

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Modelos estocásticos en Dinámica de Poblaciones

AUTORA: Elena De Juan Korkostegi

TUTOR: Ángel Andrés Tocino García

Curso 2023-2024



VNIVERSIDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Modelos estocásticos en Dinámica de Poblaciones

AUTORA: Elena De Juan Korkostegi

TUTOR: Ángel Andrés Tocino García

Curso 2023-2024

CERTIFICADO DE LOS/AS TUTORES/AS DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

D. Ángel Andrés Tocino García, profesor del Departamento de Matemáticas la Universidad de Salamanca

HACE CONSTAR

Que el trabajo titulado “Modelos estocásticos en Dinámica de Poblaciones”, que se presenta, ha sido realizado por Elena De Juan Corcostegui, con DNI número ***49091X y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo Fin de Máster del Máster Universitario en Modelización Matemática de la Universidad de Salamanca

Salamanca, a 7 de julio de 2024

Firmado.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Procesos de Wiener	3
1.2. La integral de Itô	5
1.3. Cálculo diferencial estocástico	8
1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas	9
1.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales	11
2. Modelos estocásticos en Dinámica de Poblaciones	16
2.1. Modelo de Malthus	16
2.2. Modelo logístico	19
2.3. Modelo de crecimiento de raíz cuadrada con reversión a la media (CIR)	22
3. Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas	25
3.1. Definición de un método numérico (esquema)	25
3.2. Convergencia de un método numérico	26
3.2.1. Convergencia fuerte	26
3.2.2. Convergencia débil	26
3.3. Esquemas iterativos para la aproximación de EDE	26
3.3.1. Aproximación de Euler-Maruyama (EM)	27
3.3.2. Aproximación de Milstein	27
3.3.3. Aproximación de Taylor	28
3.4. Esquemas adaptados para la aproximación de EDE	28
3.4.1. Esquema adaptado de EM	29
3.4.2. Esquemas adaptados para el modelo de crecimiento de raíz cuadrada con reversión a la media	29
4. Experimentos numéricos	32
4.1. Simulaciones con el Modelo de Malthus	32
4.2. Simulaciones con el Modelo logístico	38
4.3. Simulaciones con el Modelo CIR	43
5. Conclusiones	49
Bibliografía	51

Índice de figuras

4.1. Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama. . .	33
4.2. Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama adaptado.	33
4.3. Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Milstein explícito. . .	34
4.4. Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden débil 2.0.	34
4.5. Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden fuerte 1.5.	35
4.6. Modelo Malthus, todas las trayectorias juntas.	35
4.7. Gráfica de errores débiles del modelo de Malthus.	36
4.8. Gráfica de errores fuertes del modelo de Malthus.	37
4.9. Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama. . .	38
4.10. Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama adaptado.	39
4.11. Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Milstein explícito. . .	39
4.12. Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden débil 2.0.	40
4.13. Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden fuerte 1.5.	40
4.14. Modelo logístico, todas las trayectorias juntas.	41
4.15. Gráfica de errores débiles del modelo logístico.	42
4.16. Gráfica de errores fuertes del modelo logístico.	43
4.17. Modelo CIR, una trayectoria del valor medio de la solución junto a la de Milstein implícito.	44
4.18. Modelo CIR, una trayectoria del valor medio de la solución junto a la del esquema (3.9).	44
4.19. Modelo CIR, una trayectoria del valor medio de la solución junto a la del esquema (3.10).	44
4.20. Modelo CIR, todas las trayectorias juntas.	45
4.21. Gráfica de errores débiles del modelo CIR.	46
4.22. Gráfica ilustrativa del límite de la esperanza de X_t	46
4.23. Gráfica de la media de 1000 trayectorias de X_t , mediante Milstein implícito. .	47
4.24. Gráfica de la media de 1000 trayectorias de X_t , mediante esquema (3.9). .	47
4.25. Gráfica de la media de 1000 trayectorias de X_t , mediante esquema (3.10). .	48

Introducción

La dinámica de poblaciones es un campo de estudio fundamental en la biología y la ecología. En ellas se estudian los cambios en el tamaño y la composición de las poblaciones a lo largo del tiempo. Para poder entender y predecir estos cambios, se utilizan diversos tipos de modelos matemáticos. Entre estos modelos se incluyen los deterministas y los estocásticos. Los modelos deterministas se basan en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), mientras que los modelos estocásticos utilizan ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs).

Los modelos deterministas nacieron en el siglo XVIII, con los trabajos pioneros de Thomas Robert Malthus, quien introdujo el concepto de crecimiento exponencial de la población humana y sus límites impuestos por los recursos disponibles. Con el paso del tiempo, se hizo evidente que estos modelos no capturaban completamente la variabilidad inherente y los factores aleatorios que afectan a las poblaciones en la naturaleza. Así nacieron los modelos estocásticos, por la necesidad de cubrir las deficiencias de los modelos deterministas. Sucedió que los modelos deterministas no tomaban en consideración factores como el ruido ambiental (clima, desastres naturales, epidemias, etc.), los cuales sí pueden ser representados por un proceso estocástico.

De este modo, el surgimiento de los modelos estocásticos marcó un hito en este campo. A principios del siglo XX, figuras como Ronald A. Fisher y Andrey Kolmogorov sentaron las bases para el cálculo estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Estos modelos combinan componentes deterministas y estocásticos del comportamiento dinámico, de modo que se pueden obtener modelos más realistas. Teniendo esto en cuenta, este trabajo se va a centrar en el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas para determinar diversas ecuaciones de crecimiento de la población.

Para la aplicación de las EDEs, es imprescindible tener una buena base en el cálculo diferencial estocástico. Por lo tanto, en el capítulo 1, se presentará un resumen esencial del cálculo estocástico (en el sentido de Itô), que incluirá una introducción a los procesos de Wiener, la integral de Itô, así como el cálculo diferencial estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Una vez entendido el cálculo estocástico, en el capítulo 2, se estudiarán modelos específicos de crecimiento poblacional, tales como el modelo de Malthus, el modelo logístico y el modelo de crecimiento de raíz cuadrada con reversión a la media (CIR).

Muchas veces, aunque se demuestre que existe la solución de una EDEs, no es posible

darla en forma explícita. Por eso, como se hace con las EDOs, en el capítulo 3 se analizarán métodos numéricos para la aproximación de EDE, incluyendo esquemas iterativos y esquemas adaptados para mejorar la precisión en la simulación de estos modelos.

Finalmente, en el capítulo 4 se presentarán experimentos numéricos realizados con los modelos mencionados y se concluirá comentando los resultados obtenidos. El objetivo de este capítulo será comparar los esquemas vistos. Los experimentos matemáticos se realizarán utilizando el software Mathematica.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, haremos un resumen de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE), que será imprescindible para entender lo que vendrá después en este trabajo. En primer lugar, en la sección 1.1 presentaremos los procesos de Wiener y algunas de sus propiedades. En la sección 1.2, describiremos la integral de Itô junto a algunas de sus propiedades. En la sección 1.3, explicaremos el cálculo diferencial estocástico. En la sección 1.4 trataremos las ecuaciones diferenciales estocásticas, y, por último en la 1.5, las ecuaciones lineales, que son un subtipo de ellas.

1.1. Procesos de Wiener

En esta sección, vamos a definir el movimiento Browniano, también conocido como proceso de Wiener. Robert Brown (1828) fue un botánico escocés, que describió por primera vez el fenómeno del movimiento errático de pequeñas partículas de polen suspendidas en un fluido. Brown concluyó que las partículas exhibían un “movimiento aparentemente aleatorio”. Más tarde se explicó que las partículas de polen recibían el impacto de las moléculas del fluido que se movían rápidamente. Por otro lado, Norbert Wiener estudió las propiedades del movimiento Browniano.

De aquí en adelante, se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Empezemos dando la definición de un proceso de Wiener.

Definición 1.1.1 (Proceso de Wiener). Un *proceso (unidimensional) de Wiener*, también conocido como *movimiento Browniano (MB)*, es un proceso estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $P(W_0 = 0) = 1$.
2. Para $0 \leq s < t$, los incrementos $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, es decir,

$$P((W_t - W_s) \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx,$$

donde B es un Boreliano de $\mathbb{R}$. Equivalentemente, $W_t - W_s \sim \sqrt{t-s}N(0, 1)$.

3. Para $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, los incrementos de Wiener $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$, son variables aleatorias independientes.

La importancia de un proceso de Wiener $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es que sirve para representar el efecto acumulativo del ruido del proceso. Es decir, si W_s y W_t , $0 \leq s < t$, marcan la posición del proceso en los tiempos s y t , respectivamente, entonces el incremento $W_t - W_s$ refleja el ruido puro en el intervalo $[s, t]$.

A continuación, vamos a ver algunas propiedades del proceso de Wiener.

Proposición 1.1.1. *Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener. Entonces, se cumple lo siguiente:*

1. $\mathbb{E}[W_t] = 0$.
2. $\mathbb{E}[W_t^2] = \mathbb{V}[W_t] = t$. Por lo tanto, $W_t \sim N(0, t)$.
3. $\mathbb{E}[W_t W_s] = \min\{t, s\}$, para todo $t, s \geq 0$.
4. $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = |t - s|$.
5. Los incrementos de un proceso de Wiener son estacionarios, es decir, la distribución de $W_t - W_s$, $0 \leq s < t$ depende solo de la diferencia $t - s$.

Ahora, vamos a dar la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener, definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. El proceso de Wiener se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W : T \times \Omega &\longrightarrow S \\ (t, \omega) &\longmapsto X(t, \omega). \end{aligned}$$

Para cada $t \in T$ fijo, tendremos una variable aleatoria:

$$\begin{aligned} W_t : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Y para cada $\omega \in \Omega$ fijo, tendremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} W^\omega : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto W^\omega(t), \end{aligned}$$

llamada *trayectoria muestral del proceso*.

Una vez visto lo que son las trayectorias de un proceso de Wiener, tenemos la siguiente proposición para ellas:

Proposición 1.1.2. *Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener. Entonces, las trayectorias de su proceso cumplen lo siguiente:*

1. Son funciones continuas en c.p.t.
2. Son funciones no diferenciables c.p.t.

3. Tienen variación ilimitada en cualquier intervalo $[a, b]$.

Y, por último, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.1.3. Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener. Entonces:

1. La ley fuerte de los grandes números establece que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{t} = 0.$$

2. W_t cambia de signo infinitamente en $[0, \infty)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log(\log(t))}} = -1; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log(\log(t))}} = 1 \quad c.s.$$

1.2. La integral de Itô

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Wiener definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para una determinada $g[t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, el objetivo es definir la variable aleatoria:

$$X = \int_{t_0}^T g(s, \omega) dW_\omega(s),$$

$\omega \in \Omega$, o, escrita de forma más concisa,

$$X = \int_{t_0}^T g(s) dW_s,$$

es decir, definir la integral estocástica o también conocida como la integral de Itô.

Dado que para casi todo ω la variación total de $W^\omega(t)$ es ilimitada, la integral no se puede interpretar en el sentido de Stieljes (una generalización de la integral de Riemann).

La familia de σ -álgebras $\mathfrak{B}_t = \sigma(\{W_s : t_0 \leq s \leq t\})$ contiene la “historia” de W hasta el instante t . Ahora, consideremos una familia de σ -álgebras $\mathcal{F}_t$, tal que:

- $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ si $s < t$.
- $\mathfrak{B}_t \subseteq \mathcal{F}_t$.
- $\mathcal{F}_t$ es independiente de $\mathfrak{B}_t^+ = \sigma(\{W_s - W_t : t \leq s < \infty\})$.

Cualquier familia $\{\mathcal{F}_t\}$ de este tipo se denomina una *filtración no anticipada* respecto al proceso de Wiener. Las elecciones comunes para $\{\mathcal{F}_t\}$ suelen ser $\mathfrak{B}_t$ o $\sigma(\mathfrak{B}_t, c)$, donde c es una variable aleatoria independiente de W_t .

La integral de Itô se definirá en el siguiente conjunto:

$$M_2[t_0, T] = \{g : [t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ satisface (1) – (3)}\},$$

siendo las condiciones que tiene que cumplir g las siguientes:

1. g es una función $\mathcal{B}[t_0, T] \times \mathcal{F}$ -medible.
2. $g \in \mathcal{L}^2([t_0, T] \times \Omega)$, es decir,

$$\int_{t_0}^T \mathbb{E}[g^2(s)] ds < +\infty.$$

3. La función g está adaptada a una familia no anticipada $\{\mathcal{F}_t\}$: $g(t, \cdot)$, es $\mathcal{F}_t$ -medible para cada $t \in [t_0, T]$.

Ahora, para poder definir la integral estocástica en el conjunto $M_2[t_0, T]$ que acabamos de definir, vamos a seguir el siguiente esquema:

- Si $S_2[t_0, T] \subseteq M_2[t_0, T]$ es el subconjunto de funciones escalonadas, se definirá la integral estocástica de una función $g \in S_2[t_0, T]$.
- Toda función de $M_2[t_0, T]$ es el límite (en algún sentido) de una sucesión de funciones de $S_2[t_0, T]$.
- La definición se expande a $M_2[t_0, T]$ mediante aproximación.

Por lo tanto, vamos a empezar definiendo la integral de Itô en funciones escalonadas. Para ello, definamos primero lo que es una función escalonada.

Definición 1.2.1. Una función $g \in M_2[t_0, T]$ es escalonada si existe una descomposición $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, tal que $g(s) = g(t_{i-1})$ para todo $s \in [t_{i-1}, t_i)$. Se puede expresar de la siguiente manera:

$$g(s) = \sum_{i=1}^n g(t_{i-1}) \chi_{[t_{i-1}, t_i)}(s),$$

siendo $\chi_{[t_{i-1}, t_i)}(s)$ la función indicadora.

Ahora, estamos listos para definir la integral estocástica en funciones escalonadas. Para ello, sea la siguiente definición:

Definición 1.2.2 (La integral de Itô para funciones escalonadas). Para una función escalonada g la integral estocástica respecto a W_t como variable aleatoria es la siguiente:

$$\int_{t_0}^T g dW = \int_{t_0}^T g(s) dW_s = \sum_{i=1}^n g(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

A continuación, teniendo en cuenta que el conjunto de funciones escalonadas $S_2[t_0, T]$ es denso en $M_2[t_0, T]$, tenemos los dos siguientes teoremas:

Teorema 1.2.1. Para toda función $g \in M_2[t_0, T]$ existe una sucesión de funciones escalonadas $g_n \in S_2[t_0, T]$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \mathbb{E}|g_n(s) - g(s)|^2 ds = 0.$$

Teorema 1.2.2. Si $g \in M_2[t_0, T]$, y $g_n \in S_2[t_0, T]$ es cualquier secuencia de funciones escalonadas que aproxima g en el sentido del teorema anterior, entonces $\{\int_{t_0}^T g_n(s) dW_s\}$ converge con media cuadrática y el límite no depende de $\{g_n\}$.

Ahora ya estamos preparados para definir la integral de Itô.

Definición 1.2.3 (La integral de Itô). Definimos la integral Itô como

$$I(g) = (m.c.) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T g_n(s) dW_s,$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(I(g) - \int_{t_0}^T g_n(s) dW_s \right)^2 \right] = 0.$$

En cuanto a la notación:

$$I(g) = I_{[t_0, T]}(g) = \int_{t_0}^T g(s) dW_s = \int_{t_0}^T g(s, \omega) dW_\omega(s).$$

Para $t \geq t_0$

$$X_t = I_{[t_0, t]}(g) = \int_{t_0}^t g(s) dW_s,$$

define un proceso aleatorio $\{X_t\}_{[t_0, T]}$.

Una vez definida la integral estocástica, vamos a enunciar algunas de sus propiedades. En cuanto a la linealidad, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2.1 (Linealidad). Si $g, h \in M_2[t_0, T]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\int_{t_0}^T (\lambda g + \mu h) dW = \lambda \int_{t_0}^T g dW + \mu \int_{t_0}^T h dW.$$

En cuanto a las propiedades de la integral de Itô como variable aleatoria, tenemos lo siguiente:

Proposición 1.2.2. $X = \int_{t_0}^T g(s) dW_s$ es una variable aleatoria con esperanza nula,

$$\mathbb{E} \left[\int_{t_0}^T g(s) dW_s \right] = 0$$

y varianza (isometría de Itô):

$$\mathbb{V} \left[\int_{t_0}^T g(s) dW_s \right] = \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_0}^T g(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_{t_0}^T \mathbb{E} [g^2(s)] ds.$$

Si $g = g(s)$ no depende de ω , entonces $\int_{t_0}^T g(s) dW_s$ sigue una distribución normal $N(0, \int_{t_0}^T g^2(s) ds)$.

