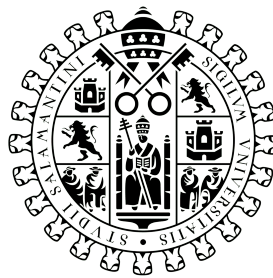


MÁSTER UNIVERSITARIO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Trabajo de Fin de Máster



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Condiciones de pegado en objetos compactos para teorías de gravedad modificada

Junction conditions in compact objects
for modified gravity theories

AUTOR: Néstor Rivero González

DIRECTOR: Álvaro de la Cruz Dombriz

SEPTIEMBRE 2024

RESUMEN

En este trabajo se estudia el modelo de gravedad modificada $f(R) = aR^2$ y se compara con las predicciones de Relatividad General en el contexto de estrellas de neutrones, considerando diferentes ecuaciones de estado. Se discuten las condiciones de pegado en la superficie estelar para ambas teorías, y se obtienen soluciones estáticas y esféricamente simétricas para el interior y el exterior de las estrellas, analizando la curvatura (no nula en el exterior para el caso $f(R)$, donde se comprueba que la métrica es también oscilante) y la definición adecuada de la masa en $f(R)$, donde emerge una “esfera gravitacional” que contribuye a la masa percibida por un observador asintótico. Además, se comparan los diagramas masa-radio entre ambas teorías y se evalúa el impacto del parámetro a sobre los resultados. Finalmente, se analizan las órbitas de partículas masivas y no masivas alrededor de las estrellas, y se estudia el impacto de estas modificaciones en la precesión del periastro y la deflexión rasante de la luz, concluyendo que el segundo no se ve afectado por a dada la proximidad a la estrella y por tanto la evasión de los efectos de la esfera gravitacional, motivando así un posible test observacional para comprobar la validez de estas teorías.

Palabras clave: teorías $f(R)$, condiciones de pegado, ecuaciones de estado de estrellas de neutrones, diagramas masa-radio, órbitas, precesión del periastro, deflexión gravitacional de la luz.

ABSTRACT

In this paper we study the modified gravity model $f(R) = aR^2$ and compare it with General Relativity in the context of neutron stars, considering different equations of state. We discuss the junction conditions at the stellar surface for both theories, and obtain static and spherically symmetric solutions for the interior and exterior of the stars, analysing the curvature (non-zero in the exterior for the $f(R)$ case, where the metric is also found to be oscillating) and the proper definition of the mass in $f(R)$, where a “gravitational sphere” emerges that contributes to the mass perceived by a distant observer. Furthermore, the mass-radius diagrams between the two theories are compared and the impact of the a parameter on the results is assessed. Finally, the orbits of massive and non-massive particles around stars are analysed, and the impact of these modifications on the periastron precession and the light-trailing deflection is studied, concluding that the latter is not affected by a given the proximity to the star and therefore the avoidance of the effects of the gravitational sphere, thus motivating a possible observational test to check the validity of these theories.

Keywords: $f(R)$ theories, junction conditions, neutron star equations of state, mass-radius diagrams, orbits, periastron precession, light ray gravitational deflection.

Índice

1. Introducción	1
2. Teorías de gravedad modificada $f(R)$	3
3. Estrellas de neutrones	5
4. Condiciones de pegado	7
4.1. Condiciones de pegado en Relatividad General	7
4.2. Condiciones de pegado en teorías $f(R)$	10
5. Soluciones en Relatividad General	13
5.1. Solución exterior	13
5.2. Soluciones interiores	13
5.3. Condiciones iniciales y de pegado	15
5.4. Resultados	17
6. Soluciones en el modelo $f(R) = aR^2$	21
6.1. Soluciones interiores	21
6.2. Soluciones exteriores	22
6.3. Condiciones iniciales	25
6.4. Función de masa $f(R)$	26
6.5. Resultados	29
7. Órbitas en métricas estáticas	35
7.1. Ecuaciones geodésicas	35
7.1.1. Relatividad General	35
7.1.2. $f(R) = aR^2$	38
7.2. Precesión del periastro	40
7.3. Deflexión de la luz	43
8. Conclusiones	47
Referencias	50
Apéndices	53

1. Introducción

La teoría de la Relatividad General de Einstein ha sido extraordinariamente exitosa para describir la gravitación y el comportamiento del universo a gran escala. Sin embargo, presenta ciertos problemas al intentar explicar fenómenos como la rotación de las galaxias o la expansión acelerada del universo. Para ello, se han propuesto componentes adicionales como la materia y la energía oscuras. En el modelo cosmológico estándar, conocido como Λ CDM, aproximadamente el 76 % del contenido energético del universo corresponde a energía oscura en forma de constante cosmológica, un 20 % a materia oscura, y solo un 4 % a materia ordinaria. Esto implica que, según este modelo, desconocemos el 95 % del contenido total del universo.

Debido a estos desafíos, desde poco después de la publicación de la Relatividad General se han ido proponiendo diversas modificaciones que intentan explicar fenómenos como la inflación cósmica, las curvas de rotación de las galaxias o la expansión acelerada sin necesidad de introducir nuevos tipos de materia o energía[1].

Entre las teorías más simples de gravedad modificada se encuentran las *teorías escalar-tensor* $f(R)$, que añaden al lagrangiano una función del escalar de curvatura R . El interés de estas teorías de gravedad modificada en concreto se remonta a los años 60 del siglo pasado, donde se observó que la cuantización de los campos de materia llevaba a acciones de esta forma [2]. En los 70 se observó además que ciertas teorías $f(R)$ presentan propiedades más favorables de renormalización [3], y en los 80 se vio que estas podían explicar la expansión acelerada del inicio del universo [4], recuperando la métrica de *de Sitter* y de *anti-de Sitter* sin necesidad de una constante cosmológica. Además, estas teorías han mostrado la capacidad de describir la gravitación asignando la contribución de la materia oscura a un nuevo modo escalar [5, 6], así como de unificar la expansión acelerada actual con la inflación del universo primitivo, dando así una imagen completa de la evolución del Universo y de sus estructuras a gran escala [6, 7, 8].

Algunos ejemplos comunes de modelos $f(R)$ son el modelo cuadrático de Starobinsky $f(R) \propto R^2$ [9], útil para describir el origen del contenido de materia oscura, así como la inflación cósmica [6, 8] o el modelo de Hu-Sawicki [10, 11], capaz de recuperar la expansión acelerada en el universo tardío. En este trabajo introduciremos el formalismo necesario para describir estas teorías y derivaremos las ecuaciones de campo correspondientes, estableciendo comparaciones con la Relatividad General (RG) en el contexto de objetos compactos sometidos a fuertes campos gravitacionales, como las estrellas de neutrones.

Desarrollaremos soluciones particulares tanto para el interior como en el exterior de estas estrellas, bajo el supuesto de simetría esférica y estática, en el modelo $f(R) = aR^2$, dada su simplicidad y visto que en regímenes de gravedad fuerte sus efectos pueden ser apreciables frente Relatividad General, e impondremos las condiciones necesarias de pegado en la superficie estelar para asegurar la continuidad de las soluciones métricas. En particular, estudiaremos las propiedades de la curvatura y cómo esta difiere de las predicciones de la Relatividad General en el vacío exterior.

A partir de estas soluciones, introduciremos una definición de la función de masa adecuada para las teorías $f(R)$, con el objetivo de identificar y analizar la contribución de la “esfera gravitacional” que aparece en estas teorías y cómo afecta a la masa total medida por un observador lejano. Esta herramienta nos permitirá estudiar los diagramas de masa-radio y comparar las predicciones de $f(R)$ con las de la Relatividad General, evaluando además el impacto del parámetro a en la estructura gravitacional.

Finalmente, analizaremos las ecuaciones geodésicas y las órbitas de partículas masivas y no masivas en torno a las soluciones obtenidas. Prestaremos especial atención a dos pruebas clásicas de la Relatividad General, como son la precesión del periastro y la deflexión de la luz, con el fin de explorar cómo estas podrían diferenciarse en el contexto de las teorías $f(R)$. Esto nos permitirá estudiar posibles discrepancias observacionales que podrían revelar la presencia de la esfera gravitacional característica de estas teorías.

2. Teorías de gravedad modificada $f(R)$

En Relatividad General (RG), la acción total de un sistema se escribe en dos términos desacoplados:

$$S = S_{\text{EH}}(g_{\mu\nu}, R) + S_{\text{M}}(g_{\mu\nu}, \phi), \quad (2.1)$$

donde S_{EH} es la acción de Einstein-Hilbert, dependiente de la métrica $g_{\mu\nu}$ ¹ y del escalar de curvatura R ,² y S_{M} es la acción asociada a los campos de materia ϕ . En los modelos $f(R)$, se modifica la acción de Einstein-Hilbert,

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.2)$$

donde $\kappa = 8\pi$ en unidades naturales³ y g es el determinante de la métrica, añadiendo una función genérica del escalar de curvatura [12],

$$S_{\text{EH}}^{f(R)} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(R)], \quad (2.3)$$

de tal manera que para $f(R) = 0$ se recupera la acción de Einstein-Hilbert original y por tanto la Relatividad General.

Existen varios enfoques para obtener las ecuaciones de campo a partir de esta acción. En el *formalismo de Palatini* [13], la acción se varía con respecto a la métrica y a la conexión por separado; en el *métrico-afín* se considera la acción asociada a la materia como un funcional de la métrica y de la conexión; y en el *formalismo métrico*, que utilizaremos en este trabajo, se asume la conexión de Levi-Civita y se varía la acción únicamente con respecto a la métrica. De esta manera, obtenemos las ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{1 + f_R} [-\kappa T_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f_R + g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha f_R + \frac{1}{2}(f(R) - Rf_R)g_{\mu\nu}], \quad (2.4)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-materia y $f_R \equiv df(R)/dR$ (f_{2R} , f_{3R} y f_{4R} denotarán las derivadas de orden superior). Tomando la traza de estas ecuaciones contrayéndolas con $g^{\mu\nu}$, obtenemos una relación dinámica entre R y T :

$$R = \frac{\kappa T - 2f(R) - 3\nabla^\alpha \nabla_\alpha f_R}{1 - f_R}. \quad (2.5)$$

¹A lo largo de este trabajo tomaremos la signatura $(+, -, -, -)$ para la métrica.

²Nuestra definición del tensor de Riemann es $R^\sigma_{\mu\nu\kappa} = \partial_\kappa \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} + \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}$, del que se obtiene el de Ricci $R_{\mu\kappa} = R^\sigma_{\mu\sigma\kappa}$ y finalmente el escalar de curvatura $R = R^\mu_\mu$.

³Tanto en estas expresiones como en el resto de este trabajo se hará uso de las unidades naturales, de modo que $G = c = 1$.

Al tratarse (2.5) de una ecuación diferencial, y no sencillamente algebraica como en el caso de la Relatividad General ($R = \kappa T$), cabe esperar un mayor número de soluciones posibles. En concreto, veremos que las teorías $f(R)$ violan el teorema de Birkhoff, por lo que existirán soluciones de vacío, estáticas y esféricamente simétricas, distintas a la de Schwarzschild, en las que R no tendrá por qué ser constante.

3. Estrellas de neutrones

A la hora de estudiar teorías de gravedad modificada es natural explorar regímenes de campo gravitatorio fuerte en los que sus predicciones difieren en mayor medida de las de la Relatividad General [14]. Las estrellas de neutrones, como entornos de gravedad extrema, ofrecen una buena oportunidad para poner a prueba estas teorías.

En estos objetos la densidad de neutrones va aumentando desde una corteza compuesta principalmente por núcleos en un mar de electrones, pasando por un interior extremadamente rico en neutrones, hasta estados posiblemente más exóticos de la materia en las altas presiones del núcleo. La modelización de estas estructuras se lleva a cabo principalmente a través de las ecuaciones de estado (*equations of state* o *EoS*), que relacionan la presión con la densidad de energía, y tienen un impacto fundamental en la masa de estos objetos, así como en las ondas gravitacionales emitidas por sus *mergers* [15].

Para integrar los sistemas dinámicos de ecuaciones a los que nos enfrentaremos en este trabajo, será necesario especificar una ecuación de estado para la materia nuclear. Dado que las densidades de las estrellas de neutrones son muy superiores a la *densidad de saturación nuclear* ρ_0 , estas son inaccesibles experimentalmente, por lo que todas sus EoS se deducen de manera teórica.

Si bien tradicionalmente las ecuaciones de estado se obtenían por métodos no perturbativos de muchos cuerpos, basados en interacciones entre dos y tres neutrones de acuerdo con datos experimentales de scattering a bajas energías, las versiones más modernas hacen uso de la teoría quiral de campo efectivo (*EFT*) en cromodinámica, basadas en el modelo estándar. A su vez, el reciente descubrimiento de una estrella de neutrones de masa $2,01 \pm 0,04 M_\odot$ ⁴ [16] ha descartado una gran cantidad de ecuaciones de estado exóticas, cuya suavidad a altas densidades imposibilita en general la obtención de masas tan altas.

Teniendo así en cuenta el estado del arte, en este trabajo consideraremos las ecuaciones de estado expuestas en [15], etiquetándolas de la misma manera que en [17] como *soft*, *middle* y *stiff* en referencia al aumento de la presión a medida que la materia se compacta. Una interpolación suave de estas tres EoS se puede observar en la Figura 1.

⁴En este documento, el símbolo $M_\odot$ se refiere a *masas solares*.

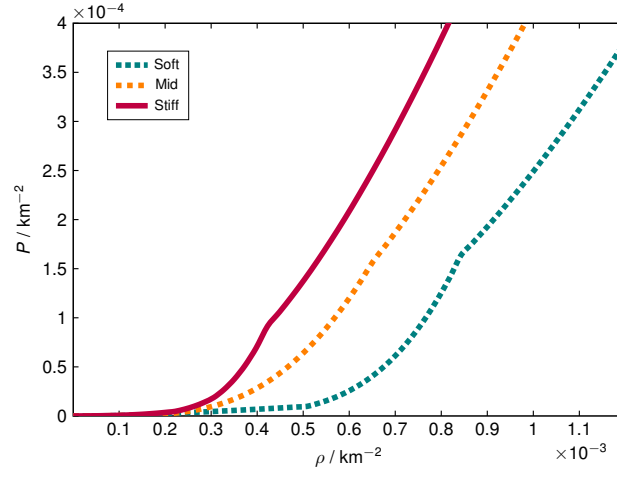


Figura 1: Ecuaciones de estado de materia nuclear para estrellas de neutrones basadas en EFT, obtenidas de [15]. Las curvas son interpolaciones polinómicas de orden 1 de los puntos utilizados.

4. Condiciones de pegado

A la hora de estudiar objetos compactos en distintas teorías de la gravedad, es necesario tener en cuenta las condiciones de pegado. Estas son condiciones que deben verificarse en las fronteras entre regiones espaciotemporales, por ejemplo entre el interior y el exterior de estos objetos. Se derivan de un análisis de geometría diferencial y, como veremos, dependen de la teoría con la que se trabaje.

Dado que en las teorías $f(R)$ la unicidad de la solución exterior garantizada por el teorema de Birkhoff ya no se mantiene, imponer estas condiciones de pegado nos permitirá encontrar las soluciones adecuadas al integrar las ecuaciones diferenciales correspondientes desde el centro de las estrellas hasta el infinito, pasando por su frontera.

4.1. Condiciones de pegado en Relatividad General

Dada una variedad n -dimensional, una hipersuperficie es una subvariedad de $n - 1$ dimensiones embebida en la primera, de tal manera que al restringir el tensor métrico de una a otra a través de un *pull-back* se obtiene la denominada *métrica inducida*.

Sean $(M^\pm, g^\pm)$ dos espaciotiempos de dimensión n con sus métricas correspondientes. Dadas en ellos dos hipersuperficies temporales correspondientes $\Sigma^\pm$ que actúan como fronteras de las regiones $V^\pm$, se busca encontrar un espaciotiempo total M definido como la unión disjunta de V^+ y V^- , de manera que Σ^+ y Σ^- se identifiquen como Σ . Para que este espaciotiempo esté bien definido, es necesario que exista una extensión continua de las métricas $g^\pm$ que coincida con cada una de ellas en las regiones correspondientes $V^\pm$. Para ello, es indispensable que tanto la primera como la segunda *forma fundamental* coincidan en Σ , como se explica detalladamente en [18]. En esta sección daremos una intuición del significado de estos objetos y veremos las consecuencias prácticas de imponer su continuidad en la superficie de las estrellas, que utilizaremos posteriormente para obtener nuestros resultados.

