



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Modelo de Samuelson en Economía Abierta



Grado en Economía

Facultad de Economía y Empresa

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

AUTOR: MANUEL MARÍA GALLEGO SÁNCHEZ

TUTOR: JOSÉ MANUEL CASCÓN BARBERO

Salamanca, Julio 2024



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Trabajo Fin de Grado

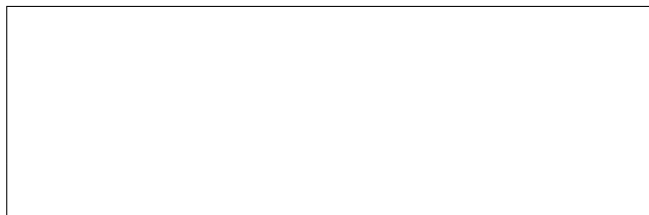
Título: Modelo de Samuelson en Economía Abierta

Grado en Economía

Facultad de Economía y Empresa

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

AUTOR: MANUEL MARÍA GALLEGO SÁNCHEZ



TUTOR: JOSÉ MANUEL CASCIÓN BARBERO

Salamanca, Julio 2024

Índice

Resumen	1
1 Introducción	1
2 Marco teórico	3
2.1 Ecuaciones en diferencias	3
2.2 Clasificación de las ecuaciones en diferencias	4
2.3 Ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes	5
2.3.1 Solución de la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes	5
2.4 Análisis cualitativo de modelos discretos	7
3 Modelo multiplicador-acelerador de Samuelson	8
3.1 Formulación matemática del modelo de Samuelson	9
3.2 Soluciones del modelo de Samuelson	11
3.3 Análisis de estabilidad del modelo de Samuelson	15
4 Conclusiones	19
Bibliografía	20
Anexo 1	21
Anexo 2	21
Anexo 3	22
Región A	22
Región AB	23
Región B_1	23

Región B_2	24
Región B_3	25

Índice de figuras

3.1 Distribución de las soluciones según los parámetros α y β	13
3.2 Espacio paramétrico del modelo	17
3.3 Comportamiento de la solución homogénea según los parámetros α y β	18

Índice de tablas

3.1 Resumen de casos del modelo de Samuelson según los parámetros . . .	17
---	----

Resumen

Este TFG, busca ofrecer una visión integral de las ecuaciones en diferencias desde una perspectiva económica. A través de la introducción, se pretende que por medio de diversos modelos que usan ecuaciones en diferencias, el lector tenga una idea de la utilidad que deriva del uso de estas ecuaciones, como herramienta para modelar fenómenos económicos. En el marco teórico, se hace una revisión de la teoría en torno a los principales conceptos relevantes, en cuanto a la caracterización de las ecuaciones en diferencias, así como la obtención de las soluciones, con el objetivo de crear un contexto adecuado para posteriormente llevar a cabo un análisis exhaustivo del modelo de Samuelson. Tras presentar el modelo de Samuelson, se realiza una extensión para economía abierta, finalizando con un estudio cuantitativo de las soluciones, en función de los parámetros fundamentales, con el objetivo de ilustrar la sensibilidad del modelo a cambios en estos parámetros, y proporcionar de este modo una mayor comprensión de su comportamiento a largo plazo.

1 Introducción

En economía, a diferencia de otras disciplinas, es habitual trabajar con variables discretas. Ejemplo de esto, son ciertas magnitudes económicas que dependen del tiempo, como el ingreso, el ahorro, la inversión o el consumo, las cuales suelen estar disponibles para su estudio durante un período de tiempo discreto. Esto hace que las ecuaciones en diferencias, aparezcan de manera frecuente en problemas económicos, donde las variables son de este tipo. Es por ello, que en este contexto, es posible usar las ecuaciones en diferencias para modelizar fenómenos económicos de muy distinta índole, con el objetivo de comprender y predecir su comportamiento de la manera más sencilla posible. Algunos ejemplos del uso de ecuaciones en diferencias en la modelización económica, son algunos de los que recoge el trabajo de Tenorio Villalón et al. (2013), y que nosotros también recogemos de manera resumida a continuación. Donde por ejemplo, dentro del marco de estudio sobre el estado estacionario, y más

concretamente del modelo de solape generacional de Weil, se exploran equilibrios generales mediante la comparación entre la economía nacional (Interior) y el resto del mundo (Exterior). En este contexto, surge la necesidad de determinar la tasa común k_t^W , la cual se puede expresar a través de la siguiente ecuación en diferencias (Tenorio Villalón et al., 2013):

$$\begin{cases} k_{t+1}^W = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}(k_t^W)^\alpha \\ k_0^W = a \end{cases}$$

Por otro lado, varios modelos que exploran el crecimiento económico a largo plazo, se basan en la premisa de que los impulsores principales, son la productividad E y la mano de obra L . Por ejemplo, en el modelo de Solow con tasas de ahorro fijo, se asume que el cambio tecnológico exógeno, está determinado por el nivel de productividad neutra de Harrod (expresado como $E_{t+1} = (1 + g)E_t$), mientras que la mano de obra sigue el comportamiento demográfico de la población ($L_{t+1} = (1 + n)L_t$). Como resultado, la acumulación de capital K , puede modelarse a través de la siguiente ecuación en diferencias (Tenorio Villalón et al., 2013):

$$\begin{cases} K_{t+1} - K_t = sF(K_t, E_t L_t) - \delta K_t \\ K_0 = a, \quad E_0 = b \end{cases}$$

En el ámbito del análisis monetario y de precios, Philip Cagan definió y examinó las hiperinflaciones, utilizando un modelo que podía representarse por una ecuación en diferencias estocástica, pero que si la consideramos desde un enfoque de equilibrio no estocástico, se correspondería con la siguiente ecuación en diferencias extraída del trabajo de Tenorio Villalón et al. (2013):

$$\begin{cases} m_t - p_t = -\beta (p_{t+1} - p_t) \\ m_{t+1} = m_t + g \\ p_0 = a, \quad m_0 = b \end{cases}$$

donde m y p , representan los logaritmos neperianos de la provisión de dinero M de un país, y su nivel de precios P . La segunda ecuación, surge de suponer que la

oferta de dinero crece a una tasa constante g .

A lo largo del trabajo, revisaremos detalladamente los aspectos más relevantes de las ecuaciones en diferencias. Por medio de una introducción a los principales conceptos teóricos inherentes a este tipo de ecuaciones, que se basa en los trabajos de Elaydi (1999) y Goldberg (1986), se pretende crear un marco conceptual, que permita posteriormente llevar a cabo un análisis del modelo multiplicador-acelerador (Samuelson, 1939), ampliado a una economía abierta, siguiendo una estructura similar, a la que Gálvez Rodríguez (2021) realiza en su estudio del modelo de Samuelson para una economía cerrada.

2 Marco teórico

En esta sección, nos enfocaremos en introducir los principales conceptos teóricos sobre ecuaciones en diferencias, con el objetivo de establecer una base conceptual, que permita comprender el análisis que posteriormente llevaremos a cabo del modelo de Samuelson.

