Documento de Trabajo 05/00

Leyes estocásticas de capitalización y descuento. Compatibilidad bajo el criterio de la esperanza

Antonio Alegre
Universidad de Barcelona
Rosa Mayoral
Universidad de Valladolid

Programa Interuniversitario de Doctorado "Nuevas Tendencias en Dirección de Empresas"
Universidad de Burgos • Universidad de Salamanca • Universidad de Valladolid

Leyes estocásticas de capitalización y descuento. Compatibilidad bajo el criterio de la esperanza.

Antonio Alegre
Universidad de Barcelona.

Rosa M. Mayoral
Universidad de Valladolid

Resumen: En este trabajo hemos partido de la hipótesis de que el tanto instantáneo que da el precio de la operación de financiación evoluciona estocásticamente en el tiempo. Hemos considerado un modelo en el que es constante pero afectado por una volatilidad planteada como ruido blanco con parámetro de intensidad constante. Se trata la capitalización y el descuento con periodo Δt dentro del cual el precio efectivo se calcula como integral del tanto instantáneo resultando para el modelo estocástico un proceso browniano aditivo. Tanto en la capitalización como en el descuento se ha considerado que el pago del precio periódico se realiza de una sola vez, en la capitalización al final del periodo y en el descuento al inicio, no considerándose la valoración financiera del efecto producido por el hecho de aplazar o anticipar el pago del precio. Asimismo, se obtiene el factor financiero de capitalización y descuento como una variable aleatoria producto de normales independientes determinándose también sus esperanzas y varianzas.

Previamente a la definición del factor de descuento se revisan los que más habitualmente aparecen en la literatura financiero-actuarial, y se analiza su compatibilidad con el factor de capitalización estocástica, bajo el criterio de la esperanza. Con ello, en el trabajo proponemos una definición alternativa del factor de descuento estocástico que sí verifica la mencionada compatibilidad. Una vez analizados la capitalización y descuento discretos hemos considerado el caso continuo planteando la correspondiente ecuación diferencial estocástica.

Palabras clave: proceso de Wiener, integral estocástica, ecuación diferencial estocástica, criterios de decisión.

Antonio Alegre
Universidad de Barcelona.
Av. Diagonal, 690, 08034 BARCELONA
e-mail: aalegre@eco.ub.es
Rosa M. Mayoral
Universidad de Valladolid.
Av. Valle Esgueva, 6, 47011 VALLADOLID
e-mail: rmayoral@eco.uva.es

1. Comportamiento estocástico del tanto instantáneo

En este epígrafe, definimos el comportamiento estocástico del tanto instantáneo que vamos a considerar y que resulta de añadir una componente perturbadora de ruido blanco a una tendencia constante ρ. El ruido blanco queda caracterizado como la derivada estocástica del proceso de Wiener,[1] con lo que siendo σ el parámetro de volatilidad, resulta,[2]

$$\boldsymbol{\rho}(\tau) = \rho + \sigma \cdot \frac{d\boldsymbol{W}(\tau)}{d\tau}$$

El interés acumulado en un periodo Δt vendrá dado por la integral estocástica de $\boldsymbol{\rho}(\tau)$

$$\int_t^{t+\Delta t} (\rho \cdot d\tau + \sigma \cdot d\boldsymbol{W}(\tau)) = \rho \cdot \Delta t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(\Delta t)$$

Con lo que el precio devengado durante el periodo Δt en este modelo estocástico coincide con el del modelo cierto $\rho \cdot \Delta t$ más una perturbación Normal de esperanza nula y varianza $\sigma^2 \cdot \Delta t$.

2. Capitalización estocástica

Antes de abordar el análisis de la capitalización con intereses estocásticos, recordaremos el planteamiento del enfoque determinista para así poder establecer de forma más sencilla el paralelismo entre ambos.

En el modelo con intereses ciertos de la Matemática Financiera encontramos un análisis sistemático de las operaciones de capitalización y descuento que más frecuentemente se dan en el mercado, considerando siempre que el tipo de interés a aplicar en las mismas está perfectamente determinado desde el origen de la operación.

En principio, retomaremos el planteamiento para la obtención del factor financiero de interés compuesto a tanto constante, teniendo en cuenta que el plazo total de la operación se considera dividido en periodos de capitalización, en los cuales se irá calculando el precio total.