Por último, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3. Sea el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$, donde $X = \int_{t_0}^t g(s) dW_s$. Entonces:

1. X_t es no anticipativo (un proceso adaptado) con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.
2. Si $t, s \in [t_0, T]$

$$\text{Cov}[X_t, X_s] = \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_0}^t g(u) dW_u \right) \left(\int_{t_0}^s g(v) dW_v \right) \right] = \int_{t_0}^{\min\{t, s\}} \mathbb{E} [g^2(s)] ds.$$

3. X_t tiene trayectorias continuas con probabilidad 1.
4. X_t tiene incrementos ortogonales (no independientes en general).
5. Si $g(s)$ no depende de ω , entonces $\{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$ es un proceso Gaussiano con incrementos independientes, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ y $\mathbb{E}[X_t X_s] = \int_{t_0}^{\min\{t, s\}} \mathbb{E} [g^2(s)] ds$.

1.3. Cálculo diferencial estocástico

Una vez definida la integral de Itô en el apartado anterior, vamos a ver el cálculo diferencial estocástico. Para ello, empecemos definiendo lo que es un proceso de Itô.

Definición 1.3.1. Sea $g(s, \omega) \in M_2[t_0, T]$, $f(s, \omega) \in L^1[t_0, T]$ y $c(\omega)$ una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_0}$ -medible, entonces,

$$X_t = c + \int_{t_0}^t f(s) ds + \int_{t_0}^t g(s) dW_s$$

define un proceso estocástico, llamado *proceso de Itô*. Normalmente, se escribe de la siguiente manera:

$$dX_t = f(t) dt + g(t) dW_t,$$

y se dice que el proceso X_t tiene *diferencial estocástica* $f(t) dt + g(t) dW_t$.

Veamos un ejemplo

Ejemplo 1.3.1. Se demuestra que $\int_0^t W_s dW_s = \frac{W_t^2 - t}{2}$. Entonces, tenemos:

$$W_t^2 = \int_0^t 2W_s dW_s + \int_0^t 1 ds,$$

es decir, el proceso W_t^2 tiene diferencial estocástica

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t.$$

A continuación, vamos a enunciar el siguiente teorema que nos da como resultado la formula de Itô.

Teorema 1.3.1 (Formula de Itô). Si X_t tiene diferencial estocástica

$$dX_t = f(t) dt + g(t) dW_t,$$

y $u : [t_0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, entonces la diferencial estocástica de $Y_t = u(t, X_t)$ es la siguiente:

$$dY_t = d(u(t, X_t)) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)f(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t)g^2(t) \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)g(t)dW_t. \quad (1.1)$$

Esta es la regla de la cadena del cálculo diferencial estocástico, también llamada fórmula de Itô.

Por último, vamos a ver la regla de integración por partes en la siguiente proposición:

Proposición 1.3.1 (Derivación de un producto (regla de integración por partes)). Si

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f_1(t) dt + g_1(t) dW_t, \\ dX_2(t) &= f_2(t) dt + g_2(t) dW_t, \end{aligned}$$

entonces

$$d(X_1 X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + dX_1 dX_2,$$

entendiendo que el producto de diferenciales se rige por la tabla de “multiplicación”:

$\times$	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

Entonces, tenemos

$$d(X_1 X_2) = X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + g_1 \cdot g_2 dt$$

o la fórmula estocástica de integración por partes:

$$X_1 X_2 = X_1(t_0)X_2(t_0) + \int_{t_0}^t X_1 dX_2 + \int_{t_0}^t X_2 dX_1 + \int_{t_0}^t g_1(s)g_2(s) ds.$$

Ejemplo 1.3.2. $d(tW_t) = W_t dt + t dW_t$.

1.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este apartado vamos a presentar las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE).

Consideremos $\{W_t\}$ un proceso de Wiener, $a : [t_0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b : [t_0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles y c una variable $\mathcal{F}_{t_0}$ -medible. Entonces, sea la siguiente definición:

Definición 1.4.1. Una *ecuación diferencial estocástica (EDE)* es una ecuación de la forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c, \quad t \in [t_0, T], \quad (1.2)$$

que representa la ecuación integral

$$X_t = c + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s,$$

donde a es el coeficiente de deriva y b es el coeficiente de difusión.

Veamos la siguiente definición:

Definición 1.4.2. La solución de una EDE en $[t_0, T]$ es un proceso $X_t = \{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$, tal que:

1. X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible para $t \in [t_0, T]$.
2. $\bar{a}(t, \omega) = a(t, X_t(\omega)) \in L^1[t_0, T]$ y $\bar{b}(t, \omega) = b(t, X_t(\omega)) \in L^2[t_0, T]$ casi seguro.
3. La ecuación integral se cumple casi seguro.

A continuación, enunciaremos un teorema que nos dice las condiciones que tiene que cumplir una EDE para que su solución exista y sea única.

Teorema 1.4.1 (Existencia y unicidad). *Consideremos la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):*

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c, \quad t \in [t_0, T],$$

donde $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener, c es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_0}$ -medible, y $a : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. *Condición global de Lipschitz:* para todo $t \in [t_0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|;$$

2. *Crecimiento lineal:* para todo $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}$

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|),$$

para una determinada constante $K > 0$. Entonces, la EDE tiene una solución única $\{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$, tal que $X^\omega(t) = X(t)$ es continua con probabilidad 1.

Acerca del teorema que acabamos de enunciar, tenemos la siguiente observación:

Observación 1.4.1.

- La continuidad de la solución significa que con probabilidad 1 las trayectorias son funciones continuas (de t).

- La unicidad se interpreta en probabilidad: significa que si $\{Y_t\}_{t \in [t_0, T]}$ es un proceso estocástico con trayectorias continuas $Y^\omega(t)$ con probabilidad 1 y tal que $Y_{t_0} = c$, entonces

$$P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| > 0 \right) = 0,$$

es decir,

$$P(\{\omega : X^\omega(t) = Y^\omega(t) \text{ for all } t \in [t_0, T]\}) = 1.$$

- Si las funciones a y b están definidas en $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}$ y si las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen en cada subintervalo $[t_0, T]$, entonces la EDE tiene solución única $\{X_t\}_{t \in [t_0, \infty)}$.

Por último, vamos a ver un tipo de EDE, que son las lineales.

1.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Por lo general, en la EDE (1.2) que hemos visto en el apartado anterior, las funciones coeficientes a y b suelen tener forma no lineal. Cuando no tenemos linealidad, se utilizan métodos de aproximación numéricos para generar una solución X_t de la ecuación (1.2), ya que, en general, cuando tenemos ecuaciones no lineales no solemos poder obtener las soluciones de forma explícita. Pero en algunos casos es posible obtener su solución (realizando cambio de variables...), como veremos en este apartado. Además, tal como el título del apartado indica, describiremos las EDE lineales, y veremos métodos para determinar la solución explícita de estas.

Empecemos definiendo lo que es una EDE lineal.

Definición 1.5.1. La siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c, \quad t \in [t_0, T]$$

es *lineal* si las funciones a y b son cada una de ellas funciones lineales de X en $[t_0, T]$. Es decir, si

$$a(t, X_t) = a_1(t) + A(t)X_t,$$

$$b(t, X_t) = b_1(t) + B(t)X_t,$$

donde $a_1(t), b_1(t), A(t)$ y $B(t)$ son todas aplicaciones de $[t_0, T]$ a $\mathbb{R}$. En tal caso, las EDE lineales se escriben de la siguiente manera:

$$dX_t = (a_1(t) + A(t)X_t)dt + (b_1(t) + B(t)X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c, \quad t \in [t_0, T].$$

En este tipo de ecuaciones, para la existencia y unicidad de la solución tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.5.1 (Existencia y unicidad). *Si $A(t), a_1(t), B(t), b_1(t)$ son medibles y acotadas en $[t_0, T]$, entonces la ecuación lineal tiene una solución única en $[t_0, T]$ para cada condición inicial $X_{t_0} = c$. Si las condiciones se cumplen en cada subintervalo de $[t_0, \infty)$, existe una única solución global.*

A continuación vamos a definir dos tipos de EDE lineales, que son las homogéneas y las autónomas.

Definición 1.5.2. Una EDE lineal se dice que es *homogenea* si $a_1(t) = b_1(t) \equiv 0$, es decir,

$$dX_t = A(t)X_t dt + B(t)X_t dW_t, \quad X_{t_0} = c, \quad t \in [t_0, T].$$

Definición 1.5.3. Una EDE lineal se dice que es *autonoma* si $a_1(t)$, $A(t)$, $b_1(t)$ y $B(t)$ son todas independientes de t , es decir,

$$dX_t = (a_1 + AX_t)dt + (b_1 + BX_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c, \quad t \in [t_0, T],$$

siendo a_1 , A , b_1 y B constantes reales. Para este tipo de EDE, siempre existe una solución continua y global.

Por último, vamos a proceder a explicar la resolución de EDE lineales. Para este tipo de ecuaciones, podremos dar la solución en forma explícita siempre y cuando nos encontremos en uno de los siguientes casos:

- Cuando $A(t) = B(t) = 0$.
- Cuando tenemos ecuaciones lineales homogéneas (estas son reducibles a una forma más simple).
- Cuando tenemos ecuaciones no homogéneas, y se utiliza la técnica de variación de parámetros.

A continuación, en el paso 1 veremos cuál es la solución general de una EDE lineal homogénea, y en el paso 2 veremos cómo se aplica la variación de un parámetro a una ecuación lineal no homogénea.

- **Paso 1: Solución de la EDE lineal homogénea.** La siguiente EDE lineal homogénea:

$$\begin{aligned} dX_t &= A(t) X_t dt + B(t) X_t dW_t \\ X_0 &= c \end{aligned}$$

es reducible y tiene solución:

$$X_t = c \exp \left\{ \int_0^t \left(A(s) - \frac{1}{2} B^2(s) \right) ds + \int_0^t B(s) dW_s \right\}. \quad (1.3)$$

- **Paso 2: Variación de parámetros.** Sea

$$\Phi_t = \exp \left\{ \int_0^t \left(A(s) - \frac{1}{2} B^2(s) \right) ds + \int_0^t B(s) dW_s \right\}, \quad (1.4)$$

la solución de la ecuación homogénea con $c = 1$. Sea $X_t = \Phi_t Y_t$, la solución de la ecuación lineal completa

$$dX_t = (A(t) X_t + a_1(t)) dt + ((B(t) X_t + b_1(t)) dW_t.$$

$Y_t = \Phi_t^{-1} X_t$ puede calcularse porque satisface una EDE reducida. Para encontrar Y_t se calcula $dY_t = d(\Phi_t^{-1} X_t)$. Para ello, primero se obtiene la inversa de Φ_t (1.4):

$$\Phi_t^{-1} = \exp \left\{ - \int_0^t \left(A(s) - \frac{1}{2} B^2(s) \right) ds - \int_0^t B(s) dW_s \right\}, \quad (1.5)$$

Ahora, se calcula la derivada de Φ_t^{-1} (1.5):

$$d\Phi_t^{-1} = \Phi_t^{-1} \left((-A(t) + B^2(t)) dt - B(t) dW_t \right).$$

Calculando $dY_t = d(\Phi_t^{-1} X_t)$ mediante el cálculo estocástico, obtenemos la EDE para Y_t :

$$\begin{aligned} dY_t &= d(\Phi_t^{-1} X_t) = \Phi_t^{-1} dX_t + d\Phi_t^{-1} X_t + d\Phi_t^{-1} dX_t \\ &= \Phi_t^{-1} dX_t + d\Phi_t^{-1} X_t - (B(t) X_t + b_1(t)) \Phi_t^{-1} B(t) \\ &= \Phi_t^{-1} ((a_1(t) - b_1(t)B(t))dt + b_1(t) dW_t), \end{aligned}$$

que es una ecuación reducida con solución

$$Y_t = Y(0) + \int_0^t \Phi_s^{-1} (a_1(s) - b_1(s)B(s)) ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} b_1(s) dW_s.$$

Por lo tanto, $X_t = \Phi_t Y_t$ es

$$X_t = \Phi_t \left(X(0) + \int_0^t \Phi_s^{-1} (a_1(s) - b_1(s)B(s)) ds + \int_0^t \Phi_s^{-1} b_1(s) dW_s \right), \quad (1.6)$$

la solución de la ecuación estocástica lineal.

A continuación, vamos a analizar el primer y segundo momento de la solución de una ecuación lineal. Sea la siguiente ecuación lineal:

$$dX_t = (A(t) X_t + a_1(t)) dt + (B(t) X_t + b_1(t)) dW_t, \quad X_0 = c,$$

con solución

$$X_t = c + \int_{t_0}^t (A(s) X_s + a_1(s)) ds + \int_{t_0}^t (B(s) X_s + b_1(s)) dW_s.$$

Entonces, la esperanza de la solución $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ será la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$m'(t) = A(t)m(t) + a_1(t); \quad m(t_0) = \mathbb{E}[c].$$

Y el segundo momento $P(t) = \mathbb{E}[X_t^2]$ es la solución de la ecuación:

$$p'(t) = (2A(t) + B^2(t))p(t) + (2a_1(t) + B(t)b_1(t))m(t) + b_1^2(t); \quad p(t_0) = \mathbb{E}[c^2].$$

Como último punto, vamos a estudiar la reducibilidad de las EDE. Tal como hemos dicho anteriormente, en ocasiones una EDE no lineal será transformable en una más simple, de la que se puede encontrar la solución explícita. Pero esto no va a poder ser posible para todas las EDE, ya que tendrán que cumplir unas condiciones de reducibilidad. Utilizando

cambios de variables específicos y comprobando que las condiciones de reducibilidad se cumplen, podemos determinar si una EDE dada es reducible y encontrar las funciones necesarias para resolverla.

Para ello, sea la siguiente EDE

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

el cambio de variable $y = h(t, x)$ con inversa $x = k(t, y)$ convierte la ecuación en la siguiente EDE resoluble:

$$dY_t = \bar{a}(t, Y_t) dt + \bar{b}(t, Y_t) dW_t;$$

luego $X_t = k(t, Y_t)$ es la solución de la EDE original.

h es una función tal que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no dependen de y :

$$dY_t = \bar{a}(t) dt + \bar{b}(t) dW_t$$

con solución:

$$Y_t = h(0, X(0)) + \int_0^t \bar{a}(s) ds + \int_0^t \bar{b}(s) dW_s.$$

En particular, si $\bar{a}(s) = c_1$ y $\bar{b}(s) = c_2$ (constantes), entonces:

$$X_t = k(t, h(0, X(0)) + c_1 t + c_2 W_t)$$

resuelve la ecuación original.

Por último, veamos cuáles son las condiciones de reducibilidad. Si $dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$ y $Y_t = h(t, X_t)$ es la solución de

$$dY_t = \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} b^2 \right) (t, Y_t) dt + \left(\frac{\partial h}{\partial x} b \right) (t, Y_t) dW_t,$$

la ecuación es reducible si existe una función suave e invertible h , tal que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} b^2 \right) (t, x) &= \bar{a}(t) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial x} b \right) (t, x) &= \bar{b}(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Partiendo de las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} b^2 \right\} (t, x) &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} (t, x) &= \frac{\bar{b}(t)}{b(t, x)}, \end{aligned}$$

y de lo anterior obtenemos

$$\frac{\bar{b}'}{\bar{b}} = b \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right), \tag{1.8}$$

y la ecuación es reducible si y solo si

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[b \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \right] = 0.$$

En este caso, $\bar{b}$ se puede determinar de (1.8), y h y $\bar{a}$ se pueden calcular a partir de (1.7).

Capítulo 2

Modelos estocásticos en Dinámica de Poblaciones

En este capítulo vamos a ver diferentes modelos estocásticos en Dinámica de Poblaciones. Por lo general, a partir de modelos deterministas bien conocidos en dinámica de poblaciones, obtendremos los modelos estocásticos. En la sección 2.1, veremos el modelo de Malthus; en la sección 2.2, el modelo logístico; y, por último, en la sección 2.3, el modelo de crecimiento de raíz cuadrada con reversión a la media (CIR). Obtendremos la solución del modelo explícitamente cuando sea posible y, en los casos que no se pueda, daremos información acerca de su distribución. Además, dado que estos modelos estocásticos se utilizan ampliamente en áreas como la Biología, Economía, Ingeniería, etc., es útil especificar sus momentos, en particular la media y la varianza.

