Leftrightarrow A_i < B_j \forall 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n.$$

Demostración. Las dos primeras propiedades se comprueban sin dificultad, al igual que, si $\sum_{i=1}^m A_i < \bigcap_{j=1}^n B_j$, entonces $A_i < B_j \forall 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$. Veamos el recíproco. Se reduce a probar:

- Si $A < B_1$ y $A < B_2$, entonces $A < (B_1 \cap B_2)$ (para cualesquiera subespacios A, B_1, B_2). En efecto, basta considerar la sucesión exacta:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow (A \cap B_1)/(A \cap B_1 \cap B_2) & \longrightarrow & A/(A \cap B_1 \cap B_2) & \longrightarrow & A/(A \cap B_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & [a] \longmapsto [a]; & & [a] \longmapsto [a] & & \end{array}$$

y tener en cuenta que el primer término es de dimensión finita por sumergirse en un espacio vectorial de dimensión finita:

$$\begin{array}{ccc} (A \cap B_1)/(A \cap B_1 \cap B_2) & \hookrightarrow & A/(A \cap B_2). \\ [a] & \longmapsto & [a] \end{array}$$

- Si $A_1 < B$ y $A_2 < B$, entonces $(A_1 + A_2) < B$ (para cualesquiera subespacios A_1, A_2, B). En efecto, está claro que, si $A_1 \subset B + W_1$ y $A_2 \subset B + W_2$ con W_1 y W_2 de dimensión finita, entonces $A_1 + A_2 \subset B + W_1 + W_2$ y $W_1 + W_2$ es de dimensión finita.

□

2.5. Curvas en Geometría Algebraica

Sea k un cuerpo.

DEFINICIÓN 2.11. Una **curva (algebraica)** sobre k , $\mathcal{C}$, es un k -esquema algebraico de dimensión 1, es decir, una pareja $(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$ formada por, respectivamente, un espacio topológico de dimensión 1 y un haz de anillos en él (al que denotaremos simplemente $\mathcal{O}$ si no hay lugar a confusión) de modo que:

1. Para cada $x \in \mathcal{C}$, la fibra en dicho punto, $\mathcal{O}_x$, es un anillo local.
2. Existe un recubrimiento por abiertos de $\mathcal{C}$, $\{U_i\}_{i \in I}$, tal que, para todo $i \in I$, $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ es afín (i.e., es el k -esquema que produce el espectro de un anillo) y viene dado por una k -álgebra de tipo finito.
3. $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ es una k -álgebra.

DEFINICIÓN 2.12. Sea $\mathcal{C}$ una curva sobre k , se dice que es **íntegra** si, para todo abierto afín U , $\mathcal{O}(U)$ es un anillo íntegro. De ser así, todos estos anillos tienen el mismo punto genérico g y, en consecuencia, el mismo cuerpo de fracciones Σ , que se denomina cuerpo de funciones de la curva.

DEFINICIÓN 2.13. Sea $\mathcal{C}$ una curva íntegra sobre k , se dice que es **regular** (o **no singular**) si todos sus puntos son no singulares, es decir, para todo $x \in \mathcal{C}$, $\mathcal{O}_x$ es un anillo de valoración.

DEFINICIÓN 2.14. Sea $\mathcal{C}$ una curva íntegra sobre k , se dice que es **completa** si todo anillo de valoración domina a un único $\mathcal{O}_x$.

Cuando se tratan las curvas completas y regulares, es inevitable encontrarse con el concepto de variedad de Riemann. Sea $k \rightarrow \Sigma$ es una extensión de k de tipo finito y grado de trascendencia 1. Definimos entonces una curva, $\mathcal{C}$, del siguiente modo:

1. Los puntos son el trivial (Σ) y los anillos de valoración de Σ (triviales sobre k).
2. La topología viene dada por considerar cerrado cualquier conjunto finito de puntos no triviales.
3. El haz $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ en cada abierto viene dado por la intersección de los anillos de valoración contenidos en dicho abierto.

Este es un concepto de uso frecuente en el estudio de la Geometría Algebraica por lo que procedemos a enunciar el siguiente teorema sin demostración (para más detalles, véase [16]):

Teorema 2.15. Si $k \rightarrow \Sigma$ es una extensión de k de tipo finito y grado de trascendencia 1, entonces define del modo anterior una curva íntegra, regular y completa de cuerpo de funciones Σ , $\mathcal{C}$, a la que se denomina la **variedad de Riemann** de Σ .

Además, si $\Sigma \subset \Sigma'$ es una extensión finita de cuerpos de este tipo, induce un epimorfismo finito de esquemas $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, para $\mathcal{C}'$ la variedad de Riemann de Σ' .

Teorema 2.16. [10] Sea $\mathcal{C}$ curva íntegra, completa y regular de cuerpo de funciones Σ . Entonces:

- Para todo haz de módulos quasicohérente en $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}$, se verifica que el i -ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{C}$, $H^i(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, es nulo si $i > 1$.
- Para todo haz de módulos coherente en $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}$, se verifica que $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ y $H^1(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ son ambos k -espacios vectoriales de dimensión finita.

Demostración. Considerando un elemento $t \in \Sigma$ trascendente sobre k , la extensión finita $k(t) \hookrightarrow \Sigma$ induce un morfismo epiyectivo y finito (en particular, afín) $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Como la imagen directa de morfismos afines conserva la cohomología de los haces quasicohérentes (por el Teorema de De Rham) y la de morfismos finitos preserva quasicohérence y coherencia, se reduce la demostración al caso $\mathcal{C} = \mathbb{P}_k^1$.

Suponiendo ahora ya que $\mathcal{C} = \mathbb{P}_k^1$, el primer enunciado se obtiene aplicando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris a $\mathbb{P}_k^1 = \text{Spec } k(t) \cup \text{Spec } k(1/t)$. Para la segunda parte, vamos a proceder por inducción sobre r , el rango de $\mathcal{M}$. Si $r = 0$, el haz es flasco, luego todos los grupos de cohomología son nulos. Como el resultado es cierto para haces de línea, también se tiene para $r = 1$. Si $r > 1$, podemos suponer que $\mathcal{M}$ viene dado por un módulo sin torsión, de modo que podemos considerar un elemento no nulo s de su fibra genérica $\mathcal{M}_g$

y definir el submódulo de línea $\mathcal{L}$ dado por

$$\mathcal{L}(U) = \{s' \in \mathcal{M}(U) : s' = fs \text{ para algún } f \in k(t)\}.$$

La sucesión exacta larga de cohomología asociada a la sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{L} \longrightarrow 0$$

permite concluir, al ser el teorema cierto para el haz de línea $\mathcal{L}$ y para $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ por inducción. $\square$

2.6. Residuos en Análisis Complejo

Sea U un abierto del plano complejo, $U \subset \mathbb{C}$, y sea $f(z)$ una función analítica en U (i.e., holomorfa en un abierto de U de complementario discreto). Consideremos un punto $z_0 \in U$ y un entorno V de dicho punto de modo que f sea holomorfa en $V - z_0$.

DEFINICIÓN 2.17. Con la notación anterior, se define el **residuo en el punto z_0 de la 1-forma diferencial** $\omega = f(z) dz$ del modo siguiente:

$$\text{res}_{z_0}(f dz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

para γ cualquier circunferencia centrada en z_0 y contenida en V .

Se comprueba que esta definición no depende de la circunferencia γ elegida. Además, considerando el desarrollo de Laurent de f en el disco delimitado por γ ,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

se comprueba que el residuo de $f dz$ en z_0 es el coeficiente a_{-1} .

Este concepto es de gran importancia para el Análisis Complejo pues de él deriva el conocido Teorema de los residuos, entre cuyas aplicaciones está, por ejemplo, el cómputo de ciertas sumas infinitas. A continuación, vamos a enunciar dicho teorema:

Teorema 2.18 (Teorema de los residuos). *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en U . Sea V un abierto de cierre compacto contenido en U que cumpla las condiciones para ser una subvariedad con borde regular de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos de modo que f no tenga singularidades en su frontera. Entonces hay un número finito de singularidades de f en V y*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in V} \text{res}_{z_0}(f dz).$$

2.7. Operadores de clase de traza

Sea H un espacio de Hilbert con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal de H . Denotemos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto de los endomorfismos lineales acotados (i.e., continuos) de H .

Lema 2.19. [2] Sea $A \in \mathcal{B}(H)$, A es autoadjunto (es decir, es su propio operador adjunto A^*) si y solo si $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.

DEFINICIÓN 2.20. [2] Un operador acotado $A \in \mathcal{B}(H)$ es **positivo** si es autoadjunto y $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

DEFINICIÓN 2.21. [2] Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ un operador acotado positivo. Se define el **operador raíz cuadrada** de A como el único operador positivo $A^{1/2} \in \mathcal{B}(H)$ tal que $(A^{1/2})^2 = A$.

Lema 2.22. [2] Sean $A \in \mathcal{B}(H)$ y $\{f_j\}_{j \in J}$ otra base ortonormal de H , se tiene que

$$\sum_{i \in I} \langle |A| e_i, e_i \rangle = \sum_{j \in J} \langle |A| f_j, f_j \rangle$$

donde $|A|$ denota al operador raíz cuadrada de A^*A , que verifica

$$\|Ax\| = \||A|x\|.$$

DEFINICIÓN 2.23. [2] Se dice que un operador continuo de H , $A \in \mathcal{B}(H)$, es un **operador de clase de traza** si

$$\sum_{i \in I} \langle |A| e_i, e_i \rangle < \infty.$$

Observación 2.24. El Lema 2.22 asegura que la definición de operador de clase de traza no depende de la base ortonormal elegida.

Teorema 2.25. [2] El conjunto de todos los operadores de clase de traza, $\mathcal{B}_1(H)$, es un espacio de Banach con la norma

$$\|A\|_1 := \sum_{i \in I} \langle |A| e_i, e_i \rangle.$$

Teorema 2.26. [2] El conjunto de los operadores acotados de H que son de rango finito, $\mathcal{B}_{00}(H)$, es un subconjunto denso de $\mathcal{B}_1(H)$.

Teorema 2.27. [2] Con la notación anterior, si $A \in \mathcal{B}_1(H)$, entonces se comprueba que

$$\sum_{i \in I} |\langle A e_i, e_i \rangle| < \infty.$$

Además, si $\{f_j\}_{j \in J}$ es otra base ortonormal de H , se verifica que

$$\sum_{i \in I} \langle A e_i, e_i \rangle = \sum_{j \in J} \langle A f_j, f_j \rangle.$$

DEFINICIÓN 2.28. [2] Se define la **traza** de un operador de clase de traza A como

$$\text{Tr}(A) := \sum_{i \in I} \langle A e_i, e_i \rangle \in \mathbb{C}.$$

Observación 2.29. El Teorema 2.27 garantiza que la definición de traza para operadores de clase de traza no depende de la base ortonormal escogida.

Teorema 2.30. [2] Sea $A \in \mathcal{B}_1(H)$, entonces $A^* \in \mathcal{B}_1(H)$. Además, se tiene que

$$\mathrm{Tr}(A^*) = \overline{\mathrm{Tr}(A)} \quad y \quad \|A^*\|_1 = \|A\|_1.$$

Teorema 2.31. [2] Sean $A \in \mathcal{B}_1(H)$ y $B \in \mathcal{B}(H)$, entonces $AB, BA \in \mathcal{B}_1(H)$. Además, se verifica que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \quad y \quad |\mathrm{Tr}(BA)| \leq \|B\| \|A\|_1.$$

2.8. El 2-cociclo de Segal-Wilson

En esta sección vamos a hacer una breve introducción a la teoría de Segal-Wilson expuesta en [18, p. 10-23] al ser la inspiración de [7] para dar el análogo multiplicativo al residuo de Tate, que estudiaremos en el Capítulo 5.

Sea H un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert separable con una descomposición fija $H = H_+ \oplus H_-$ como suma directa de subespacios cerrados, infinito dimensionales y ortogonales.

DEFINICIÓN 2.32. [7, 18] Se define el **Grasmaniano** de H , $\mathrm{Gr}(H)$, como el conjunto de todos los subespacios cerrados de H tales que la proyección ortogonal en H_+ es un operador de Fredholm (i.e., su núcleo y su conúcleo son de dimensión finita) y la proyección en H_- es un operador compacto.

Sea $g \in \mathrm{Gl}(H)$. Fijadas bases de H_+ y H_- , denotamos a la matriz de g respecto a la descomposición por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 2.33. [7, 18] Se define el **grupo lineal general restringido**, $\mathrm{Gl}_{res}(H)$, como el subgrupo cerrado de $\mathrm{Gl}(H)$ formado por los operadores $g \in \mathrm{Gl}(H)$ tales que b y c son operadores compactos (lo que asegura que a y d son operadores de Fredholm).

Lema 2.34. [18] $\mathrm{Gr}(H)$ es $\mathrm{Gl}_{res}(H)$ -conjunto.

Sea ahora H el espacio de todas las funciones complejas con raíz cuadrada en la circunferencia, S^1 , con base ortonormal $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$; y sean los subespacios $H_+ = \langle z^k \rangle_{k \geq 0}$ y $H_- = \langle z^k \rangle_{k < 0}$.

Lema 2.35. [7, 18] Sea Γ el grupo de las aplicaciones continuas de S^1 en $\mathbb{C}^\times$. Entonces $\Gamma \subset \mathrm{Gl}_{res}(H)$.

Sean Γ_+ y Γ_- los subgrupos formados, respectivamente, por las funciones $f_+ : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ reales y analíticas que extienden a funciones holomorfas del disco unidad cerrado (i.e., extienden a funciones holomorfas en un entorno de este) de modo que $f(0) = 1$, y por las funciones $f_- : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ que extienden a funciones holomorfas del complementario del disco unidad abierto de modo que $f(\infty) = 1$ y no se anulan en ningún punto.

Por otro lado, considérese el subgrupo $\mathrm{Gl}_1(H)$ de $\mathrm{Gl}_{res}(H)$ definido por

$$\mathrm{Gl}_1(H) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_{res}(H) : b \text{ y } c \text{ son operadores de clase de traza} \right\}.$$

Proposición 2.36. [7, 18] *Se tiene una extensión central de grupos*

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{Gl}_1^\wedge \longrightarrow \mathrm{Gl}_1(H)^0 \longrightarrow 1$$

donde $\mathrm{Gl}_1(H)^0$ es la componente identidad de $\mathrm{Gl}_1(H)$ (i.e., el mayor subgrupo conexo que contiene al neutro) y $\mathrm{Gl}_1^\wedge$ es el cociente del subgrupo de $\mathrm{Gl}_1(H)^0 \times \mathrm{Gl}(H_+)$ formado por parejas (g, q) tales que $aq^{-1} - \mathrm{Id}$ es un operador de clase de traza, por el grupo de los endomorfismos t de H_+ invertibles tales que $t - \mathrm{Id}$ es un operador de clase de traza.

Proposición 2.37. [7, 18] *Si denotamos Gl_1^{reg} al abierto de $\mathrm{Gl}_1(H)^0$ cuyos elementos son los $g \in \mathrm{Gl}_1(H)^0$ tales que a es invertible, existe una sección $s : \mathrm{Gl}_1^{reg} \longrightarrow \mathrm{Gl}_1^\wedge$ del morfismo $\mathrm{Gl}_1^\wedge \longrightarrow \mathrm{Gl}_1(H)^0$, que induce un 2-cociclo*

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : \mathrm{Gl}_1^{reg} \times \mathrm{Gl}_1^{reg} &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \det(a_1 a_2 a_3^{-1}) \end{aligned}$$

donde $g_3 = g_1 g_2$.

Observación 2.38. [7, 18] En general, Gl_1^{reg} no es grupo y el morfismo s no es multiplicativo.

Consideramos los subgrupos Gl_1^+ y Gl_1^- de Gl_1^{reg} formados, respectivamente, por aquellos elementos tales que $c = 0$ y por aquellos tales que $b = 0$. La restricción de s a estos subgrupos es un morfismo de grupos inyectivo. Además, se tiene que $\Gamma_+ \subset \mathrm{Gl}_1^+$ y $\Gamma_- \subset \mathrm{Gl}_1^-$.

Teorema 2.39. [7, 18] *Para cada par de subgrupos $G_1, G_2 \subset \mathrm{Gl}_1^{reg}$ tales que las acciones de cada uno en $\mathrm{Gr}(H)$ conmutan, se puede definir un morfismo, al que denominaremos 2-cociclo de Segal-Wilson asociado a G_1 y G_2 ,*

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{G_1, G_2}^{SW} : G_1 \times G_2 &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \det(a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}) \end{aligned}$$

Observación 2.40. [7, 18] En el teorema previo, tiene sentido tomar el determinante del conmutador puesto que, sabiendo que g_1 y g_2 conmutan, deducimos que

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} = 1 - b_1 c_2 a_1^{-1} a_2^{-1} + b_2 c_1 a_1^{-1} a_2^{-1}$$

y b_1, c_1, b_2 y c_2 son operadores de clase de traza por definición de $\mathrm{Gl}_1^{reg} \subset \mathrm{Gl}_1(H)$.

