

Universidad de Salamanca

FACULTAD DE CIENCIAS

ÓPTICA DE LA VISIÓN DE LOS ANIMALES

Autora: Marta Martín Rodríguez

Tutores: Carlos Hernández García y Javier Rodríguez Vázquez
Aldana

2024

Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD
de SALAMANCA



Universidad de Salamanca

FACULTAD DE CIENCIAS

ÓPTICA DE LA VISIÓN DE LOS ANIMALES
OPTICS OF ANIMAL EYE

Autora: Marta Martín Rodríguez

Tutores: Carlos Hernández García y Javier Rodríguez Vázquez
Aldana

2024



Certificado de los tutores TFG Grado en Fisicas

D. Carlos Hernández García, y D. Javier Rodríguez Vázquez de Aldana,
profesores del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Salamanca,

HACEN CONSTAR:

Que el trabajo titulado “Óptica de la visión de los animales”, que se presenta, ha sido realizado por D^a. Marta Martín Rodríguez, con DNI 70958692N y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo de Fin de Grado en Fisicas en esta Universidad.

Salamanca, a fecha de firma electrónica.

Fdo.: Carlos Hernández García

Fdo.: Javier R. Vázquez de Aldana

Agradecimientos

*A David Rodríguez Segurado, ya que sin su apoyo el camino
a la graduación habría sido más largo y tortuoso*

Resumen

Este trabajo busca entender la visión de los seres vivos desde la perspectiva metódica, empírica y lógica de la física, utilizando conocimientos de óptica geométrica y fotometría adquiridos en el grado.

En primera instancia, se realiza una investigación bibliográfica sobre la estructura del ojo humano y sobre la acomodación, que es su mecanismo de enfoque. Tras ello, se plantean varios trazados de rayos usando el formalismo matricial (y la aproximación paraxial) para cuantificar cómo la acomodación es clave para enfocar objetos cercanos y se demuestra la utilidad de la existencia de gradiente de índice. Además, se explican brevemente los mecanismos de corrección de aberraciones, descubriendo en el proceso la razón de la existencia de la fovea y la visión de los peces.

Después, se investiga sobre los tipos de fotorreceptores en humanos, tanto para la visión fotópica (conos) como escotópica (bastones), y se construyen gráficas sobre la función de eficiencia espectral en función de la longitud de onda para todos los receptores. También se construye una tabla con una sensibilidad total resultado de la suma ponderada de cada tipo de cono, para la visión fotópica. Una vez caracterizado cualitativa y cuantitativamente el funcionamiento habitual (tricromatismo), se pasa a comparar con tres condiciones humanas fruto de mutaciones: daltonismo, acromatismo y tetracromatismo. En los tres casos, se discute cómo queda la función de eficiencia espectral respecto al tricromatismo y se acompaña con imágenes que muestran las diferencias en la visión ante un mismo estímulo.

A continuación, se investiga sobre las similitudes y las diferencias entre los vertebrados terrestres, estableciendo así un sistema óptico específico para la tierra. Tras ello, se hace especial hincapié en las diferencias del sistema óptico de animales nocturnos y animales diurnos, tratando temas como el tamaño de la lente o la aparición de nuevos elementos (tapetum lucidum). Además, se ahonda en los fotorreceptores de los perros en comparación con los humanos, por ser animales no arrítmicos (ni diurnos ni nocturnos), construyendo así un perfil de cantidad y tipo de receptores en función de los hábitos de vida.

Por otro lado, antes de empezar a tratar sobre los animales de hábitat acuático, se optó por un caso intermedio, los reptiles y los pingüinos que viven en ambos medios, y su estrategia para la visión simultánea en tierra y agua es diferente. Para los reptiles, propusieron sistemas ópticos, y mediante cálculo simbólico con formalismo matricial, se establecieron unas condiciones para que se pudieran formar imágenes en la retina a partir del sistema óptico de humanos con modificaciones. Todo ello con el fin de comprobar hasta qué punto tendría que cambiar el sistema óptico humano para poder ver en agua. Para los pingüinos, se comentan brevemente las limitaciones de la óptica paraxial en el campo de visión.

Finalmente, se ahonda en los bivalvos del género pecten, que usan espejos en sus ojos, y se trata de explicar de nuevo con el formalismo matricial el enfoque de los rayos de luz en la retina en estos seres.

A lo largo del trabajo, se va demostrando cómo el medio (acuático o terrestre) determina sustancialmente el sistema óptico, y se descubren elementos de los ojos de los animales acuáticos en los terrestres, pero con funciones diferentes, probando así la teoría de la evolución de las especies de Darwin.

Para la construcción de todos los modelos matriciales, y para calcular la ponderación de los conos, se utiliza el software de Matlab y de Wolfram Mathematica, cuyo uso se detalla en este trabajo con ejemplos sencillos. Además, para la realización de los trazados de rayos junto con figuras explicativas, se usa Geogebra.

Abstract

This work seeks to understand the vision of living beings from the methodical, empirical and logical perspective of physics, using knowledge of geometric optics and photometry acquired in the degree.

In the first instance, a bibliographic research is carried out on the structure of the human eye and accommodation, which is its focusing mechanism. After that, several ray tracings are proposed using the matrix formalism (and the paraxial approximation) to quantify how accommodation is key to focusing on close objects and the usefulness of the existence of an index gradient is demonstrated. In addition, the mechanisms for correcting aberrations are briefly explained, discovering in the process the reason for the existence of the fovea and the vision of fish.

Next, the types of photoreceptors in humans are investigated, both for photopic (cones) and scotopic (rods) vision, and graphs are constructed on the spectral efficiency function as a function of wavelength for all receptors. A table is also constructed with a total sensitivity resulting from the weighted sum of each type of cone, for photopic vision. Once the usual functioning (trichromatism) has been qualitatively and quantitatively characterized, it is compared with three human conditions resulting from mutations: color blindness, achromatism and tetrachromatism. In the three cases, how the spectral efficiency function looks with respect to trichromatism is discussed and is accompanied with images that show the differences in vision when faced with the same stimulus.

Next, the similarities and differences between terrestrial vertebrates are investigated, thus establishing a specific optical system for land. After this, special emphasis is placed on the differences in the optical system of nocturnal animals and diurnal animals, addressing issues such as the size of the lens or the appearance of new elements (tapetum lucidum). Furthermore, we delve into the photoreceptors of dogs compared to humans, as they are non-arrhythmic animals (neither diurnal nor nocturnal), thus constructing a profile of the quantity and type of receptors depending on life habits.

On the other hand, before starting to deal with animals in aquatic habitats, we chose an intermediate case, reptiles and penguins that live in both environments, and their strategy for simultaneous vision on land and water is different. For reptiles, proposed optical systems, and through symbolic calculation with matrix formalism, conditions were established so that images could be formed on the retina from the optical system of humans with modifications. All this in order to verify to what extent the human optical system would have to change to be able to see in water. For penguins, the limitations of paraxial optics on the field of view are briefly discussed.

Finally, we delve into the bivalves of the genus *Pecten*, which use mirrors in their eyes, and try to explain again with matrix formalism the focusing of light rays on the retina in these beings.

Throughout the work, it is demonstrated how the environment (aquatic or terrestrial) substantially determines the optical system, and elements of the eyes of aquatic animals are discovered in terrestrial ones, but with different functions, thus proving the theory of evolution. of Darwin's species.

For the construction of all the matrix models, and to calculate the weighting of the cones, the Matlab and Wolfram Mathematica software is used, the use of which is detailed in this work with simple examples. In addition, Geogebra is used to create ray tracings along with explanatory figures.

Palabras clave

Acomodación, visión, ojo, gradiente de índice, conos, bastones, humano, perro, darwinismo, argentea, aves buceadoras, peces, reptiles, óptica geométrica

Keywords

Accommodation, view, eye, index gradient, cones, rods, human, dog, darwinism, argentea, diving birds, fish, reptiles, geometric optics

Índice

1. Introducción	1
2. Resultados y discusión	2
2.1. El formalismo matricial	2
2.2. Terminología	7
2.3. Sistema óptico ojo humano	7
2.3.1. Modelo matricial	8
2.3.2. El cristalino como lente delgada	9
2.3.3. Visión humana para objetos lejanos: cristalino desacomodado	11
2.3.4. Visión humana para objetos cercanos: cristalino acomodado	12
2.3.5. Correcciones en el ojo humano	18
2.4. Receptores en humanos. Tricromatismo	19
2.5. Vertebrados terrestres y semiacuáticos	24
2.5.1. Reptiles semiacuáticos	25
2.5.2. Pingüinos	30
2.5.3. Receptores y características de visión arrítmica en perros	30
2.6. Animales acuáticos. Pecten	32
3. Metodología	35
3.1. MATLAB	35
3.2. Wolfram Mathematica	37
4. Conclusiones	40
5. Anexo	43

1. Introducción

En mi paso por las aulas del grado en física descubrí la óptica geométrica y la fotometría, y en los laboratorios construí diferentes sistemas ópticos y observé cómo se formaban las imágenes. Antes de cursar el grado en física, estudié en la facultad de biología, donde aprendí que la visión es un sentido que usan la mayoría de los animales para relacionarse con su entorno. Fue entonces cuando me planteé, ¿podría la física, desde su perspectiva metódica y lógica, ayudarme a demostrar esto? ¿Serán los ojos de los seres vivos similares a los sistemas ópticos que vi en los ejercicios de las asignaturas? Para contestar a mis preguntas, he planteado dos frentes: el primero, cómo redirigen la luz hacia el interior de sus cuerpos, y el segundo, cómo el cuerpo responde a la luz que llega.

En primer lugar, he querido investigar sobre la realidad cercana, el ojo humano. Tras investigar su anatomía, he planteado varios sistemas ópticos y he realizado trazados de rayos para corroborar si la luz llegaba a los receptores tal como indicaba la investigación en biología. Después de eso, mediante una búsqueda bibliográfica sobre fotoreceptores y los conocimientos de fotometría adquiridos en las asignaturas, he realizado gráficas que ilustran la respuesta de nuestros ojos a la luz, y por tanto nuestra visión.

Luego, he llevado a cabo una revisión bibliográfica sobre vertebrados, con el fin de observar patrones en los ojos que sean consecuencia de vivir en un entorno terrestre. También he realizado una revisión bibliográfica acerca de cómo cambian los fotoreceptores en función de si el ser vivo es nocturno o diurno, siguiendo de nuevo el objetivo principal de establecer una relación entre visión y adaptación al medio, para comprobar mediante la física lo que aprendí en biología.

Por último, para concluir los cambios de los sistemas visuales de los seres vivos en función del entorno, no sólo he propuesto sistemas ópticos y trazados de rayos de criaturas acuáticas, sino también de criaturas que se desenvuelven tanto por tierra como por mar.

Para todos los trazados de rayos de este trabajo se ha usado la aproximación paraxial y el formalismo matricial. He respondido a mis preguntas y además he hallado otras cosas interesantes, como pruebas de la teoría de la evolución de las especies y la existencia de lentes de gradiente de índice en la naturaleza.

2. Resultados y discusión

2.1. El formalismo matricial

Antes de comenzar a describir con detalle los sistemas ópticos planteados, en esta sección explico los conocimientos de óptica geométrica que se han usado en este trabajo.

En primer lugar, la óptica geométrica es la rama de la física que se ocupa de las cuestiones relacionadas con la propagación de la luz, es decir, se encarga de determinar las trayectorias de la energía radiante a través de distintos medios. Estas trayectorias se llaman rayo luminoso [1]. Además, cada medio se caracteriza por su índice de refracción, que es la razón de la velocidad de la luz en el vacío a la que lleva en dicho medio [1].

Vamos a describir en esta sección el formalismo matricial utilizado. Debemos tener en cuenta que para todas las matrices, ecuaciones y elementos cardinales descritos a continuación **se tiene en cuenta la aproximación paraxial, esto es, los rayos de luz forman ángulos pequeños con el eje óptico. En estas condiciones el seno del ángulo puede aproximarse al ángulo (se puede tomar el primer orden del desarrollo en serie de Taylor)**. Nuestra matriz del rayo es:

$$\begin{pmatrix} h \\ n\sigma \end{pmatrix} \quad (1)$$

siendo h la altura del rayo respecto del eje óptico, n el índice de refracción del medio y σ el ángulo del rayo (cociente entre altura y longitud recorrida). En los sistemas de este trabajo hemos hablado de traslaciones, refracciones y reflexiones. Las construcciones de estas matrices se pueden consultar más detalladamente en [1], pero las matrices aquí descritas son ligeramente distintas debido a que en ese libro no aparece el índice de refracción en la matriz del rayo.

Las ecuaciones de una traslación del punto 1 al 2 son [1]:

$$h_2 = h_1 - z\sigma_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_1$$

Escribiendo esas ecuaciones en forma matricial teniendo en cuenta la matriz del rayo (1), la matriz de traslación que queda es:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

siendo z la longitud horizontal de la traslación y n el índice de refracción donde esta se produce. Por otro lado, las ecuaciones para la refracción son [1]:

$$h'_1 = h_1$$

$$\sigma'_1 = \frac{n_B - n_A}{n_B R} h_1 + \frac{n_A}{n_B} \sigma_1$$

La matriz de refracción que resulta de escribir las ecuaciones en forma matricial es :

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_B - n_A}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Siendo n_A el índice de refracción del medio del que parte el rayo, R el radio de curvatura de la superficie de separación entre ambos medios y n_B el índice de refracción de esa superficie.

La matriz de reflexión es una matriz de refracción considerando $n_B = -n_A$. El índice de refracción negativo sale de la ley de Snell ($n_A \sigma_A = n_B \sigma_B$ [1]) aplicada a un espejo y manifiesta que el rayo tras llegar a la superficie continúa en el mismo medio, pero cambia su sentido. La matriz de reflexión queda:

$$M_R^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2n_A}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Por otro lado, usaremos la aproximación de lente delgada. La matriz para una lente delgada consiste en multiplicar las matrices de dos refracciones (espesor despreciable, traslación despreciable):

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n_L(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) + \frac{n_b}{R_2} - \frac{n_a}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

siendo n_L el índice de refracción de la lente, y n_a y n_b los índices de refracción correspondientes al medio anterior y posterior a la lente, respectivamente. Si la lente está sumergida en el mismo medio, $n_a = n_b = n$ y la matriz queda:

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_L - n)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Un conjunto de superficies que separan medios de distinto índice de refracción forman un sistema óptico. Los sistemas ópticos que plantearemos en este trabajo tienen simetría rotacional a lo largo de una línea imaginaria llamada eje óptico. Un sistema modifica la altura y la inclinación del rayo de la siguiente manera [1]:

$$\begin{pmatrix} h_{out} \\ n_{out}\sigma_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{in} \\ n_{in}\sigma_{in} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_{in} \\ n_{in}\sigma_{in} \end{pmatrix} \quad (7)$$

La matriz total del sistema se obtiene multiplicando las matrices de todos los fenómenos anteriormente descritos que ocurran, teniendo en cuenta que la matriz correspondiente al fenómeno óptico más cercano al punto de partida del rayo es la que se coloca más a la derecha de la multiplicación [1]. Por ejemplo, si tenemos un rayo que atraviesa una lente gruesa de radios R_a y R_b , siendo R_a el radio de la superficie más cercana al origen del rayo. La matriz de la lente es la multiplicación de la refracción de la superficie de radio R_b , seguida de traslación en el espesor de la lente y de la refracción de la superficie de R_a . La figura 1 ilustra lo descrito en este párrafo, siendo M la matriz total del sistema. Para el trazado de rayos vamos a necesitar los elementos cardinales, que consisten en punto principal objeto (H), punto principal imagen (H'), punto focal objeto (F) y punto focal imagen (F'). Estos cuatro son los puntos de corte del eje óptico del sistema con los planos homónimos de los que forman parte [1].

Los planos principales son dos planos conjugados (uno es imagen del otro) normales al eje, con aumento lateral unidad, es decir, **si un rayo entra por un punto X perteneciente al plano principal objeto, al salir pasará por un punto perteneciente al plano principal imagen a la misma altura que X**, bien realmente o bien su prolongación

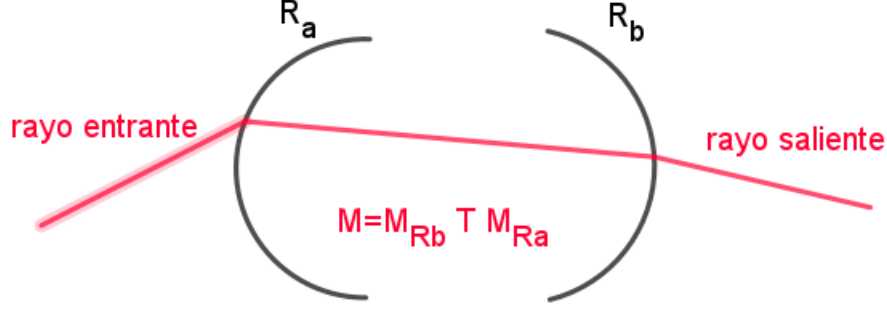


Figura 1: Ejemplo para explicar el orden en el que se multiplican las matrices para obtener la matriz total del sistema M . La línea roja simboliza el rayo de luz, y los hemicírculos dos superficies refractantes de radios de curvatura distintos. Esta figura se ha realizado con Geogebra.

virtual [1]. También, si un rayo entra por H en el plano principal objeto, sale por H' en el plano principal imagen. Si en una zona paraxial tomamos como objeto el infinito, el haz de rayos procedentes de él (que son paralelos al eje) forman imagen en F' . Análogamente, existe un punto F tal que todos los rayos que parten de él salen del sistema paralelos al eje [1]. Además, si un rayo pasa por F y entra por el plano principal objeto, al salir del plano principal imagen a la misma altura la trayectoria será paralela al eje del sistema.