2.1. Modelo de Malthus

En este apartado, vamos a presentar el modelo estocástico más sencillo que tenemos en Dinámica de Poblaciones. Para ello, partiremos de un modelo de crecimiento poblacional formado por una ecuación diferencial ordinaria (EDO) y desarrollaremos una ecuación diferencial estocástica (EDE), que será nuestro modelo estocástico de crecimiento poblacional.

Sea el siguiente modelo de crecimiento poblacional

$$\frac{dN(t)}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde $N(t)$ es el tamaño de la población en el instante t , N_0 es la población inicial y $a(t)$ es la tasa de crecimiento relativa de la población, que puede ser determinista o una constante; si $a(t)$ es una constante, tendremos el modelo de Malthus.

Pero ¿qué ocurre si $a(t)$ no es determinista o no es una constante? Si $a(t)$ está sujeto a fluctuaciones aleatorias que, posiblemente, puedan atribuirse a factores ajenos como el clima, la ubicación, el entorno general..., se puede escribir del siguiente modo:

$$a(t) = r(t) + \alpha(t)\xi_t,$$

donde $r(t)$ y $\alpha(t)$ son funciones dadas de t , y el término de ruido ξ_t (unidimensional) sigue una “ley de probabilidad conocida”. Por tanto, podemos escribir la ecuación (2.1) de la siguiente manera:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (r(t) - \alpha(t)\xi_t)N(t), \quad N(0) = N_0, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Ahora, si $r(t) = r = \text{constante}$, $\alpha(t) = \alpha = \text{constante}$ y el ruido $\xi_t = dW(t)/dt$ (siendo W_t un proceso de Wiener con $W(0) = W_0 = 0$), entonces (2.2) se convierte en

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(r + \alpha \frac{dW(t)}{dt} \right) N(t), \quad N(0) = N_0 \quad t \geq 0,$$

o

$$dN(t) = rN(t)dt + \alpha N(t)dW(t), \quad N(0) = N_0 \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Obtenemos una ecuación diferencial estocástica lineal, autónoma y homogénea. La solución de esta EDE es (1.3):

$$N(t) = N_0 e^{(r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha W_t}, \quad (2.4)$$

que es un proceso geométrico Browniano.

En cuanto al comportamiento dinámico a largo plazo de las soluciones del modelo estocástico, podemos decir lo siguiente:

1. si $r > \frac{1}{2}\alpha^2$, entonces $N(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$,
2. si $r < \frac{1}{2}\alpha^2$, entonces $N(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$,
3. si $r = \frac{1}{2}\alpha^2$, entonces $N(t)$ fluctúa entre valores arbitrariamente grandes y arbitrariamente pequeños cuando $t \rightarrow +\infty$.

Ahora, calculemos la esperanza y varianza de $N(t)$. En cuanto al cálculo de la esperanza, tenemos

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[N_0 e^{(r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha W_t}] = N_0 e^{(r - \frac{1}{2}\alpha^2)t} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}]. \quad (2.5)$$

Por la regla de Itô sabemos que

$$d(e^{\alpha W_t}) = \alpha e^{\alpha W_t} dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha W_t} dt,$$

expresada en forma integral obtenemos

$$e^{\alpha W_t} = e^{\alpha W_0} + \alpha \int_0^t e^{\alpha W_s} dW_s + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t e^{\alpha W_s} ds.$$

Ahora, tomando las esperanzas y usando la proposición (1.2.2), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] &= \mathbb{E}[e^{\alpha W_0}] + \frac{1}{2}\alpha^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{\alpha W_s} ds \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t \mathbb{E}[e^{\alpha W_s}] ds; \end{aligned}$$

diferenciando, se tiene

$$d(\mathbb{E}[e^{\alpha W_t}]) = \frac{1}{2}\alpha^2 \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] dt,$$

es decir,

$$d(\mathbb{E}[e^{\alpha W_t}]) - \frac{1}{2}\alpha^2 \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] dt = 0;$$

multiplicando por el factor integrante $e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$

$$e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} d(\mathbb{E}[e^{\alpha W_t}]) - \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] dt = 0$$

$$d\left(e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}]\right) = 0,$$

esto quiere decir que

$$e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 t} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] = K,$$

siendo K una constante. Tomando $t = 0$ obtenemos $K = 1$, luego

$$\mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}, \quad (2.6)$$

que es lo que queríamos calcular. Ahora, sustituyéndolo en la ecuación (2.5), se obtiene:

$$\mathbb{E}[N_t] = N_0 e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] = N_0 e^{rt}. \quad (2.7)$$

A continuación, vamos a proceder al calculo de la varianza

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[N_t] &= \mathbb{V}[N_0 e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha W_t}] \\ &= N_0^2 e^{2(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t} \mathbb{V}[e^{\alpha W_t}]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por lo tanto, vamos a calcular lo siguiente:

$$\mathbb{V}[e^{\alpha W_t}] = \mathbb{E}[e^{2\alpha W_t}] - (\mathbb{E}[e^{\alpha W_t}])^2.$$

Por (2.6),

$$(\mathbb{E}[e^{\alpha W_t}])^2 = (e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t})^2$$

y

$$\mathbb{E}[e^{2\alpha W_t}] = e^{\frac{1}{2}(2\alpha)^2 t} = e^{\frac{1}{2}(4\alpha^2)t},$$

es decir,

$$\mathbb{V}[e^{\alpha W_t}] = e^{\frac{1}{2}(4\alpha^2)t} - (e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t})^2. \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[N_t] &= N_0^2 e^{2(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t} \left(e^{2\alpha^2 t} - e^{\alpha^2 t} \right) \\ &= N_0^2 e^{2(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t} e^{\alpha^2 t} \left(e^{\alpha^2 t} - 1 \right) \\ &= N_0^2 e^{2rt} \left(e^{\alpha^2 t} - 1 \right). \end{aligned}$$

2.2. Modelo logístico

En este apartado, vamos a desarrollar el modelo logístico estocástico, partiendo del modelo logístico determinista. Como bien sabemos, el modelo logístico nace de la necesidad de cubrir las deficiencias del modelo Malthusiano, ya que en el modelo Malthusiano la población puede crecer sin límites, y esto no es realista porque los recursos de la población como el agua, la comida, el área donde viven... son limitados. Por ello, Verhulst propuso un ajuste a largo plazo del crecimiento exponencial, mediante un mecanismo de autorregulación que entra en funcionamiento cuando la población se vuelve “demasiado grande”, que viene determinado por la capacidad de carga del entorno. Este autor propuso el siguiente modelo logístico determinista:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t), \quad N(0) = N_0, \quad (2.10)$$

donde K representa el tamaño límite o la capacidad de carga de la población. Y, como bien sabemos, su solución viene dada por

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}, \quad N(0) = N_0, \quad t \geq 0.$$

Si añadimos a la ecuación (2.10) el término de ruido multiplicativo $\alpha N(t)dW(t)$, obtenemos el siguiente modelo logístico estocástico:

$$dN_t = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) dt + \alpha N_t dW_t, \quad N(0) = N_0, \quad t \geq 0. \quad (2.11)$$

Esta EDE no es lineal pero, aun así, podemos calcular su solución explícita. Para ello, realizaremos un cambio de variable con el fin de obtener una EDE lineal de la que conozcamos la solución. Y, después, deshaciendo el cambio de variable, obtendremos la solución explícita de la ecuación (2.11). En primer lugar, vamos a utilizar la fórmula de Itô (1.1). En nuestro caso, partimos de: $u(t, N_t) = N_t^{-1}$, con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial N} = -N_t^{-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = 2N_t^{-3}, \\ f &= rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right), \quad g = \alpha N_t. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la fórmula de Itô, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(N_t^{-1}) &= \left(-N_t^{-2}rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) + \frac{1}{2}2N_t^{-3}\alpha^2N_t^2 \right) dt - N_t^{-2}\alpha N_t dW_t \\ &= \left(r \left(-N_t^{-1} + \frac{1}{K} \right) + \alpha^2 N_t^{-1} \right) dt - \alpha N_t^{-1} dW_t. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si tomamos $N_t^{-1} = y_t$, (2.12) se escribe

$$dy_t = \left(\frac{r}{K} + (-r + \alpha^2)y_t \right) dt - \alpha y_t dW_t, \quad (2.13)$$

obteniendo así una EDE lineal. Sabemos que la solución de una ecuación diferencial lineal es (1.6). Entonces, para $a_1 = \frac{r}{K}$, $A = -r + \alpha^2$, $b_1 = 0$, $B = -\alpha$, tenemos que la solución de la ecuación (2.13) será:

$$y_t = \Phi(t) \left\{ y_0 + \int_0^t \left(\frac{r}{K} \right) \Phi_s^{-1} ds \right\},$$

siendo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \exp \left\{ \int_0^t (-\alpha) dW_s + \int_0^t \left(-r + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) ds \right\}, \\ \Phi_s^{-1} &= \exp \left\{ - \int_0^s (-\alpha) dW_u - \int_0^s \left(-r + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) du \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, evaluando $\Phi(t)$ y Φ_s^{-1} , tenemos que

$$\Phi_t = \exp \left\{ -\alpha W_t + \left(-r + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t \right\},$$

y

$$\Phi_s^{-1} = \exp \left\{ \alpha W_s + \left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) s \right\}.$$

De aquí obtenemos que

$$y_t = \exp \left\{ -\alpha W_t - \left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t \right\} \times \left\{ y_0 + \frac{r}{K} \int_0^t \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) s + \alpha W_s \right] ds \right\}$$

y, por tanto, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos:

$$N_t = \frac{\exp \{ (r - \frac{1}{2} \alpha^2) t + \alpha W_t \}}{\left\{ N_0^{-1} + \frac{r}{K} \int_0^t \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) s + \alpha W_s \right] ds \right\}}, \quad (2.14)$$

que es la solución estocástica logística de crecimiento de la población, siendo $y_0 = N_0^{-1}$. Ahora, vamos a calcular la esperanza y varianza de N_t . Para ello, primero vamos a reescribir la ecuación (2.14) del siguiente modo:

$$N_t = \frac{K \exp \{ (r - \frac{1}{2} \alpha^2) t + \alpha W_t \}}{\left\{ (K/N_0) + r \int_0^t \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) s + \alpha W_s \right] ds \right\}}. \quad (2.15)$$

Suponiendo que el numerador y el denominador de (2.15) son independientes, calculemos, por un lado, la esperanza del numerador y, por el otro lado, la del denominador. Si calculamos la esperanza del numerador, tenemos:

$$\mathbb{E}[K e^{(r - \frac{1}{2} \alpha^2) t + \alpha W_t}] = K e^{(r - \frac{1}{2} \alpha^2) t} \mathbb{E}[e^{\alpha W_t}] = K e^{(r - \frac{1}{2} \alpha^2) t} e^{\frac{1}{2} \alpha^2 t} = K e^{rt}.$$

Ahora, calculemos la esperanza del denominador:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\frac{K}{N_0} + r \int_0^t e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)s+\alpha W_s} ds \right] &= \frac{K}{N_0} + r \int_0^t \mathbb{E} \left[e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)s+\alpha W_s} \right] ds \\
&= \frac{K}{N_0} + r \int_0^t e^{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)s} \mathbb{E} [e^{\alpha W_s}] ds \\
&= \frac{K}{N_0} + r \int_0^t e^{rs} ds \\
&= \frac{K}{N_0} + (e^{rt} - 1).
\end{aligned}$$

Dividiendo la esperanza del numerador con la del denominador, obtenemos la esperanza de N_t , que es la siguiente:

$$\mathbb{E}[N_t] = \frac{K}{e^{-rt}[K/N_0 + e^{rt} - 1]} = \frac{K}{1 + [K/N_0 - 1]e^{-rt}}. \quad (2.16)$$

Para el cálculo de la varianza vamos a utilizar

$$\mathbb{V}[N_t] = \mathbb{E}[N_t^2] - \mathbb{E}[N_t]^2. \quad (2.17)$$

Suponiendo que el numerador y el denominador de N_t^2 son independientes, podemos calcular, por un lado, la esperanza del numerador y, por el otro, la esperanza del denominador. La esperanza del numerador es:

$$\mathbb{E}[K^2 e^{2(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t+2\alpha W_t}] = K^2 e^{2(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t} \mathbb{E}[e^{2\alpha W_t}] = K^2 e^{2(r-\frac{1}{2}\alpha^2)t} e^{2\alpha^2 t} = K^2 e^{(2r+\alpha^2)t}.$$

Ahora, calculemos la esperanza del denominador:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + r^2 \left(\int_0^t e^{(r-1/2\alpha^2)s+\alpha W_s} ds \right)^2 + 2 \frac{K}{N_0} r \int_0^t e^{(r-1/2\alpha^2)s+\alpha W_s} ds \right] \\
&= \left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + r^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{(r-1/2\alpha^2)s+\alpha W_s} ds \right)^2 \right] + 2 \frac{K}{N_0} r \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{(r-1/2\alpha^2)s+\alpha W_s} ds \right] \\
&= \left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + r^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{2(r-1/2\alpha^2)s+2\alpha W_s} ds \right] + 2 \frac{K}{N_0} (e^{rt} - 1) \\
&= \left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + r^2 \int_0^t \mathbb{E}[e^{2(r-1/2\alpha^2)s+2\alpha W_s}] ds + 2 \frac{K}{N_0} (e^{rt} - 1) \\
&= \left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + r^2 \int_0^t e^{2(r-1/2\alpha^2)s} \mathbb{E}[e^{2\alpha W_s}] ds + 2 \frac{K}{N_0} (e^{rt} - 1) \\
&= \left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + r^2 \int_0^t e^{2(r-1/2\alpha^2)s} e^{2\alpha^2 s} ds + 2 \frac{K}{N_0} (e^{rt} - 1) \\
&= \left(\frac{K}{N_0} \right)^2 + \frac{r^2}{2r + \alpha^2} [e^{(2r+\alpha^2)t} - 1] + 2 \frac{K}{N_0} (e^{rt} - 1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la esperanza del cociente será:

$$\mathbb{E}[N_t^2] = \frac{N_0(2r + \alpha^2)K^2 e^{(2r+\alpha^2)t}}{N_0(2r + \alpha^2)(K^2/N_0^2) + N_0(2r + \alpha^2)r^2(e^{(2r+\alpha^2)t} - 1) + 2K(e^{rt} - 1)}.$$

Por último, utilizando la ecuación (2.17), la varianza de N_t es:

$$\mathbb{V}[N_t] = \frac{N_0(2r + \alpha^2)K^2 e^{(2r + \alpha^2)t}}{N_0(2r + \alpha^2)(K^2/N_0^2) + N_0(2r + \alpha^2)r^2(e^{(2r + \alpha^2)t} - 1) + 2K(e^{rt} - 1)} - \frac{K^2}{(1 + [K/N_0 - 1]e^{-rt})^2}.$$

2.3. Modelo de crecimiento de raíz cuadrada con reversión a la media (CIR)

El modelo que vamos a ver a continuación fue introducido por Feller en el contexto de Dinámica de Poblaciones, aunque hoy en día se utiliza también en el ámbito de la economía, y se le conoce como el modelo de Cox, Ingersol y Ross (CIR). El modelo CIR está determinado por la siguiente EDE, denominada raíz cuadrada con reversión a la media:

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, X(0) = X_0 > 0, \quad (2.18)$$

donde X_t es una variable aleatoria que representa el tamaño de la población en tiempo t , y α , β y σ son estrictamente positivos. Bajo la hipótesis sobre los parámetros, es bien sabido que esta EDE tiene solución única y no negativa (la demostración de esto se puede encontrar en [6]). Y que, bajo la hipótesis (véanse, bibliografía [4])

$$2\alpha > \sigma^2 \quad \text{y} \quad X_0 > 0,$$

la solución es siempre positiva.

Por otra parte, el coeficiente de deriva $\alpha - \beta X_t$ garantiza la reversión a la media de X_t hacia su nivel a largo plazo, que como veremos después, es $\frac{\alpha}{\beta}$. Esto significa que, cuando el valor de la variable sea alto, hay una tendencia a que disminuya y, cuando el valor es bajo, hay una tendencia a que aumente hacia la media del proceso. A su vez, $\sigma \sqrt{X_t}$ es el coeficiente de difusión que describe la volatilidad. Dado que el coeficiente de difusión es singular en el origen, se deduce que el valor inicial no negativo de X_t nunca puede volverse negativo al aumentar t .