La primera forma fundamental da cuenta de la geometría intrínseca de la hipersuperficie, independientemente del espacio ambiente, y coincide con la métrica inducida anteriormente mencionada. Dados dos sistemas de coordenadas locales $\{x_\pm^\mu\}$ en $M^\pm$, y un tercer sistema de coordenadas $\{\xi^a\}$ intrínsecas a la hipersuperficie Σ ($\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, n - 1$; $a, b, \dots = 1, \dots, n - 1$), la concordancia de la primera forma fundamental en ambos espaciotiempos se expresa

$$h_{ab}^+ = h_{ab}^-, \quad h_{ab}^\pm \equiv g_{\mu\nu}^\pm(x(\xi)) \frac{\partial x_\pm^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x_\pm^\nu}{\partial \xi^b}. \quad (4.1)$$

Los vectores normales a Σ vienen determinados, a excepción de un signo, por las condiciones de ortogonalidad a la superficie y de norma unidad

$$n_\mu^\pm \frac{\partial x_\pm^\mu}{\partial \xi^a} = 0, \quad n_\mu^\pm n^{\pm\mu} = 1, \quad (4.2)$$

al ser estos de tipo tiempo. Escogiendo, por ejemplo, n_μ^- hacia el exterior de V^- y n_μ^+ hacia el interior de V^+ , las bases de los espacios tangentes se identifican:

$$\left\{ n^{+\mu}, \frac{\partial x_+^\mu}{\partial \xi^a} \right\} = \left\{ n^{-\mu}, \frac{\partial x_-^\mu}{\partial \xi^a} \right\}, \quad (4.3)$$

de manera que podemos eliminar la notación $\pm$ y la primera forma fundamental viene descrita por el proyector sobre Σ :

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu, \quad (4.4)$$

cuya expresión se verifica de forma inmediata viendo que anula los vectores normales a la superficie

$$h_{\mu\nu} n^\nu = g_{\mu\nu} n^\nu - n_\mu n_\nu n^\nu = n_\mu - n_\mu = 0, \quad (4.5)$$

y que es idempotente

$$\begin{aligned} h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\rho &= (g^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu)(g^\nu{}_\rho - n^\nu n_\rho) = g^\mu{}_\nu g^\nu{}_\rho - g^\mu{}_\nu n^\nu n_\rho - n^\mu n_\nu g^\nu{}_\rho + n^\mu n_\nu n^\nu n_\rho = \\ &= g^\mu{}_\rho - n^\mu n_\rho - n^\mu n_\rho + n^\mu n_\rho = g^\mu{}_\rho - n^\mu n_\rho = h^\mu{}_\rho. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En definitiva, el primer objeto cuya continuidad en Σ debemos garantizar es este proyector. En las coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie Σ , este vendrá dado por

$$h_{ab} = h_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b} \quad (4.7)$$

La segunda forma fundamental da cuenta de la curvatura *extrínseca* de la hipersuperficie, esto es, según se percibe desde el espacio ambiente. En concreto, esta se puede ver como la derivada covariante del vector normal a la superficie proyectada sobre esta misma:

$$K_{ab} \equiv h^\mu{}_a h^\nu{}_b n_{\mu;\nu},^5 \quad (4.8)$$

y es el segundo objeto cuya continuidad debemos garantizar en la hipersuperficie Σ .

⁵En este trabajo se utiliza la notación de coma y de punto y coma para las derivadas parcial y covariante, respectivamente ($\partial_\nu A_\mu = A_{\mu,\nu}$, $\nabla_\nu A_\mu = A_{\mu;\nu}$).

Para un caso estático y esféricamente simétrico como el que nos ocupará en este trabajo, y en el sistema de coordenadas esféricas en cuatro dimensiones espaciotemporales $\{t, r, \theta, \phi\}$, la forma más general de la métrica es

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\Omega^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.9)$$

donde las exponenciales se introducen por simplicidad y para evitar singularidades de coordenadas, y $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones radiales tanto en el exterior (V^+) como en el interior (V^-) de la estrella u objeto compacto de interés [19]. A su vez, la hipersuperficie de pegado Σ viene descrita simplemente por la condición

$$r = r_0 \quad (4.10)$$

con r_0 el radio de la estrella. Así, la primera forma fundamental en Σ queda

$$ds_{(3)}^2 = e^{2\nu(r_0)}dt^2 - r_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.11)$$

A partir de esta expresión se observa que la continuidad de la primera forma fundamental en la hipersuperficie Σ implica las siguientes igualdades entre el interior y el exterior de la estrella:

$$\left. \begin{aligned} t|_{\text{int}} &= t|_{\text{ext}} + cte \\ r_0|_{\text{int}} &= r_0|_{\text{ext}} \\ \theta|_{\text{int}} &= \theta|_{\text{ext}} \\ \phi|_{\text{int}} &= \phi|_{\text{ext}} + cte \\ \nu(r_0)|_{\text{int}} &= \nu(r_0)|_{\text{ext}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A(r_0)|_{\text{int}} = A(r_0)|_{\text{ext}} \quad (4.12)$$

Para la segunda forma fundamental, calculamos primero $h^\mu{}_\nu$ en el mismo sistema de coordenadas, teniendo en cuenta que dada la simetría el vector normal a la superficie es completamente radial ($n \propto dr \Rightarrow n_\alpha = e^{\lambda(r)}$, $n^\alpha = e^{-\lambda(r)} \Rightarrow g(n, n) = n^\alpha n_\alpha = 1$):

$$h^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu = \delta^\mu{}_\nu - n^\mu n_\nu = \text{diag}(1, 1, 1, 1) - \text{diag}(0, 1, 0, 0) = \text{diag}(1, 0, 1, 1). \quad (4.13)$$

Para la derivada covariante del vector normal, asumimos la conexión de Levi-Civita y utilizamos su expresión con los símbolos de Christoffel, obteniendo así tres componentes no nulas:

$$n_{\mu;\nu} = n_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha n_\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha e^{\lambda(r)} \Rightarrow \begin{cases} n_{t;t} = \nu'(r)e^{2\nu(r)}e^{-\lambda(r)} \\ n_{\theta;\theta} = -re^{-\lambda(r)} \\ n_{\phi;\phi} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda(r)} \end{cases}, \quad (4.14)$$

Uniendo ambos resultados obtenemos la expresión de la segunda forma fundamental en la hipersuperficie:

$$\begin{cases} K_{tt} = e^{2\nu(r_0)} e^{-\lambda(r_0)} \nu'(r_0) \\ K_{\theta\theta} = -r_0 e^{-\lambda(r_0)} \\ K_{\phi\phi} = -r_0 \sin^2 \theta e^{-\lambda(r_0)} \end{cases} . \quad (4.15)$$

Así, la continuidad de la segunda forma fundamental en Σ implica

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda(r_0)}|_{\text{int}} &= e^{-\lambda(r_0)}|_{\text{ext}} \\ \nu'(r_0)|_{\text{int}} &= \nu'(r_0)|_{\text{ext}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B(r_0)|_{\text{int}} = B(r_0)|_{\text{ext}} \\ A'(r_0)|_{\text{int}} = A'(r_0)|_{\text{ext}} \end{cases} . \quad (4.16)$$

En consecuencia, a la hora de integrar numéricamente cualquier sistema de ecuaciones atravesando la superficie de la estrella, deberemos garantizar en esta la continuidad del coeficiente métrico radial $B(r)$, así como del temporal $A(r)$ y su derivada $A'(r)$. La solución exterior en Relatividad General es bien conocida y viene garantizada por el Teorema 1, visto más adelante. Así, introduciendo además las expresiones de $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ deducidas con más detenimiento en la Sección 5, tenemos

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda(r)}|_{\text{int}} &= \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{1/2} \\ e^{-\lambda(r)}|_{\text{ext}} &= \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(r_0) = M_0, \quad (4.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu'(r)|_{\text{int}} &= \frac{4\pi P r^3 + M(r)}{r(r - 2M(r))} \\ \nu'(r)|_{\text{ext}} &= \frac{M_0}{r(r - 2M_0)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(r_0) = 0, \quad (4.18)$$

donde $M(r)$ es la masa encerrada en una esfera de radio r , M_0 es la masa total de la estrella y $P(r)$ es la presión a una distancia r del centro.

4.2. Condiciones de pegado en teorías $f(R)$

Para el caso de las teorías $f(R)$, un análisis de distribuciones como el realizado en [Senovilla] permite ver que para que las ecuaciones de campo (2.4) tengan sentido, deben cumplirse condiciones adicionales a las de la Relatividad General. Estas ecuaciones se

pueden reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - f_{2R}(R) (\nabla_\mu \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho R) - \\ - f_{3R}(R) (\nabla_\mu R \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \nabla_\rho R \nabla^\rho R) = \kappa T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En estas ecuaciones, el término que acompaña a f_{2R} contiene expresiones del tipo $\nabla_\mu \nabla_\nu \underline{R}$ y $\nabla_\mu \underline{R} \nabla_\nu \underline{R}$ (donde los símbolos subrayados representan magnitudes entendidas como distribuciones, que contienen deltas de Dirac $\underline{\delta}^\Sigma$ en la hipersuperficie), con singularidades de la forma

$$f_{3R}(\underline{R}) \left(\nabla_\mu (H \underline{\delta}^\Sigma) + [R] n_\mu \underline{\delta}^\Sigma \right) \left(\nabla_\nu (H \underline{\delta}^\Sigma) + [R] n_\nu \underline{\delta}^\Sigma \right) \quad (4.20)$$

donde H es la *parte singular* de la distribución escalar de curvatura $\underline{R}$, que debe anularse para que las ecuaciones de campo tengan sentido, y la notación $[A]$ simboliza el salto en la magnitud A a través de la hipersuperficie Σ . Estas singularidades no pueden cancelarse en las ecuaciones de campo, de manera que se requiere inevitablemente que $[R] = 0$, a no ser que $f_{3R} = 0$.

Precisamente, en este trabajo nos centraremos en la teoría $f(R) = aR^2$, de tal manera que $f_{3R} = 0$. No obstante, veamos que la condición $[R] = 0$ se mantiene en nuestro caso: dado que nuestra intención es describir la frontera entre un interior de materia y un exterior de vacío perfecto, debemos excluir la posibilidad de capas superficiales o membranas [18]. Esta restricción, de manera práctica, se traduce en que el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ solo puede presentar discontinuidades finitas en la hipersuperficie Σ para el contenido de materia (la densidad de energía ρ). La distribución de $T_{\mu\nu}$ en el caso de $f_{3R} = 0$ toma la forma

$$\underline{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^+ \underline{\theta} + T_{\mu\nu}^- (1 - \underline{\theta}) + (\tau_{\mu\nu} + \tau_\mu n_\nu + \tau_\nu n_\mu + \tau n_\mu n_\nu) \underline{\delta}^\Sigma + \underline{t}_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

donde $\underline{\theta}$ es la distribución asociada a la función escalón de Heaviside, que vale 1 en el exterior (V^+) de la estrella (donde aparece por tanto $T_{\mu\nu}^+$) y 0 en el interior V^- (donde aparece entonces $T_{\mu\nu}^-$). Los últimos dos términos, regidos por la delta de Dirac $\underline{\delta}^\Sigma$ y la distribución $\underline{t}_{\mu\nu}$, contienen las partes singulares que deben anularse para que el tensor de energía-momento presente solo las discontinuidades finitas en ρ que hemos mencionado. Como se demuestra en [18], esta imposición conduce a

$$\begin{cases} [K_{\beta\mu}] = 0. \\ f_{2R}(R_\Sigma)[R] = 0 \\ f_{2R}(R_\Sigma)n^\rho[\nabla_\rho R] \end{cases}, \quad (4.22)$$

donde la primera condición coincide con RG, y las últimas dos, para nuestro caso $f(R) = aR^2$ en el que $f_{2R} \neq 0$, implican

$$[R] = 0, \quad n^\rho [\nabla_\rho R] = 0, \quad (4.23)$$

es decir, que el salto del escalar de curvatura y de su derivada covariante a través de Σ (en dirección radial) deberán anularse necesariamente.

En conclusión, para las teorías $f(R)$ que se estudiarán en este trabajo, será necesario imponer, de manera añadida a las condiciones de pegado de RG (4.12) y (4.16) la continuidad y la diferenciabilidad de la función $R(r)$ al integrar radialmente. Es por esto que, generalmente, las soluciones que cumplan el pegado en Relatividad General no lo serán a su vez en las teorías de gravedad métrica $f(R)$ [18].

5. Soluciones en Relatividad General

Revisadas ya las condiciones de pegado a tener en cuenta al atravesar la superficie de la estrella, y habiendo escogido ya las ecuaciones de estado a utilizar, es momento de obtener las funciones de interés en el interior y el exterior de las estrellas de neutrones. Tal y como se expuso en la Sección 4, consideraremos soluciones estáticas y esféricamente simétricas, cuya métrica más general toma la forma (4.9), siendo los coeficientes métricos $A(r)$ y $B(r)$ independientes del tiempo.

5.1. Solución exterior

En Relatividad General, para una región de vacío perfecto ($T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \rho = P = 0$) alrededor de una fuente esféricamente simétrica, contamos con un resultado bien conocido:

Teorema 1 (de Birkhoff). *En Relatividad General, toda solución de vacío esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein es necesariamente estática y coincide con la métrica de Schwarzschild:*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

donde M_0 es la masa de la fuente.

En el caso que nos ocupa, las estrellas serán estáticas además de presentar simetría esférica, aunque cabe destacar que el teorema de Birkhoff predice una métrica exterior estática aunque la estrella no lo fuese, siempre y cuando esta mantenga su simetría esférica (estrellas pulsantes u objetos en colapso gravitacional, por ejemplo).

Gracias a este resultado, no será necesario por nuestra parte resolver ningún sistema de ecuaciones en el exterior en Relatividad General, y tomaremos las funciones analíticas

$$A_{\text{ext}}(r) = \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right), \quad B_{\text{ext}}(r) = \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} \quad (5.2)$$

como referencia para garantizar el pegado con las soluciones interiores.

5.2. Soluciones interiores

Por ser estática y esféricamente simétrica, la métrica interior de la estrella tiene la forma general de la ecuación (4.9), con $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ funciones desconocidas en este caso.

Para encontrarlas basta resolver las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

con $\kappa = 8\pi$ en unidades naturales. Por simplicidad, consideraremos que el interior de la estrella de neutrones se puede describir como un fluido perfecto, cuyo tensor de energía-momento es de la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - Pg_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

donde ρ es la densidad de energía, P es la presión y u_μ es la cuatriveicidad del fluido. Antes de resolver las ecuaciones de campo, consideraremos las condiciones de conservación

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (5.5)$$

Al tratarse de un fluido estático, la cuatriveicidad es puramente temporal ($u = u^t \partial_t$). Teniendo en cuenta su normalización para partículas masivas, tenemos

$$u_\mu u^\mu = u_t u^t = g_{tt} u^t u^t = e^{2\nu(r)} (u^t)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad u^t = e^{-\nu(r)}, \quad (5.6)$$

por lo que el tensor energía-momento es diagonal, al serlo también la métrica y ser la cuatriveicidad puramente temporal. Dada la simetría del sistema, la conservación de las componentes angulares y temporal de $T_{\mu\nu}$ es trivial y no aporta información relevante. Para la componente radial, sustituyendo las expresiones correspondientes,

$$\nabla_\mu T^{\mu r} = \frac{\partial}{\partial r} T^{rr} + \Gamma_{tt}^r T^{tt} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} \quad \Rightarrow \quad P' = -(\rho + P)\nu', \quad (5.7)$$

donde la prima representa la derivada con respecto a la coordenada radial r .

Las ecuaciones de campo (5.3), sustituyendo igualmente las cuatriveicidades y las componentes del tensor energía-momento, se escriben

$$\frac{2r\lambda' + e^{2\lambda} - 1}{r^2 e^{2\lambda}} = 8\pi\rho, \quad \frac{2r\nu' - e^{2\lambda} + 1}{r^2 e^{2\lambda}} = 8\pi P, \quad (5.8)$$

donde hemos omitido las correspondientes a las componentes angulares por no aportar estas más información. La primera igualdad se puede reformular con la derivada de un producto, obteniendo una ecuación diferencial para la masa cumulativa:

$$\frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] = 8\pi\rho r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (5.9)$$

con $M(r) = \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\lambda})$ la masa contenida en una esfera de radio r . Despejando la exponencial, tenemos la relación

$$B(r) = e^{2\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (5.10)$$

que podemos sustituir ahora en la segunda ecuación de (5.8), obteniendo

$$\nu' = \frac{4\pi Pr^3 + M}{r(r - 2M)}. \quad (5.11)$$

Despejando ν' de la ecuación (5.7) e igualando, se tiene

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{4\pi Pr^3 + M}{r(r - 2M)}, \quad (5.12)$$

que se conoce como la *ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* o *TOV* [19].

Por último, recordando la expresión del coeficiente temporal de la métrica dado en la ecuación (4.9), reescribimos (5.7) introduciendo además la expresión de P' proporcionada por la ecuación *TOV*:

$$A(r) = e^{2\nu} \Rightarrow A'(r) = 2\nu'e^{2\nu} = 2\nu'A(r) \Rightarrow \frac{A'}{A} = -\frac{2P'}{\rho + P} = \frac{2(4\pi r^3 P + M)}{r(r - 2M)}. \quad (5.13)$$

De esta manera, tras estas manipulaciones, las ecuaciones (5.9), (5.12) y (5.13), junto con una ecuación de estado $\rho(P)$ forman un sistema completo de ecuaciones diferenciales para las funciones $P(r)$, $\rho(r)$, $M(r)$ y $A(r)$:

$$\begin{cases} M' = 4\pi\rho r^2 \\ P' = -(\rho + P) \frac{4\pi Pr^3 + M}{r(r - 2M)} \\ \frac{A'}{A} = \frac{2(4\pi r^3 P + M)}{r(r - 2M)} \\ \rho = \rho(P) \end{cases}. \quad (5.14)$$

5.3. Condiciones iniciales y de pegado

La obtención de soluciones interiores es lo que se conoce como un *problema de contorno libre*: ya que no conocemos a priori el radio estelar r_0 , deberemos integrar el

sistema de ecuaciones (5.14) hasta dar con una condición que garantice que este se ha alcanzado. En nuestro caso, dado que de la integración obtenemos directamente la función $P(r)$, la condición (4.18) será la señal para detener la resolución.