Para ello, tomaremos un ambiente financiero estacionario en el que ρ es el tanto de interés instantáneo.

---

[1] La definición del ruido blanco como proceso simbólico que representa la derivada del proceso de Wiener, teniendo en cuenta que de hecho, este no es diferenciable, puede consultarse en Gardner (1986, págs. 108-113). Esta definición facilita la interpretación heurística del proceso de Wiener como la suma de un conjunto infinitamente denso de perturbaciones instantáneas.
Asimismo, la relación entre el proceso de Wiener y el ruido blanco puede verse, entre otros, en Arnold (1974, págs. 45-56).

[2] De aquí en adelante, los símbolos en negrita indicarán un comportamiento estocástico de las variables que representan.

Asimismo, empezaremos planteando la ecuación en diferencias finitas que recoge la dinámica de la cuantía del capital. En su formulación intervendrá el precio instantáneo como parámetro de evolución de las cuantías, en lugar del tanto efectivo de interés o descuento como es más habitual. De esta forma, consideraremos que se desprecia el cobro del precio de la operación secundaria, siendo ésta el aplazamiento en la acumulación del interés instantáneo devengado dentro del periodo. [3]

Por lo tanto, el interés a cobrar por una unidad monetaria durante un periodo de amplitud Δt vendrá dado únicamente por la acumulación continua dentro de ese periodo de los intereses al tanto ρ sobre dicha unidad monetaria, es decir

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho \cdot d\tau = \rho \cdot \Delta t$$

En consecuencia, los intereses devengados instantáneamente no se añadirán al capital en el instante de su devengo, sino al final del periodo.

Analizamos así una operación de capitalización de una cuantía inicial C_0 durante n años a interés compuesto y, por tanto, calculando el precio de la operación periódicamente de forma proporcional a la cuantía acumulada al inicio de cada periodo y a la amplitud de éste Δt. De acuerdo con esto, la dinámica de la cuantía acumulada queda representada en la siguiente ecuación en diferencias

$$\Delta C_t = \rho \cdot C_t \cdot \Delta t \qquad (1)$$

La solución de esta ecuación de recurrencia con C_0 como condición de contorno, siendo C_n la cuantía acumulada en los n años, viene dada por,

$$C_n = C_0 \cdot (1 + \rho \cdot \Delta t)^{\frac{n}{\Delta t}}$$

Si en esta última expresión tomamos límites cuando $\Delta t \to 0$ se tiene,

$$C_n = C_0 \cdot e^{\rho \cdot n}$$

donde queda recogida la ley de capitalización continua al tanto instantáneo ρ.

Al sustituir el comportamiento cierto del interés instantáneo en (1) por el browniano descrito en el apartado 2, la ecuación de recurrencia estocástica para la capitalización será,

$$\boldsymbol{C}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{C}_t \cdot (1 + \rho \cdot \Delta t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(\Delta t)) \qquad (2)$$

---

[3] El modelo determinista de capitalización y descuento puede consultarse entre otros en Levi (1964), Gerber (1995) y Rodríguez (1994).

Si consideramos la condición de contorno $\boldsymbol{C}_0 = C_0$, capital inicial conocido, la distribución de probabilidad de $\boldsymbol{C}_n$ será la correspondiente a la variable aleatoria,

$$\boldsymbol{C}_n = C_0 \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n}{\Delta t}} (1 + \rho \cdot \Delta t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(\Delta t))$$

luego, obtenemos que $\boldsymbol{C}_n$ resulta de multiplicar el capital inicial por un factor aleatorio resultante del producto de $\frac{n}{\Delta t}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Normal de media $1 + \rho \cdot \Delta t$ y varianza $\sigma^2 \cdot \Delta t$. Por lo tanto, al ser independientes las variables que por producto forman el factor, debido a los incrementos independientes del proceso de Wiener, la esperanza del producto será producto de esperanzas y vendrá dada por,

$$E[\boldsymbol{C}_n] = C_0 \cdot (1 + \rho \cdot \Delta t)^{\frac{n}{\Delta t}}$$

que es el resultado correspondiente al caso cierto.