No se puede obtener la solución de (2.18) de forma explícita. Por ello, vamos a escribir su solución en forma de integral para calcular su esperanza y varianza. Integrando la ecuación entre 0 y t , obtenemos lo siguiente:

$$X_t = X_0 + \alpha t - \beta \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s. \quad (2.19)$$

A continuación, vamos a proceder al cálculo de la esperanza y varianza de la solución. Tomando las esperanzas en (2.19), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= X_0 + \alpha t - \beta \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s ds \right] \\ &= X_0 + \alpha t - \beta \int_0^t \mathbb{E}[X_s] ds. \end{aligned}$$

Sea $u(t) = \mathbb{E}[X_t]$, tenemos lo siguiente:

$$u(t) = X_0 + \alpha t - \beta \int_0^t u(s) ds,$$

y, diferenciando lo anterior respecto a t , obtenemos:

$$u'(t) = \alpha - \beta u(t).$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{\beta t}$

$$\begin{aligned} e^{\beta t} u'(t) &= e^{\beta t} \alpha - e^{\beta t} \beta u(t) \\ e^{\beta t} u'(t) + e^{\beta t} \beta u(t) &= e^{\beta t} \alpha \\ d(e^{\beta t} u(t)) &= e^{\beta t} \alpha. \end{aligned}$$

Integrando lo anterior, y sabiendo que $u(0) = \mathbb{E}[X_0] = X_0$,

$$e^{\beta t} u(t) = u(0) + \alpha \int_0^t e^{\beta s} ds,$$

de aquí obtenemos la esperanza de X_t , que es la siguiente:

$$u(t) = \mathbb{E}[X_t] = e^{-\beta t} (X_0 - \alpha/\beta) + \alpha/\beta. \quad (2.20)$$

Si calculamos el límite de la esperanza, obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_t] = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.21)$$

Esto implica que, a medida que el tiempo t avanza, el valor X_t no se alejará indefinidamente de este valor a largo plazo. En lugar de eso, fluctuará alrededor de él.

En cuanto al cálculo de la varianza, vamos a utilizar de nuevo (2.17). Por un lado, sabemos que

$$\mathbb{E}[X_t]^2 = e^{-2\beta t} (X_0 - \alpha/\beta)^2 + (\alpha/\beta)^2 + 2(\alpha/\beta) e^{-\beta t} (X_0 - \alpha/\beta). \quad (2.22)$$

Por otro lado, vamos a calcular $\mathbb{E}[X_t^2]$. Para ello, vamos a utilizar el mismo proceso que hemos usado para el cálculo de la esperanza. Usando la proposición del cálculo integral de Itô (1.3.1):

$$\begin{aligned} d(X_t X_t) &= X_t dX_t + X_t dX_t + dX_t dX_t \\ &= 2X_t dX_t + (dX_t)^2; \end{aligned}$$

ahora, sustituyendo (2.18) en lo anterior, tenemos que

$$d(X_t^2) = 2X_t \left[(\alpha - \beta X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \right] + \left[(\alpha - \beta X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t \right]^2.$$

Teniendo en cuenta otra vez la proposición (1.3.1), $(dt)^2 = 0$, $(dW_t)^2 = dt$ y $(dt)(dW_t) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} d(X_t^2) &= 2X_t(\alpha - \beta X_t)dt + 2\sigma X_t \sqrt{X_t} dW_t + \sigma^2 X_t dt \\ &= dt[X_t(2\alpha + \sigma^2) - 2\beta X_t^2] + 2\sigma X_t^{3/2} dW_t; \end{aligned}$$

integrando lo anterior, obtenemos:

$$X_t^2 = X_0^2 + (2\alpha + \sigma^2) \int_0^t X_s ds - 2\beta \int_0^t X_s^2 ds + 2\sigma \int_0^t X_s^{3/2} dW_s.$$

Tomando las esperanzas

$$\mathbb{E}[X_t^2] = X_0^2 + (2\alpha + \sigma^2) \int_0^t \mathbb{E}[X_s] ds - 2\beta \int_0^t \mathbb{E}[X_s^2] ds,$$

sustituyendo $u_2(t) = \mathbb{E}[X_t^2]$ y $u(t) = \mathbb{E}[X_t]$ en lo anterior, tenemos

$$u_2(t) = X_0^2 + (2\alpha + \sigma^2) \int_0^t u(s) ds - 2\beta \int_0^t u_2(s) ds,$$

diferenciándolo respecto a t :

$$u_2'(t) = (2\alpha + \sigma^2)u(t) - 2\beta u_2(t);$$

y, multiplicándolo por el factor integrante $e^{2\beta t}$,

$$d(e^{2\beta t} u_2(t)) = (2\alpha + \sigma^2) e^{2\beta t} u(t).$$

Integrando lo anterior, sabiendo que $u_2(0) = \mathbb{E}[X_0^2] = X_0^2$, y sustituyendo (2.20), obtenemos:

$$e^{2\beta t} u_2(t) = u_2(0) + (2\alpha + \sigma^2) \int_0^t e^{2\beta s} [e^{-\beta s} (X_0 - \alpha/\beta) + \alpha/\beta] ds,$$

es decir,

$$u_2(t) = \mathbb{E}[X_t^2] = X_0^2 e^{-2\beta t} + (2\alpha + \sigma^2) \left\{ \frac{(X_0 - \alpha/\beta)}{\beta} [e^{\beta t} - 1] e^{-2\beta t} + \frac{\alpha}{2\beta^2} [1 - e^{-2\beta t}] \right\}. \quad (2.23)$$

Por último, sustituyendo (2.22) y (2.23) en la ecuación (2.17), obtenemos la varianza de X_t , que es la siguiente:

$$\mathbb{V}[X_t] = X_0 \frac{\sigma^2(e^{-\beta t} - e^{2\beta t})}{\beta} + \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta t})^2.$$

Capítulo 3

Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas

Como bien sabemos, aunque muchas veces sepamos que la solución de una EDE existe, no es posible dar la solución en forma explícita. Por ello, se utilizan métodos numéricos, que nos permiten aproximar y estimar soluciones de diferentes EDE. En la sección 3.1, definiremos qué es un método numérico; en la sección 3.2, veremos la convergencia de un método numérico; en la sección 3.3, describiremos diferentes esquemas iterativos; y, por último, en la sección 3.4 veremos esquemas adaptados.

3.1. Definición de un método numérico (esquema)

Sea la siguiente EDE

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} \equiv X_0, \quad t_0 \leq t < T, \quad (3.1)$$

cuyos coeficientes verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Como hemos dicho anteriormente, en general no podemos obtener su solución en forma explícita. Por ello, utilizaremos métodos numéricos para aproximar la solución de la ecuación.

El objetivo de un método numérico es aproximar el proceso de Ito X_t , solución de la ecuación (3.1) de tiempo continuo, mediante valores $Y_0 = X_0, Y_1, \dots, Y_N$ (siendo N un entero positivo) que son generados por esquemas iterativos de tiempo discreto. Estos valores aproximan en instantes de tiempo discreto $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ los valores de la solución $X(t_i; t_0, X_0)$, $i = 1, \dots, N$. Para obtener una “buena” solución aproximada, los incrementos de tiempo $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ deben ser “suficientemente pequeños”. Cuando la discretización del tiempo sea equidistante tendremos que $\Delta_i \equiv \Delta = (T - t_0)/N$.

Por otro lado, dada la naturaleza estocástica de (3.1), las aproximaciones Y_i , $i = 0, 1, \dots, N$ deben reflejar las trayectorias de la solución X_t de esta EDE. Por lo tanto, no solo se necesitan los incrementos del tiempo Δ_i , sino también los incrementos de Wiener ΔW_i como aproximación de $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. Por este motivo, los incrementos de Wiener se generan mediante variables aleatorias que se distribuyen normalmente con una media de cero y una varianza Δ_i .

3.2. Convergencia de un método numérico

En esta sección, veremos el criterio que se utiliza para evaluar el rendimiento que tiene un método numérico; se hace analizando la convergencia del método. Por un lado, tenemos la convergencia fuerte y, por otro lado, la convergencia débil.

3.2.1. Convergencia fuerte

El objetivo de los esquemas de un método computacional es aproximar un proceso Itô X_t mediante los valores Y_i generados por los mismos esquemas. Dado que $X(T)$, la solución exacta de la ecuación en tiempo T e Y_i , son variables aleatorias, es razonable utilizar una expresión $E|Y_i - X(T)|$ para medir el grado de precisión (error) de la aproximación. Más concretamente, una aproximación discretizada en el tiempo Y_Δ de un proceso de tiempo continuo X **converge con orden fuerte** γ a la solución X en el tiempo T si existe una constante C (que no depende de Δ), tal que:

$$E|Y_\Delta(T) - X(T)| \leq C\Delta^\gamma.$$

El criterio indica la tasa a la que el “error medio del punto final” disminuye a medida que $\Delta \rightarrow 0$.

3.2.2. Convergencia débil

La convergencia débil es un criterio menos restrictivo que la convergencia fuerte. Esta considera la tasa de disminución de las “medias de errores”. En concreto, una aproximación discretizada en el tiempo Y_Δ de un proceso de tiempo continuo X , **converge débilmente con orden** β a la solución X en el tiempo T si para cualquier función polinómica h existe una constante C_h (independiente de Δ), tales que:

$$|E(h(X_T)) - E(h(Y_\Delta(T)))| \leq C_h\Delta^\beta.$$

En general, si el tamaño del paso Δ disminuye k veces, entonces el error de aproximación disminuye en un k^γ . Así que si, por ejemplo, el orden es 0,5 y queremos disminuir el error 100 veces, debemos hacer el tamaño del paso $100^2 = 10000$ veces más pequeño.

El tipo de convergencia de un método numérico (fuerte, débil o ambos) determina su utilización en las aplicaciones. Si nuestro interés respecto a una ecuación es aproximar algunas características distribucionales de su solución, por ejemplo, sus momentos, utilizaremos métodos débiles. En cambio, si nuestro interés es aproximar la solución por trayectorias, utilizaremos métodos fuertes.

3.3. Esquemas iterativos para la aproximación de EDE

En esta sección, veremos diferentes esquemas que se utilizan para aproximar soluciones de EDE. Veremos la aproximación de Euler-Maruyama, la aproximación de Milstein y, por último, la aproximación de Taylor.

3.3.1. Aproximación de Euler-Maruyama (EM)

Este esquema de aproximación es el más simple de todos. Dada la discretización de tiempo $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ de $[t_0, T]$, la aproximación de EM para resolver la ecuación (3.1) será un proceso estocástico continuo en el tiempo $Y = \{Y_t\}_{t \in [t_0, T]}$ que satisface el esquema iterativo:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)\Delta_i + b(t_i, Y_i)\Delta W_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

donde $Y_i \approx Y(t_i)$, $Y_0 = X_0$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ y $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. De aquí obtenemos una sucesión discreta $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$, que será interpolada para aproximar la solución. Recordemos que los incrementos de Wiener tienen una distribución normal con media cero y una varianza Δ_i . Cuando la discretización del tiempo es equidistante, tenemos que $\Delta_i = \Delta = (T - t_0)/N$. En este caso la variable aleatoria ΔW_i sigue una distribución normal de media 0 y varianza Δ , es decir, $\Delta W_i \sim N(0, \Delta) \equiv \sqrt{\Delta}N(0, 1)$. Por lo tanto, fijamos $\Delta W_i \sim \sqrt{\Delta} Z$, donde Z es una v.a que sigue la distribución gaussiana $N(0, 1)$. En la mayoría de las aplicaciones, las funciones coeficientes a y b dependen solo de Y_i y no de t_i ; por lo tanto, (3.2) se puede reescribir como

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta + b(Y_i)\sqrt{\Delta} Z, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

En cuanto a la convergencia del método de EM, se demuestra que

$$E|Y_\Delta(T) - X(T)| \leq C\Delta^{1/2},$$

es decir, el método de EM tiene orden fuerte $\gamma = 1/2$. Y también que

$$|E(h(X_T)) - E(h(Y_\Delta(T)))| \leq C_h\Delta,$$

es decir, que el método tiene orden débil $\beta = 1$. La demostración de esto podemos encontrarla en el libro [3].

3.3.2. Aproximación de Milstein

El esquema de Milstein será como el de EM, pero añadiéndole un nuevo término. Será el siguiente:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)\Delta_i + b(t_i, Y_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}b(t_i, Y_i)\frac{\partial b(t_i, Y_i)}{\partial x}\{(\Delta W_i)^2 - \Delta_i\}, \quad (3.4)$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $Y_i \approx Y(t_i)$, $Y_0 = X_0$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ y $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. Otra vez, si $\Delta_i = \Delta$, es decir, si tenemos una discretización equidistante del tiempo, $\Delta W_i \sim N(0, \Delta)$; por lo tanto, fijamos $\Delta W_i \sim \sqrt{\Delta} Z$, donde Z es una v.a que sigue la distribución gaussiana $N(0, 1)$. Y podemos asumir que las funciones coeficientes a y b dependen solo de Y_i y no de t_i ; entonces, (3.4) se puede reescribir como

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta + b(Y_i)\sqrt{\Delta}Z + \frac{1}{2}b(Y_i)\frac{\partial b(Y_i)}{\partial x}\Delta(Z^2 - 1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

En cuanto a la convergencia del método, se demuestra que

$$E|Y_\Delta(T) - X(T)| \leq C\Delta,$$

es decir, el método de Milstein tiene orden fuerte $\gamma = 1$. Por lo tanto, converge a la solución exacta más rápido que el esquema EM, a medida que el tamaño del paso $\Delta \rightarrow 0$. También se demuestra que

$$|E(h(X_T)) - E(h(Y_\Delta(T)))| \leq C_h \Delta,$$

es decir, que el método tiene orden débil $\beta = 1$. La demostración se puede encontrar en el libro [3].

3.3.3. Aproximación de Taylor

Los esquemas de Taylor son una generalización de los esquemas EM y Milstein. Vamos a ver dos de ellos. El primero es el **Esquema de Taylor de orden débil 2.0**. Este esquema aparece como:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} = & Y_i + a\Delta + b\Delta W_i + \frac{1}{2}bb_x((\Delta W_i)^2 - \Delta) \\ & + a_x b \Delta Z_i + \frac{1}{2} \left(aa_x + \frac{1}{2}a_{xx}b^2 \right) (\Delta)^2 \\ & + \left(ab_x + \frac{1}{2}b_{xx}b^2 \right) ((\Delta W_i)\Delta - \Delta Z_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $Y_i \approx Y(t_i)$, $Y_0 = X_0$, $a = a(Y_i)$, $b = b(Y_i)$, a_x denota la derivada de a respecto de x , y $\Delta = \Delta_i$. $\Delta W_i = \sqrt{\Delta}U_1$, donde U_1 es una v.a que sigue la distribución Gaussiana $N(0, 1)$, y $\Delta Z_i = \Delta Z$ sigue una distribución normal de media 0 y varianza $\frac{1}{3}\Delta^3$, es decir, $\Delta Z_i \sim N(0, (1/3)\Delta^3)$. Además, $Cov(\Delta W_i, \Delta Z_i) = \frac{1}{2}\Delta^2$. La pareja $(\Delta W_i, \Delta Z_i)$ puede ser determinada a partir de dos v.a independientes $U_1, U_2 \sim N(0, 1)$ distribuidas, mediante la transformación de las medias:

$$\Delta W_i = \sqrt{\Delta}U_1, \Delta Z_i = \frac{1}{2}\Delta^{3/2} \left(U_1 + \frac{U_2}{\sqrt{3}} \right).$$

El segundo es el **Esquema de Taylor de orden fuerte 1.5**. Este esquema aparece como:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} = & Y_i + a\Delta + b\Delta W_i + \frac{1}{2}bb_x((\Delta W_i)^2 - \Delta) \\ & + a_x b \Delta Z_i + \frac{1}{2} \left(aa_x + \frac{1}{2}a_{xx}b^2 \right) (\Delta)^2 \\ & + \left(ab_x + \frac{1}{2}b_{xx}b^2 \right) ((\Delta W_i)\Delta - \Delta Z_i) \\ & + \frac{1}{2}(b_{xx}b^2 + b_x^2) \left(\frac{1}{3}(\Delta W_i)^2 - \Delta \right) \Delta W_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde ΔW_i y ΔZ_i se distribuye como en el anterior esquema de Taylor de orden débil 2.0.

3.4. Esquemas adaptados para la aproximación de EDE

En los modelos que hemos visto en el capítulo 2, X_t o N_t representan el tamaño de la población en el instante t . Como bien sabemos, el tamaño de una población tiene que

ser positiva, ya que no tiene sentido lo contrario. En la sección anterior, los esquemas que hemos definido para aproximar la solución de una EDE no nos garantizan la positividad de la solución. Por lo tanto, en este apartado veremos métodos adaptados que aseguran que el proceso X_t de la ecuación (3.1) sea positivo. A continuación, veremos un esquema adaptado de EM y diferentes esquemas adaptados para el modelo CIR.

