



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

**Efectos de la absorción en una
ecuación de difusión no lineal:
comportamiento
asintótico de las soluciones.**

AUTOR: Roberto Rodríguez Basarte

TUTORA: Manuela Chaves Tolosa

Curso 2023-2024

CERTIFICADO DE LOS/AS TUTORES/AS DE TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

D./D^a **Manuela Chaves Tolosa**, profesora del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Salamanca

HACE CONSTAR

Que el trabajo titulado “**Efectos de la absorción en una ecuación de difusión no lineal: comportamiento asintótico de las soluciones**”, que se presenta, ha sido realizado por **Roberto Rodríguez Basarte** con DNI número ***29117L y constituye la memoria del trabajo realizado para la superación de la asignatura Trabajo Fin de Máster del Máster Universitario en Modelización Matemática de la Universidad de Salamanca

Salamanca, a 7 de septiembre de 2024

CHAVES TOLOSA
MANUELA -
11793601Y



Firmado digitalmente por
CHAVES TOLOSA MANUELA -
11793601Y
Fecha: 2024.09.07 15:44:49
+02'00'

Firmado. D^a Manuela Chaves Tolosa



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

**Efectos de la absorción en una
ecuación de difusión no lineal:
comportamiento
asintótico de las soluciones.**

AUTOR: Roberto Rodríguez Basarte

TUTORA: Manuela Chaves Tolosa

Curso 2023-2024

Índice general

Introducción	1
1. Estudio físico de la Ecuación del Medio Poroso	4
1.1. Fundamentos físicos de la EMP	5
1.1.1. Ley de Darcy	5
1.1.2. Conservación de la masa	6
1.1.3. Ecuación de estado	6
1.2. Deducción de la Ecuación del Medio Poroso	7
2. Estudio matemático de la EMP	9
2.1. Soluciones estacionarias	10
2.2. Soluciones en variables separadas	12
2.3. Ondas viajeras	13
2.4. Soluciones autosemejantes. Solución fundamental de Barenblatt	17
2.5. Invarianzas de la PME	23
2.5.1. Traslación temporal y espacial	23
2.5.2. Invarianza de Escala	23
2.6. Principio de comparación	23
2.7. Comportamiento asintótico de las soluciones de la EMP de difusión pura	24
2.8. Soluciones reescaladas de la EMP y convergencias al perfil	25
3. EMP con absorción	30
3.1. Familia de soluciones planas	31
3.2. Familias de soluciones estacionarias	31
3.3. Soluciones autosemejantes con soporte compacto	32
3.4. Relevancia de la absorción en el comportamiento asintótico de las soluciones.	33
3.4.1. Simplificación asintótica I: $p > m + 2$	34
3.4.2. Comportamiento autosemejante de la EMP con absorción: $m < p < m + 2$	37
3.4.3. Simplificación asintótica II: $1 < p < m$	39
3.4.4. Fenómeno de extinción en tiempo finito: $p < 1$	44
3.5. Soluciones autosemejantes	46
3.6. Ecuación en variables reescaladas	47
Conclusiones	50
Bibliografía	54

Índice de figuras

2.1.	Gráfica de la solución $u(x, t) = Cx^{1/m}$ para $m = 2$ y $a = 3$	11
2.2.	f^{m-1} vs η para distintos valores de m , con los valores $\eta_0 = 5$ y $c = 3$	14
2.3.	Gráfica de $u(x, t) = \left(\left(\frac{m-1}{m}c(\eta_0 - x + ct)\right)\right)_+^{\frac{1}{m-1}}$ para $m = 3$ con $\eta_0 = 5$ y $c = 3$ y para distintos instantes de tiempo.	15
2.4.	Gráfica de $W(x, t)$ y su frontera para varios instantes de tiempo.	16
2.5.	Representación del perfil $f(\eta)$ para unos valores de $A = 1$, $m = 3$ y $\beta = 0,25$	19
2.6.	Solución de Barenblatt para los valores $m = 3$, $A = 1$, $\beta = \alpha = 0,25$ y $t = 1$	20
2.7.	Evolución temporal de la solución de Barenblatt para distintos instantes de tiempo.	21
2.8.	Evolución de la frontera de una Barenblatt	22
2.9.	Gráfica de tres Barenblatt con distinta masa para distintos instantes de tiempo	22
2.10.	Gráfica que muestra la convergencia de este tipo de soluciones creadas a partir de una Barenblatt trasladada en t al perfil de Barenblatt con una masa fija.	27
2.11.	Gráfica en la que aprecia la convergencia de este tipo de soluciones creadas a partir de una Barenblatt trasladada en x al perfil de Barenblatt con una masa fija.	28
2.12.	Solución reescalada creada a partir de una familia de soluciones trasladadas en x y en t para distintos instante de tiempo τ	29
3.1.	Gráfica ilustrativa de los datos iniciales de $u(x, t) = u_0$ y $W(x, t) = W_0$	42
3.2.	Gráfica donde se muestra como una traslación temporal y espacial nos permiten acotar el dato inicial u_0	43
3.3.	Extinción de cualquier solución para $p < 1$	45
3.4.	Solución numérica: perfil autosemejante ($m < p < m+2$) usando el metodo de Shooting y rk4.	47
3.5.	Gráfica de $f(\eta)$ calculado numéricamente a partir de la expresión $-c\eta + C = 2f + 2\epsilon \ln f - \epsilon $ con $C = 0$ para distintos valores de ϵ y con $c = 3$	56
3.6.	Gráfica de $f(\eta) = \frac{1}{2} \max \{-c\eta, 0\}$ para $c = 3$	56
3.7.	Gráfica de $W(x, t)$ para $m = 2$ con $c = 3$ y η_0 y su frontera en varios instante de tiempo.	57

Introducción

La Ecuación del Medio Poroso (EMP) es una ecuación diferencial parcial no lineal que modela procesos de difusión en medios porosos. En este trabajo nos centramos en una dimensión espacial $(1 - d)$ con un término de absorción, siendo el problema de Cauchy asociado:

$$u_t = (u^m)_{xx} - u^p \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \quad (2)$$

donde $m > 1$, $p > 1$, $u(x, t)$ es una función escalar que en el instante inicial satisface $u(x, 0) = u_0(x)$, siendo $u_0(x)$ un dato continuo, no negativo, de soporte compacto y acotado. Asumiremos sin pérdida de generalidad que $u_0(x) > 0$ en el dominio de positividad y $x = 0$ está incluido en el ya que una traslación espacial y temporal nos llevan a tener estas hipótesis adicionales.

La motivación de incluir el término de absorción es que la EDP de difusión pura ($u_t = (u^m)_{xx}$) olvida efectos de gravedad, convección, disipación... En particular, si tenemos en cuenta un efecto de absorción con densidad volumétrica u^p , obtenemos el modelo de estudio en este trabajo. Esta ecuación aparece en muchas situaciones, siendo una de ellas la propagación del calor en gases ionizados a altas temperatura, en este caso (1) describe procesos de propagación térmica con absorción. Entonces u representa la temperatura, $(u^m)_{xx}$ la difusión y el término $-u^p$ la absorción de calor por el medio. Para más aplicaciones y usos de esta ecuación consultar [25] y sus referencias.

Cuestiones relativas a la existencia de soluciones, unicidad, existencia de la frontera libre, pérdida de regularidad, etc, han sido estudiadas ampliamente por varios autores a lo largo de la memoria de citarán las referencias mas significativas.

El objetivo principal del trabajo es analizar cómo la introducción de un término de absorción, modelizado por el término $-u^p$, afecta al comportamiento asintótico de las soluciones, en particular, en las tasas de crecimiento y de la evolución de la frontera libre. En concreto, veremos cómo la importancia de este término depende del rango de valores de m y p .

Nuestro estudio del comportamiento asintótico se apoya en tres pilares fundamentales: la existencia de soluciones especiales de (1), el uso de solución y ecuación reescalada y la obtención de estimaciones a priori apropiadas de las soluciones, uno de los apartados más delicados de este estudio. Asumimos tambien en la memoria por su importancia objetivos

concretos relacionados con estos conceptos.

En particular, resaltaremos la importancia de las soluciones especiales, cada una empleada en un contexto diferente. Mostraremos la importancia de las soluciones reescaladas que nos ayudaran, eligiendo la tasa correcta, a deducir los diferentes rangos de parámetros en los que debemos hacer nuestro estudio. Por últimos, surgirá de manera natural en el estudio la necesidad de establecer las estimaciones que nos permitirán obtener el comportamiento asintótico de las soluciones, hayando sus tasas de decaimiento y evolución de la frontera libre.

Distintos autores han abordado el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones en alguno de los rangos de parámetros que presentamos, se puede consultar [25], [8], [20]. El enfoque presentado permite dar una visión completa del problema, incluyendo el estudio unificado del comportamiento de las soluciones para los distintos rangos de parámetros en estudio, incluido el de la ecuación de difusión pura. Es importante mencionar que en la primera parte del trabajo, aunque sigue fundamentalmente las referencias [25] y [1], se ha realizado el análisis completo en las secciones correspondientes a las soluciones especiales, la ecuación reescalada y la construcción de familias de soluciones que muestran la convergencia al perfil. Las aportaciones más interesantes se encuentran en el apartado correspondiente a las estimaciones a priori, especialmente en las subsoluciones. Por último destaca que el estudio del comportamiento en el rango de parámetros $m < p < m + 2$ no ha sido tratado hasta ahora por lo que las estimaciones a priori obtenidas serían la base para una futura publicación.

El resultado central de nuestro estudio queda reflejado en el siguiente teorema, donde agrupamos el comportamiento asintótico encontrado para los distintos rangos de m y p .

Teorema 0.0.1. Sea $u(x, t)$ una solución con soporte compacto y acotada de (1). Entonces $\max\{u(x, t)\} = \mathcal{O}((1+t)^\alpha)$ y $s_{u+}(t) = \mathcal{O}((1+t)^\beta)$. Donde α y β toman diferentes valores en función del rango de parámetros m y p .

- Caso sin absorción (EMP pura): $\alpha = -\frac{1}{m+1}$ y $\beta = \frac{1}{m+1}$
- Caso $p < m + 2$: $\alpha = -\frac{1}{m+1}$ y $\beta = \frac{1}{m+1}$
- Caso $m < p < m + 2$: $\alpha = -\frac{1}{p-1}$ y $\beta = \frac{p-m}{2(p-1)}$
- Caso $1 < p < m$: $\alpha = -\frac{1}{p-1}$ y $\beta = 0$

La memoria se organiza de la siguiente manera:

En el *Capítulo 1*, se aborda el estudio físico de la EMP, comenzando con la presentación de las leyes en las que se sustenta: la ley de Darcy, la ley de conservación de la masa, la conservación de la energía y la ecuación de estado. Posteriormente, se detallará el proceso de construcción de la EMP a partir de las leyes fundamentales presentadas previamente. Así se establecen las bases físicas que justifican el uso de la EMP para modelar el comportamiento de los fluidos en medios porosos. La ley de Darcy es una ley empírica

que tiene gran importancia en la justificación física de la EMP.

El *Capítulo 2* se dedica al análisis matemático de la EMP, donde se introducen y estudian varios tipos de soluciones especiales que permiten una comprensión más profunda del comportamiento del problema. Entre estas soluciones se incluyen las soluciones estacionarias, las obtenidas mediante el método de separación de variables, las soluciones tipo ondas viajeras y, de especial importancia, las soluciones autosemejantes. Estas soluciones muestran propiedades clave de las soluciones de la ecuación, como la aparición de la frontera libre y la velocidad de propagación finita. Además, son una herramienta fundamental en el estudio de la ecuación, jugando un papel importante en la teoría de existencia y unicidad y en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones, etc.

El *Capítulo 3* introduce la absorción en el modelo modelizada mediante el término $-u^p$. La absorción añade un término adicional que representa un sumidero, es decir, un mecanismo por el cual la masa del fluido se pierde a medida que el sistema evoluciona. Este fenómeno introduce nuevos comportamientos en las soluciones en comparación con el caso de difusión pura. En este capítulo, se construyen nuevas soluciones específicas para el modelo con absorción y se estudia cómo la absorción influye en el comportamiento de las soluciones, tanto en términos de su estructura como de su evolución temporal. El uso de las ecuaciones rescaladas y las soluciones autosmejenates de soporte compacto nos permitirán establecer los exponentes críticos que determinan los distintos comportamientos asintóticos y la obtención de estimaciones a priori adecuadas que nos llevarán a describirlo, aportando las tasas de decaimiento de las soluciones y la evolución de la frontera libre en cada uno de los casos. A medida que el término de absorción se vuelve más dominante, se analizan sus efectos sobre la extinción del fluido y la modificación de las propiedades de propagación. Veremos cómo a medida que decrece el exponente p que determina la absorción del medio, la importancia de este término aumenta progresivamente, llegando en el caso límite a un nuevo fenómeno con el que cerramos el estudio: la extinción de las soluciones en tiempo finito.

Capítulo 1

Estudio físico de la Ecuación del Medio Poroso

En este apartado, presentaremos los fundamentos físicos de la Ecuación del Medio Poroso (EMP), con el objetivo de entender cómo las leyes de conservación y los modelos de flujo en medios porosos se integran para describir el comportamiento de fluidos bajo condiciones específicas. Este estudio es importante para comprender la teoría matemática de la EMP. La EMP toma la siguiente expresión en tres dimensiones [23]:

$$u_t = \Delta(u^m) \tag{1.1}$$

con $m > 1$ y $u \geq 0$.

En primera instancia exploraremos las leyes físicas que dan lugar a esta ecuación y a partir de ellas, la deduciremos.

Para describir la dinámica de los fluidos viscosos más comunes, como los fluidos newtonianos, se utilizan la ley de Navier-Stokes, las leyes de conservación de la masa y la energía, y, cuando es necesario, la ecuación de estado del fluido (si es compresible) [23]. Así estas leyes nos permiten describir completamente el comportamiento de un fluido y conocer su evolución bajo condiciones iniciales y de contorno específicas.

En el caso de medios porosos, el comportamiento es más complejo, ya que la ecuación de Navier-Stokes no describe adecuadamente los fluidos en estos medios. Por ello, introducimos la ley de Darcy, desarrollada empíricamente por Henri Darcy en 1856 tras observar el movimiento de fluidos, principalmente agua, a través de medios porosos como la arena. Darcy propuso una ley que incorpora la compresibilidad y la absorción del medio, aspectos que no incluyen las ecuaciones de Navier-Stokes.

Utilizando la Ley de Darcy, junto con otras leyes de conservación, formularemos la ecuación del medio poroso que describe el comportamiento de fluidos en estos entornos.

1.1. Fundamentos físicos de la EMP

El estudio del flujo de fluidos a través de medios porosos requiere la integración de diversas ecuaciones que describen el comportamiento macroscópico de líquidos y gases. En la física de fluidos, tratamos a los fluidos como medios continuos y, en caso de ser homogéneos (con composición constante), su estado puede definirse completamente al conocer su velocidad, densidad y presión [9]. Para describir este comportamiento, utilizamos tres ecuaciones fundamentales:

- Ley de Darcy.
- Ley de conservación de la masa.
- Ecuación de estado.

Estas ecuaciones constituyen un sistema cerrado de tres ecuaciones con tres incógnitas, proporcionando así una descripción completa del comportamiento del fluido en medios porosos.

La combinación de estas leyes nos permite formular la ecuación del medio poroso, pudiendo así ir estableciendo un marco teórico donde poder estudiar la EMP.

1.1.1. Ley de Darcy

La Ley de Darcy es esencial para comprender la dinámica de los fluidos en medios porosos, diferenciándose significativamente de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas últimas son adecuadas para describir fluidos viscosos en contextos donde la porosidad no es relevante. Junto a la ley de conservación de la masa, la conservación de la energía y con una ecuación de estado permiten describir el comportamiento de fluidos bajo condiciones iniciales y de contorno específicas. Sin embargo, en medios porosos, aspectos como la geometría del medio y la interacción fluido-medio son importantes y no son adecuadamente abordados por las ecuaciones de Navier-Stokes.

Henri Darcy formuló su ley en 1856, basándose en experimentos sobre el flujo de agua a través de arena. Esta ley empírica establece una relación lineal entre dos cantidades fundamentales, la caída de presión $p(x, t)$ y la velocidad $u(x, t)$ del flujo en la frontera de un medio poroso. La ley es particularmente aplicable a fluidos incompresibles como el agua y se expresa matemáticamente como:

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z), \quad (1.2)$$

donde $u(x, t)$ representa la velocidad del fluido, $p(x, t)$ es la presión, k es el coeficiente de permeabilidad del medio, μ es la viscosidad dinámica del fluido, ρ es la densidad (supuesta constante) del fluido, g es la aceleración debida a la gravedad y la variable z representa la coordenada vertical. Las cantidades μ y k pueden ser variables, pero en muchos casos podemos suponer un medio homogéneo y entonces ambas son constantes. Todas estas cantidades son comunes en el estudio de los fluidos viscosos salvo el coeficiente

de permeabilidad ($\sim$ área efectiva del poro) del medio k que es altamente variable dependiendo del medio en cuestión y su determinación es complicada en el estudio práctico de los medios porosos.

Juntando las leyes complementarias (conservación y estado) con condiciones iniciales y de contorno con la ley de Darcy, podemos plantear los principales problemas de filtración en forma de sistemas cerrados de ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

Podemos encontrar algunos ejemplos detallados de las aplicaciones de la ley de Darcy en [23].

La mecánica de fluidos se basa en que el fluido es un medio continuo y las magnitudes básicas (presión, densidad, velocidad, etc) están definidas como promedios del comportamiento del fluido en un volumen dado. En el caso de los medios porosos el volumen en el que hacemos el promedio debe ser mayor, para que pueda albergar un número suficiente de poros y tenga sentido el nuevo promedio.

