



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
MÁSTER UNIVERSITARIO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

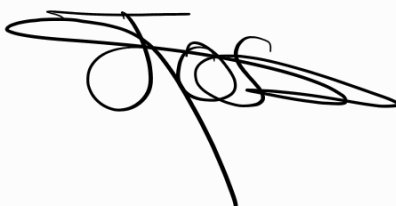
# Termodinámica en teorías de gravedad extendida $f(R)$

AUTOR: Jose González Párraga

DIRECTOR: Álvaro de la Cruz Dombriz

Curso 2022-2023

Firma del estudiante:

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'JOS', with a long horizontal stroke extending to the right and a vertical stroke extending downwards from the end of the signature.

Firma del tutor:

## Resumen

Las teorías de gravedad extendida  $f(R)$  surgen en la segunda mitad del siglo XX como un intento de modificar la Relatividad General añadiendo nuevos términos en la acción gravitatoria, una revisión histórica y la importancia de ellas son expuestas en el apartado introductorio.

Puesto que el objetivo principal es el estudio termodinámico de distintos sistemas bajo las teorías  $f(R)$ , en primer lugar se obtendrán, paso a paso, las ecuaciones de campo de dichas teorías.

Posteriormente, utilizando resultados previos, se estudiará la termodinámica del agujero negro Schwarzschild-Anti-de Sitter. Se finaliza el estudio con dos modelos  $f(R)$  concretos, visualizando las distintas regiones termodinámicas y estudiando la estabilidad local y global dependiendo de los parámetros de cada modelo.

Por otro lado, se estudia la termodinámica del horizonte del Universo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en los regímenes de equilibrio y de no equilibrio, siendo este último inexistente en Relatividad General. De nuevo, se finaliza con un modelo concreto  $f(R)$  con el que se calculan distintas magnitudes cosmológicas y termodinámicas.

## Abstract

Extended theories of gravity  $f(R)$  arose in the second half of the 20th century as an attempt to modify General Relativity by adding new terms in the gravitational action, , a historical review and their importance are exposed in the Introduction.

Since the main objective is the thermodynamic study of different systems under the  $f(R)$  theories, first, the field equations of said theories will be obtained, step by step.

Afterwards, using previous results, the thermodynamics of the Schwarzschild-Anti-de Sitter black hole will be studied. The study is finished with two concrete  $f(R)$  models, visualizing the different thermodynamic regions and studying the local and global stability depending on the parameters of each model.

On the other hand, the thermodynamics of the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker Universe horizon are studied in equilibrium and non-equilibrium regimes, the latter being non-existent in General Relativity. Again, it ends with a specific model  $f(R)$  with which different cosmological and thermodynamic magnitudes are calculated.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Ecuaciones de campo para teorías <math>f(R)</math></b>	<b>9</b>
2.1. Caso $R = R_0$ constante . . . . .	15
<b>3. Agujeros negros con curvatura constante en teorías <math>f(R)</math></b>	<b>16</b>
3.1. Espacio-tiempo Anti-de Sitter . . . . .	18
3.2. Termodinámica de los agujeros negros en teorías $f(R)$ . . . . .	20
3.3. Modelo 1: $f(R) = \alpha(-R)^\beta$ . . . . .	29
3.4. Modelo 2: $f(R) = R(\log(\frac{\alpha}{R_c}R))^\beta - R$ . . . . .	30
<b>4. Termodinámica del horizonte del Universo</b>	<b>32</b>
4.1. Termodinámica en el régimen del no equilibrio . . . . .	32
4.2. Termodinámica en el régimen del equilibrio . . . . .	36
4.3. Energía oscura en teorías $f(R)$ . . . . .	39
<b>5. Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>Referencias</b>	<b>50</b>
<b>A. Código Python sistema de ecuaciones apartado 4.3</b>	<b>52</b>

## 1. Introducción

La Relatividad General fue propuesta por Einstein en el año 1915. Esta teoría propone describir la gravedad no como una fuerza, sino como una deformación del espacio-tiempo. A partir de su publicación, el mismo Einstein propuso varias pruebas para verificar su teoría: el desplazamiento al rojo de la luz, la precesión del perihelio de Mercurio y la desviación de la luz por el Sol [1].

Todas estas pruebas fueron verificadas en los años posteriores. La primera de las pruebas expuestas probaba el principio de equivalencia de Einstein mientras que las otras dos verificaban, en el límite de campo débil, la solución de Schwarzschild.

Solo unos pocos años posteriores a la introducción de la Relatividad General, comenzó a cuestionarse que esta fuera la única teoría gravitatoria posible. Fue en 1919 cuando se empezaron a considerar modificaciones a dicha teoría incluyendo términos de mayor orden de la curvatura escalar en la acción. En estos primeros años, fueron motivados únicamente por la curiosidad científica [2].

No fue hasta los años 60 del siglo XX cuando se descubrió que, añadiendo mayores órdenes de curvatura en la acción, esta podía normalizarse a un loop, puesto que la Relatividad General es una teoría no normalizable y, por tanto, no puede ser cuantizada. Específicamente, fue en 1977 cuando se confirmó que acciones de mayor orden en la curvatura son normalizables [3].

Por otro lado, en los años 90 del mismo siglo, cuando se tuvieron en cuenta efectos cuánticos, se pudo descubrir que la acción admitía dichos órdenes de magnitud superiores. Estos hechos motivaron a la comunidad científica a considerar modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert. Sin embargo, se consideró que no todas las modificaciones podían ser válidas. Estos términos adicionales debían modificar, en un principio, la gravedad únicamente en regímenes de alta energía.

Las modificaciones a la Relatividad General debían ser, por tanto, importante solo a escalas que fueran cercanas a la escala de Planck como puede ser el Universo temprano o las proximidades de un agujero negro. De la misma forma, estas correcciones no deben afectar a la gravedad a energías bajas.

Desde el punto de visto cosmológico y astrofísico, se tienen también diversas motivaciones. Por un lado, información sobre el Fondo Cósmico de Microondas proporciona la siguiente composición energética: 4 % materia bariónica ordinaria, 20 % materia oscura y 76 % energía oscura [2]. El término oscuro se refiere a una forma desconocida de materia y de

energía, respectivamente. Sería esta energía oscura, que domina sobre los demás términos, la responsable de la aceleración actual del Universo.

El modelo más simple que se adecúa a las observaciones experimentales es el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM. Este modelo no explica la naturaleza misma ni de la materia oscura ni de la energía oscura, simplemente se ajusta a los datos experimentales.

El modelo  $\Lambda$ CDM es está de acuerdo con las observaciones experimentales del fondo cósmico de microondas y de la estructura a gran escala del Universo. Por otro lado, también consigue explicar la aceleración en la expansión del Universo. Todo ello lo hace tomando como teoría de la gravedad a la Relatividad General.

Las siglas de este modelo corresponden a la introducción de la constante cosmológica ( $\Lambda$ ) en las ecuaciones de Einstein, que describe la energía oscura. La constante cosmológica se describe en términos de la densidad de energía oscura,  $\Omega_\Lambda$ , que según este modelo es en torno a 0,70.

Las demás siglas, CDM, hacen referencia a *Cold Dark Matter*, que simplemente quiere decir que la materia oscura posee velocidades muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. La densidad de materia total  $\Omega_m$  (materia bariónica más materia oscura) corresponde al 0,30 restante según este modelo.

En este modelo con polvo, el parámetro de Hubble viene dado por [1]:

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\rho_m(1+z)^3 + \frac{\Lambda}{3} \quad (1)$$

Este modelo presenta distintos problemas. El primero de ellos es el problema de la magnitud: el valor de la constante cosmológica es muy pequeño para ser atribuido a la energía de vacío de los campos de materia. El otro problema es el problema de coincidencia que se resume de la siguiente forma: si solo hay un período, extremadamente corto, de tiempo en la evolución del Universo en el cual la densidad de energía de la constante cosmológica es comparable con la de materia, ¿por qué está pasando actualmente? [2].

Por tanto, se han intentado definir otros modelos: ninguno de ellos carece de problemas. Otro punto de vista es considerar que, debido a que la gravedad es la interacción que domina en las escalas cosmológicas y gobierna la evolución del Universo, sea su descripción la que deba modificarse para poder evitar estos problemas de las componentes oscuras. Por lo que a partir de este punto se considera que la modificación de la Relatividad General debe ser a todas las escalas energéticas relevantes, no solo a altas energías.

Si se decide que este es el problema y, por ende, se necesita cambiar la descripción de la gravedad, uno de estos intentos son las teorías  $f(R)$ . Estas teorías se basan en generalizar

la acción de Einstein-Hilbert, pasando de tener únicamente el escalar de Ricci  $R$  a una función general  $f(R)$ .

A la hora de considerar las teorías  $f(R)$ , podría surgir la pregunta de por qué se consideran únicamente funciones de  $R$  y no de invariantes de mayor orden, como  $R_{AB}R^{AB}$ . La respuesta es que las funciones  $f(R)$  ya son lo suficientemente generales para tener las características de la gravedad a órdenes superiores así como son simples para poder manejarlas matemáticamente.

Otra pregunta que surge es qué relación tendrán las modificaciones de la gravedad a altas energías con la fenomenología cosmológica tardía. Esta pregunta es más sofisticada de responder, creyéndose que será una teoría más fundamental (como puede ser la teoría de cuerdas) la que tendrá que predecir los términos que modifiquen la Relatividad General para los efectos gravitacionales tardíos [2].

Por tanto, las teorías  $f(R)$  son unas teorías consideradas simples matemáticamente, que permiten entender los principios y limitaciones de la gravedad modificada.

Estas teorías pueden estudiarse, principalmente, en dos formalismos: el métrico y el llamado de Palatini. En el segundo, de forma contraria a lo que ocurre con el primero, se considera que la métrica y la conexión son independientes y, a la hora de obtener las ecuaciones de campo, se realizan variaciones respecto a ambas, asumiendo que la acción correspondiente a la materia no depende de la conexión. Otro formalismo que también se usa es el métrico-afín, que también considera que métrica y conexión son independientes, pero aquí la acción de materia sí depende de la conexión.

En el presente trabajo, el formalismo que se usará es el formalismo métrico, donde métrica y conexión no son independientes. En primer lugar, se obtendrán las ecuaciones de campo para una teoría  $f(R)$  arbitraria en la sección 2, estudiando concretamente el caso en el que la curvatura escalar es constante.

Posteriormente, en la sección 3, usando las ecuaciones de campo, se obtendrá la métrica del agujero negro de Schwarzschild-Anti-de Sitter (Schwarzschild- $AdS$ ) para finalizar estudiando su termodinámica con el método de la acción euclídea, considerando dos modelos concretos  $f(R)$  y visualizando sus distintas regiones termodinámicas.

Por otro lado, en la sección 4, se acabará estudiando la termodinámica del horizonte del Universo, teniendo en cuenta unos términos extras, respecto a las ecuaciones de Einstein, que se denominan componentes oscuras y que permiten modelizar, por ejemplo, la energía oscura. Finalizará el trabajo estudiando la entropía del horizonte en un modelo concreto, tanto en lo que se conoce régimen del equilibrio como del no-equilibrio.

Antes de proceder al desarrollo del trabajo, debe decirse que la signatura escogida para los cálculos es  $(-, +, +, +)$ . En cuanto a las dimensiones con las que se trabajará, debe decirse que siempre será en 4 excepto que se indique lo contrario, como en la sección 3 de agujeros negros.

## 2. Ecuaciones de campo para teorías $f(R)$

El primer paso de este trabajo será obtener las ecuaciones de campo de las teorías de gravedad extendida  $f(R)$ . La acción, en estas teorías, viene dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa}(S_{\text{met}} + S'_{\text{GHY}}) + S_{\text{M}} \quad (2)$$

donde  $\kappa = 8\pi G$ ,  $S_{\text{met}}$  es el Lagrangiano métrico, dado por:

$$S_{\text{met}} = \int_V d^4x \sqrt{-g}(R + f(R)), \quad (3)$$

$S_{\text{M}}$  tiene en cuenta la acción asociada a los campos de materia y  $S'_{\text{GHY}}$  es el término de frontera de Gibbons–Hawking–York [4]:

$$S'_{\text{GHY}} = 2 \oint_{\partial V} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} (1 + f'(R)) K \quad (4)$$

donde  $h$  es el determinante de la métrica inducida en la frontera de  $V$ ,  $\epsilon$  vale  $+1$  si la normal en la frontera es de tipo espacio y  $-1$  si es de tipo tiempo y  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca.

Este último término debe incluirse siempre en las ecuaciones si el espacio-tiempo considerado tiene frontera.

El primer paso para obtener las ecuaciones de campo es calcular la variación de la acción métrica, teniendo en cuenta la condición:

$$\delta g_{AB} |_{\partial V} = 0 \quad (5)$$

$$\delta S_{\text{met}} = \int_V dx^4 ((R + f(R))\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\delta(R + f(R))), \quad (6)$$

donde puede escribirse:

$$\delta(R + f(R)) = (1 + f'(R))\delta R, \quad (7)$$

siendo  $f'(R) = df(R)/dR$ .

Se toma ahora la variación del escalar de Ricci [4]:

$$\delta R = \delta g^{AB} R_{AB} + \nabla_C (g^{AB}(\delta\Gamma_{BA}^C) - g^{AC}(\delta\Gamma_{AD}^D)) \quad (8)$$

y se calcula, en primer lugar, los términos  $\delta\Gamma_{BA}^C$  y  $\delta\Gamma_{AD}^D$  teniendo en cuenta la variación del símbolo de Christoffel:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{BA}^C &= \frac{1}{2}\delta g^{CD} (\partial_B g_{DA} + \partial_A g_{DB} - \partial_D g_{BA}) \\ &+ \frac{1}{2}g^{CD} (\partial_B(\delta g_{DA}) + \partial_A(\delta g_{DB}) - \partial_D(\delta g_{BA})) \end{aligned} \quad (9)$$

y las derivadas parciales de la métrica pueden escribirse en función de sus derivadas covariantes como

$$\nabla_D \delta g_{AB} = \partial_D \delta g_{AB} - \Gamma_{DA}^C \delta g_{CB} - \Gamma_{DB}^C \delta g_{AC} \quad (10)$$

Introduciendo esta expresión en la variación del símbolo se Christoffel<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{BA}^C &= \frac{1}{2} \delta g^{CD} (\partial_B g_{DA} + \partial_A g_{DB} - \partial_D g_{BA}) + g^{CD} \Gamma_{BA}^E \delta g_{DE} + \\ &+ \frac{1}{2} g^{CD} (\nabla_B (\delta g_{DA}) + \nabla_A (\delta g_{DB}) - \nabla_D (\delta g_{BA})) \end{aligned} \quad (11)$$

A continuación, se usa la relación [5]:

$$\begin{aligned} \delta g_{AB} &= -g_{AC} g_{BD} \delta g^{CD} \\ \delta g^{AB} &= -g^{AC} g^{BD} \delta g_{CD} \end{aligned} \quad (12)$$

implementando dicha relación en (11) y teniendo en cuenta que la derivada covariante de la métrica es nula:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{BA}^C &= \delta g^{CD} g_{DE} \Gamma_{BA}^E - \delta g^{FH} \delta_F^C g_{EH} \Gamma_{BA}^E + \frac{1}{2} g^{CD} (\nabla_B (\delta g_{DA}) + \nabla_A (\delta g_{DB}) - \nabla_D (\delta g_{BA})) \\ &= \frac{1}{2} g^{CD} (\nabla_B (\delta g_{DA}) + \nabla_A (\delta g_{DB}) - \nabla_D (\delta g_{BA})). \end{aligned} \quad (13)$$

De la misma forma:

$$\delta \Gamma_{AD}^D = \frac{1}{2} g^{CD} \nabla_A (\delta g_{CD}). \quad (14)$$

Finalmente, es conveniente expresar  $\delta \Gamma_{BA}^C$  en función de  $\delta g^{AB}$ :

$$\delta \Gamma_{BA}^C = -\frac{1}{2} [g_{AD} \nabla_B (\delta g^{CD}) + g_{BD} \nabla_A (\delta g^{CD}) - g_{BF} g_{AH} \nabla^C (\delta g^{FH})] \quad (15)$$

donde se ha usado que  $\nabla_C = g^{CD} \nabla_D$ . Igualmente:

$$\delta \Gamma_{AD}^D = -\frac{1}{2} g_{FH} \nabla_A (\delta g^{FH}) \quad (16)$$

