



Universidad de Salamanca

FACULTAD DE CIENCIAS

ESQUEMA DE PICARD EN VARIEDADES

Existencia y aplicaciones

Autor:

ISMAEL TAMAMES VELASCO

Tutor:

CARLOS SANCHO DE SALAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MATEMÁTICAS

Curso 2023/2024

Índice general

Introducción	1
1 Funtor de puntos	3
1.1 Pre-espacios	3
1.2 Espacios afines	6
1.2.1 Lema de Yoneda	8
1.2.2 Consecuencias del Lema de Yoneda	11
1.2.3 Espacios de morfismos	14
1.2.4 Espacios en grupos o módulos	16
1.3 Espacio topológico subyacente	17
1.3.1 Topología en el espacio subyacente	22
1.4 Espacios. Equivalencia con los esquemas	25
1.4.1 Esquemas y espacios	28
1.5 Espacios fibrados	32
1.5.1 Haces de módulos y fibrados vectoriales	36
1.5.2 Fibrado tangente a un pre-espacio	39
2 Construcciones geométricas	41
2.1 Espacio proyectivo y grassmaniana de un módulo	41
2.1.1 Representabilidad	42
2.2 Espacio de Hilbert	44
2.2.1 Polinomio de Hilbert y preliminares algebraicos	45
2.2.2 Representabilidad: esquema de Hilbert	48
2.3 Espacio de Picard	51
2.3.1 Funtor de divisores	53
2.3.2 Representabilidad del $\mathbf{Pic}$ en esquemas proyectivos	54
2.3.3 Estudio del $\mathbf{Pic}$ y $\mathbf{Pic}^0$ en variedades	58
Bibliografía	67

Introducción

Comenzaremos con una breve introducción histórica de los temas que se tratarán en esta memoria. En el año 1973, Alexander Grothendieck afirma en su famosa charla en el *Buffalo Colloquium* que la idea de esquema usada hasta el momento debía abandonarse, pues su apoyo excesivo en conceptos como los ideales primos o los haces de anillos locales difuminaba la intuición geométrica de los problemas a tratar. En su lugar, propuso una concepción mucho más fundamental de los espacios algebraicos como funtores de conjuntos desde la categoría de las k -álgebras. Esta idea, que llevaba años desarrollando junto a otros matemáticos como Gabriel, Demazure o Verdier, causaría el nacimiento de una nueva rama de las matemáticas: la Geometría Funtorial.

Por otra parte, el grupo de Picard tiene sus raíces en el trabajo del matemático francés Émile Picard, que murió años antes de poder ver generalizada su teoría, pues el desarrollo completo de estos conceptos se produjo después de su tiempo. Aunque originalmente este grupo se empleara mayoritariamente para estudiar propiedades de curvas algebraicas, combinando los conocimientos existentes con su nueva visión, Grothendieck propuso a partir de él en 1960 la definición de espacio de Picard que seguiremos en esta memoria. Demostró su representabilidad solo dos años después, mucho antes de que la concepción de los esquemas como funtores fuera globalmente conocida, apoyándose en otros espacios que había estado estudiando (como el de Hilbert). En esta memoria llevaremos a cabo un proceso similar para concluir la representabilidad del espacio de Picard en algunas situaciones habituales.

En la actualidad, aunque no sea mayoritaria, esta visión funtorial sigue vigente y avanzando, entrelazándose incluso con otros campos como la lógica. Al respecto podemos hablar de matemáticos de nueva generación como Ingo Blechschmidt o Felix Cherubini, que están desarrollando una teoría general “sintética” en la que se emplean estructuras propias de la Teoría de Categorías como los *topoi* para estudiar espacios algebraicos mediante su lenguaje lógico interno.

La memoria se organiza como sigue:

- El primer capítulo está enteramente dedicado a definir con rigor los espacios algebraicos desde la perspectiva del funtor de puntos y estudiar sus propiedades fundamentales. En él, emplearemos con frecuencia la Teoría de Categorías como una poderosa herramienta que nos permitirá definir y demostrar conceptos de forma totalmente general y adaptada a los tiempos. Comenzaremos con la noción de pre-espacio, para a partir de ella introducir los espacios, objetos fundamentales que manejaremos durante toda la memoria. En particular, demostraremos que los esquemas, desde el punto de vista de la Geometría Algebraica más clásica (o al menos la anterior a Grothendieck), se generalizan en esta nueva visión funtorial de los espacios algebraicos. Aunque no carecen de interés de forma aislada, la mayoría de teoremas que probaremos aquí se entenderán como herramientas a emplear en las demostraciones del segundo capítulo. Las referencias bibliográficas principales usadas en esta primera parte de la memoria son [1], [2], [3], [4] y [5].
- En el segundo capítulo, haremos uso de toda la teoría desarrollada para definir espacios que se emplean en el estudio de diversos aspectos geométricos de los esquemas. Aquí podemos incluir el espacio proyectivo, la grassmaniana, el espacio de Hilbert y el de Picard. El estudio a fondo de este último, como sugiere el título, es el objetivo principal de esta memoria. Concretamente, probaremos la representabilidad del espacio de Picard por un esquema en diversos casos, como el de esquemas proyectivos o el de variedades. Sin embargo, para ello debemos primero dar algunas propiedades y verificar la representabilidad de otros espacios que emplearemos en las demostraciones finales. Cabe destacar que en este capítulo serán necesarios múltiples resultados conocidos en Geometría Algebraica y teoría de esquemas, que explicitaremos para que la memoria sea autocontenida, pero no demostraremos en algunas ocasiones. Estos se pueden encontrar en las referencias [6] y [7]. A su vez, las referencias que tratan directamente el espacio de Picard son [8], [9] y [10].

En conclusión, la idea de esta memoria es servir, al mismo tiempo, como introducción a la geometría funtorial y como repaso de la construcción y las propiedades del espacio de Picard. Así, mostraremos la potencia del lenguaje funtorial cuando se aplica a conceptos clásicos de Geometría e incluso generalizaremos algunos teoremas conocidos en el campo con nuestro lenguaje.

CAPÍTULO 1

Funtor de puntos

1.1. Pre-espacios

Fijemos un cuerpo base k (que también puede ser un anillo). Para asegurar que ciertos objetos que aparecerán en la memoria tienen estructura de conjunto, asumiremos que todas las k -álgebras que se empleen en el desarrollo del texto son de tipo finito.

DEFINICIÓN. Un k -**pre-espacio** es un funtor covariante de la categoría de k -álgebras en la de conjuntos.

$$\begin{aligned} k\text{-}\mathbf{Alg} &\xrightarrow{\mathcal{X}} \mathbf{Conj} \\ A &\longmapsto \mathcal{X}(A) \end{aligned}$$

Este $\mathcal{X}$, que llamaremos “funtor de puntos del pre-espacio”, asigna a cada k -álgebra el conjunto de puntos con valores en ella, de forma que todo morfismo de k -álgebras $A \xrightarrow{h} B$ induce una aplicación

$$\mathcal{X}(A) \xrightarrow{h_*^{\mathcal{X}}} \mathcal{X}(B)$$

El funtor de puntos generaliza la visión de las variedades algebraicas como soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas. A un nivel intuitivo, asocia a cada k -álgebra el conjunto de puntos valorados en ella que verifican las condiciones que dan forma al espacio definido de forma abstracta.

Ejemplos. 1. La recta sobre k , denotada $\mathbf{k}$, asigna a cada k -álgebra A los elementos de A como mero conjunto. Esto es, es el funtor olvidadizo $k\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow \mathbf{Conj}$

2. El espacio afín de dimensión n , denotado $\mathbf{k}^n$ o $\mathbb{A}_k^n$, asigna a cada k -álgebra A el

conjunto de n -uplas de elementos de A :

$$\mathbf{k}^n(A) = A^n$$

3. Soluciones de sistemas de ecuaciones: el ejemplo fundamental de pre-espacio es el que asocia a cada k -álgebra A el conjunto de soluciones $S_{\mathcal{P}}(A)$ en ella de cierto sistema polinómico $\mathcal{P} = \{p_j(x_i) = 0\}_{j \in J}$ en las variables $\{x_i\}_{i \in I}$. En efecto, si $A \xrightarrow{h} B$ es un morfismo de k -álgebras, induce una aplicación entre las soluciones del sistema en A y las soluciones en B :

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}}(A) &\xrightarrow{h_*} S_{\mathcal{P}}(B) \\ (a_i)_{i \in I} &\longmapsto (h(a_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

Y la asignación $A \rightsquigarrow S_{\mathcal{P}}(A)$ es funtorial, es decir, $(s \circ h)_* = s_* \circ h_*$ para cada pareja de morfismos compatibles y $(\text{Id}_A)_* = \text{Id}_{S_{\mathcal{P}}(A)}$.

Sean $\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}$ dos k -pre-espacios.

DEFINICIÓN. Un morfismo de k -pre-espacios $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathcal{X}}$ viene dado por una aplicación entre los puntos con coordenadas en cada k -álgebra A :

$$\mathcal{X}(A) \xrightarrow{\varphi_A} \overline{\mathcal{X}}(A)$$

de manera compatible con los cambios de base, es decir, haciendo conmutar el siguiente diagrama para cada morfismo $A \xrightarrow{h} B$ de k -álgebras:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(A) & \xrightarrow{\varphi_A} & \overline{\mathcal{X}}(A) \\ h_*^X \downarrow & & \downarrow h_*^{\overline{\mathcal{X}}} \\ \mathcal{X}(B) & \xrightarrow{\varphi_B} & \overline{\mathcal{X}}(B) \end{array}$$

Observación. Es inmediato que los morfismos de k -pre-espacios son precisamente las transformaciones naturales entre sus funtores de puntos.

Sea $\mathcal{X}$ un k -pre-espacio.

DEFINICIÓN. Un sub- k -pre-espacio $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ es un k -pre-espacio verificando que, para toda k -álgebra A , $\mathcal{Y}(A) \subset \mathcal{X}(A)$ es subconjunto y, para todo cambio de base $A \xrightarrow{h} B$, el morfismo inducido en $\mathcal{Y}$ coincide con la restricción del inducido en $\mathcal{X}$, es decir, $h_*^{\mathcal{Y}} = h_*^{\mathcal{X}}|_{\mathcal{Y}(A)}$

DEFINICIÓN. El producto directo de k -pre-espacios se denota por $\mathcal{X} \times \overline{\mathcal{X}}$, y asigna a cada k -álgebra A el conjunto

$$(\mathcal{X} \times \overline{\mathcal{X}})(A) = \mathcal{X}(A) \times \overline{\mathcal{X}}(A)$$

Dados dos morfismos de k -pre-espacios $\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{Y}$, se define el producto fibrado de k -pre-espacios sobre $\mathcal{Y}$ como el k -pre-espacio $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \overline{\mathcal{X}}$, con puntos

$$(\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \overline{\mathcal{X}})(A) = \mathcal{X}(A) \times_{\mathcal{Y}(A)} \overline{\mathcal{X}}(A)$$

Observación. Sea el espacio de un solo punto, que asocia a cada k -álgebra el conjunto $\{*\}$. Sabemos que es el objeto final de la categoría de k -pre-espacios por ser $\{*\}$ el objeto final de **Conj**, por lo que podemos entender el producto directo de pre-espacios como el producto fibrado sobre este espacio.

Condición de aditividad. El funtor de puntos de un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ conserva los productos directos y fibrados, es decir,

$$\mathcal{X}(A_1 \times_A A_2) = \mathcal{X}(A_1) \times_{\mathcal{X}(A)} \mathcal{X}(A_2)$$

para cada pareja de morfismos de k -álgebras $A_1, A_2 \rightarrow A$.

Fijaremos una condición adicional para los k -pre-espacios $\mathcal{X}$ con los que trabajaremos, necesaria para asegurar que ciertos objetos que definiremos más tarde (como el espacio topológico subyacente) son conjuntos.

Condición de constructibilidad. Existe un conjunto de k -álgebras $\{A_j\}_{j \in J}$ verificando que, para toda k -álgebra B y punto con valores en ella $p_B \in \mathcal{X}(B)$, existen un índice $j \in J$, un morfismo $A_j \xrightarrow{f} B$ y un punto $p_{A_j} \in \mathcal{X}(A_j)$ con $f_*^{\mathcal{X}}(p_{A_j}) = p_B$.

Esto significa que podemos obtener cualquier punto con valores en B cambiando de base algún punto de $\mathcal{X}$ con valores en cierta k -álgebra del conjunto del que partimos, es decir, asegura la constructibilidad del pre-espacio a partir de sus puntos en varias k -álgebras conocidas. En la práctica, el conjunto de k -álgebras base se suele tomar como $\{k[x], k[x_1, x_2], \dots, k[x_1, \dots, x_n], \dots\}$, pues toda k -álgebra de tipo finito se puede considerar un cociente de una de estas (luego un cambio de base).

Observación. La condición de constructibilidad es suficiente para probar que, dados dos

k -pre-espacios $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, la familia $\text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es un conjunto. Esto significa que la categoría de k -pre-espacios que hemos definido es *localmente pequeña*, condición conveniente para definir haces y otras estructuras en ella.

DEFINICIÓN. Dado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, entendemos una función sobre él como un morfismo de pre-espacios $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathbf{k}$, que asigna a cada $x \in X(A)$ un escalar $f_A(x) \in A$ haciendo conmutar el siguiente diagrama para cada cambio de base $A \xrightarrow{h} B$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(A) & \xrightarrow{f_A} & A \\ h_*^X \downarrow & & \downarrow h \\ \mathcal{X}(B) & \xrightarrow{f_B} & B \end{array}$$

Denotaremos a las funciones sobre un pre-espacio $\mathcal{X}$ por $F_k(\mathcal{X})$.

Definiendo la suma y el producto de funciones mediante las de las álgebras a las que pertenecen sus valores, $F_k(X)$ forma también una k -álgebra (los escalares de k se incluyen como funciones constantes). Además, la asignación $\mathcal{X} \rightarrow F_k(\mathcal{X})$ es un funtor contravariante que envía un morfismo de pre-espacios $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathcal{X}}$ al morfismo de álgebras

$$\begin{aligned} F_k(\overline{\mathcal{X}}) &\xrightarrow{\varphi^*} F_k(\mathcal{X}) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

es decir, verifica las propiedades

- $(\varphi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \varphi^*$ para todos $\mathcal{X} \xrightarrow{\phi} \mathcal{X}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{X}''$
- $\text{Id}_{\mathcal{X}}^* = \text{Id}_{F_k(\mathcal{X})}$.

1.2. Espacios afines

Una observación fundamental respecto a esta forma de entender los espacios es que cada punto $x \in \mathcal{X}(B)$ determina un morfismo de k -álgebras

$$\begin{aligned} F_k(\mathcal{X}) &\xrightarrow{\nu_x} B \\ b &\longmapsto b(x) \end{aligned}$$

que corresponde a tomar valor en el punto. Desde esta perspectiva, e intuitivamente, entendemos que los morfismos $F_k(\mathcal{X}) \rightarrow B$ son “observaciones” del espacio, que tratan de distinguir los puntos de $\mathcal{X}$ con valores en B . Sin embargo, existen puntos distintos que definen el mismo morfismo de álgebras, por lo que consideramos que no se pueden distinguir mediante funciones, y también hay observaciones que no corresponden directamente con ningún punto del espacio (decimos entonces que observan “puntos imaginarios”).

Esto motiva la definición del espacio observado por una k -álgebra A como aquel cuyos puntos valorados en B son los morfismos de k -álgebras $A \rightarrow B$.

DEFINICIÓN. Se llama **espectro** de una k -álgebra A al k -pre-espacio definido por

$$(\mathbf{Spec} A)(B) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(A, B)$$

que asocia a cada morfismo de k -álgebras $B \xrightarrow{h} \bar{B}$ la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(A, B) &\xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(A, \bar{B}) \\ f &\longmapsto h \circ f \end{aligned}$$

Decimos que un k -pre-espacio es afín si es isomorfo al espectro de alguna k -álgebra.

El ejemplo fundamental (y único) de espacio afín es el definido por un sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = \cdots = p_r = 0\}$, con $p_1, \dots, p_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. Cualquiera de este tipo determina la k -álgebra

$$A := k[x_1, \dots, x_n] / (p_1, \dots, p_r)$$

y se verifica que para toda k -álgebra B

$$(\mathbf{Spec} A)(B) = \{(b_1, \dots, b_n) \in B^n \mid p_1(b_1, \dots, b_n) = \cdots = p_r(b_1, \dots, b_n) = 0\}$$

es decir, los puntos del espectro de este anillo son las soluciones del sistema de ecuaciones anterior.

A su vez, toda k -álgebra se puede entender como el cociente de cierto anillo de polinomios (posiblemente en infinitas variables) por un ideal, cuyos generadores determinarán el sistema de ecuaciones correspondiente. Por ello, entenderemos un espectro como el k -pre-espacio de soluciones de cierto sistema de ecuaciones polinómicas.

Observación. Los dos ejemplos iniciales de pre-espacios que hemos dado, la recta afín y el

espacio afín de dimensión n , son ambos (esperablemente) espacios afines, pues

$$\mathbf{k}(A) = A = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(k[x], A) \quad \mathbf{k}^n(A) = A^n = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(k[x_1, \dots, x_n], A)$$

luego $\mathbf{k} = \mathbf{Spec} k[x]$ y $\mathbf{k}^n = \mathbf{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$.

DEFINICIÓN. Dado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, se dice que $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\tilde{B})$ es un **punto general** si cualquier punto $x \in \mathcal{X}(A)$ se puede obtener a partir de $\tilde{x}$ de forma única mediante cierta extensión de escalares $\tilde{B} \xrightarrow{h} A$.

$$\mathcal{X}(\tilde{B}) \xrightarrow{h_*} \mathcal{X}(A)$$

$$\tilde{x} \longmapsto x$$

Proposición 1. Si $\mathcal{X}$ tiene un punto general $\tilde{x} \in \mathcal{X}(\tilde{B})$, entonces $\mathcal{X}$ es un espacio afín isomorfo a $\mathbf{Spec} \tilde{B}$.

Demostración. La condición de punto general es equivalente a imponer que para toda k -álgebra B se tenga la correspondencia

$$\mathcal{X}(B) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(\tilde{B}, B) = (\mathbf{Spec} \tilde{B})(B)$$

Este enfoque funtorial que hemos tomado se aprovecha en gran medida de las herramientas generales desarrolladas en la Teoría de Categorías. Por ello, vamos a introducir con lenguaje general uno de los resultados fundamentales más básicos en este área.

1.2.1. Lema de Yoneda

Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, es decir, cuyos morfismos son conjuntos para toda pareja de objetos. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathbf{Conj}$ un funtor covariante cualquiera y $\mathcal{C} \xrightarrow{h_A} \mathbf{Conj}$ el funtor de morfismos (covariante) asociado a cierto objeto $A \in \mathcal{C}$:

$$h_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \quad / \quad \forall B \xrightarrow{f} \bar{B} \text{ induce}$$

$$\begin{array}{ccc}
h_A(B) & \xrightarrow{f_*^B} & h_A(\bar{B}) \\
\parallel & & \parallel \\
\text{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(A, \bar{B}) \\
\{A \xrightarrow{g} B\} & \longmapsto & \{A \xrightarrow{f \circ g} \bar{B}\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{f} & \bar{B} \\
g \uparrow & \nearrow f_*(g) & \\
A & &
\end{array}$$

Denotemos por $F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}}$ a la categoría de funtores covariantes $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}$.

Lema de Yoneda. Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ y funtor $F \in F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}}$, la siguiente correspondencia es biunívoca:

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}}}(h_A, F) &= F(A) \\
\varphi &\longmapsto \varphi_A(\text{Id}_A)
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $h_A \xrightarrow{\varphi} F$ un morfismo en la categoría $F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}}$ (es decir, una transformación natural de funtores). Para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$, se tiene el diagrama natural

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow{\varphi_A} & F(A) \\
\downarrow f_*^{h_A} & & \downarrow f_*^F \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{\varphi_B} & F(B)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\{A \xrightarrow{\text{Id}} A\} & \longmapsto & u \\
\downarrow \downarrow f & & \downarrow \\
\{A \xrightarrow{f} B\} & \longmapsto & u_B
\end{array}$$

Daremos la correspondencia inversa a $\varphi \mapsto \varphi_A(\text{Id}_A) := u$. Dado un elemento $x \in F(A)$, se le asigna la transformación natural $h_A \xrightarrow{\phi} F$ que, para cada objeto $B \in \mathcal{C}$, da lugar al morfismo

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\xrightarrow{\phi_B} F(B) \\
\{A \xrightarrow{g} B\} &\longmapsto g_*^F(x)
\end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que estas aplicaciones son inversas entre sí.

Embebimiento de Yoneda. Se tiene un embebimiento de categorías

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &\xrightarrow{\iota} F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}} \\ A &\longmapsto h_A\end{aligned}$$

es decir, un funtor (contravariante) plenamente fiel (*fully faithful*) mediante el que $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}}$. Por él, todo morfismo $A \xrightarrow{f} \bar{A}$ da lugar a una transformación natural $h_{\bar{A}} \xrightarrow{f^*} h_A$, que para cada objeto B toma la forma

$$\begin{array}{ccc} h_{\bar{A}}(B) & \xrightarrow{f_B^*} & h_A(B) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathrm{Hom}(\bar{A}, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A, B) \\ \{\bar{A} \xrightarrow{g} B\} & \longmapsto & \{A \xrightarrow{g \circ f} B\} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{A} & \xrightarrow{g} & B \\ f \uparrow & \nearrow f_B^*(g) & \\ A & & \end{array}$$

Demostración. Debemos demostrar que los morfismos de funtores representables coinciden (dualmente) con los de los objetos que los representan. Esto es consecuencia inmediata del lema anterior, pues

$$\mathrm{Hom}_{F_{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}}}(h_{\bar{A}}, h_A) = h_A(\bar{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \bar{A})$$

Analicemos más a fondo esta correspondencia. Un morfismo $A \xrightarrow{f} \bar{A}$ es equivalente por definición a un elemento de $h_A(\bar{A})$, que por el Lema de Yoneda corresponde con el morfismo $h_{\bar{A}} \xrightarrow{\phi} h_A$ dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{A}, B) &\xrightarrow{\phi_B} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \{\bar{A} \xrightarrow{g} B\} &\longmapsto \{A \xrightarrow{g_*^B(f)} B\} = g \circ f = f_B^*(g)\end{aligned}$$

es decir, el morfismo inducido por f según el Lema de Yoneda es precisamente f^* .