La ley de Darcy, respaldada por la evidencia experimental, reemplaza efectivamente a la de Navier-Stokes en medios porosos bajo condiciones específicas, como en flujos con bajo número de Reynolds donde los efectos de inercia son insignificantes frente a los viscosos.

1.1.2. Conservación de la masa

La conservación de masa, o la ecuación de continuidad, es un principio fundamental en la mecánica de fluidos que establece que la masa de un fluido debe permanecer constante en un sistema cerrado. Esta ecuación asegura que cualquier cambio en la densidad del fluido dentro de un volumen establecido se debe compensar con un flujo correspondiente de masa entrante o saliente. Matemáticamente, se expresa como:

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.3)$$

donde ρ es la densidad del fluido, $\epsilon \in (0, 1)$ es la porosidad del medio y $\mathbf{V}$ representa la velocidad del fluido.

La porosidad del medio ϵ , es una magnitud media que se define como el cociente entre el volumen ocupado por los poros y el volumen total. Es algo así como el volumen disponible para el paso del fluido en el medio. La porosidad depende del punto $\epsilon = \epsilon(x)$ y si el medio es compresible, depende también de t . En la primera aproximación podemos tomar ϵ constante, pero esto no es realista en los medios que son altamente heterogéneos.

1.1.3. Ecuación de estado

La ecuación de estado es una relación termodinámica fundamental que vincula las variables de estado de un fluido, como la presión, la densidad y la temperatura. Esta relación es importante en el estudio de los fluidos en medios porosos, especialmente dado que los cambios en la presión y la temperatura pueden influir significativamente en el

comportamiento del fluido. La ecuación de estado proporciona un marco teórico que nos permite explicar estas relaciones entre variables.

En el caso de fluidos que se comportan como gases ideales, lo cual es una suposición común en muchos modelos teóricos y prácticos debido a su simplicidad, la ecuación de estado se expresa como:

$$p = p_0 \rho^\gamma \quad (1.4)$$

donde p representa la presión, ρ la densidad, p_0 es un valor de presión de referencia, y γ es el índice adiabático. El índice adiabático, γ , describe cómo la presión de un gas cambia en respuesta a una compresión o expansión. En nuestro caso $\gamma \geq 1$, con $\gamma = 1$ para procesos isotermos y $\gamma > 1$ para procesos adiabáticos.

Esta formulación de la ecuación de estado permite simplificar y resolver analíticamente muchas situaciones de flujo de fluidos que serían inmanejables con modelos más complejos. Por lo tanto, es frecuentemente utilizada en la deducción de otras ecuaciones más complejas que describen el comportamiento de los fluidos.

Estas ecuaciones son la base para poder describir un fluido en el medio poroso y llegar a la EMP [23], proporcionando así la herramienta principal para poder entender su comportamiento.

1.2. Deducción de la Ecuación del Medio Poroso

Como hemos introducido en el apartado anterior, la EMP nos va a permitir modelizar el comportamiento de un fluido en un medio poroso. Este comportamiento se modela macroscópicamente usando las variables densidad ρ , la presión p , y la velocidad $\mathbf{V}$, que son funciones del espacio x y del tiempo t . Las siguientes leyes presentadas anteriormente relacionan estas cantidades:

1. **Ley de Darcy**, establece una relación entre la velocidad del fluido y la presión en la frontera de un medio poroso como hemos introducido anteriormente (1.2) (despreciando la gravedad):

$$\mathbf{V} = -\frac{k}{\mu} \nabla p$$

2. **Ley de conservación de la masa**, relaciona la densidad con la velocidad del fluido. En mecánica de fluidos tenemos la siguiente ley de conservación:

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

3. **Ecuación de Estado** que vincula la presión con la densidad del fluido, para gases ideales (fluido compresible) toma la forma:

$$p = p_0 \rho^\gamma$$

Nuestra tarea ahora es combinar estas leyes para obtener la ecuación del medio poroso. Empezamos sustituyendo la ley de Darcy en la conservación de la masa:

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \left(-\frac{k}{\mu} \nabla p \right) \right) = 0$$

Calculando el gradiente de la ecuación de estado, obtenemos:

$$\nabla p = \nabla(p_0 \rho^\gamma) = p_0 \gamma \rho^{\gamma-1} \nabla \rho$$

Sustituyendo en la conservación de masa:

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{k p_0 \gamma}{\mu} \rho^{\gamma-1} \nabla \rho \right) = 0$$

Simplificando y haciendo el cambio $\gamma = m - 1$ obtenemos:

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k p_0 (m-1)}{\mu m} \nabla \cdot (m \rho^{m-1} \nabla \rho) = 0$$

Llegando así finalmente a la ecuación del medio poroso:

$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k p_0 (m-1)}{\mu m} \Delta (\rho^m) = 0$$

Si definimos $c = \frac{k p_0 (m-1)}{\mu \epsilon m}$ y agrupamos términos podemos llegar a una forma más compacta de la ecuación del medio poroso:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c \Delta \rho^m \quad (1.5)$$

Por simplicidad podemos considerar $c = 1$ y a través de un cambio de escala en el tiempo ($t' = ct$) recuperar nuestra ecuación para cualquier otro valor de c , facilitando así la resolución del problema para cualquier constante c utilizando cambios de escala similares. Esta normalización es útil para simplificar el estudio y aplicación de la EMP en contextos diferentes.

De esta manera, hemos deducido la ecuación del medio poroso a partir de las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de los fluidos en medios porosos.

A pesar de haber deducido la ecuación del medio poroso considerando el flujo de un fluido compresible en un medio poroso, las aplicaciones de esta ley no se quedan ahí. Por ejemplo, del estudio de filtraciones en suelos, derivamos la ecuación de Boussinesq, que es un caso particular de la EMP con $m = 2$ [23]. Además, la ley de Darcy se aplica al análisis de flujos incompresibles en medios porosos, filtraciones en diques, transporte de contaminantes, ... Por completitud, se puede consultar en [25] más ejemplos.

La ley de Darcy es una ley experimental y por ello es aplicable bajo unas condiciones específicas. En particular a fluidos con bajo número de Reynolds [revisar](#), donde los efectos de inercia son despreciables en comparación con los efectos viscosos.

Capítulo 2

Estudio matemático de la EMP

En este capítulo, nos dedicaremos al estudio matemático de la EMP (1.1) con $m > 1$ y nos centraremos en el estudio de soluciones no negativas $u(x, t) \geq 0$. Además, tomaremos el caso más simple donde trabajaremos únicamente con una dimensión espacial $N = 1$, la solución que estaremos buscando es $u(x, t)$ que es la densidad del fluido en cada instante espacio-temporal. Bajo estas condiciones la ecuación del medio poroso es:

$$u_t = (u^m)_{xx} \quad (2.1)$$

que es una EDP parabólica no lineal que modela efectos de difusión. El problema de Cauchy asociado a (2.1) es:

$$u_t = (u^m)_{xx} \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \text{ en } \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Esta ecuación degenera en $u = 0$. Esto conlleva a la aparición de una frontera libre y a la pérdida de regularidad de las soluciones en la misma, por lo que no podremos encontrar soluciones clásicas. Esto nos lleva a la necesidad de buscar un nuevo tipo de solución: las conocidas como soluciones débiles.

Para apreciar de manera clara esta pérdida de regularidad en $u = 0$ podemos operar las derivadas espaciales en (2.2)

$$u_t = (mu^{m-1}u_x)_x$$

y desarrollando la derivada

$$u_t = m(m-1)(u_x)^2 u^{m-2} + mu_{xx}u^{m-1} \quad (2.4)$$

Expresada de este modo se observa claramente que la ecuación (2.2) degenera, perdiendo su carácter parabólico cuando $u(x, t) = 0$.

Por lo tanto, no podemos encontrar soluciones clásicas y es necesario introducir otro tipo de soluciones, las soluciones generalizadas. La existencia y unicidad de las soluciones generalizadas de la ecuación (2.2), ha sido demostrada en [2] y [22]. Además, las soluciones

presentan soporte compacto [11], por lo que aparece una frontera libre que delimita la región donde la solución es positiva ha sido estudiada en [17]. El comportamiento asintótico de las soluciones y sus interfaces ha sido caracterizado en [4] y [19], donde se muestra que, en tiempos largos, la solución converge hacia soluciones autosemejantes. El estudio de la regularidad de las soluciones y de la frontera libre ha sido tratado en [6] y [17], destacando que en estas zonas la ecuación degenera, lo que afecta la regularidad de la solución.

Tal y como mencionamos en la introducción, uno de los objetivos del trabajo es mostrar la importancia de las soluciones especiales. En este apartado incluimos las correspondientes a la EMP de difusión pura.

- **Soluciones estacionarias:** son funciones de una sola variable que no varían en el tiempo $u(x, t) = u(x)$.
- **Soluciones en variables separadas:** $u(x, t) = X(x)T(t)$.
- **Soluciones del tipo ondas viajeras:** $u(x, t) = f(x - ct)$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Soluciones autosemejantes:** $u(x, t) = (1 + t)^{-\alpha} f(x(1 + t)^{-\beta})$

Estas soluciones juntos con algunas propiedades de la ecuación y también con el principio de comparación nos permitirán describir el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.2) en particular, daremos la tasa de decaimiento de la solución como la tasa de evolución de la frontera libre.

2.1. Soluciones estacionarias

El primer tipo de soluciones que vamos a estudiar son las más sencillas y son aquellas que no cambian en el tiempo. Este tipo de soluciones reciben el nombre de soluciones estacionarias. La ecuación del medio poroso bajo la condición $u_t = 0$ resulta en:

$$\Delta u^m = 0 \quad (2.5)$$

Estamos buscando una solución de la forma $u(x, t) = u(x)$ que solo depende de la variable espacial. Para simplificar el problema podemos realizar el cambio de variable $v = u^m$, de modo que la ecuación se transforma en la ecuación de Laplace:

$$\Delta v = 0 \quad (2.6)$$

Tras hacer este cambio buscamos soluciones armónicas de la ecuación de Laplace y mediante el cambio inverso $u = v^{1/m}$ obtenemos las soluciones estacionarias de (2.5). Existen muchas soluciones que verifican esta ecuación, pero en particular propongo una solución de la forma:

$$v(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N + b \quad (2.7)$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_N$ y b son constantes. Esta solución cumple la ecuación (2.6). Al estar interesados en soluciones de (2.5) deshacemos el cambio $u = v^{1/m}$ donde v es una función armónica y obtenemos

$$u(x) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N + b)^{1/m} \quad (2.8)$$

Esta expresión es la solución buscada para (2.5). Sin embargo, para que esta solución tenga sentido, es necesario imponer condiciones sobre las constantes $a_1, a_2, \dots, a_N, b$. Específicamente hay que asegurar que el radicando $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N + b$ no sea negativo para cualquier valor x dentro del dominio de interés. Esta restricción es especialmente importante si m representa una fracción con un denominador par, ya que en esos casos, la función de potencia no está definida.

Para solventar este problema truncamos la solución y mantenemos la parte positiva, es decir, se toma como solución armónica:

$$v(x)_+ = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N + b)_+ = \max \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N + b, 0\} \quad (2.9)$$

A partir de esta solución armónica creamos la solución de la ecuación del medio poroso $u = v^{1/m}$ que es

$$u(\mathbf{x}) = ((a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N + b)^{1/m})_+ \quad (2.10)$$

Así, hemos encontrado de manera general una solución estacionaria de nuestro problema. Al estar interesados en el caso unidimensional podemos particularizar a $N = 1$. Por tanto, la solución particular calculada anteriormente para el caso unidimensional es:

$$u(x) = ((ax + b)^{1/m})_+ \quad (2.11)$$

Si buscamos soluciones en $x \in \mathbb{R}_+$ con $u(0) = 0$, obtenemos unas restricciones sobre las constantes a y b .

$$a > 0, \quad b = 0$$

con estas condiciones obtenemos una familia de soluciones estacionarias con la forma:

$$u(x) = (Cx^{1/m})_+ \quad (2.12)$$

donde $C = a^{1/m}$ es una cantidad positiva.

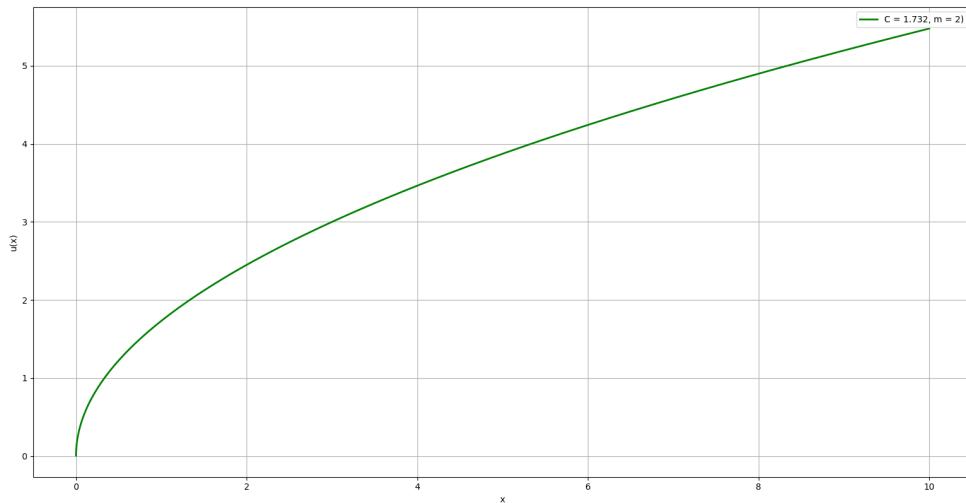


Figura 2.1: Gráfica de la solución $u(x, t) = Cx^{1/m}$ para $m = 2$ y $a = 3$.

Estas soluciones son importantes en la teoría de existencia de soluciones globales de datos iniciales no acotados [25].

2.2. Soluciones en variables separadas

En nuestra búsqueda de soluciones vamos continuar con un método clásico y ampliamente conocido para resolver ecuaciones diferenciales parciales, que es el método de separación de variables.

Buscaremos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, donde $X(x)$ es una función dependiente únicamente del espacio y $T(t)$ del tiempo. Construiremos este tipo de soluciones de la ecuación del medio poroso unidimensional (2.2):

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Sustituyendo las derivadas en (2.2), para la parte temporal obtenemos:

$$u_t = T_t X(x)$$

y para la espacial:

$$(u^m)_{xx} = ((TX)^m)_{xx} = T^m X_{xx}^m$$

Juntando ambos términos podemos deducir la relación:

$$\frac{T_t}{T^m} = \frac{X_{xx}^m}{X} = -\lambda$$

con $\lambda \geq 0$.

Hemos llegado así a una ecuación para $T(t)$, el *factor temporal*, y otra para $X(x)$, el *perfil espacial*

$$T_t + \lambda T^m = 0 \quad \text{y} \quad (2.13)$$

$$X_{xx}^m + \lambda X = 0 \quad (2.14)$$

Así, hemos reducido el problema de resolver una EDP en resolver dos EDO para un λ . En el **caso** $\lambda = 0$ recuperamos la EDO (2.5) ya resuelta en el apartado anterior, cuya solución estacionaria se presenta en (2.10). En el **caso** $\lambda > 0$ nos encontramos con un problema de autovalores clásico asociado a la ecuación (2.2) y son la base para estudiar el problema de Dirichlet por lo que quedan fuera del alcance de este trabajo. Para el estudio de las mismas se puede consultar [25] y [23]. Por último el **caso** $\lambda < 0$ proponemos una solución de variables separadas:

$$u(x, t) = c(t_0 - t)^{\frac{-1}{m-1}} x^\beta \quad (2.15)$$

donde debemos encontrar los valores de β y c para (2.15) sea solución.

Sustituyendo en (2.1) las derivadas temporales y espaciales, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{c}{m-1}(t_0 - t)^{-\frac{m}{m-1}}x^\beta = c^m m\beta(m\beta - 1)(t_0 - t)^{-\frac{m}{m-1}}x^{m\beta-2}$$

de donde igualando exponentes y coeficientes obtenemos los valores de c y β :

$$c = \left(2m \frac{m+1}{m-1}\right)^{\frac{-1}{m-1}} \quad y \quad \beta = \frac{2}{(m-1)} \quad (2.16)$$

Para esa pareja de valores c y β se satisfacen tanto la EDO (2.13) y la EDO (2.14), el λ buscado es:

$$\lambda = -\frac{2m(m+1)}{(m-1)^2} \quad (2.17)$$

Así, hemos obtenido una solución a (2.2) que muestra un primer ejemplo de solución no global, ya que existe únicamente para $t < t_0$ y tiende a infinito a medida que t se aproxima a ese valor. Este tipo de soluciones se conocen como soluciones de *blow-up* ya que explotan en un tiempo finito.

Este tipo de soluciones de *blow-up* se pueden utilizar junto al principio de comparación para probar que no existen soluciones globales en t para datos con crecimiento mayores que $\mathcal{O}((x)^{\frac{2}{m-1}})$, se puede obtener más información sobre este tipo de soluciones en [25].

2.3. Ondas viajeras

En este apartado vamos a plantear y estudiar un tipo de soluciones que tienen la forma de una onda viajera, esto es una solución que no cambia su forma al desplazarse en el espacio.

Proponemos una solución para (2.2) de tipo onda viajera con la forma:

$$u(x, t) = f(\eta) = f(x - ct) \quad (2.18)$$

con $\eta = x - ct$, donde f es una función que depende de η .