2.1 Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias describen la evolución temporal de un sistema o fenómeno, de modo que la magnitud objeto de estudio en un momento concreto, se expresa en términos del valor de la magnitud en los momentos inmediatamente anteriores; estos son los llamados modelos dinámicos discretos, es decir con evoluciones a saltos en el tiempo y no de forma continua, lo que vendría expresado por una ecuación diferencial.

Definición 1. Una función real, f , de variable discreta, es una relación que asocia a cada valor discreto, t , un único número real $y = f(t)$. Se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow R \\ t &\longrightarrow y_t = f(t) \end{aligned}$$

Donde $D \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto discreto, denominado dominio, \mathbb{R} es el codominio, t es la variable independiente e y es la variable dependiente.

Introducimos ahora de manera formal, el concepto de ecuación en diferencias (Fernández Rodríguez, 2018):

Definición 2. Llamamos ecuación en diferencias a una expresión $F : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$F(y_{t+k}, y_{t+k-1}, y_{t+k-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0 \quad (2.1)$$

En otras palabras, y en base a la definición anterior, se tiene entonces, que una ecuación en diferencias es una ecuación funcional, cuya incógnita es una función real de variable discreta.

2.2 Clasificación de las ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias las podemos clasificar según distintos criterios (Elaydi, 1999):

Definición 3. Se dice que una ecuación en diferencias es de orden k , si relaciona y_t con y_{t-1}, \dots, y_{t-k} , donde $k \in \mathbb{N}$.

Definición 4. Un problema de valor inicial para una ecuación en diferencias, es una ecuación en diferencias junto con una condición inicial, que especifica el valor de la secuencia en uno o varios puntos de partida, tantos como el orden de la ecuación. Formalmente, se escribe como:

$$\begin{cases} F(y_{t+k}, y_{t+k-1}, y_{t+k-2}, \dots, y_{t+1}, y_t, t) = 0 \\ y_i = b_i \quad i = 0, \dots, k-1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Nótese por ejemplo, que para las ecuaciones de primer orden, necesitamos una sola condición inicial, denotada por y_0 .

Definición 5. Se considera que una ecuación en diferencias es lineal, si es lineal en las variables y_t, \dots, y_{t-k} . En caso contrario se dice que es no lineal.

Definición 6. Se dice que la ecuación en diferencias (2.1) es autónoma, si no depende explícitamente del tiempo t .

Definición 7. Se dice que una ecuación en diferencias es de coeficientes constantes, cuando es de la forma:

$$a_k y_{t+k} + a_{k-1} y_{t+k-1} + a_{k-2} y_{t+k-2} + \dots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $g(t)$ generalmente es una función de t .

Definición 8. Dada la ecuación en diferencias:

$$a_k y_{t+k} + a_{k-1} y_{t+k-1} + a_{k-2} y_{t+k-2} + \dots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

Si $g(t) = 0$, entonces se dice que la ecuación es homogénea; de lo contrario se dice que es no homogénea.

2.3 Ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes

En el contexto de la economía, las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes se emplean con gran frecuencia, debido a su capacidad para modelar relaciones estables entre variables económicas a lo largo del tiempo, posibilitando de este modo la comprensión y predicción del comportamiento de dichas variables.

Este tipo de ecuaciones, resulta de gran utilidad en la modelización de multitud de fenómenos económicos, tales como el crecimiento económico, la inversión, el consumo o la producción. Ejemplo de estas ecuaciones, son las que se presentaron en la introducción, y cuyo detalle se puede encontrar en el trabajo de Tenorio Villalón et al. (2013).

2.3.1 Solución de la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes

En este apartado, presentaremos cual es la forma de la solución general de la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes, dejando los detalles de los resultados y correspondientes métodos de resolución en Goldberg (1986).

Definición 9. Dada la ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes

homogénea

$$a_k y_{t+k} + a_{k-1} y_{t+k-1} + a_{k-2} y_{t+k-2} + \dots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0$$

Se define su polinomio característico de la siguiente manera:

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0$$

y su ecuación característica como $p(\lambda) = 0$.

Definición 10. Dada la ecuación en diferencias (2.2), se dice que la función real de variable discreta a_t , es solución de la ecuación en diferencias dada, si satisface idénticamente la ecuación. Es decir:

$$F(a_{t+k}, a_{t+k-1}, a_{t+k-2}, \dots, a_{t-1}, a_t, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Teorema 1. Dada la ecuación en diferencias lineal de orden k con coeficientes constantes no homogénea

$$a_k y_{t+k} + a_{k-1} y_{t+k-1} + a_{k-2} y_{t+k-2} + \dots + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = g(t)$$

su solución general es $y_t = y_t^H + y_t^P$, donde y_t^H es la solución general de la ecuación homogénea asociada, e y_t^P es una solución particular de la ecuación no homogénea. Además, cualquier solución de la ecuación es de esta forma $(y_t^H + y_t^P)$.

En conclusión, para resolver una ecuación en diferencias lineal no homogénea con coeficientes constantes, primero se encuentra la solución de la ecuación homogénea asociada. Esto proporciona una base para la solución general. Luego, y sin entrar en detalles que si trata Romero (2012), se busca una solución particular de la ecuación no homogénea (coeficientes indeterminados, variación de las constantes,...). Esta solución particular, se suma a la solución de la ecuación homogénea para obtener la solución general. En cuanto a las constantes de la solución general, se determinan teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema.

2.4 Análisis cualitativo de modelos discretos

El análisis cualitativo de modelos dinámicos, como pueden ser la mayoría de modelos económicos, desempeña un papel crucial en la modelización y comprensión de fenómenos económicos. Este enfoque, se centra en entender las tendencias generales y el comportamiento a largo plazo de variables económicas, sin necesidad de precisar valores numéricos exactos en momentos concretos.

A continuación, definiremos los principales conceptos relacionados con el análisis cualitativo, en el contexto de modelos discretos. En cualquier caso, en Elaydi (1999) se puede encontrar con todo detalle y de manera mucho más rigurosa, los conceptos que a continuación vamos a exponer.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y_{t+1} = f(y_t) \\ y_0 = b \end{cases} \quad (2.3)$$

Definición 11. Un punto x^* en el dominio de f , se dice que es un punto de equilibrio de (2.3), si es un punto fijo de f , es decir, $f(x^*) = x^*$.

A estos puntos, también también se les denomina soluciones estacionarias, de ahí que nosotros en adelante, los denotemos por x_e . Es fácil de ver, que dichos puntos serán las raíces de la ecuación:

$$x = f(x)$$

y que corresponden a una solución constante de la ecuación en diferencias.