Observación. Como corolario de este embebimiento, tenemos que dos objetos son isomorfos si y solo si lo son los funtores representados por ellos. Esto es consecuencia de que, por ser plenamente fiel, el funtor ι tiene la propiedad

$$A \xrightarrow{f} \bar{A} \text{ es isomorfismo} \iff h_{\bar{A}} \xrightarrow{f^*} h_A \text{ es isomorfismo}$$

1.2.2. Consecuencias del Lema de Yoneda

Volvamos ahora a lo que nos ocupa. Como ya sabíamos, los k -pre-espacios no son más que funtores covariantes $k\text{-}\mathbf{\mathcal{A}lg} \rightarrow \mathbf{Conj}$. Directamente de su definición, se tiene que $\mathbf{Spec} A$ es precisamente el funtor covariante de homomorfismos h_A representado por A en $k\text{-}\mathbf{\mathcal{A}lg}$, y la asignación $A \rightsquigarrow \mathbf{Spec} A$ es el funtor contravariante del embebimiento de Yoneda en esta categoría.

Corolario 2. Cada morfismo de k -álgebras $A \xrightarrow{f} \bar{A}$ induce uno entre sus respectivos espectros $\mathbf{Spec} \bar{A} \xrightarrow{f^*} \mathbf{Spec} A$. Todos los morfismos entre espectros proceden de alguno de estos, que dado $\mathbf{Spec} \bar{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Spec} A$ se puede recuperar como $\varphi_{\bar{A}}(\text{Id}_{\bar{A}}) \in \mathbf{Spec} A(\bar{A})$.

$$\text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{Spec} \bar{A}, \mathbf{Spec} A) = \text{Hom}_{k\text{-}\mathbf{\mathcal{A}lg}}(A, \bar{A})$$

Además, $A \xrightarrow{f} \bar{A}$ es un isomorfismo si y solo si $\mathbf{Spec} \bar{A} \xrightarrow{f^*} \mathbf{Spec} A$ lo es, con lo que

$$\mathbf{Spec} A \simeq \mathbf{Spec} \bar{A} \iff A \simeq \bar{A}$$

Podemos demostrar fácilmente con esto que si $\mathcal{X} = \mathbf{Spec} A$ es un espacio afín, un punto $A \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{B}$ es general si y solo si es un isomorfismo.

Notemos que por definición $\tilde{x} \in \mathbf{Spec} A(\tilde{B})$ es punto general si y solo si $\mathbf{Spec} A(B) = \text{Hom}_{k\text{-}\mathbf{\mathcal{A}lg}}(\tilde{B}, B) = \mathbf{Spec} \tilde{B}(B)$ para toda k -álgebra B , es decir, si el morfismo inducido en espectros $\mathbf{Spec} \tilde{B} \xrightarrow{\tilde{x}^*} \mathbf{Spec} A$, es isomorfismo, pues tenemos

$$\mathbf{Spec} A(B) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_{k\text{-}\mathbf{\mathcal{A}lg}}(\tilde{B}, B) = \mathbf{Spec} \tilde{B}(B)$$

$$h_*(\tilde{x}) = \tilde{x}^*(h) \longleftarrow h$$

Por el corolario anterior, la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que el propio punto $\tilde{x}$ sea un isomorfismo $A \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{B}$.

Observación. A causa de esto, normalmente elegiremos la identidad $A \xrightarrow{\text{Id}} A$ como punto general de $\mathbf{Spec} A$. Si $A = k[x_1, \dots, x_n] / (p_i(x_1, \dots, x_n))_{i \in I} = k[y_1, \dots, y_n]$, entonces el punto general es la identidad Id_A pensada como punto de coordenadas variables $(y_1, \dots, y_n)$ que verifican cada ecuación polinómica $p_i(y_1, \dots, y_n) = 0$ y únicamente esas.

Usando esto, podemos reformular el Lema de Yoneda en la categoría que estamos trabajando.

Obsérvese que el elemento $\text{Id}_A \in h_A(A)$ es precisamente el punto general $\tilde{x} \in \mathbf{Spec} A(A)$, con lo que el enunciado queda así:

Lema de Yoneda en k -álgebras. Si $\mathcal{X}$ es un k -pre-espacio afín y A una k -álgebra, se tiene la correspondencia biunívoca

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{Spec} A, \mathcal{X}) &= \mathcal{X}(A) \\ \varphi &\longmapsto \varphi_A(\tilde{x}) \end{aligned}$$

En particular, el embebimiento de Yoneda implica que los k -pre-espacios afines, como categoría, son equivalentes a la categoría opuesta a la de k -álgebras. Es un resultado conocido que $k\text{-}\mathbf{Alg}^{op}$ es equivalente a la categoría de k -esquemas afines (entendiéndolos de la forma tradicional como espectros definidos mediante ideales primos). Por ello, en adelante tendremos en cuenta que los morfismos de k -pre-espacios afines son equivalentes a los morfismos de los k -esquemas afines que los representan.

Veamos cómo podemos usar este resultado para caracterizar las funciones de espacios afines. Dada una k -álgebra A , cada elemento $a \in A$ determina una función sobre $\mathbf{Spec} A$: la que a cada punto $A \xrightarrow{x} B$ le asigna el escalar $a(x) = x(a)$.

Esto define un morfismo de álgebras $A \longrightarrow F_k(\mathbf{Spec} A)$, que será isomorfismo por el Lema de Yoneda, pues

$$F_k(\mathbf{Spec} A) = \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{Spec} A, \mathbf{k}) = \mathbf{k}(A) = A$$

Aunque el Lema de Yoneda sea un resultado totalmente general, al interpretarlo en esta categoría cobra un significado geométrico: cada k -álgebra está formada por las funciones sobre el pre-espacio observado por ella, su espectro.

En particular, de esto obtenemos que $F_k(\mathbf{k}) = k[x]$, y análogamente $F_k(\mathbf{k}^n) = k[x_1, \dots, x_n]$. Por ello, cada morfismo de pre-espacios $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$, que corresponde a un endomorfismo de k -álgebras para cada A , es equivalente a un polinomio $p(x) \in k[x]$. Esto implica que la k -álgebra de los polinomios es natural en su categoría por ser el álgebra de funciones del funtor olvidadizo.

Si $\mathcal{X}$ es un k -pre-espacio cualquiera, todo punto $x \in \mathcal{X}(A)$ determina un morfismo de

k -álgebras

$$\begin{aligned} F_k(\mathcal{X}) &\xrightarrow{\nu_x} A \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

esto define un morfismo canónico de k -pre-espacios

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\xrightarrow{\nu} \mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X}) \\ x &\longmapsto \nu_x \end{aligned}$$

que será isomorfismo si y solo si $\mathcal{X}$ es afín, pues en este caso $\mathbf{Spec} F_k(\mathbf{Spec} A) = \mathbf{Spec} A = \mathcal{X}$.

Proposición 3. Para todo morfismo de k -pre-espacios $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{X}'$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X}' \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\varphi^{**}} & \mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X}') \end{array}$$

Demostración. Para cada $f \in F_k(\mathcal{X}')$, tenemos que

$$\nu_{\varphi(x)}(f) = f(\varphi(x)) = (\varphi^* f)(x) = \nu_x(\varphi^* f) = ((\varphi^*)^*(\nu_x))(f) = (\varphi^{**} \nu_x)(f)$$

Sustituyendo $\mathcal{X}'$ por $\mathbf{Spec} A$, obtenemos el siguiente corolario que proporciona una propiedad universal del morfismo $\mathcal{X} \xrightarrow{\nu} \mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X})$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Spec} A \\ \nu \downarrow & & \uparrow \varphi^{**} \\ \mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X}) & & \end{array}$$

Corolario 4. Para cada k -álgebra A y k -pre-espacio $\mathcal{X}$, se verifica

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathcal{X}, \mathbf{Spec} A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X}), \mathbf{Spec} A)$$

$$\{\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Spec} A\} \longmapsto \varphi^{**}$$

$$\phi \circ \nu = \nu^*(\phi) \longleftarrow \{\mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X}) \xrightarrow{\phi} \mathbf{Spec} A\}$$

Por ello, $\mathbf{Spec} F_k(\mathcal{X})$ es el representante de $\mathcal{X}$ en la categoría de espacios afines, y se le llama su afinizado. Sabemos entonces que $\mathcal{X}$ es afín si y solo si coincide con su afinizado.

Observación. El k -pre-espacio de un solo punto es afín y corresponde con $\mathbf{Spec} k$, pues para cada k -álgebra $\mathbf{Spec} k(A) = \{k \rightarrow A\}$ (el único morfismo de k -álgebras posible es el que define a A como álgebra). Esto corresponde dualmente a que k sea el objeto inicial de la categoría de k -álgebras por definición de esta.

Teorema 5. El producto fibrado de k -espacios afines sobre otro espacio afín constituye también un espacio afín, que tiene como funciones el producto tensorial de las respectivas álgebras de funciones de cada uno. Es decir, para cada pareja de morfismos de k -álgebras $A_1, A_2 \rightarrow C$, se cumple

$$\mathbf{Spec} A_1 \times_{\mathbf{Spec} C} \mathbf{Spec} A_2 = \mathbf{Spec}(A_1 \otimes_C A_2)$$

En particular, el producto directo de espacios afines lo es también, y verifica

$$\mathbf{Spec} A_1 \times A_2 = \mathbf{Spec}(A_1 \otimes_k A_2)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (\mathbf{Spec} A_1 \times_{\mathbf{Spec} C} \mathbf{Spec} A_2)(B) &= (\mathbf{Spec} A_1)(A) \times_{\mathbf{Spec} C(A)} (\mathbf{Spec} A_2)(B) = \\ &= \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(A_1, B) \times_{\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(C, B)} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(A_2, B) = \\ &= \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(A_1 \otimes_C A_2, B) = (\mathbf{Spec} A_1 \otimes_C A_2)(B) \end{aligned}$$

Donde hemos usado que el funtor de homomorfismos contravariante $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(-, B)$ transforma el coproducto fibrado de $k\text{-}\mathbf{\hat{A}lg}$ en el producto fibrado de $\mathbf{Conj}$. El producto directo es un caso particular tomando $C = k$.

1.2.3. Espacios de morfismos

Dado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ y una k -álgebra A , consideremos el cambio de base $\mathcal{X}_A$. Este A -pre-espacio asigna a cada A -álgebra B los puntos

$$\mathcal{X}_A(B) = \mathcal{X}(B)$$

por lo que no es más que la composición de $\mathcal{X}$ y el funtor olvidadizo $A\text{-}\mathbf{Alg} \rightarrow k\text{-}\mathbf{Alg}$.

Proposición 6. Para toda pareja de k -álgebras A, B , se cumple la igualdad (como A -espacios)

$$(\mathbf{Spec} A)_B = \mathbf{Spec}(B \otimes_k A)$$

Demostración. Consecuencia directa de la propiedad universal del cambio de base de k -álgebras.

DEFINICIÓN. Dados dos k -pre-espacios $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, su k -pre-espacio de morfismos $\mathbf{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es aquel que asigna a cada k -álgebra el conjunto¹

$$\mathbf{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(A) = \mathbf{Hom}_{A\text{-pre-esp.}}(\mathcal{X}_A, \mathcal{Y}_A)$$

y, para cada cambio de base $A \xrightarrow{h} \bar{A}$, induce una aplicación

$$\mathbf{Hom}_{A\text{-pre-esp.}}(\mathcal{X}_A, \mathcal{Y}_A) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\bar{A}\text{-pre-esp.}}(\mathcal{X}_{\bar{A}}, \mathcal{Y}_{\bar{A}})$$

Esta envía cada morfismo de A -pre-espacios $\mathcal{X}_A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}_A$ al de $\bar{A}$ -pre-espacios $\mathcal{X}_{\bar{A}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\bar{A}}$ que, aplicado sobre cada $\bar{A}$ -álgebra B , coincide con φ_B (usando que toda $\bar{A}$ -álgebra es A -álgebra por $A \rightarrow \bar{A}$).

DEFINICIÓN. Si $\mathcal{X}$ es un k -pre-espacio, se llama k -pre-espacio de funciones de $\mathcal{X}$ a $\mathbf{F}_k(\mathcal{X}) = \mathbf{Hom}(\mathcal{X}, k)$

Proposición 7. El pre-espacio de funciones de un espacio afín $\mathbf{Spec} A$ es de la forma

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{Spec} A)(B) = B \otimes_k A = B \otimes_k \mathbf{F}_k(\mathbf{Spec} A)$$

Es decir, $\mathbf{F}_k(\mathbf{Spec} A) \equiv - \otimes_k A$ como funtor.

Demostración. Denotemos $\mathbf{B} = k_B$. Para toda k -álgebra B , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k(\mathbf{Spec} A)(B) &= \mathbf{Hom}_{B\text{-pre-esp.}}((\mathbf{Spec} A)_B, \mathbf{B}) = \\ &= \mathbf{Hom}_{B\text{-pre-esp.}}(\mathbf{Spec}(B \otimes_k A), \mathbf{B}) \stackrel{*}{=} \mathbf{B}(B \otimes_k A) = B \otimes_k A \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema de Yoneda en la igualdad marcada.

¹usando la condición de constructibilidad

1.2.4. Espacios en grupos o módulos

Hemos considerado hasta ahora los pre-espacios como funtores de la categoría de k -álgebras en la de conjuntos, pero nada nos impide sustituir esta última para dotar a los espacios de alguna estructura adicional. Sea $\mathbb{E}$ una estructura algebraica sobre conjuntos y $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}$ la categoría formada por los conjuntos dotados de esta estructura y sus morfismos.

DEFINICIÓN. Se dice que un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ está dotado de la estructura algebraica $\mathbb{E}$ si es un funtor en la categoría $\mathcal{C}_{\mathbb{E}}$

$$k\text{-}\mathbf{Alg} \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathcal{C}_{\mathbb{E}}$$

Es decir, si para cada k -álgebra A el objeto $\mathcal{X}(A) \in \mathcal{C}_{\mathbb{E}}$ y para cada cambio de base $A \rightarrow \bar{A}$ la aplicación inducida pertenece a $\text{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathbb{E}}}(\mathcal{X}(A), \mathcal{X}(\bar{A}))$.

Hablaremos comúnmente de k -pre-espacios en grupos, módulos, álgebras o semigrupos con unidad. En cualquier categoría con propiedades suficientemente buenas como la existencia de productos (en particular la de pre-espacios), podemos definir estructuras internas en sus objetos. Por ejemplo, un grupo interno en la categoría de k -pre-espacios es un objeto $\mathcal{X}$ equipado con los morfismos

$$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{X} \quad * = \mathbf{Spec} k \xrightarrow{e} \mathcal{X} \quad \mathcal{X} \xrightarrow{i} X$$

de producto, neutro y paso al inverso. Estos verifican los axiomas usuales de asociatividad, elemento neutro y elemento inverso traducidos mediante diagramas, como el que se muestra a continuación (de asociatividad)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} & \xrightarrow{\cdot \times \text{Id}} & \mathcal{X} \times \mathcal{X} \\ \text{Id} \times \cdot \downarrow & & \downarrow \cdot \\ \mathcal{X} \times \mathcal{X} & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{X} \end{array}$$

De la misma forma podemos definir álgebras y módulos internos a los pre-espacios. Por las propiedades de esta categoría, es inmediato comprobar que las dos nociones que hemos mencionado de estructura algebraica en pre-espacios coinciden, pues estos morfismos generales dan lugar a morfismos en cada conjunto de puntos que los dotan de la mencionada estructura (y viceversa). Aquí empleamos que las estructuras algebraicas usuales son precisamente las correspondientes estructuras internas en la categoría de conjuntos.

Ejemplo. Un espacio en módulos se puede entender como un grupo interno dotado de un morfismo de pre-espacios adicional (siendo $\mathbf{k}$ el funtor olvidadizo)

$$\mathbf{k} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

$$A \times \mathcal{X}(A) \longrightarrow \mathcal{X}(A)$$

que verifica los axiomas usuales de módulo. Por tanto, induce para cada k -álgebra A una estructura de A -módulo en el grupo $\mathcal{X}(A)$ de forma compatible con los cambios de base.

1.3. Espacio topológico subyacente

En un principio, puede parecer que la definición de pre-espacio que hemos dado no nos permite hablar directamente de un conjunto de puntos asociado. Veremos a continuación cómo construir tal conjunto y dotarlo de una estructura de espacio topológico anillado.

DEFINICIÓN. Los **puntos geométricos** de un k -pre-espacio son sus puntos con valores en cuerpos (extensiones $k \hookrightarrow K$).

Podemos establecer en la familia de puntos geométricos de un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ la siguiente relación: diremos que dos puntos con valores en cuerpos K_1, K_2 son equivalentes si coinciden tras alguna extensión de escalares

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{f} & K \\ & \nearrow \tilde{f} & \\ K_2 & & \end{array}$$

DEFINICIÓN. Un punto ordinario de $\mathcal{X}$ es una clase de equivalencia bajo la relación

$$p_1 \in \mathcal{X}(K_1) \sim p_2 \in \mathcal{X}(K_2) \iff f_{\mathcal{X}}(p_1) = \tilde{f}_{\mathcal{X}}(p_2) \in \mathcal{X}(K) \quad \text{para ciertas extensiones } f, \tilde{f}$$

Esto efectivamente forma una relación de equivalencia: las propiedades reflexiva y simétrica son triviales, y para la transitiva, consideremos los puntos $p_1 \in \mathcal{X}(K_1), p_2 \in \mathcal{X}(K_2), p_3 \in \mathcal{X}(K_3)$ tales que $p_1 \sim p_2$ y $p_2 \sim p_3$. Si p_1 y p_2 coinciden en la extensión común K_{12} y p_2 y p_3 lo hacen en K_{23} , es fácil comprobar que una extensión común de K_1 y K_3 en la que

coinciden p_1 y p_3 es cualquier compuesto de K_{12} y K_{23} , es decir, cualquier cociente de $K_{12} \otimes_k K_{23}$ por un ideal maximal. Con ello, se demuestra que $p_1 \sim p_3$.

Proposición 8. Los puntos ordinarios de un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ forman un conjunto que se denomina **espacio subyacente** a $\mathcal{X}$.

$$\mathcal{X}_{\text{suby}} = \bigsqcup_{k \hookrightarrow K} \mathcal{X}(K) / \sim$$

Demostración. Usaremos fuertemente la condición de constructibilidad del pre-espacio $\mathcal{X}$. Tomemos el conjunto $\{A_i\}$ de álgebras base, y para cada una de ellas consideremos sus cuerpos residuales. Si denotamos por $\mathcal{K}$ al conjunto de todos estos cuerpos, se tiene que cada punto ordinario debe pertenecer al siguiente conjunto

$$\mathcal{R} = \bigsqcup_{K_i \in \mathcal{K}} \mathcal{X}(K_i) / \sim$$

Para ver esto, notemos que todo punto $p \in \mathcal{X}(K')$ con valores en cierto cuerpo K' debe provenir de un punto $p_{A_i} \in \mathcal{X}(A_i)$ mediante un cambio de base $A_i \xrightarrow{f} K'$, que factoriza a través de alguno de los cuerpos residuales de A_i :

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f} & K' \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{k}(\ker f) \in \mathcal{K} & \\ & \parallel & \\ & K_j & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(A_i) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{X}(K') \\ & \searrow & \nearrow \\ p_{A_i} & \mathcal{X}(K_j) & \\ & \searrow & \nearrow \\ & p_{K_j} & p \end{array}$$

Por tanto, $p \sim p_{K_j} \in \mathcal{X}(K_j)$, luego $[p] \in \mathcal{R}$ y concluimos que el espacio subyacente a $\mathcal{X}$ es un conjunto.

Hemos visto ya que el espectro funtorial recupera en cierto sentido el espectro clásico $\text{Spec } A = \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ primo}\}$. Por ello, tiene sentido que para toda k -álgebra A se cumpla la siguiente proposición.

Proposición 9. El espacio subyacente a $\mathbf{Spec } A$ coincide, como conjunto, con $\text{Spec } A$, mediante la correspondencia

$$\text{Spec } A \longleftarrow (\mathbf{Spec } A)_{\text{suby}}$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto [A \xrightarrow{p} \mathbb{k}(\mathfrak{p})]$$

donde $\mathbb{k}(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$.

Demostración. Construiremos la correspondencia inversa. Todo punto geométrico $A \xrightarrow{f} K$ factoriza de modo único a través del cuerpo residual del ideal primo $\ker f$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & K \\ & \searrow p \quad \swarrow & \\ & \mathbb{k}(\ker f) & \end{array}$$

por lo que $f \sim p$ y la antiimagen única de f es precisamente $\ker f \in \operatorname{Spec} A$.

Definiremos ahora en los subespacios de $\mathbf{Spec} A$ una noción de abierto y cerrado, de tal forma que al olvidar la estructura funtorial y quedarnos con su espacio subyacente coincidan con la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$.