Proposición 2.41. [7, 18] *Sean $g_1 \in \Gamma_+$, $g_2 \in \Gamma_-$. Se verifica que*

$$(g_2, g_1)_{\Gamma_-, \Gamma_+}^{SW} = \det(a_2 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1}) = \exp(\mathrm{Tr}([\alpha_1, \alpha_2])),$$

para $g_i = \exp \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$ y $[\alpha_1, \alpha_2] = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1$.

Capítulo 3

Endomorfismos de potencia finita

3.1. Definición

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria.

DEFINICIÓN 3.1. Un endomorfismo $\varphi \in \text{End}_k(V)$ se dice **de potencia finita** (fp) si existe algún número natural n tal que la dimensión de la imagen de φ^n sea finita.

En 2007, Argerami, Szechtman y Tifenbach demostraron, para cada endomorfismo de potencia finita, la existencia de una descomposición (a la que denominaremos descomposición AST) del espacio V , única cumpliendo ciertas propiedades. Además, esta descomposición es inherente a este tipo de endomorfismos, i.e., los caracteriza. Esto es:

Teorema 3.2. [1] Si $\varphi \in \text{End}_k(V)$ es de potencia finita, existe una descomposición $V = W_\varphi \oplus U_\varphi$ única cumpliendo:

- W_φ y U_φ son subespacios φ -invariantes, i.e., $\varphi(W_\varphi) \subset W_\varphi$ y $\varphi(U_\varphi) \subset U_\varphi$.
- W_φ es de dimensión finita y $\varphi|_{W_\varphi} \in \text{Aut}_k(W_\varphi)$.
- $\varphi|_{U_\varphi}$ es nilpotente.

Además, para cualquier $\varphi \in \text{End}_k(V)$, a partir de la existencia de una descomposición de V cumpliendo estas propiedades, podemos afirmar que φ es de potencia finita.

Demostración. Sean U_φ y W_φ los subespacios φ -invariantes de intersección nula

$$U_\varphi := \{v \in V : x^m v = 0 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\} \text{ y}$$

$$W_\varphi := \{v \in V : f(x)v = 0 \text{ para algún } f(x) \in k[x] \text{ con } (x, f(x)) = 1\}.$$

Considérese entonces el subespacio φ -invariante $W = \varphi^n(V)$, de dimensión finita para n suficientemente grande. Al ser de dimensión finita, existe un polinomio anulador (no nulo), $f(x)$, para la pareja (W, φ) . Por lo tanto, $f(x)x^n$ anula a V , que será pues un $k[x]$ -módulo de torsión. Sea su polinomio anulador $a_\varphi(x) = x^m p(x)$ con $(x, p(x)) = 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que $U_\varphi = \ker \varphi^m$, $W_\varphi = \ker p(\varphi)$ y $V = W_\varphi \oplus U_\varphi$, a partir de lo cual es

evidente que $\varphi|_{U_\varphi}$ es nilpotente. Como $W_\varphi \cap \ker \varphi = 0$, $\varphi|_{W_\varphi}$ debe ser inyectiva. Es por esto que $W_\varphi \simeq \varphi^n(W_\varphi) \subset \varphi^n(V)$ es de dimensión finita y, por lo tanto, $\varphi|_{W_\varphi}$ es automorfismo.

A continuación, vamos a ver que esta descomposición es única. Sea $V = W \oplus U$ otra descomposición de estas características. Para comenzar vamos a probar que $W \subset W_\varphi$. Dado $w \in W$, $w = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U_\varphi$ y $v_2 \in W_\varphi$. El polinomio anulador de W , $q(x)$, debe ser relativamente primo con x (luego con x^m) pues φ es isomorfismo (en particular, inyectivo) sobre W . Por el Lema de Bezout, existen polinomios $a(x), b(x) \in k[x]$ de modo que $a(x)q(x) + b(x)x^m = 1$. Juntando todo lo anterior, se tiene que $w = b(x)x^m v_2 \in W_\varphi$. Como este razonamiento es reversible, $W = W_\varphi$, y, al ser $\varphi|_U$ nilpotente, se tiene también que $U \subset U_\varphi$. De esto y la existencia de ambas descomposiciones, se deduce que necesariamente debe ser $U = U_\varphi$, con lo que concluimos.

Finalmente, sea $\varphi \in \text{End}_k(V)$ de modo que existe una descomposición $V = U_\varphi \oplus W_\varphi$ cumpliendo estas propiedades, si $\varphi^m(U_\varphi) = 0$, entonces $\varphi^m(V) = \varphi^m(W_\varphi) = W_\varphi$ es de dimensión finita y se deduce que φ es de potencia finita. $\square$

A partir de esta caracterización, es fácil generalizar la ya conocida definición de índice a endomorfismos de potencia finita del siguiente modo:

DEFINICIÓN 3.3. Sea φ un endomorfismo de potencia finita, se define el **índice de φ** como el orden de nilpotencia de $\varphi|_{U_\varphi}$.

Dada esta definición, es fácil comprobar el siguiente:

Lema 3.4. Sean $\varphi \in \text{End}_k(V)$ de potencia finita y $V = U_\varphi \oplus W_\varphi$ su descomposición AST,

- $i(\varphi) \leq 1 \Leftrightarrow \ker \varphi = U_\varphi \Leftrightarrow \text{Im } \varphi = W_\varphi$.
- $i(\varphi) = 0 \Leftrightarrow U_\varphi = 0 \Leftrightarrow V$ es de dimensión finita y φ es un automorfismo.
- $i(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \ker(\varphi) = U_\varphi \neq 0$.

Ahora vamos a dar una última caracterización de endomorfismo de potencia finita, estudiada en 2020 en [13]. En este caso, se comprueba que todo endomorfismo de potencia finita descompone como suma de dos, también de potencia finita, siendo la descomposición única verificando ciertas hipótesis. Denominaremos a dicha descomposición Core-Nilpotente, pues uno de los endomorfismos será la parte Core (de índice menor o igual que 1) y el otro la nilpotente. De nuevo, la existencia de una tal descomposición nos permitirá asegurar que un endomorfismo es de potencia finita. Veámoslo:

Teorema 3.5. [13] Si $\varphi \in \text{End}_k(V)$ es de potencia finita, φ descompone como suma de dos endomorfismos de potencia finita, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, de modo único cumpliendo:

- $i(\varphi_1) \leq 1$.
- φ_2 es nilpotente.
- $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$.

Además, si un endomorfismo descompone como suma de dos de potencia finita de estas características, entonces dicho endomorfismo es de potencia finita.

Demostración. Definimos φ_1 como la única aplicación lineal nula sobre U_φ y que coincide con φ sobre W_φ . Análogamente, φ_2 será la única aplicación lineal nula sobre W_φ y que coincide con φ sobre U_φ . Con estas definiciones, φ_1 es de rango finito (la dimensión de su imagen es de dimensión finita), luego de potencia finita, $U_{\varphi_1} = U_\varphi$ y $W_{\varphi_1} = W_\varphi$. Por otra parte, φ_2 es nilpotente (luego de potencia finita) y $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$. Además, si φ es biyectivo, $\varphi = \varphi_1$, por lo que $i(\varphi_1) = 0$; y, si no, $i(\varphi_1) = 1$.

Veamos ahora que esta descomposición es única. Sea $\varphi = \theta_1 + \theta_2$ otra descomposición verificando las hipótesis del enunciado. Sea n el orden de nilpotencia de θ_2 , como $\theta_2 \circ \theta_1 = 0$, $\theta_2 \circ \varphi^{n-1} = 0$. Restringiendo a W_φ , sobre el que φ es automorfismo, obtenemos que $W_\varphi \subset \ker \theta_2$, por lo cual φ coincide con θ_1 sobre W_φ . Por otro lado, sean $u \in U_\varphi$ e $i(\varphi) = m$, está claro que $m \geq n$, luego $U_\varphi \subset \ker \theta_1$ y φ coincide con θ_2 sobre U_φ , con lo que se concluye.

Finalmente, si $\varphi \in \text{End}_k(V)$ admite una descomposición de estas características, sea n el orden de nilpotencia de φ_2 , $\varphi^n = \varphi_1^n$, luego $\text{Im } \varphi^n = \text{Im } \varphi_1^n = W_{\varphi_1}$ es de dimensión finita y se concluye. $\square$

Corolario 3.6. [13] Sea $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ la descomposición CN de un endomorfismo de potencia finita φ . Entonces $\varphi = \varphi_1 \Leftrightarrow i(\varphi) \leq 1$.

Observación 3.7. Esta descomposición generaliza la descomposición Core-Nilpotente de matrices cuadradas de orden $n \times n$, mencionada en los preliminares.

Los resultados comentados en esta sección son de gran importancia para el presente trabajo pues se tratan las diferentes caracterizaciones del concepto fundamental en el que se cimienta, el de endomorfismo de potencia finita. Es por esto que, a continuación, vamos a resumirlo en el siguiente:

Corolario 3.8. [1, 13] Sea $\varphi \in \text{End}_k(V)$, son equivalentes:

1. φ de potencia finita, i.e., $\dim_k(\text{Im } \varphi^n) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
2. $V = W_\varphi \oplus U_\varphi$ (descomposición AST) de modo único cumpliendo:
 - W_φ y U_φ son subespacios φ -invariantes, i.e., $\varphi(W_\varphi) \subset W_\varphi$ y $\varphi(U_\varphi) \subset U_\varphi$.
 - W_φ es de dimensión finita y $\varphi|_{W_\varphi} \in \text{Aut}_k(W_\varphi)$.
 - $\varphi|_{U_\varphi}$ es nilpotente.
3. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (descomposición CN (Core-Nilpotente)) de modo único cumpliendo:
 - φ_1 y φ_2 son endomorfismos de potencia finita.
 - $i(\varphi_1) \leq 1$.
 - φ_2 es nilpotente.
 - $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$.

3.2. Clasificación

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria.

Notación. [12] Consideremos la clasificación de endomorfismos en dimensión finita y sea $p(x) \in k[x]$ irreducible. Vamos a denotar $\nu_i(V, p(T))$ ($1 \leq i \leq n$) a los factores invariantes para el par $(\ker p(T)^n, T)$. Entonces $\nu_n(V, p(T)) \neq 0$ siempre y cuando este sea un $k[x]$ -módulo de anulador $p(x)^n$. En este caso, denotando $K = k[x]/p(x)$,

$$\nu_i(V, p(T)) = \dim_K(\ker p(T)^i / [\ker p(T)^{i-1} + p(T) \ker p(T)^{i+1}]).$$

Siguiendo la estructura de [12], para comenzar vamos a clasificar los endomorfismos nilpotentes de V . Para ello, primero vamos a estudiar la existencia de bases de Jordan para dichos endomorfismos.

Sea φ un endomorfismo nilpotente de orden n , se tiene la siguiente cadena de subespacios

$$0 \subsetneq \ker \varphi \subsetneq \ker \varphi^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker \varphi^{n-1} \subsetneq \ker \varphi^n = V.$$

Fijando cierto H_n^φ suplementario de $\ker \varphi^{n-1}$, podemos definir por recurrencia H_i^φ , para $1 \leq i < n$, como un suplementario (fijo) de $\ker \varphi^{i-1} + \varphi^{n-i}(H_n^\varphi) + \dots + \varphi(H_{i+1}^\varphi)$ en $\ker \varphi^i$. Se comprueba entonces que $\ker \varphi^i = \ker \varphi^{i-1} \oplus \varphi^{n-i}(H_n^\varphi) \oplus \dots \oplus \varphi(H_{i+1}^\varphi) \oplus H_i^\varphi$, usando

Lema 3.9. Si $1 \leq i < n$,

$$\varphi^{j-i}(H_j^\varphi) \cap [\varphi^{j-i+1}(H_{j+1}^\varphi) + \dots + \varphi^{n-i}(H_n^\varphi) + \ker \varphi^{i-1}] = \{0\} \quad \forall j \in \{i+1, \dots, n-1\}.$$

Demostración. Fijados i y j , sea $\varphi^{j-i}(h_j) = \varphi^{j-i+1}(h_{j+1}) + \dots + \varphi^{n-i}(h_n) + v$ un elemento de dicha intersección (con $v \in \ker \varphi^{i-1}$ y $h_k \in H_k^\varphi$, $\forall j \leq k \leq n$). Entonces, aplicando φ^{i-1} , queda $\varphi^{j-1}(h_j - \varphi(h_{j+1}) - \dots - \varphi^{n-j}(h_n)) = 0$, es decir, h_j puede escribirse como una suma de vectores de $\ker \varphi^{j-1} + \varphi^{n-j}(H_n^\varphi) + \dots + \varphi(H_{j+1}^\varphi)$, por lo que debe ser nulo. $\square$

Teniendo en cuenta que

$$\ker \varphi^{i-1} \oplus \varphi^{n-i}(H_n^\varphi) \oplus \dots \oplus \varphi(H_{i+1}^\varphi) = \ker \varphi^{i-1} + \varphi(\ker \varphi^{i+1})$$

se tiene que $H_n^\varphi \simeq V / \ker \varphi^{n-1}$, $H_i^\varphi \simeq \ker \varphi^i / [\ker \varphi^{i-1} + \varphi(\ker \varphi^{i+1})]$ para $1 < i < n$ y $H_1^\varphi \simeq \ker \varphi / [\varphi(\ker \varphi^2)]$. De esto se deduce fácilmente que las dimensiones de los H_i^φ ($1 \leq i \leq n$), a las que denotaremos $\mu_i(V, \varphi)$, son independientes de los subespacios suplementarios elegidos. Además, $\mu_n(V, \varphi) \neq 0$.

Observación 3.10. Obsérvese que no existe ninguna relación de orden entre los $\mu_i(V, \varphi)$. Por ejemplo, sea V un k -espacio vectorial de dimensión numerable, $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ una base de V y φ, ψ, γ los siguientes tres endomorfismos nilpotentes de orden 2:

$$\varphi(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } i = 3n \text{ para algún } n \geq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\psi(v_i) = \begin{cases} v_1 & \text{si } i \neq 1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases} \quad \gamma(v_i) = \begin{cases} v_2 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

entonces, denotando $\aleph_0$ al cardinal del conjunto de números naturales,

$$\begin{array}{lll} \ker \varphi = \langle v_i \rangle_{i \neq 3\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{N}} & \ker \psi = \langle v_1 \rangle & \ker \gamma = \langle v_2, v_3, \dots \rangle \\ H_2^\varphi = \langle v_j \rangle_{j=3\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{N}} & H_2^\psi = \langle v_2, v_3, \dots \rangle & H_2^\gamma = \langle v_1 \rangle \\ H_1^\varphi = \langle v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11}, \dots \rangle & H_1^\psi = 0 & H_1^\gamma = \langle v_3, v_4, \dots \rangle \\ \mu_2(V, \varphi) = \aleph_0 & \mu_2(V, \psi) = \aleph_0 & \mu_2(V, \gamma) = 1 \\ \mu_1(V, \varphi) = \aleph_0 & \mu_1(V, \psi) = 0 & \mu_1(V, \gamma) = \aleph_0. \end{array}$$

Notación. Para indexar las bases de H_i^φ , vamos a considerar subconjuntos $S_{\mu_i(V, \varphi)}$ de los números naturales de cardinal $\mu_i(V, \varphi)$ e intersección vacía.

Proposición 3.11. Sean $\{v_{s_i}\}_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}}$ bases de cada H_i^φ ($1 \leq i \leq n$),

1. $\{\varphi^r(v_{s_i})\}_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}}$ es una base de $\varphi^r(H_i^\varphi)$ $\forall r \in \{1, \dots, i-1\}$.
2. Una base de Jordan de V para φ es

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \left[\bigcup_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}} \{v_{s_i}, \varphi(v_{s_i}), \dots, \varphi^{i-1}(v_{s_i})\} \right].$$

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata de la inyectividad de $\varphi^j|_{H_i^\varphi}$ para $i \in \{2, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, i-1\}$. La segunda se obtiene a partir de la primera considerando la descomposición de V dada por la construcción de los H_i^φ . $\square$

Observación 3.12. Decimos que la base obtenida es de Jordan pues, a partir de ella, se tiene una descomposición de V en subespacios φ -invariantes de dimensión finita $\langle v_{s_i}, \varphi(v_{s_i}), \dots, \varphi^{i-1}(v_{s_i}) \rangle$ y, en cada uno, una base de Jordan de la restricción del endomorfismo.

Notación. Dados φ, ψ dos endomorfismos en V , por lo general denotaremos para abreviar $\varphi\psi$ a su composición, es decir, al producto en la k -álgebra $\text{End}_k(V)$.