Para verificar que (2.18) es solución de (2.2) sustituimos $f(\eta)$ en (2.2) y tomamos $c > 0$, de ese modo buscamos la EDO que ha de verificar $f(\eta)$. Luego, calculando las derivadas y sustituyendo obtenemos que el perfil $f(\eta)$ ha de verificar:

$$(f^m)'' + cf' = 0 \quad (2.19)$$

Integrándola llegamos a:

$$(f^m)' + cf = K \quad (2.20)$$

donde K es una constante de integración. Buscando una solución físicamente realista de (2.2), consideramos que la onda avanza hacia una región 'vacía' donde $f(\eta)$ y $f'(\eta)$ deben tender a cero cuando η es grande. Esto nos lleva a imponer la condición $K = 0$, así obtenemos:

$$mf^{m-1}f' + cf = 0 \quad (2.21)$$

operando en esta expresión e integrando llegamos fácilmente a

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1} = K_0 - c\eta = c(\eta_0 - \eta) \quad (2.22)$$

Aparentemente, parece que hemos tenido éxito al integrar esta ecuación, pero si nos detenemos a observar, el resultado anterior no cumple la condición de contorno cuando $\eta \rightarrow \infty$, ya que no tiende a cero, sino que se hace negativa, lo cual físicamente no tiene sentido en (2.2).

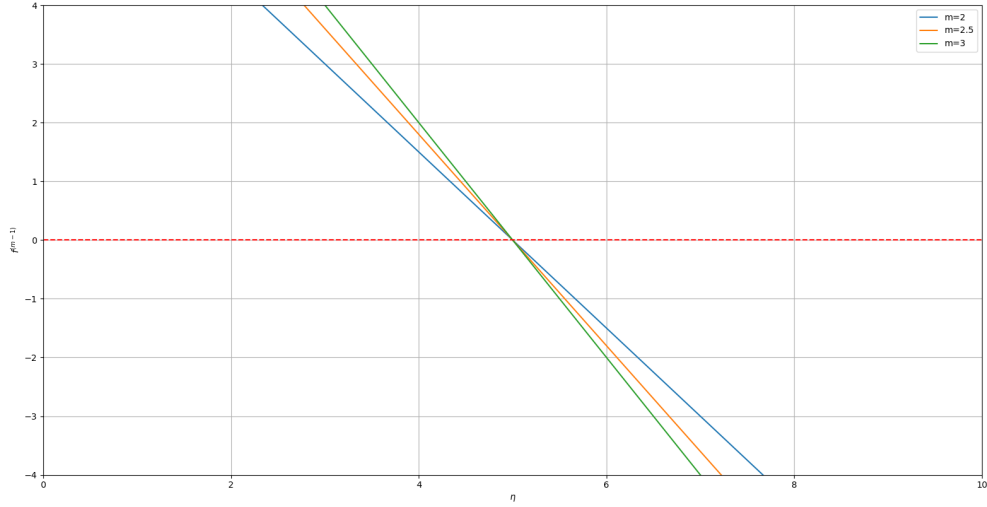


Figura 2.2: f^{m-1} vs η para distintos valores de m , con los valores $\eta_0 = 5$ y $c = 3$.

En este punto podemos tomar dos caminos:

1. Truncar la solución obtenida.
2. Tomar el enfoque de *problema límite* donde buscaremos resolver un problema similar y haciendo el posterior paso al límite recuperar el problema original.

Incluimos aquí el *camino 1*. El *camino 2* lo exponemos completo en los anexos. Entonces, siguiendo el *camino 1* buscamos la solución $u(x, t)$ y truncando (2.22).

Podemos calcular la expresión de $u(x, t)$ a partir de $f(\eta)$, para ello partimos de f expresado en términos de η y despejamos f

$$f^{m-1} = \max \left\{ \frac{m-1}{m} c(\eta_0 - \eta), 0 \right\} = \left(\frac{m-1}{m} c(\eta_0 - \eta) \right)_+ \quad (2.23)$$

Despejamos f elevando ambos términos a la potencia $\frac{1}{m-1}$:

$$f(\eta) = \left(\frac{m-1}{m} c(\eta_0 - \eta) \right)_+^{\frac{1}{m-1}}$$

Dado que $u(x, t) = f(\eta) = f(x - ct)$ obtenemos:

$$u(x, t) = \left(\frac{m-1}{m} c(\eta_0 - x + ct) \right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.24)$$

que es la solución de las ondas viajeras a (2.2).

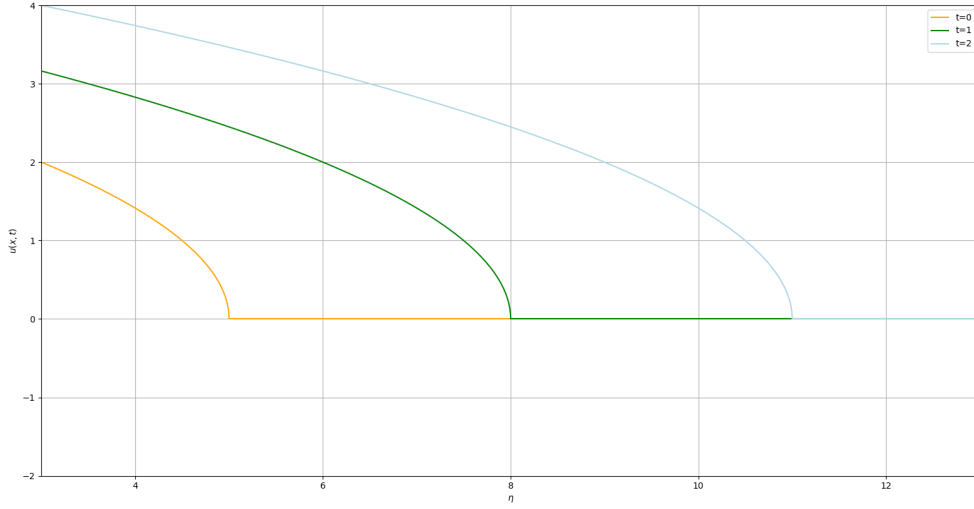


Figura 2.3: Gráfica de $u(x, t) = \left(\left(\frac{m-1}{m} c(\eta_0 - x + ct) \right) \right)_+^{\frac{1}{m-1}}$ para $m = 3$ con $\eta_0 = 5$ y $c = 3$ y para distintos instantes de tiempo.

Como vemos en la gráfica anterior nuestra solución tiene una frontera $s(t)$ claramente determinada que aparecen cuando $u(x, t) = 0$, y esta frontera se va desplazando a medida que avanza el tiempo.

Definiremos las *fronteras libres* que delimitan el soporte de la solución en un instante $t > 0$. Estas fronteras corresponden a las interfases de que acotan el soporte de $u(x, t)$ tanto por abajo como por arriba.

Denotaremos por $s_-(t)$ la frontera inferior, definida como:

$$s_-(t) = \inf\{x : u(x, t) > 0\}$$

es decir, $s_-(t)$ representa el valor más pequeño de x para el cual la solución es estrictamente positiva en el instante t .

De manera similar definiremos la frontera superior como $s_+(t)$, dada por:

$$s_+(t) = \sup\{x : u(x, t) > 0\}$$

donde $s_+(t)$ indica el valor más grande de x para el cual $u(x, t)$ sigue siendo positivo.

Si la condición inicial es tal que $u_0(x) > 0$ para todo $x < s_+$, entonces podemos asumir que $s_-(t) = \infty$.

La frontera la encontramos imponiendo $u(x, t) = 0$ y así obtenemos:

$$s_+(t) = \eta_0 + ct \quad (2.25)$$

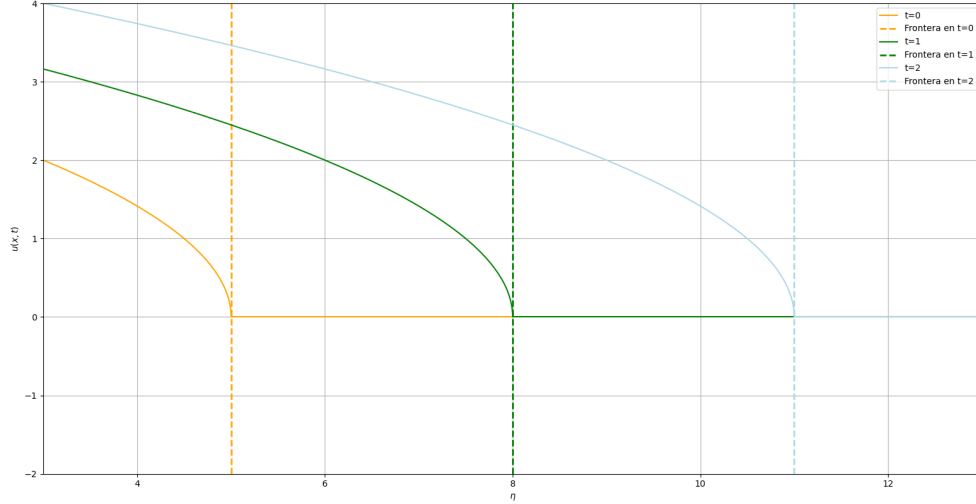


Figura 2.4: Gráfica de $W(x, t)$ y su frontera para varios instantes de tiempo.

Así hemos encontrado en este tipo de soluciones lo que anticipamos en la introducción del estudio matemático, la frontera libre. En este punto por completitud podemos verificar que se cumple la Ley de Darcy, que relaciona la velocidad de la frontera con el gradiente de presión en ella. La ley de Darcy en una dimensión se puede escribir como:

$$s'_+(t) = -v_x(x, t) \quad (2.26)$$

donde $v(x, t)$ es la presión y se calcula a partir de la expresión $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$ y obtenemos $v(x, t) = c(\eta_0 - x + ct)$.

Es inmediato comprobar que, se verifica la Ley de Darcy:

$$(s(t)_+)' = c = -v(x, t)_x \quad (2.27)$$

Observamos nos encontramos en presencia de un fenómeno de propagación a velocidad finita y coexistencia de dos regiones: la ocupada por el fluido y la vacía, separadas por una frontera libre sobre la cual la solución no es regular.

En los anexos se incluye otro enfoque que permite resolver el problema mediante problemas aproximados que no degeneran y cuyas soluciones convergen a la solución buscada.

Este enfoque se utiliza en otros contextos en la teoría de existencia de soluciones.

Este tipo de soluciones interviene en la teoría de existencia de soluciones para datos no acotados junto a las soluciones estacionarias (2.11) y a las soluciones de blow-up (2.15).

2.4. Soluciones autosemejantes. Solución fundamental de Barenblatt

Las soluciones autosemejantes juegan un papel fundamental en este trabajo, ya que nos permiten describir el comportamiento asintótico del resto de las soluciones de la EMP.

Este tipo de soluciones se mantienen invariantes bajo ciertas transformaciones de escala. Estas soluciones son 'semejantes a si mismas' en el sentido de que al realizar un cambio de escala, la forma de la solución no cambia. El cambio de escala es del tipo:

$$u' = f(x')$$

con

$$u' = ut^\alpha \text{ y } x' = xt^{-\beta}$$

Los exponentes α y β son conocidos como exponenets de semejanza y la función f es lo que llamamos el perfil.

Aunque existen diversos pares de exponentes α y β que pueden proporcionar soluciones válidas, nos interesa buscar la *solución fundamental* que garantiza la conservación de la masa. Aunque estas soluciones son conocidas [5] incluiremos aquí su construcción detallada, empezamos tomando u autosemejante (al tener especial importancia estas soluciones, las denotaremos con la letra propia W):

$$W(x, t) = t^{-\alpha} f(\eta) \tag{2.28}$$

con $\eta = xt^{-\beta}$.

Luego sustituimos esta forma en (2.2) y obtenemos al desarrollar las derivadas:

$$t^{-\alpha-1}(-\alpha f(\eta) - \beta \eta f') = t^{-\alpha m} t^{-2\beta} (f^m(\eta))''$$

Para eliminar la dependencia temporal, podemos igualar los exponenets en la expresión anterior y así obtenemos la relación que han de verificar α y β :

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1 \tag{2.29}$$

Así para el perfil f nos queda la ecuación elíptica no lineal:

$$(f^m)'' + \beta \eta (f)' + \alpha f = 0 \tag{2.30}$$

que aun depende del parámetro libre (α ó β).

El valor de β puede ser fijado utilizando una ley de conservación, usaremos la conservación de la masa.

$$\frac{d}{dt} \int_B u dx = \int_B u_t dx = \int_B u_{xx}^m dx = \int_{\partial B} u_n^m dS \rightarrow 0$$

cuando $r \rightarrow \infty$, donde $B = B_r(0)$ es la bola de radio r . Particularizando a la solución autosemejante obtenemos:

$$\int W(x, t) dx = \int t^{-\alpha} f(xt^{-\beta}) dx = t^{-\alpha} t^\beta \int f(\eta) d\eta = K(t)$$

lo que implica necesariamente que $\alpha = \beta$.

La conservación de la masa en nuestra solución no ha impuesto la condición de que la tasa de decaimiento de la solución y la tasa a la que evoluciona la frontera han de ser iguales. Así, la disminución de la altura de la solución es proporcional a la tasa de expansión del soporte de la solución.

Usando (2.29) obtenemos que los exponentes α y β han de tomar los valores:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{(m-1) + 2}$$

Una vez que conocemos los valores de α y β volvemos a la ecuación del perfil que queda en función del parámetro β :

$$(f^m)'' + \beta \eta f' + \beta f = 0 \quad (2.31)$$

que se puede integrar de manera sencilla y obtenemos:

$$(f^m)' + \beta \eta f = K$$

Dado que queremos $f \rightarrow 0$ cuando $\eta \rightarrow \infty$ tomamos $K = 0$, e integrando llegamos a

$$f^{m-1} = A - \frac{\beta(m-1)}{2m} \eta^2$$

siendo A una constante de integración.

Analizando la expresión matemática de f^{m-1} observamos que es una parábola invertida. Como buscamos soluciones no negativas de nuestro problema, nos encontramos en una situación similar a la que nos encontramos en ondas viajeras, que solventaremos, al igual que en dicho caso, truncando el perfil. Provocando la aparición de la frontera libre de las soluciones construidas a partir del perfil y la falta de regularidad de las mismas en ella.

Así nuestro perfil queda definido como:

$$f = \max\{(A - b|\eta|^2)^{\frac{1}{m-1}}, 0\} = (A - b|\eta|^2)_+^{\frac{1}{m-1}}$$

con

$$b = \frac{\beta(m-1)}{2m}$$

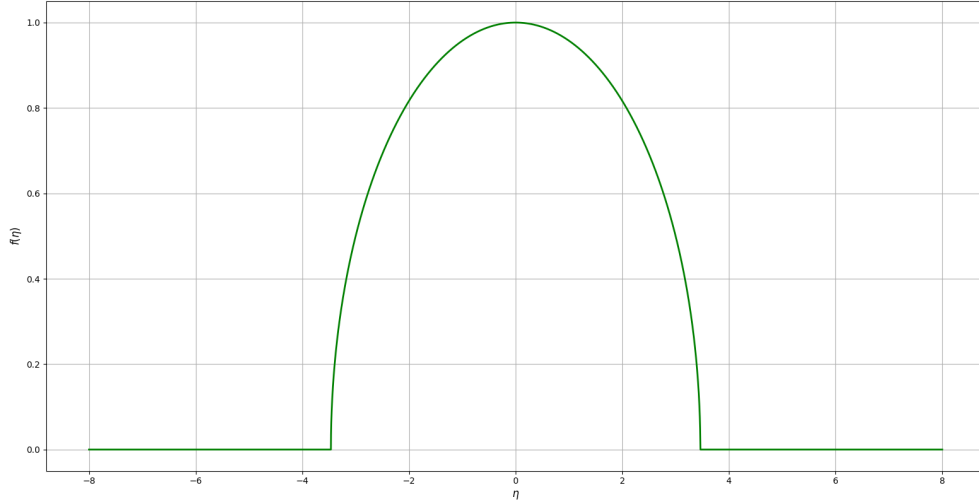


Figura 2.5: Representación del perfil $f(\eta)$ para unos valores de $A = 1$, $m = 3$ y $\beta = 0,25$.

Podemos obtener la solución autosemejante $W(x, t)$ a partir del perfil $f(\eta)$ haciendo uso de $\eta = xt^{-\beta}$:

$$W(x, t) = t^{-\alpha} \left(A - \frac{\beta(m-1)}{2m} x^2 t^{-2\beta} \right)_+^{\frac{1}{m-1}}$$

También podemos hacer uso de que $\beta = \alpha$ para simplificar la expresión y escribirla en función de un único parámetro:

$$W(x, t) = t^{-\beta} \left(A - \frac{\beta(m-1)}{2m} x^2 t^{-2\beta} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.32)$$

Aunque esta solución toma diversos nombres en la literatura [25] nos referiremos a ella como solución de Barenblatt o simplemente Barenblatt [5]. Podemos obtener una familia bi-paramétrica de soluciones mediante traslaciones espaciales y temporales como se verá en la Sección 2.5.

$$W_A(x + X, t + K) = (t + K)^{-\gamma} \left(A - \frac{\gamma(m-1)}{2m} (x + X)^2 (t + K)^{-2\gamma} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.33)$$

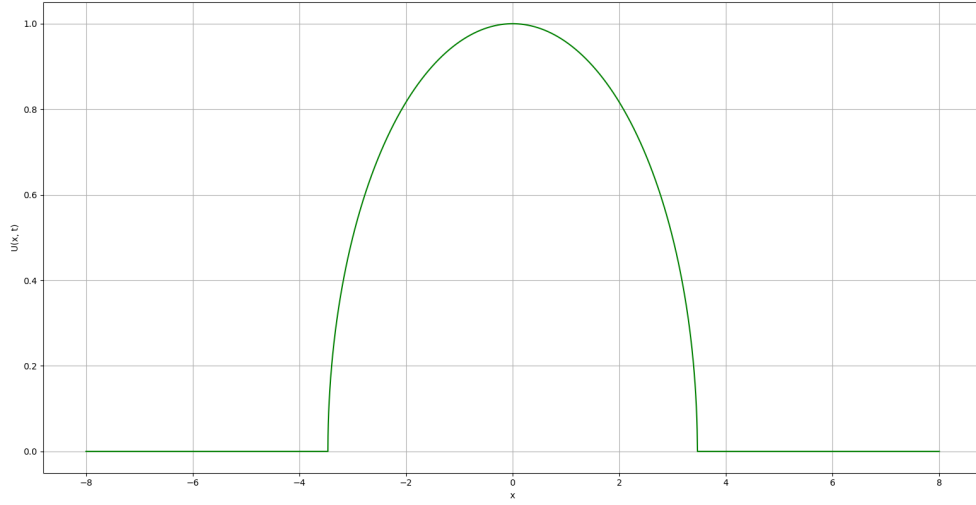


Figura 2.6: Solución de Barenblatt para los valores $m = 3$, $A = 1$, $\beta = \alpha = 0,25$ y $t = 1$.