Para calcular la posición de estos puntos cardinales necesitaremos la matriz entre dos puntos, que lleva de un rayo en z_1 , donde el medio tiene índice de refracción n_1 , a otro rayo en z_2 (donde el índice de refracción es n_2) que ha atravesado el sistema. z_1 y z_2 están a una distancia d_1 y d_2 del sistema, respectivamente:

$$S = T_2 M T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-d_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(-d_1)}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \frac{d_2 C}{n_2} & \frac{d_1}{n_1} \left(A - \frac{C d_2}{n_2} \right) + B - \frac{d_2 D}{n_2} \\ C & D + \frac{d_1 C}{n_1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$S = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \quad (9)$$

siendo M la matriz total del sistema. La definición de la matriz S se ilustra en la figura 2.

La matriz S transforma el rayo de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ n_2 \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ n_1 \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' h_1 + B' n_1 \sigma_1 \\ C' h_1 + D' n_1 \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

siendo n_1 , de nuevo, el índice de refracción correspondiente al medio a la izquierda del sistema y n_2 al del medio a la derecha del sistema; y h_1 , σ_1 , h_2 , σ_2 la alturas y los ángulos del rayo entrante y el rayo saliente, respectivamente. Las posiciones de los elementos cardinales se calculan imponiendo condiciones a la matriz (8) teniendo en cuenta las características y propiedades anteriormente descritas. Ya que F y F' son puntos conjugados, al igual que H y H' , saquemos una expresión general.

Para que dos puntos sean conjugados, todo rayo que salga del punto objeto va a llegar al punto imagen, por lo que la altura de la imagen h_2 no puede depender del ángulo

del rayo que sale del objeto σ_1 . Esto es, de la matriz (8) podemos sacar una ecuación para los puntos conjugados que usamos para los sistemas ópticos del ojo humano, imponiendo $B'=0$ y operando:

$$d_1 = \frac{n_1(\frac{D}{n_2} - \frac{B}{d_2})}{\frac{A}{d_2} - \frac{C}{n_2}} \quad (11)$$

A partir de esta expresión podemos obtener las posiciones de los puntos focales. Cuando d_1 tiende a $-\infty$, d_2 es la distancia al punto focal imagen, $s_{F'}$. También, si d_1 tiende a $-\infty$ en la ecuación (11), el denominador se iguala a 0, y por tanto queda:

$$d_2 = s_{F'} = \frac{An_2}{C} \quad (12)$$

Si $s_{F'}$ es negativo, el punto focal imagen estará a la izquierda del borde derecho del sistema, y si es positivo estará a la derecha del mismo borde.

Para el punto focal objeto, imponemos que d_2 tiende a ∞ , y sustituyendo de nuevo en la ecuación (11) se obtiene la distancia:

$$d_1 = s_F = \frac{-Dn_1}{C} \quad (13)$$

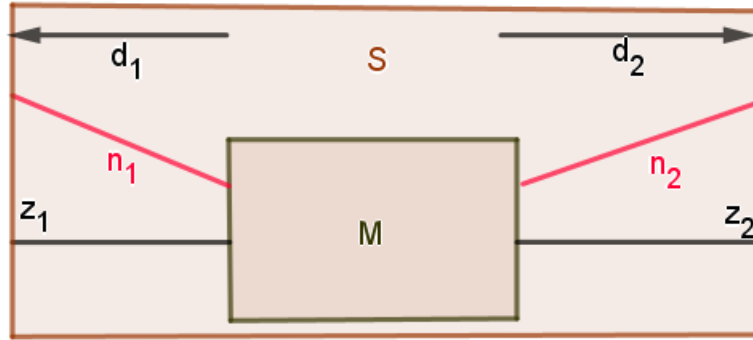


Figura 2: Representación gráfica de la matriz S (matriz entre dos puntos). La línea roja simboliza el rayo. El rectángulo pequeño representa el sistema, caracterizado por la matriz M. Antes de que el rayo entrara en el sistema, se trasladaba en un medio de índice de refracción n_1 , y al salir del sistema el índice de refracción es n_2 . Cuando tenemos en cuenta las dos traslaciones de d_1 y d_2 junto con la la matriz M obtenemos la matriz S, remarcada en un rectángulo mayor. Esta figura se ha realizado con Geogebra.

Si s_F es negativo, estará a la izquierda del borde izquierdo del sistema, y si es positivo a la derecha del mismo borde.

Para los puntos principales, usaremos que en los planos principales el aumento lateral es la unidad. Además, como estos planos son conjugados, de nuevo $B'=0$. Según la expresión (10), si $B'=0$, A' representa el aumento lateral. Imponiendo $A'=1$ en la expresión (8), obtenemos la distancia al punto principal imagen:

$$d_2 = d_{H'} = \frac{n_2(A-1)}{C} \quad (14)$$

Para obtener una expresión para d_H , sustituimos $\frac{1}{d_2} = \frac{A}{d_2} - \frac{C}{n_2}$ (obtenido porque $A - \frac{d_2 C}{n_2} = 1 = A'$) en la ecuación (11), teniendo en cuenta que $d_2 = d_{H'}$ por ser H y H' puntos conjugados. Despejando tras esto d_1 y teniendo en cuenta que el determinante de la matriz del sistema es la unidad ($AD-BC=1$), obtenemos:

$$d_1 = d_H = \frac{-n_1(D-1)}{C} \quad (15)$$

Al igual que para los puntos focales, si d_H es positivo estará a la derecha del borde izquierdo del sistema y si es negativo a la izquierda; y para $d_{H'}$ el criterio es el mismo pero respecto al borde derecho.

Durante el transcurso de este trabajo, hablaremos sobre potencia (P) porque es un indicador de cuánto se ve alterada la trayectoria del rayo por una refracción (a mayor potencia, más se altera). La potencia se define como $P = \frac{1}{f'}$, siendo f' la focal imagen o la distancia desde el punto principal imagen hasta el punto focal imagen, es decir, $s_{F'} - d_{H'}$ [1]. Restando la ecuación (12) a la ecuación (14) se obtiene:

$$f' = \frac{n_2}{C} \quad (16)$$

Para finalizar, vamos a comentar un par de ecuaciones que también nos serán útiles y vamos a explicar nuestro criterio de signos para los radios, alturas, y distancias dentro del sistema. Para algunos trazados de rayos, usaremos el invariante de Lagrange-Helmholtz [1] para trazar un rayo que cruza H:

$$n_1 y_H \sigma_H = n_2 y_{H'} \sigma_{H'} \quad (17)$$

$$n_1 \sigma_H = n_2 \sigma_{H'} \quad (18)$$

siendo σ_H el ángulo con el que el rayo cruza H, $\sigma_{H'}$ el ángulo con el que el rayo sale de H'. $y_{H'}$ e y_H son las alturas del rayo en H y H' respectivamente, pero se van de la ecuación porque los planos principales tienen aumento lateral unidad.

También usaremos espejos cóncavos. Estos espejos forman imágenes en el mismo lado que el objeto respecto a la superficie reflectante [2]. A partir del invariante de Abbe $n(\frac{1}{R} - \frac{1}{s})$ obtenido por la ley de refracción en aproximación paraxial [1], y teniendo en cuenta que $n_2 = -n_1$ en una reflexión, la ecuación para el espejo queda [1]:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} \quad (19)$$

siendo s la distancia del espejo al objeto, s' la distancia de la imagen al espejo y R el radio de curvatura del espejo. Según nuestro criterio de signos, R , s' y s son negativos.

En la figura 3 definimos el convenio de signos:

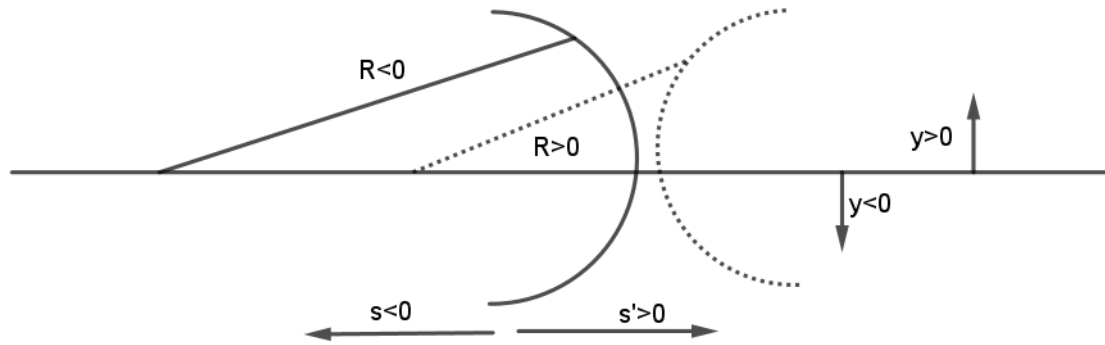


Figura 3: Esquema con criterio de signos. Cuando el radio de curvatura R es positivo, decimos que la superficie es convexa, y cuando es negativo, cóncava. Además, si la imagen tiene alturaz"negativa se dice que es invertida, si es positiva, se dice que es derecha. La curva convexa aparece en línea punteada porque s y s' están definidas para un sistema con una única superficie de separación, pero se representa para su visualización.

2.2. Terminología

A lo largo del trabajo, se van a plantear diversos sistemas ópticos con un modelo matricial y se van a realizar trazados de rayos. En esta sección describimos la denominación de las matrices y de los puntos cardinales que se usará:

- C_1 : refracción en la córnea previa
- T_c : traslación dentro de la córnea
- C_2 : refracción en la córnea posterior
- T_a : traslación dentro del humor acuoso
- L_c : matriz del cristalino cuando es considerado lente delgada
- R_1 : refracción de la lente anterior del cristalino
- T : traslación dentro de la lente
- R_2 : refracción de la lente posterior del cristalino
- L : matriz del cristalino cuando es considerado lente gruesa
- E : matriz del espejo argentea
- T_e : matriz de traslación de la lente al espejo
- M : matriz total del sistema
- $s_{F'}$: distancia al plano focal imagen
- s_F : distancia al plano focal objeto
- d_H : distancia al plano principal objeto
- $d_{H'}$: distancia al plano principal imagen
- f' : distancia focal imagen
- P : potencia

2.3. Sistema óptico ojo humano

Ya podemos empezar con el ojo humano una vez resumidos los conocimientos de óptica geométrica que vamos a usar. El primer paso es conocer el ojo anatómicamente hablando para convertirlo en una estructura puramente óptica. Observemos la figura 4. En primer lugar, y en contacto con el exterior del cuerpo hay una lámina transparente, la córnea. Luego encontramos dos cavidades recubiertas de líquido, la cavidad acuosa y la cavidad

vítrea, separadas por una lente llamada cristalino. La capa de células llamada retina contiene los fotorreceptores [3], y cubre toda la pared vítrea excepto en el disco óptico (punto ciego). Otro elemento importante del dibujo es el cuerpo ciliar, que son fibras musculares que centran la lente en el ojo y transmiten fuerzas a la lente que alteran su forma en un proceso llamado acomodación [4].

El cristalino es una lente biconvexa [5]. Cuando está desacomodado, tiene un índice de refracción de valor 1.4218 [5] y de distribución homogénea [6]. Además, el cuerpo ciliar transmite fuerzas que aplanan al cristalino [4]. Con estas características, el cristalino logra enfocar objetos lejanos. Durante la acomodación, las fibras cambian las fuerzas que ejercen, modificando las dimensiones del cristalino y generando un gradiente de índice. En la población adulta, el espesor del cristalino se incrementa en 0.34mm y el cristalino se achata [6], y el índice de refracción pasa de ser 1.42 en el centro a 1.38 en los bordes. Mediante este proceso se focalizan objetos cercanos, y por tanto cambia la potencia [4] [7]. En la figura 5 podemos ver gráficamente cómo un cambio en el espesor implica cambio en los radios de curvatura.

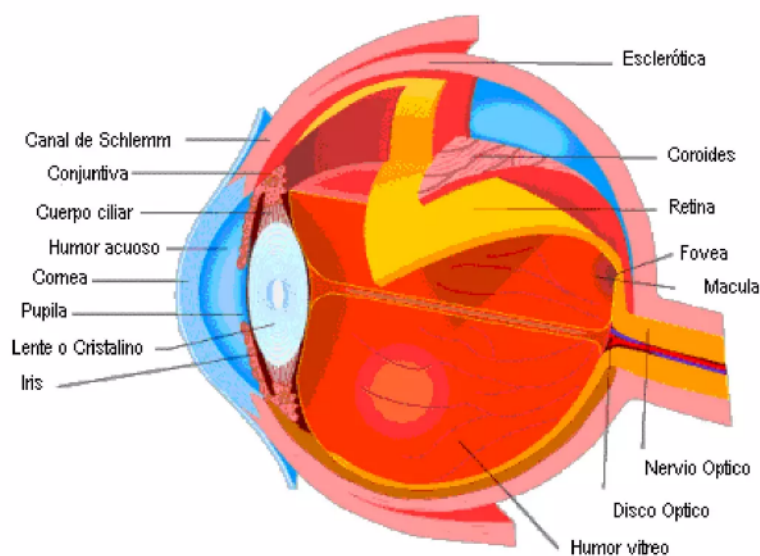


Figura 4: Corte transversal de un ojo, con los elementos indicados. Podemos observar cómo la córnea y el cristalino están alineadas en un mismo eje longitudinal al corte. Ese será nuestro eje óptico. Imagen tomada de [3]

Por todo lo descrito, concluimos que el ojo humano se trata de una cámara ópticamente hablando. Se forma una imagen real e invertida en la retina [7], que actúa como pantalla. Además, **todos los sistemas ópticos que plantearemos se compondrán de córnea, humor acuoso y cristalino**. Al salir del sistema el rayo se traslada a través del humor vítreo hasta la retina.

2.3.1. Modelo matricial

Ahora que ya hemos establecido los elementos del sistema óptico, **vamos a comprobar matemáticamente por el formalismo matricial cómo la acomodación es clave para nuestra visión cercana**. En todos los sistemas ópticos planteados consideraremos

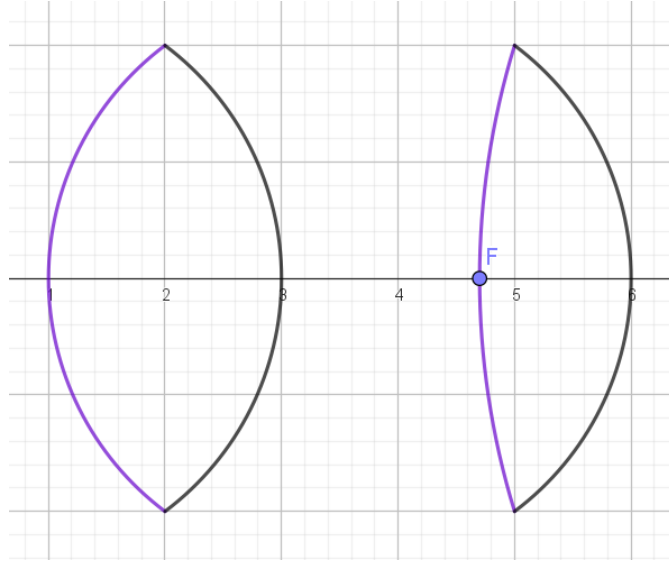


Figura 5: Cambio de curvatura de radio anterior al cambiar el espesor de lente biconvexa. Inicialmente ambas figuras eran iguales, de espesor 2 unidades. Pero el punto F se movió de 4 a 4.7

una córnea de dos capas convexas (radios de curvatura positivos según la figura 3 de la sección 2.1); traslación dentro de la córnea y a través del humor acuoso, y un cristalino como una lente biconvexa (la superficie de la lente previa es convexa y la de la lente posterior cóncava, según nuestro criterio de signos de la figura 3 de la sección 2.1). Usaremos los datos de la Tabla 1. Se utilizarán los valores de los índices de refracción para 550 nm de todos los contenidos en [5]. Además, aunque el cristalino sea en todos los planteamientos una lente biconvexa, iremos modificando su espesor (porque sabemos que cambia durante la acomodación). También iremos alterando los radios de curvatura, porque estos cambian cuando el espesor cambia. En la figura 5 podemos ver gráficamente cómo espesor y radios de curvatura están relacionados. De acuerdo a la sección 2.1, los bordes de nuestro sistema serán el centro de la córnea previa y el centro de la lente posterior del cristalino, por lo que según la figura 2 (sección 2.1) $n_1=1$ (aire) y $n_2=1.3374$ (humor vítreo).

Longitudes horizontales del sistema (en mm)	
Córnea	0.5
Humor acuoso	3
Cristalino	4
Humor vítreo	16.6
Radios de curvatura (en mm)	
Córnea previa	7.8
Córnea posterior	6.7
Lente de cristalino previa (reposo)	10
Lente de cristalino posterior (reposo)	-6
Índices de refracción	
Córnea	1.3774
Humor acuoso	1.3388
Humor vítreo	1.3374
Cristalino	1.4218

Tabla 1: Datos del sistema óptico del cristalino desacomodado. Como podemos ver, el cristalino es una lente biconvexa. Datos obtenidos de [5]

2.3.2. El cristalino como lente delgada

Empezamos con el primer modelo matricial, tratando el cristalino como lente delgada, es decir, de espesor despreciable, por simplificar al máximo los cálculos y los trazados de

rayos, en el caso de que sea una aproximación razonable.

El rayo parte del exterior del ojo. En primer lugar, el rayo se encuentra con la córnea, y sufre una refracción en su primera superficie (C_1), seguida de traslación en su interior (T_c) y de posterior refracción en la superficie posterior (C_2). Después se traslada por el humor acuoso (T_a) hasta que llega al cristalino, donde se refracta dos veces (L_c). Sustituyendo los valores de la Tabla 1 (sección 2.3.1) en la expresión (6) para el cristalino, la expresión (2) para las traslaciones y la expresión (3) para las refracciones de la córnea obtenemos:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0484 & 1 \end{pmatrix} \quad T_c = \begin{pmatrix} 1 & -0,3630 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,0058 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,0058 & 1 \end{pmatrix} \quad L_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0221 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0,8867 & -2,6085 \\ 0,0623 & 0,9444 \end{pmatrix}$$

M es la matriz total del sistema, obtenida tal cual se indica en la sección 2.1. Se ha utilizado la notación de la sección 2.2 para todas las matrices.