3.4.1. Esquema adaptado de EM

A continuación, vamos a ver uno de los esquemas adaptados de EM. Este esquema será el mismo que el esquema (3.2), pero en este caso, en cada iteración de Y_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, N-1$, tomaremos el valor absoluto. Por lo tanto, el esquema es el siguiente:

$$Y_{i+1} = |Y_i + a(t_i, Y_i)\Delta_i + b(t_i, Y_i)\Delta W_i|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.8)$$

donde $Y_i \approx Y(t_i)$, $Y_0 = X_0$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ y $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. Mediante este esquema, los valores de aproximación que obtendremos $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$ serán no negativos. Este método, al igual que el método de EM, tiene orden fuerte $\gamma = 1/2$ y orden débil $\beta = 1$.

3.4.2. Esquemas adaptados para el modelo de crecimiento de raíz cuadrada con reversión a la media

Los tres esquemas que vamos a ver a continuación son esquemas que se utilizan para aproximar la EDE (2.18), es decir, la solución del modelo CIR.

El primer esquema es el siguiente:

$$Y_{i+1} = \left(\frac{\sigma \Delta W_i + \sqrt{\sigma^2 (\Delta W_i)^2 + 4(Y_i + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\Delta_i)(1 + \beta \Delta_i)}}{2(1 + \beta \Delta_i)} \right)^2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.9)$$

donde $Y_i \approx Y(t_i)$, $Y_0 = X_0$, $t \in [t_0, T]$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ y $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ (los incrementos de Wiener tienen una distribución normal con media cero y una varianza Δ_i). Está claro que con este esquema, cuando $\sigma^2 < 2\alpha$, los valores $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_N\}$ de aproximación que obtenemos serán positivos.

El segundo esquema es el siguiente:

$$Y_{i+1} = \left(\left(1 - \frac{\beta}{2}\Delta_i\right)\sqrt{Y_i} + \frac{\sigma \Delta W_i}{2(1 - \frac{\beta}{2}\Delta_i)} \right)^2 + (\alpha - \sigma^2/4)\Delta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.10)$$

donde $Y_i \approx Y(t_i)$, $Y_0 = X_0$, $t \in [t_0, T]$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ y $\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ (los incrementos de Wiener tienen una distribución normal con media cero y una varianza Δ_i). Este esquema está bien definido para $\beta \Delta_i \neq 2$. Además, garantiza valores no negativos cuando $\sigma^2 < 4\alpha$.

Los esquemas (3.9) y (3.10) tienen orden fuerte entre $\gamma = 1/2$ y $\gamma = 1$, dependiendo

de la relación entre los parámetros α, β, σ . Y tienen orden débil $\beta = 1$. La demostración se puede encontrar en [1].

El tercer esquema que vamos a ver es el de Milstein implícito, que es el siguiente:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_{i+1}, Y_{i+1})\Delta_i + b(t_i, Y_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}b(t_i, Y_i)\frac{\partial b(t_i, Y_i)}{\partial x}\{(\Delta W_i)^2 - \Delta_i\}, \quad (3.11)$$

con $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Se puede demostrar que la solución que se obtiene mediante el método de Milstein bajo ciertas condiciones siempre será positiva. En primer lugar, partimos de la siguiente definición:

Definición 3.4.1. Sea X_t un proceso estocástico con

$$P(\{X_t > 0 \text{ para todo } t\}) = 1.$$

Entonces, se dice que un esquema de integración estocástica Y_i posee un tiempo de vida eterno si

$$P(\{Y_{i+1} > 0 \mid Y_i > 0\}) = 1.$$

En caso contrario, tiene un tiempo de vida finito.

Una vez dada esta definición, veamos el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1. *El método Milstein (3.4) tiene un tiempo de vida eterno si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $b(x)b'(x) > 0$,
2. $x > \frac{b(x)}{2b'(x)}$,
3. $\Delta_i < \frac{2xb'(x)-b(x)}{(b(x)b'(x)-2a(x))b'(x)}$.

La última condición solo es necesaria cuando el denominador es positivo.

A continuación, con el siguiente teorema demostraremos que con el método de Milstein implícito los valores de aproximación que obtendremos de la solución del modelo CIR serán siempre positivos.

Teorema 3.4.2. *El método implícito de Milstein (3.11) tiene un tiempo de vida eterno para la integración del proceso estocástico (2.18), independiente del tamaño de paso Δ_i .*

Demostración. Cada paso de la integración es de la forma

$$Y_{i+1} = Y_i + (\alpha - \beta Y_{i+1})\Delta_i + \sigma\sqrt{Y_i}\Delta W_i + \frac{1}{4}\sigma^2((\Delta W_i)^2 - \Delta_i).$$

Podemos reescribirla de la siguiente manera explícita:

$$Y_{i+1} = \frac{Y_i + \alpha\Delta_i + \sigma Y_i^{1/2}\Delta W_i + \frac{1}{4}\sigma^2((\Delta W_i)^2 - \Delta_i)}{(1 + \beta\Delta_i)} := \frac{N(Y_i)}{D(Y_i)}.$$

Ahora, solo tenemos que comprobar que el numerador $N(Y_i)$ es positivo. Empleando el Teorema 3.4.1 con $a(x) = \alpha$ y $b(x) = \sigma x^{1/2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
N(Y_i) &= Y_i + \alpha \Delta_i + \sigma Y_i^{1/2} \Delta W_i + \frac{1}{4} \sigma^2 ((\Delta W_i)^2 - \Delta_i) \\
&= Y_i + \left(\alpha - \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \Delta_i + g(\Delta W_i) \\
&\geq Y_i + \left(\alpha - \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \Delta_i + \min_{\Delta W_i \in \mathbb{R}} g(\Delta W_i) \\
&= Y_i + \left(\alpha - \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \Delta_i + g(\hat{\Delta W}_i) \\
&= Y_i + \left(\alpha - \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \Delta_i - Y_i \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \Delta_i > 0,
\end{aligned}$$

ya que sabemos que $\alpha > \frac{1}{2} \sigma^2$.

□

Capítulo 4

Experimentos numéricos

En este último capítulo, exploraremos diversos experimentos numéricos que se han llevado a cabo para comparar los esquemas presentados en el capítulo 3. Para ello, en la sección 4.1 detallaremos los experimentos realizados con el modelo de Malthus; en la sección 4.2, los realizados con el modelo logístico; y, por último, en la sección 4.3 los realizados con el modelo CIR.

4.1. Simulaciones con el Modelo de Malthus

El objetivo de esta sección es comparar los esquemas de EM, EM adaptado, Milstein explícito, Taylor de orden débil 2.0 y Taylor de orden fuerte 1.5. Para ello, se han realizado diferentes simulaciones con la EDE del modelo de Malthus (2.3).

En primer lugar, como conocemos la solución exacta (2.4) de dicha EDE, hemos dibujado una trayectoria exacta junto a una aproximada mediante los métodos mencionados anteriormente, utilizando en todas el mismo incremento de Wiener. El objetivo de esto es poder hacernos una idea de qué método nos da la mejor aproximación, pero tenemos que tener en cuenta que es solo una ilustración y no una comparación de la que puedan extraerse conclusiones.

Para esta simulación, hemos escogido $r = 0,5$, $\alpha = 1,5$, $0 \leq t \leq 1$, $N_0 = 1$ y el tamaño de paso $\Delta = 1/256$. En la figura (4.1), tenemos una trayectoria exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Euler-Maruyama; en la figura (4.2), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Euler-Maruyama adaptado; en la figura (4.3), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Milstein; en la figura (4.4), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Taylor de orden débil 2.0; en la figura (4.5), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Taylor de orden fuerte 1.5; y finalmente, en la figura (4.6), tenemos la exacta junto a todas las aproximadas por cada método.

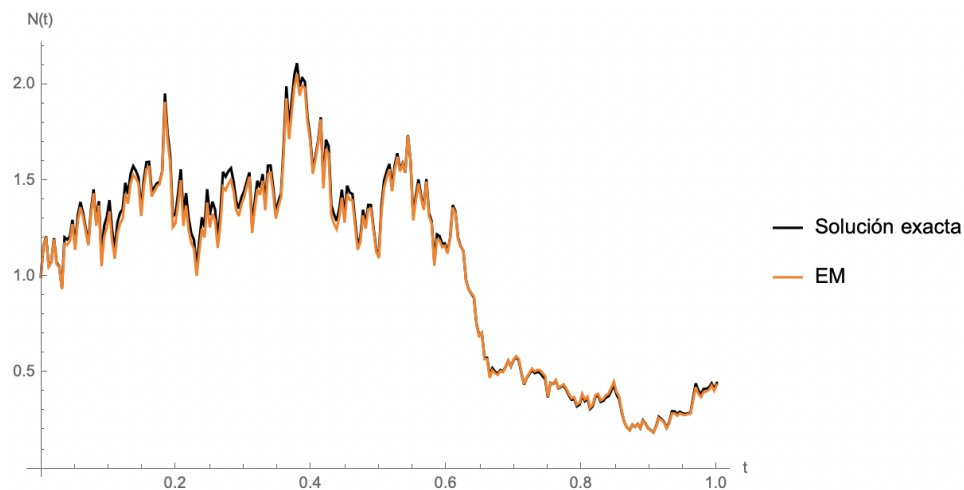


Figura 4.1: Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama.

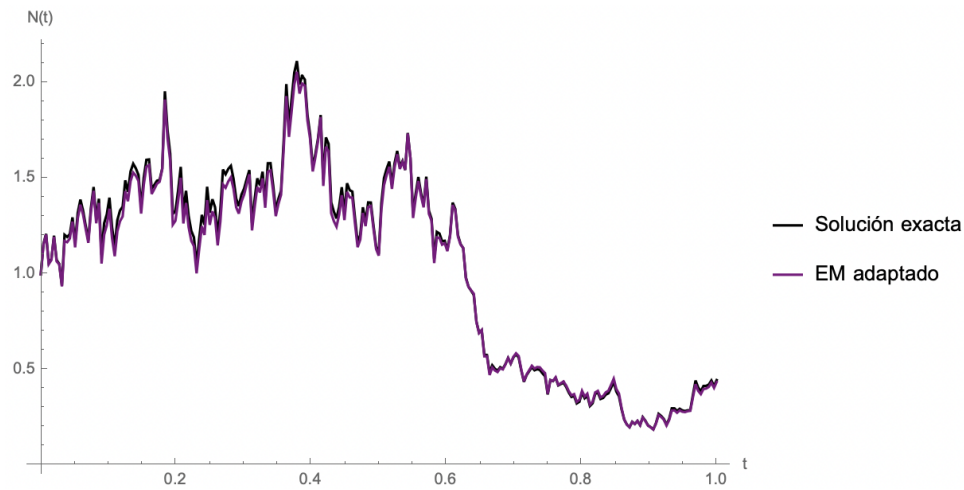


Figura 4.2: Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama adaptado.

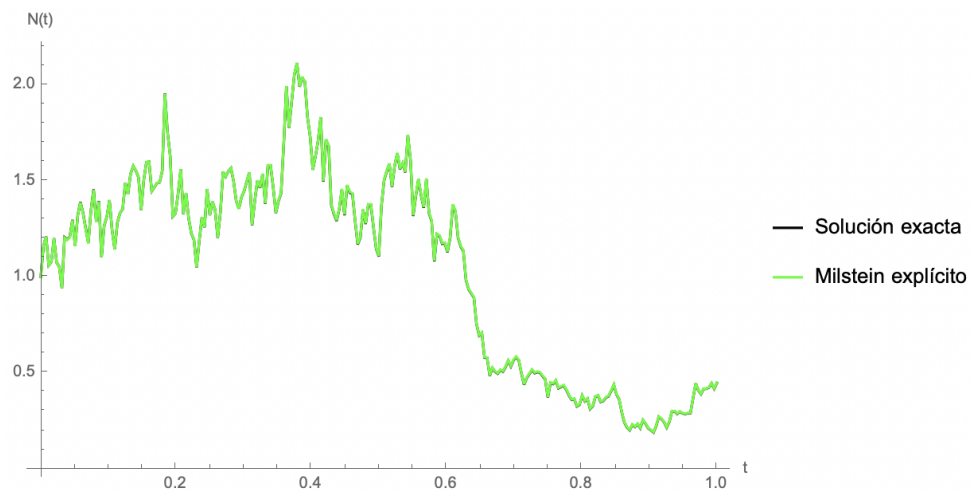


Figura 4.3: Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Milstein explícito.

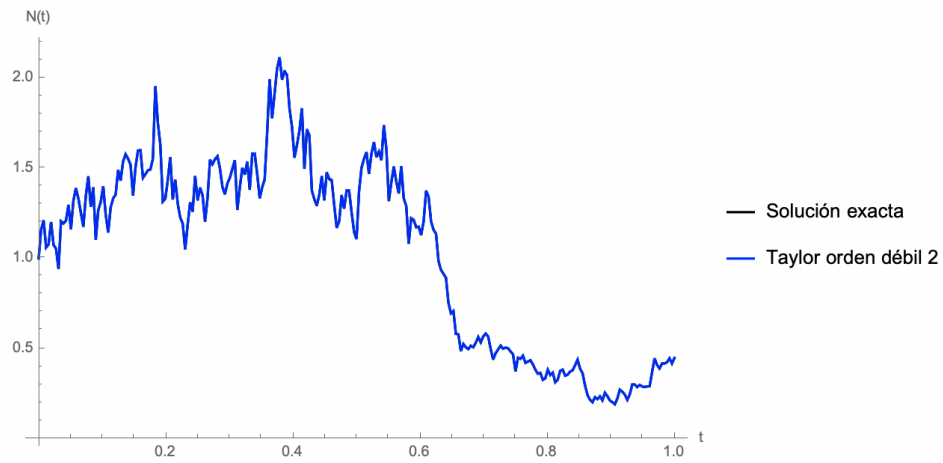


Figura 4.4: Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden débil 2.0.

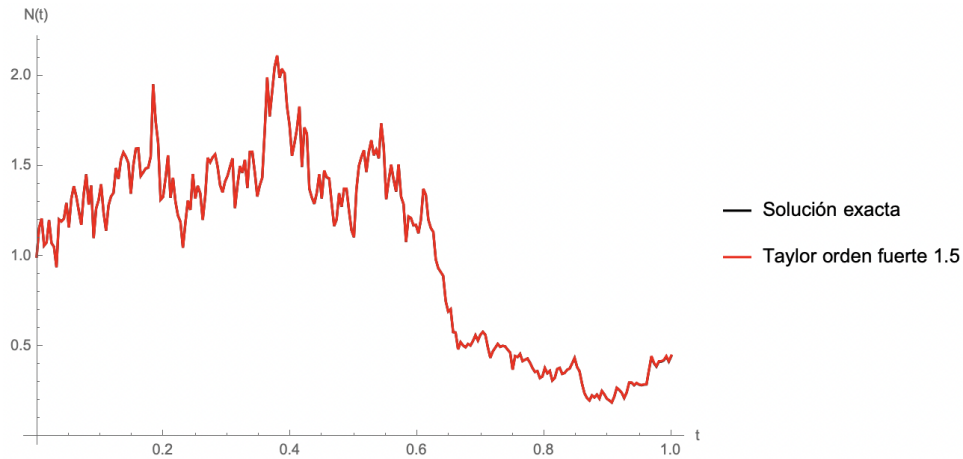


Figura 4.5: Modelo Malthus, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden fuerte 1.5.

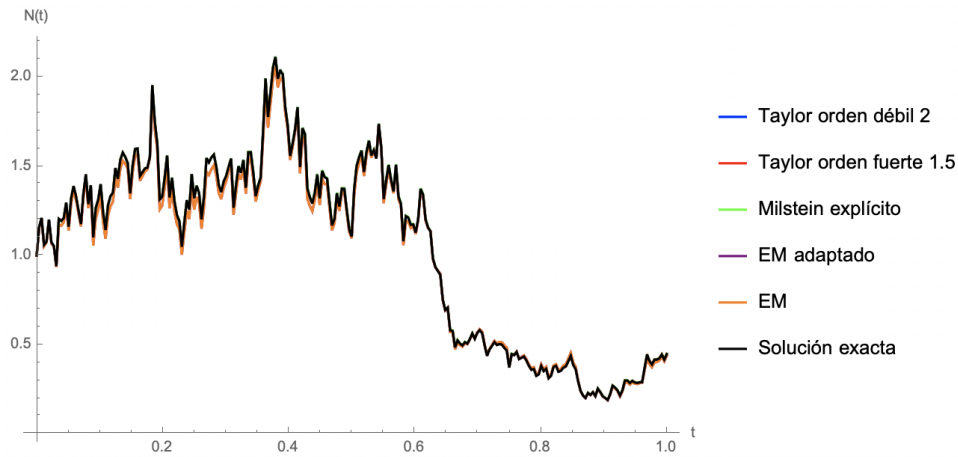


Figura 4.6: Modelo Malthus, todas las trayectorias juntas.