Definición 12. Dado el problema de valor inicial (2.3), entonces:

- (i) El punto de equilibrio x_e de (2.3), es estable, si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x_0 - x_e| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x_e| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Si x_e no es estable, entonces diremos que es un punto inestable.
- (ii) Se dice que el punto x_e es un atractor si existe $\eta > 0$, tal que:

$$|x_0 - x_e| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} y_t = x_e$$

Si $\eta = \infty$, x_e se llama atractor global.

- (iii) El punto x_e es un punto de equilibrio asintóticamente estable, si es estable y atractor. Si $\eta = \infty$, x_e es globalmente asintóticamente estable.

Determinar la estabilidad de un punto a partir de las definiciones anteriores, puede resultar una tarea compleja en la mayoría de casos. El siguiente resultado permite clasificar los puntos de equilibrio. En cualquier caso, para un enfoque más general consultar Elaydi (1999).

Teorema 2. Sea x_e un punto de equilibrio de la ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = f(y_t)$$

donde f es continuamente diferenciable en un entorno de x_e . Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (i) Si $f'(x_e) < 1$, entonces x_e es un punto asintóticamente estable.
- (ii) Si $f'(x_e) > 1$, entonces x_e es inestable.

En Elaydi (1999) podemos encontrar una introducción al análisis de bifurcaciones, que se presenta como una herramienta de gran relevancia en el estudio de sistemas dinámicos discretos. El estudio de bifurcaciones en este contexto, se centra en cómo cambia el comportamiento del sistema, a medida que un parámetro, o varios de ellos se modifican.

Una bifurcación, ocurre cuando hay un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema, como consecuencia de la variación de uno o varios parámetros. Este cambio, puede manifestarse en la aparición de nuevos puntos de equilibrio, la estabilidad de los puntos de equilibrio existentes, cambios en la periodicidad, entre otros aspectos (Elaydi, 1999).

3 Modelo multiplicador-acelerador de Samuelson

Nuestro objetivo es introducir el modelo de Samuelson, mientras lo contextualizamos adecuadamente. Comenzaremos definiendo el modelo más simplificado, el

de una economía cerrada con sector público, al mismo tiempo que introducimos las hipótesis necesarias para ampliar el modelo a una economía abierta. Posteriormente, del modelo ampliado, analizaremos tanto las soluciones, como la estabilidad de estas. Con el objetivo de hacer más visual los resultados obtenidos en cuanto a soluciones y estabilidad, introduciremos varios gráficos elaborados mediante Wolfram (2024). En los anexos se adjuntan los fragmentos de código que se han empleado.

3.1 Formulación matemática del modelo de Samuelson

En 1939, Paul Samuelson marcó un hito al proponer un modelo de ciclos económicos endógenos (Samuelson, 1939), dinamizando una versión simplificada del modelo keynesiano, para una economía cerrada con sector público. Este modelo parte de un nivel de renta estable, con inversión nula y producción permitida por el stock de capital.

Si el consumo aumenta, la renta también lo hace, iniciando un periodo de expansión económica. Este aumento de la renta facilita el ahorro, y por ende la inversión. Aquí entra en juego el acelerador, que hace que el incremento de la inversión en factores productivos, supere al incremento de la renta, aumentando el gasto y la demanda.

El multiplicador, amplifica el efecto del consumo, incrementando la renta disponible y el consumo a través del aumento del empleo, aunque este incremento será cada vez menor. Este proceso no puede sostenerse indefinidamente, ya que un nivel elevado de inversión requiere un consumo creciente.

Samuelson identificó distintas combinaciones de valores del multiplicador y el acelerador, que resultan en varios tipos de ciclos económicos: con oscilaciones regulares, con oscilaciones amortiguadas hasta desaparecer, con un carácter monótono hasta estabilizarse, o con un crecimiento explosivo o exponencial.

El modelo de Samuelson se basa en las siguientes variables, definidas en términos del tiempo discreto t : Y_t (renta), I_t (inversión privada total), C_t (consumo privado total) y G_t (gasto del sector público), en el periodo t .

Dado que vamos a extender el modelo a una economía abierta, es necesario introducir la balanza comercial. Por lo tanto, consideraremos también: X_t (valor

neto de las exportaciones), M_t (valor neto de las importaciones), y la balanza comercial definida como $N_t = X_t - M_t$, donde N_t es el saldo neto de exportaciones, en el periodo t .

Ahora, estableceremos una serie de hipótesis, sobre las cuales se fundamenta el modelo:

1. La función de consumo C_t , es proporcional a la renta nacional en el periodo inmediatamente anterior. Esto es, $C_t = \alpha Y_{t-1}$, donde $\alpha \in (0, 1)$ es lo que se conoce como propensión marginal al consumo.
2. La inversión privada I_t , es proporcional al aumento en el consumo $C_t - C_{t-1}$. Por lo tanto, $I_t = \beta(C_t - C_{t-1})$, donde $\beta > 0$ por haber una relación directa entre inversión y variación del consumo.
3. El gasto público es constante en los distintos periodos. Luego, $G_t = G_0 \quad \forall t$.
4. Consideraremos las exportaciones como una variable exógena, y para simplificar el modelo, asumiremos que permanecen constantes a lo largo de los diferentes periodos. De ahí, que $X_t = X_0 \quad \forall t$.
5. Finalmente, trataremos las importaciones M_t como una forma adicional de consumo, por lo que también serán proporcionales al ingreso del periodo inmediatamente anterior. Por consiguiente, podemos expresar $M_t = \gamma Y_{t-1}$, donde γ representa la propensión marginal a importar, y al igual que α , se encuentra en el intervalo $(0, 1)$.

En el contexto macroeconómico, el equilibrio se logra cuando la producción nacional es igual a la demanda agregada, lo que se traduce en la siguiente ecuación:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + N_t$$

o, expresado de manera equivalente: $Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t - M_t$.

3.2 Soluciones del modelo de Samuelson

Considerando las hipótesis previamente establecidas, la ecuación (3.1) puede ser reformulada de la siguiente manera:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(C_t - C_{t-1}) + G_0 + X_0 - \gamma Y_{t-1}$$

expresando el consumo en función de la renta, obtenemos la siguiente relación:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + G_0 + X_0 - \gamma Y_{t-1}$$

operando adecuadamente en la expresión, llegamos a la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden:

$$Y_t = (\alpha + \beta\alpha - \gamma)Y_{t-1} - \beta\alpha Y_{t-2} + G_0 + X_0$$

Definamos ahora las siguientes constantes:

$$k_1 = \alpha + \beta\alpha - \gamma \quad k_2 = \beta\alpha \quad k_0 = G_0 + X_0$$

Sin pérdida de generalidad, podemos realizar un desplazamiento temporal de dos periodos, denotado como $t \rightarrow t+2$, lo que nos conduce a una ecuación en diferencias de segundo orden equivalente. Esta ecuación, lineal y con coeficientes constantes, representa una ampliación del modelo de Samuelson a una economía abierta:

$$Y_{t+2} - k_1 Y_{t+1} + k_2 Y_t = k_0 \tag{3.1}$$

A continuación, vamos a buscar las soluciones de la ecuación en diferencias, y analizar bajo que condiciones el sistema se estabiliza. En primer lugar, buscaremos la solución general de la ecuación homogénea asociada, es decir:

$$Y_{t+2} - k_1 Y_{t+1} + k_2 Y_t = 0 \tag{3.2}$$

La ecuación característica es: $\lambda^2 - k_1\lambda + k_2 = 0$

De donde obtenemos que:

$$\lambda_1 = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}$$

Desarrollando k_1 y k_2 queda:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + \alpha\beta - \gamma + \sqrt{(\alpha + \alpha\beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha + \alpha\beta - \gamma - \sqrt{(\alpha + \alpha\beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

En este TFG, suponemos que la propensión marginal a consumir, es igual a la propensión marginal a importar, con el objetivo de simplificar el análisis, esto es $\alpha = \gamma$.