Estas soluciones mantienen una masa constante en el tiempo como señalamos anteriormente:

$$M = \int_0^\infty W dx = \int_0^\infty f(\eta) d\eta = A^{\frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}} \int_0^\infty (1 - bs^2)^{\frac{1}{m-1}} ds$$

de lo que se deduce la relación entre A y la masa M

$$CA^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m-1}} = M$$

Además, se observa que la masa inicial se comporta como una delta de Dirac,

$$\lim_{t \rightarrow 0} W(x, t) = M\delta(x)$$

de forma que nuestra solución, describe la evolución de una distribución de masa M concentrada inicialmente en un punto.

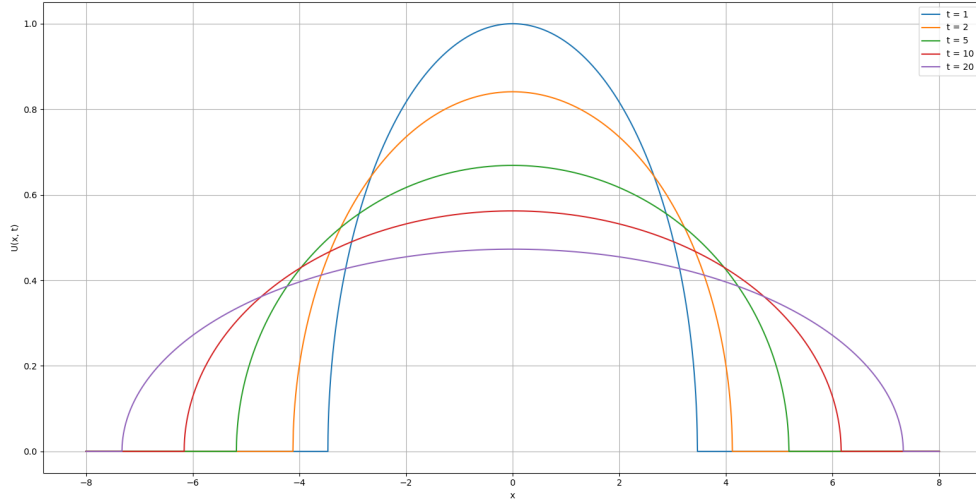


Figura 2.7: Evolución temporal de la solución de Barenblatt para distintos instantes de tiempo.

La gráfica muestra la evolución temporal de una solución de Barenblatt en distintos instantes de tiempo. Se observa claramente cómo la tasa a la que disminuye la solución es proporcional a la tasa a la que se expande el soporte ($\alpha = \beta$). Este fenómeno ilustra la difusión de la solución como era de esperar. También podemos apreciar cómo la masa de la solución se mantiene constante en cada instante de tiempo.

Al igual que ocurría en ondas viajeras, en esta solución de Barenblatt hemos encontrado otra vez la frontera libre, que se desplaza a una velocidad de propagación finita como se observa en la gráfica. Al conocer $W(x, t)$ podemos obtener la expresión de la frontera imponiendo la condición $W(x, t) = 0$:

$$W(x, t) = t^{-\beta} \left(A - \frac{\beta(m-1)}{2m} x^2 t^{-2\beta} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} = 0$$

Así, obtenemos la expresión de las fronteras:

$$s_{\pm}(t) = \pm \sqrt{\frac{2mA}{\beta(m-1)}} t^{\beta}$$

Por completitud al igual que hicimos en las ondas viajeras podemos comprobar si se verifica la Ley de Darcy. La presión v en la frontera toma la forma

$$v(x, t) = \frac{m}{m-1} t^{-\beta(m-1)} \left(A - \frac{\beta(m-1)}{2m} x^2 t^{-2\beta} \right)$$

su derivada espacial evaluada en frontera es:

$$v_x(x, t) = -\beta \left(\frac{2mA}{\beta(m-1)} \right)^{1/2} t^{-\frac{m}{m+1}}$$

y la derivada temporal de la frontera es:

$$s'_{\pm}(t) = \beta \left(\frac{2mA}{\beta(m-1)} t^{-\frac{m}{m+1}} \right)^{1/2}$$

y vemos que, efectivamente, se cumple la Ley de Darcy:

$$s'_{\pm}(t) = -v_x(x, t)|_{frontera}$$

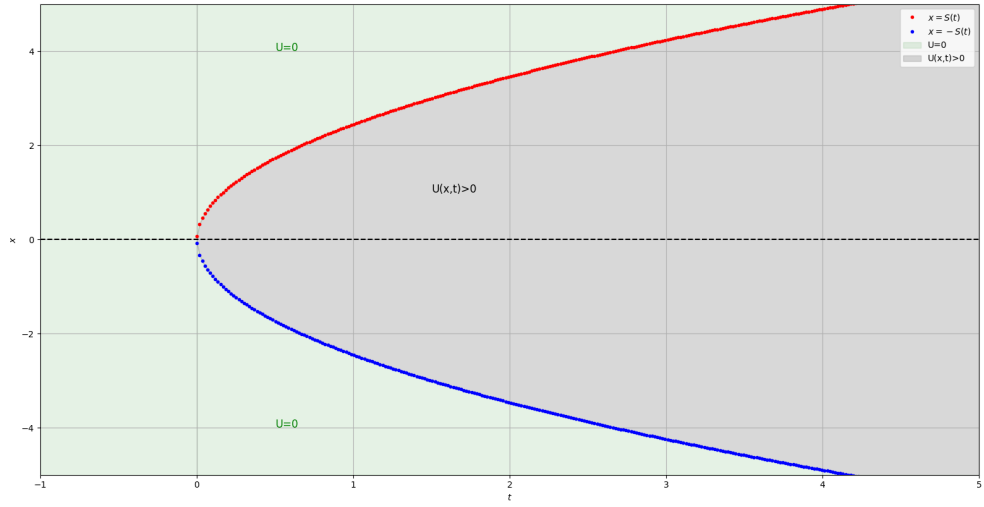


Figura 2.8: Evolución de la frontera de una Barenblatt

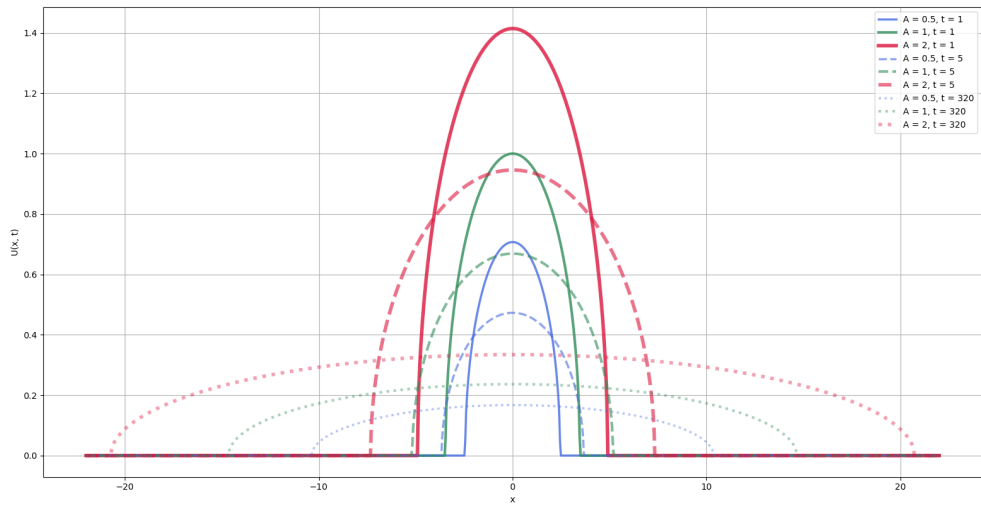


Figura 2.9: Gráfica de tres Barenblatt con distinta masa para distintos instantes de tiempo

Las soluciones de Barenblatt van a tener especial importancia en este trabajo ya que junto al principio de comparación nos van a permitir describir el comportamiento asintótico del resto de soluciones.

2.5. Invarianzas de la PME

En esta sección se van a presentar las invarianzas de la EMP, que nos serán útiles a la hora de estudiar el comportamiento asintótico.

2.5.1. Traslación temporal y espacial

Primero vamos a presentar las invariancias de la EMP bajo traslaciones temporales y espaciales. Para la una traslación temporal, definimos $v(x, s) = u(x, s + T)$ y mostramos que las derivadas v_s y $(v^m)_{xx}$ coinciden con u_t y $(u^m)_{xx}$, respectivamente, comprobando así que v satisface la ecuación. Similarmente, para una traslación espacial, definimos $w(y, t) = u(y + X, t)$ y verificamos que w_t y $(w^m)_{yy}$ también satisfacen la ecuación. Ambos resultados confirman la invariancia de la ecuación bajo estas traslaciones. Se pueden consultar de manera más extendida las propiedades de la ecuación en [25].

Estos grupos de transformaciones nos permiten obtener familias biparamétricas de soluciones a partir de soluciones especiales construidas en el apartado anterior.

2.5.2. Invarianza de Escala

La ecuación del medio poroso mantiene su forma bajo transformaciones de escala. Si $u(x, t)$ es una solución, la función escalada $w(x, t) = \left(\frac{q}{p^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} u(px, qt)$ también lo es. Esta invarianza permite generar familias de soluciones autosemejantes, como la solución de Barenblatt, que se expresa como $W(x, t; M, p, q) = \left(\frac{q}{p^2}\right)^{\frac{1}{m-1}} U(px, qt; M)$, donde M representa la masa total y U la solución original. Estas soluciones preservan propiedades como la conservación de masa y soporte compacto [1].

2.6. Principio de comparación

El **principio de comparación** que utilizaremos es el siguiente:

Principio 2.1. Sean $v_1(x, t)$ y $v_2(x, t)$ dos soluciones de la misma ecuación, con valores iniciales $v_{10}(x, 0)$ y $v_{20}(x, 0)$ respectivamente. Si se cumple $v_{10} < v_{20}$ entonces $v_1(x, t) < v_2(x, t)$ en todo el espacio $\mathbb{R}^{d=1} \times \mathbb{R}$.

2.7. Comportamiento asintótico de las soluciones de la EMP de difusión pura

En esta sección presentamos el estudio de la tasa de decaimiento de las soluciones y de la evolución de las fronteras libres. Aunque los resultados son conocidos, aportamos una demostración personal que es interesante pues es clara y además nos servirá también en el caso de absorción.

Utilizaremos las soluciones autosemejantes de Barenblatt y el principio de comparación.

Teorema 2.7.1. Sea $u(x, t)$ una solución con soporte compacto y acotada de (2.1). Entonces $\max\{u(x, t)\} = \mathcal{O}((1+t)^{-\frac{1}{m+1}})$ y $s_{u+}(t) = \mathcal{O}((1+t)^{\frac{1}{m+1}})$.

Demostración. Dado un dato inicial $u(x, t) = u_0$ cualquiera, puedo tomar un W_1 y un W_2 que son las soluciones (2.33) con $K = 1$ con una masa tal que $W_1(x, 0)$ sea menor que u_0 y $W_2(x, 0)$ sea mayor que u_0 :

$$W_1(x, 0) < u_0(x) < W_2(x, 0)$$

Donde usando el principio de comparación y estar las soluciones ordenadas obtenemos:

$$W_1(x, t) < u(x, t) < W_2(x, t)$$

De donde se concluye:

$$\max\{W_1(x, t)\} < \max\{u(x, t)\} < \max\{W_2(x, t)\} \quad \text{y}$$

$$s_{1+}(t) < s_{u+}(t) < s_{2+}(t)$$

(igual para la frontera izquierda: s_{1-}, s_{u-}, s_{2-}). □

Así podemos concluir que la tasa de decaimiento y la evolución de la frontera de cualquier solución $u(x, t)$ con dato acotado y de soporte compacto viene dada por el comportamiento de la solución de Barenblatt (2.32).

Por completitud, se hace referencia al artículo de J.L. Vázquez [24], donde se demuestra que en el límite cuando $t \rightarrow \infty$, cualquier solución de la EMP (2.1) con dato inicial acotado y soporte compacto converge a una Barenblatt con masa fija. Nuestra prueba utiliza como hipótesis que el centro de masa $x_0 = 0$, pero puede generalizarse sin dificultad, utilizando las soluciones autosemejantes obtenidas mediante traslaciones espaciales.

Distintos resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones, en los que se muestra la convergencia a las soluciones de Barenblatt pueden encontrarse en [22] y en el libro [25]

En este sentido, esta solución autosemejante está caracterizada por dos parámetros: la masa total M_0 y el centro de masa inicial x_0 . Esto implica que el perfil de cualquier solución $u(x, t)$ se aproxima cada vez más a una forma universal que depende solo de estos dos parámetros, independientemente de la forma exacta del dato inicial. El análisis muestra que el máximo de la solución decae con una tasa $\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{m+1}})$, mientras que las fronteras de la solución se expanden con una tasa $\mathcal{O}(t^{\frac{1}{m+1}})$, reflejando así el comportamiento asintótico controlado por las soluciones de Barenblatt.

Un contexto diferente en el que podemos apreciar este hecho, es el que se crea mediante el concepto de solución y ecuación reescalada que presentaremos a continuación. Además este enfoque nos será muy útil en el estudio de la EMP con absorción en el siguiente capítulo pues nos permitirá establecer los rangos de parámetros donde haremos nuestro estudio del comportamiento asintótico en función de la importancia de la absorción.

2.8. Soluciones reescaladas de la EMP y convergencias al perfil

En este contexto, se introduce un cambio de escala en las variables originales, de modo que la solución autosemejante (2.33) pasa a ser un perfil estacionario $f(\eta)$ de la nueva EDP reescalada al que convergera cualquier otra solución obtenida mediante el mismo cambio.

Las soluciones reescaladas son aquellas en las que multiplicamos a una solución $u(x, t)$ por una nueva escala, empezaremos introduciendo la función

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + t)^\alpha u(x, t) \quad (2.34)$$

donde $u(x, t)$ es una solución de la EMP. Hemos elegido el cambio de escala $\alpha = \frac{1}{m+1}$ ya que esperamos que el comportamiento asintótico de las soluciones está regido por las Barenblatt.

Definiendo las variables:

$$\tau = \ln(1 + t), \quad \eta = x(1 + t)^{-\alpha}$$

utilizando que

$$u(x, t) = \theta(\eta, \tau)(1 + t)^{-\alpha}$$

es solución de (2.1) y calculando las derivadas espaciales y temporales necesarias obtenemos que $\theta(\eta, \tau)$ es solución de la ecuación reescalada

$$\theta_\tau = (\theta^m)_{\eta\eta} + \theta_\eta \eta \alpha + \alpha \theta \quad (2.35)$$

Si comparamos con (2.31), observamos que tiene como soluciones estacionarias los perfiles de Barenblatt (2.32) y como soluciones especiales todas las obtenidas mediante el reescalado a partir de las soluciones autosemejantes trasladadas en x y en t .

Recordamos que el perfil de Barenblatt (2.32) es:

$$U(x, t) = t^{-\beta} \left(A - \frac{\beta(m-1)}{2m} x^2 t^{-2\beta} \right)_+^{\frac{1}{m-1}}$$

Utilizando las invarianzas de (2.1) presentadas (2.5) podemos crear familias de soluciones.

Traslación temporal

Haciendo uso de una traslación temporal en (2.32) obtenemos una familia de soluciones:

$$W_A(x, t + K) = (K + t)^{-\alpha} \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m} x^2 (K + t)^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.36)$$

con $K \in \mathbb{Z}^+$. Así hemos creado una familia de soluciones que denotamos como $W_A(x, t)$.

Partiendo de esta familia vamos a construir una solución para la nueva función de variables reescaladas $\theta(\eta, \tau)$ que definiremos como W_A^*

$$W_A^*(\eta, \tau) = (1 + t)^\alpha W_A(x, t + K)$$

Escribiéndola en función de las variables η y τ y simplificando llegamos a:

$$W_A^*(\eta, \tau) = (1 + (K - 1)e^{-\tau})^{-\alpha} \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m} \eta^2 (1 + (K - 1)e^{-\tau})^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

donde podemos introducir $K^* = K + 1$ y así obtener una expresión más compacta

$$W_A^*(\eta, \tau) = (1 + K^*e^{-\tau})^{-\alpha} \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m} \eta^2 (1 + K^*e^{-\tau})^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.37)$$

En el caso $K^* = 0$ obtenemos el perfil de Barenblatt. Para cualquier valor de K distinto de 1 lo que tenemos son perturbaciones del perfil que a medida que τ crece tienden al perfil original.