Volviendo a la variación del escalar de Ricci (8) con los resultados obtenidos:

$$\delta R = \delta g^{AB} R_{AB} + g_{FH} \square (\delta g^{FH}) - \nabla_C \nabla_D (\delta g^{CD}) \quad (17)$$

---

<sup>1</sup>Se está trabajando en una variedad sin torsión y, por tanto,  $\Gamma_{BC}^A = \Gamma_{CB}^A$

donde se define  $\square \equiv \nabla_C \nabla^C$ . Introduciendo estos resultados en la variación de la acción de la métrica:

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{met}} &= \int_V dx^4 \left( (R + f(R)) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (1 + f'(R)) \delta R \right) = \\
&= \int_V dx^4 \left( -\frac{1}{2} (R + f(R)) \sqrt{-g} g_{AB} \delta g^{AB} + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{-g} (1 + f'(R)) [\delta g^{AB} R_{AB} + g_{FH} \square (\delta g^{FH}) - \nabla_C \nabla_D (\delta g^{CD})] \right) = \\
&= \int_V dx^4 \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} (R + f(R)) g_{AB} \delta g^{AB} + (1 + f'(R)) [\delta g^{AB} R_{AB} + g_{FH} \square (\delta g^{FH}) \right. \\
&\quad \left. - \nabla_C \nabla_D (\delta g^{CD})] \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

Para continuar, deben definirse las siguientes magnitudes [4]:

$$\begin{aligned}
M_D &= (1 + f'(R)) g_{AB} \nabla_D (\delta g^{AB}) - \delta g^{AB} g_{AB} \nabla_D (1 + f'(R)) \\
N^C &= (1 + f'(R)) \nabla_D (\delta g^{AD}) - \delta g^{CD} \nabla_D (1 + f'(R))
\end{aligned} \tag{19}$$

y se calcula sus derivadas covariantes (usando, de nuevo, que la derivada covariante de la métrica es nula):

$$\begin{aligned}
\nabla^D M_D &= \nabla^D \left( (1 + f'(R)) g_{AB} \nabla_D (\delta g^{AB}) \right) - \nabla^D \left( \delta g^{AB} g_{AB} \nabla_D (1 + f'(R)) \right) \\
&= \nabla^D \left( (1 + f'(R)) g_{AB} \nabla_D (\delta g^{AB}) \right) + (1 + f'(R)) g_{AB} \square (\delta g^{AB}) \\
&\quad - \nabla^D (\delta g^{AB}) g_{AB} \nabla_D (1 + f'(R)) - \delta g^{AB} g_{AB} \square (1 + f'(R)) \\
&= (1 + f'(R)) g_{AB} \square (\delta g^{AB}) - \delta g^{AB} g_{AB} \square (1 + f'(R))
\end{aligned} \tag{20}$$

Si se considera su integral:

$$\begin{aligned}
\int_V d^4 x \sqrt{-g} \nabla^D M_D &= \int_V d^4 x \sqrt{-g} (1 + f'(R)) g_{AB} \square (\delta g^{AB}) - \int_V d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{AB} g_{AB} \square (1 + f'(R)) \\
&= \oint_{\partial V} \epsilon \sqrt{|h|} n^D M_D
\end{aligned} \tag{21}$$

donde en la última igualdad se ha usado el teorema de Stokes. Despejando el primer miembro de la primera igualdad, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_V d^4 x \sqrt{-g} (1 + f'(R)) g_{AB} \square (\delta g^{AB}) &= \oint_{\partial V} \epsilon \sqrt{|h|} n^D M_D \\
&\quad + \int_V d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{AB} g_{AB} \square (1 + f'(R))
\end{aligned} \tag{22}$$

que es una de las integrales que aparece en la variación de  $S_{\text{met}}$ . En cuanto a la derivada covariante de  $N^C$ :

$$\begin{aligned}\nabla_C N^C &= \nabla_C ((1 + f'(R))\nabla_D (\delta g^{CD})) - \nabla_C (\delta g^{CD}\nabla_D ((1 + f'(R)))) \\ &= \nabla_C ((1 + f'(R)))\nabla_D (\delta g^{CD}) + (1 + f'(R))\nabla_C\nabla_D (\delta g^{CD}) \\ &\quad - \nabla_C (\delta g^{CD})\nabla_D (1 + f'(R)) - \delta g^{CD}\nabla_C\nabla_D (1 + f'(R)) \\ &= (1 + f'(R))\nabla_C\nabla_B (\delta g^{CB}) - \delta g^{CB}\nabla_C\nabla_B (1 + f'(R))\end{aligned}\quad (23)$$

De nuevo, considerando la integral de dicha cantidad y usando el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}\int_V d^4x\sqrt{-g}(1 + f'(R))\nabla_C\nabla_B (\delta g^{CB}) &= \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n_C N^C \\ &\quad + \int_V d^4x\sqrt{-g}\delta g^{CB}\nabla_C\nabla_B (1 + f'(R))\end{aligned}\quad (24)$$

que coincide con otra de las integrales que aparecía en la variación de  $S_{\text{met}}$ . Dicha cantidad se escribe ahora:

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{met}} &= \int_V d^4x\sqrt{-g}((1 + f'(R))R_{AB} + g_{AB}\square(1 + f'(R)) - \nabla_A\nabla_B(1 + f'(R)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(R + f(R))g_{AB})\delta g^{AB} + \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n^\tau M_\tau + \oint_{\partial V} d^3y\epsilon\sqrt{|h|}n_C N^C\end{aligned}\quad (25)$$

De esta expresión, las integrales de superficie, los dos últimos términos de la derecha, se anularán, como va a demostrarse, con la variación del término de frontera  $S'_{\text{GHY}}$ .

Para ello, primero se escriben  $M_D$  y  $N^C$  en función de  $\delta g_{AB}$ :

$$\begin{aligned}M_D &= (1 + f'(R))g^{AB}\nabla_D(\delta g_{AB}) - \delta g_{AB}g^{AB}\nabla_D(1 + f'(R)) \\ N^C &= -(1 + f'(R))g^{CF}g^{DH}\nabla_D(\delta g^{FH}) + \delta g_{FH}g^{CF}g^{DH}\nabla_D(1 + f'(R))\end{aligned}\quad (26)$$

Ahora se calculan estas cantidades en la frontera  $\partial V$ , teniendo en cuenta que  $\delta g_{AB}|_{\partial V} = \delta g^{AB}|_{\partial V} = 0$ :

$$\begin{aligned}M_D|_{\partial V} &= (1 + f'(R))g^{AB}\partial_D(\delta g_{AB}) \\ N^C|_{\partial V} &= -(1 + f'(R))g^{CF}g^{DH}\partial_D(\delta g^{FH})\end{aligned}\quad (27)$$

Se debe calcular ahora  $n^D M_D$  y  $n_C N^C$  en la frontera, pues son las cantidades que aparecen en las integrales de superficie en (25):

$$\begin{aligned}n^D M_D|_{\partial V} &= -(1 + f'(R))n^D(\epsilon n^A n^B + h^{AB})\partial_D(\delta g_{AB}) \\ &= -(1 + f'(R))n^D h^{AB}\partial_D(\delta g_{AB})\end{aligned}\quad (28)$$

donde se ha usado que un tensor antisimétrico contraído con otro simétrico es nulo. [4].

Por otro lado:

$$\begin{aligned} n_C N^C |_{\partial V} &= -(1 + f'(R)) n_C (\epsilon n^C n^F + h^{CF}) (\epsilon n^D n^H + h^{DH}) \partial_D (\delta g_{FH}) = \\ &= -(1 + f'(R)) n^F (\epsilon n^D n^H + h^{DH}) \partial_D (\delta g_{FH}) = \\ &= -(1 + f'(R)) n^F h^{DH} \partial_D (\delta g_{FH}) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

donde ahora se usa que  $n_C h^{CF} = 0$ , la definición  $n_C n^C = \epsilon$  y que si  $\delta g_{FH}$  es nulo en la frontera, la derivada tangencial  $h^{DH} \partial_D (\delta g_{FH})$  también es nula [4]. Así, (25) queda:

$$\begin{aligned} \delta S_{met} &= \int_V d^4 x \sqrt{-g} \left( (1 + f'(R)) R_{AB} + g_{AB} \square (1 + f'(R)) - \nabla_A \nabla_B (1 + f'(R)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (R + f(R)) g_{AB} \right) \delta g^{AB} - \oint_{\partial V} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} (1 + f'(R)) n^C h^{AB} \partial_C (\delta g_{AB}) \end{aligned} \quad (30)$$

Ahora se considera la variación del término  $S'_{\text{GHY}}$ :

$$\begin{aligned} \delta S'_{\text{GHY}} &= 2 \oint_{\partial V} d^3 y \sqrt{|h|} (\delta (1 + f'(R)) K + (1 + f'(R)) \delta K) = \\ &= 2 \oint_{\partial V} d^3 y \sqrt{|h|} (f''(R) \delta R K + (1 + f'(R)) \delta K) \end{aligned} \quad (31)$$

siendo  $\delta K$  [4]:

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{AB} \delta \Gamma_{BA}^C n_C = -\frac{1}{2} h^{AB} g^{DC} [\partial_B (\delta g_{DA}) + \partial_A (\delta g_{DB}) - \partial_D (\delta g_{BA})] n_C = \\ &= -\frac{1}{2} h^{AB} [\partial_B (\delta g_{DA}) + \partial_A (\delta g_{DB}) - \partial_D (\delta g_{BA})] n^D = \\ &= \frac{1}{2} h^{AB} \partial_D (\delta g_{BA}) n^D \end{aligned} \quad (32)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \delta S'_{\text{GHY}} &= 2 \oint_{\partial V} d^3 y \sqrt{|h|} \left( f''(R) \delta R K + \frac{1}{2} (1 + f'(R)) h^{AB} \partial_D (\delta g_{BA}) n^D \right) = \\ &= 2 \oint_{\partial V} d^3 y \sqrt{|h|} f''(R) \delta R K + \oint_{\partial V} d^3 y \sqrt{|h|} (1 + f'(R)) h^{AB} \partial_D (\delta g_{BA}) n^D \end{aligned} \quad (33)$$

Como puede observarse, el segundo término de esta última variación cancela con el último término de (30). Por otro lado, debe imponerse también una condición extra, que  $\delta R = 0$  en la frontera.

Por tanto, la variación de la acción queda:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa} \int_V d^4 x \sqrt{-g} \left( (1 + f'(R)) R_{AB} + g_{AB} \square (1 + f'(R)) - \nabla_A \nabla_B (1 + f'(R)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (R + f(R)) g_{AB} \right) \delta g^{AB} - \frac{1}{2} \int_V d^4 x \sqrt{-g} T_{AB} \delta g^{AB} \end{aligned} \quad (34)$$

donde se ha definido el tensor energía-momento,

$$T^{AB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{AB}} \quad (35)$$

Finalmente, imponiendo que la variación sea estacionaria (esto es  $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{AB}} = 0$ ) se llega a las buscadas ecuaciones de campo de las teorías  $f(R)$ :

$$(1 + f'(R))R_{AB} + (g_{AB}\square - \nabla_A\nabla_B) f'(R) - \frac{1}{2}(R + f(R))g_{AB} = \kappa T_{AB} \quad (36)$$

A continuación, se estudian distintas propiedades generales de las teorías  $f(R)$  para  $D \geq 4$  dimensiones. En primer lugar, se va a tener en cuenta que  $g_{AB}$  es solución de la acción EH con constante cosmológica, es decir:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} + \frac{D-2}{2}\Lambda_D g_{AB} - 8\pi G_D T_{AB} = 0 \quad (37)$$

Así,  $g_{AB}$  también será solución de cualquier  $f(R)$  si se cumple que:

$$f'(R)R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}[f(R) + (D-2)\Lambda_D] + (g_{AB}\square - \nabla_A\nabla_B)f'(R) = 0 \quad (38)$$

Esta última relación proviene de introducir la ecuación (37) en las ecuaciones de campo  $f(R)$  (36). Se consideran ahora algunos casos simples de interés.

En primer lugar si se considera una constante cosmológica nula y que se está en vacío, la ecuación de campo de la gravedad de Einstein proporciona:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} = 0 \quad (39)$$

que, tomando la traza, se obtiene  $R = 0$  y, por tanto,  $R_{AB} = 0$ . Atendiendo ahora a la ecuación (38), debe cumplirse que, para que  $g_{AB}$  sea solución de cualquier teoría  $f(R)$ ,  $f(0) = 0$ .

Otro caso de interés es, considerando vacío, una constante cosmológica distinta de cero. Ahora, de la ecuación (37), se tiene una curvatura escalar constante e igual a  $R_0 = D\Lambda_D$  y, por tanto,  $R_{AB} = \Lambda_D g_{AB}$ . Tomando, con este resultado, la traza de la ecuación (38), se llega a la relación (41) para el  $R_0$  encontrado. De aquí se obtiene la condición que debe cumplir la función  $f(R)$ :  $f(D\Lambda_D) = \Lambda_D(2 - D + 2f'(D\Lambda_D))$ .

Finalmente, antes de pasar a estudiar agujeros negros, se considera el caso sin constante cosmológica y materia conforme (es decir,  $T_A^A = 0$ ) cuya ecuación de estado es la de un fluido perfecto  $\rho = (D-1)P$  siendo  $\rho$  la densidad y  $P$  la presión del fluido. De la ecuación

(37) se obtiene que  $R = 0$  y  $R_{AB} = 8\pi G_D T_{AB}$ . Teniendo en cuenta la relación (38), se llega (tomando la traza) que para que  $g_{AB}$  sea solución, debe cumplirse que  $f(0) = f'(0) = 0$ .

Si se tiene tanto materia conforme como constante cosmológica, se tiene, siguiendo el mismo desarrollo, que  $R = D\Lambda_D$  y  $R_{AB} = \Lambda_D g_{AB} + 8\pi G_D T_{AB}$ . Para que  $g_{AB}$  sea solución debe cumplirse que  $f(D\Lambda_D) = \Lambda_D(2 - D + f'(D\Lambda_D))$ .

## 2.1. Caso $R = R_0$ constante

Si ahora, a partir de las ecuaciones de campo (36), se considera ahora que la curvatura escalar es constante e igual a  $R = R_0$  y que se está en vacío. Esto resulta bastante útil pues simplifica las expresiones y permite sacar ciertas conclusiones. Por otro lado, también se usarán estos resultados en el posterior apartado de agujeros negros. Así, las ecuaciones de campo quedan:

$$R_{AB}(1 + f'(R)) - \frac{1}{2}g_{AB}(R + f(R)) = 0 \quad (40)$$

Tomando la traza de esta ecuación,  $R_0$  debe ser solución de:

$$2R_0(1 + f'(R_0)) - D(R_0 + f(R_0)) = 0 \quad (41)$$

y, por tanto, siempre que se cumpla  $(1 + f'(R)) \neq 0$ , existirá una solución de curvatura escalar constante dada por:

$$R_{AB} = \frac{R_0 + f(R_0)}{1 + f'(R_0)} g_{AB} \quad (42)$$

También pueden encontrarse soluciones de curvatura escalar constante si se considera

$$2R(1 + f'(R)) - D(R + f(R)) = 0 \quad (43)$$

como una ecuación diferencial de  $f(R)$ . La solución a esta ecuación diferencial es:

$$f(R) = CR^{D/2} - R \quad (44)$$

siendo  $C$  una constante. Así, si por ejemplo  $D = 4$ , cualquier acción cuadrática (proporcional a  $R^2$ ) tendrá siempre asociada una curvatura escalar constante.

Por tanto, en este apartado se ha visto el caso más sencillo que puede considerarse para un modelo  $f(R)$ , es decir, se ha analizado el caso en el que  $R = R_0$  constante. Por otro lado, se ha considerado una solución de las ecuaciones de Einstein,  $g_{AB}$ , y se ha estudiado, en distintos casos, qué condiciones debe cumplir el modelo  $f(R)$  para que dicha solución también cumpla las ecuaciones de campo  $f(R)$ .