Como podemos observar en las gráficas, aproximan peor la trayectoria exacta los esquemas de EM y EM adaptado. Al contrario, los que mejor aproximan son los esquemas de Milstein y los de Taylor. Esto cabe esperar, ya que sabemos que los esquemas que tienen mayor orden de convergencia (Milstein y los de Taylor) nos dan mejores aproximaciones. Además, en este caso el esquema de EM y EM adaptado nos dan la misma trayectoria; esto se debe a que la trayectoria no llega a tocar valores negativos.

Una vez hecho esto, es hora de analizar la precisión de los métodos, calculando los errores. Vamos a calcular primero los errores débiles de cada método y después los errores fuertes. Calcularemos los errores débiles para los esquemas de EM, EM adaptado, Milstein y el de Taylor de orden débil 2.0. Y los errores fuertes para los mismos esquemas, pero en vez de Taylor de orden débil 2.0, utilizaremos la de Taylor de orden fuerte 1.5.

Para calcular los errores débiles, hemos simulado 1000 trayectorias para cada método; se ha hallado la media de los mil valores obtenidos en el instante final y, por último, se ha

obtenido el error débil restando a este valor medio obtenido el valor medio exacto (2.7). El experimento se ha repetido para los tamaños de paso $\Delta = 1/2^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, con $r=0,5$, $\alpha=0,15$, $0 \leq t \leq 1$ y $N_0 = 1$. En el cuadro (4.1), podemos ver los errores débiles obtenidos en una simulación para cada método y para cada tamaño de paso. Y, en la imagen (4.7), presentamos la gráfica de los errores para poder visualizarlos mejor.

k	Δ	EM	Milstein	EM adaptado	Taylor 2.0
3	0.125	0.0360933	0.0360995	0.0360933	0.0129489
4	0.0625	0.0188939	0.0188181	0.0188939	0.00662631
5	0.03125	0.00707747	0.00702695	0.00707747	0.000728714
6	0.015625	0.00364595	0.00366367	0.00364595	0.000480546
7	0.0078125	0.00282098	0.00284513	0.00282098	0.00125199

Cuadro 4.1: Errores débiles para cada método y cada paso de tiempo en el modelo de Malthus.

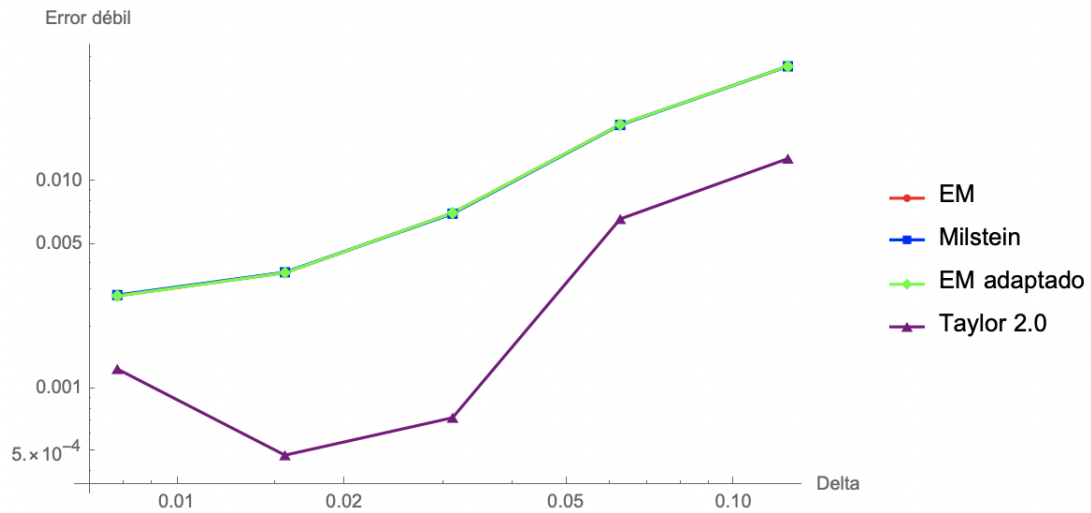


Figura 4.7: Gráfica de errores débiles del modelo de Malthus.

Vamos a proceder a comentar los errores débiles obtenidos. Los errores tienden a disminuir a medida que disminuye Δ , lo cual es esperado, ya que los métodos generalmente son más precisos con pasos más pequeños. El método de EM y EM adaptado nos dan errores idénticos, es decir, la adaptación realizada en el método de Euler-Maruyama no afecta significativamente a la precisión. En cuanto al esquema de Milstein, nos proporciona errores ligeramente menores que el esquema de EM (y su versión adaptada). El método de Taylor 2.0 es el que obtiene los errores más pequeños, es decir, es el método que mejor aproxima la solución exacta.

En cuanto al orden de convergencia, podemos observar que los esquemas con orden débil 1.0, es decir, el método de EM, el método de EM adaptado y el método de Milstein, nos proporcionan errores casi idénticos y mayores en comparación con el esquema de Taylor

de orden 2.0, que tiene un orden débil mayor, específicamente 2.0. Esto confirma que, a mayor orden de convergencia, los métodos aproximan mejor la solución.

A continuación, se han calculado los errores fuertes de los esquemas. Para ello, hemos realizado una simulación calculando 1000 trayectorias para cada método y para la solución exacta, obteniendo un valor de cada trayectoria y un valor de la exacta en el instante final. Después, se han restado tomando el valor absoluto, obteniendo así el error de la trayectoria. Para finalizar, se suman los 1000 errores y se halla su media, obteniendo así el error fuerte de cada método. El experimento se ha repetido para los tamaños de paso $\Delta = 1/2^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, con $r = 0.5$, $\alpha = 1.5$, $0 \leq t \leq 1$ y $N_0 = 1$. En el cuadro (4.2), podemos ver los errores fuertes obtenidos en una simulación para cada método y para cada tamaño de paso. Y, en la imagen (4.8), presentamos la gráfica de los errores para poder visualizarlos mejor.

k	Δ	EM	Milstein	EM adaptado	Taylor 1.5
3	0.125	0.678714	0.150043	0.601749	0.111479
4	0.0625	0.479639	0.100328	0.466557	0.0642065
5	0.03125	0.386194	0.0590686	0.385566	0.0393838
6	0.015625	0.344546	0.0366496	0.344546	0.0234505
7	0.0078125	0.175516	0.0173552	0.175516	0.0097446

Cuadro 4.2: Errores fuertes para cada método y cada paso de tiempo en el modelo de Malthus.

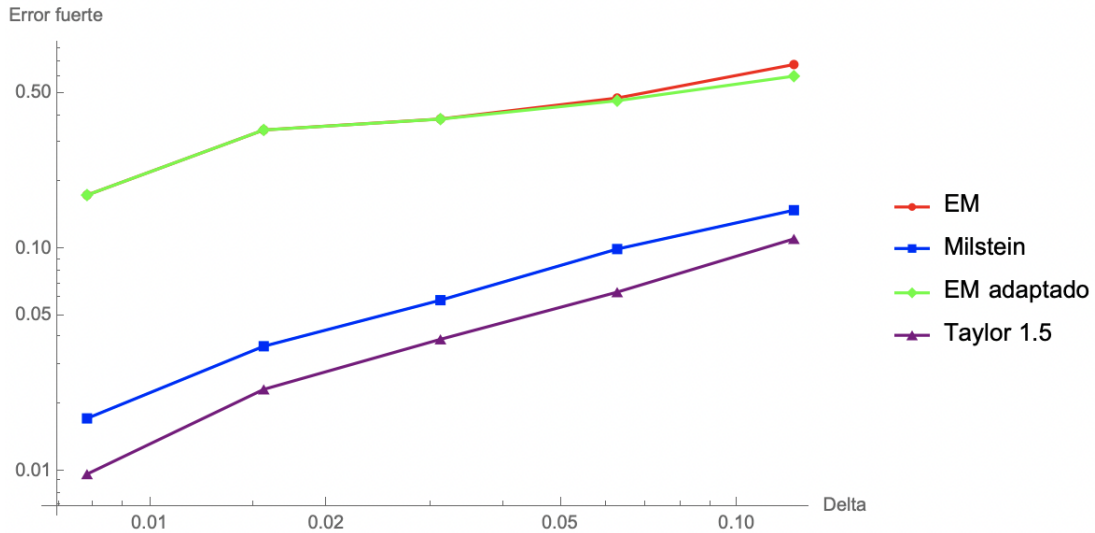


Figura 4.8: Gráfica de errores fuertes del modelo de Malthus.

Como podemos observar tanto en el cuadro como en la gráfica, en todos los métodos a medida que disminuye el tamaño de paso Δ , disminuye a su vez el error. Además, se puede apreciar que el método que mejor aproxima nuestra solución es el de Taylor 1.5, seguido por Milstein, luego el método Euler-Maruyama adaptado y, por último, el método

Euler-Maruyama. A partir de $k = 6$, se observa que los errores proporcionados por los métodos Euler-Maruyama y Euler-Maruyama adaptado son iguales.

Cabe destacar que, en general, a mayor orden de convergencia, los esquemas aproximan mejor. En este experimento, se observa este comportamiento: el esquema de Taylor 1.5, que tiene el mayor orden de convergencia fuerte, proporciona las mejores aproximaciones. Le sigue el esquema de Milstein (que es el siguiente con mayor orden de convergencia), y luego los esquemas de Euler-Maruyama y Euler-Maruyama adaptado (que tienen el orden de convergencia fuerte más pequeño).

4.2. Simulaciones con el Modelo logístico

En esta sección, hemos realizado los mismos experimentos numéricos que en la sección anterior, pero en este caso con el modelo logístico (2.11). Una vez más, como conocemos la solución exacta (2.14) del modelo, hemos dibujado una trayectoria exacta junto a una aproximada mediante los métodos de EM, EM adaptado, Milstein explícito, Taylor de orden débil 2.0 y Taylor de orden fuerte 1.5, utilizando en todas el mismo incremento de Wiener.

Para estas simulaciones, hemos escogido $r = 1,5$, $\alpha = 0,5$, $K = 50$, $0 \leq t \leq 1$, $N_0 = 10$ y el tamaño de paso $\Delta = 1/256$. En la figura (4.9), tenemos una trayectoria exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Euler-Maruyama; en la figura (4.10), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Euler-Maruyama adaptado; en la figura (4.11), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Milstein; en la figura (4.12), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Taylor de orden débil 2.0; en la figura (4.13), la exacta, junto a una aproximada mediante el esquema de Taylor de orden fuerte 1.5; y finalmente, en la figura (4.14), tenemos la exacta junto a todas las aproximadas por cada método.

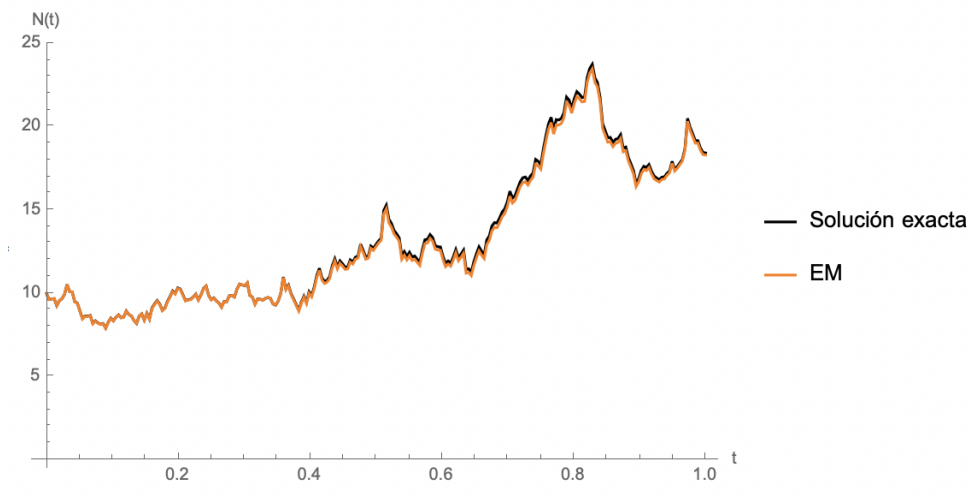


Figura 4.9: Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama.

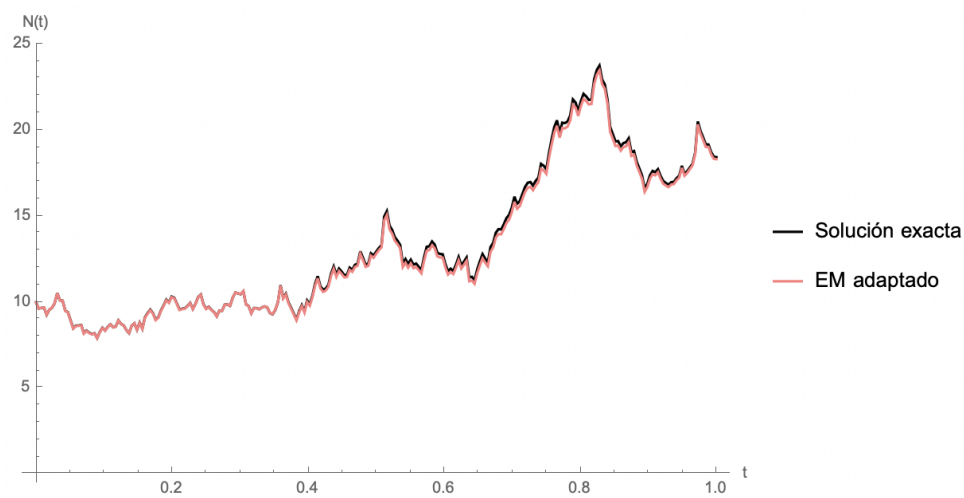


Figura 4.10: Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Euler-Maruyama adaptado.

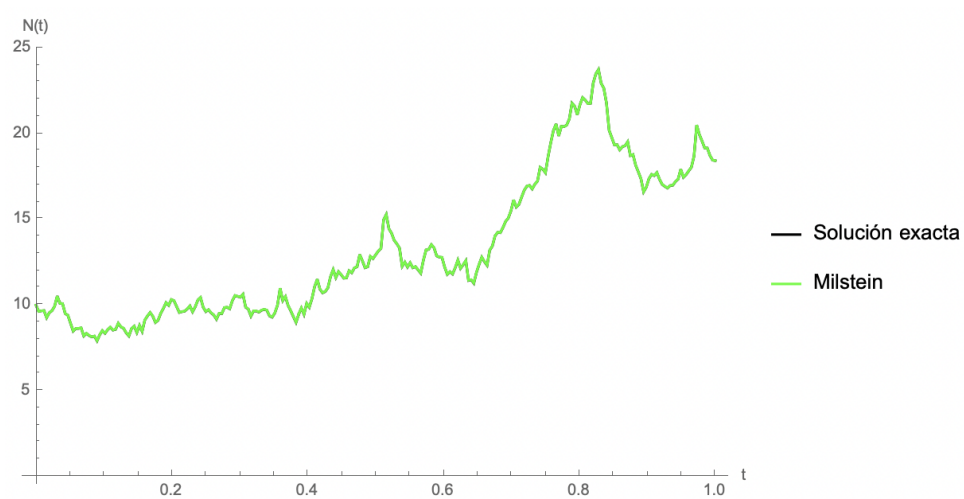


Figura 4.11: Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Milstein explícito.