En la práctica, dado que las ecuaciones de estado $\rho = \rho(P)$ que utilizaremos (Figura 1) son interpolaciones y no funciones analíticas, la resolución del sistema será numérica. En consecuencia, se tomarán varias precauciones al implementar el código: en primer lugar, la integración no podrá comenzar en $r_{\text{init}} = 0$, ya que esto daría lugar a divergencias en (5.12) y (5.13). Por otro lado, dado el error del método, es posible que las condiciones (4.17) y (4.18) no se den nunca, por lo que en su lugar se detendrá la integración cuando $P(r)$ o $M(r)$ alcancen un valor suficientemente pequeño.

Dado que sólo tres de las ecuaciones del sistema a integrar son diferenciales, necesitaremos tres condiciones iniciales para resolverlo. Ya que el radio inicial será despreciable, la masa $M(r_{\text{init}})$ contenida debajo de este lo será también:

$$M(r_{\text{init}}) \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

En lo referente al coeficiente métrico $A(r)$, este está restringido por la condición de pegado (4.12) junto con la solución exterior fija (5.2), como ya hemos mencionado. Dado que la ecuación diferencial (5.13) es invariante bajo un reescalado uniforme de A (esto es, si $A(r)$ es solución, entonces $k \cdot A(r)$ con k constante también lo es), garantizar el pegado es sencillo: en primer lugar, se escoge un valor inicial arbitrario A_{aux} . Tras la integración se obtiene una función $A^*(r)$, de manera que el valor de $A^*(r_0)$ no coincidirá con el exterior $(1 - 2M_0/r_0)$. No obstante, la solución puede ser reescalada,

$$A(r) = A^*(r) \cdot \frac{1 - 2M_0/r_0}{A^*(r_0)}, \quad (5.16)$$

garantizando así el pegado con la métrica de Schwarzschild exterior. Veamos que esta resolución garantiza también la continuidad de $A'(r)$ exigida por las condiciones de pegado de la Sección 4: derivando la expresión de $A_{\text{ext}}(r)$ de la ecuación (5.2) y evaluándola en r_0 , obtenemos

$$A_{\text{ext}}(r_0) = \frac{2M_0}{r_0^2}. \quad (5.17)$$

Sustituyéndola en la ecuación diferencial interior (5.13) evaluada asimismo en $r = r_0 \Rightarrow P = 0$, $M = M_0$ (lo que implica asumir la condición de pegado $A'(r_0)|_{\text{int}} = A'(r_0)|_{\text{ext}}$), obtenemos

$$\frac{2M_0/r_0^2}{A_0} = \frac{2M_0}{r_0(r_0 - 2M_0)} \Rightarrow A_0 = 1 - \frac{2M_0}{r_0}, \quad (5.18)$$

que coincide con la solución exterior en $r = r_0$, demostrando así que la sustitución era correcta y por tanto $A'(r)$ es continua en la superficie de la estrella.

En lo que respecta al coeficiente $B(r)$, basta ver que la expresión explícita interior (5.10) coincide directamente con la de la métrica de Schwarzschild con M_0 . Así, la continuidad del coeficiente radial de la métrica se desprende directamente de la de la función de masa.

De esta manera quedan garantizadas las condiciones de pegado expuestas en la Sección 4, por lo que el valor inicial restante, la presión central $P(r_{\text{init}}) = P_c$, queda libre. Será barriendo distintos valores de P_c que elaboraremos, por ejemplo, los diagramas masa-radio de las Secciones 5 y 6.

5.4. Resultados

Una vez fijados los valores iniciales para el sistema (5.14) se puede resolver el sistema (5.14) y representar los perfiles radiales de presión, densidad de energía y masa acumulativa en el interior de la estrella,⁶ como se muestra en la Figura 2. Su comportamiento es el esperado: la presión es estrictamente decreciente y se acerca arbitrariamente a cero en el radio de la estrella, mientras que la masa es estrictamente creciente y alcanza un valor M_0 en el mismo punto. Si bien tanto el radio como la masa son mayores para cada EoS, los perfiles de densidad se cruzan, de manera que *Soft* da lugar a estrellas de mayor densidad central que sin embargo decae rápidamente, y lo contrario para *Stiff*.

También integrando se obtienen los coeficientes métricos $A(r)$ y $B(r)$. La Figura 3 muestra en el interior y exterior estelar el primero de ellos antes y después del ajuste de su valor inicial, como se indica en la ecuación (5.16), mientras que $B(r)$ no depende él y por tanto se muestra directamente pegado. A partir de ambos coeficientes, es posible calcular y representar también el escalar de curvatura a partir de su definición. Como se observa en la Figura 4 la curvatura es nula en el exterior de la estrella, resultado conocido de Relatividad General que se desprende directamente de la traza de las ecuaciones (5.3) (en el vacío, $T = 0$ y por tanto $R = 0$).

Para comprobar la condición de pegado restante (4.16), se muestran en la Figura 5 las derivadas radiales de los coeficientes métricos. En efecto, $A'(r)$ es claramente

⁶Todos los cálculos numéricos, desde la implementación de las ecuaciones de estado hasta la integración de los sistemas de ecuaciones, pasando por la elaboración de gráficas, métodos de bisección y disparo, etc. son trabajo propio y original. El código escrito en *Mathematica* se puede consultar en https://github.com/NestorRiveroGonzalez/TFM_NestorRiveroGonzalez.

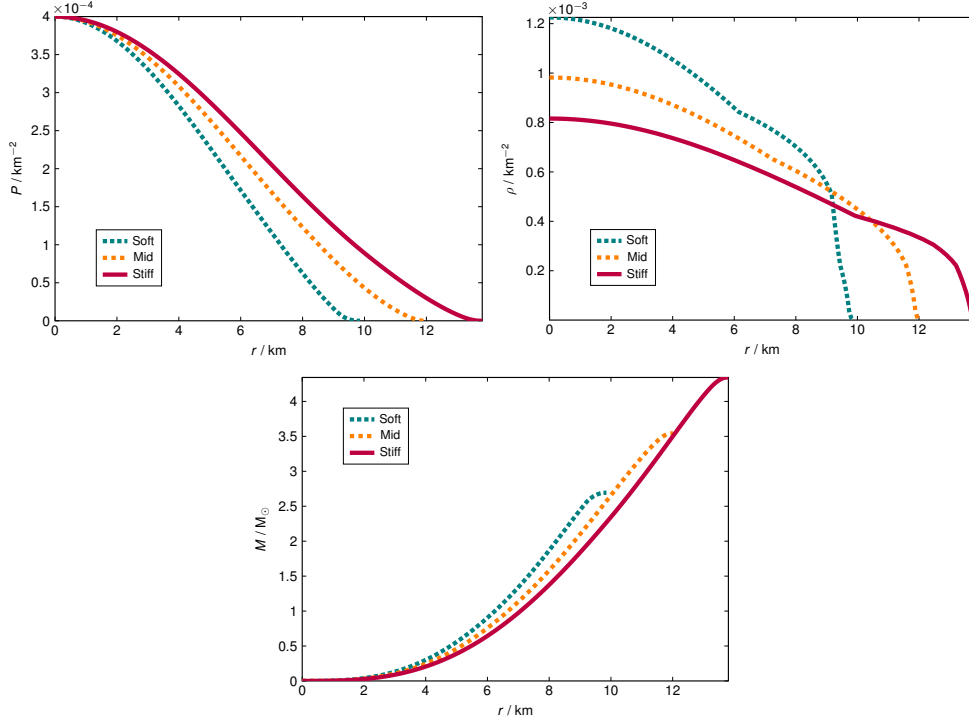


Figura 2: Perfiles interiores de presión, densidad de energía y masa acumulativa obtenidos tras la integración del sistema (5.14) para las ecuaciones de estado *Soft*, *Middle* y *Stiff* y una presión central $P_c = 4 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. Las dos primeras se anulan en el radio de la estrella r_0 , en este caso 9,855 km para *Soft*, 12,011 km para *Middle* y 13,805 km para *Stiff*; mientras que la función de masa alcanza en este su valor máximo, equivalente a la masa total $M_0 = 1,824 M_\odot$ para *Soft*, $2,499 M_\odot$ para *Middle* y $2,942 M_\odot$ para *Stiff*.

continua en la superficie estelar y, aunque no se ha impuesto en el procedimiento, $B'(r)$ también lo es. La diferencia aparece en la segunda derivada, que sigue siendo continua para A pero ya no para B .

Dado que la presión central es un valor inicial libre que da lugar a masas y radios estelares diferentes, barriendo un rango de valores se puede construir un *diagrama masa-radio* parametrizado por P_c . En la Figura 6 se muestran los obtenidos para las tres ecuaciones de estado *Soft*, *Middle* y *Stiff*. Si bien a presiones centrales bajas las masas obtenidas son muy similares para todas las *EoS*, cada cual da lugar a masas máximas mayores, obtenidas a altas presiones centrales. Los radios estelares, por otro lado, sí están claramente diferenciados entre ecuaciones de estado para todo el rango de presiones.

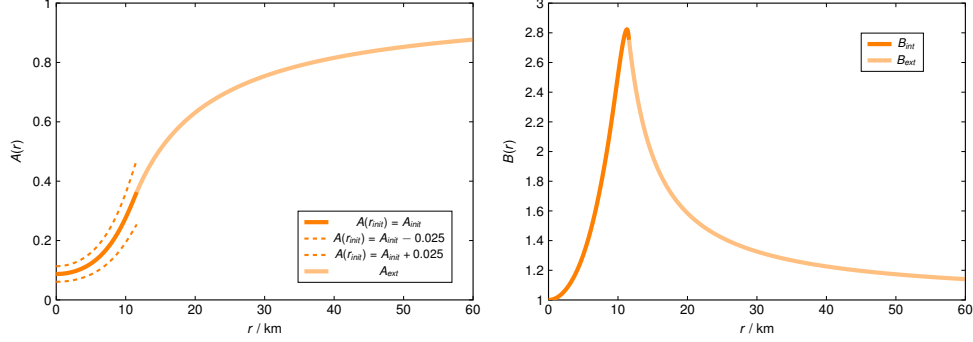


Figura 3: Coeficientes métricos $A(r)$ y $B(r)$ obtenidos tras la integración del sistema (5.14) para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. Para el coeficiente A se muestran además dos soluciones interiores con valores desviados de A_{init} , por arriba y por abajo. Se observa claramente cómo el error en la condición inicial se propaga por la función, imposibilitando el pegado con la única solución exterior de Schwarzschild. Por otro lado, la condición inicial de $B(r)$ está fijada a priori, lo que garantiza el pegado tal y como se observa. A distancias mayores, ambos coeficientes tienden a 1, A por debajo y B por arriba, recuperando en el infinito la métrica de Minkowski.

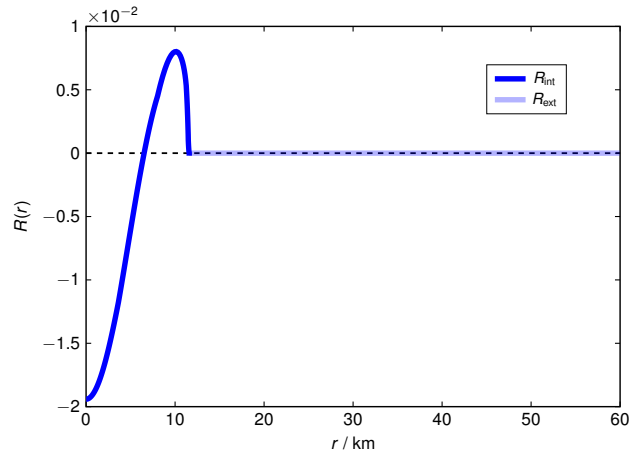


Figura 4: Escalar de curvatura $R(r)$ obtenido tras la integración del sistema (5.14) para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. A partir del radio de la estrella r_0 , la función es idénticamente nula salvo la precisión en el método de integración.

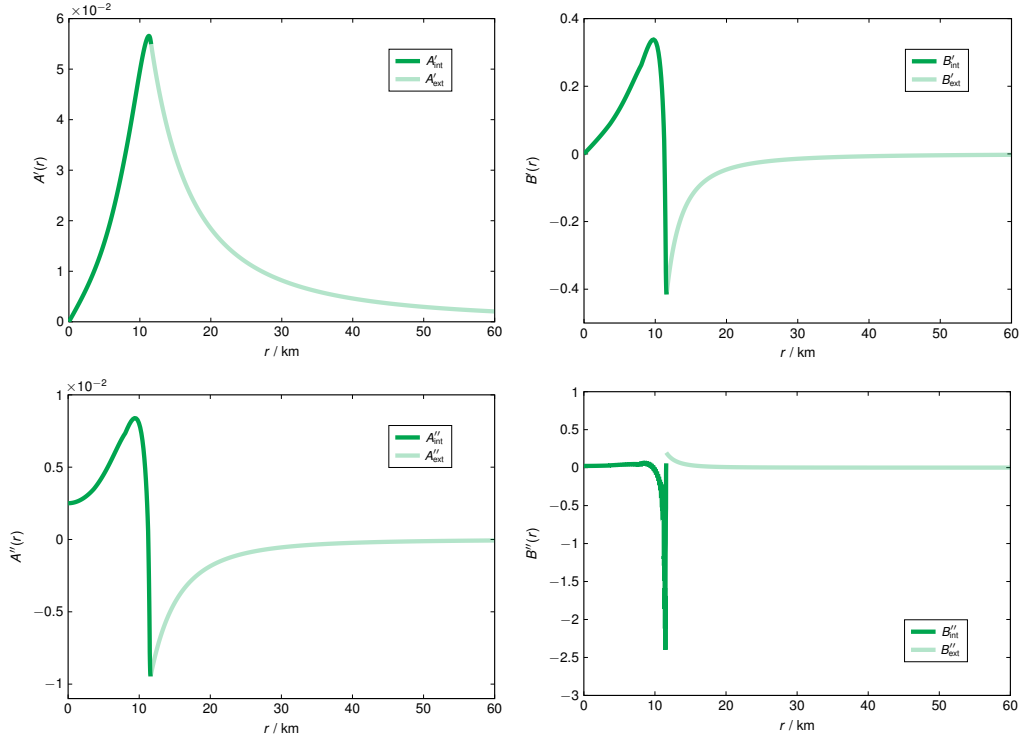


Figura 5: Primeras y segundas derivadas radiales de los coeficientes métricos $A(r)$ y $B(r)$ obtenidos tras la integración del sistema (5.14) para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. De las cuatro, sólo $B''(r)$ presenta una discontinuidad clara en $r = r_0$.

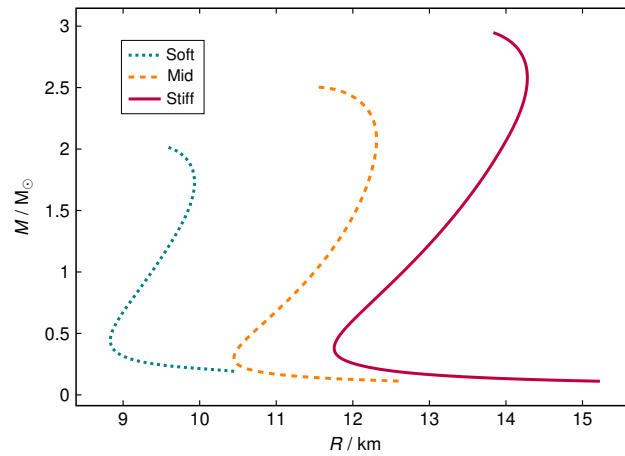


Figura 6: Diagramas masa-radio correspondientes a las ecuaciones de estado *Soft*, *Middle* y *Stiff* para el rango de presiones $P_c = [6 \cdot 10^{-6}, 8 \cdot 10^{-4}] \text{ km}^{-2}$ en Relatividad General.

6. Soluciones en el modelo $f(R) = aR^2$

En esta sección, considerando la misma métrica estática y esféricamente simétrica de la ecuación (4.9), obtendremos las funciones correspondientes en el interior y exterior de la estrella para el modelo $f(R) = aR^2$, $a \in \mathbb{R}^7$ y las compararemos con sus análogas en Relatividad General. Dado el modelo concreto, las derivadas con respecto a R que aparecerán en las ecuaciones serán

$$\begin{cases} f_R = 1 + 2aR \\ f_{2R} = 2a \\ f_{3R} = 0 \end{cases}, \quad (6.1)$$

siendo esta última de especial importancia por simplificar algunas ecuaciones, y por lo discutido en la Sección 4.