De este modo, las raíces λ_1 y λ_2 se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

Asumir que la propensión marginal a consumir, es en cierto modo equivalente a la propensión marginal a importar, nos permite caracterizar las soluciones de una manera más sencilla que si tuviésemos los tres parámetros α , β y γ .

Ahora, examinaremos el valor del radicando en la expresión anterior, para poder caracterizar adecuadamente las soluciones en términos de los parámetros α y β :

1. Región A: Cuando $\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta > 0$, o equivalentemente $\alpha\beta > 4$, entonces las dos raíces del polinomio característico son reales y distintas, esto se traduce en que la solución general de la ecuación (3.2), se puede escribir como:

$$Y_t^H = C_1 \left(\frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t + C_2 \left(\frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. Región AB: Si $\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta = 0$, o dicho de otra manera $\alpha\beta = 4$, entonces ambas raíces del polinomio característico serán reales e idénticas, lo que implica que la solución general de la ecuación (3.2), tomará la siguiente forma:

$$Y_t^H = C_1 2^t + C_2 t 2^t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Observemos que en este caso, cuando $t \rightarrow \infty$ también $Y_t^H \rightarrow \infty$, lo que indica

que la solución general experimentará un crecimiento explosivo.

3. Región B: Por último, si $\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta < 0$, o lo que es lo mismo, $\alpha\beta < 4$, las dos raíces son imaginarias y diferentes. Esto nos lleva a que:

$$\lambda_j = \frac{\alpha\beta \pm i\sqrt{4\alpha\beta - \alpha^2\beta^2}}{2} \quad j = 1, 2$$

lo que se traduce en que la solución general de la ecuación (3.2), se expresará de la siguiente manera:

$$Y_t^H = C_1(\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \cos(\omega t) + C_2(\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \sin(\omega t) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

donde ω es el argumento de cualquiera de las dos raíces del polinomio característico, es decir $\omega = \arctan\left(\frac{\sqrt{4\alpha\beta - \alpha^2\beta^2}}{\alpha\beta}\right)$. Nótese que en esta caso, la condición es $\alpha\beta \in (0, 4)$, por ser ambos parámetros positivos por hipótesis del modelo.

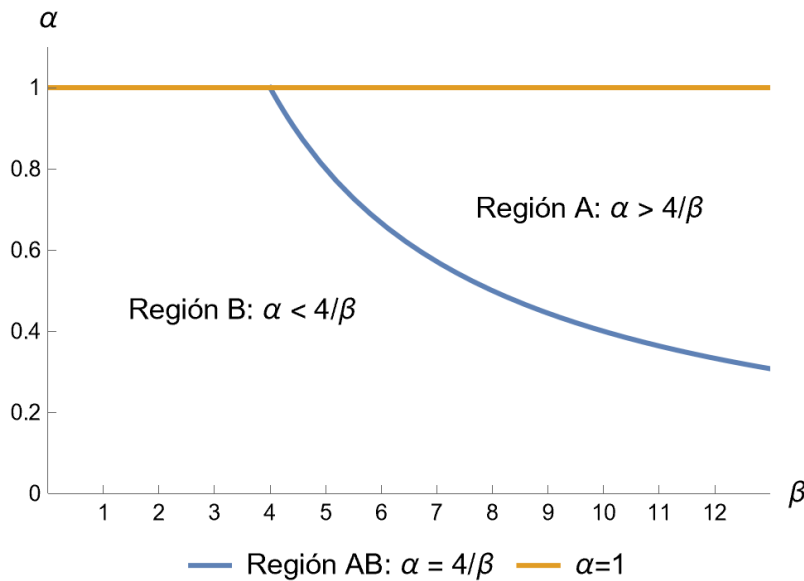


Figura 3.1: Distribución de las soluciones según los parámetros α y β
Fuente: Elaboración propia

En el gráfico 3.1, elaborado a través de Wolfram (2024) empleando el código que se puede encontrar en el Anexo 1, se representan tres regiones, denotadas como A, AB y B. Cada una de estas regiones corresponde a una de las posibles formas que puede adquirir la solución de la ecuación (3.2). En particular, las regiones se definen en función de la relación que existe entre los parámetros α y β , proporcionando así

una representación visual de los posibles comportamientos de la solución, en función de los diferentes valores que pueden tomar los parámetros del modelo.

Por último, con el propósito de concluir la determinación de la solución del modelo, es necesario identificar una solución particular de la ecuación completa (3.1). En este contexto, emplearemos el método de los coeficientes indeterminados (Romero, 2012), el cual nos orientará hacia una candidata adecuada para dicha solución particular. Considerando que el término independiente es constante, proponemos $Y_t = M$, como nuestra hipótesis para la solución particular, donde M representa una constante aún por determinar. Para obtener el valor preciso de M , sustituiremos $Y_t = M$ en la ecuación (3.1), dando lugar a:

$$M - k_1M + k_2M = k_0$$

sustituyendo k_1 , k_2 y k_0 por sus correspondientes valores queda:

$$M - (\alpha + \beta\alpha - \gamma)M + \beta\alpha M = G_0 + X_0$$

Operando, se deduce que $M = \frac{G_0 + X_0}{1 - \alpha + \gamma}$, donde M está bien definida por ser $1 - \alpha + \gamma \neq 0$. En efecto, $1 - \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 1 + \gamma$, lo cual no se da nunca por ser $\alpha \in (0, 1)$. Nótese además, que en el caso de $\alpha = \gamma$, queda que $M = Y_t^P = G_0 + X_0$.

Observemos también, que el único punto fijo de la ecuación completa (3.1), coincide precisamente con la solución particular encontrada, es decir, $x_e = G_0 + X_0$.

Queda entonces, que la solución general de la ecuación (3.1), estará compuesta por la suma de dos componentes: la solución general de la ecuación (3.2), obtenida previamente considerando distintos casos, y una solución particular de la ecuación (3.1), recientemente hallada.