Calculamos la posición del plano focal imagen $s_{F'}$ y la potencia P usando la matriz total del sistema y las ecuaciones (12) y (16) de la sección 2.1. Como los datos del sistema están en mm (Tabla 1 sección 2.3.1), $s_{F'}$, f' y P también:

$s_{F'}(mm)$	$f'(mm)$	$P(mm^{-1})$
19,0	21,5	0,047

Los rayos deben converger en la retina para que el cerebro pueda captar imágenes, por lo que teóricamente el plano focal imagen debe coincidir con el espesor del humor vítreo, esto es, 16.6mm (Tabla 1 sección 2.3.1).

Veamos el error relativo E_{rel} :

$$E_{abs} = |\text{valor teórico} - \text{resultado}| = |16,6 \text{ mm} - 19,0 \text{ mm}| = 2,4 \text{ mm} \quad (20)$$

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor teórico}} = \frac{2,4}{16,6} = 0,145 \xrightarrow{\cdot 100} 14,5 \% \quad (21)$$

donde E_{abs} significa error absoluto, y la flecha simboliza que se multiplica por 100 para expresar el error en porcentaje. El resultado es un error relativo que no podemos pasar por alto, concluimos que **el cristalino tiene espesor no despreciable**.

Es importante recalcar que realmente el cristalino no es una lente sumergida en un mismo medio, porque el humor acuoso y el humor vítreo tienen índices de refracción diferentes (el medio a la izquierda de la lente anterior es distinto del medio a la derecha de la lente posterior). No obstante, podemos observar que estos dos índices difieren a partir de la tercera cifra decimal, y podemos calcular el error cometido al considerar que son iguales. Usando las fórmulas (5) y (6), vemos que cambia uno de los términos. Sin realizar la aproximación $n_a = n_b = n$ obtenemos:

$$n_L \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n_b}{R_2} - \frac{n_a}{R_1} = 1,4218 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1,3374}{6} - \frac{1,3388}{10} = 0,0224$$

El resultado con la aproximación es 0.0221, como podemos ver en L_c . Los errores absoluto E_{abs} y relativo E_{res} nos salen, respectivamente:

$$E_{abs} = |\text{valor teórico} - \text{resultado}| = 0,0224 - 0,0221 = 0,0003 \quad (22)$$

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor teórico}} = \frac{0,0003}{0,0224} = 0,013 \xrightarrow{\cdot 100} 1,3 \% \quad (23)$$

Esta aproximación solo se usará en este apartado, en los siguientes se considerarán todas las cifras decimales de los índices de refracción de la Tabla 1 de la sección 2.3.1 para mayor precisión. El objetivo de este apartado es tan sólo demostrar que el grosor de la lente es importante.

2.3.3. Visión humana para objetos lejanos: cristalino desacomodado

Ahora que ya sabemos que el cristalino es una lente gruesa (de espesor no despreciable), vamos a estudiar cómo el ojo humano forma las imágenes de los objetos lejanos. De nuevo vamos a usar los datos de la Tabla 1 de la sección 2.3.1. El sistema ahora está formado por una doble córnea, el humor acuoso, y un cristalino biconvexo grueso (de espesor no despreciable), por lo que hay traslación dentro del cristalino. El sistema de esta sección se muestra en la figura 6. Con respecto a la sección 2.3.2, la matriz del cristalino L_c se transforma en L y por consiguiente se modifica la matriz total, quedando el resto de matrices intactas. El cambio se debe a que ahora en el cristalino tienen lugar una refracción en la superficie anterior R_1 , una traslación en su interior T y otra refracción en la superficie posterior R_2 . Hemos usado la notación de la sección 2.2. La matriz total M , de acuerdo a la sección 2.1, se calcula como $M = R_2 * T * R_1 * T_a * C_2 * T_c * C_1 = L * T_a * C_2 * T_c * C_1$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0083 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -2,813 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,014 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0,9766 & -2,8133 \\ 0,0220 & 0,9606 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0,7458 & -5,3667 \\ 0,0605 & 0,9052 \end{pmatrix}$$

A continuación calculamos la posición de los puntos focales (s_F y $s_{F'}$) y la de los puntos principales (d_H y $d_{H'}$), usando las ecuaciones 13, 12, 15 y 14 de la sección 2.1. También calculamos la potencia P tal cual se indica en la ecuación 16 de la sección 2.1.

$s_{F'}(mm)$	$s_F(mm)$	$d_H(mm)$	$d_{H'}(mm)$	$f'(mm)$	$P(mm^{-1})$
16,5	-15,0	1,6	-5,6	22,1	0,045

Con esta tabla podemos realizar un trazado de rayos para visualizar cómo enfocan los rayos en la retina. El trazado está en la figura 8. Veamos de nuevo el error relativo E_{rel} de $s_{F'}$ (una vez más debe coincidir con 16.6 mm para una visión nítida):

$$E_{abs} = |\text{valor teórico} - \text{resultado}| = |16,6 \text{ mm} - 16,5 \text{ mm}| = 0,1 \text{ mm} \quad (24)$$

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor teórico}} = \frac{0,1}{16,6} = 0,0060 \xrightarrow{\cdot 100} 0,60 \% \quad (25)$$

Es un error muy bajo. Si en la fórmula de puntos conjugados 11 de la sección 2.1 sustituimos los elementos de la matriz total obtenida, los índices de refracción del aire y del humor vítreo, e igualamos d_2 al espesor del humor vítreo (16.6 mm), obtenemos la distancia mínima a la que un objeto puede estar para que la imagen se forme en la retina, y por tanto veamos con nitidez. Esta distancia es conocida como punto próximo:

$$d_1 = \frac{n_1 \left(\frac{D}{n_2} - \frac{B}{d_2} \right)}{\frac{A}{d_2} - \frac{C}{n_2}} = \frac{1 \left(\frac{0,9052}{1,3374} - \frac{-5,3667}{16,6} \right)}{\frac{0,7458}{16,6} - \frac{0,0605}{1,3374}} = -3233$$

En este sistema, el punto próximo es 3.23 metros a la izquierda de la córnea previa, lo cual a la escala del ojo es distancia lejana. Por lo tanto, concluimos que con este sistema óptico **las imágenes de objetos en el infinito se forman en la retina cuando el cristalino está desacomodado.**

2.3.4. Visión humana para objetos cercanos: cristalino acomodado

Ya hemos diseñado un sistema óptico para la visión de objetos lejanos. Veamos ahora los objetos cercanos. Los datos de la Tabla 1 de la sección 2.3.1 usados en las secciones anteriores 2.3.2 y 2.3.3 son solo para visión lejana (los datos se obtienen de [5], donde el objeto está a 6 m). Sabemos por la sección 2.3 que, para la visión cercana, va a aumentar el espesor del cristalino en 0.34mm y los radios de curvatura cambiarán (figura 5 de sección 2.3.1). Sabemos que a mayor espesor, menor excentricidad y por tanto menor radio.

Nuestro sistema óptico tiene los mismos elementos que el sistema diseñado para la visión de objetos lejanos (sección 2.3.3), con la diferencia de que el cristalino ahora tiene 4.3 mm de espesor [6], y unos radios de curvatura que suponemos de -5.7mm y de 9.7mm. Este nuevo sistema se ilustra en la figura 7. Sustituimos estos nuevos datos en T , R_2 y R_1 . Las matrices C_1 , T_c , C_2 y T_a permanecen igual que en la sección 2.3.2. La notación es la de la sección 2.2. La matriz total se calcula de igual manera que en 2.3.3:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0086 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -3,0243 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0148 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0,9741 & -3,0243 \\ 0,0230 & 0,9552 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0,7346 & -5,5716 \\ 0,0612 & 0,8972 \end{pmatrix}$$

Calculamos de nuevo los elementos cardinales definidos en la sección 2.1 para poder hacer un trazado de rayos (figura 9).

$s_{F'}(mm)$	$s_F(mm)$	$d_H(mm)$	$d_{H'}(mm)$	$f'(mm)$	$P(mm^{-1})$
16,1	-14,7	1,7	-5,8	21,9	0,046

La potencia ha aumentado con respecto a la visión para objetos lejanos (sección 2.3.3), y el punto próximo obtenido usando la ecuación (11) y procediendo igual que en la sección anterior es:

$$d_1 = \frac{n_1(\frac{D}{n_2} - \frac{B}{d_2})}{\frac{A}{d_2} - \frac{C}{n_2}} = \frac{1(\frac{0,8972}{1,3374} - \frac{-5,5716}{16,6})}{\frac{0,7346}{16,6} - \frac{0,0612}{1,3374}} = -66,8cm$$

Ahora está a 66.8cm a la izquierda de la superficie previa de la córnea. No obstante, aunque podemos concluir que **el aumento de espesor contribuye a focalizar objetos cercanos, no es el único mecanismo**, porque el punto próximo de una persona adulta ronda los 25cm (se invita al lector a comprobarlo). El cambio en la distribución del índice de refracción debe jugar un papel importante, **el cristalino se comporta como una lente de gradiente de índice**. Sin embargo, esto se escapa del formalismo matricial y por tanto de este trabajo.

Según [6], en la dirección axial del cristalino (que es la que estamos estudiando en nuestros sistemas como el espesor), el índice de refracción apenas varía en el centro mientras que en la periferia tiene una tendencia decreciente, esto es, tiene un gradiente de índice como

comentamos en la sección 2.3. Esto puede dar lugar a reflexión total, lo cual favorece la focalización de los rayos.

Calculemos el error relativo de la posición del plano focal imagen respecto a la posición real de la retina:

$$E_{abs} = |\text{valor teórico} - \text{resultado}| = |16,6 \text{ mm} - 16,1 \text{ mm}| = 0,5 \text{ mm} \quad (26)$$

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor teórico}} = \frac{0,5}{16,6} = 0,03 \xrightarrow{\cdot 100} 3 \% \quad (27)$$

El error es admisible, aunque es mayor respecto al sistema para objetos lejanos de la sección 2.3.3. Esto puede deberse a que, como ya hemos dicho, en este caso el cristalino actúa como lente de gradiente de índice, lo cual altera la trayectoria de los rayos, y en esta sección el modelo matricial se ha hecho considerando una distribución de índice de refracción del cristalino homogénea de valor 1.4218.

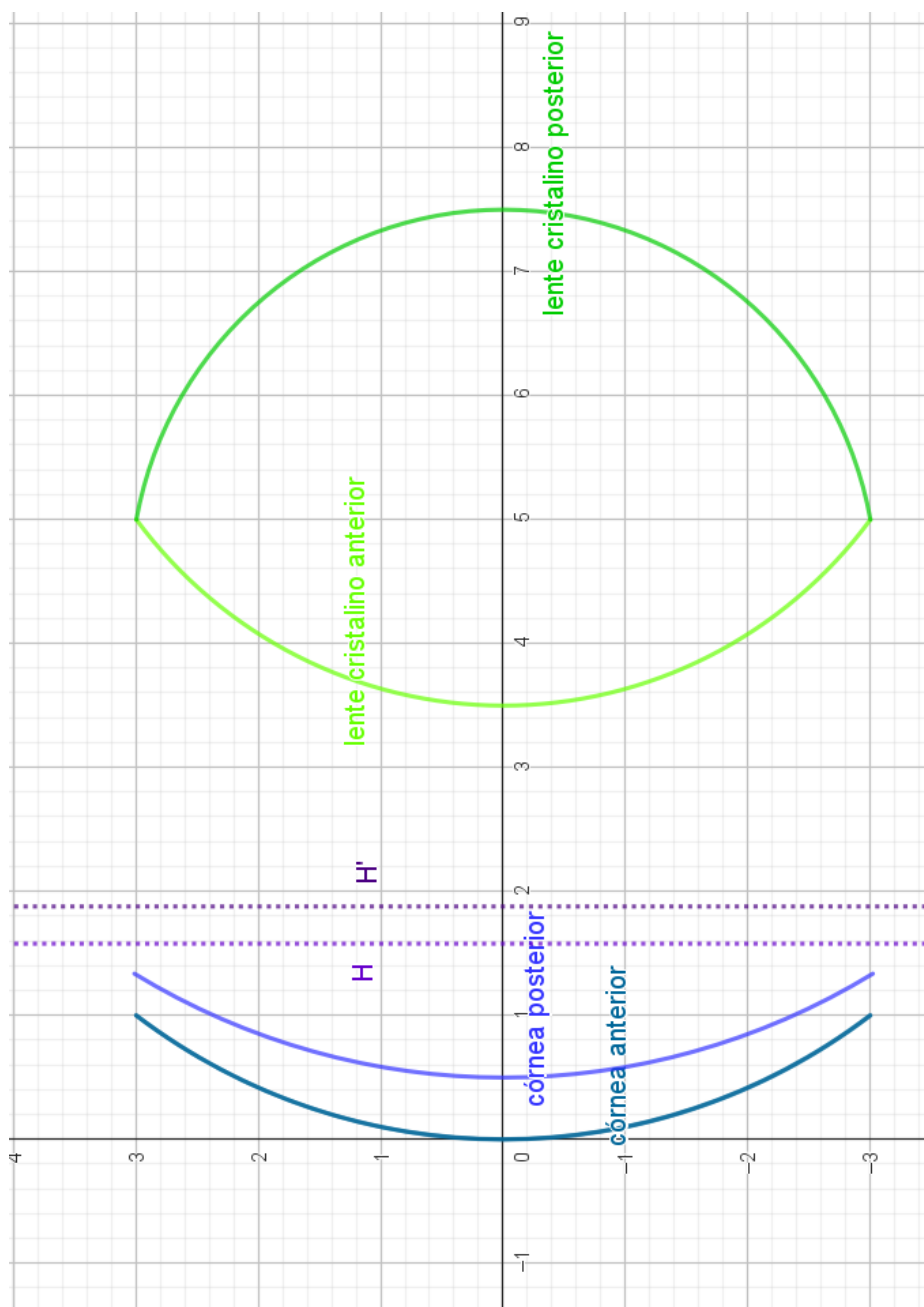


Figura 6: Sistema del ojo humano desacomodado junto con sus planos principales. Los ejes están en mm. El sistema ocupa el espacio comprendido en el eje horizontal entre la córnea previa (milímetro 0) y la lente posterior del cristalino (a 7.5 mm). El espacio entre la córnea posterior y la lente del cristalino anterior es el humor acuoso. Se aprecia el espesor de la córnea (0.5 mm) y el del cristalino (4 mm). El plano principal imagen en este diagrama se ha llamado H' y el plano principal objeto H (se han llamado igual que los puntos cardinales que contienen. Este diagrama se ha realizado con Geogebra.

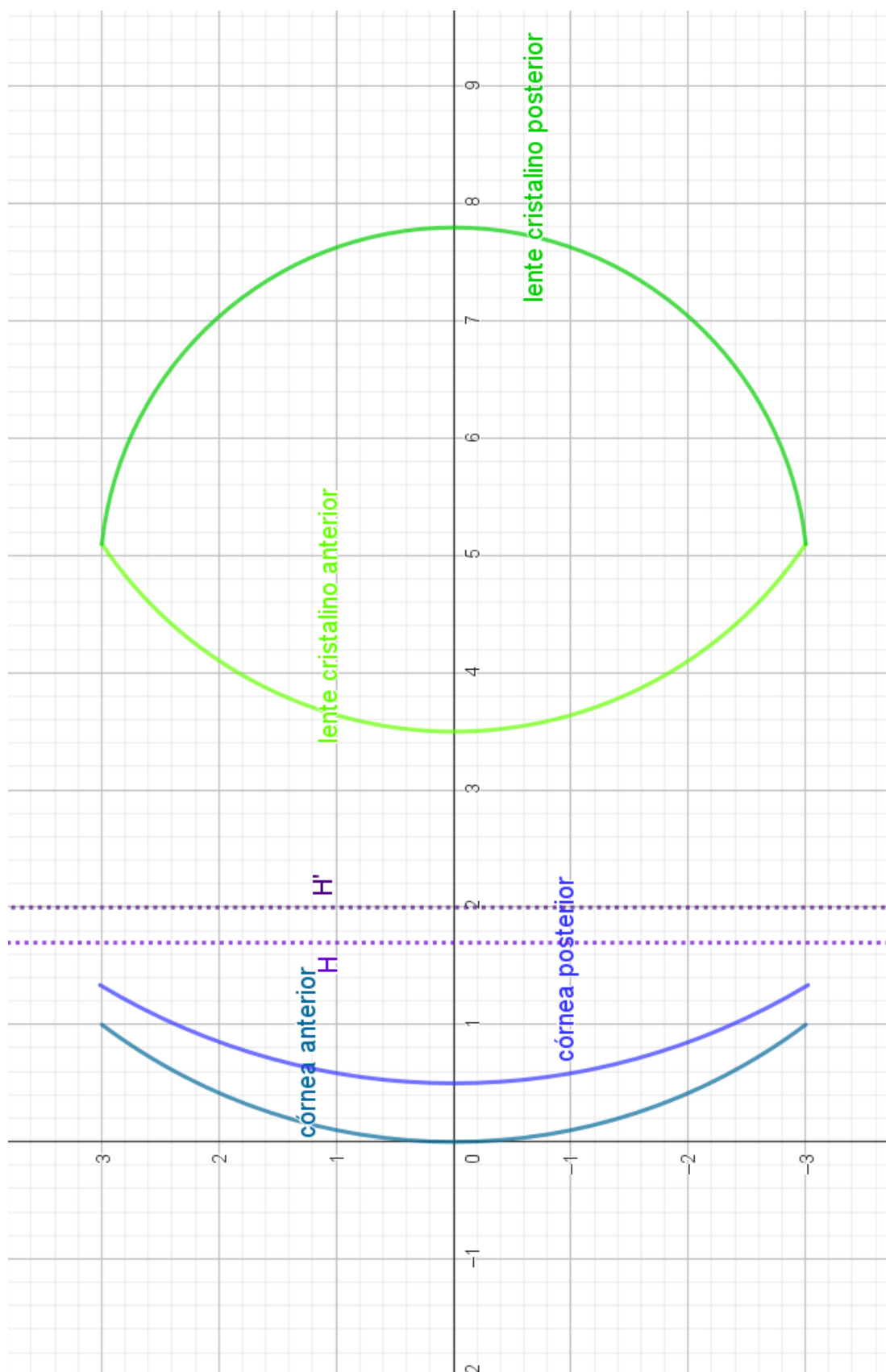


Figura 7: Sistema del ojo humano acomodado junto con sus planos principales. Los ejes están en mm. El sistema en el eje horizontal ocupa el espacio comprendido entre la córnea previa (0 mm) y la lente posterior del cristalino (a 7.8 mm). El espacio entre la córnea posterior y la lente del cristalino anterior es el humor acuoso. Se aprecia el espesor de la córnea (0.5 mm) y el del cristalino (4.3 mm). El plano principal imagen en este diagrama se marca por H' y el plano principal objeto se marca por H (se han llamado igual que los puntos cardinales que contienen). Figura realizada con Geogebra