### 3. Agujeros negros con curvatura constante en teorías $f(R)$

El primer objetivo de este apartado es obtener la métrica externa de un objeto no rotante en teorías en  $f(R)$ . Para ello, se considera la métrica estática y esféricamente simétrica más general posible en  $D \geq 4$  [6]:

$$ds^2 = e^{-2\Phi(r)} A(r) dt^2 - A^{-1}(r) dr^2 - r^2 d\Omega_{D-2}^2 \quad (45)$$

donde  $d\Omega_{D-2}^2$  es la métrica de la  $(D-2)$ -esfera. Si esta métrica se inserta en la acción gravitatoria  $S_{\text{met}}$  (3), considerándose vacío, y haciendo variaciones con respecto a  $A(r)$  y  $\Phi(r)$ , se obtiene [6]:

$$(2-D)(1+f'(R))\Phi'(r) - r[f'''(R)R'(r)^2 + f''(R)(\Phi'(r)R'(r) + R''(r))] = 0 \quad (46)$$

y

$$\begin{aligned} & 2rA(r)f'''(R)R'(r)^2 + f''(R)[2DA(r)R'(r) - 4A(r)R'(r) + 2rA(r)R''(r) + A'(r)rR'(r)] + \\ & g'(R)[-2rA(r)\Phi'(r)^2 + 2DA(r)\Phi'(r) - 4A(r)\Phi'(r) - rA''(r) + 2rA(r)\Phi''(r) + \\ & A'(r)(2-D + 3r\Phi'(r))] - r(R + f(R)) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

donde la prima en  $f$  denota derivada respecto a  $R$ . Si ahora se considera  $R = R_0$ , las dos ecuaciones anteriores se reducen a:

$$(2-D)(1+f'(R_0))\Phi'(r) = 0 \quad (48)$$

y

$$\begin{aligned} R + f(R) + (1+f'(R)) \left[ A''(r) + (D-2)\frac{A'(r)}{r} - (2D-4)\frac{A(r)\Phi'(r)}{r} \right. \\ \left. - 3A'(r)\Phi'(r) + 2A(r)\Phi'^2(r) - 2A(r)\Phi''(r) \right] = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Por otro lado, para las teorías  $f(R)$  con curvatura escalar constante, se había encontrado previamente que debe cumplirse la relación (41) siempre y cuando  $2(1+f'(R_0)) \neq D$ . De esta condición, se deduce que  $\Phi'(r) = 0$  de (48), pues si esto no fuera así, debería cumplirse que  $(1+f'(R_0)) = 0$  y, por tanto, de (41), se tendría que:

$$f(R_0) = -R_0 \quad (50)$$

es decir, la acción gravitatoria  $S_{\text{met}}$  sería idénticamente cero. Vista (48), la otra variación (49), queda:

$$R_0 + f(R_0) + (1 + f'(R_0)) \left[ A''(r) + (D - 2) \frac{A'(r)}{r} \right] = 0 \quad (51)$$

Si en esta última relación, se inserta la expresión de  $f(R_0)$  dada por (41), se tiene que:

$$A''(r) + (D - 2) \frac{A'(r)}{r} = -\frac{2}{D} R_0 \quad (52)$$

que es una ecuación diferencial inhomogénea de segundo orden, cuya solución es:

$$A(r) = C_1 + C_2 r^{3-D} - \frac{R_0}{D(D-1)} r^2 \quad (53)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos constantes. Para intentar obtener alguna de las constantes, puede calcularse el escalar de Ricci  $R$  para la métrica (45) sin considerar, de momento, curvatura constante. Como la métrica considerada es estática,  $R$  solo depende de la coordenada radial  $r$  [6]:

$$R(r) = \frac{1}{r^2} \left[ D^2 - 5D + 6 + rA'(r)(-2D + 3r\Phi'(r) + 4) - r^2 A''(r) - A(r)(D^2 - 5D + 2r^2\Phi'(r)^2 - 2(D-2)r\Phi'(r) - 2r^2\Phi''(r) + 6) \right] \quad (54)$$

donde la prima denota derivada respecto de  $r$ . A continuación, se calcula la solución estática y esféricamente simétrica más general posible para un escalar de curvatura constante  $R = R_0$ , sabiendo, por el desarrollo anterior, que  $\Phi(r) = \Phi_0$ . Así, la solución a la ecuación diferencial anterior es:

$$A(r) = 1 + a_1 r^{3-D} + a_2 r^{2-D} - \frac{R_0}{D(D-1)} r^2 \quad (55)$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes. El resultado obtenido en (55) es el más general posible con las condiciones que se han impuesto y, por ejemplo, si se considera  $D = 4$  y  $R_0 = 0$ , se tiene:

$$A(r) = 1 + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} \quad (56)$$

donde puede identificarse  $a_1 = -2GM$  y  $a_2 = Q^2$ , que es la conocida solución de Reissner-Nordström, un agujero negro de masa  $M$  y carga  $Q$ .

Atendiendo a (55) y comparando con (53), se deduce que  $C_1 = 1$ . Así, (53) no es más que, para  $R_0$  negativos, la generalización en  $D$  dimensiones del agujero negro Schwarzschild-*AdS*. Por tanto, escogiendo  $\Phi(r) = 0$ , se llega a [6]:

$$A(r) = 1 - \frac{R_S^{D-3}}{r^{D-3}} - \frac{r^2}{l^2} \quad (57)$$

siendo

$$R_S^{D-3} = \frac{16\pi G_D M}{(D-2)\mu_{D-2}} \quad (58)$$

y

$$\mu_{D-2} = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \quad (59)$$

es el área de la  $(D-2)$ -esfera,  $l^2 \equiv -D(D-1)/R_0$  es la escala espacial al cuadrado asintótica  $AdS$  y  $M$  es la masa del agujero negro.

Debe decirse que, comparando el resultado final obtenido en este apartado con (55), no todas las soluciones de agujeros negros con curvatura constante pueden obtenerse para teorías  $f(R)$  en vacío. Como ya se ha visto en (56), si se considera un tensor electromagnético, puede obtenerse la solución de un agujero negro con curvatura constante que no es solución del vacío.

Antes de continuar con la termodinámica, se va a exponer porque se estudia el agujero negro de Schwarzschild en el espacio-tiempo  $AdS$ .

### 3.1. Espacio-tiempo Anti-de Sitter

El espacio-tiempo  $AdS$  es una de las soluciones de las ecuaciones de Einstein maximalmente simétrica con curvatura escalar constante negativa y en vacío. Geométricamente,  $AdS$  puede visualizarse como un hiperboloide [7],

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = -a^2 \quad (60)$$

siendo  $a = \sqrt{-3/\Lambda}$ , embebido en un espacio-tiempo de cinco dimensiones plano:

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 - dZ_4^2 \quad (61)$$

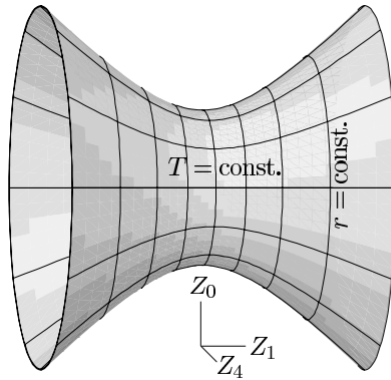
con  $Z_0$  y  $Z_4$  coordenadas temporales. Se pueden escoger las coordenadas  $(T, r, \theta, \phi)$  tales que [7]:

$$\begin{aligned} Z_0 &= a \cosh r \sin \frac{T}{a} \\ Z_1 &= a \sinh r \cos \theta \\ Z_2 &= a \sinh r \sin \theta \cos \phi \\ Z_3 &= a \sinh r \sin \theta \sin \phi \\ Z_4 &= a \cosh r \cos \frac{T}{a} \end{aligned} \quad (62)$$

siendo  $r$  un parámetro sin dimensiones y la métrica de  $AdS$  es:

$$ds^2 = -\cosh r^2 dT^2 + a^2 (dr^2 + \sinh r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (63)$$

De esta métrica se deduce que cualquier sección espacial con  $T = \text{constante}$  es un espacio tridimensional de curvatura negativa. Por otro lado, como ya se había comentado,  $Z_0$  y  $Z_4$  eran coordenadas temporales, y están parametrizadas por la coordenada temporal  $T$ , que es periódica. Esto quiere decir que valores de  $T$  que difieren un múltiplo de  $2\pi a$  representan el mismo punto del hiperboloide.



**Figura 1:** Visualización del espacio-tiempo  $AdS$ . Imagen tomada de [7].

Aquí se ha visto una de las principales características del espacio  $AdS$ : su topología es  $S^1 \times R^3$ .

La periodicidad de  $T$  no se ve fácilmente en la métrica (63) y, normalmente, lo que se hace es trabajar con  $T \in (-\infty, +\infty)$ , es decir, lo que se hace es desenrollar el círculo  $S^1$  y extenderlo a  $R^1$ . Realizar este proceso es obtener el espacio recubridor universal  $AdS$ , que tiene topología  $R^4$  [7].

La métrica que va a usarse en este trabajo es, a partir de (62), realizar el cambio  $R = a \sinh r$ , quedando:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right) dT^2 + \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{-1} dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (64)$$

En cuanto a la termodinámica, históricamente se descubrieron las propiedades termodinámicas de los agujeros negros por el hecho de que el área del horizonte de eventos no puede decrecer, analogía con la entropía establecida por la segunda ley de la termodinámica. Por tanto, Bekenstein propuso que la entropía del agujero negro es un múltiplo del área del horizonte.

Sin embargo, había inconsistencias con esta segunda ley de la termodinámica, pues el agujero negro solo se sabía, por ese entonces, que absorbía partículas. Cuando se tuvieron en cuenta los efectos cuánticos, se descubrió que los agujeros negros emitían partículas como un cuerpo caliente haría a una temperatura igual a  $\kappa/2\pi$ , siendo  $\kappa$  la gravedad superficial [8].

Todo este estudio se realizó primero para un espacio-tiempo plano. También puede realizarse la termodinámica si se está en un espacio-tiempo con curvatura escalar constante positiva (de Sitter) o negativa (Anti-de Sitter).

En el caso de de Sitter, los agujeros negros emiten partículas a temperatura  $\kappa/2\pi$ . Sin embargo, este espacio-tiempo posee un horizonte de eventos cosmológico y el equilibrio térmico solo es posible si ambos horizontes son exactamente iguales. Por tanto, la termodinámica se complica.

En cuanto a Anti-de Sitter, fue considerado como el que menos interés físico tenía. La primera razón de ello fue la constante cosmológica negativa, que se entiende como la energía del vacío. El otro hecho es la topología de dicho espacio-tiempo, que ya se ha visto que puede solucionarse pasando a trabajar en el espacio recubridor universal, aunque este no es globalmente hiperbólico. Por tanto, para realizar física en Anti-de Sitter hay que dar, a parte de condiciones iniciales en una hipersuperficie espacial, las condiciones de contorno para la radiación que viene desde infinito [8].

A pesar de ello, este espacio-tiempo ha pasado a tener cierta importancia. En primer lugar, no se tiene un horizonte cosmológico como en de Sitter, por lo que se eliminan dificultades de estabilidad. También, juega un papel importante en la correspondencia AdS/CFT y en el principio holográfico [9].

Por tales razones, resulta de gran importancia el estudio de la termodinámica en el espacio-tiempo  $AdS$ , que se va a desarrollar en el siguiente apartado.

### 3.2. Termodinámica de los agujeros negros en teorías $f(R)$

Para comenzar a estudiar la termodinámica de los agujeros negros en teorías  $f(R)$  en el espacio AdS, la primera cantidad que debe definirse es la temperatura. Esta magnitud puede definirse de dos formas distintas, proviniendo la primera definición de la gravedad cuántica Euclídea. En este caso, se introduce el tiempo euclídeo  $\tau = it$  y se trabaja con la métrica euclídea  $ds_E^2$  [6]:

$$ds_E^2 = d\sigma^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2 \quad (65)$$

siendo:

$$d\sigma^2 = e^{-2\Phi(r)} A(r) d\tau^2 + A^{-1}(r) dr^2 \quad (66)$$

La métrica euclídea expuesta corresponde únicamente a la región  $r > r_H$ , siendo  $r_H$  el horizonte del agujero negro, para el cuál se cumple que  $A(r_H) = 0$ . Si ahora se hace una expansión de  $d\sigma^2$  alrededor de  $r_H$ , se tiene:

$$d\sigma^2 = e^{-2\Phi(r_H)} A'(r_H) \rho d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{A'(r_H) \rho} \quad (67)$$

donde  $\rho = r - r_H$ . Si se introducen las coordenadas  $\theta$  y  $\tilde{R}$ , definidas como [6]:

$$\theta = \frac{1}{2} e^{-\Phi(r_H)} A'(r_H) \tau, \quad \tilde{R} = 2 \sqrt{\frac{\rho}{A'(r_H)}} \quad (68)$$

queda:

$$d\sigma^2 = \tilde{R}^2 d\theta^2 + dR^2 \quad (69)$$

Antes de continuar, se deben introducir ciertos conocimientos de gravedad cuántica euclídea para entender la naturaleza del tiempo euclídeo introducido. En este contexto, se utiliza la integral de camino, que es una suma sobre todos los posibles estados intermedios entre un estado inicial y otro final dado. Para campos, la integral de camino es [10]:

$$\langle \phi_2 | e^{-\beta H} | \phi_1 \rangle = \int_{\phi(\tau=0)=\phi_1}^{\phi(\tau=\beta)=\phi_2} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (70)$$

donde  $\mathcal{D}\phi$  es la medida en el espacio de todos los campos considerados,  $e^{-\beta H}$  es el operador de evolución y  $S_E$  es la acción euclídea.

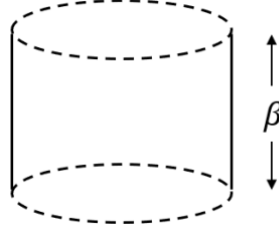
Por otro lado, para estudiar la dinámica de los sistemas se usan las matrices de densidad, expresadas como integrales de camino:

$$\rho_\beta(x, x') = \frac{1}{Z} \langle x | e^{-\beta H} | x' \rangle \quad (71)$$

donde  $Z$  es la función de partición, dada por:

$$Z = \int dx \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle \quad (72)$$

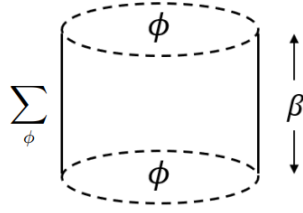
En el caso de campos, la matriz de densidad en un operador que toma un *bra*  $\langle \phi_2 |$  y un *ket*  $|\phi_1 \rangle$  y devuelve un número complejo. Por tanto, los elementos de matriz son  $\langle \phi_2 | e^{-\beta H} | \phi_1 \rangle$ , es decir, integrales de camino con condiciones de contorno  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Esto quiere decir que la matriz de densidad puede definirse como una integral de camino sin los campos inicial



**Figura 2:** Visualización de la matriz de densidad. La matriz de densidad toma dos estados (círculos) e interaccionan mediante el operador de evolución, representado como el cuerpo de un cilindro de lado  $\beta$ . Imagen tomada de [10].

y final especificados, es decir, sin condiciones de contorno [10]. Topológicamente, para estados representados por círculos, la matriz de densidad es:

La matriz de densidad está definida para una colectividad térmica con una temperatura  $T = 1/\beta$ . La función de partición térmica puede definirse como la traza de la matriz de densidad:

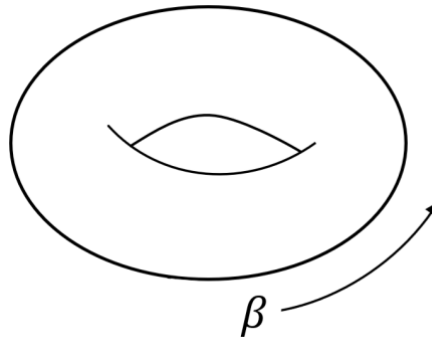


**Figura 3:** Visualización topológica de la función de partición. Imagen tomada de [10].

Es decir, es una integral de camino con el mismo estado inicial y final. Por tanto, desde el punto de vista topológico, significa que se deben «juntar» los bordes. Esto puede conseguirse si el tiempo euclídeo introducido es periódico, siendo  $\beta$  su período. Así, la función de partición térmica en un círculo es una integral de camino en un toro, como se visualiza en la Figura 4.