La solución completa será $Y_t = Y_t^H + Y_t^P$, con Y_t^H en función de si pertenece a la región A, AB o B. Esto es:

1. Región A: $Y_t = C_1 \left(\frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t + C_2 \left(\frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t + G_0 + X_0$
2. Región AB: $Y_t = C_1 2^t + C_2 t 2^t + G_0 + X_0$
3. Región B: $Y_t = C_1 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \cos(\omega t) + C_2 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \sin(\omega t) + G_0 + X_0$

Una vez examinadas las soluciones del modelo, procederemos a estudiar las condiciones bajo las cuales el sistema se estabiliza a largo plazo, en cada una de las situaciones identificadas.

3.3 Análisis de estabilidad del modelo de Samuelson

En este apartado, abordaremos los supuestos bajo los cuales el modelo de Samuelson ampliado, tiende a estabilizarse a largo plazo. Desde una perspectiva matemática, esto se traduce en que $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t^H = 0$, siendo Y_t^H la solución de la ecuación homogénea (3.2). Es importante destacar, que este comportamiento implica que la solución completa de la ecuación (3.1), converge hacia el único punto fijo $x_e = G_0 + X_0$.

Consideremos los tres casos analizados en el apartado anterior, con el propósito de caracterizar de manera similar las condiciones de estabilidad.

1. Región A: En el primer caso, teníamos que $\alpha\beta > 4$, lo cual derivaba en que las dos raíces del polinomio característico fueran reales, pero distintas, traduciéndose esto en que la solución de (3.2), adoptase la siguiente forma:

$$Y_t^H = C_1 \left(\frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t + C_2 \left(\frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

En este caso tendremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t^H = 0$ sí y solo sí:

$$\left| \frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right| < 1 \quad \left| \frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right| < 1$$

Estas condiciones ocurrirán a su vez sí:

$$-1 < \frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} < 1 \quad -1 < \frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} < 1$$

Ahora bien, si nos fijamos en el lado derecho de la primera condición, vemos que es incompatible con este caso, donde $\alpha\beta > 4$. Más concretamente, tenemos $\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta} < 2$, lo cual es imposible.

2. Región AB: En el segundo caso, $\alpha\beta = 4$, ya vimos que las raíces eran reales

e idénticas, lo que implicaba que la solución homogénea tuviera la siguiente forma:

$$Y_t^H = C_1 2^t + C_2 t 2^t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Claramente, y como hemos indicado en el apartado anterior, la solución general Y_t no es estable, pues cuando $t \rightarrow \infty$, también $Y_t^H \rightarrow \infty$.

3. Región B: En el último caso, teníamos que $\alpha\beta < 4$, lo cual resultaba en que las raíces del polinomio característico, fuesen complejas y diferentes. Como consecuencia de esto, ya vimos que la solución de (3.2) era:

$$Y_t^H = C_1 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \cos(\omega t) + C_2 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \sin(\omega t) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Es evidente, que en este caso, la estabilidad a largo plazo se garantiza si y solo si $|\alpha\beta| < 1$, lo que es equivalente a $\alpha\beta < 1$, por ser ambos parámetros positivos. Además, la condición de estabilidad obtenida es compatible con $\alpha\beta < 4$, lo que nos permite concluir, que en esta última situación el modelo se estabilizará a largo plazo cuando $\alpha\beta \in (0, 1)$, dado que ambos parámetros son mayores que cero.

La condición de estabilidad $\alpha\beta \in (0, 1)$, implica dividir la región B en dos subregiones, además de la propia curva $\alpha\beta = 1$, luego tenemos dos regiones adicionales. Vamos a denotarlas por B_1 : $\alpha\beta \in (1, 4)$, B_2 : $\alpha\beta = 1$ y B_3 : $\alpha\beta \in (0, 1)$.

Habiendo establecido la condición necesaria y suficiente, para la estabilidad a largo plazo, en el gráfico 3.2 está representado el espacio paramétrico del modelo de Samuelson en economía abierta. Este gráfico, abarca tanto la naturaleza de las soluciones del polinomio característico, asociado a la ecuación (3.2), como la propia condición de estabilidad $\alpha\beta \in (0, 1)$, lo que permite diferenciar 5 regiones (A, AB, B_1 , B_2 y B_3), donde en cada una de ellas, la solución se comporta de manera distinta.

El gráfico 3.2, elaborado a través de Wolfram (2024) y empleando el código que se puede encontrar en el Anexo 2, permite diferenciar las 5 regiones ya mencionadas. Nótese que las regiones B_1 , B_2 y B_3 presentan la misma solución, dado que pertenecen al caso de raíces imaginarias, sin embargo solo en la región B_3 , el modelo se estabiliza a largo plazo. En cuanto a las regiones A y AB, corresponden al caso de raíces reales, distintas o iguales, respectivamente, derivando esto en un comportamiento explosivo

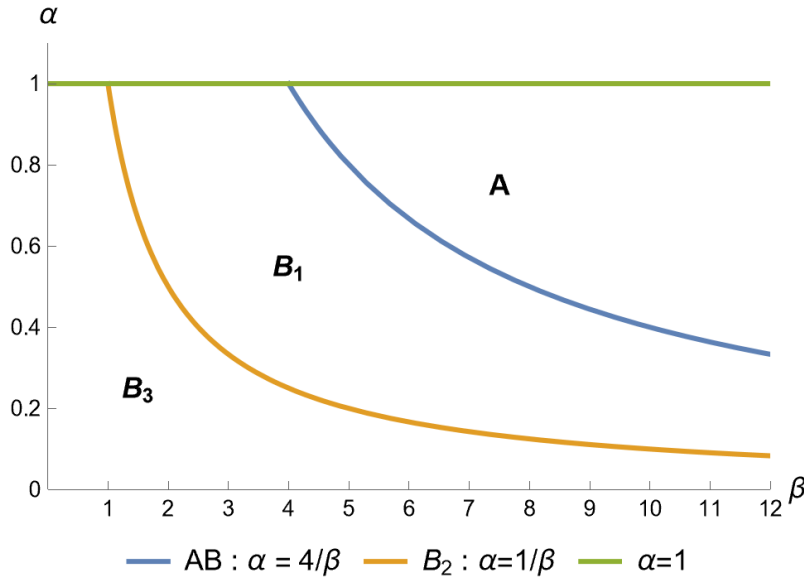


Figura 3.2: Espacio paramétrico del modelo
Fuente: Elaboración propia

de la solución en ambas regiones.

En la tabla 3.1, se muestran las soluciones del modelo en cada una de las regiones que hemos diferenciado, en función de los valores de los parámetros α y β , junto con el comportamiento que adoptarán dichas soluciones en cada una de ellas, pudiendo encontrar soluciones con crecimiento explosivo (Regiones A y AB) o distintos tipos de oscilaciones (Regiones B₁, B₂ y B₃).