6.1. Soluciones interiores

Al igual que en Relatividad General, consideraremos el interior de la estrella como un fluido perfecto cuyo tensor energía-momento viene descrito por la ecuación (5.4). No obstante, las ecuaciones de campo a resolver ya no son las de Einstein, sino las expresiones (2.4). Calculando el tensor de Ricci a partir de la métrica (4.9) y sustituyéndolo en estas, obtenemos tres ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} \frac{A'}{4B} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{rB} &= \frac{1}{1+f_R} \left[-\kappa\rho A \right. \\ &\left. + A \left(\frac{B'}{2B^2} - \frac{2}{rB} \right) f'_R - \frac{A}{B} f''_R + \frac{A}{2} (R + f(R)) \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{B'}{rB} &= \frac{1}{1+f_R} \left[-\kappa P B \right. \\ &\left. + \left(\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r} \right) f'_R - \frac{B}{2} (R + f(R)) \right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(-\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) &= \frac{1}{1+f_R} \left[-\kappa P r^2 + \frac{r^2}{B} f''_R \right. \\ &\left. + \left(\frac{A'r^2}{2BA} - \frac{B'r^2}{2B^2} + \frac{r}{B} \right) f'_R - \frac{r^2}{2} (R + f(R)) \right], \end{aligned} \quad (6.4)$$

⁷A lo largo de este trabajo omitiremos las unidades de R (km^{-2}) y de a (km) por cuestiones de claridad y limpieza.

donde hemos utilizado la expresión (5.4) del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$. Llevando a cabo una breve manipulación detallada en [17] para despejar las derivadas de mayor orden, se llega al siguiente sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas:

$$A'' = \frac{A'}{2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{2B'A}{rB} + \frac{2A}{(1+f_R)} \left[-\kappa BP - \frac{B}{2}R + \left(\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r} \right) f_{2R}R' - \frac{B}{2}f(R) \right], \quad (6.5)$$

$$B' = \frac{2rB}{3(1+f_R)} \left[\kappa B(\rho + 3P) + \frac{B}{2}R - \frac{3A'}{2rA} + Bf(R) - f_R \left(\frac{B}{2}R + \frac{3A'}{2rA} \right) - \left(\frac{3}{r} + \frac{3A'}{2A} \right) f_{2R}R' \right], \quad (6.6)$$

$$R'' = R' \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} - \frac{2}{r} \right) - \frac{B}{3f_{2R}} [\kappa(\rho - 3P) - (1 - f_R)R - 2f(R)] - \frac{f_{3R}}{f_{2R}} R'^2, \quad (6.7)$$

$$P' = -\frac{\rho + P}{2} \frac{A'}{A}, \quad (6.8)$$

válido para cualquier teoría $f(R)$.⁸ Estas, junto con la ecuación de estado $\rho = \rho(P)$, nos permitirán obtener las cinco funciones de interés $P(r)$, $\rho(r)$, $A(r)$, $B(r)$ y $R(r)$. Al ser las ecuaciones de campo distintas a las de Einstein, en ningún momento de la derivación aparece una función de masa acumulativa, como sí ocurría en Relatividad General. Su obtención a partir de las soluciones del sistema se explicará en la Subsección 6.4.

6.2. Soluciones exteriores

A diferencia de la Relatividad General, las teorías $f(R)$ no cuentan con ningún teorema que garantice la unicidad de la solución exterior. No obstante, el sistema de ecuaciones (6.5) – (6.8) mantiene su validez en el exterior de la estrella, al derivarse de la métrica (con la misma forma dentro y fuera del objeto), el tensor energía-momento (que se anulará en este caso al tener un vacío perfecto) y las ecuaciones de campo (2.4). Dado que la presión y la densidad de energía en el exterior son idénticamente nulas, la ecuación (6.8) desaparece y con ella la necesidad de una ecuación de estado. Por tanto,

⁸En nuestro caso, dado que $f_{3R} = 0$, el último término de la ecuación (6.7) desaparece y esta pierde su dependencia con R'^2 , lo que facilitará la integración.

el sistema a resolver en el exterior será

$$A'' = \frac{A'}{2} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{2B'A}{rB} + \frac{2A}{(1+f_R)} \left[-\frac{B}{2}R + \left(\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r} \right) f_{2R}R' - \frac{B}{2}f(R) \right], \quad (6.9)$$

$$B' = \frac{2rB}{3(1+f_R)} \left[\frac{B}{2}R - \frac{3A'}{2rA} + Bf(R) - f_R \left(\frac{B}{2}R + \frac{3A'}{2rA} \right) - \left(\frac{3}{r} + \frac{3A'}{2A} \right) f_{2R}R' \right], \quad (6.10)$$

$$R'' = R' \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} - \frac{2}{r} \right) - \frac{B}{3f_{2R}} [-(1-f_R)R - 2f(R)] - \frac{f_{3R}}{f_{2R}} R'^2. \quad (6.11)$$

Dado que la solución exterior se obtiene integrando a partir del radio estelar, la implementación de las condiciones de pegado es trivial en este caso. Conociendo las funciones interiores, bastará con fijar los valores iniciales de sus análogas exteriores a los obtenidos en r_0 :

$$\begin{cases} A_{\text{ext}}(r_0) = A_{\text{int}}(r_0) \\ A'_{\text{ext}}(r_0) = A'_{\text{int}}(r_0) \\ B_{\text{ext}}(r_0) = B_{\text{int}}(r_0) \\ R_{\text{ext}}(r_0) = R_{\text{int}}(r_0) \\ R'_{\text{ext}}(r_0) = R'_{\text{int}}(r_0) \end{cases}, \quad (6.12)$$

garantizando así las condiciones (4.12) y (4.16) que ya se imponían en RG, así como las adicionales de (4.16), correspondientes a $f(R)$.⁹

Antes de continuar, veamos que ya es posible extraer información del sistema de ecuaciones (6.9) – (6.11) sin necesidad de integrarlo. Dado el éxito predictivo de la Relatividad General, podemos realizar un análisis perturbativo del escalar de curvatura alrededor de la solución de RG R_0 , tomando $R = R_0 + R_1$ con

$$R_1 \ll R_0 = \kappa T, \quad (6.13)$$

donde la perturbación R_1 debe estar acotada para garantizar la estabilidad de la solución. Introduciéndola en (6.11) tal como se muestra en [17] obtenemos la ecuación dinámica

$$\begin{aligned} R_1'' = & -R_0'' + R_0' \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} - \frac{2}{r} \right) - \frac{f_{3R}(R_0)}{f_{2R}(R_0)} R_0'^2 \\ & - \frac{B}{3f_{2R}(R_0)} (R_0 f_R(R_0) - 2f(R_0)) + \delta R_1' + \gamma R_1, \end{aligned} \quad (6.14)$$

⁹La condición de pegado referente a la derivada covariante de R se corresponde con la de $R' = \frac{dR}{dr}$, como se menciona en la Sección 4.

donde los coeficientes δ y γ se definen como

$$\delta = \frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} - \frac{2}{r} - \frac{2R_0 f_{3R}(R_0)}{f_{2R}(R_0)}, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{B}{3f_{2R}(R_0)} \left[1 + R_0 f_{2R}(R_0) + f_R(R_0) \right. \\ & \left. - \frac{f_{3R}(R_0)}{f_{2R}(R_0)} (2f(R_0) + R_0 f_R(R_0)) \right] \\ & + \frac{R_0^2}{f_{2R}(R_0)} \left(f_{4R}(R_0) - \frac{f_{3R}^2(R_0)}{f_{2R}(R_0)} \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Particularizando ahora para la solución exterior, es decir, $R_0 = R'_0 = 0$, el coeficiente γ toma la forma

$$\gamma = \frac{B}{3f_{2R}(0)} \left(1 + f_R(0) - \frac{2f_{3R}(0)f(0)}{f_{2R}(0)} \right), \quad (6.17)$$

mientras que la ecuación (6.14) queda

$$R_1'' = \frac{2f(R_0)B}{3f_{2R}(R_0)} + \delta R_1' + \gamma R_1. \quad (6.18)$$

Por simplicidad, consideremos ahora las teorías $f(R) = aR^2$, que son las que estudiaremos en este trabajo. Así, sustituyendo las expresiones (6.1) en esta última, obtenemos la ecuación diferencial

$$R_1'' = \delta R_1' + \frac{B}{6a} R_1. \quad (6.19)$$

Las soluciones de la ecuación (6.19) dependerán del signo de a (dado que B es estrictamente positivo), de manera que un valor positivo daría como solución una combinación lineal de exponenciales creciente y decreciente. Dado que la primera no está acotada sino que se aleja arbitrariamente de 0 y por tanto imposibilita el acuerdo con RG, deducimos que es necesario un valor negativo de a para lograr soluciones asintóticamente Schwarzschild ($a = 0$ sería simplemente la Relatividad General). Siendo así, el último sumando de (6.19) será un término de amortiguamiento, la perturbación R_1 será entonces una función oscilatoria del radio, y así deberá reflejarse en el perfil de $R(r)$.

6.3. Condiciones iniciales

Dado que las ecuaciones (6.5) y (6.7) son de segundo orden, serán necesarias seis condiciones iniciales en el interior de la estrella, y no cuatro:¹⁰ A , A' , B , R , R' y P en $r = 0$ (en nuestro caso, un valor r_{init} muy cercano a 0, por los mismos motivos que en Relatividad General). La presión, como magnitud física, debe ser finita en todo el espacio, y particularmente en el centro de la estrella. Al estar acoplado, el sistema (6.5) – (6.8) debe ser regular para evitar que cualquier divergencia se propague a la presión. Así, tomando el límite $r \rightarrow r_{\text{init}}$ en la ecuación (6.4), los términos multiplicados por r desaparecen y tenemos

$$\frac{1}{B(r_{\text{init}})} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B(r_{\text{init}}) = 1. \quad (6.20)$$

Procediendo de la misma manera sobre la ecuación (6.2), en el límite $r \rightarrow r_{\text{init}}$ los términos que multiplican a r^{-1} deben anularse. Así,

$$\begin{cases} \frac{A'(r_{\text{init}})}{B} = A'(r_{\text{init}}) = 0 \\ \frac{2A(r_{\text{init}})f'_R}{(1+f_R)B(r_{\text{init}})} = \frac{2A(r_{\text{init}})f_{2R}R'(r_{\text{init}})}{(1+f_R)} = 0 \Rightarrow R'(r_{\text{init}}) = 0 \end{cases}, \quad (6.21)$$

donde se ha utilizado la regla de la cadena para sustituir¹¹ $f'_R = \frac{df_R}{dr} = \frac{df_R}{dR} \frac{dR}{dr} = f_{2R}R'$, y $A(r_{\text{init}})$ no puede anularse ya que daría lugar a una divergencia en la derivada de la presión expresada en la ecuación (6.8). Tras este análisis de regularidad quedan fijadas tres de las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} B(r_{\text{init}}) = 1 \\ A'(r_{\text{init}}) = 0 \\ R'(r_{\text{init}}) = 0 \end{cases}, \quad (6.22)$$

y $P(r_{\text{init}}) = P_c$ será nuestro parámetro libre al igual que en Relatividad General.

Llegados a este punto, quedan por fijar los valores de A y R en el centro de la estrella. Dado que el pegado en la superficie estelar se garantiza por construcción, encontraremos las condiciones iniciales restantes del interior imponiendo otro requisito: a distancias suficientemente grandes, debemos recuperar la métrica de Schwarzschild

¹⁰Las cuatro ecuaciones expuestas, junto con las definiciones triviales $A'' = dA'/dr$ y $R'' = dR'/dr$, forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales acopladas *de primer orden*, por lo que se necesitarán seis condiciones iniciales.

¹¹A pesar de consistir en funciones de R , los factores f_R no se consideran nunca nulos, y ni siquiera se explicita su dependencia con r , ya que este procedimiento debe ser válido para toda teoría $f(R)$.

que medimos experimentalmente. Esta condición asintótica es mucho más desafiante que las que encontramos en RG, dado que requerirá una integración interior *y exterior* hasta grandes distancias, y no contamos con ninguna propiedad de reescalado como la que aplicamos sobre la ecuación (5.13). Por ello, y por limitaciones en el tiempo de computación, seguiremos este procedimiento sólo para el coeficiente $A(r)$ y tomaremos para $R(r)$ el valor $R(r_{\text{init}}) \approx \kappa T(r_{\text{init}}) = \kappa(\rho(r_{\text{init}}) - 3P_c)$ (esto es, el de Relatividad General, extraído de la traza de las ecuaciones de Einstein), que resulta ser una buena aproximación como se demuestra en [17].

Para el coeficiente $A(r)$, la propiedad de ser asintóticamente Schwarzschild se obtiene tomando el límite de su expresión en (5.2):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) = 1. \quad (6.23)$$

No obstante, dado que la integración hasta el infinito no es posible, haremos uso del *método del disparo* para encontrar el valor inicial de A : partiendo de un valor arbitrario A_{aux} en el centro de la estrella, resolveremos el sistema interior, impondremos el pegado como ya se ha explicado e integraremos en el exterior hasta un cierto valor αr_0 (esto es, un número α de radios estelares). Por lo general, la condición $A(\alpha r_0) = 1$ no se cumplirá en $r = \alpha r_0$, pero la medida en la que ambas difieran nos permitirá escoger un mejor valor de A_{aux} e integrar de nuevo a partir de él.¹² Iterando suficientes veces, la condición $A(\alpha r_0) = 1$ se cumplirá con precisión arbitraria.

Por último, para encontrar el valor inicial de A que cumple la condición (6.23) debemos tomar el límite $\alpha \rightarrow \infty$, lo que conseguiremos por extrapolación: conocida para varios valores de α la condición inicial $A(r_{\text{init}})$ que satisface $A(\alpha r_0) = 1$, se realizará un ajuste hiperbólico de la función $A_{\text{init}}(\alpha)$ como se muestra en la Figura 7 y se extraerá de él el valor asintótico $A_{\text{init}}(\infty)$, que será finalmente el que garantice la condición (6.23).

De esta manera quedan fijadas las condiciones iniciales de integración en $f(R)$, a partir de las cuales se obtendrán las soluciones interiores y exteriores, así como otras curvas parametrizadas por la presión central P_c .

6.4. Función de masa $f(R)$

En Relatividad General, como hemos visto en la Sección (5), la definición de masa gravitacional como una integral de volumen de una densidad se deduce directamente, y como función del radio es creciente en el interior y constante (con valor M_0) en el exterior de los objetos compactos, dando lugar a los coeficientes exteriores de (5.2), que

¹²En nuestro caso, el mecanismo iterativo utilizado será el método de bisección.

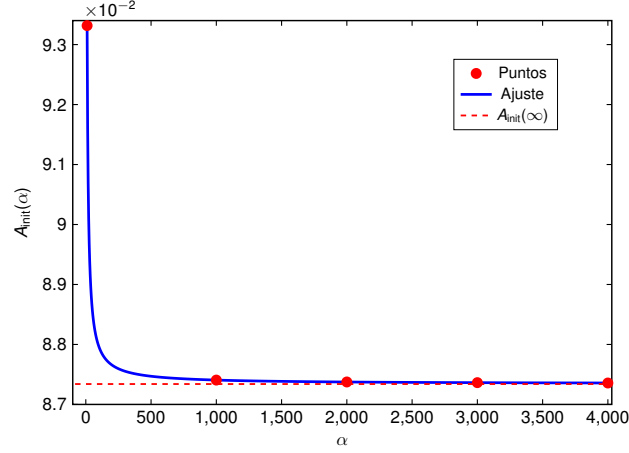


Figura 7: Condiciones iniciales A_{init} que cumplen $A(\alpha r_0) = 1$ para distintos valores de α , y ajuste no lineal de la forma $c_1 + c_2/\alpha^{c_3}$ con parámetros c_i constantes para la teoría $f(R) = -0,05R^2$, la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4}$. En este caso se obtiene un valor extrapolado $A_{\text{init}}(\infty) = c_1 = 0,08734$.

cumplen además

$$A_{\text{ext}}(r) \cdot B_{\text{ext}}(r) = 1 \quad (6.24)$$

En las teorías $f(R)$, esta función de masa queda aún por definir, y nada garantiza que sea constante en el exterior de las estrellas. Así, por analogía con la métrica de Schwarzschild (que debemos recuperar de manera asintótica, como ya hemos discutido), introducimos la parametrización

$$A(r) \equiv 1 - \frac{2M^*(r)}{r} \quad , \quad B(r) \equiv \frac{1 + U(r)}{A(r)}, \quad (6.25)$$

presentada ya en [17], donde $M^*(r)$ puede no ser constante en el exterior, y $U(r)$ mide la diferencia entre la relación de los coeficientes en $f(R)$ y en Relatividad General, de manera que con $U(r) \rightarrow 0$ se recupera la identidad (6.24).

Es importante remarcar que nada garantiza que $M^*(r)$ se corresponda con una masa gravitacional. Para definir una función de masa $M_{f(R)}$ de manera apropiada, acudiremos de nuevo a una propiedad asintótica: para $r \rightarrow \infty$, debemos recuperar el potencial gravitatorio Newtoniano

$$V_{\text{Newton}} = -\frac{M^*(r)}{r}. \quad (6.26)$$

Resolviendo las ecuaciones geodésicas con los coeficientes (6.25), obtenemos una expresión válida para toda teoría $f(R)$:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}(1+U(r)) + \frac{mL^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M_{f(R)}(r)}{r}\right) - \frac{M_{f(R)}(r)m}{r} = E, \quad (6.27)$$

donde m sería la masa de la partícula que orbita a la fuente, E su energía y L su momento angular, ambos conservados. Fijando a 0 a este último para considerar una partícula en caída libre totalmente radial, tenemos

$$\begin{aligned} E = \frac{m}{2}\dot{r}^2(1+U(r)) - \frac{M_{f(R)}(r)m}{r} &\Rightarrow \frac{E}{1+U(r)} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{M_{f(R)}(r)m}{r(1+U(r))} = E_C + E_P \\ &\Rightarrow V = \frac{E_P}{m} = -\frac{M_{f(R)}(r)}{r(1+U(r))}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde E_C es la energía cinética, de expresión conocida, y $E_P = V \cdot m$ es la potencial. Igualando la expresión de V con la de V_{Newton} , identificamos la función de masa gravitacional en teorías $f(R)$:

$$M_{f(R)}(r) \equiv \frac{M^*(r)}{1+U(r)} = \frac{M^*(r)}{A(r)B(r)}, \quad (6.29)$$

cuyo límite $M_{f(R)}^\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} M_{f(R)}(r)$ es la *masa asintótica* $f(R)$, que usaremos para etiquetar estrellas en diagramas masa-radio y otras curvas dependientes de la masa, dado que sería la masa medida experimentalmente por un observador lejano. Esta será una función de tendencia general creciente en el exterior,¹³ lo que se puede interpretar como la aparición de una “*esfera gravitacional*” en las teorías $f(R)$, una región de vacío cuya curvatura no nula contribuye a la masa gravitacional total percibida por un observador lejano [20].