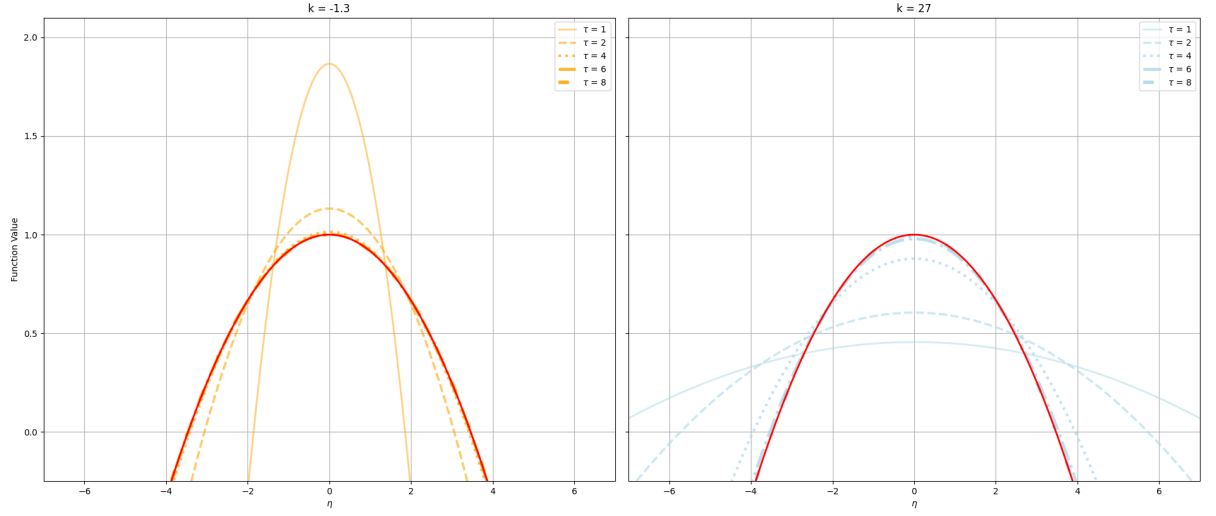


Figura 2.10: Gráfica que muestra la convergencia de este tipo de soluciones creadas a partir de una Barenblatt trasladada en t al perfil de Barenblatt con una masa fija.

Independientemente de las condiciones iniciales el sistema evoluciona llegando a un estado estable en el que el sistema converge hacia una distribución de temperatura que solo depende de η y coincide con el perfil de Barenblatt. Vemos como la solución estacionaria se comporta como un atractor.

Cuando $\tau \rightarrow \infty$ la expresión resultante es:

$$W_A^*(\eta, \tau) = \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m} \eta^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

que es precisamente el perfil de una Barenblatt con masa $M = CA^{\frac{1}{m-1} + \frac{1}{2}}$ con $C = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\alpha(m-1)}{2m} s^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} ds$.

El resultado óptimo se recoge en [25] donde se demuestra esta convergencia al perfil de Barenblatt, para llegar a ese resultado deberíamos de completar con una teoría de estabilidad. Aquí se ha ilustrado como efectivamente estas soluciones reescaladas convergen a ese perfil.

Traslación espacial

Partiendo de (2.34) vamos a ilustrar la convergencia del perfil tras aplicar una traslación espacial. Haciendo uso de una traslación espacial en (2.32) obtenemos una familia de soluciones:

$$W_A(x + X, t) = (1 + t)^{-\alpha} \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m} (x + X)^2 (1 + t)^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

Realizando cálculos similares a los del apartado anterior llegamos a:

$$\theta(\eta, \tau) = \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m}(\eta + Xe^{-\alpha\tau})^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.38)$$

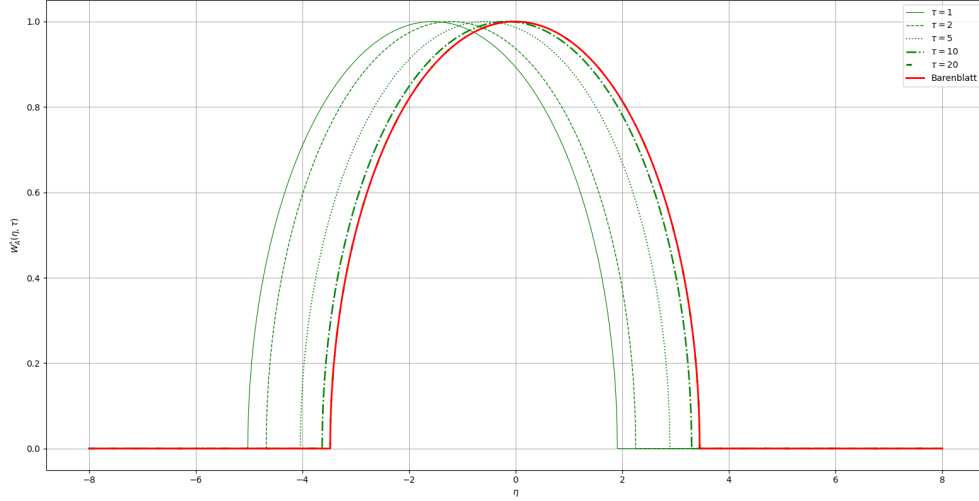


Figura 2.11: Gráfica en la que aprecia la convergencia de este tipo de soluciones creadas a partir de una Barenblatt trasladada en x al perfil de Barenblatt con una masa fija.

Cuando $\tau \rightarrow \infty$, $e^{-\alpha\tau} \rightarrow 0$, y la solución converge al perfil de Barenblatt:

$$\theta(\eta, \tau) \rightarrow \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m}\eta^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

Familia biparametrica

Por completitud, podemos agrupar los resultados de la traslación espacial y temporal en una familia de soluciones biparamétrica. Así consideramos:

$$W_A(x + X, t + K) = (t + K)^{-\alpha} \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m}(x + X)^2(t + K)^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

Reescalamos esta solución:

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + t)^\alpha W_A(x + X, t + K)$$

Usando las variables reescaladas η y τ y simplificando obtenemos:

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + e^{-\tau}(k-1))^{-\alpha} \left(A - \frac{\alpha(m-1)}{2m} \left(\eta \left(\frac{e^\alpha}{e^\alpha + (K-1)} \right)^\alpha + \frac{X}{(e^\alpha + (K-1))^\alpha} \right)^2 \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (2.39)$$

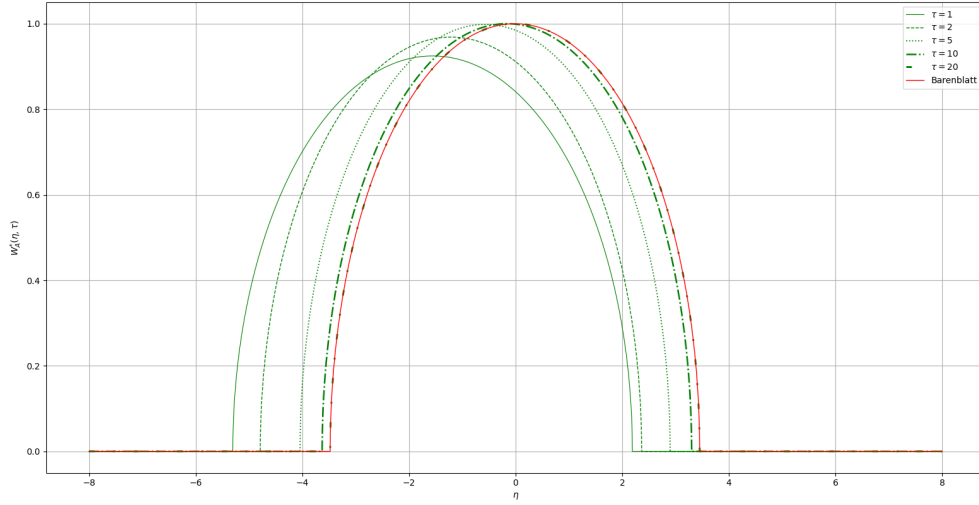


Figura 2.12: Solución reescalada creada a partir de una familia de soluciones trasladadas en x y en t para distintos instante de tiempo τ

A tiempos largos $\tau \rightarrow \infty$:

$$(1 + e^{-\tau}(k - 1))^{-\alpha} \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \left(\eta \left(\frac{e^\alpha}{e^\alpha + (K - 1)} \right)^\alpha + \frac{X}{(e^\alpha + (K - 1))^\alpha} \right)^2 \rightarrow \eta$$

Así cuando $\tau \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\theta(\eta, \tau) \rightarrow \left(A - \frac{\alpha(m - 1)}{2m} \eta^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

Esto ilustra que las soluciones reescaladas convergen a un perfil de Barenblatt con masa fija.

En realidad, los resultados de comportamiento asintótico en JLV, permiten concluir que en estas variables reescaladas **cualquier solución converge a un perfil de Barenblatt**.

Capítulo 3

EMP con absorción

En este capítulo, vamos a estudiar el problema principal el trabajo (1). Como recordatorio se vuelve a escribir a continuación:

$$u_t = \Delta u^m - u^p, \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \text{ en } \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

La ecuación de estudio en una dimensión es:

$$u_t = (u^m)_{xx} - u^p, \text{ en } \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Recordamos que la motivación para de incluir un término de absorción en la ecuación del medio poroso es ampliar el rango de uso de la EMP y así poder modelar situaciones donde nos encontremos pérdidas de nuestro fluido (sumideros).

La existencia, unicidad y propiedades de las soluciones generalizadas de (3.3) se puede consultar en [12], [14] y [16]. El comportamiento asintótico de las soluciones y sus interfaces ha sido estudiado para diferentes valores del exponente de absorción p (principalmente cuando $p > 1$) y se puede consultar en [3], [15] y [16]. El estudio de la regularidad de las soluciones y la frontera se puede encontrar en [18] y en [21].

Para entender la influencia del nuevo término de absorción seguiremos un planteamiento similar al capítulo anterior, presentaremos algunas soluciones especiales que serán útiles en el desarrollo de la teoría. En particular demostraremos que hay varios rangos donde el comportamiento de las soluciones es diferente. Esos rangos son $1 < p < m$, $m < p < m + 2$ y $p > m + 2$

Posteriormente, la obtención de las ecuaciones reescaladas nos permitirá establecer los diferentes rangos de parámetros m y p . Por último, la obtención de estimaciones a priori, nos llevará a establecer el efecto de la absorción en las soluciones para tiempos largos en cada uno de los regímenes encontrados, dando en particular las tasas de decaimiento de las soluciones y de las fronteras libres en cada caso, lo que nos permitirá comparar con los resultados obtenidos en el caso de difusión pura.

Los resultados obtenidos se pueden extender de manera sencilla al caso N -dimensional debido a que las técnicas empleadas son válidas también en dicho contexto.

3.1. Familia de soluciones planas

Empezamos buscando soluciones homogéneas de la forma $u(x, t) = U(t)$ por lo que proponemos:

$$U(t) = c^*(k + t)^{-\alpha} \quad (3.4)$$

Calculando las derivadas de $U(t)$ y operando, se llega fácilmente a que c^* y α han de tomar los siguientes valores para que (3.4) sea solución:

$$\alpha = \frac{1}{p-1} \quad \text{y} \quad c^* = \alpha^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{p-1} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Este análisis proporciona una solución especial $U(t)$ que satisface (3.3) y queda de la forma:

$$U(t) = c^*(k + t)^{-\alpha} \quad (3.5)$$

El comportamiento de esta solución depende del parámetro p que representa la absorción en el sistema, se observa que a medida que el parámetro p aumenta el efecto de la absorción disminuye. Independientemente del valor de p la solución siempre decrece con el tiempo, cosa que no ocurre en la de difusión pura que se mantiene constante.

Tendrá importancia en el estudio del comportamiento asintótico y unicidad de las soluciones [13] y proporcionará la tasa de decaimiento en los rangos de parámetros en los que la absorción comienza a tener importancia frente a la difusión.

3.2. Familias de soluciones estacionarias

Al igual que en el caso de difusión pura, procedemos a buscar soluciones estacionarias de (3.3), para ello se propone una solución similar a la encontrada en el caso sin absorción:

$$u(x, t) = U(x) = cx^\gamma \quad (3.6)$$

Para hallar los valores que han de tomar c y γ para que (3.6) sea solución, calculamos las derivadas e igualando exponentes y coeficientes encontramos las relaciones que han de verificar c y γ :

$$c = (m\gamma(m\gamma - 1))^{\frac{1}{p-m}} = \left(\frac{2m}{m-p} \left(\frac{m+p}{m-p} \right) \right)^{\frac{1}{p-m}} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{2}{m-p}$$

Hemos encontrado un conjunto de valores de γ y c que verifican que (3.6) sea solución de (3.3) con la única condición de que $p \neq m$.

La solución entonces es:

$$U(x) = \left(\frac{2m}{m-p} \left(\frac{m+p}{m-p} \right)^{\frac{1}{p-m}} \right) x^{\frac{2}{m-p}} \quad (3.7)$$

El comportamiento de (3.8) varía en función del rango de parámetros en el que nos encontremos. Cuando $p = m$ encontramos que la solución es de tipo exponencial $U(x) = \mathcal{O}(Ae^{+\frac{x}{m}})$.

Usando las propiedades de la ecuación, podemos realizar una traslación espacial y así construir una familia de soluciones

$$U(x+X) = \left(\frac{2m}{m-p} \left(\frac{m+p}{m-p} \right)^{\frac{1}{p-m}} \right) (x+X)^{\frac{2}{m-p}} \quad (3.8)$$

Estas soluciones juegan un papel importante en la teoría de existencia para datos no acotados y unicidad de soluciones globales, estos temas se pueden consultar en [13].

3.3. Soluciones autosemejantes con soporte compacto

En este apartado, exploramos las soluciones autosemejantes del problema de Cauchy (3.1)-(3.2) basándonos en el trabajo de Peletier [20]. Este estudio presenta las condiciones bajo las cuales existen o no soluciones autosemejantes en este rango de parámetros para una pareja p y m .

En el artículo se muestra que si $m > 1$ entonces (3.1)-(3.2) admite únicamente una solución autosemejante no negativa y distinta de la trivial de soporte compacto en el rango de parámetros:

$$m < p < m + 2$$

Una solución autosemejante es de la forma:

$$W(x, t) = (1+t)^{-\alpha} f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = x(1+t)^{-\beta} \quad (3.9)$$

Al calcular las derivadas y sustituir en (3.1) encontramos que para que (3.9) sea solución de (3.1) los parámetros α y β han de tomar los valores:

$$\alpha = \frac{1}{p-1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{p-m}{2(p-1)}$$

y el perfil ha de verificar la EDO:

$$(f^m)'' + \beta \eta f' + \alpha f - f^p = 0 \quad (3.10)$$

En [20] los autores enuncian el siguiente resultado que nos garantiza la existencia de soluciones autosemejantes en el rango de parámetros $m < p < m + 2$:

Teorema 3.3.1. Suponiendo que $m \geq 1$, $f'(0) = 0$ y $m < p < m + 2$. Existe una solución f no negativa a (3.10) de soporte compacto.

Además, prueban que dicha solución es simétrica, decreciente para $\eta > 0$ y no negativa obteniendo que no es una solución en sentido clásico ya que cuando $f(\eta_0) = 0$, perdemos la regularidad y nos lleva a expandir nuestro concepto de solución.

$$f(\eta) = \begin{cases} > 0 & \text{para } -\eta_0 < \eta < \eta_0, \\ = 0 & \text{para en el resto.} \end{cases}$$

Esto nos lleva a la aparición de una frontera libre al igual que en el caso de las Barenblatt.

$$s(t) = \eta_0(1 + t)^\beta \quad (3.11)$$

En una sección posterior se estudiarán con más detalle este tipo de soluciones autosemejantes en el rango $m < p < m + 2$ y se presentará una aproximación numérica utilizando el método de Shooting que será la responsable de describir el comportamiento asintótico de las soluciones en este rango de parámetros.

Estas soluciones autosemejantes, en general, como ya hemos visto en la EMP, son importantes al describir el comportamiento asintótico de las soluciones. Esto nos lleva a preguntarnos qué ocurre para el rango de valores de p y m en los que no existen. En las siguientes secciones buscamos dar respuesta a estas preguntas y daremos estimadores sobre el comportamiento asintótico en un rango de parámetros diferentes.

3.4. Relevancia de la absorción en el comportamiento asintótico de las soluciones.

A lo largo de la sección, determinaremos los rangos de parámetros m y p en los que las soluciones tendrán distintos comportamientos en función de la importancia de la absorción, y deduciremos el comportamiento asintótico en cada uno de los casos.

Comenzaremos el estudio en el rango de parámetros en los que predomina el término de difusión frente al de absorción y para tiempos largos es la EMP de difusión pura la que rige el comportamiento de las soluciones, fenómeno conocido como "simplificación asintótica". En este caso, el comportamiento de las soluciones vendrá determinado por las soluciones autosemejantes de la EMP de difusión pura, que reciben el nombre de 'soluciones autosemejantes aproximadas' de la ecuación.

Continuaremos estudiando el rango en el que la absorción empieza a tener más importancia frente a la difusión y aparecen las soluciones autosemejantes que nos darán el comportamiento asintótico.

Por último, la absorción será todavía más importante y nos encontraremos el fenómeno de localización.

3.4.1. Simplificación asintótica I: $p > m + 2$

Para comprender y confirmar cuál es el rango de parámetros en los que el término de difusión rige el comportamiento asintótico de las soluciones, podemos reescalar la ecuación y las soluciones utilizando el cambio de escala asociado a la EMP de difusión pura que introducimos en 2.8. Así introducimos el cambio:

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + t)^\gamma u(x, t)$$

con las nuevas variables

$$\tau = \ln(1 + t), \quad \eta = x(1 + t)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{m + 1}$$

sugerido por las soluciones autosemejantes de la ecuación de difusión pura. Donde $u(x, t)$ es solución de (3.1).

Buscamos la ecuación para el perfil θ . Para ello calculamos las derivadas necesarias en función de las nuevas variables y sustituimos en (3.1), simplificando llegamos a la ecuación para el perfil:

$$\theta_\tau = (\theta^m)_{\eta\eta} + \theta_\eta \eta \gamma + \gamma \theta - e^{\frac{-(p-m-2)}{m+1}\tau} \theta^p \quad (3.12)$$

Podemos apreciar, supuestas las estimaciones necesarias en θ , como en este regimen el término de absorción $-e^{\frac{-(p-m-2)}{m+1}\tau} \theta^p$ es despreciable frente al resto de términos de la ecuación (3.12) para tiempos grandes con θ acotada. Esto es así pues cuando $p > m + 2$ el exponente de (3.12) es siempre negativo y la exponencial decreciente.

$$e^{\frac{-(p-m-2)}{m+1}\tau} \theta^p \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \rightarrow \infty$$

quedando la misma ecuación del perfil que la encontrada en el caso de difusión pura

$$\theta_\tau = (\theta^m)_{\eta\eta} + \theta_\eta \eta \gamma + \gamma \theta$$

Entonces en este caso es de esperar que el comportamiento asintótico de las soluciones de la EMP con absorción (3.1) venga dado por la EMP de difusión pura (2.2). Esto se conoce como simplificación asintótica. Las soluciones de Barenblatt son las responsables de describir el comportamiento asintótico de las soluciones de (3.1) en este rango de parámetros.