Ahora ya sí vamos a tratar de clasificarlos. Recordemos que los automorfismos dan una relación de equivalencia en los endomorfismos (la que viene dada por las órbitas del $\text{Aut}_k(V)$ -conjunto):

$$\varphi \sim \varphi' \Leftrightarrow \varphi' = \tau\varphi\tau^{-1} \text{ para algún } \tau \in \text{Aut}_k(V)$$

y, en particular, los nilpotentes de orden n forman clases propias (al igual que los de potencia finita).

Lema 3.13. Sean $\tau \in \text{Aut}_k(V)$ y $\varphi' = \tau\varphi\tau^{-1}$,

- $\tau(\ker \varphi^i) = \ker \varphi'^i \quad \forall i \geq 1$
- $\tau[\ker \varphi^{i-1} + \varphi(\ker \varphi^{i+1})] = \ker \varphi'^{i-1} + \varphi'(\ker \varphi'^{i+1}) \quad \forall i \geq 1.$

Proposición 3.14. Sean $\tau \in \text{Aut}_k(V)$ y $\varphi' = \tau\varphi\tau^{-1}$, entonces $\mu_i(V, \varphi') = \mu_i(V, \varphi)$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Por el Lema 3.13, podemos tomar $H_i^{\varphi'} = \tau(H_i^\varphi)$, con lo cual se termina. $\square$

Observación 3.15. Sean $\{v_{s_i}\}_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}}$ bases de cada H_i^φ ($1 \leq i \leq n$), una base de Jordan de V para $\varphi' = \tau\varphi\tau^{-1}$ ($\tau \in \text{Aut}_k(V)$) es

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \left[\bigcup_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}} \{\tau(v_{s_i}), \varphi'(\tau(v_{s_i})), \dots, \varphi'^{i-1}(\tau(v_{s_i}))\} \right].$$

Teorema 3.16 (Clasificación de endomorfismos nilpotentes). *Sean φ, φ' dos endomorfismos nilpotentes de orden n de V ,*

$$\varphi \sim \varphi' \Leftrightarrow \mu_i(V, \varphi) = \mu_i(V, \varphi') \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Ver Proposición 3.14.

$\Leftarrow$) Fijamos H_i^φ y $H_i^{\varphi'}$ ($1 \leq i \leq n$). Sean $\{v_{s_i}\}_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}}$ y $\{v'_{s_i}\}_{s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}}$ bases de H_i^φ y $H_i^{\varphi'}$, respectivamente, podemos definir un automorfismo $\tau \in \text{Aut}_k(V)$ por

$$\tau[\varphi^r(v_{s_i})] = \varphi'^r(v'_{s_i})$$

para todo $s_i \in S_{\mu_i(V, \varphi)}$, $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq r \leq i - 1$.

Entonces $\tau\varphi\tau^{-1} = \varphi'$, pues ambos coinciden sobre una base:

$$(\tau\varphi\tau^{-1})[\varphi'^r(v'_{s_i})] = (\tau\varphi)[\varphi^r(v_{s_i})] = \tau[\varphi^{r+1}(v_{s_i})] = \varphi'^{r+1}(v'_{s_i}) = \varphi'[\varphi'^r(v'_{s_i})].$$

$\square$

Observación 3.17. Si V un k -espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi \in \text{End}_k(V)$ es nilpotente de orden n con invariantes $\{\mu_i(V, \varphi)\}_{1 \leq i \leq n}$, se cumple que $\mu_i(V, \varphi) = \nu_i(V, \varphi)$ y el 2º Teorema de descomposición determina un isomorfismo de $k[x]$ -módulos

$$V \simeq (k[x]/x^n)^{\mu_n(V, \varphi)} \oplus \dots \oplus (k[x]/x)^{\mu_1(V, \varphi)}.$$

Por lo tanto, la clasificación dada en dimensión arbitraria generaliza a la ya conocida en el caso finito-dimensional.

Corolario 3.18. *Sea V un k -espacio vectorial de dimensión $\aleph_0$. Si denotamos $\text{End}_k^N(V)$ a los endomorfismos nilpotentes e $Y = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \aleph_0$, hay una biyección*

$$\begin{aligned} (\text{End}_k^N(V)/\sim) &\longrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\prod_n Y \right] \\ [\varphi] &\longmapsto (\mu_1(V, \varphi), \dots, \mu_n(V, \varphi)) \end{aligned}$$

para

$$\prod_n Y = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n : y_n \neq 0 \text{ e } y_j = \aleph_0 \text{ para algún } j\}.$$

Demostración. Gracias al Teorema 3.16, la aplicación es inyectiva. Falta ver que es epiyectiva. Sea $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ una base de V , si $\mu_j(V, \varphi) = \aleph_0$ y $\mu_i(V, \varphi) > 1 \forall 1 \leq i \leq n$, basta considerar el endomorfismo φ dado por

$$\varphi(v_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = k_1 n + 1 \text{ con } 0 \leq k_1 \leq \mu_1(V, \varphi) \\ v_{i-1} + v_{n+i-1} & \text{si } h = k_i n + i \text{ con } 0 \leq k_i \leq \mu_i(V, \varphi) \text{ e } i \neq 1 \\ \varphi(v_j) & \text{si } h = k_i n + i \text{ con } k_i > \mu_i(V, \varphi). \end{cases}$$

Si $\mu_i(V, \varphi) = 0$, basta hacer el siguiente cambio respecto al endomorfismo previo:

$$\varphi(v_h) = v_i \quad \text{si } h = k_{i+1} n + i + 1 \text{ con } 0 \leq k_{i+1} \leq \mu_{i+1}(V, \varphi)$$

mientras que, si $\mu_i(V, \varphi) = 1$, serán necesarias estas dos modificaciones respecto al φ inicial:

$$\varphi(v_{n+i}) := \varphi(v_i)$$

$$\varphi(v_h) = v_{n+i} \quad \text{si } h = k_{i+1} n + i + 1 \text{ con } 0 \leq k_{i+1} \leq \mu_{i+1}(V, \varphi).$$

□

Conocida ya la clasificación de los nilpotentes y la de los endomorfismos en dimensión finita, vamos a clasificar todos los de potencia finita. A partir de ahora, φ pasará a denotar un endomorfismo de potencia finita cualquiera.

Lema 3.19. Sea $\tau \in \text{Aut}_k(V)$. Si $\varphi' = \tau\varphi\tau^{-1}$, la descomposición AST de V inducida por φ' es $V = \tau(U_\varphi) \oplus \tau(W_\varphi)$.

En particular, esto implica que $\varphi'|_{U_{\varphi'}} = (\tau|_{U_\varphi})(\varphi|_{U_\varphi})(\tau|_{U_\varphi}^{-1})$ es del mismo orden de nilpotencia que $\varphi|_{U_\varphi}$ y $\varphi'|_{W_{\varphi'}} = (\tau|_{W_\varphi})(\varphi|_{W_\varphi})(\tau|_{W_\varphi}^{-1})$ tiene el mismo polinomio anulador y el mismo polinomio característico que $\varphi|_{W_\varphi}$.

Demostración. Es fruto de la unicidad de la descomposición AST, teniendo en cuenta que φ' es nilpotente sobre $\tau(U_\varphi)$ y un isomorfismo sobre $\tau(W_\varphi)$. □

Lema 3.20. Sean $\tau \in \text{Aut}_k(V)$ y $p(x) \in k[x]$. Si $\varphi' = \tau\varphi\tau^{-1}$,

- $\tau[\ker p(\varphi|_{W_\varphi})^i] = \ker p(\varphi'|_{W_{\varphi'}})^i \subset W_{\varphi'} \quad \forall i \geq 1$
- $\tau[p(\varphi|_{W_\varphi}) \ker p(\varphi|_{W_\varphi})^i] = p(\varphi'|_{W_{\varphi'}}) \ker p(\varphi'|_{W_{\varphi'}})^i \subset W_{\varphi'} \quad \forall i \geq 1.$

Proposición 3.21. Sean $\tau \in \text{Aut}_k(V)$, $\varphi' = \tau\varphi\tau^{-1}$ y $a_{\varphi|_{W_\varphi}}(x) = p_1(x)^{n_1} \dots p_r(x)^{n_r}$ el anulador de $\varphi|_{W_\varphi}$, entonces

- $\mu_i(U_{\varphi'}, \varphi'|_{U_{\varphi'}}) = \mu_i(U_\varphi, \varphi|_{U_\varphi})$ para todo $1 \leq i \leq n = \text{orden de nilpotencia de } \varphi|_{U_\varphi}$.
- $\nu_s(W_{\varphi'}, p_j(\varphi|_{W_{\varphi'}})) = \nu_s(W_\varphi, p_j(\varphi|_{W_\varphi}))$ para todo $1 \leq j \leq r; 1 \leq s \leq n_j$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de los lemas 3.19 y 3.20 y el Teorema 3.16 de clasificación de endomorfismos nilpotentes. □

Teorema 3.22 (Clasificación de endomorfismos de potencia finita). *Sean φ, ψ dos endomorfismos de potencia finita en V . Se verifica que*

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \begin{cases} i(\varphi) = i(\psi) = n, \\ a_{\varphi|_{W_\varphi}}(x) = a_{\psi|_{W_\psi}}(x), \\ \mu_i(U_\varphi, \varphi|_{U_\varphi}) = \mu_i(U_\psi, \psi|_{U_\psi}) \text{ para todo } 1 \leq i \leq n & y \\ \nu_s(W_{\varphi'}, p_j(\varphi|_{W_{\varphi'}})) = \nu_s(W_{\psi'}, p_j(\psi|_{W_{\psi'}})) \text{ para todo } 1 \leq j \leq r; 1 \leq s \leq n_j \end{cases}$$

donde $a_{\varphi|_{W_\varphi}}(x)$ y $a_{\psi|_{W_\psi}}(x)$ denotan, respectivamente, al polinomio anulador de $\varphi|_{W_\varphi}$ y $\psi|_{W_\psi}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Ver Lema 3.19 y Proposición 3.21.

$\Leftarrow$) Supongamos construidas, mediante los procedimientos expuestos y los ya conocidos, bases de Jordan de U_φ , U_ψ , W_φ y W_ψ para los endomorfismos $\varphi|_{U_\varphi}$, $\psi|_{U_\psi}$, $\varphi|_{W_\varphi}$ y $\psi|_{W_\psi}$, respectivamente. Cabe mencionar que para una construcción detallada de una base de Jordan de un $k[x]$ -módulo de dimensión finita puede consultarse [11]. Podemos dar entonces dos isomorfismos $\tau_1 : U_\varphi \rightarrow U_\psi$ y $\tau_2 : W_\varphi \rightarrow W_\psi$ únicos de modo que manden una base a la otra. Estos dos inducen un tercero $\tau \in \text{Aut}_k(V)$, el único que coincide con ellos al restringir. Se comprueba entonces, del mismo modo que en el Teorema 3.16, que $\psi = \tau\varphi\tau^{-1}$, con lo que acabamos. $\square$

Observación 3.23. Por lo visto en la Observación 3.17, es evidente que esto es una generalización de la clasificación ya conocida a endomorfismos de potencia finita en dimensión arbitraria. Cabe mencionarse que, si bien no es de nuestro interés al ya tener clasificados todos los endomorfismos de potencia finita, existe una clasificación aún más general para cualquier endomorfismo cuyo polinomio anulador sea no nulo (véase [11]).

Observación 3.24. Sean V, V' k -espacios vectoriales y $\phi : V \rightarrow V'$ un isomorfismo, denotando $\text{End}_k^{fp}(V)$ a los endomorfismos de potencia finita en V y $\text{End}_k^{fp}(V)/\text{Aut}_k(V)$ a su cociente por la relación de equivalencia dada por los automorfismos, se tiene una biyección:

$$\begin{aligned} \text{End}_k^{fp}(V)/\text{Aut}_k(V) &\xrightarrow{\sim} \text{End}_k^{fp}(V')/\text{Aut}_k(V') \\ [\varphi] &\mapsto [\phi\varphi\phi^{-1}]. \end{aligned}$$

Es decir, la clasificación obtenida es estable por isomorfismos de espacios vectoriales.

3.3. Traza

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria.

DEFINICIÓN 3.25. [20] Sea $\varphi \in \text{End}_k(V)$ de potencia finita. Se define la **traza de φ** como el único escalar $\text{Tr}_V^k(\varphi) \in k$ que verifica:

1. Si V es de dimensión finita, $\text{Tr}_V^k(\varphi)$ es la traza ordinaria.

2. Si W es un subespacio φ -invariante,

$$\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_W^k(\varphi) + \mathrm{Tr}_{V/W}^k(\varphi)$$

donde $\mathrm{Tr}_W^k(\varphi)$ denota a la traza del endomorfismo restringido a W y $\mathrm{Tr}_{V/W}^k(\varphi)$ denota a la traza del endomorfismo de V/W obtenido por factorización de $\pi \circ \varphi$ a través de π , el paso al cociente.

3. Si φ es nilpotente, $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = 0$.

Teorema 3.26 (Existencia y unicidad de la traza). [1, 20]

La traza de φ está bien definida, es decir, dicho escalar existe y es único.

Demostración. Supongamos que existe dicho escalar y veamos que, de ser así, es único. Sea W' cualquier subespacio φ -invariante finito dimensional que contenga a $\varphi^n(V)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (por ejemplo, $\varphi^m(V)$ para m suficientemente grande). Entonces $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W'}^k(\varphi)$ puesto que $\varphi \in \mathrm{End}_k(V/W')$ es nilpotente. Se da así la unicidad como consecuencia de la unicidad de la traza ordinaria.

Veamos ahora la existencia. Sea $W'_0 = \varphi^m(V)$ con m el menor número natural tal que $\varphi^m(V) = \varphi^{m+n}(V)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que este es el mínimo subespacio verificando las condiciones impuestas en el párrafo anterior. Además, $W'_0 = W_\varphi$ y $m = i(\varphi)$. Tomando pues $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W_\varphi}^k(\varphi)$, vamos a ver que se verifican las tres propiedades. La tercera es trivial y la primera es obvia a partir de lo visto en la Observación 2.6. Veamos entonces que se verifica la segunda propiedad.

Supongamos primero que W es tal que existe una descomposición φ -invariante $V = U \oplus W$, con $\varphi|_U$ nilpotente (de orden de nilpotencia necesariamente menor o igual que m). Entonces $W_\varphi = \varphi^m(V) \subset W$ y la descomposición AST de W es $W = (W \cap U_\varphi) \oplus W_\varphi$. Por lo tanto, $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W_\varphi}^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_W^k(\varphi)$.

Sea ahora W un subespacio φ -invariante cualquiera, su descomposición AST es:

$$W = (W \cap U_\varphi) \oplus (W \cap W_\varphi).$$

Por lo que $\mathrm{Tr}_W^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W \cap W_\varphi}^k(\varphi)$.

Por otra parte, $V/W = (U_\varphi \oplus W_\varphi)/((W \cap U_\varphi) \oplus (W \cap W_\varphi))$ y hay un isomorfismo de $k[x]$ -módulos

$$\begin{aligned} (U_\varphi \oplus W_\varphi)/((W \cap U_\varphi) \oplus (W \cap W_\varphi)) &\xrightarrow{\sim} (U_\varphi/(W \cap U_\varphi)) \oplus (W_\varphi/(W \cap W_\varphi)) \\ [u + w] &\longmapsto ([u], [w]). \end{aligned}$$

Como $\varphi|_{U_\varphi}$ es nilpotente, el endomorfismo inducido en $U_\varphi/(W \cap U_\varphi)$ también lo será. Tenemos así una descomposición φ -invariante de V/W con $\varphi|_{U_\varphi/(W \cap U_\varphi)}$ nilpotente, luego $\mathrm{Tr}_{V/W}^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W_\varphi/(W \cap W_\varphi)}^k(\varphi)$.

Además, sabemos que, en el caso finito dimensional, la traza de un endomorfismo en un espacio vectorial es igual a la suma de las trazas de los endomorfismos que induce en un subespacio y en el cociente por dicho subespacio.

A partir de todo esto:

$$\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W_\varphi}^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W \cap W_\varphi}^k(\varphi) + \mathrm{Tr}_{W_\varphi/(W \cap W_\varphi)}^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_W^k(\varphi) + \mathrm{Tr}_{V/W}^k(\varphi).$$

□

Observación 3.27. Hemos probado pues que una definición equivalente de traza sería $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W_\varphi}^k(\varphi)$. Con esta definición, es evidente que, si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ es la descomposición CN de φ , $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_V^k(\varphi_1)$.

Corolario 3.28. [7] Si $V = V_1 \oplus V_2$, con V_1 y V_2 subespacios φ -invariantes, entonces:

$$\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{V_1}^k(\varphi) + \mathrm{Tr}_{V_2}^k(\varphi).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la propiedad 2 de la definición de traza, teniendo en cuenta que $(V_1 \oplus V_2)/V_2 \simeq V_1$. □

Proposición 3.29. [12] Sean φ, ψ dos endomorfismos de potencia finita tales que $\varphi \sim \psi \pmod{\mathrm{Aut}_k(V)}$, entonces $\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_V^k(\psi)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de lo visto en la Observación 2.5 y el Lema 3.19, al ser los polinomios característicos de $\varphi|_{W_\varphi}$ y $\psi|_{W_\psi}$ iguales. □

Observación 3.30. La traza puede pensarse como una aplicación de los endomorfismos de potencia finita en el cuerpo base. No obstante, en [14] se ha demostrado mediante un contraejemplo que esta asignación no es lineal. De ahí, la importancia de las siguientes definición y proposición.