Subespacios cerrados

Dada una k -álgebra B , denotemos por $\mathbf{X} := \mathbf{Spec} B$. Cada función $f \in B = F_k(\mathbf{X})$ tiene asociado un subespacio formado por los puntos sobre los que se anula. Lo denotaremos por $z(f)$ o $(f)_0$ y recibirá el nombre de “ceros de f ”. Rigurosamente, es el subespacio que a cada k -álgebra A asigna

$$z(f)(A) = \{p \in \mathbf{X}(A) / f(p) = 0\}$$

DEFINICIÓN. Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Spec} A$ un espacio afín. Un sub-pre-espacio $\mathbf{Z} \subset \mathbf{X}$ es cerrado si se puede expresar como la intersección de ceros de un conjunto de funciones

$$\mathbf{Z} \text{ es cerrado} \iff \exists \{f_i\}_{i \in I} \subset A / \mathbf{Z} = \bigcap_{i \in I} z(f_i)$$

Nota. Dado un ideal $I \subset A$, su cerrado asociado se denota por

$$(I)_0 = \bigcap_{a \in I} z(a) \subset \mathbf{Spec} A$$

Podemos, en sentido contrario, recuperar un ideal de A a partir de cualquier cerrado de su espectro, como veremos a continuación.

Proposición 10. Para todo subespacio cerrado $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Spec} A$, existe un ideal $I \subseteq A$ tal que $\mathbf{Z} = (I)_0 = \mathbf{Spec} A/I$. En particular, esto implica que los cerrados son k -pre-espacios afines y contamos con la correspondencia biunívoca

$$\begin{aligned} \{\text{Ideales de } A\} &= \{\text{Cerrados de } \mathbf{Spec} A\} \\ I &\longmapsto (I)_0 \end{aligned}$$

Demostración. Dado un conjunto de funciones $\{f_i\}$, el cerrado $\bigcap_{i \in I} z(f_i)$ que generan se puede expresar como $(I)_0$, donde $I = \sum_i f_i \cdot A \subset A$ es el ideal generado por estas funciones. Para ver que $(I)_0 = \mathbf{Spec} A/I$, usaremos el teorema de factorización: todo punto $A \xrightarrow{p} B$ se anula sobre los elementos de I si y solo si factoriza por A/I . Además, por ser I el núcleo del morfismo de restricción

$$A = F_k(\mathbf{Spec} A) \longrightarrow F_k((I)_0) = A/I$$

cada subespacio cerrado $(I)_0$ determina unívocamente un ideal I .

Subespacios abiertos

DEFINICIÓN. Sea A una k -álgebra y $A \xrightarrow{p} B$ un punto de $\mathbf{Spec} A(B)$. Decimos que un ideal $I \subseteq A$ es invertible en p si $p(I)$ genera B , es decir, si $p(I) \cdot B = B$.

Denotaremos por $\mathcal{U}_I \subset \mathbf{Spec} A$ al subespacio que asigna a cada k -álgebra B

$$\mathcal{U}_I(B) = \{p \in \mathbf{Spec} A(B) \mid p(I) \cdot B = B\} = \{A \xrightarrow{p} B \mid 1 \in \langle p(I) \rangle_B\}$$

DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{X}$ un k -pre-espacio y $Z \subseteq \mathcal{X}$ un sub-pre-espacio suyo. Se define su subespacio complementario $\mathcal{X} - Z$ como

$$(\mathcal{X} - Z)(B) = \{\mathbf{Spec} B \xrightarrow{f} \mathcal{X} \mid f^{-1}(Z) = \mathbf{Spec} B \times_{\mathcal{X}} Z = \emptyset\} \subseteq \mathcal{X}(B)$$

Veamos que $\mathcal{U}_I$ es el subespacio complementario del cerrado asociado a I . Esto motivará la definición de los abiertos de $\mathbf{Spec} A$, además de aclarar la de $\mathcal{U}_I$ como subespacio donde el ideal es invertible en lugar de donde no se anula.

Proposición 11. $\mathcal{U}_I = \text{Spec } A - (I)_0$.

Demostración. Sea un punto de $\text{Spec } A(B)$, equivalente a un morfismo $A \xrightarrow{p} B$ o a su inducido $\text{Spec } B \xrightarrow{p^*} \text{Spec } A$. Pertenecerá a $(\text{Spec } A - (I)_0)(B)$ si y solo si

$$(p^*)^{-1}((I)_0) = \text{Spec } B \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } A/I = \text{Spec } \left(B \otimes_A A/I \right) = \text{Spec } B / p(I) \cdot B = \emptyset$$

es decir, si y solo si $B / p(I) \cdot B = 0$, lo que equivale a que $p(I) \cdot B = B$ como se quería demostrar.

La siguiente proposición será fundamental para comprobar que los abiertos que vamos a definir coinciden, en espacio subyacente, con los de la topología de Zariski del espectro primo. Estos son precisamente $U_I = \text{Spec } A - (I)_0$, los complementarios (como conjuntos) a los ceros de ideales en el espectro ordinario.

Proposición 12. La condición necesaria y suficiente para que un punto $A \xrightarrow{p} B$ de $\text{Spec } A(B)$ pertenezca a $\mathcal{U}_I$ es que el morfismo $\text{Spec } B \xrightarrow{p^*} \text{Spec } A$ inducido entre los espectros ordinarios valore en $U_I \subseteq \text{Spec } A$. En particular, tenemos que:

1. $\mathcal{U}_I = \mathcal{U}_{I'} \Leftrightarrow U_I = U_{I'}$ para cualesquiera $I, I' \subseteq A$.
2. $(\mathcal{U}_I)_{\text{suby}} = U_I$

Demostración. Si $p(I) \cdot B = B$, ningún punto de $\mathfrak{p} \in (I)_0$ puede tener tiene fibra por p^* , ya que si $p^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$ el siguiente diagrama sería conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/\mathfrak{p} & \xrightarrow{\bar{p}} & B/\bar{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Siguiéndolo, vemos que el ideal I se transforma en 0 en $B/\bar{\mathfrak{p}}$ y, al mismo tiempo, se transforma en un ideal que genera el total, llegando a contradicción. Recíprocamente, si $p(I) \cdot B \subsetneq B$, debe existir un primo $\bar{\mathfrak{p}}$ en B con $p(I) \cdot B \subset \bar{\mathfrak{p}}$. En tal caso, se comprueba que $p^*(\bar{\mathfrak{p}}) \in (I)_0$, por lo que p^* no valora en U_I .

Usando esto, el punto 1 se deduce de que la subfamilia de puntos de $\mathcal{U}_I$ solo depende de $(I)_0$, y por tanto de U_I . Para probar el punto 2, tengamos en cuenta que si $B = k(\mathfrak{p})$ es un cuerpo residual, entonces $p(I) \cdot B = B$ si y solo si $p(I) \neq 0$, es decir, $I \not\subseteq \ker p = \mathfrak{p}$ o,

lo que es lo mismo, $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A - (I)_0$.

DEFINICIÓN. Se dice que un subespacio $\mathcal{U}$ de $\mathbf{Spec } A$ es abierto si se puede expresar como $\mathcal{U} = \mathcal{U}_I = \mathbf{Spec } A - (I)_0$ para algún ideal $I \subseteq A$.

A partir de esto, podemos definir también la unión arbitraria de abiertos por la fórmula:

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{I_i} = \mathbf{Spec } A - \bigcap_{i \in I} (I_i)_0 = \mathbf{Spec } A - \left(\sum_{i \in I} I_i \right)_0 = \mathcal{U}_{\sum_i I_i}$$

Es una mera comprobación que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{I_i}$ está bien definida, es decir, que si $\mathcal{U}_{I_i} = \mathcal{U}_{\tilde{I}_i}$ para todo $i \in I$, entonces $\mathcal{U}_{\sum_i I_i} = \mathcal{U}_{\sum_i \tilde{I}_i}$.

Corolario 13. Existe una correspondencia biunívoca entre subespacios abiertos del espectro funtorial $\mathbf{Spec } A$ y abiertos de Zariski del espectro ordinario $\text{Spec } A$.

Notemos que esta importante propiedad solo se verifica para los abiertos, pues en el caso de los cerrados se cumple

$$(I)_0 = (I')_0 \iff \text{rad } I = \text{rad } I'$$

por lo que la asignación $I \mapsto (I)_0$ no es inyectiva (distintos ideales con el mismo radical pueden dar lugar a cerrados iguales). En este caso, $(I)_0$ se refiere al cerrado de $\text{Spec } A$, pues ya hemos visto que los cerrados de $\mathbf{Spec } A$ están en correspondencia biunívoca con los ideales de A .

Esto significa en particular que los abiertos básicos U_a de $\text{Spec } A$ dan lugar a una familia generadora de la “topología” que hemos definido en $\mathbf{Spec } A$.

1.3.1. Topología en el espacio subyacente

Emplearemos ahora la noción de abierto que hemos definido en espectros para trasladar este concepto a subespacios de un k -pre-espacio cualquiera $\mathcal{X}$.

DEFINICIÓN. Un sub-pre-espacio $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ es abierto (respectivamente, cerrado) si, para toda k -álgebra B y punto $\mathbf{Spec } B \xrightarrow{p} \mathcal{X}$, el subespacio $p^{-1}(\mathcal{U})$ es representable por un

abierto (cerrado) de $\mathbf{Spec} B$.

Esto se traduce en que la familia de abiertos de $\mathcal{X}$ es la “topología” final por todos los puntos de $\mathcal{X}$, es decir, elementos de $\mathcal{X}(B) = \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{Spec} B, \mathcal{X})$. Esto significa que es la topología más fina en la que cada punto $\mathbf{Spec} B \rightarrow \mathcal{X}$ es una aplicación continua con las respectivas topologías para toda k -álgebra B .

Utilizando esta definición podemos extender el resto que se aplican usualmente a espacios topológicos:

- La intersección (finita) de abiertos corresponde con la de subespacios: sus puntos son la intersección de los puntos de cada uno de ellos. Corresponde al menor abierto contenido en todos ellos.
- La unión de un conjunto $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ de abiertos es el subespacio $\bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$ definido por

$$\left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j \right) (A) = \left\{ \mathbf{Spec} A \xrightarrow{p} \mathcal{X} / \bigcup_{j \in J} p^{-1}(\mathcal{U}_j) = \mathbf{Spec} A \right\}$$

Se verifica que es un abierto, y de hecho es el menor abierto que contiene a todos los $\mathcal{U}_j$.

- Los recubrimientos por abiertos de un k -pre-espacio se definen mediante la unión de manera análoga a en espacios topológicos.

La condición de constructibilidad o, alternatively, la siguiente proposición, permiten demostrar que la familia de abiertos de un k -pre-espacio es un conjunto.

Proposición 14. Para toda pareja de abiertos $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ de un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, se tiene

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \iff (\mathcal{U})_{\text{suby}} = (\mathcal{U}')_{\text{suby}}$$

En particular, podemos identificar cada abierto de $\mathcal{X}$ con un subconjunto de $\mathcal{X}_{\text{suby}}$.

Demostración. Solo es necesario demostrar el sentido $(\Leftarrow)$. Supongamos que $(\mathcal{U})_{\text{suby}} = (\mathcal{U}')_{\text{suby}}$, y veamos que sus puntos coinciden. Sea $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{p} \mathcal{U}$ un punto, y comprobemos que $p^{-1}(\mathcal{U}') = \mathbf{Spec} A$. Si $p^{-1}(\mathcal{U}') = \mathbf{Spec} A - (I')_0$, con $I' \subset A$ un ideal, y asumimos que $(I')_0 \neq \emptyset$, debe existir un punto con valores en un cuerpo $\mathbf{Spec} K \xrightarrow{x} (I')_0 \subset \mathbf{Spec} A$. Pero $p(x)$ es un punto de $\mathcal{U}$ con valores en K , y usando que $(\mathcal{U})_{\text{suby}} = (\mathcal{U}')_{\text{suby}}$ obtenemos

que, para alguna extensión $K \xrightarrow{f} \overline{K}$, el punto $f_*^{\mathcal{X}}(p(x)) = p(f_*(x))$ pertenece a $\mathcal{U}'$, por lo que $f_*(x) \in p^{-1}(\mathcal{U}') = \mathbf{Spec} A - (I')_0$. Como $f_*(x)$ debe ser un punto de $(I')_0$, llegamos a contradicción y concluimos que $(I')_0 = \emptyset$.

Observación. Mediante las operaciones de intersección y unión, es fácil ver que los abiertos de un k -pre-espacio (que ahora sabemos que forman un conjunto) tienen estructura de retículo con uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Este retículo satisface además la siguiente propiedad distributiva:

$$\mathcal{U} \cap \left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j \right) = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_j) \quad \forall \mathcal{U}, \{\mathcal{U}_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{X} \text{ abiertos}$$

Cuando un conjunto verifica estas propiedades se dice que es un marco (*frame*), concepto análogo a los espacios topológicos en ausencia de puntos. La relevancia de esto es que nos permitirá más adelante definir haces sobre pre-espacios aunque estos no sean espacios topológicos propiamente dichos.

DEFINICIÓN. Dado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, su espacio topológico subyacente es la pareja $(\mathcal{X}_{\text{suby}}, \mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es la topología formada por los subconjuntos $(\mathcal{U})_{\text{suby}}$ con $\mathcal{U}$ abierto de $\mathcal{X}$.

Se define el prehaz de funciones $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{suby}}}$ en el espacio subyacente por

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{suby}}}(U) = \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathcal{U}, \mathbf{k}) = F_k(\mathcal{U})$$

para todo abierto $U = (\mathcal{U})_{\text{suby}} \subseteq \mathcal{X}_{\text{suby}}$.

DEFINICIÓN. Un pre-espacio anillado sobre k es una pareja $(Z, \mathcal{O}_Z)$, donde Z es un espacio topológico y $\mathcal{O}_Z$ un prehaz de k -álgebras en Z dotado de morfismos $U \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_Z(U)$ para cada abierto $U \subseteq Z$.

DEFINICIÓN. El k -pre-espacio anillado asociado al k -pre-espacio $\mathcal{X}$ es $(\mathcal{X}_{\text{suby}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{suby}}})$.

Todas estas definiciones proporcionan de manera casi inmediata la siguiente correspondencia funtorial:

$$\mathcal{C}_{k\text{-pre-esp.}} \longrightarrow \mathcal{C}_{k\text{-pre-esp. anill.}}$$

$$\mathcal{X} \longmapsto (\mathcal{X}_{\text{suby}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{suby}}})$$

Cuya correspondencia inversa consiste en asignar a cada espacio anillado $(Z, \mathcal{O}_Z)$ el

k -pre-espacio definido por

$$(Z, \mathcal{O}_Z)(A) = \text{Hom}_{k\text{-pre-esp.an.}}((\text{Spec } A, \mathcal{O}_A), (Z, \mathcal{O}_Z))$$

1.4. Espacios. Equivalencia con los esquemas

DEFINICIÓN. Se dice que un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ es un k -espacio para la topología de Zariski si, para toda k -álgebra A y recubrimiento afín finito $\{\text{Spec } A_i\}_{i=1}^n$ de $\text{Spec } A$, el siguiente diagrama es un ecualizador:

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}(A) \longrightarrow \prod_i \mathcal{X}(A_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{X}\left(A_i \otimes_A A_j\right)$$

donde el $0 \rightarrow$ indica la necesaria inyectividad de la primera aplicación, consecuencia general de la condición de ecualizador.

Intuitivamente, la condición de espacio significa que si dos puntos tienen localmente las mismas coordenadas, deben ser iguales. Además, si tenemos un conjunto de puntos dados localmente que coinciden en las intersecciones de sus dominios (son iguales al cambiarlos de base al anillo de funciones correspondiente), entonces existe un punto global que localmente tiene como coordenadas a cada uno de ellos.

Observación. Esta definición se puede interpretar fácilmente dentro del contexto general. Recordemos que todo recubrimiento afín de $\text{Spec } A$ es equivalente a uno de $\text{Spec } A$, la versión clásica del espectro. La categoría de k -espacios afines $k\text{-}\mathbf{Alg}^{op}$ es dotada de una estructura de *situs* al definir los recubrimientos de Zariski de cada objeto $\text{Spec } A$ como familias finitas de morfismos

$$\{\text{Spec } A_i \hookrightarrow \text{Spec } A\}_{i=1}^n \equiv \{A \xrightarrow{\phi_i} A_i\}_{i=1}^n$$

donde cada ϕ_i es la localización de A en un elemento a_i y $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec } A_i$.

Dado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, lo podemos pensar equivalentemente como un funtor contravariante $k\text{-}\mathbf{Alg}^{op} \rightarrow \mathbf{Conj}$, es decir, un prehaz sobre los k -espacios afines. Se dice entonces que es un haz respecto a esta estructura de *situs* si cumple la siguiente condición de

descenso para todos los recubrimientos de Zariski $\{\mathrm{Spec} A_i = \mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{U} = \mathrm{Spec} A\}_{i=1}^n$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{U}) \longrightarrow \prod_i \mathcal{X}(\mathcal{U}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{X}\left(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_j\right)$$

Es inmediato que esto coincide con la definición de espacio que hemos dado, pues

$$\mathrm{Spec}\left(A_i \otimes_A A_j\right) = \mathrm{Spec} A_i \times_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec} A_j = \mathrm{Spec} A_i \cap \mathrm{Spec} A_j$$

Lema 15. La definición de espacio se mantiene equivalente si sustituimos el diagrama ecualizador de la condición de descenso por

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}(A) \longrightarrow \mathcal{X}(B) \rightrightarrows \mathcal{X}(B \otimes_A B) \quad \text{con } B = \prod_{i=1}^n A_i$$

Demostración. Basta tener en cuenta que el funtor $\mathcal{X}$ conmuta con los productos y $B \otimes_A B = \prod_{i,j} A_i \otimes_A A_j$.

Esto motiva la siguiente definición análoga:

DEFINICIÓN. Un k -pre-espacio $\mathcal{X}$ es un k -espacio para la topología fielmente plana si el diagrama anterior es un ecualizador para cada morfismo de k -álgebras fielmente plano $A \rightarrow B$.

Observación. Los morfismos $\mathcal{X}(B) \rightrightarrows \mathcal{X}(B \otimes_A B)$ son los inducidos por los dos morfismos canónicos al producto tensorial

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \otimes_A B \\ b & \longmapsto & 1 \otimes b \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \otimes_A B \\ b & \longmapsto & b \otimes 1 \end{array}$$

Todo espacio para la topología fielmente plana lo es para la de Zariski. Para ver esto, basta notar que los cambios de base $A \rightarrow \prod_{i=1}^n A_i$ son planos por ser producto finito de localizaciones, y lo son fielmente por ser epiyectivos en espectros (recordando que $\{\mathrm{Spec} A_i\}$ es recubrimiento de Zariski).

Dado un k -espacio $\mathbf{Y}$, el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(-, \mathbf{Y})$ sobre el marco de abiertos

de un k -pre-espacio $\mathbf{X}$ es un prehaz en conjuntos de acuerdo a la definición que ya hemos dado. Cumple la siguiente propiedad:

Teorema 16. Para todo k -espacio $\mathbf{Y}$, el prehaz $\text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(-, \mathbf{Y})$ sobre los abiertos de un k -pre-espacio $\mathbf{X}$ es un haz, es decir, el siguiente diagrama es un ecualizador para cada abierto $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$ y recubrimiento $\{\mathbf{U}_i\}_{i \in I}$ de $\mathbf{U}$:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{U}_i, \mathbf{Y}) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \text{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j, \mathbf{Y})$$

Demostración. Podemos suponer que $\mathbf{U} = \mathbf{X}$ es el total. Si $\{\mathbf{U}_i \xrightarrow{f_i} \mathbf{Y}\}$ es un conjunto de morfismos que coinciden en las intersecciones $f_i|_{\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j}$, debemos probar que existe un único morfismo $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$ con $f|_{\mathbf{U}_i} = f_i$. Dado un punto $\text{Spec } A \xrightarrow{p} \mathbf{X}$, tomemos un recubrimiento afín finito $\{\mathbf{V}_j\}$ de $\text{Spec } A$ que verifique $p(\mathbf{V}_j) = \mathbf{U}_{i_j}$ para todo j y algún i_j . Si $p_j := p|_{\mathbf{V}_j}$, construyamos los puntos $q_j = f_{i_j}(p_j)$, con $\mathbf{V}_j \xrightarrow{q_j} \mathbf{Y}$. Como $f_{i_j}|_{\mathbf{U}_{i_j} \cap \mathbf{U}_{i_{j'}}} = f_{i_{j'}}|_{\mathbf{U}_{i_j} \cap \mathbf{U}_{i_{j'}}$, debe cumplirse $q_j|_{\mathbf{V}_j} = q_{j'}|_{\mathbf{V}_j}$, y empleando la condición de espacio de $\mathbf{X}$ de aquí se deduce que existe un único punto $\text{Spec } A \xrightarrow{q} \mathbf{Y}$ que restringe en los q_i . Definiendo $f(p) = q$, hemos terminado.

Lema 17. Para todo A -módulo M y morfismo fielmente plano $A \xrightarrow{f} B$, el diagrama

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \otimes_k B \rightrightarrows M \otimes_k (B \otimes_A B)$$

es un ecualizador y la sucesión es localmente escindida, es decir, el primer morfismo admite sección después de un cambio de base.

Ejemplos.

- Para toda k -álgebra A , su espectro $\text{Spec } A$ es un k -espacio (afín).
- Para todo k -módulo M , el k -pre-espacio definido por $\mathbf{M}(B) = M \otimes_k B$ es espacio (en módulos).

La demostración de ambos casos es prácticamente inmediata aplicando el lema anterior, pero igualmente probaremos que $\text{Spec } A$ es un espacio en la siguiente sección.

Como conclusión de esta sección, en el siguiente teorema demostraremos que todo k -pre-espacio tiene un k -espacio asociado. Este representa su funtor covariante de morfismos en

la categoría de los k -espacios.