Para la determinación de la varianza, partiremos de la ecuación de recurrencia estocástica (2), en la que se aprecia que $\boldsymbol{C}_{t+\Delta t}$ se obtiene como el producto de dos variables aleatorias independientes por lo que, de acuerdo con las propiedades de la varianza, se llega a la ecuación de recurrencia cierta,

$$V_{t+\Delta t} = ((1 + \rho \cdot \Delta t)^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t) \cdot V_t + C_0^2 \cdot \sigma^2 \cdot \Delta t \cdot (1 + \rho \cdot \Delta t)^{\frac{2 \cdot t}{\Delta t}}$$

donde V_t representa la varianza de $\boldsymbol{C}_t$ .Resolviendo la ecuación lineal con la condición de contorno $V_0 = 0$ se obtiene,

$$V[\boldsymbol{C}_n] = C_0^2 \cdot \left[((1 + \rho \cdot \Delta t)^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t)^{\frac{n}{\Delta t}} - (1 + \rho \cdot \Delta t)^{\frac{2 \cdot n}{\Delta t}} \right]$$

Por otro lado, la ecuación de recurrencia estocástica (2) puede escribirse como,

$$\Delta \boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_t \cdot (\rho \cdot \Delta t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(\Delta t))$$

con lo que el modelo continuo de capitalización estocástica quedaría expresado a través de la ecuación diferencial estocástica de Itô,

$$d\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_t \cdot \rho \cdot dt + \boldsymbol{C}_t \cdot \sigma \cdot d\boldsymbol{W}(t)$$

con la condición de contorno $\boldsymbol{C}_0 = C_0$.

La anterior ecuación diferencial es de Itô ya que éste calcula la integral estocástica como límite para una partición del intervalo temporal en subintervalos infinitésimos y, considerando el proceso no anticipativo, aplica en cada subintervalo el valor en el extremo inicial como corresponde al proceso de capitalización que hemos descrito.[4] Como sabemos, la solución de la anterior ecuación viene dada por,[5]

$$\boldsymbol{C}_n = C_0 \cdot e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})\cdot n + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(n)} = C_0 \cdot \boldsymbol{u}(n) \qquad \text{con} \quad n \geq 0$$

Esta es la solución del proceso browniano geométrico y se obtiene el factor de capitalización estocástico $\boldsymbol{u}(n) = \dfrac{\boldsymbol{C}_n}{C_0}$ como una variable aleatoria que sigue una distribución lognormal $((\rho - \frac{\sigma^2}{2})\cdot n, \sigma^2 \cdot n)$ con lo que

$$E[\boldsymbol{C}_n] = C_0 \cdot e^{\rho \cdot n} \qquad V[\boldsymbol{C}_n] = C_0^2 \cdot e^{2\cdot\rho\cdot n} \cdot (e^{\sigma^2 \cdot n} - 1)$$

Puede comprobarse fácilmente que estos valores se corresponden con los límites de la esperanza y varianza de la capitalización estocástica discreta cuando $\Delta t \to 0$.

3. Toma de decisiones en capitalización estocástica

En el apartado anterior, la capitalización estocástica mediante el proceso browniano geométrico ha transformado la cuantía inicial cierta C_0 en la variable aleatoria $\boldsymbol{C}_n$ obtenida por el producto de C_0 y un factor financiero estocástico $\boldsymbol{u}(n)$ que sigue una distribución lognormal.

El intercambio de capitales financieros en operaciones pactadas con intereses estocásticos, pasa necesariamente por la aplicación de criterios de decisión sobre la variable aleatoria que refleje la evolución estocástica del interés. En el caso que hemos considerado en el apartado anterior, de capitalización de una cuantía inicial, sólo se intercambian dos capitales y la variable aleatoria en la que se aprecia el efecto de la aleatoriedad del interés es la cuantía acumulada $\boldsymbol{C}_n$.[6]

Estos criterios permitirán sustituir la variable aleatoria $\boldsymbol{C}_n$ por un valor cierto que reflejará el grado de aversión al riesgo de los decisores en cuanto a la consecución de sus objetivos, del mismo modo que actuaban los criterios de cálculo de primas en la matemática actuarial.

[4] Para la definición de la integral estocástica de Itô puede consultarse entre otros Malliaris et al. (1982, págs. 69-72).

[5] La solución de esta ecuación diferencial estocástica de Itô, puede verse en Malliaris et al. (1982, págs. 118-119), Shuss (1980, págs. 89-90), Devolder (1986) y otros.

[6] La aplicación de criterios de decisión en el cálculo de primas puede verse entre otros en Goovaerts et al. (1984).