DEFINICIÓN 3.31. [20] Se dice que un subespacio F de $\mathrm{End}_k(V)$ es **de potencia finita** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para n cualesquiera endomorfismos de F , $\theta_1, \dots, \theta_n$, el subespacio $\theta_1(\dots(\theta_n(V))\dots)$ es de dimensión finita.

Observación 3.32. Es evidente entonces que todos los endomorfismos de un subespacio de potencia finita son de potencia finita.

Proposición 3.33. [20] Si F es un subespacio de potencia finita de $\mathrm{End}_k(V)$, entonces $\mathrm{Tr}_V^k : F \rightarrow k$ es k -lineal.

Demostración. [7] Sean $\varphi, \psi \in F$ y $k\langle\varphi, \psi\rangle$ la k -álgebra no conmutativa de los polinomios en las variables φ y ψ . Denotamos $\langle\varphi, \psi\rangle$ al ideal bilátero generado por φ y ψ (el menor ideal bilátero que los contiene). Este ideal (bilátero) es un subespacio de potencia finita de $\mathrm{End}_k(V)$. Sea n un número natural tal que para cualesquiera n elementos de F la imagen de su composición es de dimensión finita. El subespacio finito-dimensional

$$W = \langle\varphi, \psi\rangle^n(V) = \sum_{\theta_i \in \{\varphi, \psi\}} \mathrm{Im} \theta_1(\dots(\theta_n(V))\dots) = \sum_{\theta_i \in \langle\varphi, \psi\rangle} \mathrm{Im} \theta_1(\dots(\theta_n(V))\dots)$$

es $(\varphi + \psi)$ -invariante y contiene a $\mathrm{Im}[(\varphi + \psi)^n(V)]$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la linealidad de la traza en dimensión finita, se tiene que

$$\mathrm{Tr}_V^k(\varphi + \psi) = \mathrm{Tr}_W^k(\varphi + \psi) = \mathrm{Tr}_W^k(\varphi) + \mathrm{Tr}_W^k(\psi) = \mathrm{Tr}_V^k(\varphi) + \mathrm{Tr}_V^k(\psi).$$

Por otro lado, sean φ de potencia finita y $\lambda \in k$, $\lambda\varphi$ es de potencia finita, $U_{\lambda\varphi} = U_\varphi$, $i(\lambda\varphi) = i(\varphi)$ y $W_{\lambda\varphi} = W_\varphi$. Aplicando la linealidad de la traza en dimensión finita, $\text{Tr}_V^k(\lambda\varphi) = \lambda \text{Tr}_V^k(\varphi)$. $\square$

Proposición 3.34. [20] Si $\varphi : V' \longrightarrow V$ y $\psi : V \longrightarrow V'$ son k -lineales y $\varphi \circ \psi$ es de potencia finita, entonces $\psi \circ \varphi$ también es de potencia finita y $\text{Tr}_V^k(\varphi \circ \psi) = \text{Tr}_{V'}^k(\psi \circ \varphi)$.

Demostración. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $(\varphi\psi)^{n_0}(V) = (\varphi\psi)^{n_0+1}(V)$. Como $\varphi(V)$ es un subespacio $\varphi\psi$ -invariante, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(\varphi\psi)^{n_1}(\varphi(V))$ es el mismo subespacio que $(\varphi\psi)^{n_1+1}(\varphi(V))$ y de dimensión finita. Aplicando ψ , obtenemos que $\psi\varphi$ es de potencia finita.

Sea n un número natural mayor o igual que ambos, consideramos $W = (\varphi\psi)^n(V) \subset V$ y $W' = (\psi\varphi)^n(V') \subset V'$. Está claro que ψ define un isomorfismo entre estos dos subespacios, de inversa φ . Luego, al tener W y W' la misma dimensión, se obtiene que

$$\text{Tr}_V^k(\varphi\psi) = \text{Tr}_W^k(\varphi\psi) = \text{Tr}_W^k(\text{Id}) = \text{Tr}_{W'}^k(\text{Id}) = \text{Tr}_{W'}^k(\psi\varphi) = \text{Tr}_{V'}^k(\psi\varphi).$$

$\square$

3.4. Determinante

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria.

DEFINICIÓN 3.35. [7] Sea $\varphi \in \text{End}_k(V)$ de potencia finita. Se define el **determinante de $1 + \varphi$** como el único escalar $\det_V^k(1 + \varphi) \in k$ que verifica:

1. Si V es de dimensión finita, $\det_V^k(1 + \varphi)$ es el determinante ordinario (de $1 + \varphi$).
2. Si W es un subespacio φ -invariante,

$$\det_V^k(1 + \varphi) = \det_W^k(1 + \varphi) \det_{V/W}^k(1 + \varphi)$$

donde $\det_W^k(1 + \varphi)$ y $\det_{V/W}^k(1 + \varphi)$ denotan, análogamente, a los determinantes de los anteriormente mencionados morfismos definidos por φ .

3. Si φ es nilpotente, $\det_V^k(1 + \varphi) = 1$.

Teorema 3.36 (Existencia y unicidad del determinante).

El determinante de φ está bien definido, es decir, dicho escalar existe y es único.

Demostración. Se demuestra de modo análogo a la traza. $\square$

Observación 3.37. Al igual que para la traza, una definición equivalente de determinante sería $\det_V^k(1 + \varphi) = \det_{W_\varphi}^k(1 + \varphi)$. De nuevo, con esta definición, es evidente que, si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ es la descomposición CN de φ , $\det_V^k(1 + \varphi) = \det_V^k(1 + \varphi_1)$.

Corolario 3.38. [7] Si $V = V_1 \oplus V_2$, con V_1 y V_2 subespacios φ -invariantes, entonces:

$$\det_V^k(1 + \varphi) = \det_{V_1}^k(1 + \varphi) \det_{V_2}^k(1 + \varphi).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la propiedad 2 de la definición de determinante, teniendo en cuenta que $(V_1 \oplus V_2)/V_2 \simeq V_1$. $\square$

Proposición 3.39. [7] Si F es un subespacio de potencia finita de $\text{End}_k(V)$, entonces, de modo análogo a la linealidad de la traza, se obtiene que, para cualesquiera $\varphi, \psi \in F$:

$$\det_V^k(1 + \varphi) \det_V^k(1 + \psi) = \det_V^k((1 + \varphi)(1 + \psi)) = \det_V^k((1 + \psi)(1 + \varphi)).$$

Demostración. Se sigue un argumento análogo al de la Proposición 3.33, usando que en dimensión finita el determinante de la composición es el producto de determinantes y que el subespacio W que considerábamos en dicha proposición es $(\varphi + \psi + \varphi\psi)$ -invariante y contiene a $(\varphi + \psi + \varphi\psi)^n(V)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 3.40. [7] Sean φ y ψ endomorfismos de potencia finita tales que el conmutador $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ es de rango finito, entonces $\langle \varphi, \psi \rangle$ es un subespacio de potencia finita de $\text{End}_k(V)$.

Demostración. Considerando un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\varphi^n(V)$ y $\psi^n(V)$ sean de dimensión finita, al multiplicar $2n - 1$ elementos de $\langle \varphi, \psi \rangle$ y sustituyendo $\psi\varphi$ por $\varphi\psi - [\varphi, \psi]$, se consigue un polinomio formado por monomios en los que o bien aparece la variable $[\varphi, \psi]$ o bien φ^n ó ψ^n . Se concluye pues la imagen del endomorfismo correspondiente es de dimensión finita. $\square$

Proposición 3.41. [7] Si φ es un endomorfismo de potencia finita, se verifica que

$$\det_V^k(1 + \varphi) \neq 0 \Leftrightarrow (1 + \varphi) \text{ es invertible.}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Como $\det_{W_\varphi}^k(1 + \varphi)$ es no nulo, $1 + \varphi|_{W_\varphi}$ es invertible. Si $i(\varphi) = n$, construimos δ , el inverso de $1 + \varphi$, como el único endomorfismo verificando:

$$\delta(v) = \begin{cases} (1 + \varphi|_{W_\varphi})^{-1}(v) & \text{si } v \in W_\varphi \\ \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \varphi|_{U_\varphi}^i\right)(v) & \text{si } v \in U_\varphi. \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $1 + \varphi$ es invertible. Sea ahora δ el inverso de $1 + \varphi$, denotamos $\psi = \delta - 1 = -\varphi\delta = -\delta\varphi$. Entonces, si $i(\varphi) = n$, $\psi^n(V) = \varphi^n\delta^n(V) \subset \varphi^n(V) = W_\varphi$. Por lo tanto, ψ es un endomorfismo de potencia finita tal que $[\varphi, \psi]$ es nulo. Usando el Lema 3.40 y la Proposición 3.39, se llega a que $\det_V^k(1 + \varphi) \det_V^k(1 + \psi) = \det_V^k(1) = 1$ y, por tanto, $\det_V^k(1 + \varphi) \neq 0$. $\square$

Proposición 3.42. [7] Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión finita de cuerpos de norma $N_{K/k} : K^\times \rightarrow k^\times$, V es un K -espacio vectorial y φ es un endomorfismo K -lineal de potencia finita de V tal que $1 + \varphi$ es invertible:

$$\det_V^k(1 + \varphi) = N_{K/k} \left[\det_V^K(1 + \varphi) \right].$$

Demostración. Como $\det_V^K(1 + \varphi) = \det_{W_\varphi}^K(1 + \varphi)$ y $\det_V^k(1 + \varphi) = \det_{W_\varphi}^k(1 + \varphi)$, este resultado se deduce de tenerlo para el caso finito-dimensional:

$$\det_{V'}^k(T) = N_{K/k} \left[\det_{V'}^K(T) \right]$$

para $T \in \text{Aut}_K(V')$ con V' K -espacio vectorial de dimensión finita. $\square$

3.4.1. Generalización de la definición de Grothendieck

Según [7], todo $\varphi \in \text{End}_k(V)$ induce morfismos $\wedge^r \varphi \in \text{End}_k(\wedge^r V)$, para todo número natural $r > 0$, definidos por:

$$\left[\wedge^r \varphi \right] (v_1 \wedge \dots \wedge v_r) = \varphi(v_1) \wedge \dots \wedge \varphi(v_r)$$

donde $\wedge^r V$ denota a la componente de grado r del álgebra exterior de V .

Además, si φ es de potencia finita, entonces $\wedge^r \varphi$ también y, para todo $r > \dim_k(W_\varphi)$, es claramente nilpotente, luego de traza nula.

A continuación, vamos a demostrar que la definición de determinante que hemos dado generaliza la dada en [4] por Grothendieck de determinante de un endomorfismo de rango finito. Esto es:

Proposición 3.43. [7] Si φ es un endomorfismo de potencia finita (por ejemplo, de rango finito) en V ,

$$\det_V^k(1 + \varphi) = 1 + \sum_{r \geq 1} \text{Tr}_{\wedge^r V}^k \left(\wedge^r \varphi \right).$$

Demostración. $\wedge^r W_\varphi$ es un subespacio $\wedge^r \varphi$ -invariante de dimensión finita de $\wedge^r V$ que verifica $\wedge^r W_\varphi = [\wedge^r \varphi]^{i(\varphi)}(V)$. Por lo tanto, $\text{Tr}_{\wedge^r V}^k(\wedge^r \varphi) = \text{Tr}_{\wedge^r W_\varphi}^k(\wedge^r \varphi)$. Se concluye usando que $\text{Tr}_{\wedge^r W_\varphi}^k(\wedge^r \varphi) = 0$ para $r > \dim_k(W_\varphi)$ y que el resultado es cierto en dimensión finita:

$$\det(1 + \varphi|_{W_\varphi}) = 1 + \sum_{r=1}^{\dim_k W_\varphi} \text{Tr} \left[\wedge^r (\varphi|_{W_\varphi}) \right].$$

$\square$

Corolario 3.44. [7] Sean $\mu \in k$ y φ un endomorfismo de potencia finita,

$$\det_V^k(1 + \mu\varphi) = 1 + \sum_{r \geq 1} \mu^r \text{Tr}_{\wedge^r V}^k \left(\wedge^r \varphi \right).$$

Corolario 3.45. [7] Sean $\varphi, \psi \in F$ para $F \subset \text{End}_k(V)$ subespacio de potencia finita. Entonces $\varphi\psi$ y $\psi\varphi$ son de potencia finita y

$$\sum_{r \geq 1} \text{Tr}_{\wedge^r V}^k \left(\wedge^r \psi\varphi \right) = \sum_{r \geq 1} \text{Tr}_{\wedge^r V}^k \left(\wedge^r \varphi\psi \right).$$

Además, se deduce que

$$\det_V^k(1 + \varphi\psi) = \det_V^k(1 + \psi\varphi).$$

Demostración. La primera parte es consecuencia de lo visto en la Proposición 3.33 y de que, en dimensión finita, $\text{Tr}(T_1 T_2) = \text{Tr}(T_2 T_1)$, para T_1, T_2 dos endomorfismos cualesquiera. La segunda parte se obtiene de manera inmediata al aplicar la Proposición 3.43. $\square$

Corolario 3.46. [7, 12] Sean φ un endomorfismo de potencia finita y ϕ un automorfismo,

$$\det_V^k(1 + \phi\varphi\phi^{-1}) = \det_V^k(1 + \varphi).$$

En particular, si φ, ψ son de potencia finita tales que $\varphi \sim \psi \pmod{\text{Aut}_k(V)}$, se tiene que $\det_V^k(1 + \varphi) = \det_V^k(1 + \psi)$.

Demostración. Por una parte, la Proposición 3.34 nos garantiza que $\phi\varphi\phi^{-1}$ es de potencia finita, al serlo $\varphi = \phi^{-1}(\phi\varphi)$. Por otra parte, para todo número natural $r \geq 1$ se verifica que $\bigwedge^r \varphi = (\bigwedge^r \phi^{-1})(\bigwedge^r \phi\varphi)$ es de potencia finita, luego, por la Proposición 3.34, $\bigwedge^r \phi\varphi\phi^{-1}$ también y

$$\text{Tr}_{\bigwedge^r V}^k(\bigwedge^r \phi\varphi\phi^{-1}) = \text{Tr}_{\bigwedge^r V}^k(\bigwedge^r \varphi).$$

Se concluye aplicando la Proposición 3.43. $\square$

Observación 3.47. [7] Al generalizar ambos la definición de Grothendieck, se observan similitudes entre el estudio algebraico del determinante de endomorfismos de potencia finita y el estudio analítico hecho en [15] y [19] de los determinantes de operadores de clase de traza, probándose por ejemplo en estas propiedades análogas a las de las Proposiciones 3.39 y 3.41 y al Corolario 3.46.

3.4.2. Relación con el producto exterior infinito

En esta subsección trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión numerable, tratando de obtener un resultado análogo a la definición de determinante en dimensión finita.

DEFINICIÓN 3.48. [7] Considerando la k -álgebra $\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V$ y el ideal generado

$$J(V) = \langle \otimes v_n : v_i = v_j \text{ para ciertos } i \neq j \in \mathbb{N} \rangle$$

se define el **producto exterior infinito de V** como la k -álgebra $\bigwedge^\infty V = (\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V) / J(V)$.

Al igual que en dimensión finita, sea $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de V , $0 \neq v_0 \wedge \dots \wedge v_n \wedge \dots \in \bigwedge^\infty V$.

Por otra parte, tal y como antes definíamos $\bigwedge^r \varphi$, para $\varphi \in \text{End}_k(V)$, construimos ahora la aplicación k -lineal

$$\begin{aligned} \bigwedge^\infty \varphi : \quad \bigwedge^\infty V &\longrightarrow \bigwedge^\infty V. \\ w_1 \wedge \dots \wedge w_n \wedge \dots &\longmapsto \varphi(w_1) \wedge \dots \wedge \varphi(w_n) \wedge \dots \end{aligned}$$

Lema 3.49. [7] Sean φ endomorfismo nilpotente y $\{v_n^\varphi\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de Jordan de V para φ (como la definida en la Proposición 3.11), se da el siguiente resultado:

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} (1 + \varphi)[v_1^\varphi \wedge \dots \wedge v_n^\varphi \wedge \dots] = v_1^\varphi \wedge \dots \wedge v_n^\varphi \wedge \dots .$$

Proposición 3.50. [7] Sean φ un endomorfismo de potencia finita y $\{v_n^\varphi\}_{n \in \mathbb{N}}$ base de Jordan de V para φ formada por unión de bases de Jordan para W_φ ($\{v_1^\varphi, \dots, v_m^\varphi\}$) y para U_φ ($\{v_n^\varphi\}_{n > m}$), se verifica que:

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} (1 + \varphi)[v_1^\varphi \wedge \dots \wedge v_n^\varphi \wedge \dots] = \det_V^k(1 + \varphi) \cdot (v_1^\varphi \wedge \dots \wedge v_n^\varphi \wedge \dots).$$

Demostración. Es consecuencia inmediata del lema previo y del resultado análogo en dimensión finita:

$$(1 + \varphi|_{W_\varphi})(v_1^\varphi) \wedge \dots \wedge (1 + \varphi|_{W_\varphi})(v_m^\varphi) = \det(1 + \varphi|_{W_\varphi}) \cdot (v_1^\varphi \wedge \dots \wedge v_m^\varphi).$$

□

3.4.3. Relación con los valores propios

Sea φ un endomorfismo de potencia finita con $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sus (posiblemente repetidos) valores propios no nulos en la clausura algebraica de k , es decir, los valores propios del isomorfismo $\varphi|_{W_\varphi}$ en la clausura algebraica de k .