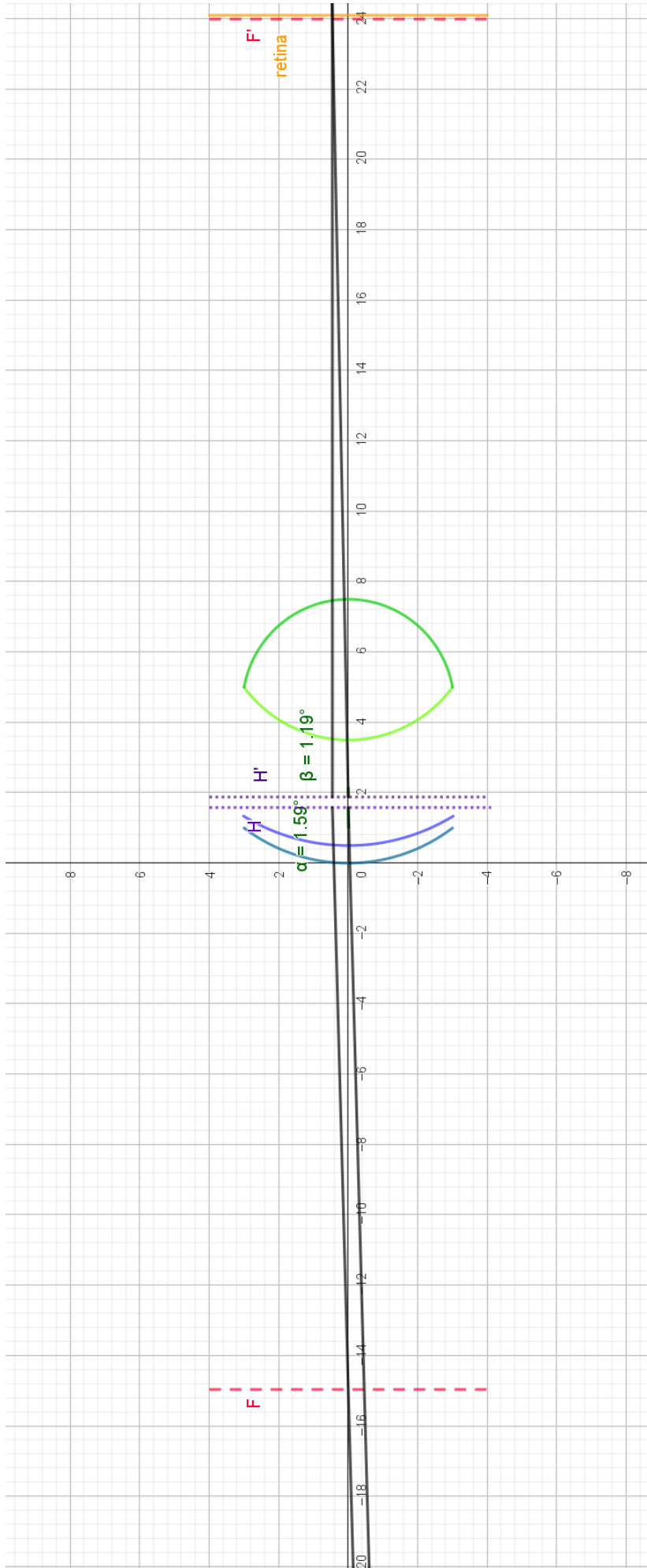


Figura 8: Trazado de rayos para el ojo desacomodado. Los ejes están en mm. El sistema es el mismo que en la figura 6. Las letras F y F' indican los planos focales objeto e imagen, respectivamente, y sus cortes con el eje óptico son los puntos focales objeto e imagen. H y H' se definen igual que en la figura 6. Se ha trazado el rayo que pasa por el punto focal objeto (y sale paralelo al eje desde H') y otro que cruza diagonalmente al plano principal objeto H para que sean paralelos entre ellos (porque el objeto está en el infinito). α es el ángulo de incidencia respecto al punto principal objeto, y β el ángulo refractado que sale del punto principal imagen usando la ecuación 18

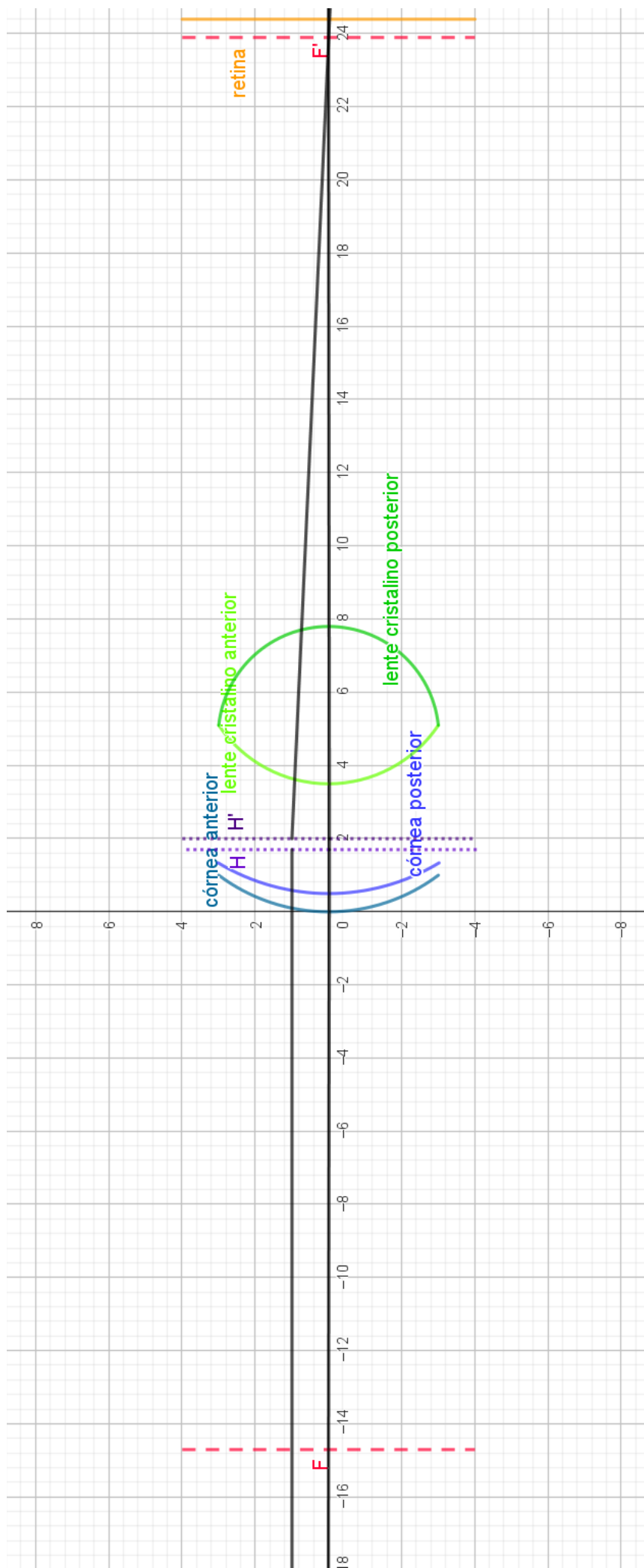


Figura 9: Trazado de rayos para el ojo acomodado. Los ejes están en mm. El sistema es el mismo que el de la figura 7. Las letras F y F' indican los planos focales objeto e imagen, respectivamente, y sus cortes con el eje óptico son los puntos focales objeto e imagen. H y H' se definen igual que en la figura 7. Se ha trazado el rayo que parte del objeto (que está a 668 mm a la izquierda de la córnea previa) y cruza el punto focal objeto, saliendo paralelo al eje desde el plano H'; y el rayo que parte de objeto con dirección paralela al eje y posteriormente sale de H' cruzando el punto focal imagen. Podemos ver cómo el plano focal imagen no coincide exactamente con la retina. Esta figura se ha creado con Geogebra.

2.3.5. Correcciones en el ojo humano

Para finalizar, hablaremos un poco de las estrategias que usa el ojo humano para evitar la aberración esférica, un problema habitual que dificulta la formación de imágenes nítidas.

La aberración esférica es un fenómeno por el cual los rayos se focalizan cada vez más a medida que su distancia respecto del eje óptico aumenta, porque ven alterada su trayectoria por ángulos grandes [2]. Este fenómeno se representa gráficamente en la figura 10. Tiene como consecuencia que algunos rayos converjan en puntos distintos en el eje óptico al punto focal de la aproximación paraxial, creando imágenes borrosas.

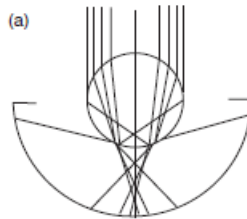


Figura 10: Aberración esférica en una lente esférica de un pez con índice de refracción homogéneo. Tomada de [2]. Podemos observar cómo hay varios puntos en los que algunos rayos convergen, y que en la retina se forma un círculo borroso en vez de una imagen nítida [2]

Una cura para la aberración esférica de la córnea es **hacer la superficie asférica**, con las regiones más externas teniendo un radio mayor (más planas) que las regiones más cercanas al eje. De hecho, en el ojo humano **la periferia tiene el doble de radio de curvatura que la región central**. [2]. La forma general que produce una imagen puntual tiene un perfil elíptico [2], y en este trabajo, hemos aproximado la córnea a una doble superficie elíptica.

La forma asférica tiene como consecuencia que sólo existe un único eje a lo largo del cual la aberración es corregida, y es por eso que existe **la región de la fovea**, de la cual hablaremos con más detalle a en la sección 2.4. La fovea es una pequeña región en la retina que se ubica un poco por encima del nervio óptico, como podemos ver en la figura 4.

Con respecto a cómo el cristalino corrige la aberración esférica, encontré en la bibliografía que lo hace de la misma forma que las lentes de los peces [2]. Debemos entender pues cómo son las lentes de los peces.

Los peces tienen una **lente completamente esférica**. Las lentes esféricas provocan mucha aberración esférica [2]. Este fenómeno se explica por las expresiones (3) y (7) de la sección 2.1. Una lente esférica tiene un R pequeño, por lo que el rayo de entrada verá alterada bastante su trayectoria. La figura 10 es una representación de la aberración esférica en una lente esférica de índice homogéneo. ¿Cómo corrigen la aberración los peces?

Las lentes de los peces no tienen un índice de refracción homogéneo, tienen un gradiente de índice que va desde 1.52 en el centro del ojo a 1.38 en la corteza, como podemos ver en la figura 11.

Ya habíamos hablado de gradiente de índice en humanos en la sección 2.3.4, porque era un mecanismo que disminuía el punto próximo, aunque la formación de imagen pudiera explicarse por formalismo matricial. Resulta llamativo que pese a ser el sistema óptico

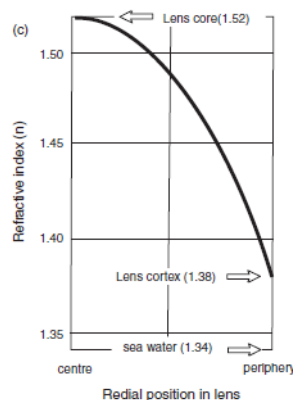


Figura 11: Gradiente de índice de refracción de la lente de un pez. Se observa que el mayor índice de refracción (1.52) lo tiene el centro (core), y va decreciendo hasta 1.38 hacia la periferia (cortex). Tomada de [2]

humano tan diferente al del pez tengan esa característica en común. **Es una prueba de que los peces son nuestros ancestros** [2]. En la sección 2.6 hablaremos de otro sistema visual acuático interesante.

2.4. Receptores en humanos. Tricromatismo

Ahora que ya conocemos cómo el ojo enfoca los rayos de luz para que lleguen a la retina, veamos qué sucede en esta capa. La retina está conectada al nervio óptico, que manda la información obtenida por los receptores al cerebro en forma de señal eléctrica [7]. El espectro visible humano va de 400 a 700 nm; sin embargo, la radiación que va desde 375 hasta 770 nm puede estimular el ojo. La retina tiene dos tipos de receptores [8]:

- **Bastones:** sensores dominantes para bajos niveles de irradiancia, esto es, visión escotópica o nocturna [8] (la irradiancia es la potencia radiante por unidad de superficie, sus unidades son $\frac{W}{m^2}$ [8]). Tienen un componente químico llamado rodopsina que, al estar expuesto a luz, se isomeriza y, en consecuencia, se rompe. Con la rotura se crea un nuevo compuesto que emite impulsos eléctricos [3]. Los bastones se distribuyen a lo largo de toda la retina, excepto en la fovea, donde escasean [9]. La fovea se representa en la figura 4 de la sección 2.3.
- **Conos:** sensores dominantes para altos niveles de irradiancia, es decir, visión fotópica o diurna [8]. Tienen pigmentos de cono, que son similares a la rodopsina [3]. La mayor proporción de conos se acumula en la región de la retina llamada fovea (ver figura 4) [9].

Para la visión mesópica (niveles intermedios de irradiancia entre los diurnos y los nocturnos) contribuyen tanto conos como bastones [8].

Hay tres tipos de conos: Largos (L), Medianos (M) y Cortos (S). El cerebro distingue colores por comparación de señales de los tres tipos de conos. Si dos luces producen la misma respuesta en las 3 clases de conos, el sistema visual humano no será capaz de distinguirlas.

Para entender la absorción de los receptores debemos trabajar con funciones de eficiencia espectral y con flujo luminoso. El flujo luminoso ϕ_v es la cantidad derivada de la potencia radiante espectral (irradiancia) que se obtiene como resultado de evaluar la radiación

según sus efectos sobre un observador estándar de acuerdo al CIE (Commission Internationale de l'Éclairage, en español Comisión Intrenacional de Iluminación). Tiene unidades de lumen (lm), en lugar de W [8].

$$\phi_v = K_m \int_{\lambda_o}^{\lambda_f} \phi_\lambda V(\lambda) d\lambda$$

donde $V(\lambda)$ es la función de eficiencia espectral, K_m es la eficacia luminosa y ϕ_λ la potencia radiante espectral ($\frac{W}{m}$). Esta definición es válida para la visión fotópica y la escotópica, teniendo en cuenta que $V(\lambda)$ y K_m son distintas para cada una. **A la función de eficiencia espectral también se la conoce como sensibilidad.** En la figura 12 se muestra $V(\lambda)$ para cada tipo de visión en función de la longitud de onda. Los datos usados para su representación se pueden consultar en la Tabla 4 en la sección Anexo. Además se representa la función de eficiencia visual $V(\lambda)$ frente a la longitud de onda para cada tipo de cono en la figura 13, usando los datos de la tabla 3 de la sección Anexo.

La eficacia luminosa se define en torno a su máximo, el cual es diferente para cada tipo de visión:

$$K_m = 683 \frac{V(\lambda)}{V(555)} \frac{lm}{W}$$

La longitud de onda para la cual $V(\lambda)$ es máxima para la visión fotópica es 555 nm, mientras que para la visión escotópica es 507 nm (podemos ver en la figura 12 cómo los picos de las gráficas están en estos dos valores). Por lo tanto, para la visión fotópica, $K_m = 683 \frac{lm}{W}$ y para la escotópica es $K_m = 1699 \frac{lm}{W}$ [8]

Tenemos una gráfica de la sensibilidad fotópica global y otra de la sensibilidad de cada cono. Si sumamos los valores de $V(\lambda)$ de las gráficas de la figura 13, ¿obtendremos la gráfica fotópica de la figura 12? Pues no. En la Tabla 2, vemos que los valores experimentales de la sensibilidad en la visión fotópica difieren en órdenes de magnitud con la suma total de la sensibilidad de cada cono, e incluso en algunos casos suman más de uno, rompiendo la normalización. Es decir: **cada tipo de cono no contribuye por igual a la visión fotópica.** Para resolver esto, he realizado una ponderación multiplicando los valores de $V(\lambda)$ de la figura 13 por una constante entre 0 y 1 distinta para cada tipo de cono. Probé varias constantes y sumé los valores de sensibilidad ponderados, con el fin de obtener una gráfica para la visión fotópica similar a la de la figura 12. Probé por ensayo y error hasta que obtuve la figura 14. Más detalles del proceso de ponderación se explican en la sección 3. La conclusión final obtenida fue que **los conos S contribuyen un 1 % en la visión fotópica, los L contribuyen un 64 % y los M contribuyen un 35 %.**

Comentaremos un poco el error de esta ponderación. Podemos ver en la Tabla 2 que, para las longitudes de onda medias, el error es del orden de las centésimas, cuando en ese rango los valores de la sensibilidad son del orden de la décima, por lo que es un buen ajuste. Los peores resultados se obtienen para las longitudes de onda cortas, esto es, de 400 a 480 nm, ya que los valores obtenidos por la ponderación superan a los experimentales; y además el orden del error es del mismo o superior orden de magnitud de estos datos experimentales. Sin embargo, en este rango de longitudes de onda la eficiencia espectral es del orden de las centésimas como máximo, por lo que comparado con las longitudes centrales es como si fuera nula.