Estimaciones a priori

En este apartado buscamos establecer las estimaciones a priori que nos permitirán deducir el comportamiento asintótico en el caso $p > m + 2$ para ello necesitamos enunciar un teorema similar al utilizado para la EMP de difusión pura. En particular, analizaremos

las tasas de decaimiento de las soluciones y el comportamiento de la frontera libre para tiempos largos

Las herramientas fundamentales que nos permitirán obtener el resultado es la el principio de comparación y la construcción de supersoluciones y subsoluciones apropiadas de (3.1)-(3.2) a partir de las soluciones autosemejantes de la EMP de difusión pura. Debido al término de absorción la mayor dificultad se encuentra en la construcción de subsoluciones que muestren el comportamiento asintótico requerido.

Teorema 3.4.1. Sea $u(x, t)$ una solución con soporte compacto y acotada de (3.1)-(3.2) con dato inicial u_0 continuo y acotado y con soporte compacto en el rango de parámetros $p > m + 2$. Entonces $\max\{u(x, t)\} = \mathcal{O}((1+t)^{-\frac{1}{m+1}})$ y $s_{u+}(t) = \mathcal{O}((1+t)^{\frac{1}{m+1}})$.

Demostración. Suponemos sin pérdida de generalidad, que u_0 en el dominio y positividad y que $x = 0$ pertenece al dominio de positividad de u_0 , ya que las pruebas son válidas para cualquier x_0 (traslación espacial o temporal).

Consideramos una solución de $u(x, t)$ de (3.1)-(3.2) que en el instante inicial toma el valor $u(x, 0)$

Para construir la **supersolución** $\bar{u}(x, t)$, proponemos una solución de Barenblatt $W_M(x, t)$ con un M lo suficientemente grande para que en el instante inicial se cumpla:

$$u_0(x) < \bar{u}(x, 0) \quad (3.13)$$

Así es evidente comprobar que, al ser $\bar{u}(x, t)$ solución de (2.2) se tiene que $\bar{u}(x, t)$ ha de cumplir:

$$\mathcal{L}(\bar{u}) = \bar{u}_t - (\bar{u}^m)_{xx} + \bar{u}^p = \bar{u}^p \geq 0 \quad (3.14)$$

y por lo tanto, hemos encontrado que $W_M(x, t)$ es una supersolución de (3.1).

Aplicando el principio de comparación, teniendo en cuenta (3.13) que están ordenadas para todo tiempo, obtenemos las cotas superiores

$$\max\{u(x, t)\} < \max\{W_M(x, t)\} \quad \text{y} \quad (s_u)_+(t) < (s_{W_M})_+(t) \quad (3.15)$$

Para construir la **subsolución** proponemos una perturbación de una Barenblatt $W_m(x, t)$ con un m lo suficientemente pequeña para que se cumpla:

$$W_m(x, 0) < u_0(x) \quad (3.16)$$

(en los cálculos la denotaremos simplemente W para no confundir con el exponente de difusión)

$$\underline{u} = h(t)W_m(\bar{x}, t) \quad \text{con} \quad \bar{x} = xh^\gamma(t) \quad (3.17)$$

Donde $h(t)$ ha de cumplir las condiciones:

- $h(t)$ es decreciente.
- $h \rightarrow C < 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- $h(t) < 1$ para todo t .

Así para que $\underline{u}(x, t)$ sea subsolución debe cumplir:

$$\mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{u}_t - (\underline{u}^m)_{\bar{x}\bar{x}} + \underline{u}^p \leq 0 \quad (3.18)$$

Las derivadas correspondientes a los términos presentes en (3.1) son:

$$\underline{u}_t = h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t$$

$$(\underline{u}^m)_{\bar{x}\bar{x}} = h^m h^{2\gamma} W_{\bar{x}\bar{x}}^m$$

$$\underline{u}^p = h^p W^p$$

obteniendo

$$\mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{u}_t = h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t - h^m h^{2\gamma} W_{\bar{x}\bar{x}}^m + h^p W^p$$

Donde si usamos que W es solución de (2.1) e imponemos $1 = m + 2\gamma$ tenemos

$$\mathcal{L}(\underline{u}) = h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + h^p W^p$$

usando las propiedades de $h(t)$ tenemos

$$h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + h^p W^p < hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + W(h' + (1+t)^{-\frac{p-1}{m+1}})$$

calculamos el h que verifique $h' + (1+t)^{-\frac{p-1}{m+1}} = 0$ y obtenemos

$$h(t) = \frac{m+1}{p-m-2}(1+t)^{-\frac{p-1}{m+1}} + K$$

Donde K ha de ser lo suficientemente pequeño para que se siga verificando (3.16). Así sustituyendo y utilizando las propiedades de W y h obtenemos que

$$\mathcal{L}(\underline{u}) = hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' = \gamma h' \bar{x} W_{\bar{x}} < 0 \quad (3.19)$$

Usando el principio de comparación junto a (3.16)-(3.19) tenemos

$$u(x, t) > \underline{u}(x, t) \quad (3.20)$$

que implica

$$\max\{W_m(x, t)\} < \max\{u(x, t)\} \quad \text{y} \quad (S_{W_m})_+(t) < (S_u)_+(t) \quad (3.21)$$

Juntando los resultados (3.21) y (3.15) podemos concluir:

$$\max\{W_m(x, t)\} < \max\{u(x, t)\} < \max\{W_M(x, t)\} \quad \text{y} \quad (3.22)$$

$$(S_{W_m})_+(t) < (S_u)_+(t) < (S_{W_M})_+(t) \quad (3.23)$$

desigualdades que nos permite concluir la demostración del teorema (3.4.1).

□

3.4.2. Comportamiento autosemejante de la EMP con absorción: $m < p < m + 2$

Tal y como comentamos en la Sección 3.3 en el teorema (3.3.1) los resultados en [20], aseguran la existencia de una única solución autosemejante (llamadas soluciones muy singulares) para un par de parámetros p y m que se encuentren dentro del rango $m < p < m + 2$. Estas soluciones tienen especial importancia ya que serán las responsables de describir el comportamiento asintótico en este rango de parámetros.

Por ello en la Sección 3.5 hemos querido incluir también un enfoque numérico del problema, se construye una aproximación numérica de esta solución autosemejante utilizando el método de Shooting y un método numérico de Runge-Kutta de orden 4 para una pareja de parámetros m y p . A partir de esta solución autosemejante, construimos diferentes familias de soluciones de (3.1)-(3.2) mediante traslaciones espaciales y temporales, que permiten mostrar en las variables reescaladas el comportamiento para tiempos largos de estas familias de soluciones.

El resultado general se recoge en el siguiente teorema:

Teorema 3.4.2. Sea $u(x, t)$ una solución con soporte compacto y acotada de (3.1)-(3.2) con dato inicial $u_0 > 0$ y acotado en el rango de parámetros $m < p < m + 2$. Entonces $\max\{u(x, t)\} = \mathcal{O}((1 + t)^{-\frac{1}{p-1}})$ y $s_u(t) = \mathcal{O}((1 + t)^{\frac{p-m}{2(p-1)}})$.

Demostración. Comenzamos haciendo notar que la estimación superior puede obtenerse de manera muy sencilla utilizando una solución plana de la familia (3.5): $U_k(t) = c^*(\epsilon + t)^{-\frac{1}{p-1}}$ con ϵ se elegido de manera que en el instante inicial se verifique:

$$u_0(x) < U_\epsilon(t) \quad (3.24)$$

Esta solución plana y el principio de comparación nos permiten obtener de manera trivial una estimación superior para la tasa de decaimiento de la solución $u(x, t)$. Sin embargo, por su geometría, no aporta información sobre el comportamiento de la frontera libre. Es por ello que necesitamos construir una supersolución más elaborada.

Vamos a construir una supersolución a partir de la solución autosemejante que nos permitirá deducir ambas estimaciones. Tomamos:

$$\bar{u}(x, t) = h(t)W(\bar{x}, t) \quad \text{con} \quad \bar{x} = xh^\gamma(t) \quad (3.25)$$

donde $h(t)$ ha de cumplir las siguientes condiciones:

- $h(t) > 1$ para cualquier instante de tiempo
- $h(t)$ creciente.
- $h \rightarrow C > 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.

de modo que se garantice en particular:

$$u_0(x) < \bar{u}(x, 0) \quad (3.26)$$

Con esta definición, calculando las derivadas correspondientes y sustituyendo tenemos:

$$\mathcal{L}(\bar{u}) = (\bar{u})_t - (\bar{u})_{xx}^m + (\bar{u})^p = h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t - h^m h^{2\gamma} W_{\bar{x}\bar{x}}^m + h^p W^p$$

Tomando $\gamma = -\frac{m-1}{2}$, haciendo uso de que $W(x, t)$ es solución de (3.1) y usando las propiedades de $h(t)$ tenemos:

$$\mathcal{L}(\bar{u}) > h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t - hW_{\bar{x}\bar{x}}^m + hW^p = h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' > 0$$

obteniendo así una supersolución para cualquier función $h(t)$ que cumpla las condiciones impuestas, en particular puede ser:

$$h(t) = 2 - \frac{1}{t+1} \quad (3.27)$$

De nuevo el principio de comparación nos permite concluir:

$$u(x, t) < \bar{u}(x, t) \quad (3.28)$$

de donde deducimos

$$\max\{u(x, t)\} < \max\{\bar{u}(x, t)\} \quad \text{y} \quad (S_u)_+(t) < (S_{\bar{u}})_+(t) \quad (3.29)$$

Ahora necesitamos encontrar las estimaciones inferiores y para ello vamos a construir una **subsolución** mediante un enfoque muy similar usado en la construcción anterior.

Proponemos la subsolución:

$$\underline{u}(x, t) = h(t)W(\underline{x}, t) \quad \text{con} \quad \bar{x} = xh^\gamma(t) \quad (3.30)$$

donde $W(x, t)$ es la solución autosemejante en este rango de parámetros y $h(t)$ que cumple las condiciones:

- $h(t) \rightarrow C < 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- $h(t) < 1$ para todo valor de t .
- $h(t)$ es decreciente.

Si se verifican estas condiciones, en el instante inicial se cumple

$$u_0(x) > \underline{u}(x, 0) \quad (3.31)$$

Calculando las derivadas correspondientes y sustituyendo obtenemos:

$$\mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{u}_t - \underline{u}_{xx}^m + \underline{u}^p = h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t - h^m h^{2\gamma} W_{\bar{x}\bar{x}}^m + h^p W^p$$

Tomando de nuevo $\gamma = -\frac{m-1}{2}$, haciendo uso de que $W(x, t)$ es solución de (3.1) y usando las propiedades de $h(t)$ tenemos:

$$\mathcal{L}(\underline{u}) < h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t - h^m h^{2\gamma} W_{\bar{x}\bar{x}}^m + h^p W^p < h'W + hW_{\bar{x}}x(h^\gamma)' + hW_t - hW_{\bar{x}\bar{x}}^m + hW^p \leq 0$$

simplificando llegamos y usando las propiedades de $h(t)$ y $W(x, t)$ obtenemos:

$$\mathcal{L}(\underline{u}) < h'W + hW_{\bar{x}}x(h')' < 0$$

Así hemos encontrado una subsolución que nos permitirá obtener las estimaciones para cualquier $h(t)$ que cumpla las condiciones impuestas, por ejemplo podemos tomar la función $h(t)$ obtenida en el rango $p > m + 2$.

Usando el principio de comparación obtenemos que las soluciones estarán ordenadas para todo tiempo y en particular podemos deducir:

$$\max\{u(x, t)\} > \max\{\underline{u}(x, t)\} \quad \text{y} \quad (S_u)_+(t) > (S_{\underline{u}})_+(x) \quad (3.32)$$

A partir de las estimaciones (3.29), (3.32), del comportamiento de $W(x, t)$ y de las funciones $h(t)$ elegidas podemos concluir el resultado del teorema. $\square$

3.4.3. Simplificación asintótica II: $1 < p < m$

Al igual que en la sección (2.8) comenzamos haciendo uso del concepto de solución y ecuación reescalada aplicado a una solución plana (3.5) que nos permitirá confirmar el rango de parámetros en los que la absorción es dominante frente a la difusión.

En este caso utilizamos las variables reescaladas::

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + t)^\alpha u(x, t) \quad (3.33)$$

con

$$\tau = \ln(1 + t) \quad \eta = x \quad \alpha = \frac{1}{p-1}$$

Estas variables reescaladas las elegimos motivados por comportamiento de la solución plana (3.5).

Calculando las derivadas y sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos la siguiente ecuación en las nuevas variables:

$$\theta_\tau = e^{-\frac{m-p}{p-1}\tau} \theta_{\eta\eta}^m + \alpha\theta - \theta^p \quad (3.34)$$

Donde obtenemos que en el rango de parámetros $1 < p < m$ el exponente es negativo y la exponencial decreciente. Supuestas las estimaciones necesarias sobre la solución θ el término de la exponencial converge a cero y así (3.34) se simplifica a:

$$\theta_\tau = \alpha\theta - \theta^p \quad (3.35)$$

Cuya solución estacionaria es la familia de soluciones planas. El resto de las soluciones son perturbaciones de ella y convergen a ella cuando $\tau \rightarrow \infty$.

De esta manera hemos encontrado el último rango de parámetros en el que estudiaremos las tasas de decaimiento y evolución de la frontera de nuestras soluciones.

Estimaciones a priori

En este rango de parámetros debemos imponer unas condiciones al dato inicial, suponemos que el dato inicial $u_0(x)$ es continuo, no negativo y con soporte compacto $[a, b]$ de manera que

$$u_0(x) = 0 \quad \text{en } (-\infty, a] \cup [b, \infty) \quad (3.36)$$

$$u_0(x) > 0 \quad \text{en } (a, b) \quad (3.37)$$

donde $0 < a < b < \infty$. Para evitar la presencia de tiempos de espera asumiremos que

$$[u_0^{m-1}]_x(a) \neq 0 \quad (3.38)$$

$$[u_0^{m-1}]_x(b) \neq 0 \quad (3.39)$$

Esta condición permite evitar tiempos de espera infinitos, ya que de ser así el comportamiento sería distinto [25], una vez que la frontera empieza a moverse lo sigue haciendo hasta llegar a un valor límite [25].

La influencia de la absorción ahora será tan importante que en este rango de parámetros se pierde la propiedad de positividad débil, fenómeno conocido como localización que aparece por primera vez. De manera que ahora el fluido no llega a todo el espacio para todo t , definimos pues el conjunto de positividad $\Omega_\infty = \bigcup_{t>0} \Omega(t) \subset B_R(0)$ donde $\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } u(x, t) > 0\}$. Las fronteras libres están acotadas, pues Ω_∞ es un intervalo acotado.

Teorema 3.4.3. Sea $u(x, t)$ una solución con soporte compacto y acotada de (3.1) en el rango de parámetros $1 < p < m$. Entonces $\max\{u(x, t)\} = \mathcal{O}((1+t)^{-\alpha})$ y $(s_u)_- = \mathcal{O}(1)$.

Demostración. Al igual que en los otros rangos de parámetros, nuestra búsqueda es la de las tasas de decaimiento y la evolución de la frontera libre de nuestras soluciones pasa por la construcción de supersoluciones y subsoluciones adecuadas.

Para buscar la tasa superior usaremos una supersolución plana (3.5) $U_\epsilon(t) = c^*(\epsilon + t)^{-\frac{1}{p-1}}$ donde ϵ se escoge de manera que el instante inicial se verifique $u_0(x) < U_\epsilon(0)$. Utilizando el principio de comparación obtenemos para todo t

$$u(x, t) < U_\epsilon(t) \quad (3.40)$$

De manera que podemos obtener la tasa de decaimiento, pero no nos aporta información sobre la frontera, es por ello que haremos uso de otra supersolución.

Utilizaremos una solución autosemejante de tipo onda viajera para describir el comportamiento asintótico de las fronteras libres. Esta solución es la única solución autosemejante que existe en este rango de parámetros para más información sobre ella, se puede consultar [8] y [7].

$$W(x, t) = (1+t)^{-\alpha} f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = x(1+t)^{-\beta} \quad (3.41)$$

con

$$\alpha = \frac{1}{p-1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{p-m}{2(p-1)}$$

El perfil $f(\eta)$ es solución de la ecuación (3.10) en este rango de parámetros $1 < p < m$. Además tiene las siguientes propiedades mostradas en [8], [7], donde r^* es el punto donde se localiza la frontera en $t = 0$.

- $f(\eta) = 0$ para $\eta \leq r^*$
- $f(\eta) > 0$ para $\eta > r^*$
- $f(\eta)$ es creciente $f(\eta) \rightarrow c^*$ cuando $\eta \rightarrow \infty$

Nuestro interés ahora va a ser construir una supersolución a partir de (3.41), para ello vamos a hacer uso de las traslaciones temporales y espaciales de la ecuación presentadas en 2.5.