Proposición 3.51. [7] Con la notación anterior, se verifica que:

$$\det_V^k(1 + \varphi) = \prod_{i=1}^m (1 + \lambda_i).$$

Demostración. Sea K una extensión de k que contenga todos los valores propios de φ ,

$$\det_{W_\varphi}^k(1 + \varphi|_{W_\varphi}) = \det_{W_\varphi \otimes_k K}^K[1 + (\varphi|_{W_\varphi} \otimes 1)] = \prod_{i=1}^m (1 + \lambda_i).$$

□

Observación 3.52. [7] La Proposición 3.51 nos dice que la definición que hemos dado de determinante de un endomorfismo de potencia finita es la análoga a la dada en [3] del determinante de un operador de clase de traza, siendo ambos escalares el mismo si consideramos un endomorfismo de potencia finita que sea también un operador de clase de traza.

Corolario 3.53. [7] Con la notación previa, para $\mu \in k$ cualquiera,

$$\det_V^k(1 + \mu\varphi) = 1 + \sum_{r=1}^m \mu^r S_r(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

siendo $S_r(x_1, \dots, x_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} x_{i_1} \dots x_{i_r}$ las funciones simétricas elementales.

Corolario 3.54. [7] Con la notación previa, para todo número natural $r \geq 1$,

$$\mathrm{Tr}_{\bigwedge^r V}^k(\bigwedge^r \varphi) = S_r(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

En particular, considerando $r = 1$,

$$\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

Observación 3.55. [7] De este modo se prueba que dado un endomorfismo de potencia finita que sea también un operador de clase de traza, las dos definiciones de traza (algebraica y analítica) coinciden por el Teorema de Lidskii ([19]). Además, de esto se deduce que para tales endomorfismos la definición algebraica de determinante aquí estudiada coincide con la definición analítica que se da en [19].

Proposición 3.56. [7] Sea H un $\mathbb{C}$ -espacio de Hilbert separable y sea $\varphi : H \rightarrow H$ un endomorfismo de potencia finita con valores propios no nulos $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$. Se tiene entonces que

$$\mathrm{Tr}_H^k(\varphi^n) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n$$

de lo que se deducen las siguientes propiedades:

1. Si $\mu \in \mathbb{C}^\times$ y $|\mu| \cdot \max |\lambda_i| < 1$, entonces

$$\det_H^{\mathbb{C}}(1 + \mu\varphi) = \exp\left(\mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\ln(1 + \mu\varphi))\right).$$

2. Si denotamos $\alpha_0(\varphi) = 1$, $\alpha_1(\varphi) = \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi)$ y, para $m \geq 2$,

$$\alpha_m(\varphi) = \begin{vmatrix} \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi) & m-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^2) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi) & m-2 & \dots & 0 & 0 \\ \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^3) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^2) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^{m-1}) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^{m-2}) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^{m-3}) & \dots & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi) & 1 \\ \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^m) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^{m-1}) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^{m-2}) & \dots & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi^2) & \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\varphi) \end{vmatrix}$$

se verifica que

$$\mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\bigwedge^r \varphi) = \frac{\alpha_r(\varphi)}{r!}$$

de lo que se deduce que

$$\det_H^{\mathbb{C}}(1 + \mu\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \frac{\alpha_m(\varphi)}{m!}.$$

Demostración. Como la descomposición AST de H es la misma para φ que para φ^n , se concluye que el número de valores propios de ambos es el mismo. Como $\{\lambda_i^n\}_{i=1}^N$ son valores propios de φ^n , el Corolario 3.54 nos da la afirmación inicial.

La primera propiedad se deduce de que bajo estas hipótesis

$$\ln(1 + \mu\varphi) = - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu^k}{k} ((-\varphi)^k)$$

y, aunque la traza no sea lineal en general, la convergencia de la serie asegura que

$$\mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}(\ln(1 + \mu\varphi)) = - \sum_{k \geq 1} \frac{\mu^k}{k} \mathrm{Tr}_H^{\mathbb{C}}((-\varphi)^k).$$

La segunda propiedad se comprueba por inducción. $\square$

Observación 3.57. [7] La segunda propiedad que se obtiene en la Proposición 3.56 es la análoga a la fórmula de Plemelj-Smithies dada en [19] para los operadores de clase de traza.

3.5. Exponencial

Sean k un cuerpo de característica 0 y V un k -espacio vectorial arbitrario. Denotamos $k((z))$ al cuerpo de series de Laurent, es decir, al cuerpo de fracciones de las series formales; y V_z al $k((z))$ -espacio vectorial $V \otimes_k k((z))$. Además, si φ es un endomorfismo de potencia finita en V , denotamos $\varphi \otimes 1$ al endomorfismo inducido en V_z .

Teorema 3.58 (Definición de la **exponencial**). [7]

Con la notación anterior, se tiene que la aplicación exponencial

$$\begin{aligned} \exp_z^k : \mathrm{End}_k^{fp}(V) &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{k((z))}(V_z) \\ \varphi &\longmapsto Id \otimes 1 + z(\varphi \otimes 1) + \frac{z^2(\varphi \otimes 1)^2}{2} + \frac{z^3(\varphi \otimes 1)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

está bien definida. Además, el endomorfismo de V_z

$$\bar{\varphi} = \exp_z^k(\varphi) - Id \otimes 1 = z(\varphi \otimes 1) + \frac{z^2(\varphi \otimes 1)^2}{2} + \frac{z^3(\varphi \otimes 1)^3}{3!} + \dots$$

es de potencia finita.

Demostración. Teniendo en cuenta que φ es de potencia finita, podemos considerar el subespacio φ -invariante $W = \varphi^n(V)$, de dimensión finita para n suficientemente grande. Sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base de W , tomando cualquier $v \in V$, se sigue que

$$\exp_z^k(\varphi)(v \otimes 1) = v \otimes 1 + z(\varphi \otimes 1)(v \otimes 1) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} (\varphi \otimes 1)^{n-1}(v \otimes 1) + s_1(z)w_1 + \dots + s_r(z)w_r$$

con $s_i(z) \in k((z))$. Por lo tanto, $\exp_z^k(\varphi)(v \otimes 1) \in V_z$ y la exponencial está bien definida.

Este morfismo valora en los automorfismos pues $\exp_z^k(0) = Id$ y, dados dos endomorfismos de potencia finita φ, ψ que conmuten entre sí, se cumple:

$$\exp_z^k(\varphi + \psi) = \exp_z^k(\varphi) \exp_z^k(\psi).$$

Que $\bar{\varphi}$ sea de potencia finita resulta del Lema 3.40, teniendo en consideración que $\bar{\varphi}$ se escribe

$$\bar{\varphi} = \left[z(\varphi \otimes 1) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}(\varphi \otimes 1)^{n-1} \right] + \left[\frac{z^n}{n!}(\varphi \otimes 1)^n + \dots \right]$$

es decir, como suma de un endomorfismo de potencia finita y uno de rango finito. $\square$

Proposición 3.59. Sea $\varphi \in \text{End}_k^{fp}(V)$,

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) = \exp_z^k(\text{Tr}_V^k(\varphi)) \in k((z))^\times$$

donde $k((z))^\times$ denota a los elementos de $k((z))$ invertibles.

Demostración. Para empezar, cabe mencionarse que el primer término de la igualdad tiene sentido pues $\exp_z^k(\varphi) = 1 + \bar{\varphi}$ y acabamos de ver que $\bar{\varphi}$ es de potencia finita. Visto esto ya solo hace falta reducir el enunciado al ya conocido en el caso finito dimensional:

$$\det(\exp(T)) = \exp(\text{Tr}(T))$$

para T un endomorfismo arbitrario en cualquier espacio vectorial de dimensión finita.

Basta considerar W subespacio φ -invariante de dimensión finita que contenga a $\varphi^n(V)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y tener en cuenta que W_z verifica condiciones análogas para $\bar{\varphi}$, con lo que:

$$\begin{aligned} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) &= \det_{V_z}^{k((z))}(1 + \bar{\varphi}) = \det_{W_z}^{k((z))}(1 + \bar{\varphi}) = \det_{W_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi|_W)) = \\ &= \exp_z^k(\text{Tr}_W^k(\varphi|_W)) = \exp_z^k(\text{Tr}_V^k(\varphi)). \end{aligned}$$

$\square$

3.6. Ejemplo

Sean k un cuerpo arbitrario y V un k -espacio vectorial de dimensión numerable. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de V . Consideramos el endomorfismo $\varphi : V \rightarrow V$ definido por

$$\varphi(e_n) = \begin{cases} e_1 & \text{si } n \text{ par} \\ e_{n+1} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$$

φ es un endomorfismo de potencia finita pues $\text{Im } \varphi^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Se verifica que el polinomio anulador de φ es $a(x) = x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$ y la descomposición AST es

$$V = U_\varphi \oplus W_\varphi = \langle e_{2n-1} - e_1, e_{2n} - e_2 \rangle_{n \geq 2} \oplus \langle e_1, e_2 \rangle.$$

Por lo tanto, la descomposición CN de φ es $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, con

$$\varphi_1(e_n) = \begin{cases} e_1 & \text{si } n \text{ par} \\ e_2 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi_2(e_n) = \begin{cases} e_{n+1} - e_2 & \text{si } n \text{ impar y } n \neq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se comprueba que φ pertenece entonces a la clase de equivalencia de los endomorfismos de potencia finita tales que:

- El orden de nilpotencia de φ_2 es 2, i.e., $i(\varphi) = 2$.
- El polinomio anulador de $\varphi_1|_{W_\varphi}$ es $p(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
- $\mu_1(U_\varphi, \varphi_2) = 0$ y $\mu_2(U_\varphi, \varphi_2) = \aleph_0$.
- $\nu_1(W_\varphi, \varphi_1 + 1) =$ y $\nu_1(W_\varphi, \varphi_1 - 1) = 1$.

donde hemos usado que

$$\ker \varphi_2 \cap U_\varphi = \langle e_{2n} - e_2 \rangle_{n \geq 2}; \ker \varphi_2^2 \cap U_\varphi = U_\varphi; H_1^\varphi = 0; H_2^\varphi = \langle e_{2n-1} - e_1 \rangle_{n \geq 2};$$

$$\ker(\varphi_1 + 1) \cap W_\varphi = \ker(\varphi_1 + 1)^2 \cap W_\varphi = \langle e_1 - e_2 \rangle; \text{ y}$$

$$\ker(\varphi_1 - 1) \cap W_\varphi = \ker(\varphi_1 - 1)^2 \cap W_\varphi = \langle e_1 + e_2 \rangle.$$

Observación 3.60. Como V no es de dimensión finita, $i(\varphi_1) = 1$, de lo que se deduce que el polinomio anulador de φ_1 es $x \cdot p(x)$.

Sabiendo que $W_\varphi = \langle e_1, e_2 \rangle$, podemos calcular la traza del endomorfismo así como el determinante de $1 + \varphi$. En efecto,

$$\mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = \mathrm{Tr}_{W_\varphi}^k(\varphi) = 0 \quad \text{y} \quad \det_V^k(1 + \varphi) = \det_{W_\varphi}^k(1 + \varphi) = 0$$

porque la matriz de $\varphi|_{W_\varphi}$ en la base $\{e_1, e_2\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 3.61. Teniendo en cuenta que los valores propios del automorfismo $\varphi|_{W_\varphi}$ son 1 y -1 , se verifican la Proposición 3.51 y el Corolario 3.54, puesto que

$$\det_V^k(1 + \varphi) = (1 + 1)(1 + (-1)) = 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}_V^k(\varphi) = 1 + (-1) = 0.$$

También se está verificando la Proposición 3.41, dado que $1 + \varphi$ no es invertible por ser $\ker(1 + \varphi) = \langle e_1 - e_2 \rangle$.

Finalmente, suponiendo que el cuerpo es de característica 0, se define la exponencial de φ como el automorfismo $k((z))$ -lineal $\exp_z^k(\varphi) : V_z \longrightarrow V_z$ definido por

$$\left[\exp_z^k(\varphi) \right] (v \otimes 1) = v \otimes 1 + \varphi(v) \otimes z + \frac{1}{2} \varphi_1^2(v) \otimes z^2 + \frac{1}{3!} \varphi_1^3(v) \otimes z^3 + \dots$$

Y, por la Proposición 3.59, sabemos que el determinante de este endomorfismo es

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) = \exp_z^k(\mathrm{Tr}_V^k(\varphi)) = \exp_z^k(0) = 1.$$

Capítulo 4

Teoría de Tate para los residuos

Sean k un cuerpo y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria.

Fijado un subespacio $A \subset V$, Tate define en [20], de manera auxiliar para la definición de residuo, los siguientes subespacios de $\text{End}_k(V)$:

$$E := \{\theta \in \text{End}_k(V) : \theta(A) \subset A\}$$

$$E_1 := \{\theta \in \text{End}_k(V) : \theta(V) \subset A\}$$

$$E_2 := \{\theta \in \text{End}_k(V) : \theta(A) \text{ es de dimensión finita}\}$$

$$E_0 := E_1 \cap E_2.$$

Proposición 4.1. [20] *Se verifica que:*

1. E es sub- k -álgebra de $\text{End}_k(V)$.
2. E_0, E_1 y E_2 son ideales biláteros de E .
3. Dados dos subespacios conmensurables A y B de V , ambos producen los mismos cuatro subespacios, i.e., $E^A = E^B, E_1^A = E_1^B, E_2^A = E_2^B$ y $E_0^A = E_0^B$.
4. $E = E_1 + E_2$.
5. E_0 es de potencia finita, luego $\text{Tr}_V^k : E_0 \rightarrow k$ es k -lineal.

Proposición 4.2. [20] *Con la notación anterior, si se da alguna de las dos condiciones siguientes:*

1. $\varphi \in E_0$ y $\psi \in E$
2. $\varphi \in E_1$ y $\psi \in E_2$

entonces $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ está en E_0 y tiene traza nula.

Demostración. Inmediato a partir de las proposiciones 3.34 y 4.1. □

Teorema 4.3 (Definición de **residuo**). [20] Sean K una k -álgebra conmutativa con unidad, V un K -módulo y A un sub- k -espacio vectorial de V tal que todo $f \in K$ pensado como endomorfismo verifica $f \in E^A$. Entonces, denotando por $\Omega_{K/k}^1$ al K -módulo de las 1-formas diferenciales, existe una única aplicación lineal

$$\text{res}_A^V : \Omega_{K/k}^1 \longrightarrow k$$

tal que, si $f, g \in K$,

$$\text{res}_A^V(f dg) = \text{Tr}_V^k([f_1, g_1])$$

para cualesquiera $f_1, g_1 \in E$ que satisfagan las dos condiciones siguientes:

1. En el anillo cociente E/E_2 , $[f_1] = [f]$ y $[g_1] = [g]$.
2. $f_1 \in E_1$ ó $g_1 \in E_1$.

Demostración. Para comenzar, veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} K \times K &\longrightarrow k \\ (f, g) &\longmapsto \text{Tr}_V^k([f_1, g_1]) \end{aligned}$$

está bien definida. Lo primero es ver que, para cualesquiera $f, g \in K$, existen $f_1, g_1 \in E$ verificando las hipótesis. En efecto, como $E = E_1 + E_2$, basta considerar $f_1, g_1 \in E_1$ tales que $f = f_1 + f_2$ y $g = g_1 + g_2$, con $f_2, g_2 \in E_2$. A continuación, probemos que $[f_1, g_1]$ es de potencia finita, viendo que $[f_1, g_1] \in E_0 = E_1 \cap E_2$: por ser $[f, g] = 0$ y la primera condición, $[[f_1, g_1]] = [[f, g]] = 0$ (mód. E_2), luego $[f_1, g_1]$ está en E_2 ; y también está en E_1 , por la segunda condición. Finalmente, la Proposición 4.2, nos da la independencia de los f_1, g_1 escogidos: supongamos sin pérdida de generalidad que $f_1 \in E_1$,

$$[f_1 + f_2, g_1 + g_2] = [f_1, g_1] + [f_1, g_2] + [f_2, g_1 + g_2]$$

por lo que aplicando dicha proposición y la linealidad de la traza sobre E_0 terminamos, dado que o bien $f_2 \in E_0$ o bien $g_1 + g_2 \in E_0$.