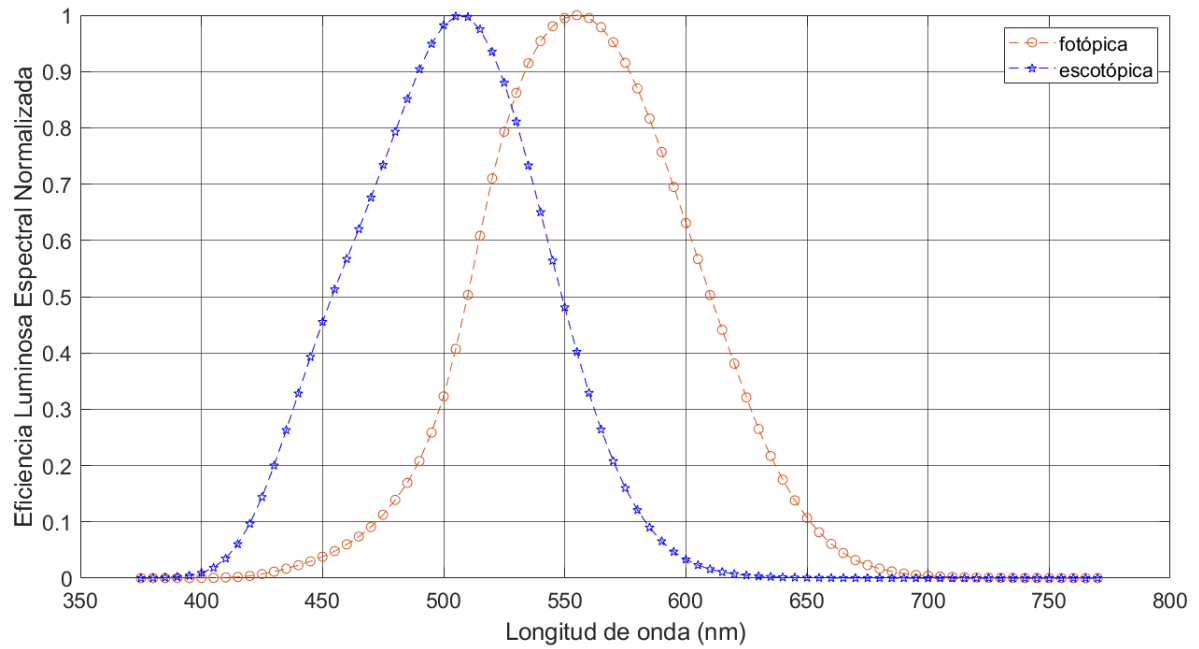


Figura 12: Función de eficiencia espectral para la visión fotópica (línea amarilla) y escotópica (línea azul). Está normalizada a 555 nm para la fotópica y a 507 nm para la escotópica. Los datos se han tomado de la Tabla 4. Cabe resaltar que mientras la visión fotópica abarca todo el espectro visible, es decir, $V(\lambda)$ se hace cero antes de 400 nm y a partir de 700 nm, la visión escotópica no cubre todo ese rango. De ahí el dicho popular que de noche todos los gatos son pardos [9]. Esta figura se ha creado con MATLAB.

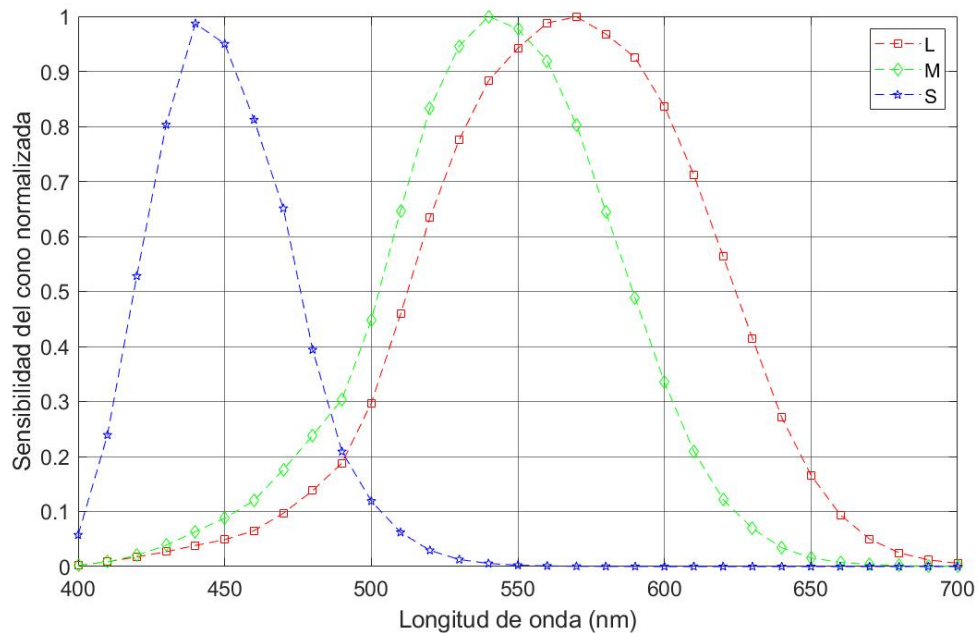


Figura 13: Función de eficiencia espectral (sensibilidad) de cada tipo de cono en función de la longitud de onda, usando los datos de la Tabla 3. La línea azul representa los conos azules o de tipo S, la línea verde representa los conos verdes o de tipo M, y la línea roja representa los conos rojos o de tipo L. Los picos de absorción de los conos humanos, tal como se indica en la Tabla 3 de Anexo están en 440 nm para los S, 540 nm para los M y 570 nm para los L. Esta figura se ha creado con MATLAB.

Longitud de onda(nm)	Suma total	Suma ponderada	Experimental	Error absoluto
400	6,16E-02	2,68E-03	4,0000E-04	-0,0023
410	2,56E-01	1,10E-02	1,2100E-03	-0,0097
420	5,66E-01	2,37E-02	4,0000E-03	-0,0197
430	8,69E-01	3,88E-02	1,1600E-02	-0,0272
440	1,09E+00	5,67E-02	2,3000E-02	-0,0337
450	1,09E+00	7,15E-02	3,8000E-02	-0,0335
460	9,97E-01	9,18E-02	6,0000E-02	-0,0318
470	9,24E-01	1,30E-01	9,0980E-02	-0,0391
480	7,70E-01	1,76E-01	1,3902E-01	-0,0365
490	7,01E-01	2,29E-01	2,0802E-01	-0,0208
500	8,64E-01	3,48E-01	3,2300E-01	-0,0251
510	1,17E+00	5,21E-01	5,0300E-01	-0,0178
520	1,50E+00	6,98E-01	7,1000E-01	0,0124
530	1,73E+00	8,28E-01	8,6200E-01	0,0341
540	1,89E+00	9,15E-01	9,5400E-01	0,0388
550	1,92E+00	9,45E-01	9,9495E-01	0,0501
560	1,91E+00	9,54E-01	9,9500E-01	0,0410
570	1,80E+00	9,20E-01	9,5200E-01	0,0316
580	1,61E+00	8,45E-01	8,7000E-01	0,0247
590	1,41E+00	7,63E-01	7,5700E-01	-0,0058
600	1,17E+00	6,52E-01	6,3100E-01	-0,0213
610	9,22E-01	5,29E-01	5,0300E-01	-0,0262
620	6,86E-01	4,04E-01	3,8100E-01	-0,0227
630	4,84E-01	2,90E-01	2,6500E-01	-0,0249
640	3,05E-01	1,85E-01	1,7500E-01	-0,0104
650	1,82E-01	1,12E-01	1,0700E-01	-0,0047
660	1,02E-01	6,29E-02	6,1000E-02	-0,0019
670	5,36E-02	3,32E-02	3,2000E-02	-0,0012
680	2,69E-02	1,67E-02	1,7000E-02	0,0003
690	1,30E-02	8,10E-03	8,2100E-03	0,0001
700	6,27E-03	3,90E-03	4,1000E-03	0,0002

Tabla 2. Tabla comparativa de la sensibilidad de la visión fotópica. En la primera columna, se han sumado los datos de la Tabla 3 de Anexo. En la segunda columna, se ha realizado una suma ponderada de los mismos datos: 1 % para los conos S, 64 % para los L y 35 % para los M. La tercera columna son los datos de la Tabla 4 de Anexo para la visión fotópica. Para las primeras longitudes de onda, podemos ver que esta ponderación excede los resultados en un orden de magnitud. Pero para el resto de longitudes de onda la suma ponderada difiere en un orden de magnitud menor respecto a los datos experimentales

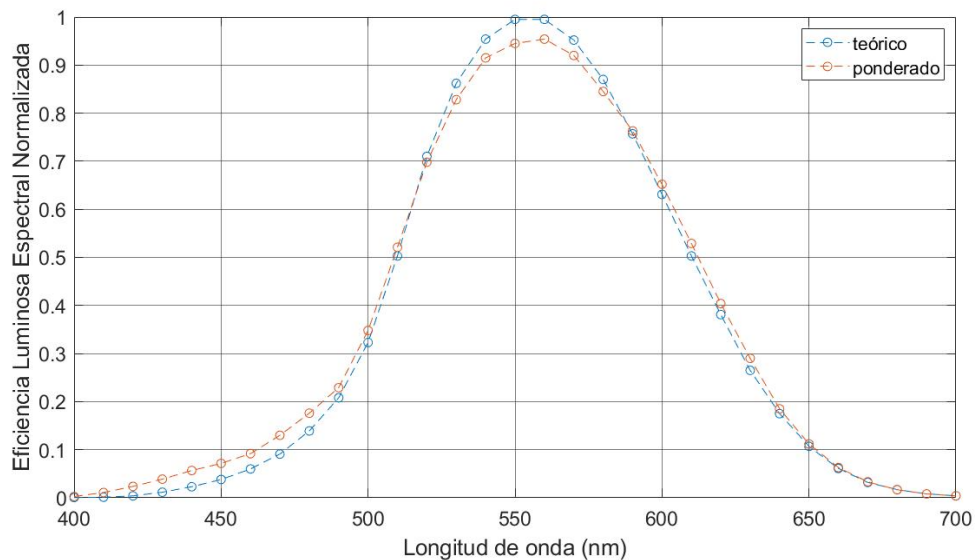


Figura 14: Representación de la función de eficiencia espectral de los datos experimentales obtenidos de la tabla 4 (línea azul) y de la ponderación calculada para cada tipo de cono a partir de la figura 13 (línea amarilla), para la visión fotópica. Las mayores desviaciones se producen para las longitudes de onda cortas y para las centrales (las cercanas a 555 nm). Esta figura se ha realizado con MATLAB

Para finalizar esta sección, hablaremos de anomalías. Hasta ahora hemos dicho que los seres humanos somos tricrómatas, esto es, tenemos tres tipos de conos con los que cubrimos todas las longitudes de onda del espectro visible. Sin embargo, aproximadamente el 10 % de los hombres son dicrómatas, es decir, sólo tienen funcionales dos tipos de cono. A esta condición comúnmente se la llama daltonismo [9]. Cuando fallan los conos verdes o conos M (condición llamada deuteranopia), en su lugar responden los conos rojos (L), y viceversa, en cuyo caso la condición se llama protanopia [9]. Dicho de otro modo, los conos verdes (longitudes de onda medias) van a responder a longitudes de onda largas, y los rojos (longitudes de onda largas) a longitudes de onda medias [9]. En la figura 13 podemos observar cómo las sensibilidades de los conos M y L se solapan, abarcando un rango de longitudes de onda similar. Por esta razón, estas personas confunden el verde con el rojo, y tienen una visión muy parecida independientemente de qué cono de los dos les falle. Podemos apreciar esto en la figura 15. El mal funcionamiento de los conos azules o conos S (tritanopia) es mucho menos común [9]. Debemos aclarar que hay varios grados de daltonismo, el tipo de cono puede funcionar peor o no funcionar en absoluto. También hay personas acrómatas, es decir, no tienen ningún tipo de cono funcional y por tanto no ven ningún color. Su visión es a blanco y negro, y además son muy fotosensibles [9]. Por último, a día de hoy se sabe que al menos el 12 % de mujeres son tetracrómatas, es decir, tienen un cuarto cono [9]. Este cono es ligeramente diferente al L o al M, esto es, aparecería una curva extra entre la curva roja y la verde en la figura 13. Estas mujeres pueden distinguir 100 millones de colores, mientras que las personas tricrómatas distinguimos un millón. Pero todos estos colores siguen dentro del rango del espectro visible, ellas sólo distinguen más matices entre colores [9]. La artista tetracrómatra Concetta Antico trata de plasmar esto en sus obras, como podemos ver en la figura 16.



Figura 15: Visión tricrómata (imagen superior izquierda) comparada con los tres tipos de daltonismo. La imagen inferior izquierda representa la visión deuteranope, es decir, ausencia o deficiencia de conos verdes (M). En esta imagen concreta, la persona sigue distinguiendo el rojo del verde, pero no es una diferencia de tonalidad tan marcada como la de la visión tricrómata. La imagen superior derecha representa la protanopia o deficiencia para el cono rojo (L). Estas personas tienen más dificultades aún para distinguir el rojo del verde. Por último, la imagen de las tonalidades rojas y azuladas es la visión tritanope. Estas imágenes se han tomado de [9]. Si el lector observa dos imágenes como iguales, probablemente sea daltónico.



Figura 16: Peacocks On Parade. Cuadro de la artista Concetta Antico. El pavo real de la derecha representa la visión tetracrómata. Imagen tomada de la web de Concetta Antico. <https://concettaantico.com/2014/04/30/see-the-paintings-from-earthly-delights/>

2.5. Vertebrados terrestres y semiacuáticos

Una vez caracterizados los humanos, vamos a tratar a continuación la visión en animales. Empezaremos por los ojos más parecidos a los nuestros, y terminaremos por los más distintos. Teniendo en cuenta que la visión es un sentido que usan los animales para relacionarse con el entorno, averiguemos cómo el sistema visual está diseñado específicamente para funcionar en el medio en el que viven.

Los ancestros de los vertebrados terrestres eran animales acuáticos. Su córnea en el agua no era más que una membrana protectora que no existía desde el punto de vista óptico, ya que a ambos lados tenía un fluido de prácticamente el mismo índice de refracción. La lente de los peces tiene más potencia que los mamíferos, aves y reptiles. Las criaturas terrestres dividen la potencia óptica entre la lente y la córnea, lo cual tiene la ventaja de que las aberraciones provocadas por varias superficies débilmente curvadas habitualmente son menores que las de una única superficie con más curvatura [2].

Todos los vertebrados terrestres tienen en común una cámara hemisférica en la parte trasera, una lente biconvexa y una córnea. Los mayores cambios se dan en el tamaño general del ojo, y el tamaño relativo de la lente respecto al ojo. Los vertebrados semiacuáticos tienen además otras particularidades, de las cuales hablaremos más adelante. Estos cambios se deben al estilo de vida [2]. En la figura 17 se ilustra la estructura y el tamaño relativo de los elementos del ojo de varios vertebrados terrestres. Los dibujos no están a escala, pero se aprecia que las lentes de mayor tamaño (respecto al tamaño global del ojo) las tienen los animales nocturnos, y las más pequeñas los diurnos.

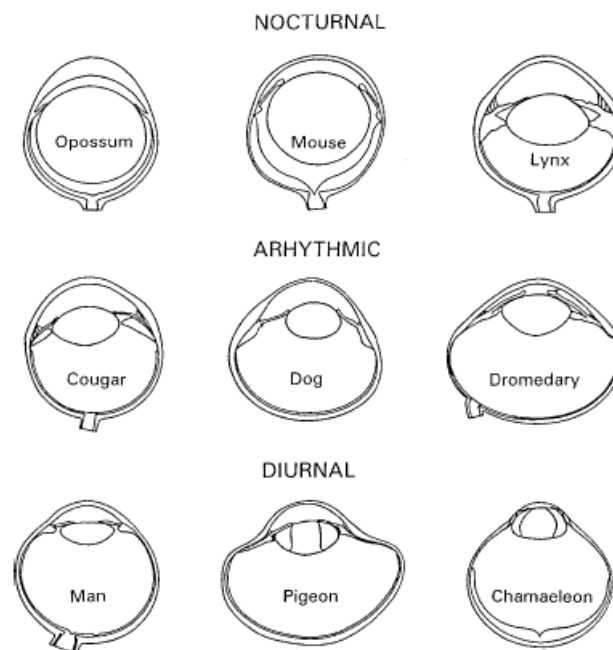


Figura 17: Variaciones en la estructura de varios animales de diferentes estilos de vida (los dibujos no están a la misma escala). De izquierda a derecha y de arriba a abajo tenemos un marsupial, un ratón, un lince, un puma, un perro, un dromedario, un humano, una paloma y un camaleón. Los tres primeros son nocturnos, los tres siguientes arrítmicos (ni nocturnos ni diurnos) y los últimos son diurnos. Las lentes de mayor tamaño relativo respecto al tamaño global del ojo los tienen los animales nocturnos, las de menor tamaño relativo los diurnos y los arrítmicos tienen tamaños relativos intermedios entre nocturnos y diurnos. La estructura en todos los casos consiste en córnea, cristalino y retina hemisférica en la parte trasera. Tomada de [2]

Por todo lo descrito en esta sección, para plantear un sistema óptico para los **animales vertebrados semiacuáticos partiremos de los diseñados para humano, ya que ópticamente hablando tienen muchos elementos en común.**

2.5.1. Reptiles semiacuáticos

Anteriormente en este trabajo hemos planteado diversos sistemas ópticos para un ojo terrestre, el humano. También hemos hablado sobre el ojo del pez, que vive en el mar. Pero, ¿qué hay de las criaturas semiacuáticas?