La traslación temporal nos permite extender la solución en el instante inicial de manera que

$$u_0(x) < W(x, 0) \quad (3.42)$$

Realizamos una traslación temporal y obtenemos

$$W(x, t + \epsilon) = (\epsilon + t)^{-\alpha} f(x(\epsilon + t)^{-\beta}) \quad (3.43)$$

Donde tomamos un ϵ lo suficientemente pequeño para que se cumpla (3.42). Al realizar esta traslación, la frontera de W se ha desplazado a la derecha ($s_-(t) = r^*(1+t)^\beta$), por lo que necesitamos realizar una traslación espacial para que se siga verificando (3.42).

$$W(x + C, t + \epsilon) = (\epsilon + t)^{-\alpha} f((x + C)(\epsilon + t)^{-\beta}) \quad (3.44)$$

Así, la frontera la obtenemos de $r = (x + C)((\epsilon + t)^{-\beta})$

$$s_-(t) = r(1+t)^\beta - C < r^* \quad (3.45)$$

Debemos elegir un C lo suficientemente grande para que se verifique (3.42).

De esta manera, al realizar una traslación temporal y espacial, podemos garantizar que se cumpla (3.42) y usando el principio de comparación obtenemos:

$$(s_u)_-(t) > (s_W)_-(t) \quad (3.46)$$

Por lo que se demuestra la localización de la solución en este rango de parámetros y se deduce el comportamiento de la frontera libre enunciado en el teorema. Para la frontera derecha obtenemos el mismo resultado usando la simetría.

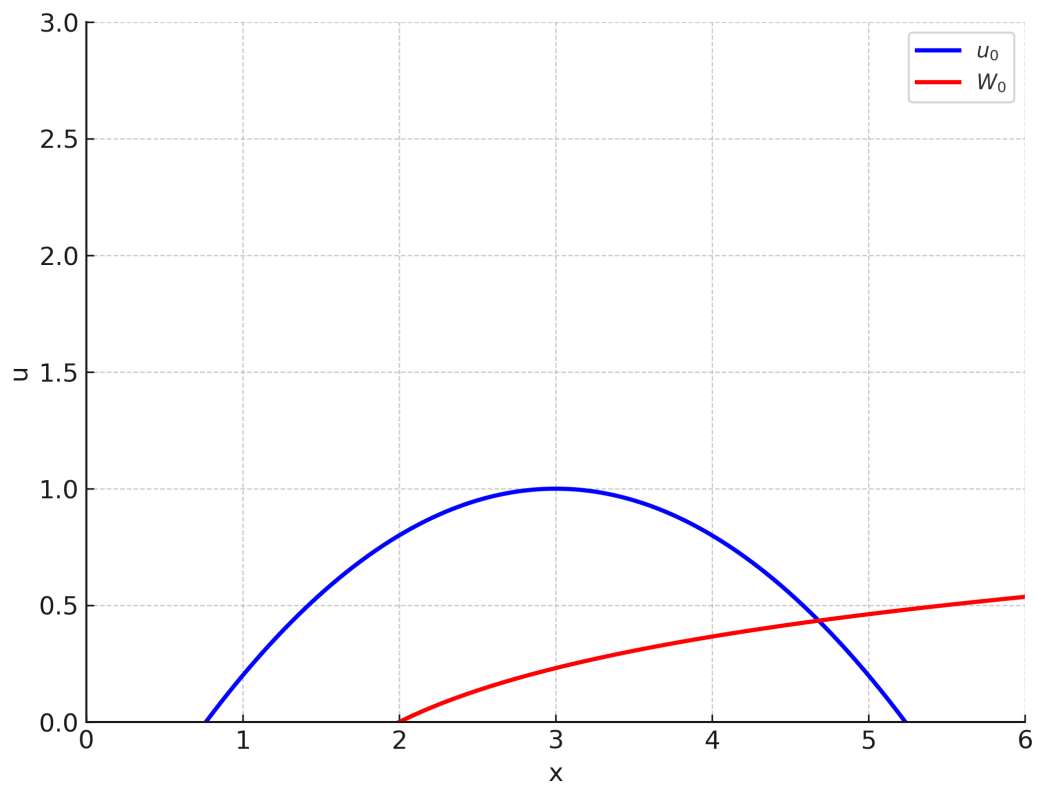


Figura 3.1: Gráfica ilustrativa de los datos iniciales de $u(x, t) = u_0$ y $W(x, t) = W_0$.

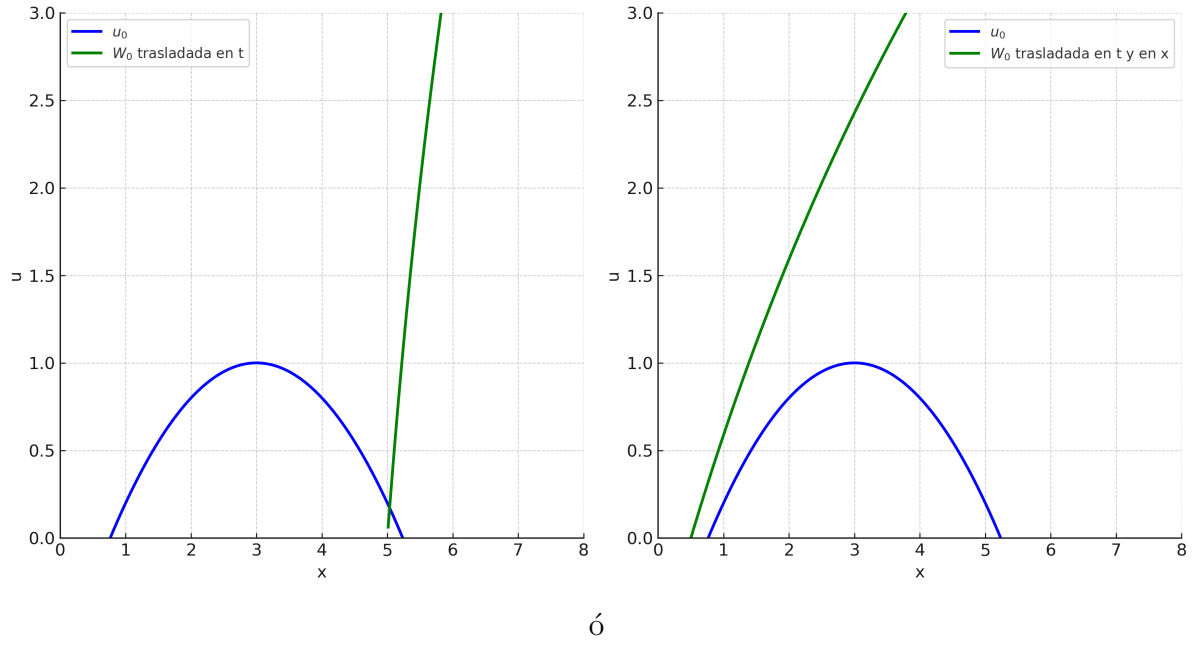


Figura 3.2: Gráfica donde se muestra como una traslación temporal y espacial nos permiten acotar el dato inicial u_0 .

Para obtener la estimación inferior construimos la subsolución de la forma

$$\underline{u}(x, t) = h(t)w(x) \quad \text{en} \quad \Omega_\infty = \bigcup_{t>0} \Omega(t) \subset B_R(0) \quad (3.47)$$

$$\underline{u}(x, t) = 0 \quad \text{en el resto} \quad (3.48)$$

Donde $\Omega(t)$ es el dominio de positividad definido como $\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } u(x, t) > 0\}$ y $w(x)$ es solución (problema con condiciones de contorno) del problema

$$w_{xx}^m = -kw^p \quad \text{en} \quad B_\delta(x_0) \quad (3.49)$$

$$w = 0 \quad \text{sobre} \quad \delta B_\delta(x_0) \quad (3.50)$$

Donde $x_0 \in \Omega_\infty$ y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset \Omega_\infty$. Arosón y Peletier [4] demuestran que para cada $k > 0$, (3.50) tiene una única solución clásica positiva $w(x, k)$ y de acuerdo a [10] es radialmente simétrica en torno a x_0

Elegimos $h(t)$ de manera que verifique

- $h(t) < 1$ para todo t
- $h(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$
- $h(t)$ decreciente

Así en el instante inicial se cumple

$$\underline{u}(0, t) < u_0(x) \quad (3.51)$$

Calculando las derivadas correspondientes tenemos

$$\mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{u}_t - \underline{u}_{xx}^m + \underline{u}^p = h'w - h^m w \frac{m}{xx} + h^p w^p$$

Donde si utilizamos las propiedades de $w(x)$ y las de $h(t)$ tomando $h < C$ tal que $kh^{m-p} < \epsilon$ llegamos a

$$\mathcal{L}(\underline{u}) < h'w + \epsilon h^p w^p + h^p w^p < w(h' + (1 + \epsilon)h^p)$$

calculamos la expresión de $h(t)$ de manera que se cumpla $h' + (1 + \epsilon)h^p = 0$ y obtenemos:

$$h(t) = ((p-1)((1+\epsilon)t + C))^{-\frac{1}{p+1}} = c^*(1+\epsilon')(C+t)^{-\alpha}$$

Donde C se toma de manera que se cumplan las propiedades de $h(t)$ y la condición (3.51).

Observamos que tenemos una subsolución cuyo máximo viene dado por la onda plana, de forma que hemos podido acotarla bien y así proporciona la estimación buscada.

Utilizando el principio de comparación obtenemos para todo t :

$$\underline{u}(x, t) < u(x, t) \quad (3.52)$$

Juntando los resultados (3.52) y (3.40) obtenemos

$$\underline{u}(x, t) < u_0(x) < U_\epsilon(t) \quad (3.53)$$

y podemos deducir para todo $t > 0$:

$$\max\{\underline{u}(x, t)\} < \max\{u_0(x)\} < \max\{U_\epsilon(t)\} \quad (3.54)$$

de donde alcanzamos la tasa de decaimiento que enuncia el teorema.

□

3.4.4. Fenómeno de extinción en tiempo finito: $p < 1$

Por completitud incluimos este último resultado para valores del parámetro $p < 1$, caso donde la absorción domina de modo que se produce la extinción de la solución en tiempo finito, de manera que no procede el estudio del comportamiento asintótico de la misma y permite cerrar nuestro estudio.

Teorema 3.4.4. Sea $u(x, t)$ solución del problema (1) con dato inicial acotado en el régimen $p < 1$, existe un T^* tal que $u(x, T^*) = 0$.

Demostración. Construimos una solución de (3.1) del tipo:

$$U(t) = c(T-t)^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{1}{1-p}$$

Igualando exponentes y coeficientes, obtenemos que c ha de cumplir

$$c = \alpha^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{1-p} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Observamos que esta solución se extingue en tiempo finito. En efecto, a medida que t se aproxima a T , $(T-t)^\alpha$ tiende a cero. Así, $U(t)$ se extingue en $t = T$.

Sea $v(x, t)$ una solución de (1). Tomando un $T = T^* \geq \left(\frac{\max(v_0(x))}{c} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ y usando el principio de comparación con $v(x, t)$ y $U(t)$ tenemos que $U(0) \geq u_0(x)$. Dado que $U(t)$ se extingue en tiempo T^* , $v(x, t)$ se extinguirá en un tiempo igual o menor. $\square$

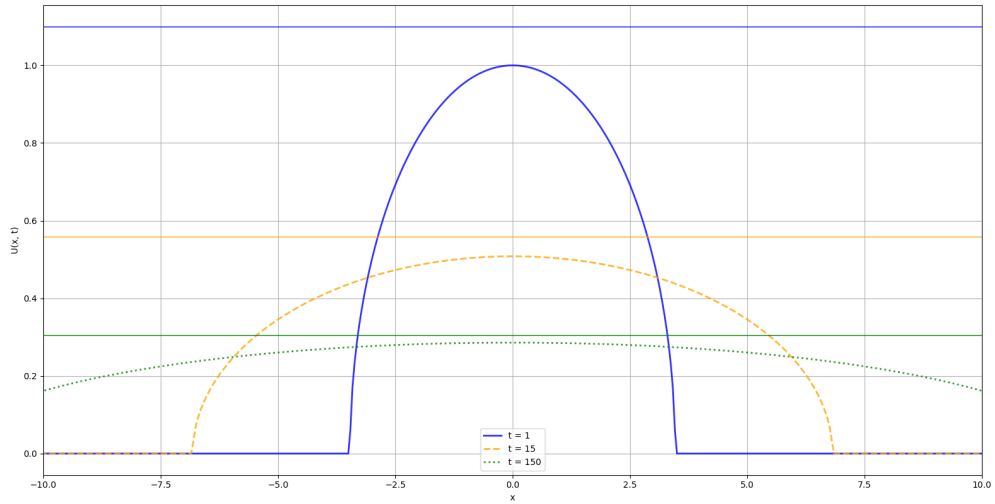


Figura 3.3: Extinción de cualquier solución para $p < 1$.

3.5. Soluciones autosemejantes

Buscamos encontrar numéricamente la solución autosemejante en el régimen $m < p < m + 2$. En este intervalo, se espera que haya un cierto equilibrio entre la difusión y la absorción lo que nos lleva a esperar soluciones con un comportamiento diferente a las soluciones de Barenblatt del caso de difusión pura.

Partimos de la ecuación del perfil con absorción (3.10):

$$(f^m)'' + \alpha f + \beta \eta f' - f^p = 0$$

donde α y β toman los valores:

$$\alpha = \frac{1}{p-1}, \quad \beta = \frac{p-m}{2(p-1)}$$

Para resolver esta ecuación, utilizamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden. En este análisis, consideramos los valores $p = 4$ y $m = 3$, así (3.10) queda:

$$(f^3)'' + \frac{1}{p-1}f - \frac{p-m}{2(p-1)}\eta f' - f^p = 0$$

Calculando las derivadas necesarias y sustituyendo $(f^3)''$ obtenemos:

$$6f(f')^2 + 3f^2f'' + \frac{1}{3}f - \frac{1}{6}\eta f' - f^4 = 0$$

Simplificando y reorganizando llegamos a:

$$f'' = \frac{-2(f')^2 - \frac{f}{9} + \frac{\eta f'}{6} + \frac{f^4}{3}}{f}$$

Donde definimos las variables:

$$y_1 = f, \quad y_2 = f'$$

Reescribimos el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{-2y_2^2 - \frac{1}{9}y_1 + \frac{1}{6}\eta y_2 + \frac{1}{3}y_1^4}{y_1} \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones con $y_1(0) = k$, $y_2(0) = 0$ usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Implementamos la resolución numérica en Python, utilizando el método de shooting para ajustar el valor inicial k hasta encontrar la solución adecuada.

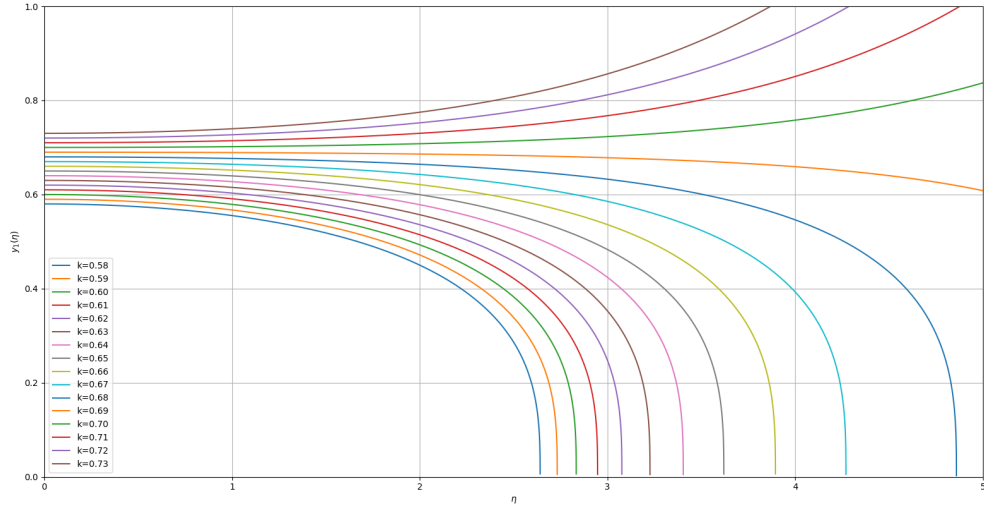


Figura 3.4: Solución numérica: perfil autosemejante ($m < p < m + 2$) usando el metodo de Shooting y rk4.

La demostración de la existencia de esta solución autosemejante en el artículo de Peletier [20] sigue un enfoque geométrico y utiliza el análisis cualitativo del sistema de ecuaciones en el espacio de fases. Para valores de y pequeños o grandes (nuestro parámetro inicial k), las soluciones no cumplen las condiciones de contorno deseadas. Solo un valor intermedio exacto de y_0 permite encontrar una solución que se ajusta perfectamente, lo que demuestra la unicidad de la solución autosemejante.

Resolviendo iterativamente llegamos a que el k buscado es aproximadamente

$$k \sim 0,69336127435063$$

En conclusión, numéricamente hemos obtenido muchas soluciones, pero únicamente una cumple las condiciones de contorno requeridas y así nuestro resultado numérico concuerda con los resultados teóricos.

3.6. Ecuación en variables reescaladas

Volviendo a utilizar el concepto de ecuación reescalada presentado en (2.8), busquemos contruir la ecuación reescalada asociada a la solución numérica que acabamos de obtener. Utilizamos los parámetros α y β encontrados en (3.3):

$$\alpha = \frac{1}{p-1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{p-m}{2(p-1)}$$

Así en variables reescaladas tenemos:

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + t)^\alpha u(x, t) \tag{3.55}$$

siendo:

$$\tau = \ln(1+t), \quad \eta = x(1+t)^{-\beta}$$

Calculando las derivadas, sustituyendo en (3.1) y simplificando obtenemos que la ecuación en variables reescalada es:

$$\theta_\tau = \theta_{\eta\eta}^m + \alpha\theta + \beta\eta\theta - \theta^p \quad (3.56)$$

Si comparamos (3.56) con (3.10), observamos que tiene como soluciones estacionarias las soluciones autosemejantes que hemos obtenido numéricamente. Son las que describen el comportamiento asintótico de todas las soluciones en este rango.