Además, se comprueba que esta aplicación es k -bilineal. Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial, induce una aplicación k -lineal

$$\begin{aligned} r : K \otimes_k K &\longrightarrow k \\ f \otimes g &\longmapsto \text{Tr}_V^k([f_1, g_1]) \end{aligned}$$

Por definición de $\Omega_{K/k}^1$, sabemos que existe otra aplicación k -lineal epiyectiva

$$\begin{aligned} c : K \otimes_k K &\longrightarrow \Omega_{K/k}^1 \\ f \otimes g &\longmapsto f dg \end{aligned}$$

cuyo núcleo está generado (como k -espacio vectorial) por los elementos de la forma $f \otimes gh - fg \otimes h - fh \otimes g$, con $f, g, h \in K$.

El morfismo residuo, de existir, será pues el único morfismo k -lineal r' que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes_k K & \xrightarrow{r} & k. \\ c \downarrow & \nearrow r' & \\ \Omega_{K/k}^1 & & \end{array}$$

Para concluir la demostración basta con comprobar que r se anula sobre los generadores de $\ker(c)$. Dados $f, g, h \in K$, podemos tomar $f_1, g_1, h_1 \in E_1$ de modo que difieran del correspondiente elemento en uno de E_2 . Entonces para cualesquiera dos de ellos, por ejemplo f, g , puede elegirse $(fg)_1 = f_1g_1 \in E_1$. Por la Proposición 4.2 y la linealidad de la traza sobre E_0 , se llega a que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr}_V^k([g_1, [f_1, h_1]]) = \text{Tr}_V^k([f_1, g_1h_1] - [f_1g_1, h_1] - [f_1h_1, g_1]) = \\ &= \text{Tr}_V^k([f_1, g_1h_1]) - \text{Tr}_V^k([f_1g_1, h_1]) - \text{Tr}_V^k([f_1h_1, g_1]) = \\ &= r(f \otimes gh) - r(fg \otimes h) - r(fh \otimes g) = r(f \otimes gh - fg \otimes h - fh \otimes g) \end{aligned}$$

a partir de lo cual se acaba, obteniéndose la existencia y unicidad del morfismo residuo. $\square$

Observación 4.4. [20] Para cualesquiera dos elementos $f, g \in K$, el cálculo de $\text{res}_A^V(f dg)$ puede llevarse a dimensión finita tal y como veremos a continuación. Considérense los subespacios de V

$$B = A + gA \quad y$$

$$C = B \cap [f^{-1}(A)] \cap [(fg)^{-1}(A)] = \{v \in B : fv \in A \text{ y } fgv \in A\}.$$

El subespacio $A + fA + fgA$ puede pensarse como suma directa de A y los dos subespacios de dimensión finita formados por los elementos de fA que no están en A y los de fgA que no pertenecen a fA . Con esta descomposición definimos $\pi : A + fA + fgA \rightarrow A$ como la proyección k -lineal que se queda con la parte en A . Entonces $\dim_k(B/C) < \infty$ (existen suplementarios de $A \cap C$ en A y de $gA \cap C$ en gA de dimensión finita) y

$$\text{res}_A^V(f dg) = \text{Tr}_{B/C}^k([\pi f, g]).$$

Efectivamente, extendiendo π a $\pi : V \rightarrow A$ (por ejemplo, dando el valor 0 en el suplementario de $A + fA + fgA$), se verifica que $\pi f \in E_1$ y $\pi f \sim f$ (mód. E_2), luego $\text{res}_A^V(f dg) = \text{Tr}_V^k([\pi f, g])$. Como $[\pi f, g]$ tiene su imagen en B y C está en su núcleo, $\text{Tr}_V^k([\pi f, g]) = \text{Tr}_B^k([\pi f, g]) = \text{Tr}_{B/C}^k([\pi f, g])$ y se concluye.

Proposición 4.5. [20] *El morfismo residuo verifica las siguientes propiedades:*

1. *Sea V' un sub- K -módulo de V para el que A siga siendo sub- k -espacio vectorial, entonces $\text{res}_A^V = \text{res}_{A'}^{V'}$. En consecuencia, a partir de ahora y siempre que no dé lugar a confusión, simplificaremos notación a res_A .*
2. *Si $A \sim A'$ por conmensurabilidad, entonces $\text{res}_A = \text{res}_{A'}$.*
3. *(Continuidad en f y g) Si $fA + fgA + fg^2A \subset A$, entonces $\text{res}_A(f dg) = 0$. En particular, esto ocurre si $fA \subset A$ y $gA \subset A$, luego res_A es idénticamente nulo si A es sub- K -módulo de V .*
4. *Sea $g \in K$. Se verifica que, para todo entero $n \geq 0$, $\text{res}_A(g^n dg) = 0$. Además, si g es invertible, lo mismo ocurre para todo entero $n \leq -2$. En particular, se tiene que*

$$\text{res}_A(dg) = 0.$$

5. *Si $g \in K$ es invertible y $h \in K$ verifica $hA \subset A$, se prueba que*

$$\text{res}_A(hg^{-1} dg) = \text{Tr}_{A/(A \cap gA)}^k(h) - \text{Tr}_{gA/(A \cap gA)}^k(h).$$

En particular, si $g \in K$ es invertible y $gA \subset A$, se obtiene

$$\text{res}_A(g^{-1}dg) = \dim_k(A/gA) \in \mathbb{N}.$$

6. Sea B otro sub- k -espacio vectorial de V tal que $fB < B$ para toda $f \in K$, se verifica que

$$f(A+B) < A+B \quad \text{y} \quad f(A \cap B) < A \cap B \quad \text{para toda } f \in K$$

y se deduce que

$$\text{res}_A + \text{res}_B = \text{res}_{A+B} + \text{res}_{A \cap B}.$$

7. Sea K' una K -álgebra conmutativa que, como K -módulo, es libre de rango finito n . Sean V' el K' -módulo $K' \otimes_K V$ y A' el sub- k -espacio vectorial $\sum_i x_i \otimes A \subset V'$ (para (x_i) una K -base fija de K'). Entonces:

- $f'A' < A'$ para todo $f' \in K'$.
- La clase de conmensurabilidad de A' depende únicamente de la de A . Esto es, sea B otro subespacio de V , (x'_i) otra K -base y $B' = \sum_i x'_i \otimes B$, entonces $A \sim B$ si y solo si $A' \sim B'$.

Además, se verifica que, para todo $f' \in K'$ y $g \in K$,

$$\text{res}_{A'}(f'dg) = \text{res}_A((\text{Tr}_{K'/K} f') dg)$$

donde $\text{Tr}_{K'/K} f'$ es la traza de f' como endomorfismo de K -módulos de K' .

Demostración. 1) Se deduce de manera inmediata de lo visto en la Observación 4.4.
 2) Dado que la definición de residuo solo depende del subespacio A por medio de sus subespacios asociados y estos son los mismos a igual clase de conmensurabilidad (Proposición 4.1), se termina.
 3) Basta observar que, si $fA + fgA + fg^2A \subset A$, los subespacios B y C considerados en la Observación 4.4 son el mismo.
 4) Eligiendo $g_1 \in E_1$ de modo que $g_1 \sim g$ (mód. E_2), $\text{res}_A(g^n dg) = \text{Tr}_V^k([g_1^n, g_1]) = 0$ para $n \geq 0$ pues g_1 y g_1^n conmutan. Además, si g es invertible, se concluye razonando del mismo modo, pues $g^{-2-n}dg = -(g^{-1})^n d(g^{-1})$ para $n \geq 0$.
 5) La segunda parte se obtendrá de la primera tomando $h = 1$ y teniendo en cuenta que A/gA es de dimensión finita porque, de $g^{-1}A < A$, se llega a $A < gA$. Para la primera parte, tomamos $f = hg^{-1}$ en la Observación 4.4 y, en lugar del subespacio C , consideramos el subespacio $A \cap gA \subset C$. Mediante argumentos análogos a los empleados en dicha observación, se llega en este caso a que

$$\text{res}_A(f dg) = \text{Tr}_{(A+gA)/(A \cap gA)}^k([\pi f, g]).$$

Por la linealidad de la traza, como $[\pi f, g] = \pi h - \pi_1 h$ para $\pi_1 = g\pi g^{-1}$ proyección de V en gA , se verifica que

$$\text{res}_A(f dg) = \text{Tr}_{(A+gA)/(A \cap gA)}^k(\pi h) - \text{Tr}_{(A+gA)/(A \cap gA)}^k(\pi_1 h).$$

Usando que π y π_1 son proyecciones en A y gA , respectivamente, y que $hA \subset A$ y $hgA \subset gA$, se tiene que πh como endomorfismo de $(A + gA)/(A \cap gA)$ valora en $A/(A \cap gA)$ y coincide con h sobre este subespacio, a la vez que $\pi_1 h$ como endomorfismo de $(A + gA)/(A \cap gA)$ valora en $gA/(A \cap gA)$ y sobre dicho subespacio coincide con h . A partir de esto y la igualdad anterior, se deduce el resultado buscado.

6) A partir de la definición y propiedades de la conmensurabilidad (estudiadas en la Sección 2.4), se comprueba la primera parte

$$\left. \begin{array}{l} fA < A < A + B \\ fB < B < A + B \end{array} \right\} \Rightarrow f(A + B) = fA + fB < A + B \quad y$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B < A \Rightarrow f(A \cap B) < fA < A \\ A \cap B < B \Rightarrow f(A \cap B) < fB < B \end{array} \right\} \Rightarrow f(A \cap B) < A \cap B.$$

Sabiendo esto, podemos pasar a probar la igualdad de residuos. Para ello, basta ver que

$$\text{res}_A(f dg) - \text{res}_{A+B}(f dg) = \text{res}_{A \cap B}(f dg) - \text{res}_B(f dg).$$

Considerando las proyecciones k -lineales π_A, π_B, π_{A+B} y $\pi_{A \cap B}$ de V en los subespacios $A, B, A + B$ y $A \cap B$, respectivamente, que restringidas al correspondiente subespacio son la identidad y se anulan sobre el resto, se tiene que $\pi_A + \pi_B = \pi_{A+B} + \pi_{A \cap B}$. Además, bajo estas hipótesis sobre A y π_A , se comprueba que $\pi_A f \in E_1$ y $\pi_A f \sim f$ (mód. E_2), luego $\text{res}_A(f dg) = \text{Tr}_V^k([\pi_A f, g])$. Por lo tanto, llegamos a que

$$\begin{aligned} \text{res}_{A \cap B}(f dg) - \text{res}_B(f dg) &= \text{Tr}_V^k([\pi_{A \cap B} f, g]) - \text{Tr}_V^k([\pi_B f, g]) = \\ &= \text{Tr}_V^k([\pi_{A \cap B} - \pi_B] f, g) = \text{Tr}_V^k([\pi_A - \pi_{A+B}] f, g) = \\ &= \text{Tr}_V^k([\pi_A f, g]) - \text{Tr}_V^k([\pi_{A+B} f, g]) = \\ &= \text{res}_A(f dg) - \text{res}_{A+B}(f dg) \end{aligned}$$

usando que $[\pi_{A \cap B} f, g]$ y $[\pi_B f, g]$ están en un subespacio de potencia finita (sobre el que la traza es lineal), al igual que $[\pi_A f, g]$ y $[\pi_{A+B} f, g]$. Veamos que efectivamente es así. Vamos a probarlo solo para $[\pi_{A \cap B} f, g]$ y $[\pi_B f, g]$ por la similitud de ambas comprobaciones. En este caso, ambos están en el subespacio de potencia finita

$$\{\varphi \in \text{End}_k(V) : \varphi(V) < B, \varphi(B) < A \cap B \text{ y } \varphi(A \cap B) < (0)\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [\pi_{A \cap B} f, g](V) &= (\pi_{A \cap B} g - g \pi_{A \cap B})(f(V)) < (\pi_{A \cap B} g - g \pi_{A \cap B})(V) < \\ &< \pi_{A \cap B}(g(V)) + g(\pi_{A \cap B}(V)) < (A \cap B) + g(A \cap B) < A \cap B < B. \end{aligned}$$

$$[\pi_B f, g](V) < (\pi_B g - g \pi_B)(V) < \pi_B(g(V)) + g(\pi_B(V)) < B + gB < B,$$

$$\begin{aligned} [\pi_{A \cap B} f, g](B) &< (\pi_{A \cap B} g - g \pi_{A \cap B})(B) < \pi_{A \cap B}(g(B)) + g(\pi_{A \cap B}(B)) < \\ &< A \cap B + g(A \cap B) < A \cap B, \end{aligned}$$

$$[\pi_B f, g](B) < (\pi_B g - g \pi_B)(B) = (\pi_B - Id)(g(B)) < (\pi_B - Id)(B) = (0),$$

$$[\pi_{A \cap B} f, g](A \cap B) < (\pi_{A \cap B} g - g \pi_{A \cap B})(A \cap B) < (\pi_{A \cap B} - Id)(A \cap B) = (0) \quad y$$

$$[\pi_B f, g](A \cap B) < [\pi_B f, g](B) < (0).$$

7) Si denotamos por B a un suplementario de A y consideramos la proyección k -lineal de V en A

$$\begin{aligned} \pi : V = A \oplus B &\longrightarrow A, \\ (a, b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

la aplicación π' de V' en A' que verifica $\pi'(\sum_i x_i \otimes v_i) = \sum_i x_i \otimes \pi(v_i)$ es una proyección k -lineal. Además, podemos tomar $f'_1 = f'\pi' \in E_1^{A'}$ y $g_1 = g$, luego

$$\text{res}_{A'}(f' dg) = \text{Tr}_{V'}^k([f'\pi', g]).$$

Por las propiedades universales de la suma directa y el producto directo, dar un endomorfismo k -lineal de V' , φ , equivale a dar $n \times n$ endomorfismos k -lineales de V , φ_{ij} , de modo que

$$\varphi \left(\sum_j x_j \otimes v_j \right) = \sum_{i,j} x_i \otimes \varphi_{ij}(v_j)$$

para cualesquiera $v_j \in V$. Además, si $F \subset \text{End}_k(V)$ es un subespacio de potencia finita, entonces también lo es

$$F' = \{\varphi \in \text{End}_k(V') : \varphi_{ij} \in F \quad \forall i, j\} \subset \text{End}_k(V')$$

y, sea $\varphi \in F'$, se verifica que

$$\text{Tr}_{V'}^k(\varphi) = \sum_i \text{Tr}_V^k(\varphi_{ii}).$$

Si denotamos $f'x_j = \sum_i x_i f'_{ij}$ y aplicamos lo anterior al endomorfismo $[f'\pi', g]$, que verifica $[f'\pi', g]_{ij} = [f'_{ij}\pi, g]$, se concluye que

$$\text{Tr}_{V'}^k([f'\pi', g]) = \sum_i \text{Tr}_V^k([f_{ii}\pi, g])$$

pues el subespacio F generado por los $[f_{ij}\pi, g]$ es de potencia finita.

Por otro lado, con la notación que estamos empleando, se tiene que

$$\text{Tr}_{K'/K} f' = \sum_i f_{ii}$$

y, por lo tanto, como podemos tomar $(\sum_i f_{ii})_1 = \sum_i f_{ii}\pi \in E_1^A$, se concluye que

$$\text{res}_A((\text{Tr}_{K'/K} f') dg) = \text{res}_A((\sum_i f_{ii}) dg) = \text{Tr}_V^k([\sum_i f_{ii}\pi, g]) = \text{Tr}_V^k(\sum_i [f_{ii}\pi, g]).$$

Terminamos por la linealidad de la traza sobre el subespacio de potencia finita F , pues al desarrollar ambos lados de la igualdad hemos llegado a la misma expresión. $\square$

Observación 4.6. Cabe recalcar que, en la demostración de la última propiedad, la hipótesis de que K' sea de rango finito sí se está utilizando y es de gran importancia pues permite asegurar que todas las sumas consideradas son finitas.

4.1. Residuos en curvas algebraicas

Sea k un cuerpo y sea $\mathcal{C}$ una curva (algebraica) sobre k íntegra, completa y regular de cuerpo de funciones K . Entonces la curva viene determinada módulo isomorfismo por dicho cuerpo de funciones K .

Con estas hipótesis, se tiene una correspondencia biunívoca entre los puntos cerrados de la curva (i.e., los puntos distintos del genérico) y los anillos de valoración discreta de cuerpo de fracciones K que contienen a k , que asigna a cada punto la fibra en dicho punto. En lo sucesivo, denotaremos por A_x al completado de la fibra en el punto x , $A_x = \hat{\mathcal{O}}_x$, y K_x al cuerpo de fracciones del anillo A_x .