El mecanismo para enfocar bajo el agua en reptiles y pájaros es similar a la acomodación en humanos para objetos cercanos. Un conjunto de músculos (músculo de Brücke) deforma la lente tal como se muestra en la figura 18, aumentando su potencia [2]. En la sección 2.3.4, comprobamos numéricamente cómo la potencia aumentaba con un cristalino de mayor espesor y menores radios respecto a la sección 2.3.3. Esto implica que **debería disminuir el radio de curvatura para ver bajo el agua**. La acción del músculo afecta fundamentalmente a la superficie anterior, que es convexa [2]. Veamos primero cómo

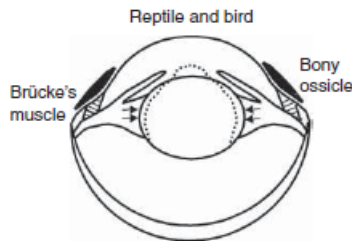


Figura 18: Mecanismo de enfoque en reptiles y pájaros. La línea punteada muestra los resultados de la acción de los músculos. La principal consecuencia del músculo de Brücke es la disminución del radio de curvatura del cristalino anterior

al sumergirse en agua no se pueden formar imágenes de objetos en el infinito dejando el sistema de la sección 2.3.3 sin modificar, y luego veremos si cambiando la curvatura del cristalino anterior se puede lograr focalizar en la retina. No debemos olvidar que, de acuerdo a la figura 5 una alteración de los radios de curvatura es una alteración del espesor.

Usaremos el sistema óptico de humanos diseñado para objetos lejanos (sección 2.3.3), pero esta vez, el medio a la izquierda del sistema es agua $n_1 = 1,333$, por lo que cambia la refracción en la primera córnea C_1 , y en consecuencia la matriz total M y la posición de los elementos cardinales. El resto de matrices son iguales a la sección 2.2.3. Usaremos la notación de la sección 2.2

Las matrices que cambian son:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0057 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0,9751 & -5,3667 \\ 0,0219 & 0,9052 \end{pmatrix}$$

La distancia al plano focal imagen ahora es $s_{F'}=59.5\text{mm}$. Es obvio sin necesidad de un trazado de rayos cómo el plano focal imagen difiere mucho de los 16.6 mm del espesor del humor vítreo, por lo que el sistema para objetos lejanos de la sección 2.2.3 **queda inutilizado para los vertebrados al sumergirse en agua**. Esto explica por qué vemos tan borroso al abrir los ojos bajo el agua.

Veamos con cálculo simbólico si podemos solventar el problema alterando el radio de curvatura de la lente anterior del cristalino, y modificando el espesor del cristalino. Al cambio en la refracción en la primera córnea, hay que añadir la primera refracción en el cristalino R_1 , la traslación dentro de él T y la matriz total en función del radio de curvatura y el espesor. Tenemos dos incógnitas. Si queremos que los reptiles vean con nitidez imágenes de objetos procedentes del infinito pese a que bajo el agua $n_1 = 1,333$, debemos hacer coincidir la posición del foco imagen con la de la retina, es decir, 16.6mm. Usando la expresión 12 para la posición de $s_{F'}$, tenemos una ecuación para dos incógnitas. n_2 es de nuevo 1.337 (humor vítreo)

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0057 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{0,083}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-z}{1,4218} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz total en función de las variables se detalla en la sección de Metodología (sección 3). Como la superficie anterior del cristalino es convexa, los valores para el radio de curvatura deben ser positivos. También deben ser menores de 10mm, de acuerdo a la Tabla 1. El cambio en el espesor no puede ser muy grande, esto es, no puede ser del orden de la magnitud del milímetro, ya que en humanos el cambio tras la acomodación es de décimas de milímetro, y el músculo de Brücke tiene un efecto similar a la acomodación humana. Teniendo en cuenta estas consideraciones y resolviendo en Mathematica (se detalla más en sección 3), obtenemos que el valor para el radio de curvatura que permite un espesor de 4.4mm es 1.5mm. Estos cambios con respecto al sistema óptico humano para objetos lejanos (sección 2.3.3) se ilustran en la figura 19. Sustituimos estos datos en la matriz total, calculamos de nuevo los puntos focales, puntos principales y la potencia según se indica en la sección 2.1 y comprobamos con un trazado de rayos si los rayos se enfocan en la retina (figura 20).

$$M = \begin{pmatrix} 0,8285 & -5,2479 \\ 0,0667 & 0,7843 \end{pmatrix}$$

$s_{F'}(mm)$	$s_F(mm)$	$d_H(mm)$	$d_{H'}(mm)$	$f'(mm)$	$P(mm^{-1})$
16.6	-15.7	4.3	-3.4	20.1	0.050

Podemos observar que la potencia ha aumentado con respecto al sistema óptico del ojo humano para objetos cercanos.

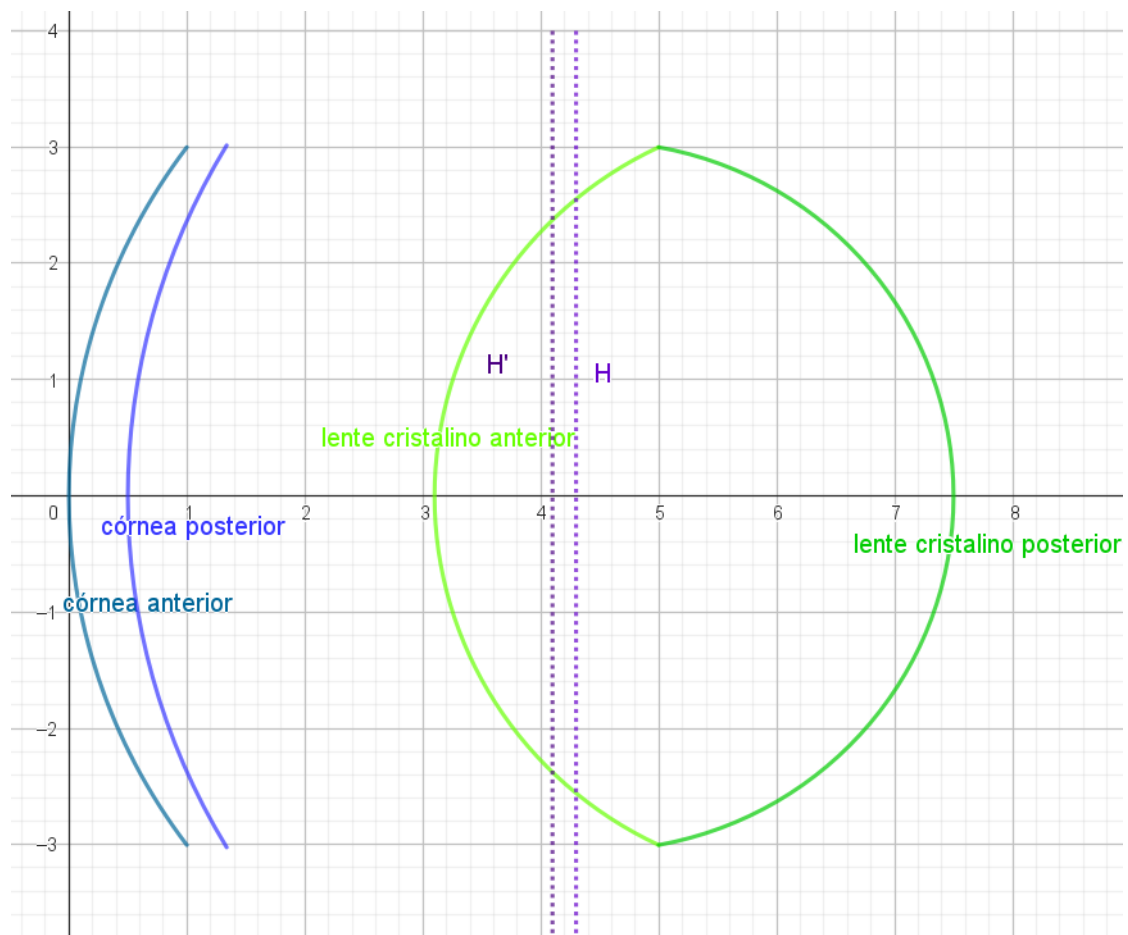


Figura 19: Sistema óptico para los reptiles, compuesto por una doble córnea y una lente biconvexa, marcadas en el dibujo. H' hace referencia al plano principal imagen imagen, mientras que H hace referencia al plano principal objeto (en el dibujo las he llamado igual que los puntos cardinales que contienen y que se mencionan en la sección 2.1). Se aprecia el espesor del cristalino, 4.4 mm, y se observa que la curvatura de la lente anterior del cristalino ha cambiado con respecto a la figura 6. Esta figura se ha realizado con Geogebra.

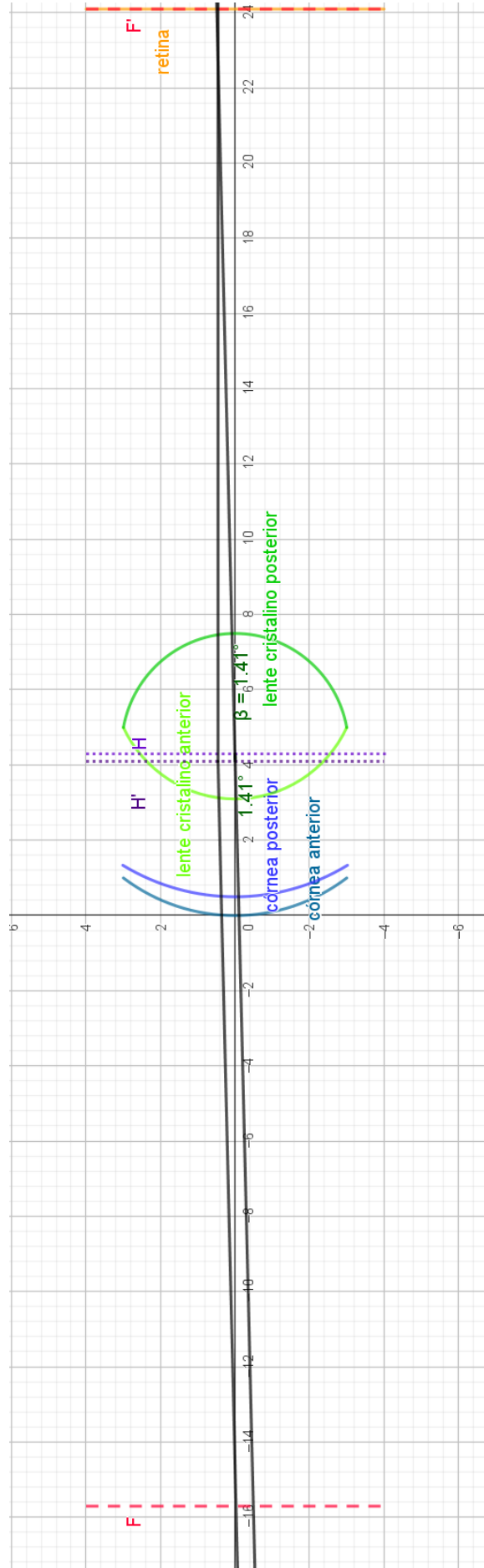


Figura 20: Trazado de rayos de reptiles para un objeto en el infinito. El sistema es el mismo que en la 19. H y H' representan los planos principales igual que en la figura 19. F y F' representan el plano focal objeto y el plano focal imagen, y contienen los puntos focales. Se han trazado dos rayos paralelos entre ellos: uno que cruza el punto focal objeto y sale del plano principal imagen paralelo al eje (a la misma altura que entra al plano principal objeto); y otro que pasa por el punto principal objeto y sale por el punto principal imagen teniendo en cuenta el invariante de Lagrange-Helmholtz 18. En esta ocasión, el ángulo con el que el rayo entra al punto principal objeto H es el mismo que con el que sale del punto principal imagen H' porque $n_1=1.333$ y $n_2=1.337$. Esta figura se ha realizado con Geogebra.

2.5.2. Pingüinos

Veamos una estrategia diferente para visión simultánea en tierra y mar. Los pingüinos tienen una córnea casi plana [2] (el radio de curvatura tiende a infinito), por lo que la matriz de refracción (3) es la matriz identidad, esto es, la córnea no tiene poder refractivo para los rayos paraxiales. **Esto provoca que el medio exterior no influya en la óptica paraxial de estas criaturas y que la lente haga todo el trabajo.** Sin embargo, esta estrategia provoca mucha distorsión en la periferia del campo de visión, es decir, cuando los rayos dejan de ser paraxiales. La distorsión se debe a la ley de Snell $n_1 \sin(\sigma_1) = n_2 \sin(\sigma_2)$, siendo σ_1 y σ_2 los ángulos incidente y refractado, respectivamente; y n_1 y n_2 el índice de refracción anterior y posterior a la superficie de la córnea. Cuando los rayos distan mucho de ser paralelos a la normal a la superficie, los ángulos incidentes son grandes, y según esta ley, cuanto más grandes sean mayor será el ángulo refractado.

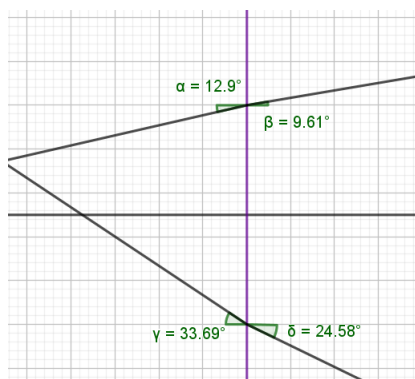


Figura 21: Demostración gráfica de cómo la ley de Snell en una superficie plana dificulta la focalización provocando distorsión. A la izquierda de la superficie violeta, el medio es aire ($n_1 = 1$), y a la derecha es agua ($n_2 = 1,333$). α y γ son ángulos incidentes, y β y δ son sus ángulos refractados. También se traza un rayo perpendicular a la superficie, el cual no se desvía

2.5.3. Receptores y características de visión arrítmica en perros

En la sección 2.4 hemos explicado con detalle los receptores del ojo humano. Los conos adquirieron mayor relevancia a los bastones, ya que los conos son los fotorreceptores especializados en visión diurna. Pudimos observar cómo había varios tipos de conos, y cómo los conos se concentraban en la fovea, que se sitúa en el eje de mejor visión (2.3.5). Siguiendo la línea de pensamiento de este trabajo de adaptación al entorno, si un animal no es diurno, ¿tendrá más cantidad y variedad de bastones? ¿existirá la fovea? Sabemos por la figura 17 que los perros tienen un sistema visual arrítmico, es decir, no está adaptado estrictamente a condiciones diurnas o nocturnas [2]. Nos centraremos aquí en ellos.

Los perros tienen bastones similares a los humanos, que también funcionan en condiciones de poca luminosidad. Sin embargo, en la región de la retina más cercana al eje óptico tienen bastones en lugar de conos. Además, su rodopsina es ligeramente diferente a la humana, ya que el pico de la sensibilidad está entre 506 y 510 nm [10] (el pico de la sensibilidad escotópica en humanos está a 507 nm, según la sección 2.4). Cabe resaltar que los bastones son buenos detectores del movimiento [10], por lo que el hecho de que sean los receptores predominantes explica por qué desempeñan bien las tareas de caza o de policía.

Respecto a la visión fotópica, estudios recientes han demostrado la existencia de receptores sensibles al color en perros, sin embargo, representan menos del 10 % de los receptores en el área central de la retina [10], es decir, **no existe la fovea**. Se han descubierto dos tipos de cono en los perros, uno alcanza el pico de la sensibilidad entre 429 nm y 435 nm y el otro a 555 nm. Por tanto son dicrómatas, y se especula que perciben el espectro visible humano en dos tonos: azul y amarillo [10]. En la figura 22 representamos la función de eficiencia espectral para los conos y bastones de humanos y de perros, para apreciar mejor los picos de sensibilidad de cada receptor en cada especie. También se incluye el tono en el que se especula que el perro percibe cada tono humano.

Además, los perros poseen otra estrategia para la visión nocturna que los humanos no, llamada tapetum lucidum. El tapetum lucidum es un espejo tras la retina que refleja fotones en la noche. Esto permite que los fotorreceptores tengan dos oportunidades para captar fotones, sin embargo, provoca distorsión porque se forma una doble imagen (la de los rayos que llegan al ojo inicialmente y la de los reflejados). De día el tapetum lucidum no funciona [9].

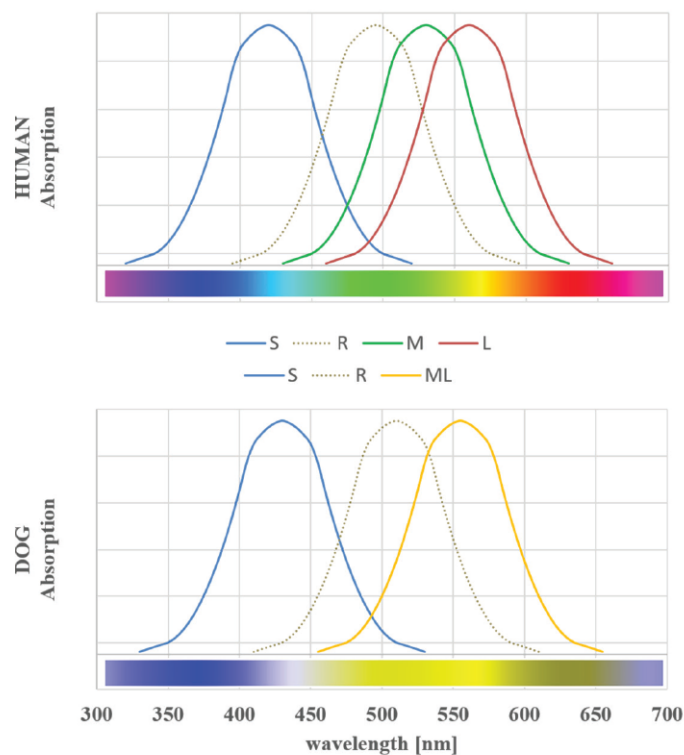


Figura 22: Representación de la eficiencia visual en función de la longitud de onda. Tomada de [11]. En el eje Y, la palabra absorción (absorption) hace referencia a la respuesta de los receptores y se puede interpretar como sinónimo de la función de eficiencia espectral $V(\lambda)$. Las líneas punteadas con la etiqueta R son los bastones. L,M y S en el humano son los mismos tipos de conos descritos en la sección 2.4. Los picos de absorción de los conos humanos, tal como se indica en la tabla 3 están en 440 nm para los S, 540 nm para los M y 570 nm para los L. Podemos ver en la imagen que el cono S en perros se comporta de forma similar al de los humanos, pero los tipos M y L no existen en perros, en su lugar tienen un único cono intermedio en 555 nm. El color en el que se representa cada gráfica (excepto los bastones) es el color de la longitud de onda del pico de absorción de la visión de la especie (555nm en humanos es verde, pero en los perros es amarillo, por eso ML es amarillo).