Teorema 18. Dado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, existe un k -espacio $\overline{\mathcal{X}}$ y un morfismo $\mathcal{X} \xrightarrow{\phi} \overline{\mathcal{X}}$ (únicos salvo isomorfismos) que verifican, como propiedad universal, que la aplicación inducida en los conjuntos de morfismos

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-esp.}}(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Hom}_{k\text{-pre-esp}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

es biyectiva para todo k -espacio $\mathcal{Y}$.

Demostración. Construiremos $\overline{\mathcal{X}}$ explícitamente. Dada una k -álgebra A , consideremos el conjunto de familias de puntos de $\mathcal{X}$ en recubrimientos $A \rightarrow B = \prod_i A_i$ que coinciden en las intersecciones. En él, definimos la relación de equivalencia que identifica dos familias de puntos en sus recubrimientos respectivos si existe un refinamiento común en el que coincidan. Se construye entonces $\overline{\mathcal{X}}(A)$ como el cociente de dicho conjunto por la relación de equivalencia definida, y se tiene que $\overline{\mathcal{X}}(A) = \varinjlim K(B)$, donde el límite varía en los recubrimientos² $A \rightarrow B$ de $\mathbf{Spec} A$ y $K(B)$ es el conjunto que hace exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow K(B) \longrightarrow \mathcal{X}(B) \rightrightarrows \mathcal{X}(B \otimes B)$$

Se comprueba que $\overline{\mathcal{X}}$ es espacio y cumple la propiedad universal del enunciado.

1.4.1. Esquemas y espacios

Sea X un k -esquema, es decir, un espacio topológico anillado localmente afín.

DEFINICIÓN. El k -pre-espacio asociado a X (o funtor de puntos de X) es aquel que asigna a cada k -álgebra A el conjunto

$$\mathbf{X}(A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-esq}}(\mathrm{Spec} A, X)$$

Es fácil ver que $\mathbf{X}$ es un funtor covariante desde la categoría de las k -álgebras. Resulta sin embargo más interesante entenderlo como un funtor contravariante desde la categoría de los k -esquemas afines, opuesta a la anterior (es decir, un pre haz en conjuntos). En realidad, nada nos impide extender esta definición a los puntos de $\mathbf{X}$ valorados en un k -esquema Y

²La condición de consistencia sobre los recubrimientos garantiza que es un conjunto

no necesariamente afín, mediante la fórmula natural

$$\mathbf{X}(Y) = \text{Hom}_{k\text{-esq}}(Y, X)$$

Esto resulta ser el funtor contravariante de puntos del objeto X en la categoría de k -esquemas, de la que es subcategoría (plena) la de k -esquemas afines.

$$k\text{-}\hat{\mathbf{Alg}}^{op} = k\text{-}\mathbf{Esq}_{Af} \xhookrightarrow{u} k\text{-}\mathbf{Esq}$$

Veamos que podemos interpretar todos los k -espacios como funtores contravariantes desde esta categoría general de k -esquemas. En ella contamos también con una estructura de *situs* de Zariski, definiendo los recubrimientos abiertos como familias $\{\text{Spec } A_i \hookrightarrow X\}_{i=1}^n$. Se verifica que el *situs* que induce este en $k\text{-}\mathbf{Esq}_{Af}$ a través de u (el más fino que hace que la composición con u transforme haces sobre $k\text{-}\mathbf{Esq}$ en haces sobre $k\text{-}\mathbf{Esq}_{Af}$) es precisamente el de Zariski, por lo que podemos aplicar el siguiente lema general.

Lema de comparación. Sea $\mathcal{S} \xhookrightarrow{u} \mathcal{C}$ una inclusión plena de categorías, con $\mathcal{S}$ una categoría pequeña³. Sea τ un *situs* en $\mathcal{C}$ y τ' el *situs* en $\mathcal{S}$ inducido en u .

Si todo objeto X de $\mathcal{C}$ admite un recubrimiento de τ por objetos de $\mathcal{S}$ de la forma

$$\{u(S_i) \rightarrow X\}_{i \in I} \in \tau \quad / \quad S_i \in \mathcal{S} \quad \forall i$$

entonces los haces sobre $(\mathcal{C}, \tau)$ son equivalentes a los haces sobre $(\mathcal{S}, \tau')$ mediante

$$\mathbb{F}^{\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Conj}} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Conj}}$$

$$F \longmapsto F \circ u = F|_{u(\mathcal{S})}$$

Demostración. Se puede encontrar en la referencia [4] (*Fonctorialité de catégories de faisceaux*).

La definición de k -esquema como espacio anillado que admite un recubrimiento por k -esquemas afines garantiza inmediatamente la aplicabilidad de este lema a nuestra situación. Por ello, entenderemos equivalentemente los k -espacios como haces sobre $k\text{-}\hat{\mathbf{Alg}}^{op}$ o sobre $k\text{-}\mathbf{Esq}$, ambas categorías con sus *situs* de Zariski. Es claro que dado un espacio (entendido como funtor sobre k -álgebras) podemos definir sus puntos sobre cualquier esquema empleando un recubrimiento afín del mismo y la condición de haz.

³Se dice que una categoría es pequeña si sus objetos se pueden indexar por un conjunto

Empleando esto, se puede probar sin dificultad que el k -pre-espacio asociado a un k -esquema es un k -espacio. Tenemos además las siguientes propiedades al respecto, cuya demostración es inmediata empleando el lema de Yoneda y el de comparación.

Proposición 19. Si X, Y son esquemas y $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ sus espacios asociados, se cumple:

1. $X = \operatorname{Spec} B \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Spec} B$
2. $\operatorname{Hom}_{k\text{-esq}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{k\text{-esp}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

El siguiente teorema nos proporciona una relación aún más estrecha entre un esquema y el espacio que representa.

Teorema 20. Dados los k -esquemas X, Y y sus k -espacios asociados $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, se verifican:

1. $\mathbf{X}_{\text{suby}} = X$ como espacios topológicos.
2. El espacio anillado asociado a $\mathbf{X}$ es $(X, \mathcal{O}_X)$.

Demostración. Veamos primero que $\mathbf{X}_{\text{suby}} = X$ como conjuntos. Los puntos de $\mathbf{X}_{\text{suby}}$ son los puntos $\mathbf{X}(K) = \operatorname{Hom}_{k\text{-esq}}(\operatorname{Spec} K, X)$ módulo la relación de equivalencia de factorización. Cualquiera de esos morfismos $\operatorname{Spec} K \xrightarrow{\phi} X$, bajo esta equivalencia, está determinado por el punto imagen $\phi(\operatorname{Spec} K) = p \in X$, pues ϕ factoriza por el cuerpo residual de p . Por tanto, $\mathbf{X}_{\text{suby}} = X$. Resta comprobar que coinciden también como espacios topológicos, y para ello debemos probar que si $U \hookrightarrow X$ es abierto lo es también su fibra por cualquier morfismo $\operatorname{Spec} A \rightarrow X$, que coincide con su fibra por el morfismo inducido en espacios $\mathbf{Spec} A \rightarrow \mathbf{X}$. De aquí se deduce que si U es abierto lo es también $\mathbf{U}$, por lo que $\mathbf{U}_{\text{suby}} = U$. En sentido contrario, si $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathbf{X}$ es un subespacio abierto y $\{V_i\}$ es un recubrimiento afín de X , $\mathbf{V}_i \hookrightarrow \mathbf{X}$ será abierto por lo ya discurrido. Por ello, lo es también $\mathcal{U}_i = \mathcal{U} \cap \mathbf{V}_i \subset \mathbf{V}_i$, y $\{\mathcal{U}_i\}$ es recubrimiento de $\mathcal{U}$. Por el corolario 13, sabemos que $(\mathcal{U}_i)_{\text{suby}} = U_i$ es abierto de V_i y $\mathbf{U}_i = \mathcal{U}_i$. Definiendo $U = \bigcup U_i$, se tiene que $\mathbf{U} = \bigcup \mathbf{U}_i = \bigcup \mathcal{U}_i = \mathcal{U}$, con lo que $\mathcal{U}$ es el subespacio asociado al subesquema abierto $U \subset X$.

Por último, se prueba inmediatamente que el anillado $\mathcal{O}_X$ coincide con $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_{\text{suby}}}$ usando que

$$\mathcal{O}_X(U) = \operatorname{Hom}_{k\text{-esq}}(U, \mathbb{A}_k^1) = \operatorname{Hom}_{k\text{-pre. esp}}(\mathbf{U}, \mathbf{k}) = \mathcal{O}_{\mathbf{X}_{\text{suby}}}(U)$$

donde $\mathbb{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[x]$.

DEFINICIÓN. Decimos que el k -pre-espacio $\mathcal{X}$ es representable por k -esquemas si es el k -espacio asociado a algún esquema X , es decir, si es representable al considerarlo como funtor $k\text{-}\mathbf{Esq} \rightarrow \mathbf{Conj}$.

Observación. Gracias a esto, podemos entender los k -espacios afines como aquellos representables por k -esquemas afines, es decir, los que son representables como funtores $(k\text{-}\mathbf{Alg})^{op} \rightarrow \mathbf{Conj}$, pues $\mathcal{X}$ es afín si y solo si para toda k -álgebra B

$$\mathcal{X}(A) = (\mathbf{Spec} B)(A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{alg}}(B, A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{esq. afines}}(\mathrm{Spec} A, \mathrm{Spec} B)$$

En particular, con esto hemos demostrado que todo k -espacio afín es, en efecto, un espacio.

Corolario 21 (Teorema fundamental). Cada k -pre-espacio representable por k -esquemas es el asociado a un único esquema (salvo isomorfismos).

Todo lo anterior implica que $k\text{-}\mathbf{Esq}$ es una subcategoría plena de $k\text{-}\mathbf{Esp}$, la categoría de k -espacios. Informalmente, todo esquema tradicional verifica nuestra definición de espacio, por lo que esta visión es válida para generalizar la Geometría Algebraica existente.

La importancia de esto radica en la comprobación de que todo k -esquema está completamente determinado por sus puntos con coordenadas en cada k -álgebra (por ser subcategoría). Además, los morfismos de k -esquemas también son equivalentes a las aplicaciones entre los puntos de los esquemas con coordenadas en cada k -álgebra (esto significa que sea plena).

DEFINICIÓN. Decimos que un k -pre-espacio es localmente un esquema si admite un recubrimiento por (subfuntores representables por) k -esquemas, y que es localmente afín si admite un recubrimiento por abiertos afines.

Corolario 22. Si $\mathcal{X}$ es un k -pre-espacio, son equivalentes:

1. $\mathcal{X}$ es representable por un k -esquema.
2. $\mathcal{X}$ es un k -espacio localmente afín.
3. $\mathcal{X}$ es un k -espacio y localmente es un esquema.

Por esto, en adelante entenderemos un esquema como un espacio localmente afín, siguiendo el segundo apartado, es decir:

“Un k -esquema es un k -pre-espacio que es haz respecto al situs de Zariski en la categoría de esquemas afines y admite un recubrimiento por subfuntores abiertos representables”

Observación. Como la condición de representabilidad por un esquema es local, obtenemos sin dificultad que si $\mathbf{X}$ es un espacio representable por un k -esquema y $\mathbf{Z} \subset \mathbf{X}$ es un subespacio cerrado, también es representable por un esquema. Además, este esquema será un cerrado del representante de $\mathbf{X}$.

1.5. Espacios fibrados

Sea $\mathcal{X}$ un k -pre-espacio.

DEFINICIÓN. Se llama $\mathcal{X}$ -pre-espacio o **fibrado** sobre $\mathcal{X}$ a un k -pre-espacio $\mathcal{Y}$ junto con un morfismo de pre-espacios $\mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{X}$.

Esto significa que la categoría de fibrados sobre $\mathcal{X}$ es la categoría relativa (*slice category*) sobre este espacio. Por ello:

DEFINICIÓN. Un morfismo de $\mathcal{X}$ -pre-espacios es un morfismo de pre-espacios que conmuta con los morfismos de estructura respectivos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{\mathcal{Y}} \\ & \searrow f & \swarrow \bar{f} \\ & \mathcal{X} & \end{array}$$

Se denota a los morfismos de fibrados sobre $\mathcal{X}$ por $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \overline{\mathcal{Y}})$.

El producto de esta categoría es el producto fibrado sobre $\mathcal{X}$ heredado de k -**pre-esp.** Dados dos $\mathcal{X}$ -pre-espacios $\mathcal{Y}, \overline{\mathcal{Y}}$, denotamos a su producto por $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{Y}}$. Por la propiedad universal del producto fibrado, es un $\mathcal{X}$ -pre-espacio pero cuenta también con morfismos a $\mathcal{Y}$ y $\overline{\mathcal{Y}}$. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN. Dado un $\mathcal{X}$ -pre-espacio $\mathcal{Y}$ y un morfismo de k -pre-espacios $\overline{\mathcal{X}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{X}$, se llama *pullback* de $\mathcal{Y}$ por ϕ al producto $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{X}}$ entendido como un fibrado sobre $\overline{\mathcal{X}}$:

$$\phi^* \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{X}}$$

Recordemos que todo punto de $\mathcal{X}(A)$ se interpreta como un morfismo $\mathbf{Spec} A \rightarrow \mathcal{X}$.

Proposición 23. La categoría de pre-espacios fibrados sobre $\mathbf{Spec} A$ es equivalente a la de A -pre-espacios, con la correspondencia

$$\begin{aligned} \mathbf{Spec} A\text{-pre-esp} &\longrightarrow A\text{-pre-esp} \\ \{\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Spec} A\} &\longmapsto \mathcal{X}_A \end{aligned}$$

Demostración. La correspondencia inversa asigna a cada A -espacio $\mathcal{X}_A$ el espacio fibrado $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Spec} A$ de puntos $\mathcal{X}(B) = \{(p_B, q_B) \mid A \xrightarrow{p_B} B \text{ y } q_B \in \mathcal{X}_A(B)\}$, con el morfismo de estructura dado por $f(p_B, q_B) = p_B$.

DEFINICIÓN. El espacio fibra de $\mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{X}$ en el punto $p_A \in \mathcal{X}(A)$ es el pullback

$$\mathcal{Y}_{p_A} = p_A^* \mathcal{Y} = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathbf{Spec} A \rightarrow \mathbf{Spec} A$$

que tiene estructura de A -pre-espacio por el teorema previo. Para cada k -álgebra B , su valor es el conjunto formado por las parejas

$$\mathcal{Y}_{p_A}(B) = \{(q_B \in \mathcal{Y}(B), A \xrightarrow{h} B) \mid f_B(q_B) = h_*^{\mathcal{X}}(p_A)\}$$

Observación. Se cumple que $(\phi^* \mathcal{Y})_{p_A} = \mathcal{Y}_{\phi_A(p_A)}$ para todo morfismo $\overline{\mathcal{X}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{X}$.

DEFINICIÓN. Dado un fibrado $\mathcal{Y}$ sobre $\mathcal{X}$, la fibra racional de un punto $p_A \in \mathcal{X}(A)$ es el conjunto de puntos racionales del espacio fibra $\mathcal{Y}_{p_A}$.

$$F_{p_A}^{\mathcal{Y}/\mathcal{X}} = f_A^{-1}(p_A) = \mathcal{Y}_{p_A}(A) \subset \mathcal{Y}(A)$$

Equivalentemente se puede entender como la fibra de p_A por la aplicación de conjuntos inducida

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(A) & \xrightarrow{f_A} & \mathcal{X}(A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ f_A^{-1}(p_A) & \longmapsto & \{p_A\} \end{array}$$

Si $A \xrightarrow{h} B$ es un cambio de base y denotamos $h_*^{\mathcal{X}}(p_A) := p_B \in \mathcal{X}(B)$, la aplicación entre conjuntos $\mathcal{Y}(A) \xrightarrow{h_*^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}(B)$ induce otra entre las fibras racionales:

$$f_A^{-1}(p_A) \xrightarrow{h_{p_A}^{\mathcal{Y}}} f_B^{-1}(p_B)$$

Fijado un k -pre-espacio $\mathcal{X}$, consideremos la categoría punteada formada por las k -álgebras A distinguidas mediante un punto de $\mathcal{X}(A)$.

$$k\text{-}\mathbf{Alg}_{\mathcal{X}} = \{(A, p_A) \mid p_A \in \mathcal{X}(A)\}$$

cuyos morfismos son los de álgebras que respetan los puntos base.

Teorema 24. Todo fibrado $\mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{X}$ se puede reconstruir a partir del funtor

$$k\text{-}\mathbf{Alg}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\omega} \mathbf{Conj}$$

$$(A, p_A) \longmapsto f_A^{-1}(p_A)$$

que envía cada punto de $\mathcal{X}$ valorado en una k -álgebra a la fibra del punto en $\mathcal{Y}$ y cada morfismo de álgebras compatible a la correspondiente aplicación entre fibras.

Demostración. Explícitamente, los puntos del k -pre-espacio $\mathcal{Y}$ serán las parejas (p_A, y_A) con $p_A \in \mathcal{X}(A)$ e $y_A \in f_A^{-1}(p_A)$. El morfismo de estructura $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es el que proyecta cada pareja en su primera componente. Es inmediato que $\mathcal{Y}$ es un funtor por serlo ω .

Este teorema permite la construcción geométrica de gran número de fibrados mediante el “pegado” de sus fibras. Llamaremos a ω funtor de fibras de $\mathcal{Y}$.

DEFINICIÓN. Se dice que un $\mathcal{X}$ -pre-espacio $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{X}$ es un fibrado en espacios vectoriales si su funtor asociado ω valora en los módulos sobre k -álgebras de tal forma que:

- Para todo $p_A \in \mathcal{X}(A)$, $f_A^{-1}(p_A)$ es A -módulo.
- Todo cambio de base $A \xrightarrow{h} B$ induce un morfismo de A -módulos

$$f_A^{-1}(p_A) \rightarrow f_B^{-1}(p_B) \quad \text{con } p_B = h_*^{\mathcal{X}}(p_A)$$

Notemos que a partir de él podemos construir el morfismo de B -módulos

$$f_A^{-1}(p_A) \otimes_k B \rightarrow f_B^{-1}(p_B)$$

Rigurosamente, esta definición se traduce que ω es un prehaz de $\mathcal{O}$ -módulos en el *situs* de

Zariski punteado $k\text{-}\mathbf{\hat{A}lg}_{\mathcal{X}}^{op}$, siendo $\mathcal{O}$ el prehaz de álgebras de estructura del mismo:

$$k\text{-}\mathbf{\hat{A}lg} \xleftarrow{\mathcal{O}} k\text{-}\mathbf{\hat{A}lg}_{\mathcal{X}}^{op} \xrightarrow{\omega} \mathcal{O}\text{-Mod}$$

$$A \longleftarrow (\mathbf{Spec} A, p_A \in \mathcal{X}(A)) \longmapsto f_A^{-1}(p_A) \in A\text{-Mod}$$

Esto recupera la definición de pre-espacios en k -espacios vectoriales tomando $\mathcal{X} = \mathbf{Spec} k$. Además, si $\mathcal{X} = \mathbf{Spec} A$ los fibrados sobre $\mathcal{X}$ en espacios vectoriales son precisamente los A -pre-espacios en espacios vectoriales.

Sean $\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}}$ dos fibrados en espacios vectoriales sobre $\mathcal{X}$.

DEFINICIÓN. Un morfismo de $\mathcal{X}$ -pre-espacios $\mathcal{E} \rightarrow \bar{\mathcal{E}}$ es morfismo de fibrados vectoriales si las aplicaciones $f_A^{-1}(p_A) \rightarrow f_B^{-1}(p_B)$ inducidas en la fibras racionales son morfismos de A -módulos para cada pareja compatible $(A, p_A) \rightarrow (B, p_B)$.

Esto se traduce en que los morfismos de fibrados en espacios vectoriales son las transformaciones naturales de sus funtores de fibras ω (considerándolos en módulos).

Denotaremos a los morfismos entre dos fibrados vectoriales $\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}}$ sobre $\mathcal{X}$ por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}})$. En el caso $\mathcal{X} = \mathbf{Spec} A$, usaremos también la notación $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \bar{\mathcal{E}})$.

DEFINICIÓN. Un fibrado vectorial $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{X}$ sobre un k -pre-espacio es cuasi-coherente si, para cada punto $p_A \in \mathcal{X}(A)$ y morfismo de k -álgebras $A \xrightarrow{h} B$ se verifica

$$\mathcal{M}_{p_A}(A) \otimes_A B = \mathcal{M}_{p_B}(B)$$

con $p_B = h_*(p_A) \in \mathcal{X}(B)$. Esto es equivalente a imponer que los morfismos inducidos $f_A^{-1}(p_A) \otimes_A B \rightarrow f_B^{-1}(p_B)$ sean isomorfismos de B -módulos para cada k -álgebra B .

Sea A una k -álgebra y M un A -módulo.

DEFINICIÓN. El fibrado vectorial $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Spec} A$ asociado a M es el A -espacio que, en cada punto $A \xrightarrow{p_B} B$, tiene como fibra racional

$$\mathbf{M}_{p_B}(B) = M \otimes_A B$$

Es inmediato que los fibrados asociados a módulos son cuasi-coherente, y si nos restringimos a fibrados sobre $\mathbf{Spec} A$ el recíproco también es cierto. De hecho, se tiene lo siguiente:

Proposición 25. Las categorías de A -módulos y fibrados de módulos cuasi-coherentes sobre $\mathbf{Spec} A$ son equivalentes, por lo que para cada pareja de A -módulos M, M'

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{Spec} A}}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = \mathrm{Hom}_A(M, M')$$

Demostración. Solo es necesario probar la igualdad de los morfismos. Cada $\mathbf{M} \xrightarrow{T} \mathbf{M}'$ induce un morfismo de A -módulos en la fibra del punto general Id_A , explícitamente, $M_x = M \xrightarrow{T_x} M' = M'_x$. Recíprocamente, un morfismo de módulos define por cambio de base un morfismo lineal en cada fibra, pues todas ellas se pueden obtener a partir de la fibra en el punto general.