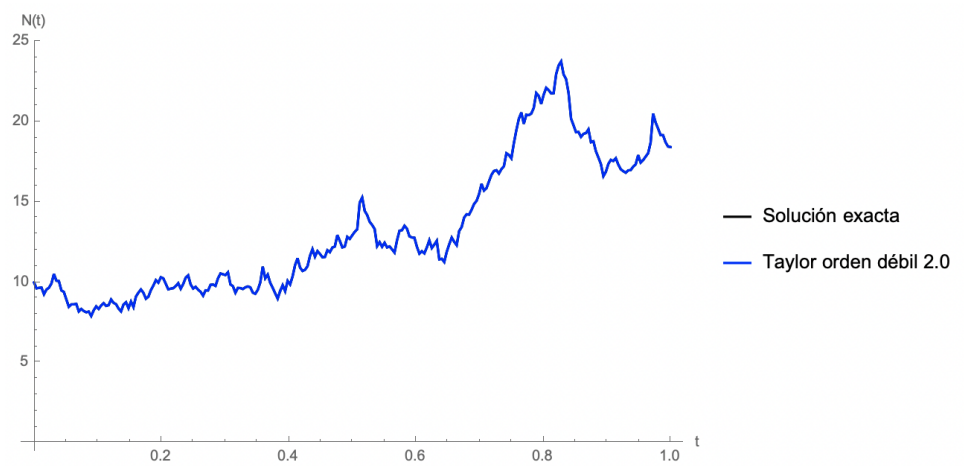


Figura 4.12: Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden débil 2.0.

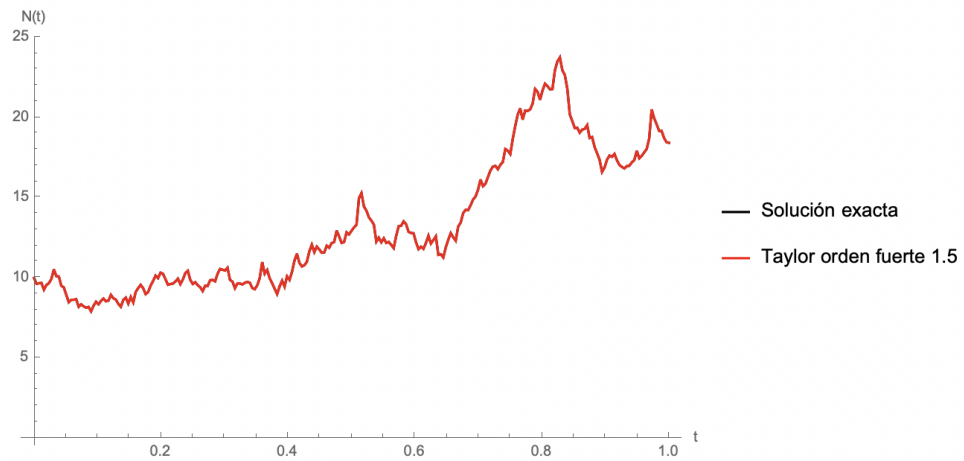


Figura 4.13: Modelo logístico, una trayectoria exacta junto a la de Taylor de orden fuerte 1.5.

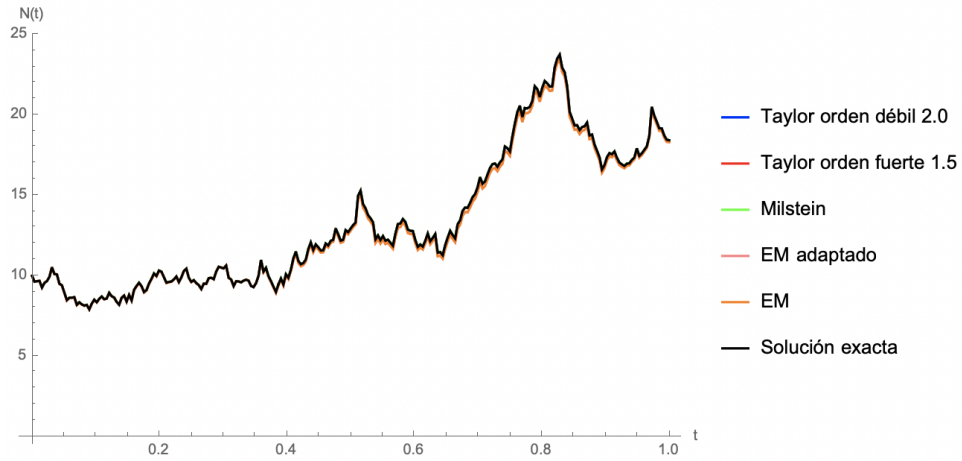


Figura 4.14: Modelo logístico, todas las trayectorias juntas.

Como podemos observar en las gráficas, al igual que en el modelo de Malthus, los que peor aproximan la trayectoria exacta son los esquemas de EM y EM adaptado. Y los que mejor aproximan son los esquemas de Milstein y los de Taylor. Esto cabe esperar, ya que sabemos que los esquemas que tienen mayor orden de convergencia (Milstein y los de Taylor) nos dan mejores aproximaciones. Además, en este caso, al igual que con el modelo de Malthus, el esquema de EM y EM adaptado nos dan la misma trayectoria; esto se debe a que una vez más la trayectoria no llega a tocar valores negativos.

Una vez hecho esto, hemos calculado los errores de los métodos de la misma manera que en la sección anterior. En este caso, para obtener los errores débiles también hemos calculado 1000 trayectorias, y el valor medio exacto es (2.16). Se ha calculado el error para los diferentes tamaños de paso $\Delta = 1/2^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, con $r = 0,5$, $\alpha = 0,15$, $K = 5$, $0 \leq t \leq 1$ y $N_0 = 50$. En el cuadro (4.3), podemos ver los errores débiles obtenidos en una simulación para cada método y para cada tamaño de paso, y en la figura (4.15), la gráfica de errores.

k	Δ	EM	Milstein	EM adaptado	Taylor 2.0
3	0.125	1.76769	1.76761	1.76769	1.0718
4	0.0625	0.744151	0.744816	0.744151	0.184541
5	0.03125	0.364	0.363658	0.364	0.0466856
6	0.015625	0.276217	0.276454	0.276217	0.0814412
7	0.0078125	0.191504	0.191748	0.191504	0.0965965

Cuadro 4.3: Errores débiles para cada método y cada paso de tiempo en el modelo logístico.

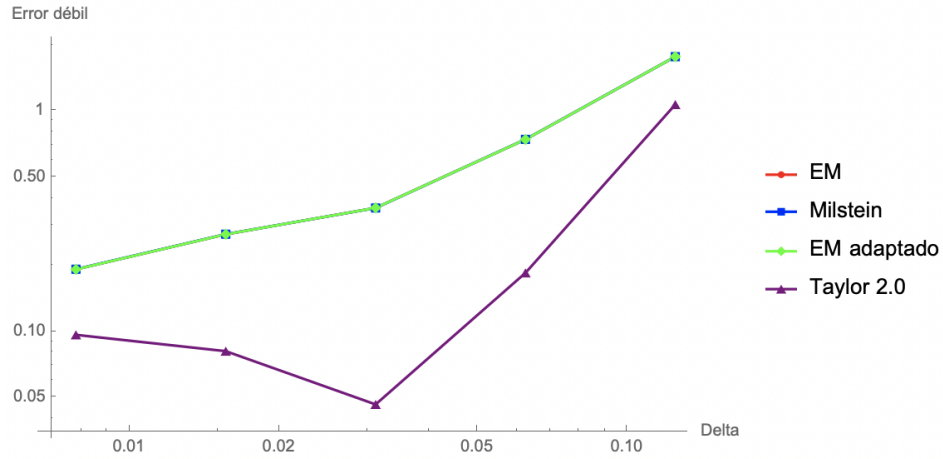


Figura 4.15: Gráfica de errores débiles del modelo logístico.

Tanto en el cuadro como en la gráfica, podemos observar cómo en los métodos de EM, EM adaptado y Milstein el error disminuye a medida que disminuye el tamaño de paso Δ . EM y EM adaptado producen los mismos errores y los errores de Milstein son casi idénticos a estos, con un poco de mejora. Se puede ver a simple vista que el método Taylor 2.0 tiene un desempeño significativamente mejor en términos de errores débiles en comparación con los otros métodos. Una vez más, podemos observar cómo los esquemas con orden débil 1.0, es decir, EM, EM adaptado y Milstein, proporcionan errores casi idénticos y mayores en comparación con el esquema de Taylor 2.0, que tiene un orden débil 2.0.

A continuación, se han calculado los errores fuertes de los esquema de EM, EM adaptado, Milstein y Taylor de orden fuerte 1.5, de la misma manera que en la sección anterior. Se ha calculado el error para los diferentes tamaños de paso $\Delta = 1/2^k$, $k = 3, 4, 5, 6, 7$, con $r = 1,5$, $\alpha = 0,5$, $K = 50$, $0 \leq t \leq 1$ y $N_0 = 10$. En el cuadro (4.4), podemos ver los errores fuertes obtenidos en una simulación para cada método y para cada tamaño de paso, y en la figura (4.16), la gráfica de errores.

k	Δ	EM	Milstein	EM adaptado	Taylor 1.5
3	0.125	0.797129	0.337484	0.797129	0.450815
4	0.0625	0.611325	0.179464	0.611325	0.229039
5	0.03125	0.476844	0.0895948	0.476844	0.122031
6	0.015625	0.32775	0.0433643	0.32775	0.0556541
7	0.0078125	0.226596	0.0223335	0.226596	0.0293134

Cuadro 4.4: Errores fuertes para cada método y cada paso de tiempo en el modelo logístico.

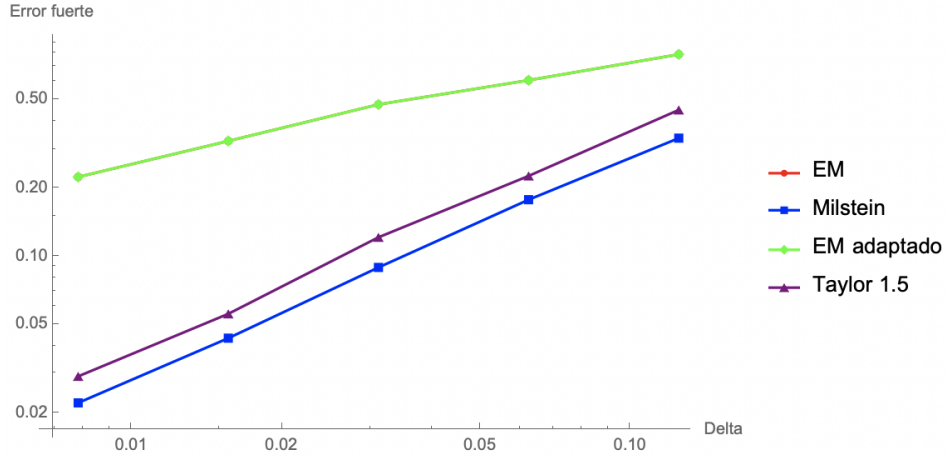


Figura 4.16: Gráfica de errores fuertes del modelo logístico.

En todos los métodos, a medida que disminuye Δ , el error fuerte disminuye. Podemos observar que el esquema que mejor aproxima, cometiendo los errores más pequeños, es el de Milstein, seguido por el de Taylor 1.5, y por último el de EM y su adaptación. En este caso, aunque el método de Milstein tiene un orden de convergencia fuerte menor que el de Taylor 1.5, produce errores más pequeños.

4.3. Simulaciones con el Modelo CIR

En esta última sección, vamos a comparar los esquemas adaptados; entre ellos, el esquema (3.9), el esquema (3.10) y el de Milstein implícito. Para ello, se han realizado diferentes simulaciones con el modelo CIR (2.18).

En este caso, no conocemos la solución exacta pero si la media de su solución (2.20). Por ello, hemos dibujado una trayectoria del valor medio de la solución exacta junto a una aproximada mediante los métodos mencionados, utilizando en todas el mismo incremento de Wiener.

Para esta simulación, hemos escogido $\alpha = 4,275$, $\beta = 0,5$, $\sigma = 0,365$, $0 \leq t \leq 1$, $X_0 = 1$ y $\Delta = 1/256$. En la figura (4.17), tenemos la trayectoria del valor medio de la solución junto a una aproximada mediante el esquema de Milstein; en la figura (4.18), la misma trayectoria del valor medio junto a una aproximada mediante el esquema (3.9); en la figura (4.19), la misma trayectoria del valor medio junto a una aproximada mediante el esquema (3.10); y finalmente, en la figura (4.20), todas juntas.

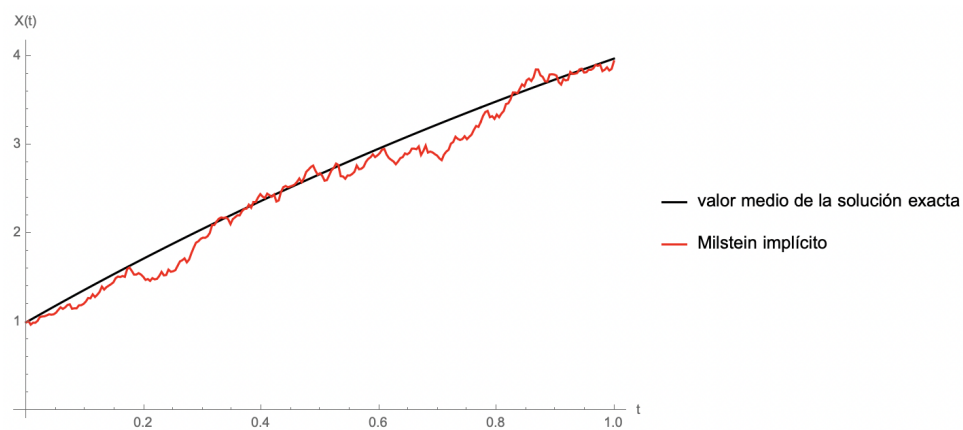


Figura 4.17: Modelo CIR, una trayectoria del valor medio de la solución junto a la de Milstein implícito.

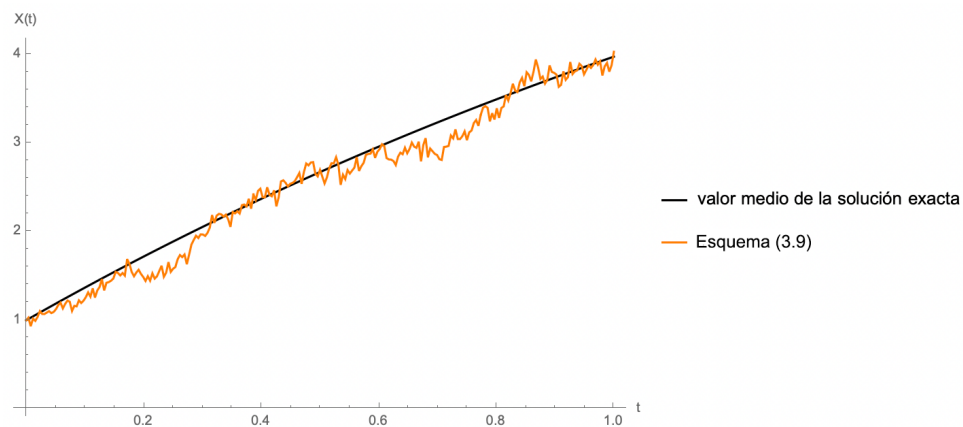


Figura 4.18: Modelo CIR, una trayectoria del valor medio de la solución junto a la del esquema (3.9).

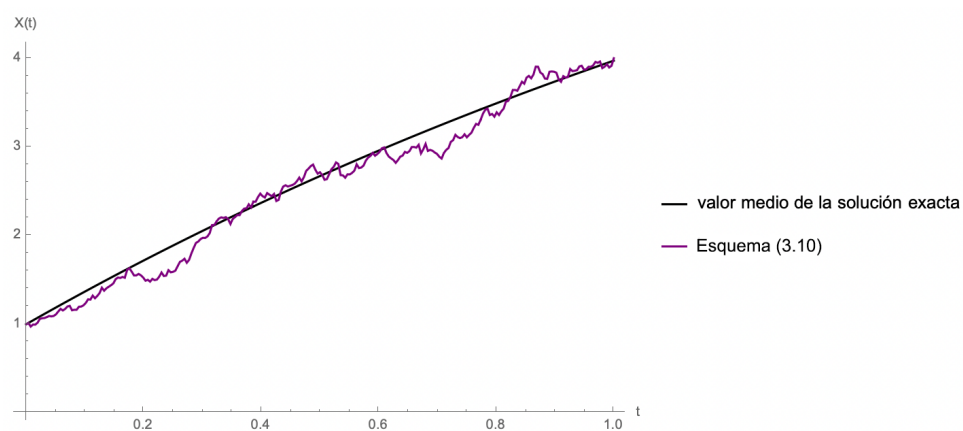


Figura 4.19: Modelo CIR, una trayectoria del valor medio de la solución junto a la del esquema (3.10).