En la literatura actuarial se recogen diversos criterios de cálculo de primas, sin embargo el de la esperanza matemática, del que resulta la prima pura, es el más relevante. Este criterio no tiene en cuenta la dispersión de la variable aleatoria en torno a su media, con lo que en el caso de que la esperanza matemática sea poco representativa puede resultar muy arriesgado utilizarla como equivalente cierto de dicha variable. En el cálculo de primas, este riesgo se reduce mediante la aplicación de un recargo de seguridad que incremente el valor de la prima.

Sin embargo, en el caso que estamos considerando de la capitalización, el principio de prudencia llevaría a que el equivalente cierto de $\boldsymbol{C}_n$ fuese inferior a la esperanza de esta variable aleatoria para que así el valor que resulte, para sustituir la variable aleatoria, tenga una mayor probabilidad de ser alcanzado al final de la operación.

Con todo ello, si aplicamos sobre esta variable aleatoria valor final el criterio de la esperanza matemática, resulta como equivalente cierto la cuantía final que se obtenía en el modelo determinista bajo la ley financiera estacionaria al tanto ρ inicial.

De forma análoga al modelo cierto de valoración financiera, diversos autores han definido la actualización estocástica obteniendo entonces la variable aleatoria valor actual $\boldsymbol{C}_0$ correspondiente a un valor final C_n fijado. En este sentido distinguimos básicamente dos enfoques alternativos encontrados en la literatura financiera y actuarial que describimos a continuación.

El primero de ellos es el utilizado entre otros por Beekman et al. (1990, 1991). En estos trabajos se define el factor de actualización estocástica $\boldsymbol{v}_1(t)$ sustituyendo directamente en el factor cierto, el interés $\rho \cdot t$ por el resultado del proceso browniano aditivo $\rho \cdot t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(t)$, con lo que su expresión analítica es

$$\boldsymbol{v}_1(t) = e^{-(\rho \cdot t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(t))}$$

Alternativamente, encontramos el enfoque de Devolder (1986) que define el factor de actualización estocástica como recíproco del factor de capitalización $\boldsymbol{u}(t)$ que se obtuvo en el apartado anterior, con lo que[7]

$$\boldsymbol{v}_2(t) = e^{-((\rho - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(t))}$$

Observamos que en ambos casos el factor de actualización tiene una distribución lognormal, apreciándose que uno es una transformación lineal del otro,

$$\boldsymbol{v}_2(t) = e^{\frac{\sigma^2}{2} \cdot t} \cdot \boldsymbol{v}_1(t)$$

---

[7] El signo de $\sigma \cdot \boldsymbol{W}(t)$ que aparece en el exponente de ambos factores de actualización $\boldsymbol{v}_1(t)$ y $\boldsymbol{v}_2(t)$ no es relevante puesto que $\boldsymbol{W}(t)$ es una Normal de media 0.

Además, si hiciésemos $\sigma = 0$, fijando un comportamiento cierto para el tipo de interés instantáneo, los factores pasarían a ser constantes siendo el de capitalización igual a $e^{\rho \cdot t}$ y los dos alternativos de actualización iguales a $e^{-\rho \cdot t}$ cumpliéndose por tanto que,

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\rho \cdot n} \qquad \text{y} \qquad C_n = C_0 \cdot e^{\rho \cdot n}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la esperanza de la distribución lognormal tenemos que,

$$E[\boldsymbol{v}_1(t)] = e^{-(\rho - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t} > e^{-\rho \cdot t}$$

$$E[\boldsymbol{v}_2(t)] = e^{\frac{\sigma^2}{2} \cdot t} \cdot e^{-(\rho - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t} = e^{-(\rho - \sigma^2) \cdot t} > E[\boldsymbol{v}_1(t)]$$

Dado un capital cierto de cuantía C_n disponible dentro de n años, aplicando las anteriores expresiones de la actualización estocástica y considerando como equivalente cierto la esperanza matemática, resulta un valor inicial cierto C_0 ,

$$C_0 = \left\langle \begin{array}{l} C_n \cdot E[\boldsymbol{v}_1(n)] \\ C_n \cdot E[\boldsymbol{v}_2(n)] \end{array} \right.$$

Por lo tanto, se observa que si sobre este valor cierto C_0 aplicásemos la capitalización estocástica, evidentemente no se obtendría el valor cierto C_n sino una variable aleatoria producto de la cuantía inicial por una lognormal basada en el modelo browniano geométrico, esto es

$$\boldsymbol{C}_n = C_0 \cdot e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot n + \sigma \cdot \boldsymbol{W}_2(n)}$$

siendo $\boldsymbol{W}_2$ un proceso de Wiener independiente del aplicado en la actualización simbolizado por $\boldsymbol{W}$**,** y sorprendentemente,

$$E[\boldsymbol{C}_n] \neq C_n$$

Esto indica que ninguno de los anteriores factores de actualización estocástica es compatible con el de la capitalización bajo el criterio de la esperanza matemática.