Al igual que en el caso de difusión pura, las ecuaciones en variables reescaladas nos ayudan a ilustrar el comportamiento asintótico de las soluciones.

■ **Traslaciones espaciales y temporales en el rango $m < p < m + 2$**

En este caso hemos calculado el perfil $f(x, t)$ numéricamente. La solución autosemejante obtenida en este caso es:

$$W(x, t) = (1+t)^{-\alpha} f(x(1+t)^{-\beta})$$

Donde podemos hacer una traslación espacial:

$$W(x+X, t) = (1+t)^{-\alpha} f((x+X)(1+t)^{-\beta})$$

Y una traslación temporal:

$$W(x, t+T) = (1+t+T)^{-\alpha} f(x(1+t+T)^{-\beta})$$

Así podemos obtener familias de soluciones a partir de las invarianzas de la ecuación. En general, podremos encontrar una familia de soluciones biparamétrica por una traslacion espacial y temporal:

$$W(x+X, t+T) = (1+t+T)^{-\alpha} f((x+X)(1+t+T)^{-\beta})$$

■ **Comportamiento asintótico de las soluciones reescaladas**

Partiendo de una familia de soluciones que surge de una translación espacial:

$$\theta(\eta, \tau) = (1+t)^\alpha W(x+X, t)$$

con $\eta = x(1+t)^{-\beta}$ y $\tau = \ln(1+t)$

$$\theta(\eta, \tau) = (1+t)^\alpha (1+t)^{-\alpha} f((x+X)(1+t)^{-\beta})$$

obteniendo:

$$\theta(\eta, \tau) = f(\eta + Xe^{-\tau\beta})$$

Así cuando $\tau \rightarrow \infty$

$$\theta(\eta, \tau) \rightarrow f(\eta)$$

que corresponde al perfil numérico calculado.

Procediendo de la misma forma con la familia que surge de una traslación temporal en la solución reescalada obtenemos:

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + Te^{-\tau})^{-\alpha} f(\eta(1 + Te^{-\tau})^{-\beta})$$

Así cuando $\tau \rightarrow \infty$

$$\theta(\eta, \tau) \rightarrow f(\eta)$$

convergiendo nuevamente al perfil.

De forma general, podemos hacer esto para una traslación espacial y temporal simultáneamente obteniendo así:

$$\theta(\eta, \tau) = (1 + Te^{-\tau})^{-\alpha} f\left(\eta\left(\frac{e^{\tau}}{e^{\tau} + T}\right)^{\beta} + \frac{X}{(e^{\tau} + T)^{\beta}}\right)$$

En el caso en el que $\tau \rightarrow \infty$, tenemos:

$$\theta(\eta, \tau) \rightarrow f(\eta)$$

recuperando así el perfil original. Además mostramos que cualquier solución reescalada de este tipo se comporta a tiempos largos como el perfil que hemos obtenido numéricamente. Estos resultados son coherentes con los establecidos en el teorema (3.4.2) para cualquier otra solución.

Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un análisis sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación del medio poroso (EMP) con un término de absorción de la forma $-u^p$. El objetivo principal, tal como se estableció en la introducción, ha sido comprender cómo este término de absorción afecta las tasas de decaimiento de las soluciones y la evolución de la frontera libre en función de los parámetros m y p .

El estudio ha demostrado que la importancia de la absorción depende significativamente del rango de valores de m y p . A continuación, resumimos los principales resultados en cada uno de estos rangos:

- **Caso $p > m + 2$ (Simplificación asintótica I):** En este régimen, el término de absorción es despreciable frente al de difusión a medida que $t \rightarrow \infty$. Las soluciones autosemejantes se comportan como en el caso de difusión pura, donde las soluciones de Barenblatt controlan el comportamiento asintótico. Se ha demostrado que las soluciones presentan una tasa de decaimiento de $O((1+t)^{-1/(m+1)})$ y la expansión de la frontera sigue la tasa de $O((1+t)^{1/(m+1)})$.
- **Caso $m < p < m + 2$ (Soluciones autosemejantes):** En este rango, la absorción juega un papel más relevante que en el caso anterior, ahora este término empieza a adquirir importancia en la descripción de las soluciones y se observa un equilibrio con el término de difusión que se refleja en la existencia de soluciones autosemejantes que involucran ambos parámetros. Se ha encontrado la existencia de soluciones autosemejantes con soporte compacto que describen el comportamiento asintótico de las soluciones. Las tasas de decaimiento y expansión de la frontera libre vienen determinadas por $\alpha = -\frac{1}{p-1}$ y $\beta = \frac{p-m}{2(p-1)}$, respectivamente, lo que confirma que el término de absorción influye en la dinámica de las soluciones.
- **Caso $1 < p < m$ (Simplificación asintótica II):** En este rango, la absorción domina sobre la difusión, provocando la pérdida de la propiedad de positividad débil y el fenómeno de localización de las soluciones. Las soluciones exhiben una tasa de decaimiento del tipo $O((1+t)^{-1/(p-1)})$, aunque la frontera libre se expande a medida que el tiempo crece, está acotada de manera global para todo tiempo y el fluido quedará confinado en un región del espacio.
- **Caso $p < 1$ (Fenómeno de extinción):** Se ha comprobado que para $p < 1$, las soluciones experimentan el fenómeno de extinción en tiempo finito, lo cual confirma que el término de absorción es suficientemente fuerte como para que la solución se anule en un tiempo finito.

En conclusión, los objetivos planteados al inicio del trabajo han sido alcanzados. Se ha demostrado cómo la absorción afecta de manera crucial al comportamiento de las soluciones en función de los parámetros m y p . Además, a través del análisis realizado, se ha puesto de manifiesto la relevancia de las soluciones autosemejantes en el estudio, así como la conveniencia de utilizar las ecuaciones reescaladas asociadas al mismo.

Bibliografía

- [1] D.G. Aronson. *Nonlinear Diffusion Problems*. Springer-Verlag, 1986.
- [2] D.G. Aronson y Ph. Bénilan. «Régularité de l'équation des milieux poreux dans $\mathbb{R}^N$ ». En: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 288 (1979), págs. 103-105.
- [3] D.G. Aronson y L.A. Caffarelli. «Regularity of the free boundary in a filtration equation». En: *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie I* 295 (1982), págs. 63-66.
- [4] D.G. Aronson y L.A. Peletier. «Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains». En: *Journal of Differential Equations* 39 (1981), págs. 378-412.
- [5] G. I. Barenblatt. «On some unsteady motions of a liquid or gas in a porous medium». En: *Prikl. Mat. Mekh.* 16 (1952), págs. 67-78.
- [6] L.A. Caffarelli y A. Friedman. «Regularity of the free-boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium». En: *Amer. J. Math.* 101 (1979), págs. 1193-1218.
- [7] M. Chaves y J.L. Vázquez. «Free Boundary Layer Formation in Nonlinear Heat Propagation». En: (1996).
- [8] M. Chaves y J.L. Vázquez. «Nonuniqueness in Nonlinear Heat Propagation: A Heat Wave Coming from Infinity». En: *Differential and Integral Equations* 9.3 (1996), págs. 447-464.
- [9] Apuntes del Curso de Física de Fluidos. *Apuntes de física de fluidos*. Universidad de Salamanca, 4º Curso. 2021-2022.
- [10] B. Gidas, W.-M. Ni y L. Nirenberg. «Symmetry and related properties via the maximum principle». En: *Communications in Mathematical Physics* 68 (1979), págs. 209-243.
- [11] A. S. Kalashnikov. «Formation of singularities in solutions of the equation of nonstationary filtration». En: *Z. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 7 (1967), págs. 440-444.
- [12] A.S. Kalashnikov. «The effect of absorption of heat propagation in a medium in which thermal conductivity depends on temperature». En: *Zhurnal Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 16 (1976), págs. 689-696.
- [13] S. Kamin, L.A. Peletier y J.L. Vázquez. «A nonlinear diffusion-absorption equation with unbounded data». En: *Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States 3*. Ed. por N.G. Lloyd et al. Proceedings of the 1989 Gregynog Conference. Boston: Birkhäuser, 1992, págs. 243-263.

- [14] R. Kersner. «The behaviour of temperature fronts in media with nonlinear thermal conductivity under absorption». En: *Vestnik Moskov. Univ., Ser. I, Mat. Mekh.* 33.5 (1978), págs. 44-51.
- [15] R. Kersner. «The behaviour of temperature fronts in media with nonlinear thermal conductivity under absorption». En: *Vestnik Moskov. Univ., Ser. I, Mat. Mekh.* 33.5 (1979), págs. 44-51.
- [16] B.F. Knerr. «The behaviour of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 249 (1979), págs. 409-424.
- [17] B.F. Knerr. «The porous medium equation in one dimension». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 234 (1977), págs. 381-415.
- [18] J.L. Vázquez M.A. Herrero. «The one-dimensional nonlinear heat equation with absorption: Regularity of solutions and interfaces». En: *SIAM J. Math. Anal.* 18 (1987), págs. 149-167.
- [19] L.A. Peletier. *The porous media equation, Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences*. Ed. por H. Amann et al. Pitman, 1981, págs. 229-241.
- [20] L.A. Peletier y D. Terman. «A Very Singular Solution of the Porous Media Equation with Absorption». En: *Journal of Differential Equations* 65 (1986), págs. 396-410.
- [21] J.L. Vázquez S.I. Shimarev. «The regularity of solutions of reaction-diffusion equations via Lagrangian coordinates». En: *Nonlinear Differential Equations and Applications* 3 (1996), págs. 465-497.
- [22] J.L. Vázquez. «Asymptotic Behaviour and Propagation Properties of the One-Dimensional Flow of Gas in a Porous Medium». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1983), págs. 507-527.
- [23] Juan Luis Vázquez. *Introduction to the Porous Medium Equation*. Oxford University Press, 2022.
- [24] Juan Luis Vázquez. *Notas sobre las Ecuaciones de Medios Porosos*. Apuntes internos, Universidad Autónoma de Madrid. 2021.
- [25] Juan Luis Vázquez. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2006.

Apéndices

Ondas viajeras: Construcción alternativa

Ahora vamos a tomar el *camino 2* con el enfoque del *problema límite* para abordar la problemática encontrada en (2.22). Este método consiste en resolver una versión aproximada del problema donde las dificultades asociadas con las soluciones clásicas no se presentan. Luego, pasamos al límite y examinamos el resultado obtenido.

En la ecuación (2.20) imponemos las siguientes condiciones de contorno:

$$f(\infty) = \epsilon, \quad f'(\infty) = 0$$

De manera que la condición $f(\infty) = \epsilon$ nos indica que la solución tiende a un comportamiento asintótico estable en el infinito y que no degenera, mientras que la condición $f'(\infty) = 0$ sugiere que la tasa de cambio de la magnitud física se estabiliza. Con estas condiciones, la constante K ya no es 0, sino que ahora toma el valor $K = \epsilon c > 0$ y la ecuación (2.21) se convierte en:

$$mf^{m-1}f' = c\epsilon - cf$$

Donde podemos considerar el caso $m = 2$ donde la integración es explícita y operando se obtiene:

$$-c\eta + C = 2f + 2\epsilon \ln |f - \epsilon| \quad (3.57)$$

Donde podemos fijamos $C = 0$ sin pérdida de generalidad.

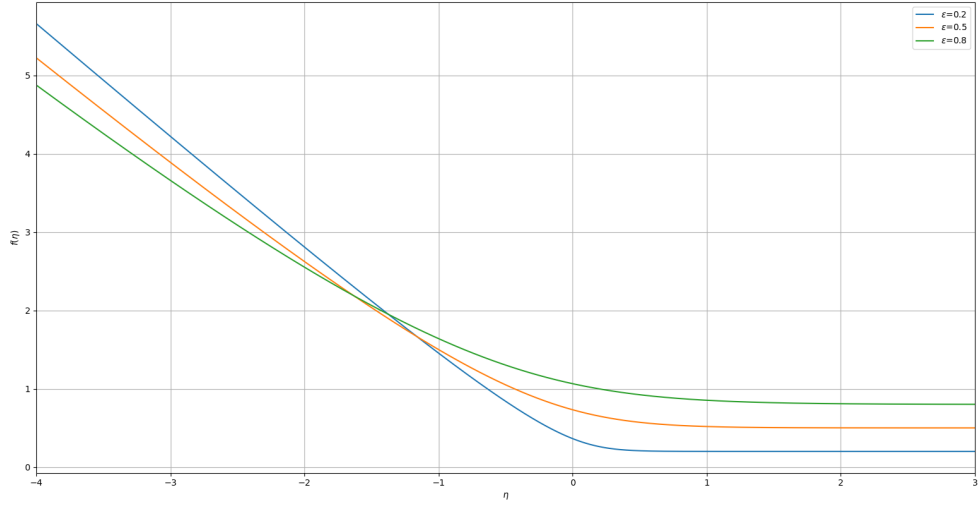


Figura 3.5: Gráfica de $f(\eta)$ calculado numéricamente a partir de la expresión $-c\eta + C = 2f + 2\epsilon \ln |f - \epsilon|$ con $C = 0$ para distintos valores de ϵ y con $c = 3$.

Al hacer el paso al límite $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos:

$$2f = (-c\eta)_+ = \max \{-c\eta, 0\}$$

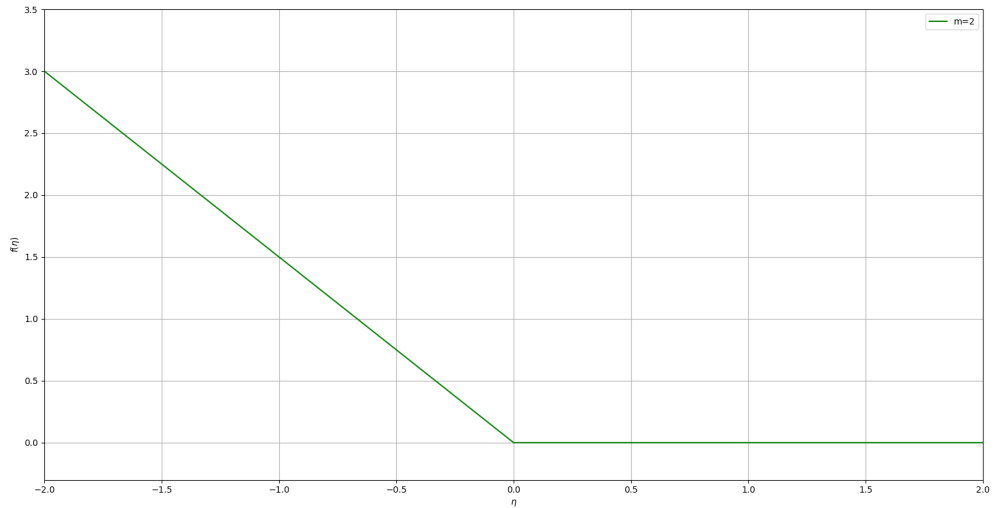


Figura 3.6: Gráfica de $f(\eta) = \frac{1}{2} \max \{-c\eta, 0\}$ para $c = 3$.

Este límite no solo tiene relevancia física y cumple con las condiciones de contorno que exigimos a la solución, sino que también ilustra una característica notable de las soluciones no clásicas: la ausencia de derivabilidad en $\eta = 0$. Esto refleja una pérdida de

regularidad de la solución en la frontera libre.

Al conocer la relación de $f(\eta)$ con $u(x, t)$ podemos conocer la expresión de nuestra solución en este caso es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \max \{-c(x - ct), 0\} = \frac{1}{2} \max \{c(ct - x), 0\} = \frac{1}{2} (c(ct - x), 0)_+ \quad (3.58)$$

Al igual que antes, podemos calcular la expresión de la frontera que aparecen en $u(x, t) = 0$ y su expresión es:

$$s_+(t) = ct \quad (3.59)$$

que se desplaza a la velocidad de la onda.

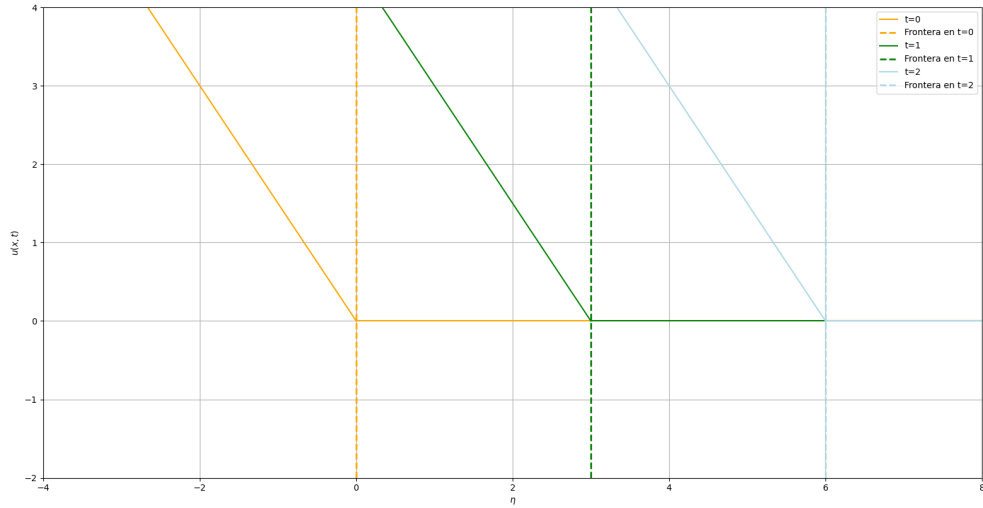


Figura 3.7: Gráfica de $W(x, t)$ para $m = 2$ con $c = 3$ y η_0 y su frontera en varios instante de tiempo.

En general, para $m > 1$, la solución en el límite es:

$$\frac{m}{m-1} f^{m-1} = \max \{-c\eta + C, 0\} \quad (3.60)$$

Lo que coincide con (2.23), de manera que ambos caminos nos han llevado al mismo resultado.