Por tanto, se tiene que el tiempo euclídeo es periódico con período  $\beta$ . Volviendo a la termodinámica de los agujeros negros, a partir de la definición de  $\theta$  en (68) e imponiendo que esta magnitud tome valores entre 0 y  $2\pi$  (y sabiendo que  $\tau$  va desde 0 hasta  $1/T_E$ , por la explicación dada) se tiene como definición de temperatura:

$$T_E = \frac{1}{4\pi} e^{-\Phi(r_H)} A'(r_H) \quad (73)$$



**Figura 4:** Visualización topológica de la función de partición al juntar los bordes. Imagen tomada de [10].

Otra definición posible de temperatura es relacionándola con la gravedad superficial  $\kappa$ , que mide la fuerza del campo gravitatorio en el horizonte  $r_H$ :

$$T_\kappa \equiv \frac{\kappa}{2\pi} \quad (74)$$

siendo [6]:

$$\kappa = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow r_H} \frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{|g_{tt}g_{rr}|}} \quad (75)$$

Utilizando la métrica euclídea (65), se llega a:

$$T_\kappa = T_E \equiv T \quad (76)$$

Por tanto, ambas definiciones proporcionan el mismo resultado. Como puede observarse, la temperatura solo depende del comportamiento de la métrica cerca del horizonte y no de la acción gravitacional utilizada. Esto quiere decir que si distintas acciones tienen las mismas soluciones, tendrán asociadas la misma temperatura. A continuación, para los siguientes cálculos se tendrán en cuenta el agujero negro Schwarzschild-*AdS*, cuya métrica se obtuvo anteriormente (ver (57)).

Derivando la expresión (57) respecto de  $r$ , evaluándola en el horizonte y utilizándola para obtener la relación entre  $r_H$  y  $R_S$ , se llega a:

$$\beta = 1/T = \frac{4\pi l^2 r_H}{(D-1)r_H^2 + (D-3)l^2} \quad (77)$$

La temperatura es una magnitud que solo depende de  $r_H$ , es decir, del tamaño del agujero negro. Si se hace tender  $r_H$  a cero, la temperatura diverge como  $T \sim 1/r_H$  y, por otro

lado, si  $r_H$  tiende a infinito, la temperatura crece linealmente con el radio del horizonte. Como consecuencia,  $T$  tiene un mínimo en:

$$r_{H0} = l\sqrt{\frac{D-3}{D-1}} \quad (78)$$

que corresponde a una temperatura:

$$T_0 = \frac{\sqrt{(D-1)(D-3)}}{2\pi l} \quad (79)$$

Por el análisis hecho de cómo depende la temperatura según  $r_H$ , es obvio que para  $T > T_0$ , existen dos posibles tamaños de agujero negro: uno llamado agujero negro pequeño con  $r_H < r_{H0}$  y el otro agujero negro grande correspondiente a un radio  $r_H > r_{H0}$ .

Otro valor de temperatura que va a resultar útil para el posterior análisis termodinámico es el correspondiente a  $r_H = l$ :

$$T_1 = \frac{D-2}{2\pi l} \quad (80)$$

Para obtener las distintas magnitudes termodinámicas en teorías  $f(R)$  se introduce la acción euclídea:

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{g_E} (R + f(R)) \quad (81)$$

La expresión anterior, cuando se evalúa sobre una métrica con un tiempo euclídeo de período  $\beta$ , el resultado es, por el formalismo de la gravedad cuántica euclídea,  $\beta$  veces la energía libre  $F$  asociada a dicha métrica [6]. El procedimiento que se va a seguir es calcular la diferencia de la acción actuando en la métrica del espacio-tiempo  $AdS$  (64) con la métrica del agujero negro de Schwarzschild- $AdS$  (57).

A partir de (81), se tiene:

$$\Delta S_E = -\frac{R_0 + f(R_0)}{16\pi G_D} \Delta V \quad (82)$$

donde  $\Delta V$  es la diferencia de volumen entre ambas métricas, pues se está considerando curvatura constante  $R_0$  y en la integral de la acción euclídea solo permanece la raíz del determinante de la métrica. En otras palabras, lo que se está haciendo es calcular el volumen del espacio-tiempo  $AdS$  y restarle el volumen del agujero negro. Esto proporcionará la energía libre asociada al agujero negro. Puesto que ambos volúmenes son infinitos, el límite superior de la integral radial se hará hasta  $R'$  y, posteriormente, se tomará el límite de este parámetro a infinito. El volumen del espacio-tiempo  $AdS$  es:

$$V_1(R) = \int_0^{\beta'} dt \int_0^{R'} dr \int_{S^{D-2}} d\Omega_{D-2}^2 r^{D-2} \quad (83)$$

y el del agujero negro:

$$V_2(R) = \int_0^\beta dt \int_{r_H}^{R'} dr \int_{\mathbf{S}^{D-2}} d\Omega_{D-2}^2 r^{D-2} \quad (84)$$

Las diferencias entre ambas integrales es que para el agujero negro, la parte radial comienza en el horizonte, no en cero y, por otro lado, ambas métricas poseen períodos de tiempo euclídeo distintos. El siguiente paso es ajustar el valor de  $\beta'$  para que la geometría en la hipersuperficie  $r = R'$  sea la misma en ambos casos. Atendiendo a la forma de ambas métricas ((64) y (57)), se tiene:

$$\beta' = \beta \frac{\sqrt{\frac{R'^2}{l^2} + 1 - \frac{R_S^{D-3}}{R'^{D-3}}}}{\sqrt{1 + \frac{R'^2}{l^2}}} \quad (85)$$

Así, la diferencia de volúmenes buscada es:

$$\Delta V = \lim_{R' \rightarrow \infty} [V_2(R') - V_1(R')] = \lim_{R' \rightarrow \infty} \frac{\mu_{D-2}\beta}{D-1} \left( R'^{D-1} - r_H^{D-1} - R'^{D-1} \frac{\sqrt{\frac{R'^2}{l^2} + 1 - \frac{R_S^{D-3}}{R'^{D-3}}}}{\sqrt{1 + \frac{R'^2}{l^2}}} \right) \quad (86)$$

Reordenando, se tiene:

$$\Delta V = \lim_{R' \rightarrow \infty} \frac{\mu_{D-2}\beta}{D-1} \left[ R'^{D-1} \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{R'^2}{l^2} + 1 - \frac{R_S^{D-3}}{R'^{D-3}}}}{\sqrt{1 + \frac{R'^2}{l^2}}} \right) - r_H^{D-1} \right]. \quad (87)$$

Haciendo el límite y sabiendo la relación entre  $R_S$  y  $r_H$ , se tiene:

$$\Delta V = \frac{\mu_{D-2}\beta}{D-1} \left( \frac{1}{2} l^2 r_H^{D-3} + \frac{1}{2} r_H^{D-1} - r_H^{D-1} \right) = \frac{\mu_{D-2}\beta}{2(D-1)} (l^2 r_H^{D-3} - r_H^{D-1}), \quad (88)$$

Por tanto, la diferencia de la acción euclídea es:

$$\Delta S_E = -\frac{(R_0 + f(R_0)) \beta \mu_{D-2}}{32\pi(D-1)G_D} (l^2 r_H^{D-3} - r_H^{D-1}) = \beta F. \quad (89)$$

De este resultado, puede observarse que para  $-(R_0 + f(R_0)) > 0$  (caso usual en la gravedad de Einstein), se tiene que  $F > 0$  para  $r_H < l$  y  $F < 0$  para  $r_H > l$ , es decir, el signo de la energía libre cambia si se tiene una temperatura mayor o menor que  $T_1$  (expresión (80)).

Una vez se ha obtenido la diferencia de la acción euclídea, puede calcularse la energía como:

$$E = \frac{\partial \Delta S_E}{\partial \beta}. \quad (90)$$

Para el caso que estamos considerando, el agujero negro de Schwarzschild- $AdS$ , se tiene:

$$E = \frac{\partial \Delta S_E}{\partial r_H} \cdot \frac{\partial r_H}{\partial \beta} = - \frac{(R_0 + f(R_0)) \mu_{D-2}}{32\pi(D-1)G_D} \left( l^2 r_H^{D-3} - r_H^{D-1} + \beta [l^2(D-3)r_H^{D-4} - (D-1)r_H^{D-2}] \frac{\partial r_H}{\partial \beta} \right) \quad (91)$$

y la derivada parcial de  $r_H$  con respecto a  $\beta$  es:

$$\frac{\partial r_H}{\partial \beta} = \left( \frac{\partial \beta}{\partial r_H} \right)^{-1} = \frac{[(D-1)r_H^2 + (D-3)l^2]^2}{4\pi l^2 [l^2(D-3) - (D-1)r_H^2]}. \quad (92)$$

Por tanto<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} E &= X \left[ l^2 r_H^{D-3} - r_H^{D-1} + \frac{4\pi l^2 r_H}{(D-1)r_H^2 + (D-3)l^2} \left( l^2(D-3)r_H^{D-4} - (D-1)r_H^{D-2} \right) \right. \\ &\quad \left. \frac{[(D-1)r_H^2 + (D-3)l^2]^2}{4\pi l^2 [l^2(D-3) - (D-1)r_H^2]} \right] = \\ &= X \left[ l^2 r_H^{D-3} - r_H^{D-1} + r_H^{D-3} ((D-1)r_H^2 + (D-3)l^2) \right] = X \left[ l^2 r_H^{D-3}(D-2) + r_H^{D-1}(D-2) \right] = \\ &= X(D-2)l^2 \left[ r_H^{D-3} + \frac{r_H^{D-1}}{l^2} \right] = X(D-2)l^2 R_S^{D-3} = X(D-2)l^2 \frac{16\pi G_D M}{(D-2)\mu_{D-2}} = \\ &= - \frac{(R_0 + f(R_0))l^2 M}{2(D-1)} \end{aligned} \quad (93)$$

, donde  $M$  es la masa del agujero negro, tal y como se había definido anteriormente en (58).

En el caso particular de la Relatividad General con constante cosmológica, donde se tiene  $f(R) = -(D-2)\Lambda_D$  [6], la energía del agujero negro de Schwarzschild toma la forma:

$$E = M \quad (94)$$

Por otro lado, de la expresión (93), se deduce que para tener una energía positiva en el espacio-tiempo  $AdS$  en el marco de las teorías  $f(R)$  debe cumplirse que  $R_0 + f(R_0) < 0$ .

A continuación, se calcula la entropía, mediante la relación termodinámica:

$$S = \beta E - \beta F \quad (95)$$

---

<sup>2</sup>Llamando  $X = - \frac{(R_0 + f(R_0))\mu_{D-2}}{32\pi(D-1)G_D}$

Desarrollando, se tiene:

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{(R_0 + f(R_0))\mu_{D-2}\beta}{32\pi(D-1)G_D}(D-2)l^2 \left( r_H^{D-3} + \frac{r_H^{D-1}}{l^2} \right) + \frac{(R_0 + f(R_0))\mu_{D-2}\beta}{32\pi(D-1)G_D} \left( l^2 r_H^{D-3} - r_H^{D-1} \right) = \\
&= -\frac{(R_0 + f(R_0))\mu_{D-2}\beta}{32\pi(D-1)G_D} \left[ l^2(D-2)r_H^{D-3} + (D-2)r_H^{D-1} - l^2 r_H^{D-3} + r_H^{D-1} \right] = \\
&= -\frac{(R_0 + f(R_0))\mu_{D-2}\beta}{32\pi(D-1)G_D} \frac{4\pi l^2 r_H}{l^2(D-3) + (D-1)r_H^2} \left[ l^2(D-3)r_H^{D-3} + (D-1)r_H^{D-1} \right] = \\
&= -\frac{(R_0 + f(R_0))l^2\mu_{D-2}r_H^{D-2}}{8(D-1)G_D} = -\frac{(R_0 + f(R_0))l^2 A_{D-2}}{8(D-1)G_D}
\end{aligned} \tag{96}$$

donde se define  $A_{D-2} \equiv \mu_{D-2}r_H^{D-2}$  como el área del horizonte del agujero negro. De nuevo, vuelve a encontrarse, en la expresión (96), la condición de que  $R_0 + f(R_0) < 0$ . Si el resultado anterior se aplica al caso particular de la Relatividad General, ahora sin constante cosmológica, donde  $R_0 = -2(D-1)/l^2$ , se llega a la fórmula de Bekenstein-Hawking:

$$S = \frac{A_{D-2}(r_H)}{4G_D} \tag{97}$$

Finalmente, para completar el cálculo termodinámico, se obtiene la capacidad calorífica  $C$ , definida como:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \tag{98}$$

Para proceder, uno debe fijarse en la expresión (93), donde la única magnitud que depende de la temperatura en la expresión final es la masa  $M$ . A partir de ahí, solo debe acudir a la definición dada de la masa (58) para poder derivar. Así, se tiene:

$$C = -\frac{(R_0 + f(R_0))l^2}{2(D-1)} \frac{\partial M}{\partial T} \tag{99}$$

Por otro lado, se calcula la derivada de la masa respecto de la temperatura:

$$\frac{\partial M}{\partial T} = \frac{(D-2)\mu_{D-2}}{16\pi G_D} \frac{\partial R_S^{D-3}}{\partial T} = \frac{(D-2)\mu_{D-2}}{16\pi G_D} \left( (D-3)r_H^{D-4} + \frac{(D-1)}{l^2} r_H^{D-2} \right) \frac{\partial r_H}{\partial T}, \tag{100}$$

donde

$$\frac{\partial r_H}{\partial T} = -\beta^2 \frac{\partial r_H}{\partial \beta} = -\frac{4\pi l^2 r_H^2}{(D-3)l^2 - (D-1)r_H^2}. \tag{101}$$

Así, se llega a:

$$\frac{\partial M}{\partial T} = \frac{(D-2)\mu_{D-2}r_H^{D-2}}{4G_D} \frac{(D-1)r_H^2 + l^2(D-3)}{(D-1)r_H^2 - l^2(D-3)}, \tag{102}$$

y, finalmente, la capacidad calorífica queda:

$$C = -\frac{(R_0 + f(R_0))l^2(D-2)\mu_{D-2}r_H^{D-2}}{8G_D(D-1)} \cdot \frac{(D-1)r_H^2 + l^2(D-3)}{(D-1)r_H^2 - l^2(D-3)}. \tag{103}$$

Para el caso de Relatividad General, se obtiene:

$$C = \frac{(D-2)\mu_{D-2}r_H^{D-2}}{4G_D} \frac{(D-1)r_H^2 + (D-3)l^2}{(D-1)r_H^2 - (D-3)l^2} \quad (104)$$

y, en particular, para Schwarzschild, donde  $l$  tiende a infinito:

$$C = -\frac{(D-2)\mu_{D-2}r_H^{D-2}}{4G_D} < 0 \quad (105)$$

que es el conocido resultado para agujeros negros en Relatividad General.

Una vez se han calculado todas las magnitudes termodinámicas, puede procederse a estudiar la estabilidad de los agujeros negros en las teorías  $f(R)$ . En primer lugar, como se vio cuando se estudiaba la temperatura de un agujero negro en función del radio, esta tenía un mínimo en  $T_0$ . Por ello, nunca se podrá tener un agujero negro con  $T < T_0$ .

Considérense, por tanto, temperaturas  $T$  mayores que  $T_0$ . Cuando se puede tener un agujero negro, se consideran dos tipos de estabilidad. La primera de ellas es la estabilidad local, que tiene que ver con el signo de la capacidad calorífica y proporciona información sobre si el agujero negro es estable por sí mismo. Si  $C < 0$  el agujero negro no es estable [8], como se verá a continuación.

El otro tipo de estabilidad es la estabilidad global, que viene dada por el signo de la energía libre  $F$ . Si  $F > 0$  se dice que el agujero negro, a pesar de que podría ser localmente estable, no es estable ante la radiación térmica del Universo y, por tanto, decaerá, pues el sistema es más estable sin agujero negro [8].

Para  $T > T_0$  se distinguen dos radios posibles para el agujero negro:  $r_H < r_{H_0}$  (lo que se conoce como agujero negro pequeño) o  $r_H > r_{H_0}$  (agujero negro grande). En el caso del agujero negro pequeño, se tiene que la capacidad calorífica es negativa ( $C < 0$ ). Por tanto, es inestable y decaerá a radiación térmica (se evaporará), lo que se conoce como decaimiento en radiación de Hawking o decaerá al agujero negro grande. Esto ocurre pues esta inestabilidad produce que la tasa de absorción del agujero negro y de emisión de radiación (radiación Hawking) no es la misma y, por tanto, el sistema cambiará dependiendo de cuál de estas sea mayor (si absorbe más que emite, aumentará su radio del horizonte. Si es al revés, se evaporará).

En cambio, para el agujero negro grande, la capacidad calorífica es positiva y es por ello que se dice que es localmente estable.

Puesto que estos agujeros negros grandes son localmente estables, puede estudiarse su estabilidad global. Esta depende del signo de la energía libre. Si se tienen temperaturas menores que  $T_1$  (que le corresponde un radio  $r_H = l$ ), es decir,  $T_0 < T < T_1$ , se tiene que la energía libre (89) es positiva ( $F > 0$ ). Por tanto, el sistema sería más estable si el agujero negro se evapora completamente (ya que disminuiría la energía libre). Consecuentemente, estos agujeros negros no son globalmente estables.