Como alternativa a los factores de actualización estocástica anteriormente considerados, desarrollaremos en el siguiente apartado el factor de descuento estocástico probando que será compatible con el de la capitalización bajo el criterio de la esperanza matemática.

4. Descuento estocástico

A continuación, pasamos a considerar una operación de descuento de una cuantía futura C_n , que se hace efectiva dentro de n años. En principio, como se hizo en el caso de la capitalización, veremos el análisis determinista de estas operaciones bajo régimen financiero de descuento compuesto a tanto constante, para posteriormente realizar la extensión al campo estocástico. Con todo ello, si el régimen financiero es cierto, el precio total de la operación se calculará en cada periodo de descuento Δt, proporcionalmente a éste y a la cuantía final en cada uno de ellos. Es decir, dado que el ambiente financiero es ρ , la dinámica de la cuantía del capital queda,

$$\Delta C_t = \rho \cdot C_{t+\Delta t} \cdot \Delta t \qquad (3)$$

Al comparar esta ecuación en diferencias con la planteada en el caso de la capitalización determinista se aprecia que mientras que en (1) el interés efectivo de cada periodo $\rho \cdot \Delta t$, se aplica sobre la cuantía al inicio del mismo, en (3) actúa sobre la cuantía al final.

La ecuación en diferencias (3) tiene como solución con la condición de contorno C_n , donde C_0 es el líquido resultante del descuento,

$$C_0 = C_n \cdot (1 - \rho \cdot \Delta t)^{\frac{n}{\Delta t}}$$

Por último, tomando límites de esta expresión cuando $\Delta t \to 0$ resulta la cuantía inicial cuando el precio de la financiación se cobra instantáneamente,

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\rho \cdot n}$$

Con lo que se observa que en el caso continuo la ley financiera de capitalización y descuento es la misma y los factores de capitalización y descuento son recíprocos. De hecho, si en lugar de tomar límites cuando $\Delta t \to 0$ en las soluciones de las ecuaciones en diferencias, lo hacemos en las propias ecuaciones (1) y (3), resulta en ambos casos la misma ecuación diferencial en la cuantía del capital

$$dC_t = \rho \cdot C_t \cdot dt$$

puesto que, al ser C_t una función continua de t, cuando el incremento temporal es un instante, la cuantía al inicio y al final del mismo coinciden.

Lógicamente, la solución de esta ecuación diferencial tiene la misma expresión que los límites cuando $\Delta t \to 0$ de las soluciones de las ecuaciones en diferencias (1) y (3).

Seguidamente, mediante un planteamiento análogo al anterior, introducimos el comportamiento estocástico del tanto instantáneo, descrito en el epígrafe 2, en la evolución del descuento del modelo cierto recogido en (3). De esta forma, la ecuación de recurrencia estocástica para este caso es,

$$\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_{t+\Delta t} \cdot (1 - \rho \cdot \Delta t - \sigma \cdot \boldsymbol{W}(\Delta t)) \qquad (4)$$

Aplicando la recurrencia a partir de la condición de contorno en n de forma que $\boldsymbol{C}_n = C_n$, resulta que la cuantía descontada en r, con $r<n$, viene dada por una variable aleatoria obtenida por la aplicación sobre el valor conocido del capital al final C_n, de un número $\frac{n-r}{\Delta t}$ de factores de descuento correspondientes a un periodo Δt,

$$\boldsymbol{C}_r = C_n \cdot \prod_{j=1}^{\frac{n-r}{\Delta t}} (1-\rho\cdot\Delta t - \sigma\cdot\boldsymbol{W}(\Delta t))$$

Los factores de descuento de un periodo Δt, de acuerdo con la anterior expresión, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Normal de media $1-\rho\cdot\Delta t$ y varianza $\sigma^2\cdot\Delta t$. Luego, la distribución correspondiente al producto de $\frac{n-r}{\Delta t}$ variables aleatorias como las anteriores, constituirá la distribución del factor de descuento desde n hasta r.