En la práctica, la obtención de $M_{f(R)}^\infty$ es complicada debido a la precisión del método del disparo, cuyo error se propaga a través de la función $A(r)$ y por tanto a la pseudo-masa $M^*(r)$. Para corregir esta última suponemos que, al ser asintótica, para distancias $r \gg r_0$ debemos obtener $\frac{dM^*}{dr} \approx 0$ (esto es, una función aproximadamente plana). Obtenidos de la integración los coeficientes $A(r)$ y $B(r)$, podemos representar $M^*(r) = \frac{r}{2}(1 - A(r))$ hasta un radio considerable r_{max} como se muestra en la Figura 8. Observamos en ella que, a partir de cierta distancia, la función es aproximadamente lineal, con una pendiente β extraída de su ajuste. Apoyados en nuestra suposición,

¹³Dado que $A_{\text{ext}}(r)$ es estrictamente creciente en Relatividad General (ecuación 5.2), y sabiendo que, como veremos, en $f(R)$ su tendencia general es la misma (Figura 10), la función $M^*(r) = \frac{r}{2}[A(r) - 1]$ lo será también.

consideramos así *ad hoc* una nueva función

$$M_{\text{corregida}}^*(r) = M^*(r) - \beta r \quad (6.30)$$

que será plana por construcción para valores altos del radio. Será con esta última con la que realmente calculemos $M_{f(R)}(r)$, considerando $M_{f(R)}^\infty \approx M_{f(R)}(r_{\text{max}})$ como la etiqueta asintótica de masa aproximada.

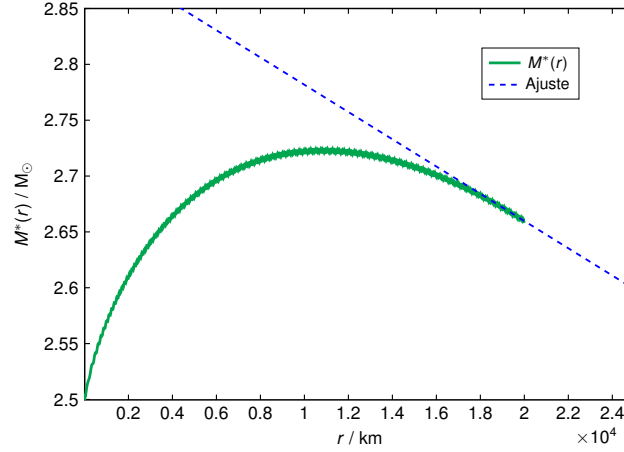


Figura 8: Perfil radial de pseudo-masa $M^*(r)$ hasta $r_{\text{max}} = 20000$ km para la teoría $f(R) = -0,05R^2$, la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$, y ajuste lineal de sus últimos valores, de donde se obtiene la pendiente $\beta = -1,22 \cdot 10^{-5} M_\odot/\text{km}$.

6.5. Resultados

Fijados los valores iniciales conocidos y encontrado el correspondiente $A(r_{\text{init}})$ con el método del disparo, las soluciones interiores y exteriores de las ecuaciones de campo se presentan en las Figuras 9 y 10. En este caso las condiciones de pegado se cumplen por construcción, luego no es necesario comprobarlas gráficamente. Los resultados $P(r_0) = \rho(r_0) = 0$ que también teníamos en Relatividad General se cumplen sin problema, y permiten obtener el radio estelar de la misma forma.

Por otro lado, comprobamos inmediatamente en la Figura 10 cómo el método perturbativo realizado sobre $R(r)$ en esta misma sección es correcto: en el interior la solución se asemeja a RG, pero en el exterior presenta oscilaciones amortiguadas, por lo que tenderá satisfactoriamente a la solución de Relatividad General. No es de extrañar entonces que estas mismas oscilaciones estén presentes en los coeficientes $A(r)$ y $B(r)$. Para compararlos adecuadamente con sus análogos en RG, representamos en la Figura 11 la función $U(r)$ definida en la ecuación (6.25), que mide la desviación de $A(r) \cdot B(r)$

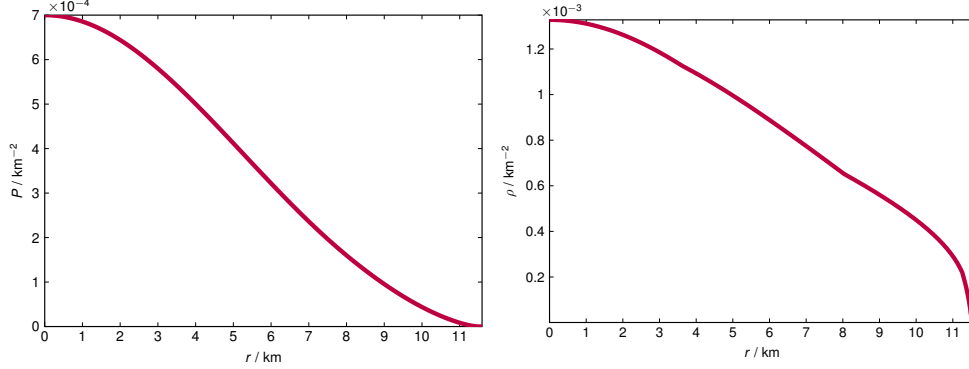


Figura 9: Perfiles radiales de presión y densidad obtenidos tras la integración del sistema interior (6.5) – (6.8) con $f(R) = -0,05R^2$ para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$.

con respecto a 1, su valor fijo en Relatividad General (6.24). Se observa así claramente cómo en el exterior de la estrella la desviación de los coeficientes con respecto a la Relatividad General consiste fundamentalmente en una oscilación en torno al cero.

En lo referente a la masa, realizando el ajuste lineal mostrado en la Figura 8, obtenemos tanto la pseudo-masa corregida $M_{\text{corregida}}^*(r)$ como la masa $f(R)$, $M_{f(R)}(r)$, ambas en la Figura 12. Si bien la primera oscila, la segunda lo hace con mucha mayor amplitud al introducir de nuevo en su definición (6.29) los coeficientes A y B . Dada su alta frecuencia, esta última aparenta ser una banda, pero una inspección más cercana revela las oscilaciones, desfasadas con respecto a las de $M_{\text{corregida}}^*(r)$. Tras la corrección, se hace patente que ambas funciones tienden a un valor finito cuando $r \rightarrow \infty$, de modo que se extrae sin problema la etiqueta de masa asintótica $M_{f(R)}^\infty$.

Para contrastar los resultados potencialmente medibles de $f(R)$ con los de Relatividad General, en la Figura 13 se comparan dos diagramas masa-radio de ambas teorías. Al igual que sucedía en Relatividad General con distintas ecuaciones de estado, el rango de radios estelares en RG y $f(R)$ son casi idénticos,¹⁴ mientras que las masas $M_{f(R)}^\infty$ son claramente superiores para la segunda. En la misma figura se observa un diagrama con la *masa desnuda* calculada en la superficie de la estrella, $M_{f(R)}^d = M_{f(R)}(r_0)$, que coincide casi totalmente con el de Relatividad General, confirmando así que, para valores pequeños de a , el aumento de masa aparente se debe fundamentalmente a la contribución de la esfera gravitacional emergente, y no a otros efectos de métrica oscilante. Una manera de estudiar esta contribución es representando directamente la masa asintótica en función de la desnuda, como se observa en la Figura 14. La apariencia claramente

¹⁴Se ha escogido en este caso representar el diagrama de RG con los mismos puntos que los demás para facilitar la comparación uno a uno, en lugar de trazar una curva suave.

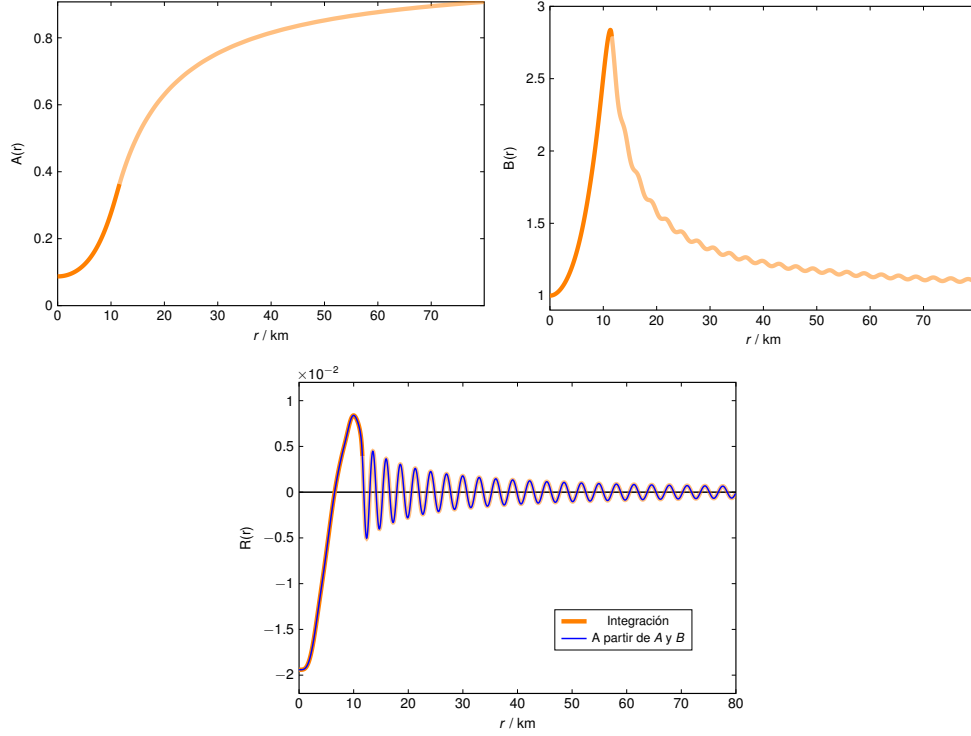


Figura 10: Coeficientes métricos $A(r)$, $B(r)$ y escalar de curvatura $R(r)$ obtenidos tras la integración de los sistemas (6.5) – (6.8) y (6.9) – (6.11) con $f(R) = -0,05R^2$ para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. Los resultados presentan la misma tendencia general que los de Relatividad General, con la salvedad de oscilaciones que se aprecian claramente en las funciones $B(r)$ y $R(r)$, aunque en $A(r)$ son imperceptibles. El escalar de curvatura se obtiene tanto por integración directa como calculado a través de su definición, sustituidos A y B . La concordancia entre ambos corrobora la validez del método de integración.

lineal sugiere que para cada valor de a la contribución de la esfera gravitacional a la masa medida por un observador lejano es un porcentaje fijo de la masa desnuda de la estrella.

La masa asintótica $f(R)$ es una función creciente del parámetro $|a|$ para todas las ecuaciones de estado consideradas, como se muestra en la Figura 15. Esto concuerda con el análisis perturbativo sobre R , ya que el aumento de $|a|$ en la ecuación (6.19) da lugar a oscilaciones de mayor amplitud en R , y por tanto a una mayor contribución de la curvatura exterior a la masa percibida por un observador lejano. A esta presión central $P_c = 4 \times 10^{-4} \text{ km}^{-2}$, para todas las ecuaciones de estado las masas son mayores a las observadas experimentalmente para valores de $|a| \geq 0,1$ (la mayor masa medida ronda las dos masas solares, mientras que en estos casos (Tablas 3, 4 y 5 en los apéndices)

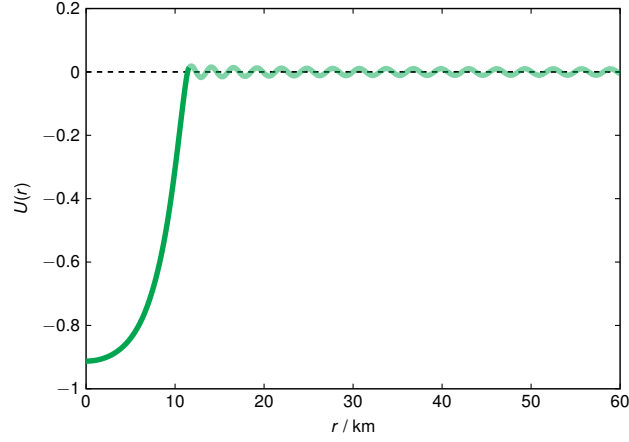


Figura 11: Función $U(r)$ calculada a partir de los coeficientes A y B en la teoría $f(R) = -0,05R^2$ para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. En el exterior, la amplitud y frecuencia de la función decrecen lentamente con el radio, por lo que $\lim_{r \rightarrow 0} U(r) = 0$, recuperando la solución de Schwarzschild de Relatividad General.

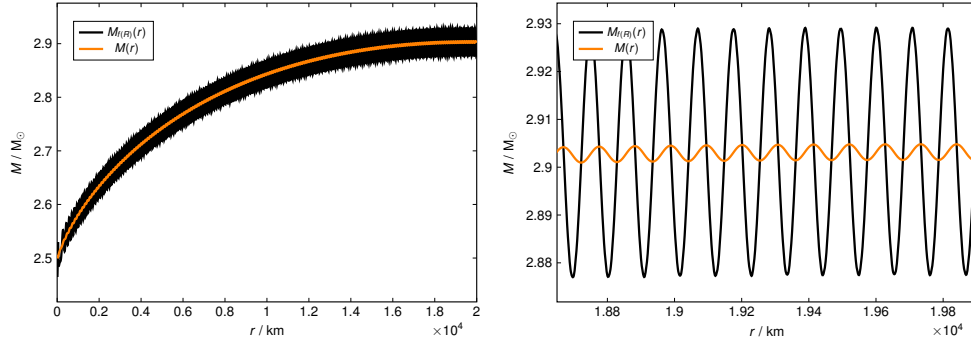


Figura 12: Pseudo-masa corregida $M_{\text{corregida}}^*$ y función de masa $f(R)$ calculadas a partir de los coeficientes A y B en la teoría $f(R) = -0,05R^2$ para la ecuación de estado *Middle* y una presión central $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. El valor asintótico extraído en este caso es $M_{f(R)}^\infty = 2,902 M_\odot$. A la derecha, una ampliación en la que se observan claramente las oscilaciones de ambas, desfasadas entre sí.

obtenemos masas desde 3.3 hasta 13.6 masas solares), lo que lleva a pensar que, de existir, la contribución $f(R)$ ha de ser pequeña en comparación con los efectos de Relatividad General.¹⁵

¹⁵De hecho, el valor inflacionario de a para el modelo $f(R) = aR^2$ está restringido a $a \approx -2,74 \times 10^{-49}$ por las anisotropías del fondo cósmico de microondas, [21]. Este valor proporcionaría correcciones despreciables a la Relatividad General. Así pues, el modelo y el rango de valores de a utilizados en este trabajo deben entenderse como correcciones efectivas de RG que aparecen en regímenes de curvatura extrema como los que caracterizan a las estrellas de neutrones.

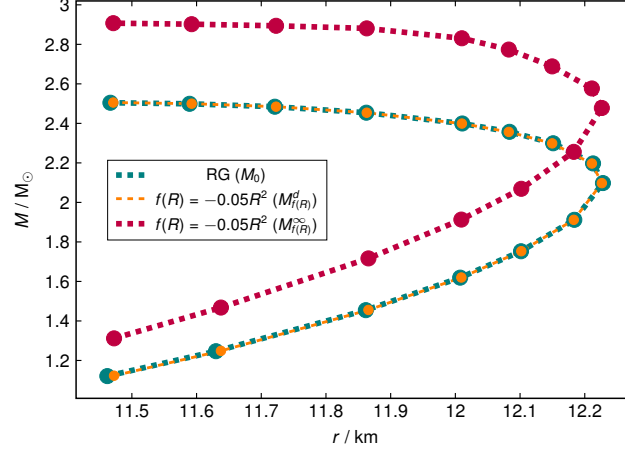


Figura 13: Diagramas masa-radio en RG y $f(R) = -0,05R^2$ para la ecuación de estado *Middle* y un rango de presiones centrales $P_c = [5 \cdot 10^{-5}, 8 \cdot 10^{-4}] \text{ km}^{-2}$. Para el segundo, se muestra además un diagrama con la masa desnuda $M_{f(R)}^d$, solapado casi perfectamente con el de RG. Para cada presión central se observa cómo el radio es muy similar en todos los casos, mientras que la masa es consistentemente mayor, más aún a mayor P_c .