Si  $T > T_1$ , la energía libre es negativa y, por ende, el agujero negro sería globalmente estable, es decir, podría estar en equilibrio una vez se considere que el agujero negro se encuentra en interacción con radiación.

A continuación, con los resultados expuestos, se estudian diversos modelos  $f(R)$  específicos.

### 3.3. Modelo 1: $f(R) = \alpha(-R)^\beta$

Este primer modelo resulta interesante desde el punto de vista histórico. Uno de los primeros modelos que se propuso para explicar la inflación fue una función proporcional a  $R^2$ . Por otro lado, aunque este modelo se va a utilizar para estudiar la estabilidad de agujeros negros, debe decirse que, desde el punto de vista cosmológico, es estable si  $\alpha < 0$  y  $0 < \beta < 1$  [11].

Para comenzar a estudiar este modelo, primero debe verse que  $R_0$  constante le corresponde. Esto es, básicamente, obtener la curvatura escalar a partir de la relación (41). Para este modelo se obtiene:

$$R_0 \left[ \left(1 - \frac{2}{D}\right) - \alpha(-R_0)^{\beta-1} \left(1 - \frac{2}{D}\beta\right) \right] = 0 \quad (106)$$

y, puesto que se busca una curvatura constante no nula:

$$R_0 = - \left[ \frac{2-D}{(2\beta-D)\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (107)$$

Se recuerda que se asume que la dimensión  $D$  es mayor que 2. Así, para que la curvatura escalar esté bien definida, debe cumplirse que  $(2\beta - D)\alpha < 0$ . Esta condición proporciona dos posibilidades:

1. Caso 1:  $\alpha > 0$  y  $\beta < D/2$ .
2. Caso 2:  $\alpha < 0$  y  $\beta > D/2$ .

En este modelo, se tiene que:

$$1 + f'(R_0) = \frac{D(\beta - 1)}{2\beta - D} \quad (108)$$

Se debe cumplir, por (41), que esta cantidad sea positiva. En el Caso 2, esto siempre se cumple, pero el Caso 1 debe modificarse para que se cumpla esta condición: pasa a ser  $\alpha > 0$  y  $\beta < 1$ .

A continuación, mediante un programa en Python, se estudiará, para cada uno de estos casos y distintos valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , el signo de la capacidad calorífica  $C$  y la energía libre  $F$  con las expresiones encontradas en el apartado anterior.

Por simplicidad, el cálculo se hará considerando  $R_S = 1,5$ . Por otro lado, se tendrán en cuenta  $D = 4, 5$  dimensiones. Se comienza en cuatro dimensiones.

En la Figura 5 se visualiza el resultado para  $D = 4$  y puede observarse como, dependiendo de los distintos valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , se obtienen diferentes regiones termodinámicas.

Por un lado, se tiene una región donde el agujero negro no es localmente estable (región roja). La zona pintada de verde corresponde a una región donde el agujero negro es localmente estable pero que, al ser su energía libre positiva, no lo sería globalmente, pues podría decaer a radiación. Finalmente, la región azul proporciona agujeros negros tanto local como globalmente estables.

Los resultados en  $D = 5$  dimensiones se muestran en la Figura 6. Los cambios más significativos que se encuentran es que la zona roja, es decir, donde el agujero negro no es localmente estable, aumenta considerablemente. Por otro lado, la región verde (localmente estable pero no globalmente) se reduce, pasando a ser casi inexistente.

### 3.4. Modelo 2: $f(R) = R(\log(\frac{\alpha}{R_c}R))^\beta - R$

En este modelo,  $R_c$  es una constante que hace que el parámetro  $\alpha$  sea adimensional. Por otro lado, se ha escogido este modelo puesto que se ha estudiado desde un punto de vista cosmológico [11] y resulta estable para  $\beta > 0$ .

La curvatura escalar constante en este segundo modelo es:

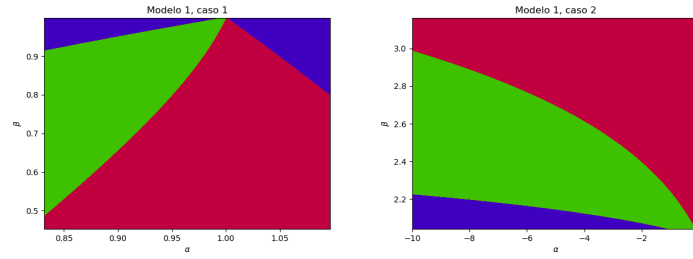
$$R_0 = \frac{R_c}{\alpha} \exp \frac{2\beta}{2-D} \quad (109)$$

Puesto que se está trabajando en Schwarzschild- $AdS$ ,  $R_0$  es negativo y, por tanto,  $\alpha/R_c$  también lo será. Por otro lado,  $\frac{\alpha}{R_c}R_0$  debe ser mayor que uno, para no tener en el modelo  $f(R)$  un número negativo elevado a  $\beta$  (y evitar problemas con las raíces cuadradas). Así, por la expresión del escalar de curvatura,  $\beta > 0$ . Aquí solo se tiene un caso que se estudiará para  $D = 4, 5$ ,  $R_S = 1,5$  y  $R_c = 1$ , las distintas regiones termodinámicas en cuatro y cinco dimensiones se observan en la Figura 7.

De nuevo, se obtiene una región correspondiente a agujeros negros globalmente estables (azul), otra a localmente estables (verde) y otra donde no hay ningún tipo de estabilidad (rojo).

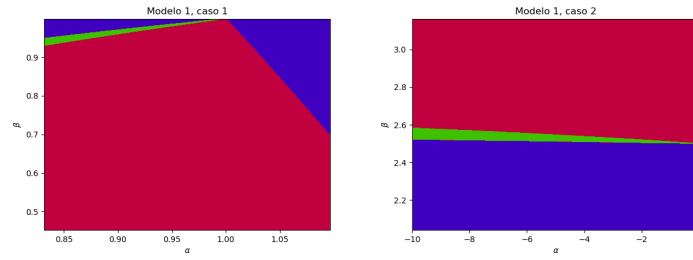
Por otro lado, la dependencia con la dimensión muestra que las zonas global y localmente estables se desplazan hacia valores mayores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Como ha podido observarse en el estudio de estos dos modelos  $f(R)$  concretos, hay un caso que no se da:  $C < 0$  y  $F < 0$ . Esto se debe a que, según el estudio termodinámico hecho en la sección 3.2,  $C < 0$  si  $r_H < r_{H_0}$  siendo, en este rango, la energía libre negativa. Por otro lado,  $F < 0$  si  $r_H > l$  y, para estos valores del radio del horizonte, la capacidad calorífica es positiva. Por tanto, se ha podido visualizar con estos modelos un resultado teórico obtenido.



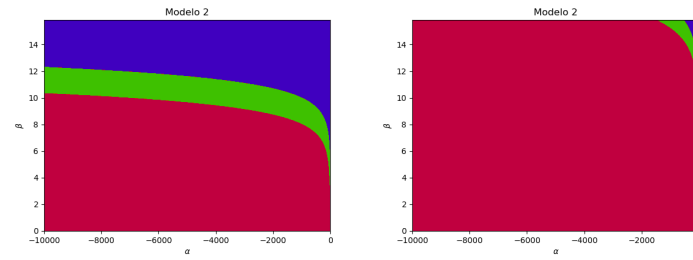
(a) Modelo 1. Caso 1.  $D = 4$ . (b) Modelo 1. Caso 2.  $D = 4$ .

**Figura 5:** Gráficas para ambos casos del modelo 1 con  $D = 4$  dimensiones. Se representa en los ejes los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  y se distinguen distintos colores según los signos de  $C$  y  $F$ . El color verde indica que  $C > 0$  y  $F > 0$ . El color azul que  $C > 0$  y  $F < 0$ . El color rojo que  $C < 0$  y  $F > 0$ .



(a) Modelo 1. Caso 1.  $D = 5$ . (b) Modelo 1. Caso 2.  $D = 5$ .

**Figura 6:** Gráficas para ambos casos del modelo 1 con  $D = 5$  dimensiones. Se representa en los ejes los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  y se distinguen distintos colores según los signos de  $C$  y  $F$ . El color verde indica que  $C > 0$  y  $F > 0$ . El color azul que  $C > 0$  y  $F < 0$ . El color rojo que  $C < 0$  y  $F > 0$ .



(a) Modelo 2.  $D = 4$ . (b) Modelo 2.  $D = 5$ .

**Figura 7:** Gráficas para el modelo 2 con  $D = 4, 5$  dimensiones. Se representa en los ejes los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  y se distinguen distintos colores según los signos de  $C$  y  $F$ . El color verde indica que  $C > 0$  y  $F > 0$ . El color azul que  $C > 0$  y  $F < 0$ . El color rojo que  $C < 0$  y  $F > 0$ .

## 4. Termodinámica del horizonte del Universo

El descubrimiento de la entropía de los agujeros negros por Bekenstein abrió la ventana a una profunda conexión entre la gravitación y la termodinámica.

De hecho, Jacobson demostró en [12] que las ecuaciones de Einstein pueden derivarse de la relación de Clausius  $TdS = dQ$  junto con la relación de proporcionalidad  $S \propto A$ , donde  $dQ$  es el flujo de energía a través del horizonte y  $T$  la temperatura de Unruh.

A diferencia de los agujeros negros estacionarios que se han estudiado en la sección anterior, el Universo tiene un horizonte que cambia su dinámica, pues se está expandiendo. En la presente sección, se estudiará la termodinámica del horizonte cosmológico utilizando la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) y, como se verá, la ecuación de Friedmann podrá escribirse como  $TdS = -dE + WdV$ , siendo  $E$  la energía y  $W$  la densidad de trabajo.

En las teorías  $f(R)$ , se dice que se debe hacer un tratamiento de la termodinámica en el régimen del no equilibrio, modificándose la relación de Clausius a  $d\hat{S} = dQ/T + d_i\hat{S}$ , donde el sombrero hace referencia a cantidades en el no equilibrio [13] y se verá, próximamente, de donde viene y qué es el último término.

En este régimen, la entropía se define como  $\hat{S} = (1 + f'(R)) A/(4G)$  y es por ello que se dice que la variación de  $f'(R)$  es la responsable de la aparición del no equilibrio, cantidad que es igual a la unidad en la gravedad de Einstein y es por ello que no aparece el término  $d_i\hat{S}$ .

En el presente apartado, se estudiará la termodinámica de las teorías  $f(R)$  en el Universo FLRW en el régimen del no equilibrio. Posteriormente, se hará una redefinición de las ecuaciones de campo encontradas para poder realizar una descripción de la termodinámica en lo que se conoce como régimen del equilibrio.

### 4.1. Termodinámica en el régimen del no equilibrio

El primer paso de este desarrollo termodinámico es obtener las ecuaciones de campo (38) para la métrica de FLRW, que está dada por:

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \bar{r}^2 d\Omega_2^2 \quad (110)$$

donde  $x^0 = t$  y  $x^1 = r$ . Por otro lado, la 2-métrica  $h_{\alpha\beta}$  es igual a  $\text{diag}(-1, a^2(t)/[1 - K/r^2])$  siendo  $a(t)$  el factor de escala y  $\bar{r} = a(t)r$ . Por tanto, con dicha métrica las ecuaciones de campo (38) resultan:

$$3(1 + f')(H^2 + K/a^2) = \frac{1}{2} [f'R - f] - 3H\dot{f}' + 8\pi G\rho_f, \quad (111)$$

$$-2(1 + f')(\dot{H} - K/a^2) = \ddot{f}' - H\dot{f}' + 8\pi G(\rho_f + P_f), \quad (112)$$

donde el punto representa derivada respecto al tiempo  $t$  y  $H$  es el parámetro de Hubble. El escalar de Ricci para esta métrica es [13]:

$$R = 6 \left( 2H^2 + \dot{H} + \frac{K}{a^2(t)} \right) \quad (113)$$

En cuanto al fluido perfecto considerado, es conocido que cumple la ecuación de continuidad dada por:

$$\dot{\rho}_f + 3H(\rho_f + P_f) = 0 \quad (114)$$

Las ecuaciones de campo (111) y (112) se reescriben como:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{(1+f')}(\hat{\rho}_d + \rho_f) \quad (115)$$

$$\dot{H} - \frac{K}{a^2} = -\frac{4\pi G}{(1+f')}(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d + \rho_f + P_f) \quad (116)$$

donde se han definido [13]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_d &\equiv \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{1}{2}(f'R - f) - 3H\dot{f}' \right] \\ \hat{P}_d &\equiv \frac{1}{8\pi G} \left[ \ddot{f}' + 2H\dot{f}' - \frac{1}{2}[f'R - f] \right] \end{aligned} \quad (117)$$

A partir de ahora, se usa el gorro sobre las variables que se encuentren en el régimen del no equilibrio, para distinguirlas de las del próximo apartado. Por otro lado,  $\hat{\rho}_d$  y  $\hat{P}_d$  se conocen como las componentes oscuras (por tal razón llevan el subíndice d, de *dark* en inglés) de densidad de energía y de presión, respectivamente. Estas nuevas componentes pueden entenderse provenientes de un tensor energía-momento dado por [13]:

$$\hat{T}_{AB}^{(d)} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{1}{2}g_{AB}(f - Rf') + \nabla_A \nabla_B f' - g_{AB} \square f' \right] \quad (118)$$

y, por tanto, las ecuaciones de campo (38) pueden escribirse como:

$$G_{AB} = \frac{8\pi G}{1+f'} \left( \hat{T}_{AB}^{(d)} + T_{AB}^{(M)} \right) \quad (119)$$

Si ahora se quiere encontrar la ecuación de continuidad que cumplen las componentes oscuras de densidad de energía y presión, de la misma forma que se obtiene en (114), se llega a:

$$\dot{\hat{\rho}}_d + 3H(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d) = \frac{3}{8\pi G} \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) \dot{f}' \quad (120)$$

Como puede observarse, para teorías donde  $\dot{f}' \neq 0$ , la ecuación de continuidad estándar, es decir, (114) no se cumple. Es por esta razón por la que al siguiente desarrollo termodinámico se le conoce como régimen del no equilibrio.

Para comenzar el desarrollo termodinámico, debe obtenerse primero el radio del horizonte del espacio-tiempo de FLRW, puesto que se necesitará su área para obtener la entropía. Dicho horizonte se define por la condición  $h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{r}\partial_\beta\bar{r} = 0$ , es decir, que el vector  $\nabla\bar{r}$  es nulo en la superficie del horizonte [13]. Así, se obtiene:

$$\bar{r}_A = \frac{1}{\sqrt{H^2 + \frac{K}{a^2}}} \quad (121)$$

Se toma ahora la derivada temporal de esta magnitud para saber como evoluciona en el tiempo este horizonte:

$$\frac{d\bar{r}_A}{dt} = -(H^2 + K/a^2)^{-3/2}(H\dot{H} - K\dot{a}/a^3) = -\bar{r}_A^3 H(\dot{H} - K/a^2) \quad (122)$$

y usando la ecuación (116), se tiene:

$$\frac{(1 + f') d\bar{r}_A}{4\pi G} = \bar{r}_A^3 H(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d + \rho_f + P_f) dt \quad (123)$$

La entropía, en teorías de gravedad extendida  $f(R)$ , fue introducida por Wald como una carga de Noether [14]. Esta definición de entropía es una magnitud local, es decir, se define en términos de parámetros en el horizonte que se está estudiando. Específicamente, esta carga de Noether depende de la variación de la densidad lagrangiana con respecto al tensor de curvatura de Riemann, llegándose [15] a que la entropía tiene la misma forma que para la gravedad de Einstein pero dependiendo de una constante gravitacional efectiva, que para el caso que ocupa es:

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{1 + f'} \quad (124)$$

siendo  $G$  la constante gravitacional de Newton usual. Por tanto, la forma de la entropía que se considera en teorías  $f(R)$  tiene la forma general:

$$\hat{S} = \frac{A(1 + f')}{4G} \quad (125)$$

Usando la relación de entropía expuesta y teniendo en cuenta que  $A = 4\pi\bar{r}_A^2$ , (123), la variación de la entropía es:

$$\frac{1}{2\pi\bar{r}_A} d\hat{S} = 4\pi\bar{r}_A^3 H(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d + \rho_f + P_f) dt + \frac{\bar{r}_A}{2G} df' \quad (126)$$

La temperatura del horizonte se calcula de la misma forma que se calculó anteriormente para el agujero negro Schwarzschild-*AdS* en (74), usando ahora la métrica FLRW. Así, la gravedad superficial es:

$$\kappa = -\frac{1}{\bar{r}_A} \left( 1 - \frac{\dot{\bar{r}}_A}{2H\bar{r}_A} \right) = -\frac{\bar{r}_A}{2} \left( \dot{H} - K/a^2 + 2/r^2 \right) \quad (127)$$

donde se ha usado (122). Si ahora se usa la definición del radio del horizonte (121):

$$\kappa = -\frac{\bar{r}_A}{2} \left( \dot{H} + K/a^2 + 2H^2 \right) = -\frac{2\pi G}{3(1 + f')} \bar{r}_A \left( \hat{\rho}_T - 3\hat{P}_T \right) \quad (128)$$

donde se define  $\hat{\rho}_T = \hat{\rho}_d + \rho_f$  y  $\hat{P}_T = \hat{P}_d + P_f$  y se han utilizado las ecuaciones de campo (115) y (116). De esta última ecuación, se sigue que siempre y cuando la ecuación total de estado  $\omega_T = \hat{P}_T/\hat{\rho}_T$  satisfaga  $\omega_T \leq 1/3$ , la gravedad superficial será negativa, como ocurre en la cosmología estándar [13].