Con lo que podemos afirmar que la cuantía media descontada $n-r$ años vendrá dada por

$$E[\boldsymbol{C}_r] = C_n \cdot (1-\rho\cdot\Delta t)^{\frac{n-r}{\Delta t}}$$

coincidiendo con la correspondiente al caso cierto.

En cuanto a la varianza de la variable aleatoria $\boldsymbol{C}_r$, como se hizo en la capitalización, aplicaremos la varianza sobre la ecuación de recurrencia (4), donde se aprecia que la cuantía descontada es el producto de dos variables aleatorias independientes, obteniéndose la ecuación cierta,

$$V^d_{t+\Delta t} = \frac{V_t}{(1-\rho\cdot\Delta t)^2+\sigma^2\cdot\Delta t} - \frac{C_n^2\cdot\sigma^2\cdot\Delta t\cdot(1-\rho\cdot\Delta t)^{\frac{2\cdot(n-t)}{\Delta t}}}{(1-\rho\cdot\Delta t)^2+\sigma^2\cdot\Delta t}$$

donde V^d_t es la varianza de la cuantía descontada desde n hasta t, con $t<n$.

La solución de la ecuación de recurrencia cierta en la varianza, con la condición de contorno $V^d_n = 0$, es

$$V[\boldsymbol{C}_r] = C_n^2 \cdot \frac{(1-\rho\cdot\Delta t)^2}{(1-\rho\cdot\Delta t)^2+\sigma^2\cdot\Delta t} \cdot \left[((1-\rho\cdot\Delta t)^2+\sigma^2\cdot\Delta t)^{\frac{n-t}{\Delta t}} - (1-\rho\cdot\Delta t)^{\frac{2\cdot(n-t)}{\Delta t}} \right]$$

Para el planteamiento del descuento continuo, escribiremos (4) como ecuación en diferencias

$$\Delta\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_{t+\Delta t}\cdot(\rho\cdot\Delta t + \sigma\cdot\boldsymbol{W}(\Delta t)) \qquad (5)$$

Así, en el modelo continuo la evolución de la cuantía descontada viene dada por la ecuación diferencial estocástica,

$$d\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_t \cdot \rho \cdot dt + \boldsymbol{C}_t \cdot \sigma \cdot d\boldsymbol{W}(t) \qquad (6)$$

con la condición de contorno $\boldsymbol{C}_n = C_n$.

Si sustituimos la ecuación (6) por su expresión integral equivalente,

$$\int_T d\boldsymbol{C}_t = \int_T \boldsymbol{C}_t \cdot \rho \cdot dt + \int_T \boldsymbol{C}_t \cdot \sigma \cdot d\boldsymbol{W}(t) \qquad \text{con} \qquad T = [r, n] \qquad (7)$$

siendo T el intervalo de aplicación de la integral estocástica.

Para resolver esta ecuación estocástica no aplicaremos la integral de Itô puesto que, como puede observarse en (5), el proceso de descuento es anticipativo, ya que depende de la cuantía al final de cada periodo en que se subdivide el plazo de la operación.

Por el contrario, parece más adecuada la definición de la integral estocástica como límite en media, considerando una partición del plazo de la operación en subintervalos infinitésimos y aplicando el proceso en el extremo final de cada uno de ellos, de acuerdo con la evolución del proceso de descuento recogida en (5).[8]

La relación entre la integral aquí descrita y la de Itô aparece en Malliaris et al. (1982, págs. 133-135) a través de la integral estocástica definida por Stratonovich, siendo esta última la media aritmética de las otras dos. De acuerdo con dicha relación, la integral B que queremos utilizar en el descuento continuo se obtiene como dos veces la de Stratonovich S menos la de Itô, A,

$$\int_T^{*B} d\boldsymbol{C}_t = 2 \cdot \int_T^{*S} d\boldsymbol{C}_t - \int_T^{*A} d\boldsymbol{C}_t$$

donde $*B$, $*S$ y $*A$ simbolizan el sentido en que cada integral está definida.

De hecho, la solución de (6) o (7) será diferente dependiendo de cómo esté definida la integral estocástica aplicada. Así, si utilizamos la integral estocástica de Itô en (7), obtendremos la misma solución que aplicando el lema de Itô sobre la ecuación diferencial (6).