2.6. Animales acuáticos. Pecten

En la sección 2.3.5 hemos hablado de los peces, hablemos ahora de otras criaturas acuáticas interesantes. Pecten es un género que se refiere a varias especies de moluscos bivalvos que han desarrollado estructuras ópticas para detectar depredadores aproximándose. Al igual que en secciones anteriores, primero debemos entender estas estructuras ópticas desde el punto de vista anatómico para plantear el formalismo matricial.

Estos animales tienen entre 60 y 100 ojos, en los márgenes del manto valvar, con una única cavidad [2], como podemos ver en la figura 23. Dentro de esta cavidad hay una estructura gelatinosa que actúa como lente y una retina suspendida cerca del centro del ojo. Esta retina tiene dos capas, la proximal y la distal [12]. La parte trasera del ojo es esférica y está alineada con un espejo cóncavo (radio de curvatura negativo según nuestro criterio de signos de la figura 3 de la sección 2.1), que refleja del verde y se llama argentea. Los receptores están en la retina [2]. Los elementos del interior del ojo descritos en este párrafo se representan en la figura 24.

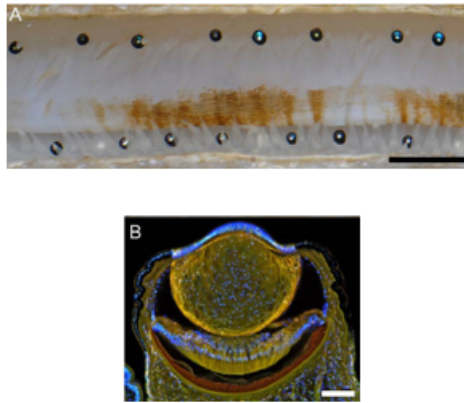


Figura 23: Fotografía tomadas al microscopio de los ojos de Pecten. En la de arriba, la barra de escala son 5 mm y muestra los ojos vistos desde arriba en el manto valvar. En la de abajo, la barra de escala son 100 μm , y se aprecia la estructura de cavidad única. Las imágenes se han tomado de [13].

Empecemos a plantear un sistema óptico. Veamos primero si podemos considerar que el único elemento importante a nivel óptico es el espejo, para simplificar los cálculos en el caso de que sea una aproximación razonable. Sabemos que estas criaturas cierran las valvas cuando hay enemigos a 1 metro de distancia [2], lo cual a la escala en la que trabajamos de 0.5 mm de espesor (como podemos ver en la figura 24) se puede considerar infinito. Como el espejo argentea está alineado con el ojo, su radio de curvatura es -0.5mm. Usando la ecuación (19) descrita en la sección 2.1 para un espejo cóncavo, para un objeto situado en el infinito tenemos:

$$0 + \frac{1}{s'} = -4; \quad s' = -0,250\text{mm}$$

Sin embargo, sabemos que la imagen se forma en la retina distal porque la proximal está demasiado cerca del espejo [14], y que la distancia entre el espejo y la capa de la retina distal es -0.100 mm [13], como indicamos en la figura 24. El signo negativo se debe a que estamos a la izquierda del espejo, por tanto las distancias son negativas según el criterio

de signos de la sección 2.1. El error relativo E_{rel} es:

$$E_{abs} = |\text{valor teórico} - \text{resultado}| = |-0,100 \text{ mm} - 0,250 \text{ mm}| = 0,15 \text{ mm} \quad (28)$$

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor teórico}} = \frac{0,15}{0,100} = 1,5 \xrightarrow{\cdot 100} 150 \% \quad (29)$$

Podemos ver que **la lente desempeña una función muy importante aun en aproximación paraxial, porque la imagen no se forma en la retina**, aunque en otros estudios se creía que la formación de imágenes de los bivalvos pecten se basa únicamente en el espejo [14].

Ahora comprobemos si podemos disminuir un poco el error planteando un sistema formado por una lente gruesa y a continuación un espejo cóncavo de radio -0.5mm. El borde izquierdo del sistema lo situamos en la superficie acampanada de la lente y el derecho en el espejo. La lente tiene un índice de refracción homogéneo de 1.42 [14] y un diámetro de 350 micras (calculado en la figura 24). Vamos a considerar rayos con trayectoria cercana al eje óptico (aproximación paraxial), por lo que la lente será prácticamente esférica de radio 175 micras. La distancia del espejo a la retina distal es, de nuevo, 100 micras, por lo que teóricamente debería cumplirse que $s'_F = -100 \mu\text{m}$ según nuestro criterio de signos de la figura 3 de la sección 2.1. Supondré que entre la lente y el espejo solo hay retina de índice de refracción 1.34 [14], aunque realmente hay unas 10 micras cerca del espejo en las que no hay retina. También consideraremos el índice de agua de mar 1.34 [14]. Todos los elementos del sistema mencionados en este párrafo pueden visualizarse en la figura 24.

Con este sistema planteado, el rayo en primer lugar experimenta una refracción en la cara de la lente cercana a la córnea R_1 (recordemos que la córnea no existe ópticamente hablando en animales marinos, por ser su índice de refracción similar al del agua). Después, el rayo experimenta una traslación dentro de la lente a lo largo de 350 micras de su diámetro T , luego otra refracción con el mismo radio pero negativo R_2 , seguido de una traslación de 150 micras T_e y por último una reflexión E . Una vez más, usamos la notación de la sección 2.2. Las matrices que obtenemos son(en μm):

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,0004573 & 1 \end{pmatrix} & T &= \begin{pmatrix} 1 & -246,479 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & R_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,000457 & 1 \end{pmatrix} \\ T_e &= \begin{pmatrix} 1 & -112,528 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,00536 & 1 \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 0,790237 & -346,328 \\ 0,00509845 & -0,968993 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los puntos principales, puntos focales y la potencia quedan, de acuerdo a las ecuaciones 12, 13, 15, 14 de la sección 2.1:

$s_{F'}(\mu\text{m})$	$s_F(\mu\text{m})$	$d_H(\mu\text{m})$	$d'_H(\mu\text{m})$	$f'(\mu\text{m})$	$P(\mu\text{m}^{-1})$
-206,6	253,4	514,8	54,8	-261,45	-0,0038

Calculemos ahora el error relativo de la posición del plano focal imagen respecto a la de la retina distal:

$$E_{abs} = |\text{valor teórico} - \text{resultado}| = |-100 \mu\text{m} + 206,6 \mu\text{m}| = 106,6 \mu\text{m} \quad (30)$$

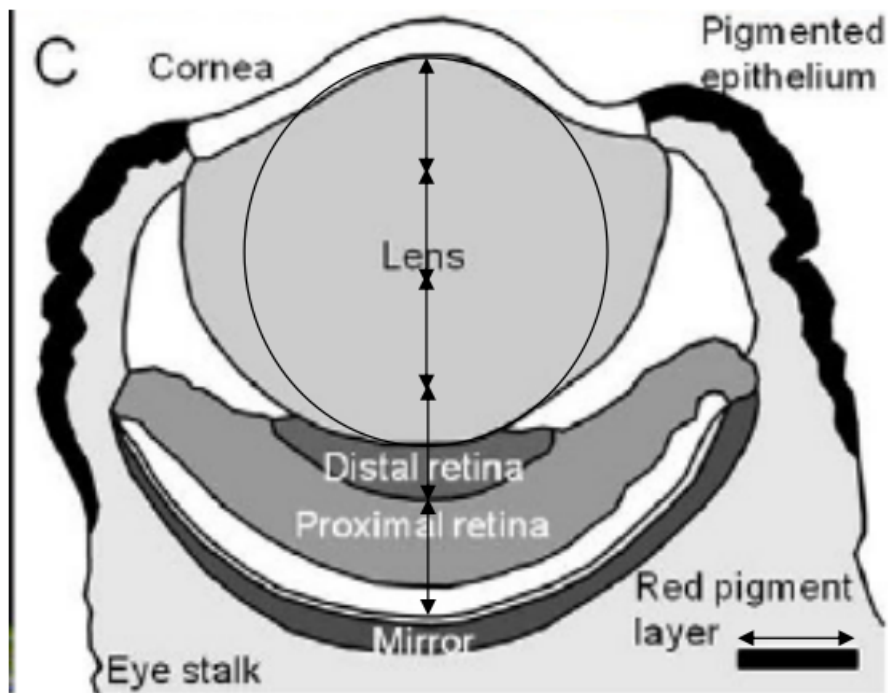


Figura 24: Esquema del ojo de Pecten. La barra de escala y la doble flecha son 100 micras-Tomada de [13] y modificada. Podemos observar que la lente (lens) ocupa mucho espacio en la cavidad, y que la forma de su superficie cercana a la córnea es diferente a la cercana a la retina, aunque para el modelado matricial la aproximamos a lente esférica. También podemos ver cómo la argentea (el espejo o mirror) es cóncava, y que la doble capa de retina se halla suspendida en el centro del ojo.

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{\text{valor teórico}} = \frac{106,6}{100} = 1,066 \xrightarrow{\cdot 100} 106,6\% \quad (31)$$

Sigue siendo un error no despreciable, pero ha disminuido casi un 50 % respecto al sistema óptico sin la lente. Por lo tanto, la lente es un componente fundamental del sistema óptico, **pero la aproximación de lente esférica no es viable. La forma acampanada de la superficie frontal de la lente juega un papel fundamental.**

Si se desea conocer cómo la superficie frontal dobla los rayos, se recomienda consultar [14]. Por su extensión y por salirse de la aproximación paraxial queda fuera de este trabajo.

Un aspecto a destacar en esta sección es que no es la primera vez que discutimos en este trabajo acerca de la existencia de un espejo cóncavo situado tras la retina. El espejo argentea estructuralmente es igual al tapetum lucidum [14]. En el caso de los bivalvos Pecten (criaturas marinas), el espejo desempeña un papel en la formación de la imagen, mientras que en los perros (criaturas terrestres) sirve para ver mejor de noche. ¿Serán los perros descendientes de los Pecten, por tener prácticamente el mismo espejo con funciones tan diferentes? Es como si los perros hubieran logrado 'reaprovechar' el espejo en la tierra.

Por último comentar, que los receptores de la retina de Pecten tienen el pico de sensibilidad entre las longitudes de onda 509 nm y 526 nm, lo cual es esperable teniendo en cuenta que en aguas poco profundas cercanas a la costa, que es el hábitat de Pecten, la radiación tiende a ser verde. No hay indicios de visión a color [13].

3. Metodología

En esta sección vamos a hablar sobre el software utilizado para todos los modelos matriciales propuestos y para todas las gráficas realizadas de la sección 2.4.

3.1. MATLAB

A la hora de proponer los sistemas ópticos, lo primero de todo era calcular las matrices a partir de las expresiones de la sección 2.1. Tras sustituir los valores de los índices de refracción, radios de curvatura y espesores correspondientes, realizaba la multiplicación de matrices con Matlab. En la figura 25 se adjunta un ejemplo sencillo de código de la barra de comandos para calcular la matriz de la córnea del ojo humano. Además, todas

```
>>A= [1 0;0.3774/7.8 1]

A =

    1.0000    0
    0.0484    1.0000

>>B= [1 -0.5/1.3774;0 1]

B =

    1.0000   -0.3630
         0    1.0000

>>C= [1 0;(1.3388-1.3774)/6.7 1]

C =

    1.0000    0
   -0.0058    1.0000

>>C*B*A

ans =

    0.9824   -0.3630
    0.0427    1.0021
```

Figura 25: Cálculo de la matriz de la córnea humana con matlab. El símbolo ' $\gg$ ' representa la entrada por teclado. Al introducir una matriz con esa notación de corchetes, el programa automáticamente hace las cuentas de los elementos de la matriz. El resultado de la multiplicación de las matrices $C * B * A$ se obtiene rápidamente. Observe que al multiplicar se ha tenido en cuenta el orden establecido en la sección 2.1

las gráficas de la sección 2.4 se realizaron con Matlab. El programa fue especialmente relevante para crear la Tabla 2 y la figura 14, ya que esta ponderación fue calculada visualmente representando primero la eficiencia luminosa de la Tabla 4 y sobre ella la suma de la eficiencia luminosa de cada cono multiplicada por un número, y observando si se solapaban. Un ejemplo simplificado de este proceso de ponderación se muestra en la figura 26.

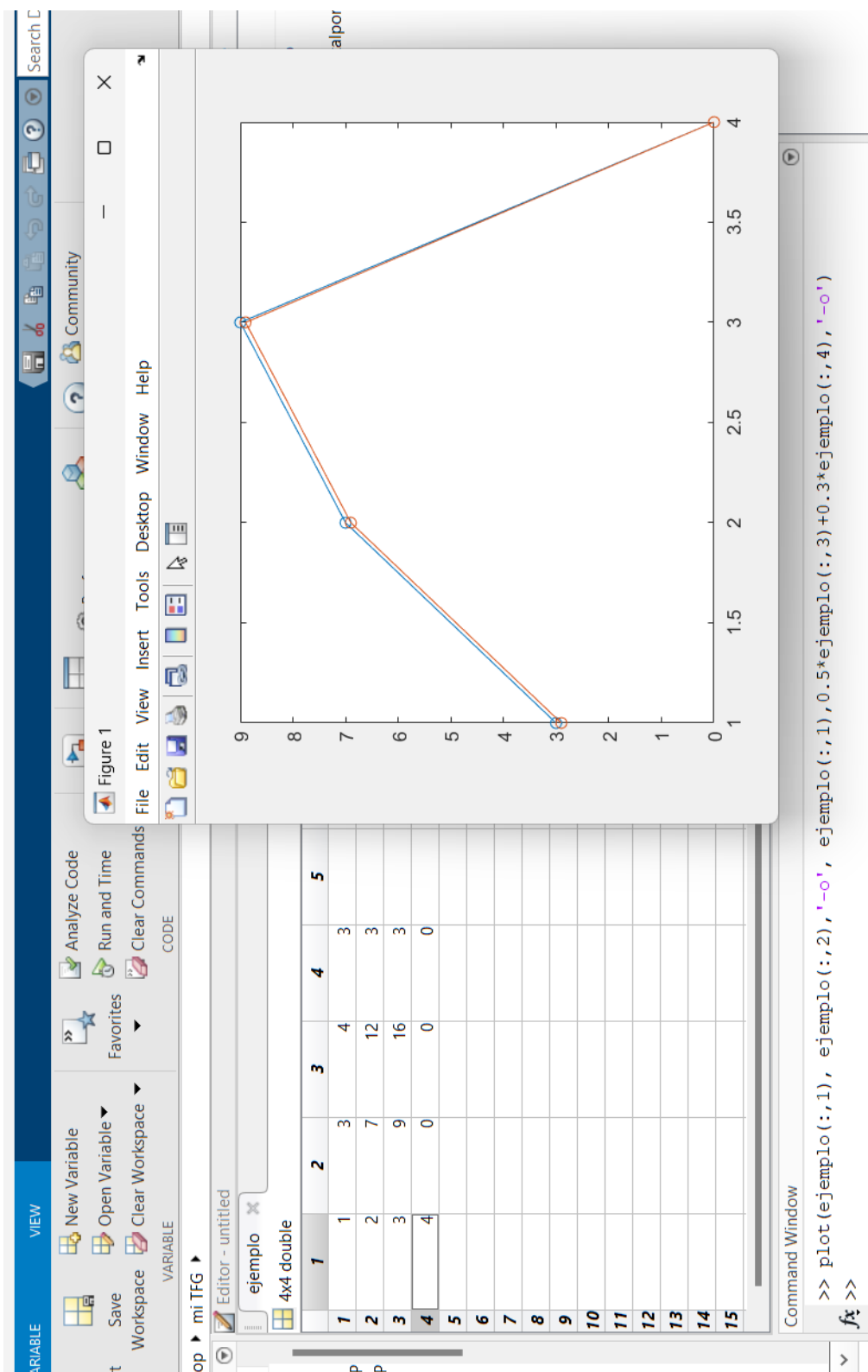


Figura 26: Ejemplo del proceso de ponderación en matlab. En la esquina superior izquierda vemos la tabla de los datos. En la línea de comandos, `ejemplo(:,1)` significa tabla ejemplo, todas las filas y columna 1. El eje X es la primera columna, los valores de eje Y que buscamos obtener son la segunda columna, y los valores de eje Y que tenemos que ponderar son las columnas 3 y 4. El comando `plot` genera varios gráficos en los mismos ejes de la siguiente forma: `plot(X1,Y1,X2,Y2,...)`. El eje X es el mismo en ambos casos (sería la longitud de onda en la sección 2.4). En Y1 hemos representado la columna tal cual (sería la eficiencia visual experimental de las referencias), y en Y2 hemos sumado las columnas multiplicada la 3 por 0.5 y la 4 por 0.3 (equivaldría a la eficiencia visual de los conos ponderada). El comando `'-o'` hace referencia al estilo gráfico.