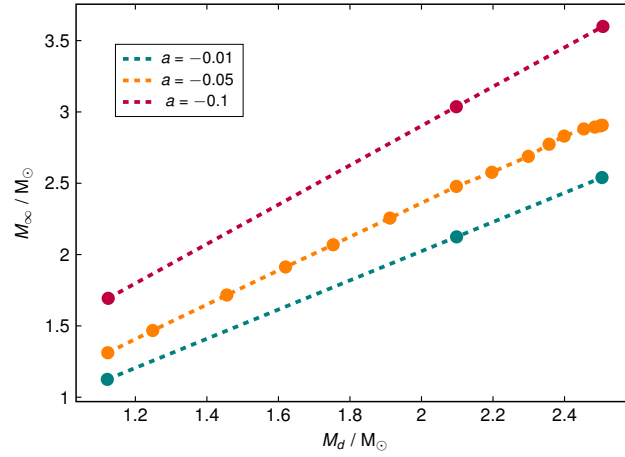


Figura 14: Masa asintótica $M_{f(R)}^\infty$ frente a masa desnuda $M_d = M_{f(R)}(r_0)$ (ambas de (6.29)) en $f(R)$ para la ecuación de estado *Middle*, un rango de presiones centrales $P_c = [5 \cdot 10^{-5}, 8 \cdot 10^{-4}] \text{ km}^{-2}$ y distintos valores de a . Un ajuste lineal devuelve una pendiente de 1,02 para $a = -0,01$, de 1,17 para $a = -0,05$ y de 1,39 para $a = -0,1$, de modo que para estos valores de a , la esfera gravitacional contribuye un 1, un 17 y un 39 % adicional de la masa desnuda respectivamente, independientemente de la presión central.

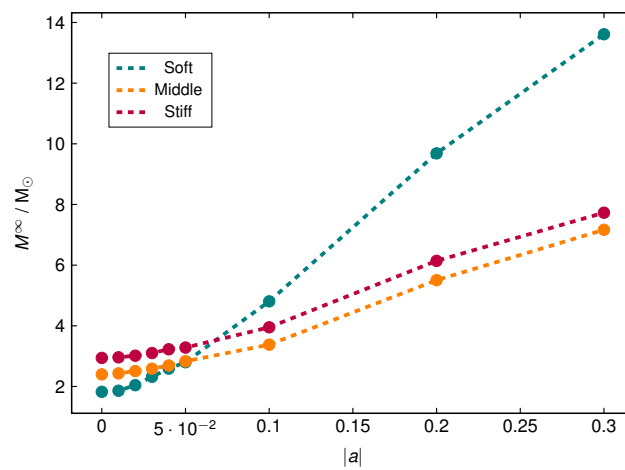


Figura 15: Masa asintótica $M_{f(R)}^{\infty}$ en función de $|a|$ para una presión inicial $P_c = 4 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. Si bien la ecuación de estado *Soft* da lugar a las masas más pequeñas para valores bajos de $|a|$, su crecimiento se dispara para valores mayores, mientras que *Mid* y *Stiff* dan lugar a curvas de la misma forma, la segunda con masas algo mayores.

7. Órbitas en métricas estáticas

Habiendo obtenido para RG y para $f(R) = aR^2$ las métricas exteriores con pegado suave e interiores realistas para estrellas de neutrones en las secciones anteriores, estamos ahora en posición de emplearlas en nuestros cálculos. Uno de los análisis más relevantes en este contexto es el estudio de las trayectorias de partículas masivas y rayos de luz en las proximidades de la estrella, lo cual es fundamental para comprender la dinámica en presencia de campos gravitatorios fuertes.

7.1. Ecuaciones geodésicas

Para llevar a cabo este análisis será necesario resolver las ecuaciones geodésicas, que describen cómo las partículas masivas o no (luz) se mueven bajo la influencia de la curvatura del espaciotiempo. Encontraremos primero estas ecuaciones en ambas teorías, siguiendo el procedimiento expuesto en [22], y las resolveremos numéricamente para encontrar las órbitas correspondientes y estudiar algunas de sus características principales.

7.1.1. Relatividad General

Dado que hemos introducido las teorías $f(R)$ como una modificación del lagrangiano de Relatividad General (más concretamente, de la acción de Einstein-Hilbert), será a partir del lagrangiano correspondiente que encontraremos las ecuaciones geodésicas en ambos casos.

En adelante, y sin pérdida de generalidad dada la simetría esférica del sistema, consideraremos únicamente órbitas en el plano ecuatorial, de manera que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Así, el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right)^{1/2}, \quad (7.1)$$

donde τ es el tiempo propio que parametriza la órbita (u otro parámetro afín en el caso de la luz), toma la siguiente forma dada la métrica exterior de Schwarzschild (5.2):

$$\mathcal{L}_{\text{RG}} = \left\{ \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (7.2)$$

Considerando ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \quad (7.3)$$

vemos inmediatamente que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = k, \quad \dot{k} = 0, \quad (7.4)$$

que no es más que la conservación de la energía $E \propto k$ a lo largo de la órbita. La misma observación se puede aplicar a ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi} = h, \quad \dot{h} = 0, \quad (7.5)$$

obteniendo así la conservación del momento angular $L \propto h$.

Recordamos ahora que, previa normalización, el lagrangiano será $\mathcal{L}_{\text{RG}} = \epsilon$ con $\epsilon = 1$ para órbitas de tipo temporal (correspondientes a las partículas masivas) y $\epsilon = 0$ para las de tipo nulo (correspondientes a la luz). Así,

$$\epsilon^2 = \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right]. \quad (7.6)$$

Sustituyendo aquí las expresiones de k y h , obtenemos

$$\frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) \right] - \frac{M_0 \epsilon^2}{r} = \frac{1}{2} (k^2 - \epsilon^2). \quad (7.7)$$

Dado que nos interesa obtener una ecuación explícita $r = r(\phi)$, sustituimos $\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi}$. No obstante, para eliminar r de los denominadores y facilitar así la resolución, introducimos el cambio de variable $\xi = \frac{1}{r}$:

$$\left(\frac{d\xi}{d\phi} \right)^2 + \xi^2 (1 - 2M_0 \xi) - \frac{2M_0 \epsilon^2}{h^2} \xi = \frac{k^2 - \epsilon^2}{h^2}. \quad (7.8)$$

Por último, dado que no nos interesa tratar con el cuadrado de $\frac{d\xi}{d\phi}$, derivamos para obtener

$$\frac{d^2 \xi}{d\phi^2} - 3M_0 \xi^2 + \xi = \frac{M_0 \epsilon^2}{h^2}, \quad (7.9)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para $\xi(\phi)$, y como tal requerirá dos condiciones iniciales en el punto de partida de la partícula $(r, \phi) = (r_{\text{par}}, 0)$:

la posición $\xi(0) = \frac{1}{r_{\text{par}}}$ y su derivada $\frac{d\xi}{d\phi}(0)$. Esta última se puede despejar de la ecuación (7.8) con $\phi = 0 \Rightarrow \xi = \xi(0)$, obteniendo así

$$\frac{d\xi}{d\phi}(0) = \left[\frac{k^2 - (1 - 2M_0\xi(0))\epsilon^2}{h^2} - (1 - 2M_0\xi(0))\xi(0)^2 \right]^{1/2}. \quad (7.10)$$

Fijando los valores de k y h (y así la energía y el momento angular) a nuestra conveniencia, una simple integración numérica devuelve de esta manera la función $\xi(\phi)$, de la que es trivial extraer $r(\phi)$ revirtiendo el cambio de variable. En la Figura 16 se observa la clara diferencia entre las soluciones de tipo temporal (partículas masivas, con $\epsilon = 1$ y que orbitan a la estrella), donde el radio es una función periódica de ϕ , y las de tipo nulo (rayos de luz, cuya trayectoria se curva perceptiblemente sólo en las proximidades de la estrella y es aproximadamente rectilínea a mayor distancia), en las que el radio alcanza un mínimo y a continuación tiende a infinito. Además, utilizando las relaciones con las coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \phi \end{cases}, \quad (7.11)$$

podemos representar las trayectorias en el plano cartesiano. Las órbitas mostradas en la Figura 17 revelan además la precesión orbital para el caso de partículas masivas, así como la deflexión de los rayos de luz, que estudiaremos posteriormente en comparación con los resultados en $f(R)$.

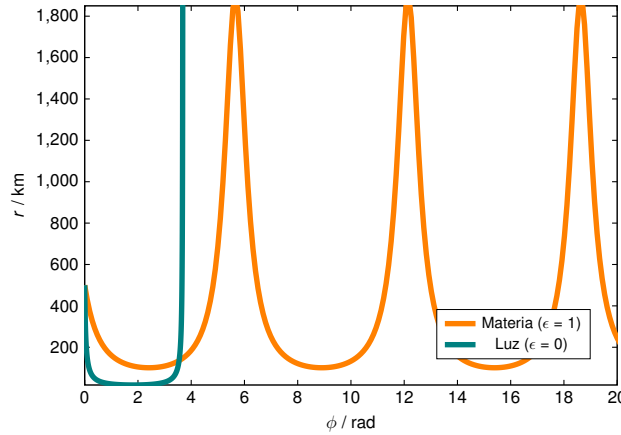


Figura 16: Radio de la órbita en RG alrededor de una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-5} \text{ km}^{-2}$ para fotones y partículas masivas frente a su ángulo, con radio inicial $r_{\text{par}} = 500 \text{ km}$, $k = 1$, $h = 20$. Mientras que la órbita de materia es periódica, barriendo mayor ángulo en las proximidades de la estrella, la luz mantiene una trayectoria de $\phi \approx cte$ para valores de $r \gtrsim 200 \text{ km}$, barriendo la mayoría de su ángulo en las proximidades inmediatas de la estrella y escapando de nuevo.

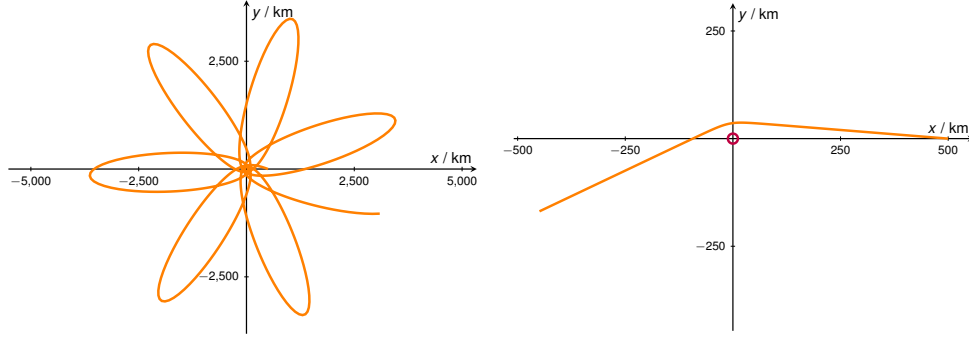


Figura 17: Órbitas de materia ($\epsilon = 1$) y luz ($\epsilon = 0$) obtenidas para Relatividad General en el plano cartesiano a partir de la integración de (7.9) para una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ y ecuación de estado *Middle*. Se observan una rápida precesión y una deflexión muy notable dado el régimen de gravedad extrema debido a la corta distancia a la estrella.

7.1.2. $f(R) = aR^2$

Dado que los coeficientes métricos $A(r)$ y $B(r)$ no son funciones analíticas en las teorías $f(R)$, las ecuaciones geodésicas dependerán explícitamente de estos. El lagrangiano presenta ahora la forma más general (válida no solo para $f(R)$ sino para cualquier métrica estática y esféricamente simétrica)

$$\mathcal{L} = [At^2 - B\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2]^{1/2}, \quad (7.12)$$

por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan en

$$\begin{cases} At = k \\ r^2\dot{\phi} = h \end{cases}. \quad (7.13)$$

Sustituyendo en la expresión del lagrangiano $\mathcal{L} = \epsilon$ y realizando el cambio $\xi = \frac{1}{r}$ análogamente al caso de RG, tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= At^2 - B\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{k^2}{A} - B\frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 - \frac{h^2}{r^2} \\ &= \frac{k^2}{A} - Bh^2 \left(\frac{d\xi}{d\phi} \right)^2 - h^2\xi^2 \end{aligned} \quad (7.14)$$

donde hemos usado la regla de la cadena

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} = -\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\xi} \right) \frac{d\xi}{d\phi} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d\xi}{d\phi}. \quad (7.15)$$

Derivando ahora (7.14) con respecto a ϕ y simplificando, llegamos a

$$0 = -k^2 A^{-2} \frac{dA}{d\xi} \frac{d\xi'}{d\phi} - h^2 \left[\frac{dB}{d\xi} \frac{d\xi'}{d\phi} \left(\frac{d\xi}{d\phi} \right)^2 + 2B \frac{d\xi'}{d\phi} \frac{d^2\xi}{d\phi^2} \right] - 2h^2 \xi \frac{d\xi'}{d\phi}, \quad (7.16)$$

donde podemos sustituir $\left(\frac{d\xi}{d\phi} \right)^2$ despejándolo de (7.14). Así, las ecuaciones geodésicas generalizadas quedan

$$\frac{k^2}{h^2} \frac{dA/d\phi}{A^2} + \frac{dB/d\phi}{B} \left[\frac{k^2 - A\epsilon^2}{Ah^2} - \xi^2 \right] + 2B \frac{d^2\xi}{d\phi^2} + 2\xi = 0. \quad (7.17)$$

Es trivial comprobar que la sustitución de los coeficientes métricos de Schwarzschild (5.2) en cualquiera de las expresiones de este desarrollo devuelve la correspondiente ecuación de RG vista en el apartado anterior, luego el procedimiento seguido aquí es correcto.

Las condiciones iniciales se extraen de la misma manera al caso de RG, tomando en la posición inicial $(r, \phi) = (r_{\text{par}}, 0)$ el valor $\xi(0) = \frac{1}{r_{\text{par}}}$ e introduciéndolo a su vez en la expresión de la derivada para obtener igualmente su valor inicial, que en este caso sería

$$\frac{d\xi}{d\phi}(0) = \left[\frac{k^2 - A(r_{\text{par}})\epsilon^2}{A(r_{\text{par}})B(r_{\text{par}})h^2} - \frac{\xi(0)^2}{B(r_{\text{par}})} \right]^{1/2}, \quad (7.18)$$

devolviendo también la ecuación (7.10) al sustituir los coeficientes de la métrica de Schwarzschild (5.2).

De la misma manera que en RG, integrando numéricamente la ecuación (7.17) con estas condiciones iniciales y para distintos valores de h y k , obtenemos las órbitas de fotones o partículas masivas en el espaciotiempo de la teoría $f(R)$, como se muestra en la Figura 18. Si bien estas no muestran a simple vista diferencias cualitativas frente a los resultados de Relatividad General, veremos a continuación que sí lo hacen de manera cuantitativa, y en gran medida dado el régimen de campo gravitatorio extremo. Para ello estudiaremos, calcularemos y compararemos dos tests fundamentales del estudio de órbitas: la precesión del periastro y la deflexión de la luz.

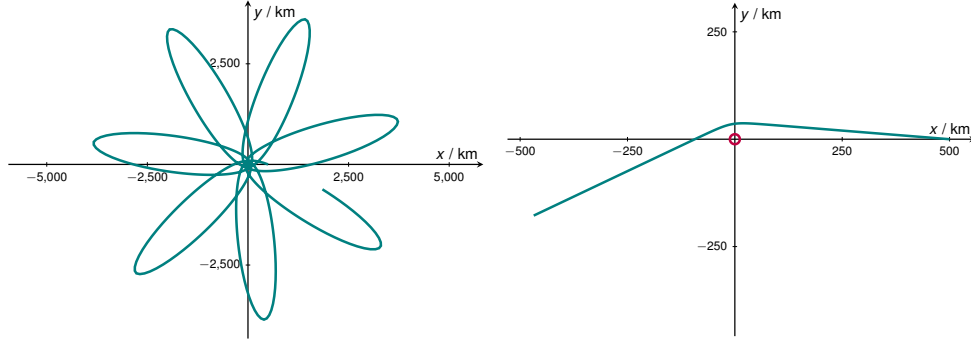


Figura 18: Órbitas de materia ($\epsilon = 1$) y luz ($\epsilon = 0$) obtenidas para $f(R) = aR^2$ en el plano cartesiano a partir de la integración de (7.17) para una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ y ecuación de estado *Middle*. Se observan una rápida precesión y una deflexión muy notable. Los resultados no presentan ninguna diferencia cualitativa con respecto a los de Relatividad General.

7.2. Precesión del periastro

En mecánica Newtoniana, las órbitas de las partículas (planetas, por ejemplo) alrededor de fuentes de campo gravitatorio (como estrellas) vienen descritas por las ecuaciones de Kepler [Kepler], tomando la forma de elipses con uno de sus focos en el centro de masas del sistema y con el eje mayor fijo. De este modo, si una partícula se encuentra en su punto más cercano al centro de masas (periastro), lo alcanzará de nuevo pasada una vuelta exacta (360°).

La Relatividad General, no obstante, predice una órbita diferente: si bien uno de los focos se mantiene en el baricentro, el eje mayor de la elipse irá rotando a medida que la partícula traza su trayectoria, haciendo que esta regrese al periastro tras $(360 + \Delta\phi)^\circ$ donde $\Delta\phi$ se conoce como la *precesión del periastro* (*perihelio* en caso de ser el Sol), dando lugar a trayectorias como las de la izquierda en la Figura 17.

Dado que, como hemos visto, tanto las masas estelares como las ecuaciones orbitales en RG y en las teorías $f(R)$ son claramente diferentes, esperamos órbitas diferentes y por tanto valores distintos de la precesión del periastro para las mismas condiciones iniciales. En efecto, la Figura 19 muestra una clara diferencia entre dos órbitas con las mismas condiciones iniciales en torno a una estrella de la misma presión central y ecuación de estado para RG y $f(R) = -0,05R^2$.