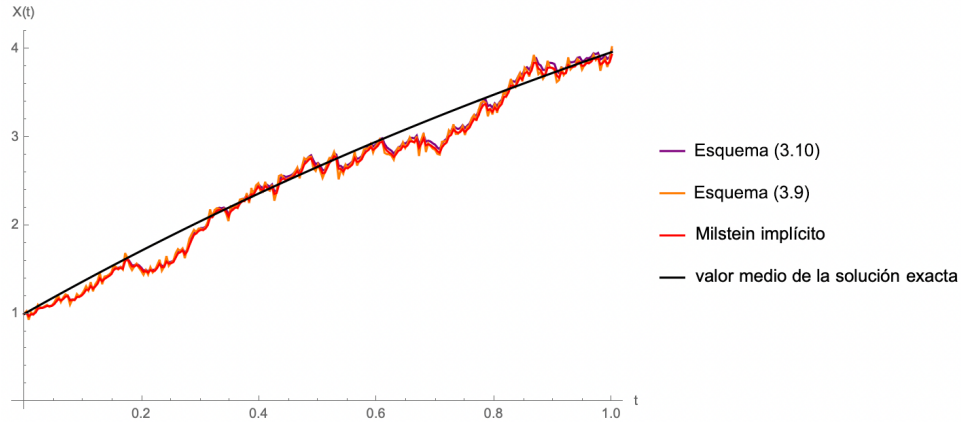


Figura 4.20: Modelo CIR, todas las trayectorias juntas.

De estas imágenes no podemos extraer información sobre qué esquema es el que mejor aproxima nuestro modelo; por lo tanto, para analizar la precisión de los métodos, hemos calculado los errores débiles, como en las secciones anteriores. Para los errores débiles, se han calculado 1000 trayectorias con cada método, y en este caso el valor medio exacto es (2.20). Se ha calculado el error para los diferentes tamaños de paso $\Delta = 1/2^k$, $k = 3, 3, 5, 6, 7$, para $\alpha = 4,275$, $\beta = 0,5$, $\sigma = 0,365$, $0 \leq t \leq 1$ y $X_0 = 1$. En el cuadro (4.5), podemos ver los errores obtenidos en una simulación para cada método y para cada tamaño de paso. Además, esto se puede observar mejor visualmente en la figura (4.21).

k	Δ	Milstein implícito	Esquema (3.9)	Esquema (3.10)
3	0.125	0.0623185	0.0646518	0.0996778
4	0.0625	0.0291765	0.0311465	0.0517709
5	0.03125	0.00714705	0.00805956	0.0334844
6	0.015625	0.00801597	0.00854294	0.0121828
7	0.0078125	0.00820993	0.00827967	0.00185003

Cuadro 4.5: Errores débiles para cada método y cada paso de tiempo en el modelo CIR.

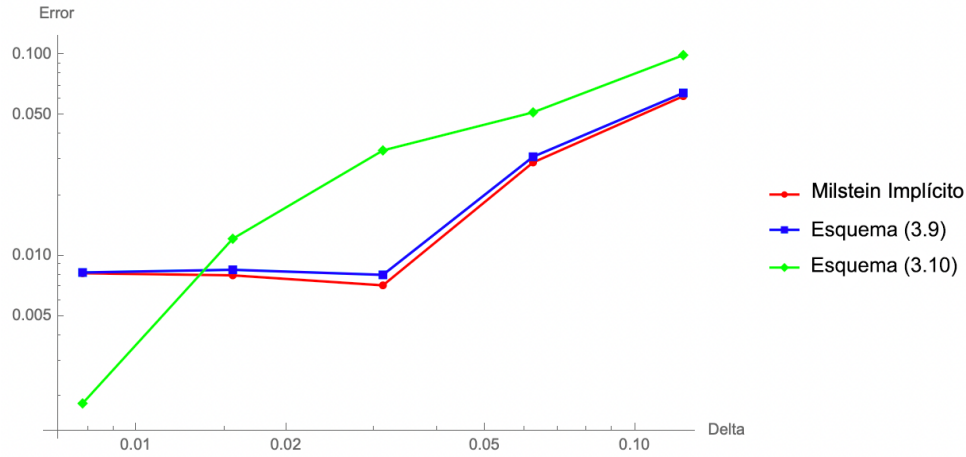


Figura 4.21: Gráfica de errores débiles del modelo CIR.

Como podemos observar tanto en el cuadro como en la gráfica de errores, en los tres métodos, a medida que disminuye el tamaño de paso Δ , disminuye a su vez el error; lo cual es un buen indicador de que los métodos están convergiendo hacia la solución verdadera del modelo CIR. Por otro lado, podemos decir que en general el esquema que mejor aproxima es el de Milstein, después el esquema (3.9) y, por último, el esquema (3.10). Aunque cabe aclarar que con $\Delta = 0,0078125$ la mejor aproximación se obtiene con el esquema (3.10).

Por último, como sabemos que a medida que el tiempo t avanza, X_t no se aleja indefinidamente del límite de su esperanza, es decir, de $\frac{\alpha}{\beta}$ (2.21), queremos comprobar si los esquemas cumplen con lo dicho. En primer lugar, si dibujamos la trayectoria del valor medio escogiendo $\alpha = 4,275$, $\beta = 0,5$, $\sigma = 0,365$, $0 \leq t \leq 500$, $X_0 = 1$ y $\Delta = 1/8$, vemos que efectivamente X_t tiende a $\frac{\alpha}{\beta} = 8.55$, a medida que $t \rightarrow \infty$, como se puede observar en la figura (4.22).

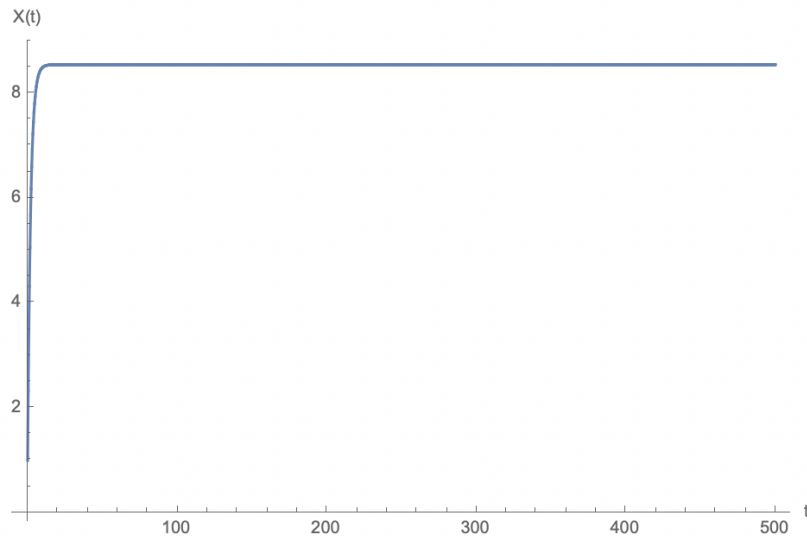


Figura 4.22: Gráfica ilustrativa del límite de la esperanza de X_t .

A continuación, se ha llevado a cabo un experimento en el que se han calculado 1000 trayectorias utilizando el esquema de Milstein, el esquema (3.9) y el esquema (3.10). Posteriormente, se ha calculado la media de estas trayectorias y se ha dibujado junto al valor 8.55. El experimento se ha realizado con los tres esquemas utilizando los siguientes parámetros: $\alpha = 4.275$, $\beta = 0,5$, $\sigma = 0,365$, $0 \leq t \leq 100$, $X_0 = 1$ y $\Delta = 1/8$.

En la figura (4.23), se observa cuál es la media de 1000 trayectorias obtenidas mediante el metodo de Milstein, y podemos ver cómo X_t no se aleja del valor 8.55. Lo mismo ocurre al realizar el experimento con el esquema (3.9) (véase la figura (4.24)), donde X_t no se aleja indefinidamente del valor 8.55. Por otro lado, cuando se realiza el experimento con el esquema (3.10), podemos observar cómo la media de las trayectorias no oscila entre este valor, sino que el valor queda por debajo de esta media (véase la figura (4.25)).

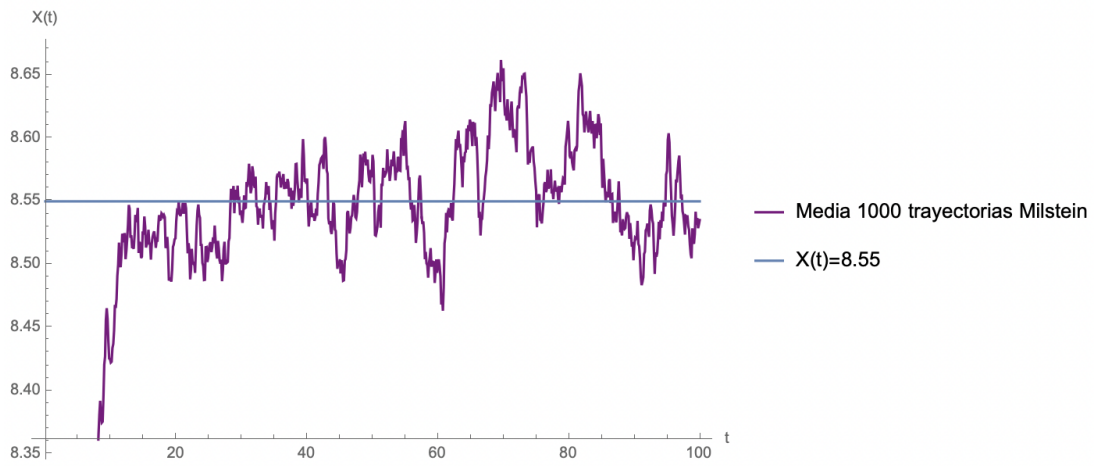


Figura 4.23: Gráfica de la media de 1000 trayectorias de X_t , mediante Milstein implícito.

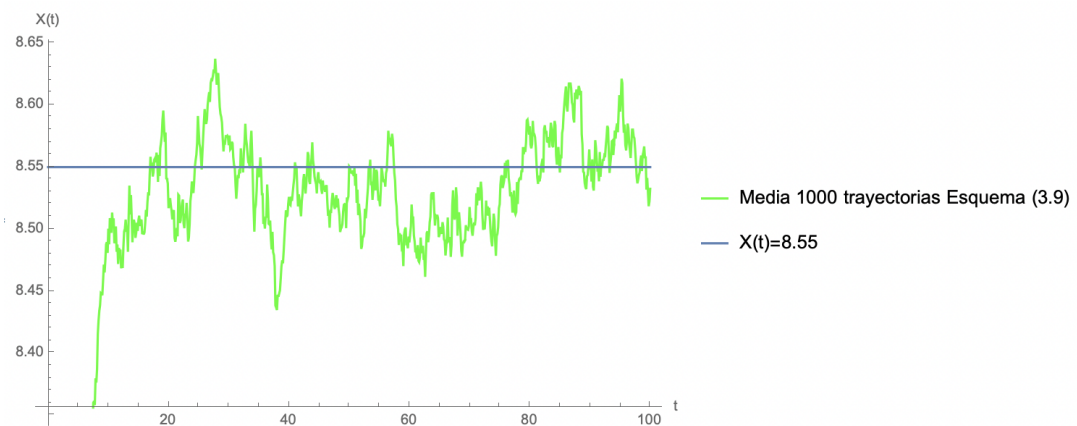


Figura 4.24: Gráfica de la media de 1000 trayectorias de X_t , mediante esquema (3.9).

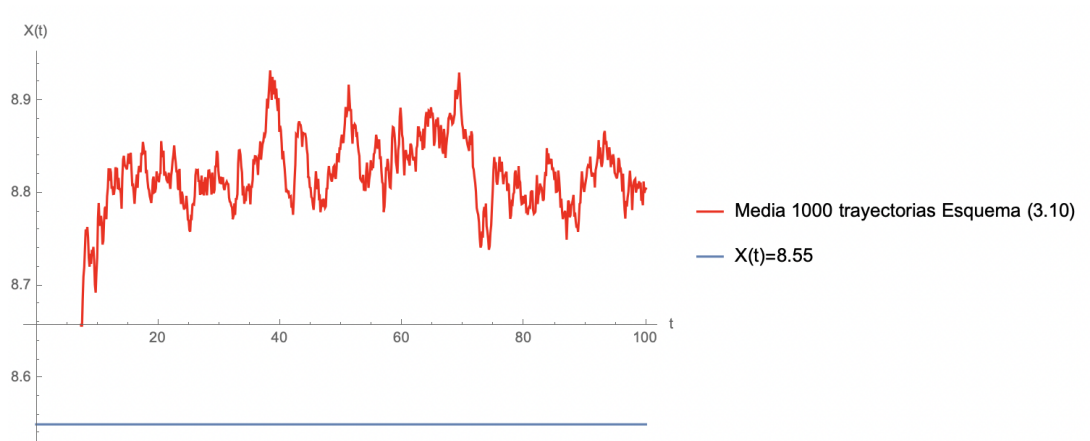


Figura 4.25: Gráfica de la media de 1000 trayectorias de X_t , mediante esquema (3.10).

En resumen, podemos decir que el esquema que mejor aproximación nos da es el de Milstein, seguido por el esquema (3.9) y, finalmente, por el esquema (3.10).

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido explorar diversos modelos estocásticos aplicados a la dinámica de poblaciones y examinar distintos métodos para resolver estos modelos. Para ello, ha sido fundamental incluir un capítulo de preliminares, en el que se profundiza en las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) para poder aplicarlo en la modelización de poblaciones. La importancia de estos conceptos radica en su capacidad para incorporar la variabilidad y aleatoriedad que caracterizan a los sistemas biológicos.

Se han presentado y analizado las propiedades y comportamientos de tres modelos específicos: el modelo de Malthus, el modelo logístico y el modelo CIR. Estos modelos permiten una representación más realista de las dinámicas poblacionales comparando con los modelos deterministas, al considerar factores como el ruido ambiental (clima, desastres naturales, epidemias, etc.).

Además, dado que la resolución de la mayoría de las EDE requiere métodos numéricos, se examinaron varios esquemas, incluidos algunos adaptativos, esenciales en dinámica de poblaciones para garantizar que los modelos produzcan resultados positivos.

Se realizaron diferentes experimentos aplicando los esquemas a los modelos estudiados, de los cuales se pueden extraer varias conclusiones. En particular, se observó que los esquemas con mayor orden de convergencia (débil y fuerte) proporcionan mejores aproximaciones (tal y como se esperaba) y que, en la mayoría de las veces, los esquemas convergen mejor a la solución exacta a medida que se reduce el tamaño de paso.

Por último, quiero compartir brevemente mi experiencia en la realización de este Trabajo Fin de Máster (TFM) y plantear posibles trabajos futuros. Lo que más me ha interesado de este proyecto ha sido la oportunidad de ampliar mis conocimientos en modelos estocásticos. Antes de comenzar, tenía un conocimiento limitado sobre el cálculo estocástico y las ecuaciones diferenciales estocásticas, pero este trabajo me ha permitido profundizar en estos temas y comprender su aplicación en la dinámica de poblaciones. Además, gracias a las simulaciones realizadas en el software Mathematica, he mejorado mis habilidades en la programación de métodos numéricos.

En cuanto a trabajos futuros, se podrían explorar varias direcciones para profundizar

en el estudio de modelos estocásticos y su aplicación en la dinámica de poblaciones. Entre ellos, estaría realizar simulaciones adicionales para comparar la dinámica de los diferentes modelos estocásticos estudiados, como el modelo de Malthus, el modelo logístico y el modelo CIR, con el fin de identificar las condiciones bajo las cuales cada modelo proporciona las predicciones más precisas y útiles. Además, sería interesante investigar cómo diferentes factores externos, como el cambio climático, la introducción de especies invasoras o la intervención humana, afectan a las dinámicas poblacionales. Esto podría involucrar la creación de escenarios de simulación específicos para evaluar la resiliencia de las poblaciones bajo diversas condiciones ambientales y antropogénicas.

Bibliografía

- [1] Alfonsi, A. (2005). On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(4), 355-384.
- [2] Kahl, C. (2004). Positive numerical integration of stochastic differential equations. University of Wuppertal, Research Group Numerical Analysis.
- [3] Kloeden, P. E., Platen, E. (1992). *Stochastic Differential Equations*. Springer Berlin Heidelberg.
- [4] Lamberton, D., Lapeyre, B. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman and Hall/CRC.
- [5] Panik, M. J. (2017). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications in Population Dynamics Modeling*. John Wiley and Sons, Inc.
- [6] Rogers, L. C. G., Williams, D. (2000). *Diffusions, Markov processes and martingales: Volume 2, Itô calculus (Vol. 2)*. Cambridge University Press.
- [7] Skiadas, C. H. (2010). Exact solutions of stochastic differential equations: Gompertz, generalized logistic and revised exponential. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 12, 261-270.