Caso	Solución	Estabilidad
A : $\alpha\beta > 4$	$C_1 \left(\frac{\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t + C_2 \left(\frac{\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right)^t + X_0 + G_0$	Crec. explosivo
AB : $\alpha\beta = 4$	$C_1 \left(\frac{\alpha\beta}{2} \right)^t + C_2 t \left(\frac{\alpha\beta}{2} \right)^t + X_0 + G_0$	Crec. explosivo
B ₁ : $\alpha\beta \in (1, 4)$	$C_1 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \cos(\omega t) + C_2 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \sin(\omega t) + X_0 + G_0$	Osc. explosivas
B ₂ : $\alpha\beta = 1$	$C_1 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \cos(\omega t) + C_2 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \sin(\omega t) + X_0 + G_0$	Osc. uniformes
B ₃ : $\alpha\beta \in (0, 1)$	$C_1 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \cos(\omega t) + C_2 (\alpha\beta)^{\frac{t}{2}} \sin(\omega t) + X_0 + G_0$	Osc. amortiguadas

Tabla 3.1: Resumen de casos del modelo de Samuelson según los parámetros
Fuente: Elaboración propia

Para terminar el estudio del modelo de Samuelson, a través del gráfico 3.3, elaborado a través de Wolfram (2024) y empleando el código proporcionado en el Anexo 3, se muestra el comportamiento de la solución en cada uno de los casos estudiados. Para generar el gráfico del comportamiento de la solución en cada uno de los casos, hemos tomado C_1 y C_2 iguales a 1, y en cuanto a los valores de X_0 y G_0 ,

son los correspondientes a las exportaciones netas y gasto público de España durante 2023, siendo estos de 383.7 y 678.8 miles de millones de euros, respectivamente.

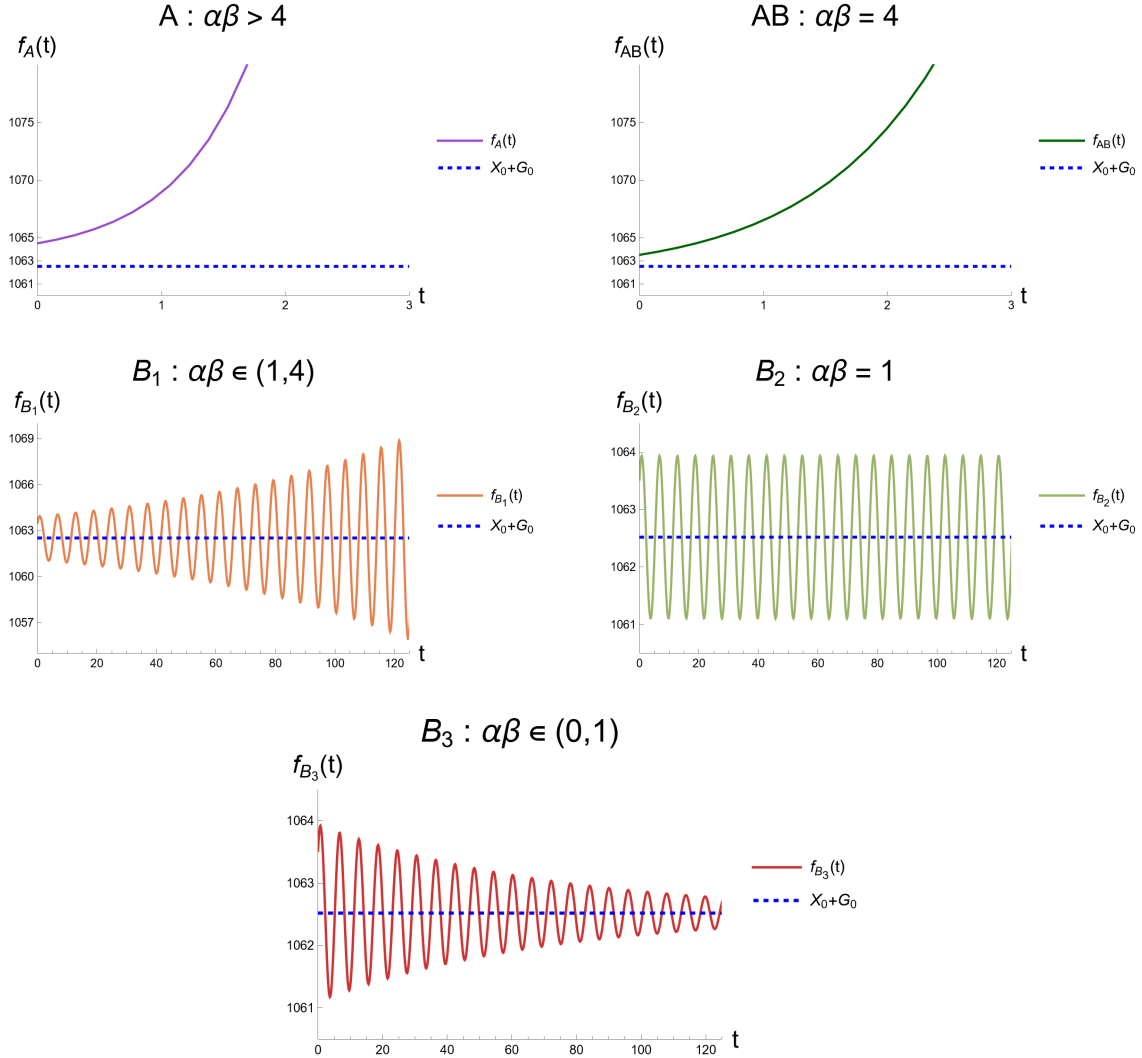


Figura 3.3: Comportamiento de la solución homogénea según los parámetros α y β

Observamos que en las regiones B₁, B₂ y B₃, la solución es una función trigonométrica, que varía en función de los parámetros α y β . Más concretamente, en B₁ la solución adopta la forma de oscilaciones explosivas, en B₂ oscilaciones estables en torno al punto de equilibrio $X_0 + G_0$ y en B₃ oscilaciones amortiguadas. Tanto en las regiones A como AB, vemos que la solución experimenta un crecimiento explosivo, que se hace aún más notorio a medida que $\alpha\beta \gg 4$, o en otras palabras, el valor de $\alpha\beta$ se aleja de la curva $\alpha\beta = 4$. Para obtener las curvas, hemos tomado valores de α y β , tales que el comportamiento fuese lo más claro, ya que dentro de cada una de las 5 regiones, aún siendo la solución igual, los valores de los parámetros condicionan

mucho la forma de las curvas, ya que por ejemplo, las oscilaciones amortiguadas, dependiendo de si estamos más o menos cerca de la condición de estabilidad $\alpha\beta = 1$, pueden converger de manera muy distinta hacia el punto de equilibrio X_0 y G_0 .

4 Conclusiones

Con la redacción de este trabajo, se proporciona la información necesaria, tanto para introducir al lector en el uso de ecuaciones en diferencias en economía, como para servir de base para ampliar los horizontes del propio trabajo, a través de un análisis más exhaustivo de algunos de los modelos presentados en la introducción.