DEFINICIÓN 4.7. [20] Con la notación anterior, se define el **residuo en un punto** $x \in \mathcal{C}$ como la aplicación k -lineal

$$\text{res}_x : \Omega_{K_x/k}^1 \longrightarrow k$$

que verifica

$$\text{res}_x(f dg) = \text{res}_{A_x}^{K_x}(f dg).$$

Está bien definido, i.e., $fA_x < A_x$ para todo $f \in K_x$. En efecto, por ser $A_x \simeq k(x)[[t]]$ para $k(x)$ el cuerpo residual de A_x , existe un elemento primo $t_x \in A_x$ (el correspondiente a t por el isomorfismo). Como $k(x) = A_x/(t_x A_x)$ es de dimensión finita sobre k , $A_x \sim t_x A_x$. Por el mismo motivo $t_x^{n-1} A_x \sim t_x^n A_x$ para todo $n > 1$, luego podemos concluir mediante inducción que $A_x \sim t_x^n A_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, al pensarlos como subespacios de K_x , $A_x \sim t_x^n A_x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea entonces $f \in K_x$ no nulo, f es producto de una potencia de t_x y un invertible, luego $fA_x = t_x^n A_x$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y, en particular, $fA_x < A_x$ para todo $f \in K_x$.

El siguiente teorema asegura que la definición dada de residuo en un punto coincide con la definición analítica clásica:

Teorema 4.8. [20] Sea $x \in \mathcal{C}$ un punto racional sobre k , de modo que $A_x \simeq k[[t]]$ y, por lo tanto, $K_x \simeq k((t))$. Si $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i$ y $g = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j t^j$ son elementos de K_x , entonces

$$\text{res}_x(f dg) = \sum_{i+j=0} j a_i b_j,$$

es decir, es el coeficiente en t^{-1} de $f(t)g'(t)$.

Demostración. Se deduce de las propiedades del morfismo residuo. En efecto, por la propiedad 3, podemos suponer que solo hay un número finito de coeficientes a_i y b_j no nulos. La propiedad 4 deja entonces el cálculo del residuo en términos del coeficiente deseado,

$$\text{res}_x(f dg) = \text{res}_{A_x}(t^{-1} dt) \sum_{i+j=0} j a_i b_j.$$

Finalmente, aplicando la propiedad 5 se llega a que $\text{res}_{A_x}(t^{-1} dt) = 1$ y se concluye. $\square$

Teorema 4.9. [20] Sea S una colección de puntos cerrados de la curva y denotemos por $O(S)$ al subanillo de K formado por la intersección de las fibras en dichos puntos. Entonces, para cada $\omega \in \Omega_{K/k}^1$, se verifica que

$$\sum_{x \in S} \text{res}_x(\omega) = \text{res}_{O(S)}^K(\omega)$$

donde la primera es una suma finita (i.e., casi todos los sumandos son nulos).

Demostración. Para simplificar notación, denotamos

$$A_S = \prod_{x \in S} A_x \quad \text{y} \quad V_S = \{f = (f_x) \in \prod_{x \in S} K_x : f_x \in A_x \text{ para casi todo } x\}.$$

Teniendo en cuenta que el número de polos de una función $f \in K$ es finito, K puede pensarse como un subespacio del K -espacio vectorial V_S mediante la inyección que manda $f \in K$ al elemento (f) de V_S formado por tantas copias de f como puntos haya en S . Aplicando la propiedad 6 del residuo a los subespacios K y A_S de V_S , cuya intersección es precisamente $O(S)$, se tiene que $\text{res}_{A_S} + \text{res}_K = \text{res}_{O(S)} + \text{res}_{K+A_S}$. No obstante, al ser K un K -módulo, por la propiedad 3 del residuo, $\text{res}_K = 0$; y lo mismo ocurre para V_S . Suponiendo ahora que $V_S/(K + A_S)$ fuese de dimensión finita (se demostrará más adelante), V_S y $K + A_S$ serían conmensurables y, por la propiedad 2 del residuo, $\text{res}_{K+A_S} = 0$.

Queremos probar entonces que $\text{res}_{A_S}(\omega) = \sum_{x \in S} \text{res}_x(\omega)$. Sea $\omega = f dg$, se considera un subconjunto $S' \in S$ finito que contenga a todos los polos en S de f y de g y denotamos $T = S - S'$. Entonces

$$V_S = V_T \times \prod_{x \in S'} K_x \quad \text{y} \quad A_S = A_T \times \prod_{x \in S'} A_x$$

y aplicando sucesivas veces la sexta propiedad del residuo se llega a que

$$\text{res}_{A_S}(f dg) = \text{res}_{A_T}(f dg) + \sum_{x \in S'} \text{res}_x(f dg).$$

Sin embargo, por la elección de S' y la tercera propiedad del residuo, se verifica que $\text{res}_{A_T}(f dg) = 0$ y $\text{res}_x(f dg) = 0$ para todo $x \in T$, con lo que se terminaría. Hemos dejado pendiente no obstante demostrar que $V_S/(K + A_S)$ es de dimensión finita. En lo sucesivo, vamos a denotar V_U y A_U al análogo de V_S y A_S para U abierto de $\mathcal{C}$. Como $V_{\mathcal{C}}/(K + A_{\mathcal{C}})$ se proyecta en $V_S/(K + A_S)$ por el morfismo inducido por la proyección de $V_{\mathcal{C}}$ en V_S , basta probar que $V_{\mathcal{C}}/(K + A_{\mathcal{C}})$ es de dimensión finita.

Vamos a ver que $V_{\mathcal{C}}/(K + A_{\mathcal{C}}) \simeq H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O})$, que es de dimensión finita por el Teorema 2.16. Considérese la sucesión exacta de haces de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow K^0 \xrightarrow{\delta} K^1 \longrightarrow 0$$

donde las asignaciones a cada abierto U de $\mathcal{C}$ de $K^0(U)$, la imagen de K en V_U , y de $K^1(U) = V_U/A_U = \bigoplus_{x \in U} K_x/A_x$ definen, respectivamente, los haces flascos K^0 y K^1 , siendo los morfismos considerados las correspondientes proyecciones. El morfismo δ es el inducido por los cocientes $V_U \longrightarrow V_U/A_U$ y es epiyectivo en fibra por ser $K + A_x = K_x$.

La sucesión exacta larga de cohomología asociada a esta sucesión exacta corta de haces, nos da el isomorfismo buscado:

$$H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}) = \text{coker}(\delta(\mathcal{C})) = (V_{\mathcal{C}}/A_{\mathcal{C}})/K^0(\mathcal{C}) = V_{\mathcal{C}}/(K + A_{\mathcal{C}}).$$

□

Corolario 4.10. [20] Con la notación anterior, tomando $S = \mathcal{C} - g$, se llega a que

$$\sum_{x \neq g} \text{res}_x(\omega) = 0$$

para cada $\omega \in \Omega_{K/k}^1$.

Demostración. Por ser la curva completa, aplicando el Teorema 2.16, se tiene que

$$O(\mathcal{C} - g) = \mathcal{O}(\mathcal{C}) = H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O})$$

es de dimensión finita, es decir, $O(\mathcal{C} - g) \sim (0)$. Por lo tanto, por la propiedad 2 del residuo y el Teorema 4.9, se concluye. □

Teorema 4.11. [20] Sea $\mathcal{C}' \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$ el epimorfismo finito inducido por una extensión finita $K \subset K'$ según el Teorema 2.15. Entonces, para $f' \in K'$, $g \in K$ y $x \in \mathcal{C}$,

$$\sum_{x' \in \pi^{-1}(x)} \text{res}_{x'}(f' dg) = \text{res}_x((\text{Tr}_{K'/K} f') dg).$$

Análogamente, si $x' \in \pi^{-1}(x)$, $f' \in K'_x$ y $g \in K_x$,

$$\text{res}_{x'}(f' dg) = \text{res}_x((\text{Tr}_{K'_x/K_x} f') dg).$$

Demostración. Por la séptima propiedad del residuo,

$$\text{res}_x((\text{Tr}_{K'/K} f') dg) = \text{res}_{B_x}(f' dg),$$

donde B_x denota al cierre entero de $\mathcal{O}_x$ en K' . Se concluye aplicando ahora el Teorema 4.9 a B_x , lo cual es posible por [6, Teorema 12.25]. Del mismo modo, se prueba para A_x . □

4.2. Ejemplo

Sea k un cuerpo de característica 0 y sea $\mathcal{C} = \mathbb{P}_k^1 = \text{Proj}(k[x_0, x_1])$ la recta proyectiva, cuyo cuerpo de funciones es $k(t)$ para $t = \frac{x_1}{x_0}$. Sea $x \in \mathcal{C}$ distinto del genérico, vamos a calcular $\text{res}_x(f dg)$ para

$$f = \frac{5}{t^2(t-1)} \quad \text{y} \quad g = 3t$$

con la intención de comprobar que se verifica el Corolario 4.10.

Como todos los puntos (distintos del genérico) de la recta proyectiva son racionales, por el Teorema 4.8, para calcular el residuo en $(t - \beta)$ (respectivamente, $(1/t)$) basta calcular el coeficiente en t^{-1} del desarrollo de Laurent de $f(t + \beta)g'(t + \beta)$ (respectivamente, $f(1/t)g'(1/t)$).

- Si $\beta = 0$, se verifica que

$$f(t)g'(t) = \frac{15}{t^2(t-1)} = -15 \sum_{n=0}^{\infty} t^{n-2}$$

luego $\text{res}_0(f dg) = -15$ (donde $\text{res}_\beta(f dg)$ denota al residuo en $(t - \beta)$).

- Si $\beta = 1$, haciendo el cambio de variable $z = t - 1$, se tiene que

$$f(z)g'(z) = \frac{15}{z(z+1)^2} = 15z^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \right)^2$$

luego $\text{res}_1(f dg) = 15$.

- Si $\beta \neq 0, 1$, denotando $u = t + \beta$, se observa que

$$\begin{aligned} f(u)g'(u) &= \frac{15}{(x+\beta)^2(x+\beta-1)} = \\ &= -15 \left[\frac{1}{\beta^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\beta} \right)^n \right)^2 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\beta} \right)^n - \frac{1}{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{\beta-1} \right)^n \right] \end{aligned}$$

tiene coeficiente en t^{-1} nulo, luego $\text{res}_\beta(f dg) = 0$.

- Si $x = \infty$, es decir, $x = (1/t)$, mediante el cambio de variable $\bar{t} = 1/t$, se llega a que

$$f(\bar{t})g'(\bar{t}) = \frac{15\bar{t}}{\bar{t}-1} = -15\bar{t} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{t}^n.$$

Por lo tanto, $\text{res}_\infty(f dg) = 0$.

Hemos calculado de modo analítico los residuos y comprobado que su suma es nula. A continuación, vamos a comprobar que este cálculo analítico efectivamente coincide con el cálculo algebraico propuesto en la Observación 4.4, según la cual

$$\text{res}_x(f dg) = \text{Tr}_{B_x/C_x}^k([\pi f, g])$$

para $B_x = A_x + gA_x$, $C_x = \{v \in B_x : fv \in A_x \text{ y } fgv \in A_x\}$ y

$$\begin{aligned} \pi : V = A_x \oplus N_x &\longrightarrow V \\ (a_x, n_x) &\longmapsto a_x \end{aligned}$$

para cualquier suplementario N_x de A_x .

Como todos los puntos (distintos del genérico) de la recta proyectiva son racionales, tenemos que $A_x \simeq k[[t]]$ y que $K_x \simeq k((t))$. Por lo tanto, en los puntos de la forma $(t - \beta)$, se comprueba que

$$B_x \simeq k[[t]] \quad \text{y} \quad C_x \simeq \{v \in k[[t]] : fv \in k[[t]]\} = \begin{cases} t^2k[[t]] & \text{si } \beta = 0 \\ tk[[t]] & \text{si } \beta = 1 \\ k[[t]] & \text{si } \beta \neq 0, 1. \end{cases}$$

Por otro lado, en el punto del infinito llegamos a que $B_\infty = C_\infty \simeq t^{-1}k[[t]]$.

Concluimos de nuevo que el residuo es cero tanto si $x = \infty$ como si $\beta \neq 0, 1$. Veamos que ocurre en los otros dos casos:

- Si $\beta = 1$, se llega a que

$$f(z)g(z) = \frac{15}{z(z+1)} = -15 \sum_{n=-1}^{\infty} (-z)^n \quad y \quad f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2} = 5z^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \right)^2.$$

Considerándose la base $\{[1]\}$ de $k[[z]]/zk[[z]]$, se comprueba que

$$\begin{aligned} \text{res}_1(f dg) &= \text{Tr}_{k[[z]]/zk[[z]]}^k [\pi f(z)g(z) - g(z)\pi f(z)] = \\ &= (\pi f(z)g(z) - g(z)\pi f(z))([1]) = 15. \end{aligned}$$

- Si $\beta = 0$, se obtiene que

$$f(t)g(t) = \frac{15}{t(t-1)} = -15 \sum_{n=-1}^{\infty} t^n \quad y \quad f(t) = \frac{5}{t^2(t-1)} = -5 \sum_{n=0}^{\infty} t^{n-2}$$

Considerándose la base $\{[1], [t]\}$ de $k[[t]]/t^2k[[t]]$, se verifica que

$$\text{res}_0(f dg) = \text{Tr}_{k[[t]]/t^2k[[t]]}^k (\pi f(t)g(t) - g(t)\pi f(t)) = -15$$

porque, en dicha base,

$$\pi f(t)g(t) - g(t)\pi f(t) \equiv \begin{pmatrix} -15 & -15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 5

Ley de reciprocidad de Segal-Wilson

Sean k un cuerpo de característica 0 y V un k -espacio vectorial de dimensión arbitraria. Fijemos un subespacio A de V .

En este capítulo vamos a estudiar el análogo multiplicativo, expuesto en 2013 en [7], a la definición de John Tate de residuo.

Para ello, vamos a dar primero algunas definiciones y propiedades asociadas a la exponencial, ahora que ya se ha introducido el subespacio de potencia finita E_0 , que recordemos depende solo de la clase de conmensurabilidad de A .

Proposición 5.1. [7] Si $\varphi, \psi \in E_0$, entonces

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi) \exp_z^k(\psi)) = \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\psi)).$$

Demostración. Como E_0 es un subespacio de potencia finita, φ y ψ son de potencia finita y el lado derecho de la igualdad tiene sentido. Veamos ahora que el lado izquierdo también y que se verifica la igualdad. Según el Teorema 3.58,

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \exp_z^k(\varphi) - Id = z(\varphi \otimes 1) + \frac{z^2(\varphi \otimes 1)^2}{2} + \frac{z^3(\varphi \otimes 1)^3}{3!} + \dots \quad y \\ \bar{\psi} &= \exp_z^k(\psi) - Id = z(\psi \otimes 1) + \frac{z^2(\psi \otimes 1)^2}{2} + \frac{z^3(\psi \otimes 1)^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

son de potencia finita. Por otra parte, como el producto de cualesquiera dos elementos de E_0 es de rango finito, el Lema 3.40 nos asegura que $\langle \varphi, \psi \rangle$ es un subespacio de potencia finita. Sabemos ya que $W = \langle \varphi, \psi \rangle^2(V)$ es un subespacio finito-dimensional φ -invariante y ψ -invariante tal que $\varphi\psi(V), \psi\varphi(V) \subset W$. Usando que la cardinalidad de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es $\aleph_0$, se tiene que

$$[\bar{\varphi}, \bar{\psi}](V_z) = [z(\varphi \otimes 1), z(\psi \otimes 1)](V_z) + \left[z(\varphi \otimes 1), \frac{z^2(\psi \otimes 1)^2}{2} \right](V_z) + \dots \subset W_z$$

con $W_z = W \otimes_k k((z))$ y, por tanto, $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]$ es de rango finito. Aplicando otra vez el Lema 3.40, $\langle \bar{\varphi}, \bar{\psi} \rangle$ es un subespacio de potencia finita. Finalmente, mediante la Proposición 3.39

se concluye:

$$\begin{aligned} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi) \exp_z^k(\psi)) &= \det_{V_z}^{k((z))}((1 + \bar{\varphi})(1 + \bar{\psi})) = \\ &= \det_{V_z}^{k((z))}(1 + \bar{\varphi}) \det_{V_z}^{k((z))}(1 + \bar{\psi}) = \\ &= \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\psi)). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.2. [7] Si $\varphi, \psi \in E_0$, entonces

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi + \psi)) = \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\psi)).$$

Demostración. Al ser E_0 subespacio, $\varphi + \psi \in E_0$ será de potencia finita. Por lo tanto, podemos hablar del determinante de su exponencial. Gracias a la linealidad de la traza sobre E_0 (Proposición 4.1) y a la Proposición 3.59, se termina:

$$\begin{aligned} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi + \psi)) &= \exp_z^k(\text{Tr}_V^k(\varphi + \psi)) = \exp_z^k(\text{Tr}_V^k(\varphi) + \text{Tr}_V^k(\psi)) = \\ &= \exp_z^k(\text{Tr}_V^k(\varphi)) \exp_z^k(\text{Tr}_V^k(\psi)) = \\ &= \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi)) \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\psi)). \end{aligned}$$

□

Corolario 5.3. [7] Si $\varphi, \psi \in E_0$, entonces

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi + \psi)) = \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(\varphi) \exp_z^k(\psi)).$$

Si definimos ahora

$$\begin{aligned} \exp_{z^i}^k : \text{End}_k^p(V) &\longrightarrow \text{Aut}_{k((z))}(V_z), \\ \varphi &\longmapsto Id \otimes 1 + z^i(\varphi \otimes 1) + \frac{z^{2i}(\varphi \otimes 1)^2}{2} + \frac{z^{3i}(\varphi \otimes 1)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

mediante una argumentación análoga a la de la demostración del Teorema 3.58 se tiene que la definición es válida y $\exp_{z^i}^k - Id$ es un endomorfismo de potencia finita de V_z .