Por tanto, la temperatura del horizonte es:

$$T = \frac{1}{2\pi\bar{r}_A} \left( 1 - \frac{\dot{\bar{r}}_A}{2H\bar{r}_A} \right) \quad (129)$$

Multiplicando (126) por  $1 - \frac{\dot{\bar{r}}_A}{2H\bar{r}_A}$ , se llega a:

$$Td\hat{S} = 4\pi\bar{r}_A^3 H(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d + \rho_f + P_f)dt - 2\pi\bar{r}_A^2(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d + \rho_f + P_f)d\bar{r}_A + \frac{T}{G}\pi\bar{r}_A^2 df' \quad (130)$$

En las teorías  $f(R)$ , la energía de Misner-Sharp se define como [16]:

$$\hat{E} = \frac{\bar{r}_A(1+f')}{2G} \quad (131)$$

que puede reescribirse usando (115):

$$\hat{E} = V \frac{3(1+f')(H^2 + K/a^2)}{8\pi G} = V(\hat{\rho}_d + \rho_f) \quad (132)$$

siendo  $V = 4\pi\bar{r}_A^3/3$  el volumen dentro del horizonte cosmológico. Usando ahora la ecuación de continuidad (114) y la relación (120) se tiene:

$$d\hat{E} = -4\pi\bar{r}_A^3 H(\hat{\rho}_d + \hat{P}_d + \rho_f + P_f)dt + 4\pi\bar{r}_A^2(\hat{\rho}_d + \rho_f)d\bar{r}_A + \frac{\bar{r}_A}{2G}df' \quad (133)$$

A partir de esta última expresión ya puede relacionarse el diferencial de energía encontrado con el de la entropía de (130):

$$Td\hat{S} = -d\hat{E} + 2\pi\bar{r}_A^2(\hat{\rho}_d + \rho_f - \hat{P}_d - P_f)d\bar{r}_A + \frac{\bar{r}_A}{2G}(1 + 2\pi\bar{r}_A T)df' \quad (134)$$

y definiéndose la densidad de trabajo

$$\hat{W} = (\hat{\rho}_d + \rho_f - \hat{P}_d - P_f)/2 \quad (135)$$

se escribe, por tanto:

$$Td\hat{S} = -d\hat{E} + \hat{W}dV + \frac{\bar{r}_A}{2G}(1 + 2\pi\bar{r}_A T)df' \quad (136)$$

Finalmente, esta expresión puede escribirse como:

$$Td\hat{S} + Td_i\hat{S} = -d\hat{E} + \hat{W}dV \quad (137)$$

donde se ha definido:

$$d_i \hat{S} = \frac{1}{T} \frac{\bar{r}_A}{2G} (1 + 2\pi \bar{r}_A T) df' = - \left( \frac{\hat{E}}{T} + \hat{S} \right) \frac{df'}{1 + f'} \quad (138)$$

El término  $d_i \hat{S}$  se interpreta como un término de producción de entropía en el régimen del no-equilibrio. Este término es nulo para teorías donde  $f'$  es constante, como puede ser la Relatividad General, y, por tanto, la primera ley de la termodinámica se cumple en dicho caso.

La aparición de este término es debida a la definición de las componentes oscuras de la densidad y presión hecha en (117), que no cumplen la ecuación de continuidad siempre y cuando  $\dot{f}' \neq 0$ . Por tanto, el término  $d_i \hat{S}$  podrá eliminarse si se redefinen dichas componentes oscuras de manera que cumplan la ecuación de continuidad dada por (114) y es lo que se conoce como la descripción de la termodinámica en el equilibrio.

## 4.2. Termodinámica en el régimen del equilibrio

En la sección anterior se definieron directamente las componentes oscuras de la densidad y de la presión a partir de las ecuaciones de campo (111) y (112). A partir de esta definición, podía hacerse, como se ha visto, un desarrollo termodinámico conocido como régimen del no equilibrio, pues no se verifica la primera ley de la termodinámica debido a la aparición del término  $d_i \hat{S}$  en (137).

Sin embargo, la definición de las componentes oscuras en (117) no es única. Pueden sumarse y restarse términos, en las ecuaciones de campo (111) y (112), que se anulen entre ellos de manera que queden las ecuaciones que se encuentran sean análogas a las de Relatividad General, es decir, tener unas ecuaciones de campo  $G_{AB} = \kappa \tilde{T}_{AB}$  para algún  $\tilde{T}_{AB}$  conservado ( $\nabla_A \tilde{T}^{AB} = 0$ ) y que queden, por tanto, las siguientes ecuaciones de campo para la métrica de FLRW:

$$3 \left( H^2 + \frac{K}{a^2} \right) = 8\pi G (\rho_d + \rho_f) \quad (139)$$

$$2 \left( \dot{H} - \frac{K}{a^2} \right) = -8\pi G (\rho_d + P_d + \rho_f + P_f) \quad (140)$$

donde se han definido [13]:

$$\begin{aligned} \rho_d &\equiv \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{1}{2} (f' R - f) - 3H \dot{f}' - 3f' (H^2 + K/a^2) \right] \\ P_d &\equiv \frac{1}{8\pi G} \left[ \ddot{f}' + 2H \dot{f}' - \frac{1}{2} (f' R - f) + f' (2\dot{H} + 3H^2 + K/a^2) \right] \end{aligned} \quad (141)$$

En la definición anterior de las componentes oscuras, únicamente se ha añadido un último término a ambas con respecto a las componentes del no equilibrio (117) que, al sustituir en las ecuaciones

de campo en el equilibrio, se recuperarían las ecuaciones de campo del no equilibrio. Nótese que para las magnitudes en el equilibrio ya no se utiliza el sombrero sobre las magnitudes.

Puesto que ahora la densidad y presión oscuras cumplen las mismas ecuaciones de campo que un fluido perfecto en Relatividad General, (139) y (140), este fluido oscuro ahora sí cumple la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho}_d + 3H(\rho_d + P_d) = 0 \quad (142)$$

Por tanto, si se define  $\rho_T \equiv \rho_d + \rho_f$  y  $P_T \equiv P_d + P_f$ , se tiene la ecuación de continuidad total:

$$\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + P_T) = 0 \quad (143)$$

Debido a que se tienen unas ecuaciones de campo exactamente iguales a las que se obtienen en Relatividad General con FLRW, con un fluido perfecto, la constante gravitacional efectiva es justamente  $G$ . Esto puede verse ya que, en las ecuaciones de campo (139) y (140), la constante que relaciona ambos miembros de la igualdad es  $G$ . Esto no ocurría en el caso del no equilibrio, donde en las ecuaciones (115) y (116) aparece  $G/(1+f')$ , que se considera una constante gravitacional efectiva, para poder relacionar el caso general de cualquier teoría  $f(R)$  con la Relatividad General.

De la misma forma que en el caso del no equilibrio, se calcula la derivada temporal del radio del horizonte (121) usando la ecuación de campo (140):

$$\frac{d\bar{r}_A}{4\pi G} = \bar{r}_A^3 H(\rho_T + P_T) dt \quad (144)$$

Por otro lado, por el argumento dado de la constante gravitacional efectiva en este caso, la entropía tiene la expresión dada por Bekenstein y Hawking:

$$S = \frac{A}{4G} \quad (145)$$

y usando la relación del radio del horizonte con el área  $A$ , puede calcularse la variación de la entropía  $S$  respecto del tiempo  $t$ :

$$\frac{1}{2\pi\bar{r}_A} dS = 4\pi\bar{r}_A^3 H(\rho_T + P_T) dt \quad (146)$$

A continuación, usando la definición de temperatura del horizonte dada por (129) y multiplicando la expresión anterior por  $1 - \frac{\dot{\bar{r}}_A}{2H\bar{r}_A}$ , se tiene:

$$TdS = 4\pi\bar{r}_A^3 H(\rho_T + P_T) dt - 2\pi\bar{r}_A^2 (\rho_T + P_T) d\bar{r}_A \quad (147)$$

Por otro lado, la energía es la energía de Misner-Sharp:

$$E = \frac{\bar{r}_A}{2G} = V\rho_T \quad (148)$$

cuya variación es (se usa la ecuación de continuidad que cumplen ambos fluidos):

$$dE = -4\pi\bar{r}_A^3 H (\rho_T + P_T) dt + 4\pi\bar{r}_A^2 \rho_T d\bar{r}_A \quad (149)$$

Definiendo ahora la densidad de trabajo como:

$$W = (\rho_T - P_T)/2 \quad (150)$$

la relación entre la energía y la entropía es:

$$TdS = -dE + WdV \quad (151)$$

En el régimen del equilibrio, al relacionar la entropía y la energía, se obtiene que se cumple la primera ley de la termodinámica, en contraposición al régimen del no-equilibrio (presencia del término  $d_i\hat{S}$ ). También, comparando los cálculos presentados en esta y en la sección anterior, se observa que la única diferencia en las variaciones de entropía y de energía es que en el régimen del equilibrio no aparece ningún término proporcional a  $df'$  y, es por esta razón, que no se tiene el término adicional ya mencionado.

De la misma forma que se hizo en el régimen del no equilibrio, ahora también puede considerarse que el fluido oscuro proviene de un tensor energía-momento  $T_{AB}^{(d)}$  tal que sí cumple en este caso que  $\nabla^A T_{AB}^{(d)} = 0$ . Dicho tensor es [13]:

$$T_{AB}^{(d)} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{1}{2} g_{AB} (f - Rf') + \nabla_A \nabla_B f' - g_{AB} \square f' + - f' R_{AB} \right] \quad (152)$$

Así,

$$G_{AB} = 8\pi G (T_{AB}^{(d)} + T_{AB}^{(M)}) \quad (153)$$

y se cumple que  $\nabla^A G_{AB} = 0$ .

Finalmente, se va a estudiar la relación que hay entre las entropías encontradas en esta sección y la anterior.

Podría parecer que ambos tratamientos no tienen relación entre sí, sin embargo, esto no es así. Las componentes oscuras de la densidad y la presión en equilibrio y no-equilibrio se relacionan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho_d &= \hat{\rho}_d - \frac{3}{8\pi G} f' (H^2 + K/a^2) \\ P_d &= \hat{P}_d + \frac{1}{8\pi G} f' (2\dot{H} + 3H^2 + K/a^2) \end{aligned} \quad (154)$$

sustituyendo estas expresiones en la diferencial de  $\hat{S}$  (126) y teniendo en cuenta la variación de  $S$  (146), se tiene:

$$\frac{1}{2\pi\bar{r}_A} d\hat{S} = \frac{1}{2\pi\bar{r}_A} dS + \frac{\bar{r}_A^3 H}{2G} \left( -f' (2\dot{H} + 3H^2 + K/a^2) + 3f' (H^2 - K/a^2) \right) dt + \frac{\bar{r}_A}{2G} df' \quad (155)$$

desarrollando y despejando  $dS$ :

$$dS = d\hat{S} + \frac{2\pi f'}{G} \frac{H(\dot{H} - K/a^2)}{(H^2 + K/a^2)} dt + \frac{\pi \bar{r}_A^2}{G} df' \quad (156)$$

y puesto que se ha obtenido que  $df'$  está relacionado con  $d_i\hat{S}$  según (138), de aquí se obtiene que la variación en la entropía  $S$  contiene toda la información que proviene de la variación de  $\hat{S}$  y  $d_i\hat{S}$ .

Por tanto, de este último desarrollo puede deducirse que ambas visiones son equivalentes y únicamente se diferencian según el tratamiento que se le dé al fluido oscuro.

### 4.3. Energía oscura en teorías $f(R)$

Como se ha visto en las secciones anteriores, cuando se escriben las ecuaciones de campo para estudiar el Universo FLRW teniendo en cuenta una teoría  $f(R)$ , aparecen unos términos adicionales en comparación con la Relatividad General, que pueden ser interpretados como un fluido que no cumple, dependiendo de su definición, la ecuación de continuidad usual.

A lo largo de la historia, este hecho se ha usado para intentar explicar la aceleración cosmológica actual. Por ejemplo, se comenzó añadiendo un término proporcional a  $R^2$  al lagrangiano de la Relatividad General para modificar esta teoría a grandes energías y poder explicar así la inflación, sin embargo, estos modelos no conseguían explicar la aceleración actual del Universo. Otros modelos planteados para explicar la aceleración cosmológica que modificaran la Relatividad General fue añadir un término proporcional a  $1/R$ , que resultan ser inestables al introducir materia en el modelo [11].

En la presente sección, se expondrán qué condiciones debe cumplir una función  $f(R)$  para explicar todas las épocas presentes en la evolución del Universo sin presentar inestabilidades. Posteriormente, se tendrá en cuenta un modelo  $f(R)$  específico con el que se resolverán numéricamente con Python las ecuaciones de Einstein con el fin de poder comparar la entropía en el régimen del equilibrio y del no-equilibrio.

Para que un modelo  $f(R)$  sea viable a la hora de explicar el Universo, debe incluir en su evolución la nucleosíntesis del Big Bang, así como las épocas dominadas por materia y radiación. Para que la evolución sea correcta, dicha época dominada por materia debe ser lo suficientemente larga para que dé paso a la aceleración cosmológica del Universo.

Para estudiar adecuadamente la estabilidad de los modelos, se introduce, según la referencia [17], un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Resolviendo este sistema, se obtienen los puntos críticos, cada uno de los cuáles corresponderá a una condición que deberá cumplir el modelo.

Primero, en dicha referencia, se introducen las cantidades:

$$\begin{aligned} m(r) &\equiv \frac{Rf''}{1+f'} \\ r &\equiv -\frac{R(1+f')}{R+f} \end{aligned} \quad (157)$$

Estas cantidades son las que darán las condiciones que se deberán cumplir en el plano  $(r, m)$ .

Por ejemplo, el primero de los puntos críticos que se han comentado del sistema corresponde a un punto de-Sitter (esto únicamente quiere decir que corresponde a una época en la que  $\dot{H} = 0$ ). La condición necesaria para que este punto sea estable y, por tanto, el modelo  $f(R)$  describa una época de de-Sitter es que [17]:

$$0 \leq m(r) \leq 1 \text{ en } r = -2 \quad (158)$$

Esta es una de las condiciones que se buscará a la hora de proponer un modelo  $f(R)$ . Por otro lado, para describir una época dominada por materia, se requiere [17]:

$$m \approx +0 \text{ y } \frac{dm}{dr} > -1 \text{ en } r = -1 \quad (159)$$

El problema que se presenta ahora es cómo obtener el parámetro de Hubble  $H$  numéricamente en función de una variable independiente. Dicha variable independiente será el redshift  $z$  y, por tanto, se tendrá  $H(z)$ .

La ecuación que se resolverá es la ecuación de Friedmann dada por (111) con  $K = 0$  (para simplificar las expresiones). Dicha ecuación puede escribirse como:

$$H^2 = -\frac{1}{6} \frac{R+f}{1+f'} - H \frac{f''\dot{R}}{1+f'} + \frac{8\pi G\rho_f}{3F} + \frac{1}{6}R \quad (160)$$

Si ahora se introducen las siguientes variables adimensionales<sup>3</sup> [18],

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\dot{R}f''}{f'H}, & y &\equiv \frac{R}{6H^2}, & \chi &\equiv \frac{f}{6f'H^2}, \\ \tilde{\Omega}_m &\equiv \frac{8\pi G\rho_f}{3f'H^2}, & h(z) &\equiv \frac{H}{H_0}. \end{aligned} \quad (161)$$

Se ve, pues, claramente que la ecuación de Friedmann queda:

$$1 = y - x - \chi + \tilde{\Omega}_m \quad (162)$$

---

<sup>3</sup>El subíndice 0 indicará el valor de la magnitud en la actualidad.