Por medio de los primeros modelos de la introducción, se ha podido comprobar cómo las ecuaciones en diferencias, permiten modelar fenómenos económicos de distinta naturaleza.

Por otro lado, partiendo de las hipótesis planteadas por Samuelson (1939), hemos presentado el modelo clásico para economía cerrada, y hemos hecho una variación, que deriva en una ampliación del modelo para economía abierta. Posteriormente, partiendo de la ecuación en diferencias que se obtiene, como consecuencia del equilibrio del mercado de bienes, hemos llevado a cabo un análisis en profundidad tanto de las soluciones, como del comportamiento a largo plazo del modelo, en función de los parámetros de este. Este análisis, nos ha permitido tanto caracterizar la forma de las soluciones, como obtener bajo que condiciones el modelo es estable o no a largo plazo. De lo cual, hemos obtenido 5 posibles comportamientos de la solución, en función de los valores de los parámetros α y β , siendo el modelo convergente al punto de equilibrio en solo uno de los casos.

En vistas del análisis del modelo de Samuelson, como posible trabajo futuro, sería interesante analizar el modelo, considerando distintas configuraciones de la relación entre la propensión marginal a consumir e importar, o incluso directamente analizar el modelo en función de los tres parámetros originales. Asimismo, sería de interés un trabajo, que a partir de un cierto año, comparase el crecimiento predicho por el modelo de Samuelson, con el crecimiento real experimentado por las economías de distintos países.

Bibliografía

- Elaydi, S. (1999). *An introduction to difference equations*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, New York.
- Fernández Rodríguez, J. (2018). Ecuaciones y sistemas en diferencias. aplicaciones de la dinámica de poblaciones. TFG, Facultad de Matemáticas, US, Sevilla. <https://hdl.handle.net/11441/77520>.
- Gálvez Rodríguez, J. F. (2021). El modelo de samuelson y su aplicación a la economía española. TFG, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, UAL, Almería. <http://hdl.handle.net/10835/13445>.
- García Jaime, A. y Alvarado Niño, Y. (2000). *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita (4ª Ed.)*. Pearson Educación de Colombia, Santa Fé de Bogotá.
- Goldberg, S. (1986). *Introduction to difference equations : with illustrative examples from economics, psychology, and sociology*. Dover Publications, New York.
- Morente, F. V., Morales, P. N., Abril, L. G., y Lobato, M. V. (2007). Estudio de la Estabilidad y de las Bifurcaciones de los Equilibrios de un sistema Dinámico. Aplicación al Mercado Cervecerero Español. *Estudios de Economía Aplicada*, 25(1):419–451.
- Romero, N. P. (2012). Las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en diferencia orientadas al modelamiento económico.
- Samuelson, P. A. (1939). Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *The review of Economics and Statistics*, 21(2):75–78. <https://doi.org/10.2307/1927758>.
- Tenorio Villalón, A. F., Martín Caraballo, A. M., Paralera Morales, C., y Contreras Rubio, I. (2013). Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 16:165–199. <https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.2186>.
- Vílchez Lobato, M. L., Velasco Morente, F., y García del Hoyo, J. J. (2001). Análisis de la estabilidad y de bifurcaciones en un modelo dinámico aplicado a la gestión de una pesquería. *IV Encuentro de Economía Aplicada (2001)*, pág. 1–25.
- Wolfram, Mathematica, Versión 14.0, Champaign, IL, 2024, [Software] (2024). Recuperado de <https://www.wolfram.com/mathematica>.

Anexo 1

El gráfico 3.1 se ha generado utilizando Wolfram (2024), empleando el siguiente código:

```
Plot[{Piecewise[{{4/y, y >= 4}}, Undefined], 1}, {y, 0, 15},
  AxesLabel -> {Style["\[Beta]", 13, Black],
    Style["\[Alpha]", 13, Black]},
  PlotStyle -> {Thickness[0.007], Thickness[0.007]},
  Epilog -> {Text[Style["Región B: \[Alpha] < 4/\[Beta]", 13], {3.5, 0.45}],
    Text[Style["Región A: \[Alpha] > 4/\[Beta]", 13], {9.75, 0.7}]},
  PlotRange -> {{0, 13}, {0, 1.1}},
  Ticks -> {Range[1, 12, 1], {0, 1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8}},
  PlotLegends -> Placed[{"Región AB: \[Alpha] = 4/\[Beta]",
    "\[Alpha]=1"}, Bottom]]
```

Anexo 2

El gráfico 3.2 se ha generado utilizando Wolfram (2024), empleando el siguiente código:

```
Plot[{Piecewise[{{4/y, 4/y < 1}}, Undefined], 1, 1/y }, {y, 1, 20},
  AxesLabel -> {Style["\[Beta]", 13, Black],
    Style["\[Alpha]", 13, Black]},
  PlotStyle -> {Thickness[0.007], Thickness[0.007], Thickness[0.007]},
  Epilog -> {Text[Style["C", 13, Bold], {2, 0.2}],
    Text[Style["B", 13, Bold], {4, 0.55}],
    Text[Style["A", 13, Bold], {7.5, 0.75}]},
  PlotRange -> {{1, 12}, {0, 1.1}},
  Ticks -> {Range[1, 12, 1], {0, 1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8}},
  PlotLegends -> Placed[{"AB : \[Alpha] = 4/\[Beta]", "\[Alpha]=1",
    "BC : \[Alpha]=1/\[Beta]"}, Bottom]]
```

Anexo 3

Para generar el gráfico 3.3, que muestra el comportamiento de la solución completa del modelo de Samuelson en economía abierta en los distintos casos estudiados, hemos empleado el siguiente código utilizando Wolfram (2024):

Región A

Los valores de los parámetros α y β , los hemos seleccionado de tal manera que $\alpha\beta > 4$.

```
alpha = 0.8;
beta = 8;
C1 = 1;
C2 = 1;
X0 = 383.7; (*Valor de las exportaciones en miles de millones*)
G0 = 678.82; (*Valor del gasto público en miles de millones*)

lambda1 = (alpha*beta + Sqrt[alpha^2*beta^2 - 4*alpha*beta])/2;
lambda2 = (alpha*beta - Sqrt[alpha^2*beta^2 - 4*alpha*beta])/2;

fA[t_] := C1*lambda1^t + C2*lambda2^t + X0 + G0

Plot[{fA[t], X0 + G0}, {t, 0, 500},
  PlotLabel -> Style["A : \[Alpha]\[Beta] > 4", FontSize -> 25, Black],
  AxesLabel -> {Style["t", Black, FontSize -> 20],
    Style["!\(\*SubscriptBox[\(f\), \(\A\)]\)(t)",
      Black, FontSize -> 20]},
  PlotRange -> {{0, 3}, {1060, 1080}},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.006], RGBColor[0.6, 0.3, 0.8]},
    {Thickness[0.008], Dashed, RGBColor[0, 0, 1]}},
  Ticks -> {{0, 1, 2, 3}, {1061, 1063, 1065, 1070, 1075}},
  PlotLegends -> {"!\(\*SubscriptBox[\(f\), \(\A\)]\)(t)",
    "\!\(\*SubscriptBox[\(X\), \(\O\)]\)+
```