Introduciremos para finalizar un par de definiciones que utilizan el concepto de fibra, y serán necesarias para secciones posteriores.

DEFINICIÓN. Un morfismo de pre-espacios $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}$ es finito si, para cada $p_A \in \mathcal{Y}(A)$, la fibra $\mathcal{X}_{p_A}$ es un espacio afín $\mathbf{Spec} B$, B es A -álgebra finita.

Análogamente, φ es plano si cada fibra $\mathcal{X}_{p_A}$ es el espectro de un A -módulo plano B .

1.5.1. Haces de módulos y fibrados vectoriales

Sea $\mathbf{X}$ un k -espacio y $\mathcal{M}$ un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos en él, es decir, un funtor contravariante de la categoría de abiertos de $\mathbf{X}$ a la de módulos. Sabemos que esto es equivalente a dar un haz de $\mathcal{O}_X$ -módulos en el espacio anillado subyacente $(X, \mathcal{O}_X)$, donde cada punto $\mathrm{Spec} A \xrightarrow{p_A} X$ define el haz imagen inversa $p_A^* \mathcal{M}$ en $\mathrm{Spec} A$ (luego en $\mathbf{Spec} A$).

DEFINICIÓN. El fibrado sobre $\mathbf{X}$ en espacios vectoriales asociado al haz de módulos $\mathcal{M}$ que tiene como fibra racional en cada punto $p_A \in \mathcal{X}(A)$ el A -módulo

$$V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M})_{p_A}(A) = (p_A^* \mathcal{M})(\mathrm{Spec} A)$$

de secciones de la fibra $p_A^* \mathcal{M}$. Por tanto

$$V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M})(A) = \{(p_A, s) / p_A \in X(A), s \in (p_A^* \mathcal{M})(\mathrm{Spec} A)\}$$

Lema 26. La toma de fibrado asociado conmuta con los pullbacks por puntos: si $\mathcal{M}$ es un

haz de módulos en $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{g} X$ un punto de este, se tiene

$$V_{\mathbf{Spec} A}(g^*\mathcal{M}) = V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}) \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Spec} A = g^*V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M})$$

Demostración. Para cada k -álgebra B , se tiene:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{Spec} A}(g^*\mathcal{M})(B) &= \{(p_B, m) / \mathbf{Spec} B \xrightarrow{p_B} \mathbf{Spec} A, m \in \underbrace{(p_B^*(g^*\mathcal{M}))(\mathbf{Spec} B)}_{=(g(p_B)^*\mathcal{M})(\mathbf{Spec} B)}\} = \\ &= \{(p_B, (q_B, m)) / p_B \in (\mathbf{Spec} A)(B), q_B \in \mathbf{X}(B), m \in (q_B^*\mathcal{M})(\mathbf{Spec} B) \text{ y } g(p_B) = q_B\} = \\ &= (\mathbf{Spec} A \times_{\mathbf{X}} V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}))(B) = (g^*V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}))(B) \end{aligned}$$

Hemos visto que los puntos valorados en A de $V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M})$ se pueden dar como un punto de $\mathcal{X}(A)$ y una sección global de $p_A^*\mathcal{M}$, equivalente a secciones locales sobre un recubrimiento de Zariski de $\mathbf{Spec} A$. Por ello, se tiene inmediatamente que el fibrado asociado a un haz de módulos sobre $\mathbf{X}$ es un espacio según nuestra definición (concretamente, un espacio fibrado sobre $\mathbf{X}$).

Llevaremos a cabo ahora el proceso inverso. Partimos de un espacio fibrado vectorial $\mathbf{M} \xrightarrow{\pi} \mathbf{X}$, y a partir de él podemos definir un haz de módulos como su haz de secciones $\Gamma_{\mathbf{X}}(-, \mathbf{M})$, que a cada abierto $\mathbf{U} \xrightarrow{i} \mathbf{X}$ asigna

$$\Gamma_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{M}) = \text{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}, \mathbf{M}) = \{\mathbf{U} \xrightarrow{f} \mathbf{M} / \pi \circ f = i\}$$

es decir, las secciones de $\mathbf{U}$ compatibles con su inclusión en $\mathbf{X}$.

Es inmediato que este prehaz tiene estructura de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -módulo: la suma de secciones se define a partir de la de $\mathbf{M}$, y el producto es de la forma $(af)(x) = a(x)f(x)$ para cada $a \in \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(\mathbf{U})$. Además, es un haz porque sus valores en un abierto están determinados por los de cualquier recubrimiento de este. Esto se deduce inmediatamente usando la condición de espacio de $\mathbf{M}$ y aplicando el teorema 16.

La correspondencia que hemos establecido entre haces y fibrados vectoriales no es biyectiva en general, pero cuenta con la siguiente propiedad (que no demostraremos).

Teorema 27. Para todo espacio $\mathbf{X}$ y haz de módulos $\mathcal{M}$ en él, se tiene un morfismo

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\phi} \Gamma_{\mathbf{X}}(-, V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}))$$

que es isomorfismo si $\mathbf{X}$ es un esquema.

DEFINICIÓN. Se dice que un haz de módulos $\mathcal{M}$ sobre $\mathbf{Spec} A$ es cuasi-coherente si, para cada $\mathbf{Spec} B \subset \mathbf{Spec} A$, se tiene

$$\mathcal{M}(\mathbf{Spec} B) = \mathcal{M}(\mathbf{Spec} A) \otimes_A B$$

Se comprueba que los haces cuasi-coherentes de módulos sobre $\mathbf{Spec} A$ son precisamente los asociados a un A -módulo. Todo A -módulo M define el haz $\mathcal{M}$ en $\mathbf{Spec} A$ asociado al prehaz de localizaciones $\widetilde{M}$, dado por $\widetilde{M}(U) = M \otimes_A A_U$.

Podemos generalizar esta noción a k -espacios usando que la propiedad de ser cuasi-coherente se mantiene por pullbacks de morfismos $\mathbf{Spec} B \rightarrow \mathbf{Spec} A$. Por ello, definimos

DEFINICIÓN. Un haz de módulos $\mathcal{M}$ sobre un espacio $\mathbf{X}$ es cuasi-coherente si, para cada punto $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{p_A} \mathbf{X}$, el pullback $p_A^* \mathcal{M}$ es cuasi-coherente en $\mathbf{Spec} A$.

Los haces cuasi-coherentes sobre esquemas hacen biyectiva la correspondencia dada anteriormente entre haces en módulos y fibrados vectoriales.

Teorema 28. Si $\mathbf{X}$ es un k -esquema, se tiene la siguiente correspondencia funtorial y biyectiva:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Haces cuasi-coherentes de módulos en } \mathbf{X}\} & \begin{array}{c} \mathcal{M} \\ \downarrow \\ V_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}) \end{array} & \begin{array}{c} \Gamma_{\mathbf{X}}(-, \mathbf{M}) \\ \uparrow \\ \mathbf{M} \end{array} \\ \updownarrow \wr & & \\ \{\text{Espacios fibrados vectoriales cuasi-coherentes sobre } \mathbf{X}\} & & \end{array}$$

Demostración. Por ser $\mathbf{X}$ esquema y la cuasi-coherencia una cuestión local, se reduce el problema al caso afín, en el que su demostración es inmediata por la proposición 25.

Nota. Dados dos esquemas $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, un haz de módulos $\mathcal{M}$ en $\mathbf{X}$ y otro $\mathcal{N}$ en $\mathbf{Y}$, denotaremos por $\mathcal{M} \otimes_k \mathcal{N} = \pi_X^* \mathcal{M} \otimes_k \pi_Y^* \mathcal{N}$ al haz producto en $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

1.5.2. Fibrado tangente a un pre-espacio

La noción intuitiva de “punto infinitamente próximo” al origen de la recta afín $\mathbf{k}$ se puede formalizar como un elemento del anillo $k[\varepsilon] = k[x]/x^2$, es decir, entendiendo ε como un símbolo que verifica la condición $\varepsilon^2 = 0$. Esta idea se extiende a los puntos de un espacio cualquiera $\mathcal{X}$, y empleándola se definen las direcciones tangentes en este espacio como parejas formadas por un punto p y otro infinitamente próximo a él, p_ε . Rigurosamente:

DEFINICIÓN. Se llama espacio tangente al pre-espacio $\mathcal{X}$ en el punto $p \in \mathcal{X}(A)$ a

$$T_p(\mathcal{X}) = \text{Hom}_p(\mathbf{Spec} A[\varepsilon], \mathcal{X}) = \{\mathbf{Spec} A[\varepsilon] \xrightarrow{f} \mathcal{X} / f \circ t_0 = p\}$$

donde t_0 es el morfismo que induce en espectros el paso al cociente $A[\varepsilon] \rightarrow A$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spec} A[\varepsilon] & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \\ t_0 \uparrow & \nearrow p & \\ \mathbf{Spec} A & & \end{array}$$

Este conjunto puede ser dotado de una estructura de A -módulo de forma natural cuando $p \in \mathcal{X}(A)$. Para definirla, emplearemos los morfismos de álgebras

$$\begin{array}{ccc} A[\varepsilon] \times_A A[\varepsilon] & \xrightarrow{\Delta} & A[\varepsilon] \\ (\varepsilon, 0) & \longmapsto & \varepsilon \\ (0, \varepsilon) & \longmapsto & \varepsilon \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A[\varepsilon] & \xrightarrow{f_a} & A[\varepsilon] \\ \varepsilon & \longmapsto & a\varepsilon \end{array}$$

Así, la suma en $T_p(\mathcal{X})$ es el morfismo inducido entre los puntos por Δ y el producto por escalares el inducido por f_a . Notemos que la aditividad del funtor $\mathcal{X}$ asegura que $\mathcal{X}(A[\varepsilon] \times_A A[\varepsilon]) = \mathcal{X}(A[\varepsilon]) \times_{\mathcal{X}(A)} \mathcal{X}(A[\varepsilon])$, por lo que Δ da lugar a un verdadero morfismo de suma en $T_p(\mathcal{X})$.

Cada morfismo de k -pre-espacios $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}$ da lugar a una aplicación entre sus fibrados tangentes en cualquier punto

$$T_p(\mathcal{X}) \longrightarrow T_{f(p)}(\mathcal{Y})$$

que será morfismo de A -módulos con la estructura que hemos definido. Por ello, podemos pegar funtorialmente estos módulos para construir un fibrado sobre $\mathcal{X}$.

DEFINICIÓN. El fibrado tangente a un pre-espacio $\mathcal{X}$ es aquel que tiene como fibra en $p \in \mathcal{X}(A)$ el espacio tangente $T_p(\mathcal{X})$.

$$T(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X} \quad \text{con } T(\mathcal{X})_p = T_p(\mathcal{X})$$

El espacio tangente nos será útil también en el caso afín para estudiar las derivaciones del anillo de funciones gracias al siguiente teorema.

Teorema 29. El espacio tangente a $\mathbf{Spec} A$ en un punto $p \in \mathbf{Spec} A(B) \equiv A \xrightarrow{p} B$ es

$$T_p(\mathbf{Spec} A) = \text{Der}_k(A, B)$$

Demostración. Los puntos de $T_p(\mathbf{Spec} A)$ son precisamente los morfismos de álgebras $A \xrightarrow{p_\varepsilon} B[\varepsilon]$ que se convierten en p al imponer $\varepsilon = 0$. Estos se pueden expresar, fijado p , mediante las aplicaciones (lineales) $A \xrightarrow{D_p} B$ dadas por

$$p_\varepsilon(a) = p(a) + D_p(a) \varepsilon \quad \forall a \in A$$

que son derivaciones de A en B por ser p_ε morfismo de álgebras, como se puede comprobar sin dificultad.

El cálculo de los espacios tangentes a los esquemas que estudiaremos en el siguiente capítulo excede el objetivo de esta memoria, y no es necesario para clarificar su desarrollo posterior. Pese a ello, los mencionaremos sin demostración cuando sea pertinente por completud del texto y para animar a un posible lector a profundizar en este tema.

CAPÍTULO 2

Construcciones geométricas

Durante este capítulo, denotaremos a los esquemas por X en la mayoría de ocasiones, refiriéndonos con ello en función de la situación al k -espacio $\mathbf{X}$ representado por este esquema o al propio esquema como espacio anillado.

Introduciremos a continuación una serie de espacios que utilizan la teoría de funtores desarrollada en el primer capítulo para estudiar y parametrizar aspectos geométricos de los esquemas clásicos. Todo ello culminará en la definición y el análisis de las propiedades del espacio de Picard, objetivo principal de esta memoria.

2.1. Espacio proyectivo y grassmaniana de un módulo

Dado un cuerpo o anillo k y un k -módulo M , se define usualmente en geometría su proyectivización como

$$\mathbb{P}(M^*) = \left\{ N \subset M \text{ sub-}k\text{-módulo con } M/N \simeq k \right\}$$

Podemos generalizar esta noción mediante el k -pre-espacio cuyos puntos sobre cada k -álgebra son

$$\tilde{\mathbb{P}}_k(M^*)(A) = \mathbb{P}_A(M_A^*)$$

La definición que daremos a continuación coincide, como se puede comprobar sin dificultad, con el k -espacio asociado al pre-espacio anterior.

DEFINICIÓN. El espacio proyectivo asociado a un k -módulo M es $P_A(M)$, con

$$\mathbf{P}_A(M)(A) = \left\{ N \subset M \otimes_k A \text{ sub-}A\text{-módulo con } M \otimes_k A / N \text{ de línea} \right\}$$

para cada k -álgebra A .

Este espacio parametriza los hiperplanos de M , en contraposición con la proyectivización empleada en Geometría clásica, que parametriza sus rectas.

Nota. Un A -módulo se dice de línea si es monogenerado y su anulador es nulo, es decir, es localmente isomorfo al anillo como A -módulo. Notemos que un módulo es de línea si lo es su haz/fibrado asociado.

Sea $\mathbf{X}$ un k -espacio $\mathcal{M}$ y un fibrado de módulos sobre él.

DEFINICIÓN. El espacio proyectivo asociado a $\mathcal{M}$ es el fibrado $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{X}$, con

$$\mathbf{P}_{\mathbf{X}}(\mathcal{M})_p(A) = \mathbf{P}_A(\mathcal{M}_p(A)) = \left\{ N \subset \mathcal{M}_p(A) \text{ sub-}A\text{-módulo con } \mathcal{M}_p(A)/N \text{ de línea} \right\}$$

para cada punto $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{p} \mathbf{X}$.

Análogamente, si $\mathcal{M}$ es un haz cuasi-coherente sobre el espacio $\mathbf{X}$, definiremos el espacio que parametriza sus n -planos.

DEFINICIÓN. La grassmaniana de $\mathcal{M}$ es el espacio fibrado $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^n(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{X}$ de fibra racional

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^n(\mathcal{M})_p(A) = \left\{ N \subset \mathcal{M}_p(A) \text{ sub-}A\text{-módulo con } \mathcal{M}_p(A)/N \text{ localmente libre de rango } n \right\}$$

para cada punto $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{p} \mathbf{X}$.

2.1.1. Representabilidad

Teorema 30. Si X es k -esquema y $\mathcal{M}$ es un haz cuasi-coherente en él, $\mathbf{P}_X(\mathcal{M})$ es representable por un esquema fibrado sobre X .

Demostración. Podemos reducir el problema asumiendo que $X = \mathbf{Spec} k$, con k un anillo, pues lo que se busca demostrar es una cuestión local. Probaremos entonces que $\mathbf{P}_k(M)$ es un k -esquema para todo k -módulo M .

Tomemos un sistema de generadores $\{m_i\}$ de M , y sea $\mathbf{U}_{m_i} \subset \mathbf{P}_k(M)$ el subespacio formado por los puntos $N \subset M \otimes_k A$ tales que $N \subset M \otimes_k A/N$ está generado por m_i . Demostraremos que $\{\mathbf{U}_i\}$ es recubrimiento afín de $\mathbf{P}_k(M)$. Para ello, en primer lugar, veamos que dado un sub- A -módulo M , el subconjunto $U_{m_i} \subset \mathbf{Spec} A$ en que $N \subset M \otimes_k A/N$ está generado por m_i es abierto y la unión de todos ellos recubre $\mathbf{Spec} A$. Lo primero viene garantizado por ser U_{m_i} el subconjunto de $\mathbf{Spec} A$ en el que se verifica

$N \subset M \otimes_k A / N + m_i \otimes 1 = 0$, ya que como este módulo es localmente monógeno, si su fibra en un punto geométrico es nula lo será en un abierto afín que lo contenga. Para comprobar lo segundo, basta tener en cuenta que al ser $N \subset M \otimes_k A / N$ localmente monógeno y $\{m_i \otimes 1\}$ un sistema de generadores, por el Lema de Nakayama, para todo punto $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ existirá un índice i con $(N \subset M \otimes_k A / N)_{\mathfrak{p}} = \langle m_i \rangle$, por lo que $\mathfrak{p} \in U_{m_i}$.

Por último, debemos comprobar que cada U_i es esquema afín. Si N es un submódulo de $M \otimes_k A$ tal que $N \subset M \otimes_k A / N$ es de línea y generado por $m_i \otimes 1$, debe ser $N \subset M \otimes_k A / N \simeq A$, por lo que el paso al cociente por M será una forma lineal con $\pi(m_i) = 1$. Recíprocamente, toda forma lineal $M \otimes_k A \xrightarrow{\omega} A$ con $\omega(m_i \otimes 1) = 1$ define, mediante $\ker \omega$, un submódulo que corresponde con un punto de U_{m_i} con valores en A . Por ello, entendiendo los elementos de M como funciones lineales de $\mathbf{M}^*$ podemos interpretar U_{m_i} como el subfunctor de $\mathbf{M}^*$ definido por la ecuación $m_i(\omega) = \omega(m_i \otimes 1) = 1$. Concluimos que $U_{m_i} = (m_i - 1)_0 \subset \mathbf{M}^*$ es afín por ser un cerrado del espacio afín $\mathbf{M}^*$.

De este teorema se deduce el siguiente resultado:

Corolario 31. Si $\mathcal{M}$ es cuasi-coherente, localmente finito generado y plano, $\mathbf{P}_X(\mathcal{M}^*) \simeq \mathbb{P}_X(\mathcal{M})$, por lo que el espacio de subfibrados de línea de $\mathcal{M}$ es un esquema sobre X .

De forma similar, probaremos ahora la representabilidad de la grassmaniana, que resultará fundamental para deducir la de otros espacios más complicados que se definirán posteriormente.

Teorema 32. Si X es k -esquema y $\mathcal{M}$ es un haz cuasi-coherente en él, $\mathbf{G}_X^n(\mathcal{M})$ es representable por un esquema fibrado sobre X .

Además, cuando X sea localmente noetheriano sobre un cuerpo k y $\mathcal{M}$ sea localmente finito generado, el morfismo de estructura $\mathbf{G}_X^n(\mathcal{M}) \xrightarrow{\pi} X$ será propio y localmente de tipo finito (sobre X).

Demostración. La demostración se desarrolla análogamente a la de la representabilidad del espacio proyectivo. En este caso, podemos suponer que $X = \mathbf{Spec } A$ y $\mathcal{M}$ es el haz asociado a un A -módulo M . Fijando un sistema de generadores $\{m_i\}$ de M , esta vez consideraremos los subfuntores $U_{m_{i_1}, \dots, m_{i_n}} \subset \mathbf{G}_X^n(\mathcal{M})$ definidos por los submódulos N tales que $\mathcal{M}_p(A)/N$ es libre de rango n y está generado por $\{m_{i_1}, \dots, m_{i_n}\} \subset \{m_i\}$. Se prueba de la misma forma que estos subfuntores son abiertos y forman un

recubrimiento de la grassmaniana, por lo que solo es necesario comprobar que son afines. Para ello, identificamos $\mathbf{U}_{m_{i_1}, \dots, m_{i_n}}$ con el funtor de morfismos lineales (y epiyectivos) $M \xrightarrow{T} A \oplus \dots \oplus A$ con $T(m_{i_j}) = e_j$ (el j -ésimo elemento de la base estándar de A^n). Cada morfismo de este tipo define un submódulo $N = \ker T$, por lo que $\mathbf{U}_{m_{i_1}, \dots, m_{i_n}}$ corresponde con el subfuntor cerrado de $\mathbf{Hom}_A(\mathbf{M}, \mathbf{A}^n) = \mathbf{M}^* \times \dots \times \mathbf{M}^*$ formado por las n -uplas de formas lineales $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ que verifican $m_{i_j}(\omega_i) = \omega_i(m_{i_j}) = \delta_{ij}$ para todo $i, j \leq n$. Esto concluye que cada $\mathbf{U}_{m_{i_1}, \dots, m_{i_n}}$ es un abierto afín.

Para la segunda parte del teorema, supongamos que $\mathcal{M}$ es localmente finito generado y X noetheriano. Podemos asumir que $X = \mathbf{Spec} k$ con k un anillo noetheriano y M es un k -módulo finito generado. Aplicaremos el criterio valorativo de propiedad: sea $\mathcal{O}_v$ una k -álgebra de valoración discreta de cuerpo de fracciones Σ y $\mathbf{Spec} \Sigma \rightarrow \mathbf{G}_k^n(M)$ un punto, equivalente a un cociente $M_\Sigma \xrightarrow{p_\Sigma} \Sigma^n$. Entonces, $\overline{M} = p_\Sigma(M_{\mathcal{O}_v}) \subset \Sigma^n$ es sub- $\mathcal{O}_v$ -módulo finito generado y libre de torsión, por lo que es libre y el cociente $M_{\mathcal{O}_v} \xrightarrow{p_\Sigma} \overline{M}$ define un punto $\mathcal{O}_v \rightarrow \mathbf{G}_k^n(M)$ que induce p_Σ por cambio de base.