De la ecuación (112) así como del valor de  $R$  (113) y de la ecuación de continuidad (114), se llega al sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1 [18]:

$$\begin{aligned}
(1+z) \frac{dh}{dz} &= h(2-y) \\
(1+z) \frac{dx}{dz} &= x^2 + x(y+1) - 2y + 4\chi - \tilde{\Omega}_m \\
(1+z) \frac{dy}{dz} &= y(2y - xQ - 4) \\
(1+z) \frac{d\chi}{dz} &= \chi(x + 2y - 4) - xyQ \\
(1+z) \frac{d\tilde{\Omega}_m}{dz} &= \tilde{\Omega}_m(x + 2y - 1)
\end{aligned} \tag{163}$$

que es el sistema que se resolverá en Python, siendo  $Q = \frac{F}{Rf''}$ .

La introducción de las variables expuesta resulta de gran ayuda, pues se ha pasado de dos ecuaciones de campos muy complejas y de orden superior (ecuaciones (115) y (116)) en las que aparecían derivadas temporales de  $H$ , de  $f(R)$  y debía tenerse en cuenta también que  $R$  dependía del parámetro de Hubble, a un sistema de cinco ecuaciones de primer orden.

El siguiente paso es darle al sistema unas condiciones iniciales adecuadas. La estrategia que se seguirá a continuación es dar condiciones iniciales a un valor de redshift alto (póngase  $z = 1100$ ) e integrar hasta la actualidad (es decir,  $z_0 = 0$ ). Las condiciones iniciales a dicho redshift se van a dar de acuerdo al modelo  $\Lambda$ CDM.

Por definición, dividiendo entre  $H_0^2$  la expresión (1), se obtiene  $h^2(z)$ . Las densidades de energía se definen como:

$$\begin{aligned}
\Omega_m &= \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m \\
\Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H_0^2}
\end{aligned} \tag{164}$$

Por otro lado, la curvatura escalar escalar se puede escribir en función del parámetro de deceleración  $q$ , dado por:

$$q = \frac{1}{2h^2} [(1+z)^3 \Omega_m - 2\Omega_\Lambda] \tag{165}$$

y siendo

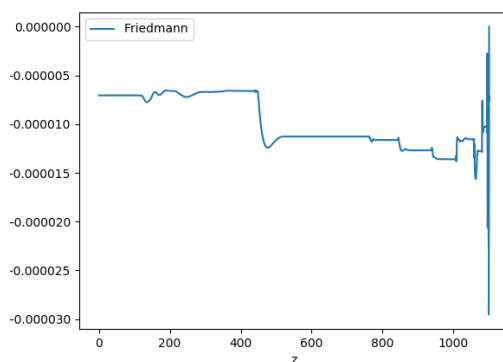
$$r = R/H_0^2 = 6(1-q)h^2 \tag{166}$$

Por tanto, ya es posible inicializar todas las variables tenidas en cuenta en el sistema, para un valor  $z_{\text{ini}} = 1100$ . Puesto que la definición de  $x$  posee la derivada temporal de la curvatura escalar, es más fácil darle su valor inicial a partir de la ecuación de Friedmann (162).

El modelo  $f(R)$  viable que se escoge es el siguiente [13]:

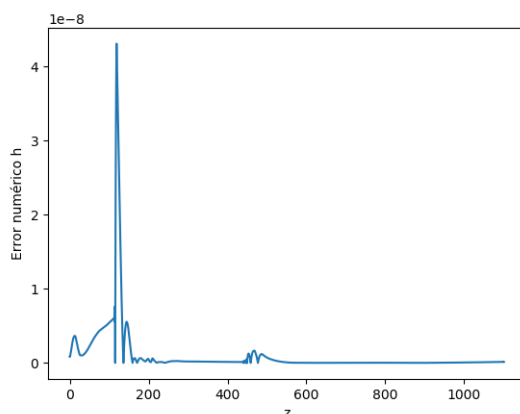
$$f(R) = -\lambda R_c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{R^2}{R_c^2} \right)^{-1} \right] \tag{167}$$

Este modelo fue propuesto en el año 2007 en [19] y se ha estudiado rigurosamente su estabilidad en dicha referencia. Por otro lado, dicho modelo es solución de las ecuaciones de campo  $f(R)$  en vacío teniendo asociada una curvatura escalar nula (espacio-tiempo plano) o positiva (de Sitter), por lo que no podría usarse para estudiar los agujeros negros Schwarzschild-*Ads* de la sección 3. En primer lugar, una vez se ha resuelto el sistema numéricamente (ver Apéndice A), se comprueba si se cumple la ecuación de Friedmann, así como qué error numérico se comete, para poder obtener una fiabilidad del cálculo. Para todos los cálculos siguientes se ha utilizado  $\lambda = 1,8$  y  $R_c = 0,5$ .



**Figura 8:** Comprobación de la ecuación de Friedmann (162), pasando el 1 al miembro derecho.

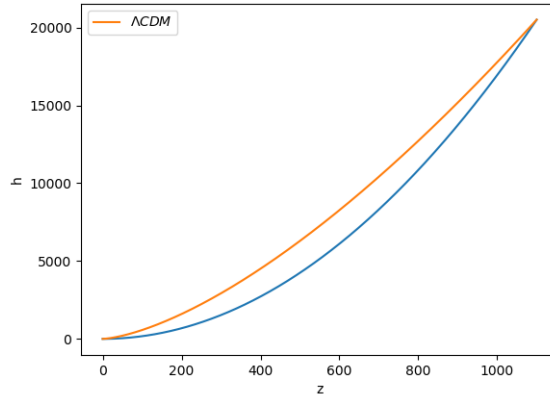
Como puede observarse en la Figura 8, el error disminuye a medida que se realiza el cálculo numérico, es decir, que el valor de  $z$  se hace más pequeño. Por otro lado, el error aparece en la sexta cifra decimal. La ecuación de Friedmann involucra a cuatro de las cinco variables del sistema. Puede obtenerse también el error cometido en el cálculo de  $h$  a partir de su ecuación diferencial en (163), realizando diferencias finitas en el miembro izquierdo para obtener la derivada de  $h$ .



**Figura 9:** Error numérico cometido en la obtención de  $h$ .

En este caso, según la Figura 9, se obtiene un error en la octava cifra decimal. Por tanto, el cálculo numérico puede decirse que ha sido correcto.

A continuación, se expone el parámetro de Hubble normalizado  $h$  obtenido en este modelo  $f(R)$ , comparándose con el del modelo  $\Lambda$ CDM (ver Figura 10).



**Figura 10:** Parámetro  $h$  en función del redshift  $z$ . En azul el valor obtenido numéricamente. En naranja el valor que se obtiene en el modelo  $\Lambda$ CDM.

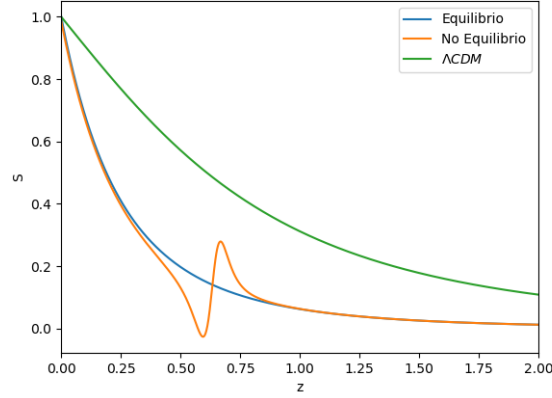
A lo largo de la integración, como se observa, se han obtenido diferencias con el modelo  $\Lambda$ CDM. Puesto que como condiciones iniciales, para  $z_{\text{ini}} = 1100$ , se pusieron en el sistema a resolver las condiciones del modelo  $\Lambda$ CDM, coinciden ambos modelos en dicho punto.

Es obvio que el modelo  $\Lambda$ CDM tiende  $h(z)$  a la unidad a un redshift nulo, pues la forma de obtener el parámetro de Hubble en dicho modelo es mediante (1), que para  $z = 0$  es únicamente la suma de  $\Omega_\Lambda$  y  $\Omega_m$ , que es igual a uno. Por otro lado, el parámetro de deceleración en el modelo  $\Lambda$ CDM es igual a  $-0,527$ , queriendo decir que la expansión esta siendo acelerada.

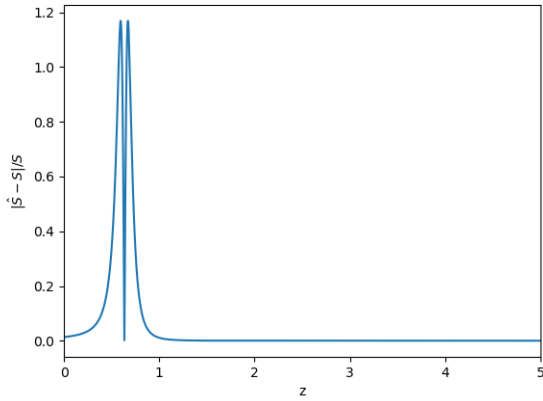
En cuanto al modelo  $f(R)$  considerado,  $h(0) = 0,01692$ , diferenciándose notablemente del modelo  $\Lambda$ CDM. Esto quiere decir que el ritmo de expansión en dicho modelo es muy inferior al del modelo  $\Lambda$ CDM. Por otro lado, el parámetro de deceleración en este modelo es  $q(0) = -1842$ , por lo que en este modelo el Universo se estaría expandiendo con una aceleración muy elevada, en comparación con el modelo  $\Lambda$ CDM.

Una vez expuestos estos resultados, puede pasar a estudiarse la entropía, ya que se tienen todas las magnitudes necesarias para obtenerla, tanto en el régimen del equilibrio como en el no equilibrio. Las expresiones que se usan son (125) y (145). Por otro lado, se compara el valor que se obtiene con el modelo  $\Lambda$ CDM. El resultado se expone en la Figura 11.

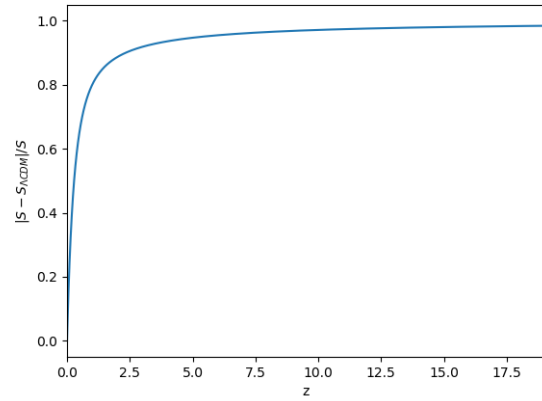
En esta figura, se observa que las discrepancias entre las magnitudes del equilibrio y del no equilibrio tienen lugar para valores de  $z$  pequeños. En concreto, en torno al rango comprendido entre 0.5 y 1. Su diferencia relativa, para saber cuanto difieren, se obtiene en la Figura 12.



**Figura 11:** Entropía para el régimen del equilibrio y del no equilibrio en función de  $z$  (se normalizan para valer uno a redshift nulo) y su comparación con el modelo  $\Lambda$ CDM.



(a) Diferencia relativa entre  $S$  y  $\tilde{S}$ .



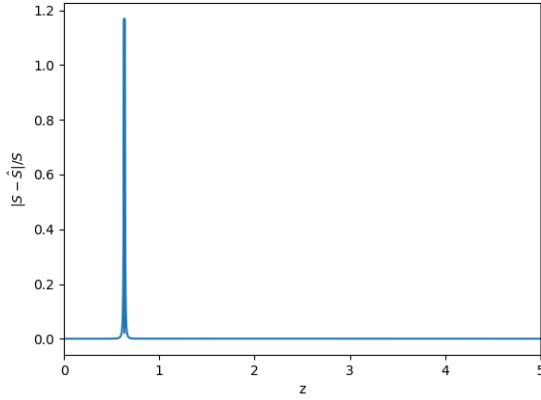
(b) Diferencia relativa entre  $S$  y entropía del modelo  $\Lambda$ CDM.

**Figura 12:** Diferencias relativas entre las distintas entropías obtenidas numéricamente para  $\lambda = 1,8$  y  $R_c = 0,5$ .

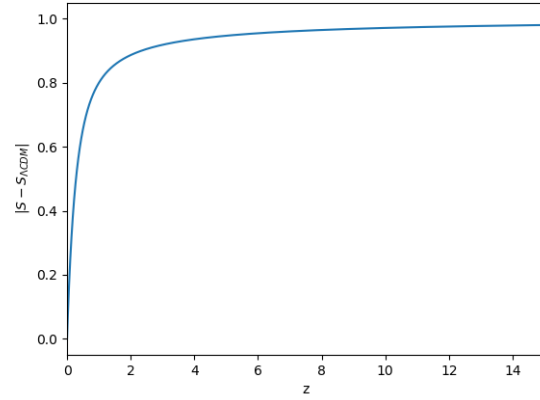
En ambos casos, las diferencias son para redshifts cercanos a la actualidad. Por un lado, se ha comparado el régimen del equilibrio con el modelo  $\Lambda$ CDM, pues Relatividad General solo posee este régimen, donde se comprueba que difieren para valores de  $z$  cercanos a cero. Por otra parte, las magnitudes  $S$  y  $\hat{S}$  del modelo  $f(R)$  (167) también se diferencian a un redshift menor que la unidad.

A continuación, se estudia la dependencia del modelo (167) con los parámetros  $\lambda$  y  $R_c$  que se recuerda que para el estudio anterior se usaron valores 1,8 y 0,5, respectivamente. En cuanto al

parámetro  $\lambda$ , no se obtienen divergencias en el método numérico si está comprendido entre la unidad y un valor de 3,8. Por otro lado,  $R_c$  debe ser mayor que  $10^{-2}$  y menor que 1,2.



(a) Diferencia relativa entre  $S$  y  $\tilde{S}$ .



(b) Diferencia relativa entre  $S$  y entropía del modelo  $\Lambda$ CDM.

**Figura 13:** Diferencias relativas entre las distintas entropías obtenidas numéricamente para  $\lambda = 1,8$  y  $R_c = 0,04$ .

Al mantener el valor original de  $\lambda$  y disminuir, considerablemente,  $R_c$  hasta 0,04 (Figura 13), se obtiene que la diferencia relativa entre ambos regímenes del modelo  $f(R)$  (167) mantiene su valor máximo pero se concentra en un menor rango de valores de  $z$ . Si se aumenta  $R_c$ , puede observarse el resultado en la Figura 14. En este caso, el valor máximo de la diferencia relativa entre ambos regímenes es el mismo que en los casos anteriores, pero se tiene que dicha diferencia relativa se extiende a un mayor rango de valores de  $z$ .

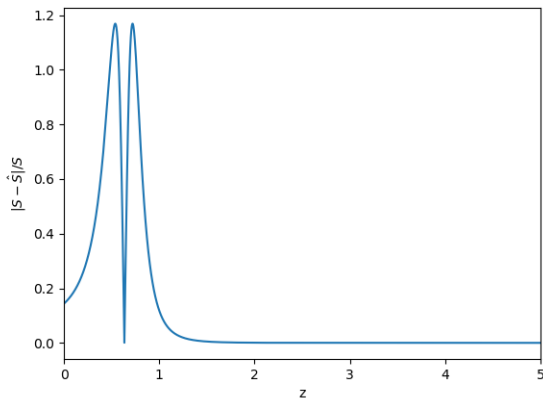
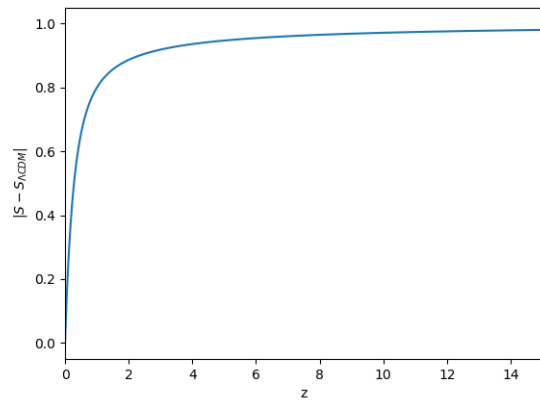
Por otro lado, se mantiene el valor original de  $R_c = 0,5$  y se aumenta  $\lambda$  hasta un valor de 3. En este caso, al aumentar  $\lambda$ , aumenta la diferencia relativa máxima entre  $S$  y  $\hat{S}$ , manteniéndose esta por debajo de  $z = 1$  (Figura 15).