Obtenida la función $r(\phi)$ como se ha explicado en las anteriores subsecciones, el cálculo numérico de la precesión es sencillo: extrayendo los mínimos de la función, que se corresponden con el periastro, podemos restar los ángulos de los mínimos consecutivos,

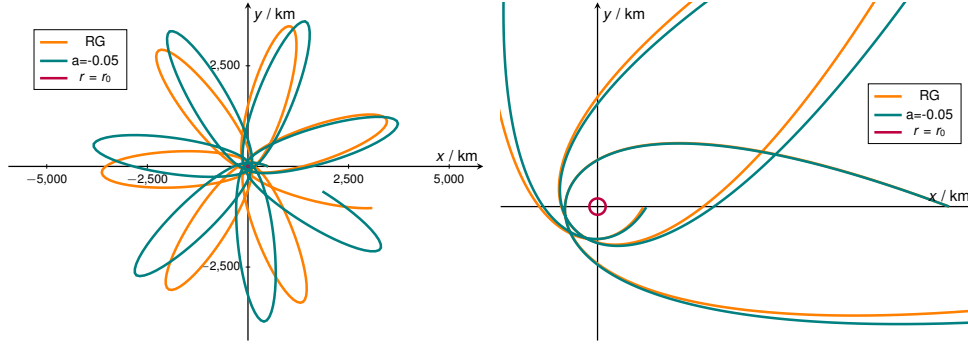


Figura 19: Órbitas de partículas masivas con las mismas condiciones iniciales ($k = 1$, $h = 20$, $r_{\text{par}} = 500$) partiendo desde el punto $(500, 0)$ en torno a una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ para Relatividad General y $f(R) = -0,05R^2$. Se aprecia claramente cómo la precesión de la órbita es mayor para la segunda, de manera que ambas trayectorias se van desfasando más notablemente en cada vuelta. En la figura de la derecha, una ampliación en la que se aprecia una diferencia clara ya antes de la primera vuelta, en las proximidades de la estrella.

obteniendo un valor superior a 360° . El excedente con respecto a la vuelta completa será la precesión del periastro, y tomando la media para varios mínimos consecutivos obtendremos nuestro resultado.

En la Figura 20 se muestran las precesiones orbitales frente a la presión central, la masa desnuda de la estrella y la masa asintótica tanto para Relatividad General como para $f(R) = -0,05R^2$ (en Relatividad General, estas dos últimas se identifican). Vemos claramente que, para una misma presión central, la precesión es muy similar en RG y en $f(R)$. Dado que sabemos que la masa desnuda para cada P_c en $f(R)$ es muy similar a la de RG para este valor de a (como se mostró en la Figura 13), es natural encontrar aquí que la precesión es también muy similar para valores iguales de la masa desnuda. La diferencia mucho mayor frente a la masa asintótica es una consecuencia de que las órbitas estudiadas son muy cercanas a la estrella, por lo que la partícula “percibirá” a lo largo de su trayectoria una masa mucho más cercana a la desnuda que a la asintótica.

Por el mismo motivo, aunque la masa asintótica es una función creciente de $|a|$ (Figura 15), la precesión del periastro en este caso no lo es. Como se observa en la Figura 21, a medida que $|a|$ aumenta y por tanto nos alejamos más de la Relatividad General, la precesión disminuye, siendo notable sólo a partir de valores relativamente grandes de a ,¹⁶ lo que probablemente se deba a que la mayor masa de la estrella para mayor a acelere más la partícula en sus proximidades, teniendo menos tiempo para curvar su órbita y por tanto alejándose a un ángulo menor. No obstante, en la Figura

¹⁶Para los cálculos orbitales, valores mayores de $|a|$ (y por tanto de la masa) resultan en general en distancias mayores alcanzados por la partícula, lo que dificulta enormemente los cálculos ya que

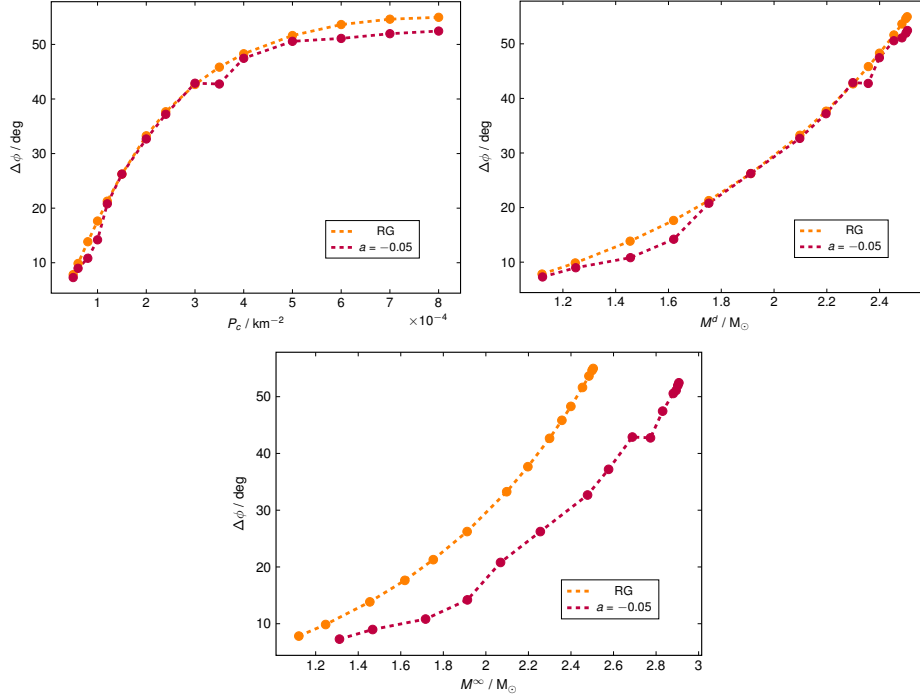


Figura 20: Precesión del periastro frente a la presión central, masa desnuda y masa asintótica para RG y $f(R)$, en torno a una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ y ecuación de estado *Middle*. La tendencia con respecto a las últimas dos es polinómica, mientras que para la presión central se tiene un comportamiento aparentemente asintótico explicable a partir de los diagramas masa-radio de la Figura 13, en los que a altas presiones centrales la masa varía solo ligeramente. Las irregularidades en la curva $f(R)$ se deben tanto a la precisión numérica como a la naturaleza ondulatoria de su solución exterior, cuya función de masa $M_{f(R)}$ varía perceptiblemente en intervalos muy cortos de espacio, como se observa en la Figura 12.

21 se observa un comportamiento ligeramente distinto para la ecuación de estado *Soft*, probablemente debido a que las masas estelares para esta son tan elevadas para valores altos de $|a|$ (Figura 15) que incluso en el poco tiempo que la partícula pasa en sus proximidades, la estrella consigue curvar su trayectoria y compensar el efecto.

requeriría integrar hasta distancias muy altas para obtener la métrica exterior necesaria. Es por esto por lo que las figuras mostradas en este trabajo o bien no alcanzan valores muy altos de $|a|$, o bien cuentan con pocos puntos.

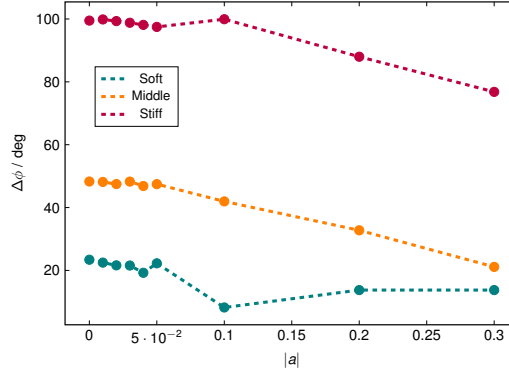


Figura 21: Precesión del periastro en función de $|a|$ para una presión inicial $P_c = 4 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. Si bien esta se mantiene aproximadamente constante para valores bajos de $|a|$, la tendencia general es descendente para valores mayores, con la excepción de *Soft*, cuyo comportamiento es algo más errático, debido probablemente a su aumento drástico de masa asintótica mostrado en la Figura 15.

7.3. Deflexión de la luz

El fotón, como partícula sin masa, presenta en su movimiento un comportamiento radicalmente distinto al de la materia. Su trayectoria, como se observa a la derecha de las Figuras 17 y 18, es aproximadamente recta a cierta distancia de la estrella y, si la curvatura del espaciotiempo es suficientemente alta, se curva perceptiblemente en sus proximidades. El efecto neto es una desviación de la dirección original del fotón, de tal manera que un observador lejano que recibiese dicha luz percibiría la fuente en una posición incorrecta, desplazada un cierto ángulo δ conocido como *ángulo de deflexión de la luz*. Como se puede observar en la Figura 22, este ángulo depende en gran medida de la distancia mínima a la que el rayo pase de la estrella. Para medir esta última, se utilizan dos *parámetros de impacto* a menudo mezclados en la bibliografía, a los que nos referiremos como *parámetro de impacto asintótico* b_∞ , que mide la distancia entre el centro de la estrella y la recta extrapolada a partir de la trayectoria del fotón en el infinito; y *parámetro de impacto tangencial* b_{tan} , que no es más que la mínima distancia alcanzada entre el fotón y el centro de la estrella. Todos estos conceptos se esquematizan limpiamente en la Figura 23.

A la luz cuya trayectoria cumple $b_{\text{tan}} = r_0$ se la conoce como *luz rasante*, dado que en su punto más cercano alcanza la superficie de la estrella de manera tangencial, y denotaremos su parámetro de impacto asintótico como b_∞^r . Esta nos será de gran utilidad a la hora de etiquetar, dado que su deflexión δ_r es la máxima que permite cada estrella de unas ciertas características. La Figura 24 muestra para RG y $f(R)$ la deflexión rasante frente a la presión central, la masa desnuda y la masa asintótica. De nuevo, tal y como ocurría para la precesión del periastro, para $a = -0,05$ la deflexión

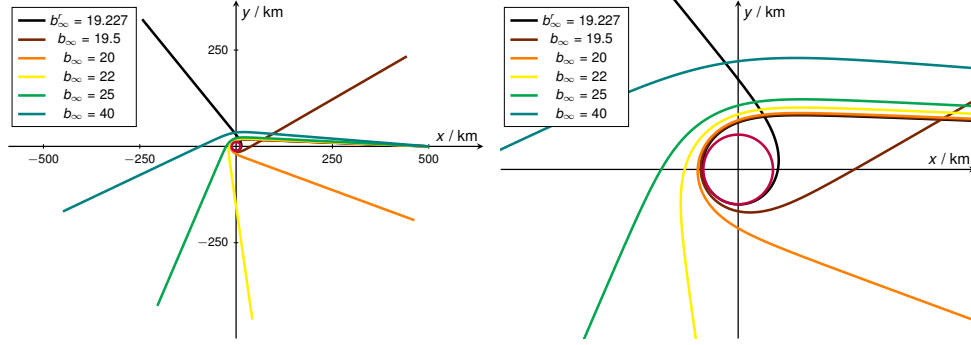


Figura 22: Trayectorias de rayos de luz para distintos valores de b_∞ en torno a una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ y ecuación de estado *Middle* para Relatividad General. A la derecha una ampliación a las proximidades de la estrella, en la que se observa la región espacial donde la luz se curva notablemente.

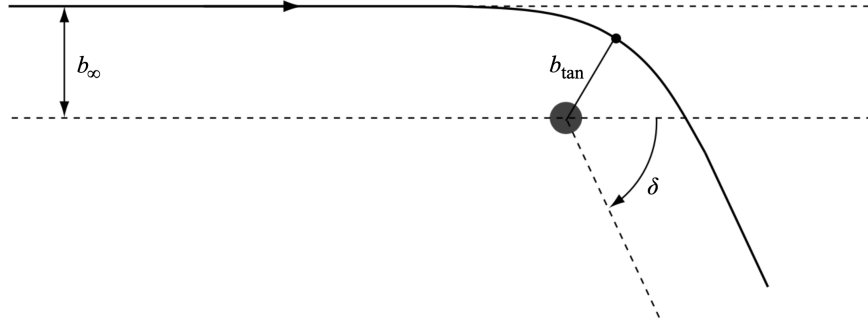


Figura 23: Esquema explicativo de la deflexión de la luz y los parámetros de impacto. Figura extraída de [23], modificada a posteriori.

de la luz es prácticamente idéntica a la de Relatividad General para todas las presiones, y por ende para todas las masas desnudas. La separación en la gráfica con respecto a la masa asintótica es aún mayor dado que al tratarse de luz rasante, la masa “percibida” es prácticamente la desnuda en el intervalo en el que la mayoría de la deflexión se produce (rozando a la estrella).

En la Figura 25 se aprecia claramente que, aunque la métrica exterior sea muy distinta para diferentes valores de a (con oscilaciones mayores a medida que aumenta su valor absoluto y nos alejamos más de la Relatividad General), la deflexión rasante parece ser independiente de este. Esto parece apuntar a que los efectos principales de las teorías $f(R)$ sobre las órbitas (al menos las de fotones) se reducen a los producidos por la contribución de la esfera gravitacional a la masa efectiva, que la luz rasante no sufre en gran medida al pasar tan cerca de la estrella cuando su curvatura es más pronunciada. Este resultado podría tener interés observacional, dado que motiva un

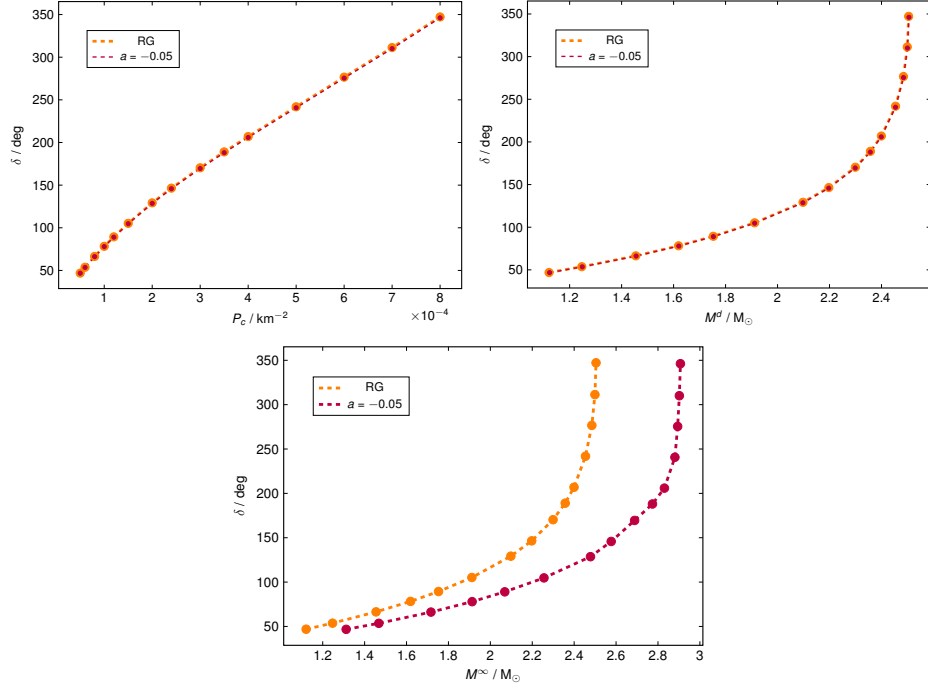


Figura 24: Deflexión rasante de la luz frente a la presión central, masa desnuda y masa asintótica para RG y $f(R)$, en torno a una estrella de $P_c = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$ y ecuación de estado *Middle*. La tendencia con respecto a las últimas dos es exponencial, mientras que para la presión central se tiene un comportamiento aparentemente lineal explicable a partir de los diagramas masa-radio de la Figura 13, en los que a altas presiones centrales la masa varía solo ligeramente. El error en la curva $f(R)$ es mucho menor que para el caso de la precesión del periastro (Figura 20), ya que la integración en este caso es mucho más corta, y llega a distancias mucho menores en las que la precisión de la métrica numérica es mayor.

posible test de validez de las teorías $f(R)$: un objeto compacto cuya masa estimada por órbitas lejanas sea consistentemente mayor a la calculada a partir de observaciones de deflexión rasante (o cercana a la rasante) sería un indicador de una función de masa creciente en el exterior de la estrella, rasgo característico de las teorías $f(R)$.

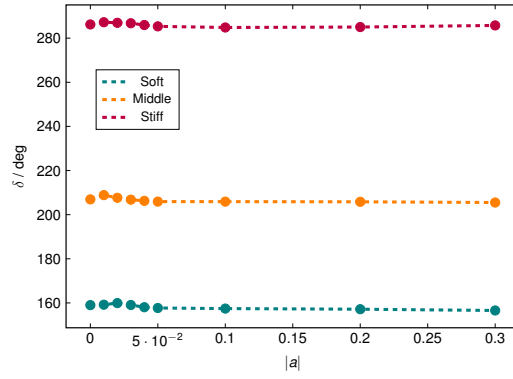


Figura 25: Deflexión rasante de la luz en función de $|a|$ para una presión inicial $P_c = 4 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-2}$. Incluso en el intervalo de valores de $|a|$ utilizado, cuyo límite superior da lugar a masas desproporcionadamente altas (Figura 15) y por ende no realistas, esta parece mantenerse constante.

8. Conclusiones

En este Trabajo de Fin de Máster hemos presentado el formalismo y las ecuaciones de campo de las teorías $f(R)$, centrándonos en el modelo $f(R) = aR^2$ y estudiado su comportamiento en comparación con la Relatividad General para objetos compactos en régimen de campo gravitatorio fuerte, concretamente en estrellas de neutrones. Hemos explorado las diferencias en las predicciones de ambas teorías, destacando en la Sección 4 que las teorías $f(R)$ imponen requisitos más restrictivos en las superficies de estas estrellas al exigir condiciones adicionales de pegado.