Observación. En el caso en que $\mathcal{X}$ es un k -pre-espacio en lugar de un espacio, la grassmaniana de un haz cuasi-coherente $\mathcal{M}$ sigue siendo representable por un k -esquema sobre $\mathcal{X}$.

Sea $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{q_A} \mathbf{G}_{\mathbf{X}}^n(\mathcal{M})$ un punto de la grassmaniana y $\mathbf{Spec} A \xrightarrow{p_A} \mathbf{X}$ su punto imagen por el morfismo estructural $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^n(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{X}$. Si q_A corresponde con el sub- A -módulo $\mathcal{N}_{q_A} \subset \mathcal{M}_{p_A}$, se tiene lo siguiente:

Proposición 33. El espacio tangente a $\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^n(\mathcal{M})$ en el punto q_A es

$$T_{q_A}(\mathbf{G}_{\mathbf{X}}^n(\mathcal{M})) = \mathrm{Hom}_{A\text{-mód}}(\mathcal{N}_{q_A}, \mathcal{M}_{p_A} / \mathcal{N}_{q_A})$$

2.2. Espacio de Hilbert

Asumiremos para el resto de la sección que el cuerpo base es algebraicamente cerrado y las álgebras que aparecen son todas noetherianas. Recordemos que, dado un esquema X y una k -álgebra A , denotamos por X_A al esquema $X \times \mathbf{Spec} A$.

Definiremos ahora una noción totalmente geométrica que utiliza la idea funtorial de espacio para estudiar los subesquemas cerrados de un esquema dado.

DEFINICIÓN. El espacio de Hilbert de un k -esquema X es aquel que asigna a cada k -álgebra A el conjunto

$$\mathbf{Hilb}_{X/k}(A) = \{\text{Subesquemas } Z \subset X_A \text{ cerrados y planos sobre } A\}$$

Nuestro objetivo en esta sección será probar la representabilidad del espacio de Hilbert de un esquema proyectivo X . Para ello, iremos reduciendo progresivamente el problema descomponiendo este espacio en abiertos disjuntos cuya representabilidad será más sencilla de probar. Antes necesitamos introducir ciertos preliminares algebraicos, que veremos a continuación. Aunque se mencionarán para que esta memoria sea autocontenida, la demostración de algunos lemas generales de teoría de esquemas se omitirá por falta de espacio, y se puede encontrar en cualquier manual del área como los citados en la introducción y la bibliografía.

2.2.1. Polinomio de Hilbert y preliminares algebraicos

En esta subsección daremos una serie de resultados pertenecientes a la teoría general de esquemas que serán necesarios para la demostración de la representabilidad del espacio de Hilbert. Sea $\mathcal{M}$ un haz coherente sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$. Usaremos en adelante la notación $\mathcal{M}(m) := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(m)$.

DEFINICIÓN. La función de Hilbert de $\mathcal{M}$ se define como

$$H_{\mathcal{M}}(m) = \chi(\mathcal{M}(m)) = \sum_i (-1)^i h^i(\mathcal{M}(m))$$

con $h^i(\mathcal{M}(m)) = \dim_k H^i(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{M}(m))$.

Proposición 34. La función de Hilbert de cualquier haz coherente en $\mathbb{P}_k^n$ es un polinomio de grado menor o igual que n con coeficientes racionales.

DEFINICIÓN. Un endofunctor covariante en la categoría de A -módulos se dice semiexacto si, para toda sucesión exacta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow \overline{M} \rightarrow 0$, se verifica que la sucesión $F(N) \rightarrow F(M) \rightarrow F(\overline{M})$ es exacta.

Lema de Nakayama funtorial. Sea $\mathcal{O}$ un anillo local noetheriano de cuerpo residual K , y F un endofunctor covariante semiexacto en la categoría de $\mathcal{O}$ -módulos finitamente generados

que transforma homotecias en homotecias. Se tiene que

$$F = 0 \iff F(K) = 0$$

Nota. La condición de transformar homotecias en homotecias significa que, si $M \xrightarrow{\phi_a^M} M$ es la homotecia por a , entonces $F(\phi_a) = F(M) \xrightarrow{\phi_a^{F(M)}} F(M)$.

Lema 35. Sea X un esquema proyectivo, $\mathcal{O}$ un anillo local noetheriano de maximal $\mathfrak{m}$, $\mathcal{M}$ un haz coherente en $X_{\mathcal{O}}$ plano sobre $\mathcal{O}$, y $X_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\pi} \text{Spec } \mathcal{O}$ la proyección natural. Si $H^i(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M}/\mathfrak{m} \cdot \mathcal{M}) = 0$ para algún $i > 0$, entonces se verifican:

1. $H^i(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M}) = 0$.
2. $H^{i-1}(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M})$ cambia de base, es decir, para todo $\mathcal{O}$ -módulo N se tiene

$$H^{i-1}(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathcal{O}}}} \pi^* \mathcal{N}) = H^{i-1}(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{N}$$

3. $H^{i-1}(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M})$ es plano si y solo si $H^{i-2}(X_{\mathcal{O}}, \mathcal{M})$ cambia de base.

Corolario 36. Sea A un anillo noetheriano, $\mathcal{M}$ un haz coherente en $X \subset \mathbb{P}_A^n$ plano sobre A y

$$U = \{x \in \text{Spec } A \mid \mathcal{M}_{k(x)}(m) \text{ es acíclico para todo } m \geq m_0\}$$

con $k(x)$ el cuerpo residual en x . Se cumple que

1. $U = \{x \in \text{Spec } A \mid H^i(X_A, \mathcal{M}(m))_x = 0 \quad \forall i > 0, m \geq m_0\}$.
2. $H^0(X_A, \mathcal{M}(m))$ es plano sobre U , y para todo $x \in U$ y $m \geq m_0$ se tiene

$$H^0(X_A, \mathcal{M}(m))_{k(x)} = H^0(X_{k(x)}, \mathcal{M}_{k(x)}(m))$$

3. U es un abierto.

Demostración. Los primeros dos puntos se deducen sin dificultad a partir del lema previo. Haremos hincapié en el tercero, que será el más relevante para el desarrollo de esta sección. Empleando el teorema de Serre, sabemos que existe $\bar{m}_0$ tal que $\mathcal{M}(m)$ es acíclico para todo $m \geq \bar{m}_0$. Por tanto, la aciclicidad de $\mathcal{M}(m)_x$ para $m \geq m_0$ es

equivalente a la de $\mathcal{M}(m_0)_x, \mathcal{M}(m_0 + 1)_x, \dots, \mathcal{M}(\bar{m}_0)_x$, y como cada una de estas es una condición abierta en x , concluimos que U es también abierto.

Teorema 37 (constancia local del polinomio de Hilbert). Sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en $X \subset \mathbb{P}_A^n$ plano sobre A . Dado un punto $x \in \text{Spec}_M A$, existe un entorno abierto $V_x \subset \text{Spec } A$ tal que el polinomio de Hilbert de $\mathcal{M}$ es igual en todas las fibras sobre V_x .

Demostración. Tomemos un punto $x \in \text{Spec}_M A$, y sea $\mathcal{O} = A_x$ y $\mathcal{M}_{k(x)}$ la restricción de $\mathcal{M}$ a la fibra de x . Sea m_0 un natural verificando que $\mathcal{M}_{k(x)}(m)$ es acíclico para todo $m \geq m_0$. Por el lema 35, sabemos que dado $m \geq m_0$ existirá un entorno abierto V_x^m de x en $\text{Spec } A$ donde $\mathcal{M}(m)$ es acíclico y $\pi_*(\mathcal{M}(m))$ es libre de rango constante. En tal entorno y para todo $y \in V_x^m$, el valor $H_{\mathcal{M}_{k(y)}}(m)$ es exactamente el rango de $\pi_*(\mathcal{M}(m))$ en V_x^m , por lo que $H_{\mathcal{M}_{k(y)}}(m)$ es constante considerándolo función de y .

Si ahora definimos $V_x = \bigcap_{0 \leq i \leq n} V_x^{m_0+i}$, se tiene que cada $H_{\mathcal{M}_{k(y)}}(m_0 + i)$ es constante como función de y , por lo que lo será también $H_{\mathcal{M}_{k(y)}}(m)$ para todo m . Esto es a causa de que todo polinomio de grado menor o igual que n (como el de Hilbert en este caso) está determinado por su valor sobre $n + 1$ números distintos: $\{m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + n\}$.

Lema 38. Si A es un anillo íntegro noetheriano, R una A -álgebra de tipo finito y M un R -módulo finito, existe un $a \in A$ no nulo verificando que M_a es un A_a -módulo libre.

Lema 39. Si A es un anillo noetheriano, R una A -álgebra $\mathbb{N}$ -graduada de tipo finito y $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ un R -módulo finito graduado, entonces

$$U = \{x \in \text{Spec } A / M_x \text{ es un } A_x\text{-módulo plano}\}$$

es un abierto de $\text{Spec } A$.

Teorema 40. Si $X \subset \mathbb{P}_A^n$ es un esquema proyectivo sobre A y $\mathcal{M}$ es un haz coherente sobre X , el lugar geométrico de puntos de $\text{Spec } A$ donde $\mathcal{M}$ es plano (sobre $\text{Spec } A$) es un abierto.

Demostración. Solo es necesario probar que si $\mathcal{M}$ es plano sobre $\text{Spec } A$ en un punto $x \in \text{Spec } A$, entonces lo es en un entorno abierto de x . Tomemos un natural m_0 verificando que $\mathcal{M}(m)$ es acíclico en la fibra de x para todo $m \geq m_0$. Por el lema 39, sabemos que el módulo $\tilde{\mathcal{M}} = \bigoplus_{m \geq m_0} H^0(\mathbb{P}_A, \mathcal{M}(m))$ es plano en un entorno abierto afín $x \in V_x = \text{Spec } B \subset \text{Spec } A$. Tenemos que $\mathcal{M}|_{\pi^{-1}(V_x)}$ es plano sobre V_x , ya que para

cada abierto afín estándar de $\mathbb{P}_{V_x}^n$, el espacio de secciones de $\mathcal{M}$ corresponde con la localización homogénea de $\widetilde{M}$.

2.2.2. Representabilidad: esquema de Hilbert

Asumiremos que X es un esquema proyectivo sobre un cuerpo fijo k . Hemos definido ya su espacio de Hilbert $\mathbf{Hilb}_{X/k}$, cuyos puntos sobre una k -álgebra A parametrizan los cerrados de X_A y pueden expresarse como

$$\mathbf{Hilb}_X(A) = \{\text{Cocientes } (\mathcal{O}_X)_A \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0 \text{ planos sobre } A\}$$

donde $\mathcal{M} = (\mathcal{O}_Z)_A$, siendo $\mathcal{O}_Z$ el haz de estructura del cerrado $Z \subset X$ correspondiente a cada cociente. Podemos por tanto considerar el polinomio de Hilbert de un cerrado Z , que será el de su haz de estructura, $H_{\mathcal{O}_Z}$.

Usaremos esta idea para descomponer el espacio de Hilbert en sus componentes con polinomio de Hilbert constante. Dado $H \in \mathbb{Q}[x]$, sea $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H$ el espacio cuyos puntos sobre A son los cocientes planos $(\mathcal{O}_X)_A \rightarrow (\mathcal{O}_Z)_A$ tales que $H_Z = H$.

Teorema 41. Si $X \subset \mathbb{P}(E)$ es una subvariedad proyectiva, se verifica que $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H \subset \mathbf{Hilb}_{X/k}$ es abierto para todo $H \in \mathbb{Q}[x]$, y su espacio de Hilbert descompone como

$$\mathbf{Hilb}_{X/k} = \coprod_{H \in \mathbb{Q}[x]} \mathbf{Hilb}_{X/k}^H$$

Demostración. La prueba es inmediata teniendo en cuenta que el subespacio de cerrados de X que comparten polinomio de Hilbert es abierto por la constancia local de este (teorema 37). La descomposición dada es cierta por tener cada cerrado un polinomio de Hilbert asociado (y solamente uno).

Gracias a este resultado, reducimos la demostración de representabilidad de $\mathbf{Hilb}_{X/k}$ a la de $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H$ para H fijo. Además, como este último es un cerrado de $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}(E)/k}^H$ para cierto E , basta probarlo en el caso en que X es un espacio proyectivo.

Para esto, daremos condiciones adicionales que refinan la estructura de cada $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H$, proporcionando un recubrimiento por abiertos de este. Consideremos el haz de estructura $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$ en $\mathbb{P}(E)$, y los cocientes $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_Z$ con polinomio de Hilbert $H \in \mathbb{Q}[x]$. El núcleo

de π es el haz de ideales $\mathcal{I}_Z$, que hace exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

Esto implica que, para todo $m \in \mathbb{N}$, también lo es

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z(m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(m) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(m) \longrightarrow 0$$

por lo que existirá cierto $m_0 \gg 0$ verificando que, para todo $m \geq m_0$, los términos positivos de cohomología se anulan y se verifica la exactitud de la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{I}_Z(m)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(m)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_Z(m)) \longrightarrow 0$$

y se tiene $H(m) = h^0(\mathcal{O}_Z(m))$. Como $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(m)) = S^m E$, podemos identificar $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{I}_Z(m))$ con el subespacio de $S^m E$ de elementos que se anulan al proyectar en $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_Z(m))$. Cada uno de estos elementos recibe el nombre de hipersuperficie de grado m que pasa por Z .

DEFINICIÓN. Un haz coherente $\mathcal{N}$ en $\mathbb{P}_A$ es totalmente acíclico si $H^i(\mathbb{P}_A, \mathcal{N}(r)) = 0$ para todo $i > 0$ y $r \geq 0$.

Se dice además que $\mathcal{N}$ está totalmente generado por sus secciones si el siguiente morfismo es epiyectivo para todo $r \geq 0$:

$$H^0(\mathbb{P}_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A}(r)) \otimes_A H^0(\mathbb{P}_A, \mathcal{N}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_A, \mathcal{N}(r)) \longrightarrow 0$$

Lema 42. Si $\mathcal{N}$ es un haz coherente en $\mathbb{P}_A$ plano sobre A , totalmente acíclico y generado por sus secciones, el lugar geométrico de los puntos de $\mathbf{Spec} A$ donde $\mathcal{N}$ está totalmente generado por sus secciones es un abierto.

Demostración. Tomemos el haz coherente y plano (sobre A) $\overline{\mathcal{K}}$ que hace exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A} \otimes_A H^0(\mathbb{P}_A, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

El lugar geométrico que estamos analizando corresponde con el de los puntos $A \xrightarrow{p} B$ que verifican $H^1(\mathbb{P}_A, \overline{\mathcal{K}}(r))_p = 0$ para todo $r \geq 0$. Esta condición es equivalente a $H^i(\mathbb{P}_A, \overline{\mathcal{K}}(r))_p = 0$ para todo $r \geq 0$ e $i > 0$, y sabemos que los puntos que la cumplen forman un abierto por el corolario 36.

Denotaremos por $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$ al subespacio de $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H$ formado por los cerrados de X con polinomio de Hilbert H tales que $\mathcal{I}_Z(m_0)$ es totalmente acíclico y totalmente generado por sus secciones.

Teorema 43. $\{\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}\}_{m_0 \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento filtrante creciente por abiertos de $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H$.

$$\mathbf{Hilb}_{X/k}^H = \bigcup_{m_0 \in \mathbb{N}} \mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$$

Demostración. Basta aplicar el lema anterior a cada $\mathcal{N} = \mathcal{I}_Z$, lo que asegura que cada $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$ es un abierto.

Empleando la definición de k -esquema como espacio recubierto por subfuntores representables, hemos reducido el problema a probar la representabilidad de $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$ para H y m_0 fijos. Veremos esto a continuación.

Teorema 44. El espacio $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$ es representable por un subesquema de la grassmaniana $\mathbf{G}_k^{H(m_0)}(S_k^{m_0}E)$, con la correspondencia

$$\begin{aligned} \mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0} &\xrightarrow{\varphi} \mathbf{G}_k^{H(m_0)}(S_k^{m_0}E) \\ \mathcal{O}_Z &\longmapsto H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(m_0)) / H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{I}_Z(m_0)) \end{aligned}$$

es decir, asignando a cada cociente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \rightarrow \mathcal{O}_Z$ el cociente por el subespacio de hipersuperficies de grado m_0 que se anulan en Z .

Demostración. Hemos visto ya que podemos suponer $X = \mathbb{P}(E)$ para cierto E . Denotemos $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}$, y consideremos la grassmaniana $G := \mathbf{G}_k^{H(m_0)}(S_k^{m_0}E)$ y el cociente universal localmente libre sobre G de rango $H(m_0)$

$$(S_k^{m_0}E)_G / I_{m_0}$$

Sea $\mathcal{K} = I_{m_0} \cdot \mathcal{O}_G$, y $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_G / \mathcal{K}$. Empleando el teorema 40, el lugar geométrico $U \subset G$ de los puntos donde $\widetilde{\mathcal{M}}$ es plano es un abierto de G . Podemos tomar dentro de este el lugar geométrico $U^{m_0} \subset U$ de los puntos donde $\widetilde{\mathcal{M}}(m_0)$ y $\mathcal{K}(m_0)$ son totalmente acíclicos y $\mathcal{K}(m_0)$ está totalmente generado por sus secciones, que es abierto aplicando el corolario 36 y el lema 42. A partir de este, definimos el subespacio $U_H^{m_0} \subset U^{m_0}$ en que el polinomio de Hilbert de $\widetilde{\mathcal{M}}$ es H , que es también un abierto por el teorema 37. De todo esto hemos obtenido que $U_H^{m_0}$ es subesquema abierto de G , y el morfismo φ que hemos

definido valora en él, es decir, tenemos $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0} \xrightarrow{\varphi} U_H^{m_0}$. Resta comprobar que φ es un isorfismo, para lo que construiremos explícitamente su inversa. Sea $\overline{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}|_{U_H^{m_0}}$, que por su construcción es plano sobre $U_H^{m_0}$. Además, $\widetilde{\mathcal{M}}(m_0)$ y $\mathcal{K}(m_0)$ son totalmente acíclicos, $\mathcal{K}(m_0)$ está totalmente generado por sus secciones y el polinomio de Hilbert de $\overline{\mathcal{M}}$ es H . Aplicando ahora el segundo punto del corolario 36, sagemos que el haz $\pi_*\overline{\mathcal{M}}(m)$ es plano y de rango constante $H(m)$ para cada $m \geq m_0$. Por tanto, $\overline{\mathcal{M}}$ induce un morfismo $U_H^{m_0} \rightarrow \mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$ que será el inverso de φ . Para ver esto, basta tener en cuenta que $\overline{\mathcal{M}}(m_0)$ está generado por sus secciones globales $\pi_*\overline{\mathcal{M}}(m_0) = ((S_k^{m_0}E)_G / I_{m_0})|_{U_H^{m_0}}$, ya que $R^1\pi_*(\mathcal{K}(m)) = 0$ para todo $m \geq m_0$ y $\pi_*(\mathcal{K}(m_0)) = I_{m_0}$. Con todo ello se concluye que φ es isomorfismo y $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0} \simeq U_H^{m_0}$ como espacios, con lo que el primero es representable.

El teorema anterior implica en particular que cada $\mathbf{Hilb}_{X/k}^{H,m_0}$ es un esquema cuasi-proyectivo. Con todo esto, hemos probado lo siguiente:

Corolario 45. El espacio $\mathbf{Hilb}_{X/k}$ es representable por un esquema para todo esquema proyectivo X . Llamamos a su representante esquema de Hilbert de X .

Añadiremos, sin demostración, un teorema que nos proporciona más información sobre las componentes del esquema de Hilbert de polinomio constante.

Teorema 46. Cada uno de los $\mathbf{Hilb}_{X/k}^H$ en que descompone el espacio de Hilbert es un esquema proyectivo.

2.3. Espacio de Picard

En esta sección final, emplearemos todo lo obtenido hasta ahora para estudiar en profundidad el espacio de Picard de distintos tipos de esquemas, como los proyectivos o los íntegros. Comenzaremos recordando la definición clásica del grupo de Picard y generalizándola a un espacio del tipo que hemos definido.

DEFINICIÓN. Sea X un k -esquema. Su grupo de Picard es

$$\mathrm{Pic}_k(X) = \{\text{Haces de línea } \mathcal{L} \text{ en } X\}$$

Con haces de línea nos referimos a los localmente libres de rango 1 sobre X , es decir,

aquellos que para cada punto admiten un abierto $U \subset X$ con $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U$. Este conjunto forma un grupo con el producto tensorial, pues los haces de línea coinciden precisamente con los invertibles.

Observación. Siguiendo el espíritu de Teoría de Categorías, al considerar estos conjuntos no distinguimos entre haces isomorfos, es decir, en realidad estamos considerando los haces de línea en X módulo isomorfismo. Lo mismo se aplica en la definición de espacio de Hilbert que ya hemos dado.

Sería razonable pensar que podemos definir el espacio de Picard a partir de este grupo de manera análoga al de Hilbert, es decir, mediante el funtor

$$\widetilde{\mathbf{Pic}}_k(X)(A) = \{\text{Haces de línea } \mathcal{L} \text{ en } X \times \text{Spec } A\} = \mathbf{Pic}_k(X_A)$$

Este es el conocido como “funtor absoluto de Picard”, pero no es haz sobre el *situs* de Zariski. Para ver esto, tomemos un haz de línea $\mathcal{L}$ en $\text{Spec } A$ cuya imagen inversa $\pi^*\mathcal{L}$ en X_A no sea trivial, donde $X_A \xrightarrow{\pi} \text{Spec } A$ es el morfismo de proyección. Si $\{U_i = \text{Spec } A_i\}$ es un recubrimiento de $\text{Spec } A$ que trivializa $\mathcal{L}$, cada imagen inversa $\pi_i^*\mathcal{L}|_{U_i}$ será trivial en X_{A_i} . Esto significa que el morfismo

$$\widetilde{\mathbf{Pic}}_k(X_A) \longrightarrow \prod_i \widetilde{\mathbf{Pic}}_k(X_{A_i})$$

no es inyectivo, pues $\pi^*\mathcal{L}$ está en su núcleo, y por tanto el funtor absoluto de Picard no puede ser haz. Por ello, emplearemos como definición el espacio asociado a este pre-espacio.