3.2. Wolfram Mathematica

El modelo matricial de la sección 2.5.1 no podía resolverse con Matlab, porque no se puede hacer cálculo simbólico en Matlab. Otro software que permitía calcular la matriz total pese a que hubiera incógnitas es Wolfram Mathematica. La matriz total de los reptiles en función del radio de curvatura anterior del cristalino y del espesor se muestra en la figura 28. Una vez calculada la matriz total, se usó la función NSolve para obtener una relación entre el espesor y el radio de curvatura, tal cual aparece en la figura 29, y poder probar así radios positivos menores a 10mm , para obtener espesores un poco mayores de 4mm (por las razones explicadas en la sección 2.5.1). Las pruebas que se hicieron se muestran en la figura 27.

```

In[ ]:= r = 9
Out[ ]:= 9

In[ ]:= z -> - 
$$\frac{0.25743255477095783^* (-8.5950959839^* \wedge 10 + 6.9011741173^* \wedge 10 r)}{-1.035553733^* \wedge 9 + 1.25^* \wedge 6 r}$$

Out[ ]:= z -> 134.497

In[ ]:= r = 1
Out[ ]:= 1

In[ ]:= z -> - 
$$\frac{0.25743255477095783^* (-8.5950959839^* \wedge 10 + 6.9011741173^* \wedge 10 r)}{-1.035553733^* \wedge 9 + 1.25^* \wedge 6 r}$$

Out[ ]:= z -> -4.21608

In[ ]:= r = 1.3
Out[ ]:= 1.3

In[ ]:= z -> - 
$$\frac{0.25743255477095783^* (-8.5950959839^* \wedge 10 + 6.9011741173^* \wedge 10 r)}{-1.035553733^* \wedge 9 + 1.25^* \wedge 6 r}$$

Out[ ]:= z -> 0.937254

In[ ]:= r = 1.4
Out[ ]:= 1.4

In[ ]:= z -> - 
$$\frac{0.25743255477095783^* (-8.5950959839^* \wedge 10 + 6.9011741173^* \wedge 10 r)}{-1.035553733^* \wedge 9 + 1.25^* \wedge 6 r}$$

Out[ ]:= z -> 2.65586

In[ ]:= r = 1.5
Out[ ]:= 1.5

In[ ]:= z -> - 
$$\frac{0.25743255477095783^* (-8.5950959839^* \wedge 10 + 6.9011741173^* \wedge 10 r)}{-1.035553733^* \wedge 9 + 1.25^* \wedge 6 r}$$

Out[ ]:= z -> 4.37489

```

Figura 27: Pruebas para calcular el valor de r (radio de curvatura anterior cristalino) y z (espesor cristalino). Se empezó el valor de 9mm (por estar un poco por debajo de 10) y se vio que se obtenía un espesor muy alto (más de un decímetro). Después se optó por un radio de 1mm, por estar cerca de 0 y ser positivo, y el espesor obtenido era negativo, lo cual no tenía sentido según el criterio de signos. A partir de ahí se fue subiendo desde uno poco a poco, con un decimal, porque los radios de la córnea vienen expresados con un decimal en la Tabla 1.

$$\begin{aligned}
In[]:= & \mathbf{R1} = \{ \{1, 0\}, \{0.083 / r, 1\} \} \\
Out[]:= & \{ \{1, 0\}, \{ \frac{0.083}{r}, 1 \} \} \\
In[]:= & \mathbf{T} = \{ \{1, -z / 1.4218\}, \{0, 1\} \} \\
Out[]:= & \{ \{1, -0.703334 z\}, \{0, 1\} \} \\
In[]:= & \mathbf{R2} = \{ \{1, 0\}, \{0.014, 1\} \} \\
Out[]:= & \{ \{1, 0\}, \{0.014, 1\} \} \\
In[]:= & \mathbf{S} = \mathbf{R2.T.R1.DC.CO} \\
Out[]:= & \left\{ \left\{ \left\{ \left\{ 0.9979 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) - 0.0001 \left(-0.703334 z - 2.2408 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) \right), -0.363 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) + 1.0021 \left(-0.703334 z - 2.2408 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) \right) \right\}, \right. \right. \\
& \left. \left\{ 0.9979 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) - 0.0001 \left(1. - 2.2408 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) \right) - 0.00984667 z \right\}, \right. \\
& \left. \left. -0.363 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) + 1.0021 \left(1. - 2.2408 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) \right) - 0.00984667 z \right\} \right\} \\
In[]:= & \mathbf{MatrixForm[S]} \\
& \text{[forma de matriz]} \\
Out[]/MatrixForm:= & \left(\begin{array}{cc} 0.9979 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) - 0.0001 \left(-0.703334 z - 2.2408 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) \right) & -0.363 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) + 1.0021 \left(-0.703334 z - 2.2408 \left(1. - \frac{0.0583767 z}{r} \right) \right) \\ 0.9979 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) - 0.0001 \left(1. - 2.2408 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) \right) - 0.00984667 z & -0.363 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) + 1.0021 \left(1. - 2.2408 \left(0.014 + \frac{0.083 (1 - 0.00984667 z)}{r} \right) \right) - 0.00984667 z \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Figura 28: Matriz total del sistema de nombre S del sistema óptico propuesto para los reptiles en la sección 2.5.1. Las matrices R1, T y R2 son la refracción en la lente anterior del cristalino, traslación dentro del cristalino y refracción en la lente posterior del cristalino, respectivamente. $\mathbf{S} = \mathbf{R2.T.R1.DC.CO}$ es la multiplicación de matrices. DC es la matriz de traslación en el humor acuoso que aparece por primera vez en la sección 2.3.2; y CO es la matriz de la córnea, que es diferente a la figura 25 porque en la refracción de la córnea anterior el medio a la izquierda de la córnea es agua y no aire.

$$\begin{aligned}
\text{In}[] := & \text{NSolve}\left[\left(\left(\left(\frac{0.0583767055844704` z}{r} - 0.0001` \left(-0.703333802225348` z - 2.2408` \left(1 - \frac{0.0583767055844704` z}{r}\right)\right) \star 1.337\right)\right)\right) / \right. \\
& \left. \left(0.9979` \left(0.014` + \frac{0.083` (1 - 0.009846673231115488` z)}{r}\right) - 0.0001` \left(1. - 2.2408` \left(0.014` + \frac{0.083` (1 - 0.009846673231115488` z)}{r}\right) - 0.009846673231115488` z\right)\right) \right] = 16.6, \{z\} \\
\text{Out}[] := & \left\{ \left\{ z \rightarrow - \frac{0.257433 (-8.5951 \times 10^{10} + 6.90117 \times 10^{10} r)}{-1.03555 \times 10^9 + 1.25 \times 10^6 r} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Figura 29: Código de la ecuación propuesta en la sección 2.5.1, que consistía en igualar el valor de $s_{F'}$ a 16.6mm usando la expresión 12. Se obtuve una expresión del espesor del cristalino, simbolizado por z , en función del radio de curvatura de la lente anterior del cristalino, simbolizada por r . 12

4. Conclusiones

La visión de los seres vivos esta íntimamente relacionada con sus hábitos de vida. Los animales diurnos o en entornos luminosos tienen una elevada proporción en sus retinas de receptores llamados conos. Los conos se caracterizan por ser de varios tipos con el fin de generar respuestas distintas en función de la longitud de onda y así ver colores. Los nocturnos o de baja luminosidad, en cambio, apenas tienen conos y su receptor más abundante son los bastones, que son de un único tipo y no aportan visión a color, pero son más sensibles al movimiento que los conos.

El sistema óptico de los animales también depende del medio en el que vivan. En el caso de las criaturas marinas, consiste en espejos o lentes esféricas con gradiente de índice. En el caso de las criaturas terrestres o semiacuáticas, la potencia refractiva se divide entre una membrana transparente, la córnea, y una lente de curvatura y tamaño variable. Además, muchas criaturas terrestres conservan elementos de los ojos de las marinas, pero con funciones diferentes, como es el caso del tapetum lucidum, o del uso de un gradiente de índice producto de la acomodación para focalizar objetos cercanos en humanos. Este curioso fenómeno es prueba de la teoría de la evolución darwinista.

En la visión humana en particular, el espesor del cristalino juega un papel fundamental para que podamos formar imágenes dentro de nuestro ojo, ya que gracias a unos pocos milímetros de espesor se consigue que la retina coincida con el plano focal imagen, y se pueden ver objetos a menos de un metro aumentando el espesor a décimas de milímetro. Además, nuestra manera de percibir la realidad viene determinada por la cantidad de tipos de cono que tengamos en funcionamiento, otorgando puntos de vista únicos ante un mismo estímulo entre dos observadores.

Pese a que con la aproximación paraxial para los trazados de rayos se logra corroborar la información descrita en la bibliografía en la mayoría de los casos, la visión de los peces queda totalmente fuera. Para un futuro trabajo, sería interesante estudiar trayectorias en lentes de gradiente de índice usando el principio de Fermat y las ecuaciones diferenciales del rayo de la óptica geométrica. Si se desea, se puede encontrar más información sobre esta parte de la óptica geométrica en [1].

Otra cuestión que queda fuera de este trabajo estudios acerca de las pupilas, que actúan como diafragma y controlan la cantidad de fotones que entran al ojo, y presentan una alta variabilidad de una especie a otra. Se invita al lector a investigar más sobre este aspecto en las referencias [9] y [2].

Conclusions

The vision of living beings is closely related to their life habits. Daytime animals or animals in bright environments have a high proportion of receptors called cones in their retinas. The cones are characterized by being of various types in order to generate different responses depending on the wavelength and thus see colors. Nocturnal or low-luminosity cells, on the other hand, barely have cones and their most abundant receptors are the rods, which are of a single type and do not provide color vision, but are more sensitive to movement than the cones.

The optical system of animals also depends on the environment in which they live. In

the case of sea creatures, it consists of mirrors or spherical lenses with an index gradient. In the case of terrestrial or semi-aquatic creatures, the refractive power is divided between a transparent membrane, the cornea, and a lens of variable curvature and size. In addition, many terrestrial creatures retain elements of marine eyes, but with different functions, as is the case of the tapetum lucidum, or the use of an index gradient resulting from accommodation to focus on nearby objects in humans. This curious phenomenon is proof of Darwin's theory of evolution.

In human vision in particular, the thickness of the lens plays a fundamental role so that we can form images inside our eye, since thanks to a few millimeters of thickness it is possible for the retina to coincide with the image focal plane, and we can see objects less than one meter increasing the thickness to tenths of a millimeter. Furthermore, our way of perceiving reality is determined by the number of types of cone that we have in operation, granting unique points of view to the same stimulus between two observers.

Although with the paraxial approach for ray tracing it is possible to corroborate the information described in the bibliography in most cases, the vision of the fish is completely left out. For future work, it would be interesting to study trajectories in index gradient lenses using Fermat's principle and the ray differential equations of geometric optics. If desired, more information on this part of geometric optics can be found in [1].

Another issue that is left out of this work is studies about the pupils, which act as a diaphragm and control the amount of photons that enter the eye, and present a high variability from one species to another. The reader is invited to investigate further on this aspect in the references [9] and [2].

Referencias

- [1] J. C. Peláez, *OPTICA*. Librería Pons, 1983.
- [2] M. F. Land and D.-E. Nilsson, *Animal eyes*. Oxford Animal Biology Series, 2012.
- [3] F. S. Padilla, “El ojo humano.” <https://es.slideshare.net/slideshow/ojo-humano-10143271/10143271>.
- [4] S. Bassnett, “Zinn’s zonule,” *NIH, PubMed*, 2020. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/32980533/>.
- [5] “Model of the human eye based on abcd matrix,” American Institute Physics, 2008.
- [6] A. Khan, J. M. Pope, P. K. Verkicharla, M. Suheimat, and D. A. Atchinson, “Change in human lens dimensions, lens refractive index distribution and ciliary body ring diameter with accommodation,” *NIH, PubMed*, 2018. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/29541520/>.
- [7] F. C. Donders and W. D. Moore, *On the Accommodation and Refraction of the Eye*. Salzwasser Verlag, 2022.
- [8] M. B. Eric, W. V. Stryl, D. R. Williams, and W. L. Wolfe, *Handbook of Optics, Volume III*. McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [9] M. C. L. Delgado, “La visión desde la perspectiva de la biología,” *Charlas Más Física*, 2022. <https://slsalamancarsef.usal.es/node/104>.
- [10] P. E. Miller and C. J. Murphy, “Vision in dogs,” *AVMA Publications*, 1995. https://avmajournals.avma.org/view/journals/javma/207/12/javma.1995.207.12.1623.xml?tab_body=pdf.
- [11] A. Barber, V. Ratcliffe, K. Guo, D. Mills, F. Montealegre, and A. Wilkinson, “Functional performance of the visual system in dogs and humans: A comparative perspective,” *Comparative Cognition Behavior Reviews*, 2020.
- [12] I. Daly, “Animal vision: The unexpected eyes of scallops.” <https://www.opticianonline.net/content/features/animal-vision-the-unexpected-eyes-of-scallops/>, 2020.
- [13] D. I. Speiser, E. R. Loew, and S. Johnsen, “Spectral sensitivity of the concave mirror eyes of scallops: potential influences of habitat, self-screening and longitudinal chromatic aberration,” *The Journal of Experimental Biology*, 2011.
- [14] G. Horváth and D. Varjú, “Theoretical study of the optimal shape of the front profile of the lens in the eye of the scallop, pecten,” *Bulletin of Mathematical Biology Vol 55*, 1993.

5. Anexo

Longitud de onda(nm)	L	M	S
400	2,23E-03	1,93E-03	5,74E-02
410	8,76E-03	8,46E-03	2,39E-01
420	1,75E-02	2,05E-02	5,28E-01
430	2,69E-02	3,88E-02	8,03E-01
440	3,84E-02	6,36E-02	9,87E-01
450	4,88E-02	8,79E-02	9,50E-01
460	6,52E-02	1,20E-01	8,12E-01
470	9,69E-02	1,76E-01	6,51E-01
480	1,38E-01	2,38E-01	3,94E-01
490	1,88E-01	3,04E-01	2,09E-01
500	2,97E-01	4,48E-01	1,19E-01
510	4,59E-01	6,47E-01	6,21E-02
520	6,34E-01	8,33E-01	2,94E-02
530	7,76E-01	9,46E-01	1,28E-02
540	8,83E-01	1,00E+00	5,61E-03
550	9,42E-01	9,77E-01	2,50E-03
560	9,88E-01	9,19E-01	1,15E-03
570	9,99E-01	8,03E-01	5,44E-04
580	9,68E-01	6,45E-01	2,63E-04
590	9,25E-01	4,88E-01	1,31E-04
600	8,36E-01	3,35E-01	6,65E-05
610	7,12E-01	2,10E-01	3,46E-05
620	5,64E-01	1,22E-01	1,83E-05
630	4,15E-01	6,93E-02	9,94E-06
640	2,71E-01	3,41E-02	5,49E-06
650	1,66E-01	1,57E-02	3,08E-06
660	9,40E-02	7,70E-03	1,76E-06
670	4,99E-02	3,69E-03	1,03E-06
680	2,51E-02	1,75E-03	6,07E-07
690	1,22E-02	8,33E-04	3,64E-07
700	5,87E-03	3,95E-04	2,22E-07

Tabla 3. Estimación de la sensibilidad de los conos realizada por Stockman-MadLeod-Johnson. Se basaron en CIE 1964. Tomada de [8]

Longitud de onda(nm)	Fotópica	Escotópica
375	2,0000E-05	Vacio
380	4,0000E-05	5,90E-04
385	6,0000E-05	1,11E-03
390	1,2000E-04	2,21E-03
395	2,2000E-04	4,53E-03
400	4,0000E-04	9,29E-03
405	6,4000E-04	1,85E-02
410	1,2100E-03	3,48E-02
415	2,1800E-03	6,04E-02
420	4,0000E-03	9,66E-02
425	7,3000E-03	1,44E-01
430	1,1600E-02	2,00E-01
435	1,6840E-02	2,63E-01
440	2,3000E-02	3,28E-01
445	2,9800E-02	3,93E-01
450	3,8000E-02	4,55E-01
455	4,8000E-02	5,13E-01
460	6,0000E-02	5,67E-01
465	7,3900E-02	6,20E-01
470	9,0980E-02	6,76E-01
475	1,1260E-01	7,34E-01
480	1,3902E-01	7,93E-01
485	1,6930E-01	8,51E-01
490	2,0802E-01	9,04E-01
495	2,5860E-01	9,49E-01
500	3,2300E-01	9,82E-01
505	4,0730E-01	9,98E-01
510	5,0300E-01	9,97E-01
515	6,0820E-01	9,75E-01
520	7,1000E-01	9,35E-01
525	7,9320E-01	8,80E-01
530	8,6200E-01	8,11E-01
535	9,1485E-01	7,33E-01
540	9,5400E-01	6,50E-01
545	9,8030E-01	5,64E-01
550	9,9495E-01	4,81E-01
555	1,0000E+00	4,02E-01
560	9,9500E-01	3,29E-01
565	9,7860E-01	2,64E-01
570	9,5200E-01	2,08E-01
575	9,1540E-01	1,60E-01
580	8,7000E-01	1,21E-01
585	8,1630E-01	8,99E-02
590	7,5700E-01	6,55E-02
595	6,9490E-01	4,69E-02
600	6,3100E-01	3,32E-02
605	5,6680E-01	2,31E-02
610	5,0300E-01	1,59E-02
615	4,4120E-01	1,09E-02
620	3,8100E-01	7,37E-03
625	3,2100E-01	4,97E-03
630	2,6500E-01	3,34E-03
635	2,1700E-01	2,24E-03
640	1,7500E-01	1,50E-03
645	1,3820E-01	1,01E-03
650	1,0700E-01	6,80E-04
655	8,1600E-02	4,60E-04
660	6,1000E-02	3,10E-04
665	4,4580E-02	2,10E-04
670	3,2000E-02	1,50E-04
675	2,3200E-02	1,00E-04
680	1,7000E-02	7,00E-05
685	1,1920E-02	5,00E-05
690	8,2100E-03	4,00E-05
695	5,7200E-03	3,00E-05
700	4,1000E-03	2,00E-05
705	2,9300E-03	1,00E-05
710	2,0900E-03	1,00E-05
715	1,4800E-03	1,00E-05
720	1,0500E-03	0,00E+00
725	7,4000E-04	0,00E+00
730	5,2000E-04	0,00E+00
735	3,6000E-04	0,00E+00
740	2,5000E-04	0,00E+00
745	1,7000E-04	0,00E+00
750	1,2000E-04	0,00E+00
755	8,0000E-05	0,00E+00
760	6,0000E-05	0,00E+00
765	4,0000E-05	0,00E+00
770	3,0000E-05	0,00E+00

Tabla 4. Función de eficiencia luminosa espectral fotópica y escotópica (sensibilidad). Tomada de [8]