$\alpha\beta = 4$

Región AB

Los valores de los parámetros α y β , los hemos seleccionado de tal manera que $\alpha\beta = 4$.

```
alpha = 0.8;
beta = 5;
C1 = 1;
C2 = 1;
X0 = 383.7; (*Valor de las exportaciones en miles de millones*)
G0 = 678.82; (*Valor del gasto público en miles de millones*)

fAB[t_] := C1*2^t + C2*t*2^t + X0 + G0

Plot[{fAB[t], X0 + G0}, {t, 0, 500},
  PlotLabel -> Style["AB :  $\alpha\beta = 4$ ", FontSize -> 25, Black],
  AxesLabel -> {Style["t", Black, FontSize -> 20],
    Style[" $f_{AB}(t)$ ", Black, FontSize -> 20]},
  PlotRange -> {{0, 3}, {1060, 1080}},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.006], RGBColor[0, 0.39, 0]},
    {Thickness[0.008], Dashed, RGBColor[0, 0, 1]}},
  Ticks -> {{0, 1, 2, 3}, {1061, 1063, 1065, 1070, 1075}},
  PlotLegends -> {" $f_{AB}(t)$ ",
    " $X_0$ ",
    " $G_0$ "}
```

Región B₁

Los valores de los parámetros α y β , los hemos seleccionado de tal manera que $\alpha\beta \in (1, 4)$.

```

alpha = 0.5;
beta = 2.05;
lambda = (alpha*beta + I*Sqrt[4*alpha*beta - alpha^2*beta^2])/2;
omega = Arg[lambda];
C1 = 1;
C2 = 1;
X0 = 383.7; (*Valor de las exportaciones en miles de millones*)
G0 = 678.82; (*Valor del gasto público en miles de millones*)

fB1[t_] := C1*(alpha*beta)^(t/2)*Cos[omega*t] +
          C2*(alpha*beta)^(t/2)*Sin[omega*t] + X0 + G0

Plot[{fB1[t], X0 + G0}, {t, 0, 500},
  PlotLabel -> Style["!\[SubscriptBox[\(B\),
                    \[1\]]\] : \[Alpha]\[Beta] \[Element] (1,4)",
                    FontSize -> 25, Black],
  AxesLabel -> {Style["t", Black, FontSize -> 20],
                Style["!\[SubscriptBox[\(f\),
                    SubscriptBox[\(B\), \[1\]]\]](t)", Black, FontSize -> 20]},
  PlotRange -> {{0, 125}, {1055, 1070}},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.006], RGBColor[0.9, 0.5, 0.3]},
                {Thickness[0.008], Dashed, RGBColor[0, 0, 1]}},
  Ticks -> {Automatic, {1051, 1054, 1057, 1060, 1063, 1066, 1069}},
  PlotLegends -> {"!\[SubscriptBox[\(f\),
                    \[1\]]\]](t)", "!\[SubscriptBox[\(X\),
                    \[0\]]\]]+\![SubscriptBox[\(G\), \[0\]]\]]"}

```

Región B₂

Los valores de los parámetros α y β , los hemos seleccionado de tal manera que $\alpha\beta = 1$.

```

alpha = 0.5;
beta = 2;

```

```

lambda = (alpha*beta + I*Sqrt[4*alpha*beta - alpha^2*beta^2])/2;
omega = Arg[lambda];
C1 = 1;
C2 = 1;
X0 = 383.7; (*Valor de las exportaciones en miles de millones*)
G0 = 678.82; (*Valor del gasto público en miles de millones*)

fB2[t_] := C1*(alpha*beta)^(t/2)*Cos[omega*t] +
          C2*(alpha*beta)^(t/2)*Sin[omega*t] + X0 + G0

Plot[{fB2[t], X0 + G0}, {t, 0, 500},
  PlotLabel -> Style["!\(\(*SubscriptBox[\(B\),
                    \((2\))]\) : \[Alpha]\[Beta] = 1",
                    FontSize -> 25, Black],
  AxesLabel -> {Style["t", Black, FontSize -> 20],
                Style["!\(\(*SubscriptBox[\(f\),
                SubscriptBox[\(B\), \((2\))]\) \) (t)",
                Black, FontSize -> 20]}},
  PlotRange -> {{0, 125}, {1060.5, 1064.5}},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.006], RGBColor[0.6, 0.7, 0.4]},
                {Thickness[0.008], Dashed, RGBColor[0, 0, 1]}},
  Ticks -> {Automatic, {1061, 1062, 1063, 1064}},
  PlotLegends -> {"!\(\(*SubscriptBox[\(f\), SubscriptBox[\(B\),
                    \((2\))]\) \) (t)", "!\(\(*SubscriptBox[\(X\),
                    \((0\))]\) + \!\(\(*SubscriptBox[\(G\), \((0\))]\) \)"}]}

```

Región B₃

Los valores de los parámetros α y β , los hemos seleccionado de tal manera que $\alpha\beta \in (0, 1)$.

```

alpha = 0.5;
beta = 1.945;
lambda = (alpha*beta + I*Sqrt[4*alpha*beta - alpha^2*beta^2])/2;

```

Modelo de Samuelson en Economía Abierta

```
omega = Arg[lambda];
C1 = 1;
C2 = 1;
X0 = 383.7; (*Valor de las exportaciones en miles de millones*)
G0 = 678.82; (*Valor del gasto público en miles de millones*)

fB3[t_] := C1*(alpha*beta)^(t/2)*Cos[omega*t] +
           C2*(alpha*beta)^(t/2)*Sin[omega*t] + X0 + G0

Plot[{fB3[t], X0 + G0}, {t, 0, 500},
  PlotLabel -> Style["\!\(\*SubscriptBox[\(B\),
                    \(\(3\)\)]\) : \[Alpha]\[Beta] \[Element] (0,1)",
                    FontSize -> 25, Black],
  AxesLabel -> {Style["t", Black, FontSize -> 20],
                Style["\!\(\*SubscriptBox[\(f\),
                    SubscriptBox[\(B\), \(\(3\)\)]\)](t)", Black, FontSize -> 20]}},
  PlotRange -> {{0, 125}, {1060.5, 1064.5}},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.006], RGBColor[0.8, 0.2, 0.2]},
                {Thickness[0.008], Dashed, RGBColor[0, 0, 1]}},
  Ticks -> {Automatic, {1061, 1062, 1063, 1064}},
  PlotLegends -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(f\), SubscriptBox[\(B\),
                    \(\(3\)\)]\)](t)", "\!\(\*SubscriptBox[\(X\),
                    \(\(0\)\)]\) + \!\(\*SubscriptBox[\(G\), \(\(0\)\)]\)"}]
```