DEFINICIÓN. Dado un esquema X , su funtor (relativo) de Picard es el definido por

$$\mathbf{Pic}_k(X)(A) = \mathbf{Pic}_k(X \times \text{Spec } A) / \pi^* \mathbf{Pic}_k(\text{Spec } A)$$

donde $X \times \text{Spec } A \xrightarrow{\pi} \text{Spec } A$ es la segunda proyección desde el producto.

Llamaremos **espacio de Picard** a este funtor. Hemos visto ya que los espacios se pueden entender equivalentemente como funtores sobre las k -álgebras (es decir, los esquemas afines) o sobre los k -esquemas. En este espíritu, podemos definir alternativamente el espacio de Picard de X como aquel cuyos puntos sobre cada k -esquema S son

$$\mathbf{Pic}_k(X)(S) = \mathbf{Pic}_k(X \times S) / \pi^* \mathbf{Pic}_k(S)$$

donde de nuevo $X_S = X \times S \xrightarrow{\pi} S$ es la segunda proyección.

Todo funtor en grupos $\mathbf{F}$, como el de Picard, tiene asociado un funtor punteado sobre la categoría de esquemas punteados. Lo denotaremos por $\mathbf{F}^0$ y, por el lema de Yoneda, su valor sobre cada pareja (S, s_0) donde S es un k -esquema y $s_0 \in S$ es:

$$\mathbf{F}^0(S, s_0) = \text{Hom}_0((S, s_0), (\mathbf{F}, 0)) = \{S \xrightarrow{\phi} \mathbf{F} / \phi(s_0) = 0\}$$

es decir, este conjunto está formado por los morfismos de funtores que asocian al punto base de cada esquema el elemento neutro de $\mathbf{F}$.

En particular, denotaremos por $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ al funtor punteado asociado al de Picard. Inmediatamente podemos afirmar que $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ será representable si lo es $\mathbf{Pic}_k(X)$. En tal caso, $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ es la componente conexa y reducida del elemento neutro de $\mathbf{Pic}_k(X)$. Ahondaremos más en las propiedades y la representabilidad de esta componente del espacio de Picard en la parte final de la memoria.

Además de ser un funtor cada $\mathbf{Pic}_k(X)$, lo es también la asignación $X \rightsquigarrow \mathbf{Pic}_k(X)$. Es inmediato que todo morfismo de k -esquemas $X \xrightarrow{f} Y$ da lugar a otro $X \times S \xrightarrow{f \times \text{Id}} Y \times S$ para cualquier S , y por tanto induce mediante la imagen inversa de haces una correspondencia de conjuntos de los haces de línea en $Y \times S$ en los de $X \times S$. Esto define un morfismo de espacios

$$\mathbf{Pic}_k(Y) \xrightarrow{f^*} \mathbf{Pic}_k(X)$$

por lo que la asignación $X \rightsquigarrow \mathbf{Pic}_k(X)$ es funtorial y contravariante. De idéntica manera, se comprueba que todo morfismo de esquemas induce también un morfismo (en sentido contrario) entre sus $\mathbf{Pic}_k^0$.

2.3.1. Funtor de divisores

El grupo de Picard clásico guarda una estrecha relación con los divisores del esquema correspondiente. Lo mismo ocurrirá en la versión funtorial, por lo que es necesario dar unas nociones básicas al respecto.

Sea X un esquema. Recordemos que un divisor efectivo de Cartier en él es un subesquema cerrado $D \subset X$ cuyo haz de ideales asociado $\mathcal{I}_D \subset \mathcal{O}_X$ es de línea, es decir, invertible como $\mathcal{O}_X$ -módulo. Se sabe además que un cerrado $D \subset X$ es divisor efectivo de Cartier si y solo si para cada punto $x \in D$ existe un abierto afín $U \subset X$ tal que $D \cap U = (f)_0$, es decir, D está definido localmente como los ceros de una función no divisora de 0.

DEFINICIÓN. Dado un esquema X , su funtor de divisores de Cartier se define por

$$\mathbf{Div}_k(X)(A) = \{\text{Divisores efectivos de Cartier } D_A \subset X \times \text{Spec } A \text{ planos sobre } \text{Spec } A\}$$

Este funtor es un espacio, y de hecho un subespacio del de Hilbert con la correspondencia obvia que interpreta cada divisor como subesquema cerrado.

$$\mathbf{Div}_k(X) \hookrightarrow \mathbf{Hilb}_{X/k}$$

Estudiaremos la representabilidad del espacio de divisores empleando esto.

Teorema 47. Si X es un k -esquema proyectivo, el espacio de divisores $\mathbf{Div}_k(X)$ es representable por un esquema $\text{Div}_k(X)$, que es abierto del representante del espacio $\mathbf{Hilb}_{X/k}$.

Demostración. Sabemos que $D \subset X_A$ es un divisor efectivo de Cartier si y solo si su haz de ideales $\mathcal{I}_D$ es plano y no nulo en cada punto como haz de $\mathcal{O}_{X_A}$ -módulos. Si $X_A \xrightarrow{\pi} \mathbf{Spec } A$ es la proyección natural y $U \subset X_A$ el abierto en que $\mathcal{I}_D$ es plano y no nulo, se tiene que $V = \mathbf{Spec } A - \pi(X_A - U)$ corresponde con el subespacio de $\mathbf{Spec } A$ donde $\mathcal{I}_D$ es plano en fibras. Además, V es abierto, pues $\pi(X_A - U)$ es cerrado por ser π morfismo proyectivo (luego cerrado), y por su construcción es inmediato que coincide el esquema que representa a $\mathbf{Div}_k(X)$. $\square$

2.3.2. Representabilidad del Pic en esquemas proyectivos

Sea X un k -esquema. Se tiene un morfismo natural de espacios que asigna a cada divisor efectivo de Cartier el haz de ideales correspondiente, que será de línea.

$$\mathbf{Div}_k(X) \xrightarrow{\pi} \mathbf{Pic}_k(X)$$

$$D \subset X_A \longmapsto \mathcal{O}_{X_A}(D)$$

Calcularemos en primer lugar las fibras de este morfismo.

DEFINICIÓN. Sea X un esquema proyectivo, A una k -álgebra y $\mathcal{L}_A$ un haz de línea en X_A . La serie lineal completa asociada a $\mathcal{L}_A$ es el subespacio $[\mathcal{L}_A] \subset \mathbf{Div}_k(X)(A)$ formado por los divisores $D_A \subset X_A$ planos sobre A verificando que $\mathcal{O}_{X_A}(-D_A) \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \mathcal{L}_A$ es localmente

trivial sobre A . Esto es, si $p_{\mathcal{L}_A} \in \mathbf{Pic}_k(X)(A)$ es el punto correspondiente al haz $\mathcal{L}_A$, entonces $[\mathcal{L}_A] = \pi^{-1}(p_{\mathcal{L}_A})$.

Recordemos que un esquema geoméricamente íntegro es aquel que se mantiene íntegro para todo cambio de cuerpo base $k \rightarrow K$.

Lema 48. Si X es un esquema proyectivo geoméricamente íntegro y $\mathcal{L}_A$ un haz de línea en X_A tal que $H^0(X_A, \mathcal{L}_A)$ es plano sobre A y cambia de base, entonces la serie lineal completa $[\mathcal{L}_A]$ es un espacio, y podemos identificarla con la proyectivización de las secciones globales de $\mathcal{L}_A$.

$$[\mathcal{L}_A] \simeq \mathbb{P}_A(H^0(X_A, \mathcal{L}_A)) = \mathbf{P}_A(H^0(X_A, \mathcal{L}_A)^*)$$

Demostración. Como X es geoméricamente íntegro, todo morfismo de haces de línea debe ser inyectivo o nulo. Sabemos que $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ es una k -álgebra finita y geoméricamente íntegra, por lo que debe ser $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$. Por ello, $H^0(X_A, \mathcal{O}_{X_A}) = A$ y todo haz de línea $\overline{\mathcal{L}}_A$ localmente trivial sobre A cumple que $\mathcal{N} = H^0(X, \overline{\mathcal{L}}_A)$ es A -módulo de línea. Consideremos un divisor D_A tal que $\overline{\mathcal{L}}_A := \mathcal{O}_{X_A}(-D_A) \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \mathcal{L}_A$ es localmente trivial sobre A . Tomemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A}(-D_A) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_A} \longrightarrow 0$$

Al tensorializarla por $\mathcal{L}_A$, obtenemos un subhaz de línea $\overline{\mathcal{L}}_A \hookrightarrow \mathcal{L}_A$ para cada cambio de base, y esto define un punto de $\mathbb{P}_A(H^0(X_A, \mathcal{L}_A)) = \mathbf{P}_A(H^0(X_A, \mathcal{L}_A)^*)$. Para la correspondencia contraria, basta considerar que todo subfibrado de línea $\mathcal{N} \hookrightarrow H^0(X_A, \mathcal{L}_A)$ da lugar a un subhaz de línea $\mathcal{N} \otimes_A \mathcal{L}_A \hookrightarrow \mathcal{L}_A$ para cualquier cambio de base, por lo que es soporte de su conúcleo es un divisor plano sobre A . Se comprueba sin dificultad que estas asignaciones son inversas.

Teorema 49. Si X es proyectivo y geoméricamente íntegro, el espacio de Picard $\mathbf{Pic}_k(X)$ es representable por un esquema $\mathbf{Pic}_k(X)$ que es localmente de tipo finito.

Si X es además liso, las componentes conexas de $\mathbf{Pic}_k(X)$ son propias.

Demostración. Sea $U \subset \mathbf{Pic}_k(X)$ el subespacio (no vacío) formado por los haces de línea acíclicos y efectivos, que es un abierto por el corolario 36. Llamemos $U(-n)$ al abierto isomorfo a U de los haces de línea $\mathcal{L}$ con $\mathcal{L}(n) \in U$, con lo que $U(-n) = U + \mathcal{O}_X(n)$.

Tenemos entonces el recubrimiento

$$\mathbf{Pic}_k(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U(-n)$$

Con esto, la representabilidad de $\mathbf{Pic}_k(X)$ se reduce a la de U . Sea $\mathbf{Div}_k \xrightarrow{\pi} \mathbf{Pic}_k(X)$ el morfismo definido anteriormente y denotemos $\bar{U} = \pi^{-1}(U) \subset \mathbf{Div}_k(X)$. Si $p \in U(A)$ y $\mathcal{L}_A$ es el haz de línea acíclico y efectivo asociado en X_A , se tiene que $H^0(X_A, \mathcal{L}_A)$ es un A -módulo localmente libre y cambia de base, de nuevo aplicando el corolario 36. Por el lema 48, tenemos que

$$\pi^{-1}(p) = \mathbb{P}_A(H^0(X_A, \mathcal{L}_A)) \hookrightarrow \mathbf{Div}_A(X_A)$$

De aquí se concluye que $\pi^{-1}(p)$ es subvariedad proyectiva no vacía de $\mathbf{Div}_A(X_A)$. Además, el morfismo $\bar{U} \xrightarrow{\pi} U$ es epimorfismo de espacios, y define una relación de equivalencia $\sim$ en $\bar{U}$ de forma que la clase de cada punto es un esquema proyectivo y plano sobre la base. Veamos que esto implica que el espacio cociente $\bar{U} / \sim = U$ es un esquema localmente de tipo finito: como $\bar{U} \subset \mathbb{P}_k^n$ es un esquema cuasi-proyectivo, podemos considerar el morfismo $\bar{U} \xrightarrow{f} \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}_k^n/k}$ que asigna a cada punto su clase de equivalencia $[x] \subset \bar{U}_A \subset \mathbb{P}_A^n$ (que es un cerrado). Tomando $\text{Im } f \subset \mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}_k^n/k}$, el teorema de factorización asegura que $U = \bar{U} / \sim = \text{Im } f$, que es un esquema localmente de tipo finito, con lo que hemos terminado.

La representabilidad de $\mathbf{Pic}_k(X)$ implica inmediatamente la de su componente conexa $\mathbf{Pic}_k^0(X)$. Veamos ahora que si X es liso, el esquema $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ es propio, usando de nuevo el criterio valorativo de propiedad. Sea $\mathcal{O}_v$ un anillo de valoración de cuerpo de fracciones Σ cuyo cuerpo residual es $K = \mathcal{O}_v / \mathfrak{m}$. Si $\mathcal{L}^\Sigma$ es un haz de línea sobre $X_\Sigma = X \times \mathbf{Spec} \Sigma$, podemos suponer que es efectivo tensorializando por $\mathcal{O}_X(n)$ para $n \gg 0$. Sea ahora un divisor de Cartier $D^\Sigma \subset X_\Sigma$ tal que $\mathcal{L}^\Sigma = \mathcal{O}(D^\Sigma)$, y sea D su cierre en $X \times \mathbf{Spec} \mathcal{O}_v$. Se tiene entonces que D es hipersuperficie, y por tanto divisor de Cartier por ser X liso. Además, $\mathcal{O}(D)_\Sigma = \mathcal{O}(D^\Sigma) = \mathcal{L}^\Sigma$, y la unicidad viene garantizada por ser $\mathcal{O}_v$ un dominio de factorización única.

Teorema 50 (generalización al caso no íntegro). Si X es proyectivo, $\mathbf{Pic}_k(X)$ es representable por un esquema localmente de tipo finito.

Demostración. Reduciremos el problema primero al caso en que X es un esquema reducido. Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}_X$ el haz radical de ideales, y llamemos $X_n = (\mathcal{R}^{n+1})_0$. Se tiene que $X_0 = X_{\text{red}}$ y $X_m = X$ para m suficientemente grande. Dado $0 < i \leq n$, contamos

con la inmersión cerrada $X^{(i-1)} \xrightarrow{\rho_i} X^{(i)}$ definida por cierto haz de ideales $\mathcal{J}$ en X_i que verifica $\mathcal{J}^2 = 0$. Veamos que el morfismo de restricción inducido en los espacios de Picard $\mathbf{Pic}_k(X^{(i)}) \xrightarrow{\rho_i^*} \mathbf{Pic}_k(X^{(i-1)})$ es un fibrado afín, es decir, la fibra de cada punto es un esquema afín. Para ello, sea $\mathcal{L}$ un haz de línea en $X_A^{(i-1)}$. Si la fibra de $[\mathcal{L}]$ es vacía, hemos terminado. En caso contrario, podemos tomar un haz de línea $\overline{\mathcal{L}}$ en $X_A^{(i)}$ que restringe en $\mathcal{L}$. Se tiene entonces que el conjunto de haces de línea que restringen en $\mathcal{L}$ se puede identificar, restando $\overline{\mathcal{L}}$, con el de haces de línea de $X_A^{(i)}$ que restringen en el haz de línea trivial sobre $X_A^{(i-1)}$. Consideremos la sucesión exacta de haces en grupos multiplicativos:

$$0 \longrightarrow 1 + \mathcal{J}_A \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A^{(i)}}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_{X_A^{(i-1)}}^\times \longrightarrow 0$$

Como $H^1(X, \mathcal{O}_{X_A^{(i)}}^\times) = \text{Pic}(X_A^{(i)})$ y $1 + \mathcal{J} \simeq \mathcal{J}$ (considerando el primero como grupo con el producto y el segundo con la suma), el conjunto de haces de línea en $X_A^{(i)}$ que restringen en el trivial sobre $X_A^{(i-1)}$ se puede identificar con el A -módulo $H^1(X_A, \mathcal{J}_A) = H^1(X, \mathcal{J}) \otimes_k A$. Por tanto, estos corresponden con los puntos con valores en A del espacio vectorial $H^1(X, \mathcal{J})$. Veamos por otra parte que $\text{Im } \rho_i^*$ es subesquema de $\mathbf{Pic}_k(X^{(i-1)})$: todo haz de línea $\mathcal{L}_{i-1}$ en $X_A^{(i-1)}$ extiende a $X_A^{(i)}$ si y solo si el 2-ciclo que define en $H^2(X_A^{(i-1)}, \mathcal{J}_A) = H^2(X^{(i-1)}, \mathcal{J}) \otimes_k A$ es nulo, por lo que el lugar geométrico de los puntos de $\mathbf{Spec } A$ en que la fibra de $\mathcal{L}_A$ extiende es igual a los ceros de dicho 2-ciclo (por tanto un cerrado). De aquí se obtiene que la representabilidad de $\mathbf{Pic}_k(X^{(i-1)})$ implica la de $\mathbf{Pic}_k(X^{(i)})$, y por recurrencia podemos concluir y asumir que X es reducido.

Finalizaremos reduciendo de nuevo al caso íntegro, lo que nos otorga el resultado buscado aplicando el teorema anterior. De nuevo por recurrencia, será suficiente probar que si $X = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 cerrados de X sin componentes irreducibles comunes, y $\mathbf{Pic}_k(X_1), \mathbf{Pic}_k(X_2)$ son representables, entonces lo será $\mathbf{Pic}_k(X)$. Para ello, llamemos $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ a los haces de ideales que definen X_1 y X_2 , respectivamente, con lo que $(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})_0 = X$. De eso se obtiene que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ es nilpotente, y con un procedimiento análogo al de la parte anterior, esto se reduce al caso en que $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = 0$. Con esta hipótesis, se comprueba inmediatamente que el morfismo inducido $\mathbf{Pic}_k(X) \rightarrow \mathbf{Pic}_k(X_1) \times \mathbf{Pic}_k(X_2)$ es inyectivo, y su imagen está formada por las parejas de haces de línea que coinciden sobre $X_1 \cap X_2$. Por recurrencia sobre la dimensión de X , podemos asumir que $\mathbf{Pic}_k(X_1 \cap X_2)$ es representable, con lo que $\mathbf{Pic}_k(X)$ también lo será y hemos terminado.

Teorema 51. Si X es un esquema, el espacio tangente a $\mathbf{Pic}_k(X)$ en $[\mathcal{O}_X] = 0$ es

$$T_0(\mathbf{Pic}_k(X)) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

2.3.3. Estudio del Pic y Pic^0 en variedades

Analizaremos ahora el funtor de Picard en el caso de variedades, es decir, esquemas conexos e íntegros. Todos los esquemas que aparezcan en esta sección serán considerados, además, noetherianos localmente de tipo finito, y el cuerpo base k será algebraicamente cerrado.

Emplearemos en lo que sigue la definición del espacio de Picard aplicado en k -esquemas:

$$\mathbf{Pic}_k(X)(S) = \text{Pic}_k(X \times S) / \pi^* \text{Pic}_k(S)$$

Para comenzar, usando la proposición a continuación, daremos otra caracterización de este en el caso restringido a variedades.

Proposición 52 (Rosenlicht). Si X es una variedad, $H^0(X, \mathcal{O}_X)^\times / k^\times$ es un grupo finito generado. Además, si S también es variedad, se cumple

$$H^0(X \times S, \mathcal{O}_{X \times S})^\times = H^0(X, \mathcal{O}_X)^\times \otimes_k H^0(S, \mathcal{O}_S)^\times$$

Supongamos en adelante que X y S son variedades, y llamemos $X \times S \xrightarrow{\pi} S$ al morfismo natural. Se dice que un haz $\mathcal{L}$ en $X \times S$ es trivial sobre S si existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}$ de S tal que $\mathcal{L}|_{X \times U_i} = \mathcal{O}_{X \times U_i}$ para todo i .

Teorema 53. Todo haz invertible $\mathcal{L}$ en $X \times S$ es trivial localmente sobre S si y solo si $\mathcal{L} = \pi^* \bar{\mathcal{L}}$ para cierto haz de línea $\bar{\mathcal{L}}$ en S . Por tanto,

$$\mathbf{Pic}_k(X)(S) = \text{Pic}_k(X \times S) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por: $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$ si y solo si hay un recubrimiento de abiertos $\{U_i\}$ de S tal que $\mathcal{L}|_{X \times U_i} \simeq \mathcal{L}'|_{X \times U_i}$ para todo i .

Demostración. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento abierto de S que trivializa $\mathcal{L}$, s_0 un punto racional de $\bigcap U_i$ y $\mathcal{L}|_{X \times s_0} \xrightarrow[\sim]{\phi_{s_0}} \mathcal{O}_X$ un isomorfismo que fijaremos. Para cada índice i , sea $\mathcal{L}|_{X \times U_i} \xrightarrow[\sim]{\phi_i} \mathcal{O}_{X \times U_i}$ un isomorfismo cuya restricción a $X \times \{s_0\}$ es ϕ_{s_0} , que es único salvo invertibles en $X \times S$ triviales sobre $X \times \{s_0\}$. Por la proposición anterior, estos son equivalentes a invertibles en S triviales en s_0 , por lo que ϕ_i y ϕ_j difieren en $U_i \cap U_j$ en un invertible f_{ij} . Como $\{f_{ij}\}_{ij}$ es un 1-ciclo, define un haz de línea $\bar{\mathcal{L}}$ en S que verifica $\pi^* \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$.