También se ha observado en todos los casos que la diferencia entre  $S$  en el modelo  $f(R)$  (167) y en el modelo  $\Lambda$ CDM es indiferente a los cambios en los parámetros.

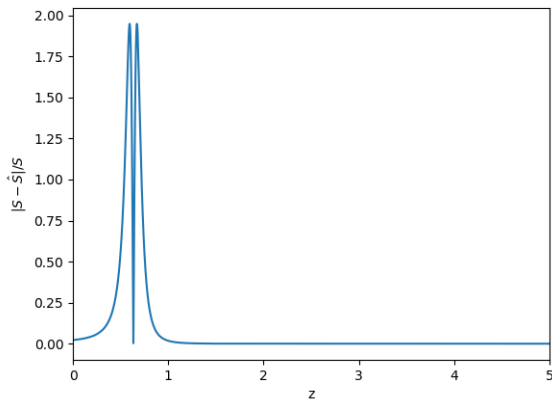
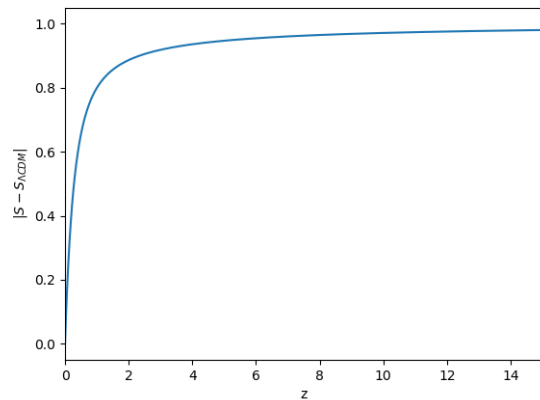
El resultado más importante que se obtiene del estudio de los parámetros es que el modelo  $f(R)$  (167) posee, en todos los casos, el mismo comportamiento asintótico, es decir, se obtiene el mismo resultado para la actualidad ( $z = 0$ ), un Universo que se está expandiendo aceleradamente con  $q(0) = -1842$ .

Por otro lado, en cuanto a  $S$  y  $\hat{S}$ , que una magnitud sea mayor o menor que otra dependerá de esta función  $f'(R)$ , pues su relación viene dada por

$$\hat{S} = (1 + f'(R)) S. \quad (168)$$

(a) Diferencia relativa entre  $S$  y  $\tilde{S}$ .(b) Diferencia relativa entre  $S$  y entropía del modelo  $\Lambda$ CDM.

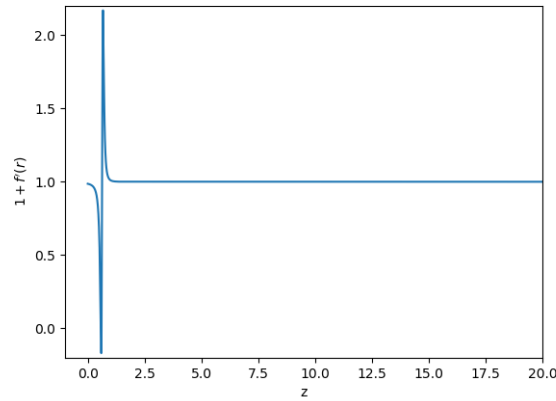
**Figura 14:** Diferencias relativas entre las distintas entropías obtenidas numéricamente para  $\lambda = 1,8$  y  $R_c = 1,18$ .

(a) Diferencia relativa entre  $S$  y  $\tilde{S}$ .(b) Diferencia relativa entre  $S$  y entropía del modelo  $\Lambda$ CDM.

**Figura 15:** Diferencias relativas entre las distintas entropías obtenidas numéricamente para  $\lambda = 3$  y  $R_c = 0,5$ .

Esto sugiere que dicha función es igual a la unidad a partir de cierto valor del redshift, como puede observarse en la Figura 16.

Es decir, se obtiene que esta función es igual a la unidad a partir de cierto valor de  $z$ , como podía sospecharse al observar las entropías.



**Figura 16:** Función  $1 + f'(r)$  para valor del redshift  $z$ .

Por tanto, con este análisis específico de un modelo  $f(R)$  pueden sacarse ciertas conclusiones. En primer lugar, se ha considerado un modelo que difiere del modelo  $\Lambda$ CDM, habiéndose tomado como condición inicial que ambos sean coincidentes.

Por otro lado, el resultado más importante, el que ha ocupado casi todo el apartado, ha sido el de la entropía. Se ha encontrado que las magnitudes  $S$  y  $\hat{S}$  difieren, como era de esperar según sus definiciones, debido a la magnitud  $f'(R)$ , que también ha podido observarse en la última Figura.

Sin embargo, aunque ambas entropías tengan distintos valores, no quiere decir que se hayan realizando análisis termodinámicos distintos. Como ya se ha expuesto, al estudiar la entropía del horizonte infinitesimalmente (puede verse en (156)) ambos enfoques están relacionados.

Se concluye, por ende, que estas dos visiones dependen del enfoque que se le dé a los términos adicionales que aparecen con respecto a la Relatividad General. Si se considera que se tiene únicamente un fluido perfecto, con los demás términos asociados al fluido oscuro, se llega a que este último no cumple la ecuación de continuidad usual, pues las ecuaciones de campo que terminan encontrándose no coinciden con las de la Relatividad general y los dos miembros de las ecuaciones de campo están mediados por una constante gravitacional efectiva que difiere de la de la Relatividad General por la cantidad  $f'(R)$ .

En cambio, si se modifican dichas ecuaciones de campo, sumando y restando términos, para acabar teniendo una formulación análoga a la de Relatividad General, aquí se tiene que tanto el fluido perfecto como el oscuro cumplen la ecuación de continuidad y ambos miembros de las ecuaciones de campo están relacionados por la constante gravitacional usual  $G$ , por lo que se dice que es el régimen del equilibrio.

## 5. Conclusiones

En este trabajo, se ha estudiado tanto la termodinámica de los agujeros negros, en concreto el de Schwarzschild- $AdS$ , como la del horizonte del Universo FLRW, pasando por la obtención de las ecuaciones de campo de las teorías de gravedad extendida  $f(R)$ .

En primer lugar, para obtener las ecuaciones de campo, se ha considerado una acción dependiente de una función arbitraria de la curvatura escalar  $R$ , generalizando la acción correspondiente a la Relatividad General. Debido a esta nueva acción considerada, también debe modificarse el término de frontera de GHY, donde ahora se tiene en cuenta la aparición de la derivada respecto de  $R$  de la función  $f(R)$ . A partir de aquí, el desarrollo matemático es completamente idéntico al que se seguiría para obtener las ecuaciones de campo de la Relatividad General.

Posteriormente, en la sección 2.1, se estudian las propiedades que debe cumplir una función  $f(R)$  para tener asociada una curvatura escalar constante (que resulta útil en la sección 3, donde se tiene en cuenta el espacio-tiempo  $AdS$ , exponiendo su importancia en 3.1). Este mismo apartado finaliza con una comparación entre la Relatividad General y teorías  $f(R)$ , considerando una solución  $g_{AB}$  de la acción de EH y obteniendo qué condiciones deben cumplirse si se fuerza a que dicha solución también lo sea de las ecuaciones de campo  $f(R)$ .

En la sección de agujeros negros, se ha comenzado considerando la métrica esféricamente simétrica y estática más general posible y se ha obtenido la forma, también más general, para que se cumpla que la curvatura escalar sea constante. Por otro lado, se introduce dicha métrica en las ecuaciones de campo con curvatura escalar constante (consideradas en 2.1) y se compara con lo ya obtenido anteriormente, llegando finalmente al agujero negro de Schwarzschild- $AdS$  en (53).

Es este agujero negro sobre el que se estudia la termodinámica con el método de la acción euclídea en 3.2. Aquí se ha estudiado la estabilidad local y global del agujero negro (según el signo de la capacidad calorífica y la energía libre, respectivamente) según la temperatura del agujero negro, encontrándose que si la temperatura del agujero negro es mayor que  $T_1$  (correspondiente a un radio del horizonte  $r_H = l$ ) se tendría un agujero negro local y globalmente estable. De este análisis, se obtiene una condición importante: para que el signo de la energía (93) y la entropía (96) debe cumplirse que  $R_0 + f(R_0) < 0$ . Con el estudio teórico acabado, se estudian con Python dos modelos específicos, encontrando que sí hay agujeros negros de este tipo termodinámicamente estables en ambos casos.

Finalmente, se estudia la termodinámica del horizonte del Universo FLRW. Aquí se ha encontrado que existen dos formas posibles: régimen del equilibrio y del no-equilibrio. Estas dos visiones provienen de la forma en la que se tratan a las llamadas componentes oscuras que aparecen a la hora de tener en cuenta las ecuaciones de campo. Dichas componentes oscuras son términos extras que aparecen con respecto a la Relatividad General y pueden tratarse como una presión y densidad de un fluido que describa la materia oscura.

Si estas componentes oscuras se definen de acuerdo a la expresión (117) donde las ecuaciones de campo no son iguales a las de la Relatividad General y, por tanto, dicho fluido oscuro no cumple la ecuación de continuidad, se dice que se está en el régimen del no-equilibrio, con una entropía dada por la expresión (125), donde se debe introducir una constante gravitacional efectiva  $G/(1+f')$ .

Si, por el contrario, se definen las componentes oscura de manera que las ecuaciones de campo sean idénticas a la de la Relatividad General (ver 141)) y, por ende, el fluido oscuro sí cumple la ecuación de continuidad: esto es el régimen del equilibrio, donde la entropía tiene la misma expresión que para la Relatividad General (145).

Con los resultados teóricos expuestos, en la sección 4.3 se ha visualizado, mediante un programa numérico, las distintas entropías para un modelo concreto, concluyendo que ambas visiones dependen del tratamiento que se le da a estos términos oscuros adicionales, pero que se relacionan a la hora de realizar el cálculo termodinámico infinitesimal (puede verse en (156)).

Dicho todo esto, las teorías  $f(R)$  han servido, como se ha expuesto en este trabajo, para estudiar un posible origen de la energía oscura, problema del que se había hablado en la sección introductoria. Como se ha visto, esta energía surge de manera natural debido a los términos extra que aparecen en las ecuaciones de campo con respecto de la Relatividad General y no hace falta introducir a mano una constante cosmológica para tratar de explicarla.

Por otro lado, en estas teorías se ha encontrado que pueden existir agujeros negros termodinámicamente estables, hecho que no ocurre en la Relatividad General, donde se expuso ya que el agujero negro de Schwarzschild tiene asociada una capacidad calorífica negativa.

Por tanto, tal y como se expuso en la Introducción, las teorías  $f(R)$  son una buena herramienta para generalizar la Relatividad General, pues proporcionan un interesante intento de explicar la energía oscura y significativos resultados en la estabilidad termodinámica de los agujeros negros, dos regímenes donde se espera que la gravedad modificada tenga un papel importante.

## Referencias

- [1] C. Bambi, *Introducción a la relatividad general: Un curso para estudiantes de física*. Reverté, 2021.
- [2] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$  theories of gravity,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 1, p. 451, 2010.
- [3] K. S. Stelle, “Renormalization of higher-derivative quantum gravity,” *Physical Review D*, vol. 16, no. 4, p. 953, 1977.
- [4] A. Guarnizo, L. Castaneda, and J. M. Tejeiro, “Boundary term in metric  $f(R)$  gravity: field equations in the metric formalism,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 42, pp. 2713–2728, 2010.
- [5] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [6] A. de La Cruz-Dombriz, A. Dobado, and A. Maroto, “Black holes in  $f(R)$  theories,” *Physical Review D*, vol. 80, no. 12, p. 124011, 2009.
- [7] J. B. Griffiths and J. Podolský, *Exact space-times in Einstein’s general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [8] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 87, pp. 577–588, 1983.
- [9] F. Villegas, “Espacio-tiempo Anti-de Sitter (AdS),” *Revista de Investigación de Física*, vol. 22, no. 2, pp. 19–24, 2019.
- [10] R. Carpio Fernández, “Gravedad cuántica euclídea: fundamentos y aplicaciones,” 2022.
- [11] A. de la Cruz-Dombriz, “Some cosmological and astrophysical aspects of modified gravity theories,” *arXiv preprint arXiv:1004.5052*, 2010.
- [12] T. Jacobson, “Thermodynamics of spacetime: the Einstein equation of state,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 7, p. 1260, 1995.
- [13] K. Bamba, C.-Q. Geng, and S. Tsujikawa, “Equilibrium thermodynamics in modified gravitational theories,” *Physics Letters B*, vol. 688, no. 1, pp. 101–109, 2010.
- [14] R. M. Wald, “Black hole entropy is the Noether charge,” *Physical Review D*, vol. 48, no. 8, p. R3427, 1993.
- [15] R. Brustein, D. Gorbonos, and M. Hadad, “Wald’s entropy is equal to a quarter of the horizon area in units of the effective gravitational coupling,” *Physical Review D*, vol. 79, no. 4, p. 044025, 2009.

- 
- [16] Y. Gong and A. Wang, “Friedmann equations and thermodynamics of apparent horizons,” *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 21, p. 211301, 2007.
- [17] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, “Conditions for the cosmological viability of  $f(R)$  dark energy models,” *Physical Review D*, vol. 75, no. 8, p. 083504, 2007.
- [18] Á. de la Cruz-Dombriz, P. K. Dunsby, V. C. Busti, and S. Kandhai, “Tidal forces in  $f(R)$  theories of gravity,” *Physical Review D*, vol. 89, no. 6, p. 064029, 2014.
- [19] A. A. Starobinsky, “Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity,” *JETP letters*, vol. 86, pp. 157–163, 2007.

## A. Código Python sistema de ecuaciones apartado 4.3

En el presente apéndice se adjunta el código usado en Python para resolver el sistema de ecuaciones (163):

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
#paquetes necesarios

def g(Y, z):
    h, x, y, X, W=Y

    q = 1/(2*h**2)*((1+z)**3*OmegaM-2*OmegaL)
    r = 6*(1-q)*h**2
    Q = F(r)/(r*fpp(r))

    m = 1 + z
    return [h*(2-y)/m, (x**2+x*(y+1)-2*y+4*X-(1-y+X+x))/m,
            y/m*(2*y-4-x*Q), X/m*(x+2*y-4)-x*y*Q/m, (1-y+x+X)/m*(x+2*y-1)]

# g es el sistema de ecuaciones a resolver

def f(R):

    return R - 1*Rc*(1-(1+R**2/Rc**2)**(-1))

def F(R):

    return 1 - 1*Rc*(1+R**2/Rc**2)**(-2)*2*R/Rc**2

def fpp(R):

    return -2*1/Rc*((1-R**2/Rc**2)**(-2)-4*R**2*(1-R**2/Rc**2)**(-3)/Rc**2)

#F es la derivada de f respecto de R y fpp la segunda derivada

#Parametros y condiciones iniciales:

```

---

```

Rc = 0.5
l = 3

z0 = 1100
OmegaM = 0.3
OmegaL = 0.7

h0 = np.sqrt((1+z0)**3*OmegaM+OmegaL)
q0 = 1/(2*h0**2)*((1+z0)**3*OmegaM-2*OmegaL)
y0 = (1-q0)*h0**2
r0 = 6*(1-q0)*h0**2
X0 = f(r0)/(6*h0**2*F(r0))
W0 = OmegaM*(1+z0)**3/(h0**2*F(r0))
x0 = W0-X0+y0-1

yi = [h0, x0, y0, X0, W0]

# Se define el rango de integracion y se integra con odeint:
Z=np.arange(z0,0,-0.0001)

gs=odeint(g,yi,Z)

# Se da nombre a las magnitudes y una vez se tienen ,
# puede graficarse cualquier magnitud deseada

h = gs[:,0]
x = gs[:,1]
y = gs[:,2]
X = gs[:,3]
W = gs[:,4]

# Parametro Hubble normalizado modelo LCDM
hLCDM = np.sqrt(OmegaM*(1+Z)**3+(OmegaL))

# A partir de aqui, se define la entropia ,
# que puede graficarse con plt.plot

```