A través de las ecuaciones de campo, hemos obtenido en la Sección 6 soluciones interiores y exteriores estáticas y esféricamente simétricas para el modelo $f(R) = aR^2$, garantizando que los coeficientes métricos y la curvatura respeten las condiciones de pegado impuestas. Esto constituye una diferencia clara con respecto a otros trabajos de la bibliografía [24] en los que se asume una métrica exterior de Schwarzschild para las teorías $f(R)$, lo que incumple las condiciones de pegado y por tanto es un resultado no físico. Otra ventaja del procedimiento llevado a cabo en este trabajo es que las soluciones obtenidas, pese a ser numéricas, se desprenden de una resolución directa de las ecuaciones de campo en $f(R)$, y no de métodos perturbativos como es también común en la bibliografía [25].

En particular, hemos determinado que las soluciones métricas para $f(R)$ muestran una oscilación decreciente en amplitud y frecuencia con el radio, además de que en el vacío exterior la curvatura no es nula a diferencia de la Relatividad General, lo que introduce una modificación significativa en la estructura gravitacional exterior (Figura 10). Con respecto al pegado, las condiciones requeridas por la teoría se han impuesto por construcción, y se ha comprobado numéricamente que en RG esto garantiza además la continuidad de las derivadas de los coeficientes métricos de un orden mayor al necesario (Figura 5).

A partir de estas soluciones, hemos explorado en la Sección 6 una definición adecuada de la función de masa para las teorías $f(R)$. En estas aparece una “esfera gravitacional” cuya curvatura contribuye a la masa total observada desde el infinito, lo que nos ha permitido asignar una etiqueta de masa asintótica a las estrellas. Con ella se han podido comparar los diagramas masa-radio entre Relatividad General y $f(R)$ (Figura 13) en los que, para valores de $|a| \leq 0.3$, se aprecia que tanto los radios como las masas desnudas son prácticamente idénticas a las de RG (Tablas 3, 4 y 5). Se ha concluido así que la diferencia fundamental reside en la contribución de la curvatura no nula en el vacío (la esfera gravitacional) a la masa asintótica.

Vista la importancia de esta contribución exterior, se ha estudiado su dependencia con la masa desnuda, que ha resultado ser lineal y de pendiente creciente con a , de manera que a mayor valor del parámetro, la esfera gravitacional contribuye un porcentaje mayor de la masa, independientemente de la presión central y la masa desnuda de la estrella (14).

Finalmente, hemos aprovechado las soluciones exteriores obtenidas en Relatividad General y $f(R)$ para estudiar en la Sección 7 las ecuaciones geodésicas y las órbitas de partículas masivas y no masivas alrededor de estas estrellas. Comparando con dos test clásicos de la Relatividad General, como lo son la precesión del periastro y la deflexión de la luz, hemos encontrado que mientras que la primera se ve afectada por la curvatura exterior y la esfera gravitacional emergente (Figura 21), la segunda no muestra variaciones significativas en el rango de a estudiado (Figura 25). Esto sugiere que un test observacional podría diferenciar estas teorías, ya que la masa medida mediante órbitas lejanas (a mayor distancia, más influencia de la esfera gravitacional) no coincidiría con la inferida por la deflexión (donde la luz percibe prácticamente la masa desnuda al curvarse casi exclusivamente en las proximidades de la estrella), revelando así la existencia de la esfera gravitacional característica de $f(R)$.

Dado el extenso tiempo de computación requerido para elaborar muchas de las gráficas presentadas en este trabajo, se han excluido algunos resultados que sería interesante explorar en el futuro, aprovechando el código original que se ha escrito ya. Entre ellos, sería de interés:

- El uso de otras ecuaciones de estado respaldadas por observaciones de LIGO/VIRGO [26], que favorecen ecuaciones más “suaves” (que producen estrellas con una caída radial de presión más rápida) como *WFF1* [27] o *APR4* [28].
- El estudio de estrellas de densidad constante, cuya simplicidad podría arrojar resultados analíticos [19, 29] útiles para establecer límites superiores de densidad, por ejemplo.
- La consideración de órbitas más lejanas a la estrella, donde los efectos de la esfera gravitacional serían más determinantes para caso como el de la precesión del periastro, permitiendo así comparaciones más detalladas con otros tests como el de la deflexión rasante.
- La exploración de otros modelos $f(R)$ como el $f(R) = R + R^n$, $n > 1$, cuyas diferencias métricas con respecto a la Relatividad General son todavía más notables que las de $f(R) = aR^2$ para regímenes de gravedad fuerte.

- Aprovechando las expresiones de la métrica exterior ya obtenidas, y continuando con el estudio de geodésicas, el desarrollo de las ecuaciones de desviación geodésica en $f(R)$ y el estudio sus consecuencias, como las fuerzas de marea en objetos extensos, en comparación con la Relatividad General.
- El cálculo de sombras de agujeros negros en teorías de gravedad modificada [30], aprovechando los resultados de trayectorias lumínicas ya expuestos en este trabajo, así como el código desarrollado para obtenerlas.
- El estudio de mergers de estrellas de neutrones y las ondas gravitacionales emitidas [17], de especial interés en las teorías $f(R)$ y similares dado que estas añaden un grado de libertad escalar que se propaga con las ondas [5].

Referencias

- [1] Arthur Stanley Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. The University Press, 1923.
- [2] Garsten Van De Bruck et al. “Cosmological Perturbations in Brane-World Theories: Formalism”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 62.12 (mayo de 2000), págs. 1-13. ISSN: 05562821.
- [3] Mikel Susperregi. “How typical is General Relativity in Brans-Dicke chaotic inflation?” En: (dic. de 1997).
- [4] P. J. Steinhardt, Steinhardt y P. J. “Recent advances in extended inflationary cosmology”. En: *CQGra* 10.S (1993), S33-S48. ISSN: 0264-9381. arXiv: 9212004 [astro-ph].
- [5] Salvatore Capozziello y Mariafelicia De Laurentis. “The dark matter problem from $f(R)$ gravity viewpoint”. En: *Annalen der Physik* 524.9-10 (oct. de 2012), págs. 545-578. ISSN: 1521-3889.
- [6] Jose A.R. Cembranos. “Dark Matter from R 2-gravity”. En: *Physical Review Letters* 102.14 (sep. de 2008). ISSN: 00319007.
- [7] Álvaro De La Cruz-Dombriz y Antonio Dobado. “A $f(R)$ gravity without cosmological constant”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 74.8 (jul. de 2006). ISSN: 15507998.
- [8] P. A.R. Ade et al. “Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation”. En: *Astronomy and Astrophysics* 571 (mar. de 2013), pág. 34. ISSN: 14320746.
- [9] A. A. Starobinsky. “A new type of isotropic cosmological models without singularity”. En: *Physics Letters B* 91.1 (mar. de 1980), págs. 99-102. ISSN: 0370-2693.
- [10] Wayne Hu e Ignacy Sawicki. “Models of $f(R)$ Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 76.6 (mayo de 2007). ISSN: 15507998.
- [11] Shinji Tsujikawa. “Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 77.2 (sep. de 2007). ISSN: 15507998.
- [12] Timothy Clifton et al. “Modified Gravity and Cosmology”. En: *Physics Reports* 513.1-3 (jun. de 2011), págs. 1-189.
- [13] Mar Bastero-Gil, Mónica Borunda y Bert Janssen. “The Palatini formalism for higher-curvature gravity theories”. En: *AIP Conference Proceedings* 1122 (2009), págs. 189-192. ISSN: 0094243X.

- [14] Daniela Pérez y Gustavo E. Romero. “Astrophysical Constraints on Strong Modified Gravity”. En: *Topics on Strong Gravity: A Modern View on Theories and Experiments* (ene. de 2020), págs. 1-260.
- [15] K. Hebeler et al. “Equation of state and neutron star properties constrained by nuclear physics and observation”. En: *Astrophysical Journal* 773.1 (ago. de 2013), pág. 11. ISSN: 15384357.
- [16] John Antoniadis et al. “A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary”. En: *Science* 340.6131 (abr. de 2013), pág. 448. ISSN: 10959203.
- [17] Miguel Aparicio Resco et al. “On neutron stars in $f(R)$ theories: small radii, large masses and large energy emitted in a merger”. En: *Physics of the Dark Universe* 13 (feb. de 2016), págs. 147-161.
- [18] José M. M. Senovilla. “Junction conditions for $F(R)$ -gravity and their consequences”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 88.6 (mar. de 2013).
- [19] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff. “On Massive Neutron Cores”. En: *Physical Review* 55.4 (feb. de 1939), pág. 374. ISSN: 0031899X.
- [20] Artyom V. Astashenok, Alvaro de la Cruz-Dombriz y Sergei D. Odintsov. “The realistic models of relativistic stars in $f(R) = R + \alpha R^2$ gravity”. En: *Classical and Quantum Gravity* 34.20 (abr. de 2017).
- [21] Alex Kehagias, Azadeh Moradinezhad Dizgah y Antonio Riotto. “Comments on the Starobinsky Model of Inflation and its Descendants”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 89.4 (dic. de 2013).
- [22] URL: http://math_research.uct.ac.za/omei/gr/chap8/frame8.html
Peter Dunsby. *Orbits in Schwarzschild spacetime*. Oct. de 1996.
- [23] M. P.. Hobson, George. Efstathiou y A. N.. Lasenby. “General relativity : an introduction for physicists”. En: (2014), pág. 572.
- [24] Rituparno Goswami, Sunil D. Maharaj y Anne Marie Nzioki. “Buchdahl-Bondi limit in modified gravity: Packing extra effective mass in relativistic compact stars”. En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 92.6 (jun. de 2015). ISSN: 15502368.
- [25] Pham Van Ky et al. “Perturbative approach to $f(R)$ -gravitation in FLRW cosmology”. En: *Eur. Phys. J. C* 83 (2023), pág. 330.
- [26] B. P. Abbott et al. “GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State”. En: *Physical Review Letters* 121.16 (mayo de 2018). ISSN: 10797114.
- [27] R. B. Wiringa, V. Fiks y A. Fabrocini. “Equation of state for dense nucleon matter”. En: *Physical Review C* 38.2 (ago. de 1988), pág. 1010. ISSN: 05562813.

REFERENCIAS

- [28] A. Akmal, V. R. Pandharipande y D. G. Ravenhall. “The equation of state for nucleon matter and neutron star structure”. En: *Physical Review C - Nuclear Physics* 58.3 (abr. de 1998), págs. 1804-1828.
- [29] Richard C. Tolman. “Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid”. En: *Physical Review* 55.4 (feb. de 1939), pág. 364. ISSN: 0031899X.
- [30] Gonzalo J. Olmo et al. “Shadows and photon rings of regular black holes and geonic horizonless compact objects”. En: *Classical and Quantum Gravity* 40.17 (feb. de 2023).

Apéndices

A. Tablas de datos

$P_c / 10^{-4} \text{ km}^{-2}$	r_0 / km	$M_0 / M_\odot$	b_∞ / km	δ_r / deg	$\Delta\phi / \text{deg}$
0.5	11.462	1.120	13.590	46.881	7.823
0.6	11.629	1.246	14.067	53.705	9.858
0.8	11.861	1.454	14.851	66.420	13.8462
1.0	12.007	1.619	15.477	78.225	17.640
1.2	12.101	1.752	15.995	89.362	21.285
1.5	12.183	1.911	16.631	105.174	26.235
2.0	12.228	2.097	17.407	129.232	33.255
2.4	12.212	2.197	17.837	146.496	37.665
3.0	12.151	2.299	18.291	170.332	42.660
3.5	12.083	2.357	18.557	188.971	45.834
4.0	12.010	2.399	18.754	206.923	48.290
5.0	11.862	2.454	19.015	241.872	51.627
6.0	11.720	2.484	19.161	276.619	53.640
7.0	11.589	2.499	19.227	311.330	54.621
8.0	11.466	2.504	19.241	347.190	54.965

Tabla 1: Valores de radio estelar, masa estelar, parámetro de impacto asintótico, deflexión rasante y precesión del periastro ($k = 1$, $h = 20$) para distintas presiones centrales y la ecuación de estado *Middle* en Relatividad General.

$P_c / 10^{-4} \text{ km}^{-2}$	r_0 / km	A_{init}	$M_d / M_\odot$	$M_\infty / M_\odot$	b_∞ / km	δ_r / deg	$\Delta\phi / \text{deg}$
0.5	11.472	0.529	1.123	1.312	13.631	46.751	7.287
0.6	11.638	0.490	1.249	1.468	14.113	53.538	8.978
0.8	11.866	0.427	1.456	1.717	14.825	66.181	10.822
1.0	12.009	0.378	1.620	1.913	15.430	77.934	14.199
1.2	12.102	0.340	1.753	2.069	16.005	89.006	20.795
1.5	12.183	0.294	1.912	2.256	16.675	104.726	26.235
2.0	12.226	0.241	2.098	2.478	17.336	128.629	32.675
2.4	12.211	0.211	2.197	2.577	17.776	145.809	37.197
3.0	12.150	0.177	2.299	2.688	18.325	169.484	42.889
3.5	12.083	0.157	2.357	2.774	18.614	188.041	42.747
4.0	12.010	0.141	2.399	2.831	18.785	205.924	47.455
5.0	11.863	0.117	2.454	2.881	18.965	240.699	50.567
6.0	11.723	0.100	2.485	2.894	19.078	275.473	51.097
7.0	11.592	0.087	2.500	2.902	19.151	310.081	51.961
8.0	11.471	0.078	2.505	2.907	19.186	346.168	52.447

Tabla 2: Valores de radio estelar, valor inicial de $A(r)$, masa desnuda, masa asintótica, parámetro de impacto asintótico, deflexión rasante y precesión del periastro ($k = 1$, $h = 20$) para distintas presiones centrales y la ecuación de estado *Middle* en la teoría $f(R) = -0.05R^2$.

REFERENCIAS

$ a $	r_0 / km	A_{init}	$M_d / M_\odot$	$M_\infty / M_\odot$	b_∞ / km	δ_r / deg	$\Delta\phi / \text{deg}$
0	9.855	—	1.824	1.824	14.635	159.002	23.400
0.01	9.855	0.19531	1.824	1.860	14.673	159.190	22.487
0.02	9.855	0.19534	1.824	2.043	14.643	159.919	21.614
0.03	9.855	0.19536	1.824	2.321	14.593	159.064	21.560
0.04	9.854	0.19538	1.824	2.588	14.676	158.051	19.247
0.05	9.854	0.19541	1.824	2.800	14.672	157.698	22.262
0.1	9.850	0.19529	1.823	4.806	14.763	157.433	8.208
0.2	9.840	0.19493	1.821	9.685	14.625	157.150	13.746
0.3	9.831	0.19468	1.820	13.613	14.314	156.572	—

Tabla 3: Valores de radio estelar, valor inicial de $A(r)$, masa desnuda, masa asintótica, parámetro de impacto asintótico, deflexión rasante y precesión del periastro ($k = 1$, $h = 20$) para distintos valores de $|a|$ y la ecuación de estado *Soft*.

$ a $	r_0 / km	A_{init}	$M_d / M_\odot$	$M_\infty / M_\odot$	b_∞ / km	δ_r / deg	$\Delta\phi / \text{deg}$
0	12.011	—	2.399	2.399	18.754	206.924	48.289
0.01	12.011	0.14089	2.400	2.433	18.782	208.860	48.152
0.02	12.011	0.14091	2.400	2.508	18.761	207.644	47.474
0.03	12.010	0.14092	2.399	2.587	18.744	206.799	48.265
0.04	12.010	0.14093	2.399	2.691	18.694	206.254	46.856
0.05	12.010	0.14091	2.399	2.831	18.785	205.924	47.455
0.1	12.009	0.14094	2.398	3.379	18.714	205.906	41.954
0.2	12.007	0.14087	2.398	5.505	18.952	205.824	32.764
0.3	12.005	0.14081	2.398	7.166	18.432	205.499	21.123

Tabla 4: Valores de radio estelar, valor inicial de $A(r)$, masa desnuda, masa asintótica, parámetro de impacto asintótico, deflexión rasante y precesión del periastro ($k = 1$, $h = 20$) para distintos valores de $|a|$ y la ecuación de estado *Middle*.

$ a $	r_0 / km	A_{init}	$M_d / M_\odot$	$M_\infty / M_\odot$	b_∞ / km	δ_r / deg	$\Delta\phi / \text{deg}$
0	13.805	—	2.942	2.942	22.670	286.202	99.486
0.01	13.805	0.10490	2.942	2.961	22.737	287.218	99.853
0.02	13.805	0.10490	2.942	3.015	22.680	286.949	99.329
0.03	13.805	0.10491	2.942	3.103	22.655	286.757	98.800
0.04	13.805	0.10491	2.942	3.226	22.721	285.947	98.125
0.05	13.805	0.10491	2.942	3.283	22.584	285.343	97.477
0.1	13.806	0.10487	2.942	3.951	22.522	284.830	99.927
0.2	13.807	0.10472	2.944	6.141	22.811	285.029	87.993
0.3	13.808	0.10462	2.945	7.729	22.468	285.760	76.806

Tabla 5: Valores de radio estelar, valor inicial de $A(r)$, masa desnuda, masa asintótica, parámetro de impacto asintótico, deflexión rasante y precesión del periastro ($k = 1$, $h = 20$) para distintos valores de $|a|$ y la ecuación de estado *Stiff*.