Lema 54. Sea $\mathcal{L}$ un haz de línea en $X \times S$, $x \in X$, $s \in S$ puntos racionales y fijemos un isomorfismo $\mathcal{L}_{(x,s)} \simeq k$. Si existen haces de línea $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ en X y S , respectivamente, tales que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_k \mathcal{L}_2$, entonces se cumple:

1. $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}|_{\{x\} \times S} := \overline{\mathcal{L}}_1$ y $\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{L}|_{X \times \{s\}} := \overline{\mathcal{L}}_2$.
2. Existe un único isomorfismo $\mathcal{L} \simeq \overline{\mathcal{L}}_1 \otimes_k \overline{\mathcal{L}}_2$ que sea la identidad al restringirlo a $X \times \{s\}$ y $\{x\} \times S$.

Teorema 55. Si X es variedad lisa y $U \xrightarrow{i} X$ una inmersión abierta, el morfismo inducido

$$\mathbf{Pic}_k^0(X) \xrightarrow{i^*} \mathbf{Pic}_k^0(U)$$

es isomorfismo sobre los esquemas lisos punteados. Esto significa que, para toda pareja (S, s_0) donde S es un esquema liso y $s_0 \in S(k)$, la aplicación natural de conjuntos

$$\mathrm{Hom}_0((S, s_0), \mathbf{Pic}_k^0(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_0((S, s_0), \mathbf{Pic}_k^0(U))$$

es biyectiva.

Demostración. Probaremos que para cada esquema liso punteado (S, s_0) y haz de línea $\mathcal{L}$ en $U \times S$ trivial sobre $\{s_0\} \times U$ (y sobre $\{x_0\} \times S$ para cualquier punto racional prefijado $x_0 \in U(k)$), $\mathcal{L}$ extiende de forma única a un haz de línea en $X \times S$ trivial sobre $X \times \{s_0\}$. Consideremos un divisor en $U \times S$ asociado a $\mathcal{L}$ y el haz de línea en $X \times S$ asociado a su cierre, que denotaremos $\overline{\mathcal{L}}$. Se tiene que $\overline{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times S}} (\mathcal{O}_S \otimes_k \overline{\mathcal{L}}^{-1}|_{X \times s_0})$ es una extensión de $\mathcal{L}$. Para comprobar su unicidad, basta tener en cuenta que dos extensiones difieren en un haz de línea trivial en $U \times S$, que estará asociado a un divisor contenido en $(X - U) \times S$, por lo que es la imagen inversa de un haz de línea en X . Este último debe ser trivial por serlo los dos haces de línea sobre $X \times \{s_0\}$.

Recordemos que, sobre cuerpos algebraicamente cerrados, las variedades abelianas son los esquemas en grupos propios, conexos y reducidos. Se sabe que todas las variedades abelianas son también lisas. Además, se dice que $\overline{X}$ es un modelo del esquema X si estos esquemas tienen sendos abiertos densos isomorfos entre sí.

Teorema 56. Si X es una variedad lisa con un modelo liso y propio, $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ es representable por una variedad abeliana.

Demostración. Sea $\overline{X}$ un modelo liso y propio de X , y tomemos abiertos $U \subset X, \overline{U} \subset \overline{X}$ con $U \simeq \overline{U}$. Empleando el teorema 55, obtenemos que

$$\mathbf{Pic}_k^0(X) = \mathbf{Pic}_k^0(U) \simeq \mathbf{Pic}_k^0(\overline{U}) = \mathbf{Pic}_k^0(\overline{X})$$

Como $\mathbf{Pic}_k(\overline{X})$ es representable por un esquema propio, su componente conexa $\mathbf{Pic}_k^0(\overline{X})$ será representable por una variedad abeliana.

Observación. En particular, si X es una variedad lisa y el cuerpo base tiene característica 0, entonces $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ es representable por una variedad abeliana. Esto se deduce a partir del teorema anterior y la desingularización de Hironaka en característica 0 aplicada a cualquier modelo normal de X .

Observación. De este teorema se obtiene también que si C es una curva lisa, su espacio de Picard es $\mathbf{Pic}_k^0(C) = J_{\overline{C}}$, la variedad jacobiana de la completación de C .

Lema 57. Si X es una variedad y $U \subset X$ un abierto cuyo cerrado complementario es de profundidad mayor o igual a 2, el morfismo de restricción entre los grupos de Picard

$$\mathbf{Pic}_k(X) \xrightarrow{i^*} \mathbf{Pic}_k(U)$$

es inyectivo.

Demostración. Sea $Y = X - U$ y tomemos un haz de línea $\mathcal{L}$ con $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$. Como la profundidad de Y es mayor o igual que 2, las secciones en su abierto complementario provienen de secciones globales, es decir, el morfismo $H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(U, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_X(U)$ es epiyectivo. De esto obtenemos que existe $l \in H^0(X, \mathcal{L})$ que genera $\mathcal{L}$ en U . Como los ceros de l dan lugar a un divisor contenido en Y , este debe ser vacío, por lo que l define el isomorfismo $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}$ y el núcleo de i^* es trivial.

Lema 58. Sea $X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n, f^{-1}]$ con $f \in k[x_1, \dots, x_n]$. El espacio de Picard de X es nulo sobre variedades normales, es decir,

$$\mathbf{Pic}_k(X) = 0$$

como funtores aplicados en la categoría de variedades normales.

Demostración. Probaremos que, si S es una variedad normal, el morfismo inducido

por la proyección natural $X \times S \xrightarrow{\pi} S$

$$\mathrm{Pic}_k(S) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}_k(X \times S)$$

es isomorfismo, y de ello se concluye inmediatamente la trivialidad de $\mathbf{Pic}_k(X)$. Sea $x_0 \in X$ un punto racional, y definamos el morfismo

$$\begin{aligned} S &\xrightarrow{i} X \times S \\ s &\longmapsto (x_0, s) \end{aligned}$$

La composición $i^* \circ \pi^*$ es la identidad en $\mathrm{Pic}_k(X \times S)$, por lo que π^* es inyectivo e i^* epiyectivo. Basta probar que π^* es epiyectivo o, equivalentemente, que i^* es inyectivo. Tengamos en mente que en las variedades normales, es decir, las íntegramente cerradas, el cerrado de puntos singulares es de profundidad mayor o igual que 2. Por ello, las secciones globales en el abierto de puntos lisos proceden de secciones del espacio total. Además, por el lema 57, podemos sustituir S por su abierto de puntos lisos y suponer que es liso. Tomemos un haz de línea $\mathcal{L}$ en $X \times S$. Usando el teorema 53, solo es necesario demostrar que $\mathcal{L}$ es localmente trivial sobre S , así que podemos suponer que este esquema es afín, $S = \mathrm{Spec} B$. Dado un punto $p \in S$, probaremos que hay un entorno U_p de p tal que $\mathcal{L}$ es trivial en $X \times U_p$. El anillo local en este punto, B_p , es un dominio de factorización única por ser S liso. Aplicando el lema de Gauss, obtenemos que $B_p \otimes_k A$ también es de factorización única, con $A = k[x_1, \dots, x_n, f^{-1}]$. De esto se obtiene que todo $B_p \otimes_k A$ -módulo de línea es trivial, por lo que $B_p \otimes_B \mathcal{L} \simeq B_p \otimes_k A$ y debe existir un morfismo $B \otimes_k A \xrightarrow{\phi} \mathcal{L}$ que es isomorfismo localizando en p . Si $\mathcal{N} = \mathcal{L} / \mathrm{Im} \phi$, por ser $\mathcal{N} \otimes_B B_p = 0$ y $\mathcal{N}$ un $B \otimes_k A$ -módulo finito generado, existirá un elemento $s \in B - \mathfrak{m}_p$ con $\mathcal{N}_s = 0$, lo que concluye que $\mathcal{L}$ es trivial en $U_p = \mathrm{Spec} B - (s)_0$, que será el abierto buscado.

Teorema 59. Sea X una variedad normal y racional. Entonces, el funtor $\mathbf{Pic}(X)$ sobre la categoría de variedades normales es representable por un esquema en grupos discreto y finito generado, y $\mathbf{Pic}^0(X) = 0$.

Demostración. Si $U \subset X$ es el abierto de puntos lisos de la variedad, aplicando de nuevo el lema 57 podemos sustituir X por U y asumir que X es liso. Sea $V \subset X$ un abierto afín isomorfo a uno de $\mathbb{A}_n$, y descompongamos su complementario en divisores: $X - V = D_1 \cup \dots \cup D_r$. De aquí se obtiene la siguiente sucesión exacta de funtores en

grupos sobre esquemas normales:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} &\xrightarrow{\phi} \mathrm{Pic}_k(X \times S) \longrightarrow \mathrm{Pic}_k(V \times S) \longrightarrow 0 \\ (n_1, \dots, n_r) &\longmapsto \mathcal{O}(n_1 \cdot D_1 \times S + \dots + n_r \cdot D_r \times S) \end{aligned}$$

Utilizando que $\mathbf{Pic}_k(V) = 0$, de aquí podemos concluir lo que se pide.

Observación. Una de las situaciones más frecuentes que cumple estas hipótesis es en la que X es un grupo algebraico afín, liso y conexo, pues todo grupo de este tipo es isomorfo a un abierto del espacio afín $\mathbb{A}_n$.

El siguiente resultado que demostraremos supone una generalización del teorema con el mismo nombre en Geometría Algebraica clásica, que se puede encontrar en la referencia [11].

Teorema del cubo. Sean X, Y variedades normales tales que $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ o $\mathbf{Pic}_k^0(Y)$ es representable. Entonces, los siguientes funtores coinciden:

$$\mathbf{Pic}_k^0(X \times Y) = \mathbf{Pic}_k^0(X) \times \mathbf{Pic}_k^0(Y)$$

En particular, si $C_1, \dots, C_r$ son curvas lisas,

$$\mathbf{Pic}^0(C_1 \times \dots \times C_r) = J_{C_1} \times \dots \times J_{C_r}$$

Demostración. Si, por ejemplo, $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ es representable, solo tenemos que comprobar que el morfismo de proyección $\mathbf{Pic}_k^0(X \times Y) \rightarrow \mathbf{Pic}_k^0(X) \times \mathbf{Pic}_k^0(Y)$ es inyectivo. Aplicando el lema 57 a $X \times Y$ y a Y , podemos suponer que Y es cuasi-completo sustituyéndolo por la parte lisa de algún modelo cuasi-completo y normal (recordemos que si un esquema es cuasi-completo, las secciones globales de su haz de estructura son las constantes). Con esto, un morfismo punteado $S \rightarrow \mathbf{Pic}_k^0(X \times Y)$ es equivalente a un haz de línea en $X \times Y \times S$ trivial sobre los ejes, y por tanto a un morfismo punteado $Y \times S \rightarrow \mathbf{Pic}_k^0(X)$. Como Y es cuasi-completo, por el lema de rigidez este morfismo factorizará a través de otro $S \rightarrow \mathbf{Pic}_k^0(X)$, que es trivial por coincidir a la restricción del anterior a $\{y_0\} \times S$. Con esto hemos terminado.

Podemos interpretar este teorema de otra manera equivalente: si X, Y, S son variedades punteadas íntegras y normales con $\mathbf{Pic}_k^0(X)$ representable y $\mathcal{L}$ es un haz de línea trivial sobre $x_0 \times Y \times S, X \times y_0 \times S$ y $X \times Y \times s_0$, entonces $\mathcal{L}$ debe ser trivial. Esto tiene como consecuencia la proposición siguiente:

Proposición 60. Dadas tres variedades punteadas $(X_1, x_1), (X_2, x_2), (X_3, x_3)$ con $\mathbf{Pic}_k^0(X_i)$ representable para algún i , se cumple:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_0(X_1 \times X_2, \mathbf{Pic}_k^0(X_3)) &= \mathrm{Hom}_0(X_1, \mathbf{Pic}_k^0(X_3)) \times \mathrm{Hom}_0(X_2, \mathbf{Pic}_k^0(X_3)) \\ \varphi &\longmapsto (\varphi|_{X_1 \times x_2}, \varphi|_{x_1 \times X_2}) \end{aligned}$$

Esto significa que todo morfismo punteado $X_1 \times X_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbf{Pic}_k^0(X_3)$ se puede escribir de forma única como suma de morfismos punteados, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, con $X_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbf{Pic}_k^0(X_3)$ para $i = 1, 2$.

Demostración. Solo es necesario probar que la correspondencia que hemos definido es inyectiva. Esto es equivalente a afirmar que, dado un haz de línea en $X_1 \times X_2 \times X_3$ trivial sobre $X_1 \times X_2 \times \{x_3\}$, $X_1 \times \{x_2\} \times X_3$ y $\{x_1\} \times X_2 \times X_3$, entonces debe ser trivial, pero esto viene garantizado por el teorema anterior y su interpretación posterior.

Lema 61. Sea $\overline{X} \xrightarrow{\pi} X$ un morfismo finito entre variedades lisas y $\mathbf{Pic}_k(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{Pic}_k(\overline{X})$ el morfismo inducido en los espacios de Picard. Se cumplen:

1. $\ker \pi^*$ es representable por un esquema finito.
2. $\mathrm{Im} \pi^*$ es un subfunctor cerrado de $\mathbf{Pic}_k(\overline{X})$.

Demostración. Sea $\Sigma_X \xrightarrow{\pi^*} \Sigma_{\overline{X}}$ la extensión inducida entre los cuerpos de fracciones, y $\overline{K}$ su cierre normal. Podemos sustituir $\overline{X}$ por su cierre normal en $\overline{K}$ y suponer que esta extensión es normal, es decir, que se autorracionaliza. Sabemos que este tipo de extensiones son composición de una puramente inseparable y una de Galois. Sea K la parte puramente inseparable de la extensión y Z la parte lisa del cierre normal de X en K . Si ahora sustituimos $\overline{X}$ por la parte lisa del cierre normal de Z en $\Sigma_{\overline{X}}$, tenemos morfismos $\overline{X} \rightarrow Z \rightarrow X$. El primero es de Galois y el segundo es puramente inseparable, por lo que hemos reducido el teorema a probar el enunciado en cada uno de los dos casos.

Si π es una extensión de Galois de grupo G , el teorema de Galois asegura que podemos identificar $\mathbf{Pic}_k(X)$ con los G -haces de línea en $\overline{X}$, y a su vez estos con los haces de línea G -invariantes con estructura de G -haz. Así, $\mathrm{Im} \pi^*$ se puede identificar con un cerrado de $\mathbf{Pic}_k(\overline{X})$, el formado por los haces de línea G -invariantes. Además, $\ker \pi^*$ corresponde con el conjunto de posibles G -estructuras en el haz trivial $\mathcal{O}_{\overline{X}}$. A su

vez, si suponemos $\bar{X}$ cuasi-completo (tomando cualquier modelo cuasi-completo), toda estructura de G -haz induce una de G -módulo en $H^0(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = k$, es decir, un carácter de G (y recíprocamente). Por ello, podemos identificar $\ker \pi^*$ con el conjunto de caracteres de G , con lo que terminamos.

Probemos para terminar el caso en que π es una extensión puramente inseparable, que por tanto será composición de extensiones de grado p con $p = \text{char } k > 0$. Por ello, podemos suponer que $\text{gr } \Sigma_X(\Sigma_{\bar{X}}) = p$, con lo que $\Sigma_{\bar{X}} = \Sigma_X[\sqrt[p]{a}]$ para cierto $a \in \Sigma_X$ y $\Sigma_{\bar{X}}$ será una extensión de Galois inseparable de Σ_X de grupo μ_p . Con esto, concluimos de manera análoga al caso anterior.

Teorema 62. Sea $\bar{X} \dashrightarrow X$ una transformación racional entre variedades lisas y

$$\mathbf{Pic}_k(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{Pic}_k(\bar{X})$$

el morfismo inducido en los espacios de Picard. Se cumplen:

1. $\ker \pi^*$ es representable por un esquema finito.
2. $\text{Im } \pi^*$ es un subfunctor cerrado de $\mathbf{Pic}_k(\bar{X})$.

Demostración. Aplicando el lema de Noether, sabemos que cualquier extensión de tipo finito $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$ es composición de una extensión trascendente y una finita, $\Sigma \hookrightarrow \Sigma(x_1, \dots, x_r) \hookrightarrow \bar{\Sigma}$. El esquema $X \times \mathbb{A}_r$ es un modelo birracional en $\Sigma(x_1, \dots, x_r)$, por lo que contamos con las transformaciones racionales

$$\bar{X} \dashrightarrow X \times \mathbb{A}_r \dashrightarrow X$$

De aquí obtenemos los morfismos

$$\mathbf{Pic}^0(X) \xrightarrow{\pi_1^*} \mathbf{Pic}_k^0(X \times \mathbb{A}_r) \xrightarrow{\bar{\pi}^*} \mathbf{Pic}_k^0(\bar{X})$$

y podemos concluir empleando el lema previo.

Corolario 63. Si G es un grupo algebraico liso y conexo, $\mathbf{Pic}^0(G)$ es representable por una variedad abeliana.

Demostración. Consideremos un conjunto de curvas lisas $C_i \hookrightarrow G$ que pasen por el origen y verifiquen que el morfismo producto $C_1 \times \dots \times C_n \xrightarrow{m} G$ es racional (lo

cual ocurre si y solo si la imagen es de la misma dimensión de G). Si tomamos el morfismo m^* inducido en los respectivos $\mathbf{Pic}_k^0$, por el lema anterior sabemos que $\ker m^*$ es representable y $\mathrm{Im} m^* \subset \mathbf{Pic}_k^0(C_1 \times \cdots \times C_n) = J_{\overline{C}_1} \times \cdots \times J_{\overline{C}_n}$ es un cerrado, por lo que será representable también. Por tanto, de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker m^* \longrightarrow \mathbf{Pic}_k^0(G) \longrightarrow \mathrm{Im} m^* \longrightarrow 0$$

y la representabilidad de $\ker m^*$ e $\mathrm{Im} m^*$ obtenemos sin mayor dificultad la de $\mathbf{Pic}_k^0(G)$.

Corolario 64. Si G es un grupo algebraico liso y conexo y X una variedad normal, cualquier morfismo punteado

$$G \xrightarrow{\phi} \mathbf{Pic}_k^0(X)$$

es morfismo de funtores en grupos.

Demostración. Construyamos el morfismo

$$\begin{aligned} G \times G &\xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathbf{Pic}_k^0(X) \\ (g, \bar{g}) &\longmapsto \phi(g \bar{g}) \end{aligned}$$

Por la proposición 60, sabemos que se puede escribir como $\phi(g \bar{g}) = \tilde{\phi}(g, \bar{g}) = \tilde{\phi}(g, 1) + \tilde{\phi}(1, \bar{g}) = \phi(g) + \phi(\bar{g})$, con lo que hemos terminado.

Al igual que ocurría con el teorema del cubo, el corolario que acabamos de demostrar generaliza el conocido como “teorema del cuadrado” en Geometría Algebraica clásica. Este también puede encontrarse en la referencia [11], pero lo enunciaremos a continuación:

Teorema del cuadrado. Sea G una variedad en grupos, X una G -variedad, y L_g la traslación por la izquierda por g en X . Para todo haz de línea $\mathcal{L}$ en X , el siguiente morfismo es de grupos.

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}}} \mathbf{Pic}_k^0(X) \\ g &\longmapsto L_g^* \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{-1} \end{aligned}$$

Es decir, para cada punto $(g, \bar{g}, x)$ de $G \times G \times X$, se verifica

$$\mathcal{L}_{(g \bar{g}) \cdot x} = \mathcal{L}_{g \cdot x} \cdot \mathcal{L}_{\bar{g} \cdot x} \cdot \mathcal{L}_x^{-1}$$

Emplearemos en la demostración del último resultado de esta memoria el teorema de estructura de los grupos algebraicos de Chevalley. Este asegura que, sobre cuerpo algebraicamente cerrado, todo grupo algebraico, liso y conexo admite un único subgrupo normal afín (también liso y conexo) tal que el cociente es una variedad abeliana.

Teorema 65. Si $\mathbf{Pic}^0(X)$ es representable, debe ser una variedad abeliana.

Demostración. Usando el teorema de Chevalley, el problema se reduce a comprobar que, para todo grupo afín G , cualquier morfismo de grupos $G \xrightarrow{\phi} \mathbf{Pic}_k^0(X)$ es trivial. Un morfismo de este tipo se puede dar equivalentemente mediante su adjunto $X \xrightarrow{\phi^t} \mathbf{Pic}_k^0(G)$, pero como G es una variedad racional, hemos visto ya que $\mathbf{Pic}_k^0(G)$. Por tanto, $\phi^t = 0$ y hemos terminado.

Bibliografía

- [1] A. Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas. Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, 1960.
- [2] A. Grothendieck. *Introduction au Langage Fonctoriel: Rédigé d'après un cours de A. Grothendieck : Séminaires 1965-66*. Faculté des Sciences d'Alger, Département de Mathématiques. Notes written by M. Karoubi.
- [3] A. Grothendieck. *Introduction to functorial algebraic geometry*, volume 1. Affine algebraic geometry. State University of New York. Notes written by F. Gaeta.
- [4] J.L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale de schémas (SGA4)*, chapter Fonctorialité de catégories de faisceaux, pages 265–298. Springer, 1972.
- [5] M. Demazure; P. Gabriel. *Introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, volume 39. North-Holland Mathematics Studies, 1980.
- [6] C. Sancho de Salas; P. Sancho de Salas. *Álgebra Conmutativa. Geometría Algebraica*. Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, ed. IV. Manuales UEX, 2013.
- [7] R. Vakil. The rising sea. foundations of algebraic geometry. <https://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGfeb2124public.pdf>. [Online el 27/06/2024].
- [8] F. Oort. Sur le schéma de picard. *Bulletin de la S.M.F.*, 90:1–14, 1962.
- [9] M. Raynaud. Spécialisation du foncteur de picard. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, 38:27–76, 1970.
- [10] S. Kleiman. *Alexandre Grothendieck: A Mathematical Portrait*, chapter The Picard

Scheme. International Press of Boston, 2014.

- [11] D. Mumford. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Oxford University Press, 1970.