Para todo número natural $n \geq 1$, denotamos a un elemento de $A_n = \prod_{i=1}^n [\exp_{z^i}^k(E_0)]$ por $a_n = \{\exp_{z^1}^k(\varphi_1), \dots, \exp_{z^n}^k(\varphi_n)\}$ (con $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E_0$). Considerando, para $m \geq n$, las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi_{mn} : A_m &\longrightarrow A_n \\ a_m &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

se tiene un sistema proyectivo $\{A_n, \phi_{mn}\}$ cuyo límite proyectivo es

$$\varprojlim_n A_n = \prod_{i=1}^{\infty} [\exp_{z^i}^k(E_0)].$$

Abusando ligeramente de notación al usar $\prod$ tanto para el producto cartesiano de conjuntos como para el producto de elementos de un cuerpo, se puede definir para cada número natural $n \geq 1$ un morfismo:

$$\begin{aligned} \det_{V_z}^{k((z))} : A_n &\longrightarrow k((z)) \\ a_n &\longmapsto \prod_{i=1}^n \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi_i)). \end{aligned}$$

Observación 5.4. [7] Considerando la inyección

$$\begin{aligned} A_n &\hookrightarrow \text{Aut}_{k((z))}(V_z) \\ a_n &\longmapsto \prod_{i=1}^n \exp_{z^i}^k(\varphi_i) \end{aligned}$$

la definición dada cobra sentido pues se verifica que

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\prod_{i=1}^n \exp_{z^i}^k(\varphi_i)) = \prod_{i=1}^n \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi_i)).$$

Lo siguiente sería dar una definición análoga sobre el límite proyectivo. No obstante, si bien se tiene una inyección

$$\{a_n\} = \{\exp_z^k(\varphi_1), \dots, \exp_{z^n}^k(\varphi_n), \dots\} \longmapsto \varprojlim_n A_n \hookrightarrow \text{Aut}_{k((z))}(V_z)$$

para

$$\prod_{i=1}^{\infty} \exp_{z^i}^k(\varphi_i) = Id \otimes 1 + (\varphi_1 \otimes 1)z + \left(\frac{(\varphi_1 \otimes 1)^2}{2} + \varphi_2 \otimes 1 \right) z^2 + \dots,$$

en [7] no se llega a una definición sobre todo el conjunto. Lo que sí se obtiene es una definición sobre los elementos $\{a_n\}$ compatibles con $\det_{V_z}^{k((z))} : A_n \longrightarrow k((z))$:

DEFINICIÓN 5.5. Sea $\{a_n\} \in \varprojlim_n A_n$ compatible con $\det_{V_z}^{k((z))} : A_n \longrightarrow k((z))$, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$,

$$\det_{V_z}^{k((z))}(a_n) = \det_{V_z}^{k((z))}(a_m).$$

Se define su determinante por

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\{a_n\}) := \det_{V_z}^{k((z))}(a_m) \in k((z)).$$

Esto es,

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\prod_{i=1}^{\infty} \exp_{z^i}^k(\varphi_i)) := \det_{V_z}^{k((z))}(\prod_{i=1}^m \exp_{z^i}^k(\varphi_i)) = \prod_{i=1}^m \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi_i)).$$

Lema 5.6. [7] Sea $\{\varphi_i\}_{i \geq 1} \subset E_0$ una colección de endomorfismos tales que $\text{Tr}_V^k(\varphi_i) = 0$ para todo $n \geq m \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica que

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\prod_{i=1}^{\infty} \exp_{z^i}^k(\varphi_i)) = \prod_{i=1}^{m-1} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi_i)) \in k((z)).$$

Demostración. Análogamente a la demostración de la Proposición 3.59, se prueba que, para $i \geq 1$ y $\varphi \in \text{End}_k^{fp}(V)$ cualquiera, $\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi)) = \exp_{z^i}^k(\text{Tr}_V^k(\varphi)) \in k((z))^\times$. Luego, si $\text{Tr}_V^k(\varphi) = 0$, $\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi)) = 1$ para todo $i \geq 1$.

Aplicando esto a la familia $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$, se llega a que sus exponenciales son compatibles con el determinante, i.e., para todo $n \geq m - 1$,

$$\prod_{i=1}^n \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi_i)) = \prod_{i=1}^{m-1} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi_i))$$

y se concluye. □

Observación 5.7. Sea $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ como en el Lema 5.6. Denotando $\varphi_0 = 0$ y considerando la colección $\{\varphi'_i\}_{i \geq 1}$ con $\varphi'_i = \varphi_{i-1}$ (que verifica las condiciones de dicho lema para $m' = m+1$), se deduce del Lema 5.6 que

$$\begin{aligned} \det_{V_z}^{k((z))}(\prod_{i=1}^{\infty} \exp_{z^{i+1}}^k(\varphi_i)) &= \det_{V_z}^{k((z))}(\prod_{i=1}^{\infty} \exp_{z^i}^k(\varphi'_i)) = \prod_{i=1}^{m'-1} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^i}^k(\varphi'_i)) = \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_{z^{i+1}}^k(\varphi_i)) \in k((z)). \end{aligned}$$

A partir de estos resultados, se demuestra el siguiente:

Teorema 5.8. [7, 17] *Con la notación anterior, la aplicación*

$$\begin{aligned} c_A : K \times K &\longrightarrow k((z))^{\times} \\ (f, g) &\longmapsto \det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z^k(f_1) \exp_z^k(g_1) \exp_z^k(-(f_1 + g_1))) \end{aligned}$$

es un 2-cociclo de K con coeficientes en $k((z))^{\times}$, i.e., verifica $c_A(1, 1) = 1$ y, para cualesquiera $f, g, h \in K$,

$$c_A(f, g) \cdot c_A(f + g, h) = c_A(f, g + h) \cdot c_A(g, h).$$

En particular, se tiene una extensión central de grupos,

$$1 \longrightarrow k((z))^{\times} \longrightarrow \tilde{K}_A \longrightarrow K \longrightarrow 1.$$

Demostración. Veamos primero que esta aplicación está bien definida. Denotando

$$e(f, g) = \exp_z^k(f_1) \exp_z^k(g_1) \exp_z^k(-(f_1 + g_1))$$

y utilizando la fórmula de Zassenhaus

$$\exp_z^k(f_1 + g_1) = \exp_z^k(f_1) \exp_z^k(g_1) \prod_{i \geq 1} \exp_{z^{i+1}}^k \left(\frac{-C_i(f_1, g_1)}{(i+1)!} \right),$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= [f_1, g_1], \quad C_2 = 2[[f_1, g_1], g_1] - [f_1, [f_1, g_1]], \\ C_3 &= 3[[[f_1, g_1], g_1], g_1] - 3[[f_1, [f_1, g_1]], g_1] + [f_1, [f_1, [f_1, g_1]]], \dots \end{aligned}$$

se llega a que

$$e(f, g) = \prod_{i \geq 1} \exp_{z^{i+1}}^k \left(\frac{-C_i(-g_1, -f_1)}{(i+1)!} \right).$$

Teniendo en cuenta que $\text{Tr}_V^k(C_i) = 0$ para $i \geq 2$ por la Proposición 4.2, podemos aplicar lo visto en la Observación 5.7 para concluir que

$$c_A(f, g) = \det_{V_z}^{k((z))}(e(f, g)) = \det_{V_z}^{k((z))} \left(\exp_{z^2}^k \left(\frac{1}{2} [f_1, g_1] \right) \right)$$

está bien definida dado que $[f_1, g_1] \in E_0$.

De esto último se deduce también la propiedad de 2-cociclo aplicando la Proposición 5.2 y teniendo en cuenta que

$$[f_1, g_1] + [f_1 + g_1, h_1] = [f_1, g_1 + h_1] + [g_1, h_1].$$

Finalmente, según se prueba en [17], todo 2-ciclo produce una extensión central de grupos, siendo en este caso $\tilde{K}_A$ el grupo $k((z))^\times \times K$ con el producto

$$(a, f) \cdot (b, g) := (c_A(f, g)ab, f + g).$$

□

Observación 5.9. [7] Se deduce de la anterior demostración, aplicando la Proposición 3.59, que

$$c_A(f, g) = \det_{V_z}^{k((z))} \left(\exp_{z^2} \left(\frac{1}{2} [f_1, g_1] \right) \right) = \exp_{z^2} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}_V^k([f_1, g_1]) \right) = \exp_{z^2} \left(\frac{1}{2} \text{res}_A(f dg) \right).$$

Observación 5.10. [7] La definición de c_A está claramente inspirada en el 2-cociclo de la Proposición 2.37. Por otro lado, si fijamos un suplementario B de A en V y bases para ambos subespacios, denotando

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a la matriz de $f \in K$ asociada a dicha descomposición $V = A \oplus B$, se observa que podemos tomar

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, se puede generalizar la fórmula

$$\det(\exp(A) \exp(B) \exp(-A) \exp(-B)) = \exp(\text{Tr}([A, B]))$$

a

$$\det_{V_z}^{k((z))}(\exp_z(f_1) \exp_z(g_1) \exp_z(-f_1) \exp_z(-g_1)) = \exp_{z^2}(\text{Tr}_V^k([f_1, g_1])).$$

Por lo tanto, se tiene otra analogía con la teoría de Segal-Wilson pues esta última expresión es similar a la obtenida en la Proposición 2.41.

A partir de la Observación 5.9, se deducen de forma inmediata, de las propiedades ya vistas del morfismo residuo, las siguientes propiedades del 2-ciclo c_A :

Proposición 5.11. [7]

1. Si $A \sim A'$ son dos subespacios conmesurables de V , entonces $c_A(f, g) = c_{A'}(f, g)$. Esto es, el 2-cociclo depende del subespacio A elegido solo en cuanto a su clase de conmensurabilidad respecta. En particular, $\tilde{K}_A = \tilde{K}_{A'}$.
2. Si $fA \subset A$ y $gA \subset A$, entonces $c_A(f, g) = 1$. De ser así, $\tilde{K}_A$ es el grupo $k((z))^\times \times K$ con el producto habitual

$$(a, f) \cdot (b, g) := (ab, f + g).$$

3. $c_A(1, g) = 1 = c_A(g, 1)$ para todo $g \in K$.

4. Si $g \in K$ es invertible y $h \in K$ verifica $hA \subset A$, entonces

$$c_A(hg^{-1}, g) = \exp_{z^2} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}_{A/(A \cap gA)}^k(h) \right) \cdot \exp_{z^2} \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}_{gA/(A \cap gA)}^k(h) \right).$$

5. Si B es otro sub- k -espacio vectorial de V tal que $fB < B$ para todo $f \in K$, entonces

$$c_{A+B}(f, g) \cdot c_{A \cap B}(f, g) = c_A(f, g) \cdot c_B(f, g).$$

Finalmente, de la Observación 5.9 y el Corolario 4.10, se deduce el siguiente:

Corolario 5.12 (Ley de reciprocidad). *Sea $\mathcal{C}$ una curva (algebraica) sobre k íntegra, completa y regular de cuerpo de funciones K . Si denotamos $S = \mathcal{C} - g$ para g el punto genérico de la curva, $A_x = \hat{\mathcal{O}}_x$ y K_x el cuerpo de fracciones del anillo A_x , se verifica que*

$$\prod_{x \in S} c_{A_x}(f, g) = 1$$

para cualesquiera $f, g \in K$.

Ejemplo 5.13. Continuando con el ejemplo del capítulo previo (ver Sección 4.2), vamos a comprobar que

$$\prod_{x \neq g} c_{A_x}(f, g) = 1.$$

Recordemos que, según la Observación 5.9, se tiene que

$$c_{A_x}(f, g) = \exp_{z^2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{res}_x(f dg) \right).$$

Por lo tanto,

$$c_{A_x}(f, g) = \begin{cases} \exp_{z^2}(-\frac{15}{2}) & \text{si } \beta = 0 \\ \exp_{z^2}(\frac{15}{2}) & \text{si } \beta = 1 \\ 1 & \text{si } \beta \neq 0, 1 \text{ ó } x = \infty. \end{cases}$$

Como las constantes conmutan entre sí,

$$\exp_{z^2}(-\frac{15}{2}) \cdot \exp_{z^2}(\frac{15}{2}) = \exp_{z^2}(-\frac{15}{2} + \frac{15}{2}) = \exp_{z^2}(0) = 1$$

y se concluye que efectivamente

$$\prod_{x \neq g} c_{A_x}(f, g) = 1.$$

Bibliografía

- [1] Argerami, M.; Szechtman, F.; Tifenbach, R. *On Tate's trace*, Linear and Multilinear Algebra, **55(6)**, p. 515-520 (2007). DOI: <https://doi.org/10.1080/03081080601084112>.
- [2] Bell, J. *Trace class operators and Hilbert-Schmidt operators*, Notas de la Universidad de Toronto (2016). Disponible en <http://www.individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/traceclass.pdf>.
- [3] Dunford, N.; Schwartz, J. *Linear Operators Part II: Spectral Theory*, Interscience (1963).
- [4] Grothendieck, A. *La théorie de Fredholm*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **84**, p. 319-384 (1956). Disponible en <http://www.numdam.org/item/10.24033/bsmf.1476.pdf>.
- [5] Hernández Ruipérez, D. *Álgebra lineal*, Universidad de Salamanca (2007). ISBN: 84-7481-467-7.
- [6] Hernández Ruipérez, D.; López Martín, A.C.; Pablos Romo, F. *Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica Local*, Aula Magna McGraw-Hill (2023). ISBN: 978-841978630-2.
- [7] Hernández Serrano, D.; Pablos Romo, F. *Determinants of finite potent endomorphisms, symbols and reciprocity laws*, Linear Algebra and its Applications **439(1)**, p. 239-261 (2013). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.02.033>.
- [8] Jacobson, N. *Lectures in Abstract Algebra: II. Linear Algebra*, Graduate texts in mathematics, **31** (2013). ISBN: 978-1-4684-7055-0.
- [9] Maddox, I.J. *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press (1970). ISBN: 0 521 07617 X.
- [10] Navarro González, J.A. *Curvas algebraicas*. Notas de la Universidad de Salamanca.
- [11] Pablos Romo, F. *Classification of Endomorphisms with an Annihilating Polynomial on Arbitrary Vector Spaces*, arXiv preprint arXiv:1310.7738 (2013). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.7738>.
- [12] Pablos Romo, F. *Classification of finite potent endomorphisms*, Linear Algebra and its Applications, **440**, p. 266-277 (2014). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.10.049>.

- [13] Pablos Romo, F. *Core-Nilpotent decomposition and new generalized inverses of finite potent endomorphisms*, Linear and Multilinear Algebra, **68(11)**, p. 2254-2275 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1578332>.
- [14] Pablos Romo, F.; Ramos González, J. *A negative answer to the question of the linearity of Tate's Trace for the sum of two endomorphisms*, Linear and Multilinear Algebra, **62(4)**, p. 548-552 (2014). DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2013.784283>.
- [15] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press (1978). ISBN: 0125850042.
- [16] Sancho de Salas, C.; Sancho de Salas, P. *Geometría Algebraica* (2022). Disponible en <https://matematicas.unex.es/~sancho/LibroGeometriaAlgebraica/geometria0.pdf>.
- [17] Schottenloher, M. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Springer Lecture Notes in Physics, **759** (2008). ISBN: 978-3-540-68625-5.
- [18] Segal, G.; Wilson, G. *Loop groups and equations of KdV type*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **61**, p. 5-65 (1985). Disponible en http://www.numdam.org/item/PMIHES_1985__61__5_0.pdf.
- [19] Simon, B. *Notes on infinite determinants of Hilbert space operators*, Advances in Mathematics, **24(3)**, p. 244-273 (1977). DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(77\)90057-3](https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90057-3).
- [20] Tate, J. *Residues of differentials on curves*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4^a serie, **1(1)**, p. 149-159 (1968). Disponible en <http://www.numdam.org/item/10.24033/asens.1162.pdf>.