A partir de (6), podemos escribir la ecuación de Itô equivalente a la de Stratonovich. Estas serán equivalentes en el sentido de que obtenemos la misma solución con la integral estocástica de Stratonovich en (7) que si aplicamos el lema de Itô en la siguiente ecuación[9]

---

[8] En Malliaris et al. (1982, págs. 70-73) se señalan las infinitas posibilidades de definición de una integral estocástica.

[9] La relación entre la integral de Itô y la de Stratonovich puede verse entre otros en Stratonovich (1966) y Dufresne (1989).

$$d\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_t \cdot (\rho + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot dt + \boldsymbol{C}_t \cdot \sigma \cdot d\boldsymbol{W}(t)$$

Con todo ello, teniendo en cuenta la relación entre las tres integrales estocásticas que estamos considerando, la ecuación diferencial estocástica de Itô que será equivalente a la ecuación (6) que tenemos que resolver, con la integral estocástica B es,

$$d\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}_t \cdot (\rho + \sigma^2) \cdot dt + \boldsymbol{C}_t \cdot \sigma \cdot d\boldsymbol{W}(t) \qquad (8)$$

Así pues, para resolver esta ecuación aplicaremos el lema de Itô, puesto que la solución que resulte será la misma que se obtenga al resolver la ecuación (6) con la integral estocástica B.

Por lo tanto, utilizando el lema de Itô en (8) con la condición de contorno $\boldsymbol{C}_n = C_n$, se llega a la siguiente expresión para el capital descontado desde n hasta r,

$$\boldsymbol{C}_r = C_n \cdot e^{-(\rho + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (n-r) + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(n-r)} \qquad \text{con} \quad n \geq r \geq 0$$

Esta variable aleatoria viene dada por el producto de la constante C_n por el factor de descuento $n-r$ años, el cual se distribuye según una lognormal $(-(\rho + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (n-r), \sigma^2 \cdot (n-r))$. Con todo ello, la esperanza y varianza de $\boldsymbol{C}_r$ de acuerdo con las propiedades de la distribución lognormal son

$$E[\boldsymbol{C}_r] = C_n \cdot e^{-\rho \cdot (n-r)} \qquad V[\boldsymbol{C}_r] = C_n^2 \cdot e^{-2 \cdot \rho \cdot (n-r)} \cdot (e^{\sigma^2 \cdot (n-r)} - 1)$$

Como también ocurría en el caso de la capitalización, estas expresiones se obtienen tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ de la esperanza y varianza del descuento estocástico discreto.

5. Compatibilidad bajo el criterio de la esperanza entre la capitalización y el descuento estocásticos

La expresión obtenida para la cuantía descontada estocásticamente permite caracterizar el factor de descuento estocástico, $\boldsymbol{v}_3(t)$,

$$\boldsymbol{v}_3(t) = e^{-(\rho + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t + \sigma \cdot \boldsymbol{W}(t)}$$

Su distribución será también lognormal, tal que,

$$E[\boldsymbol{v}_3(t)] = e^{-\rho \cdot t} < E[\boldsymbol{v}_1(t)] < E[\boldsymbol{v}_2(t)]$$

El descuento estocástico de un capital de cuantía C_n disponible en n, nos proporciona un valor actual aleatorio que como hemos visto viene dado por,

$$\boldsymbol{C}_0 = C_n \cdot e^{-(\rho + \frac{\sigma^2}{2})\cdot n + \sigma\cdot \boldsymbol{W}_1(n)} = C_n \cdot \boldsymbol{v}_3(n)$$

donde $\boldsymbol{W}_1(n)$ es un proceso de Wiener con media 0 y varianza n. Al ser $\boldsymbol{v}_3(n)$ lognormal, la esperanza del valor actual,

$$E[\boldsymbol{C}_0] = C_n \cdot e^{-\rho\cdot n}$$

Si consideramos la capitalización estocástica de la variable aleatoria $\boldsymbol{C}_0$ utilizando un proceso de Wiener $\boldsymbol{W}_2(n)$ independiente de $\boldsymbol{W}_1(n)$ obtendremos un capital final en n aleatorio tal que,

$$\boldsymbol{C}_n = \boldsymbol{C}_0 \cdot e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})\cdot n + \sigma\cdot \boldsymbol{W}_2(n)}$$

Calculando esperanzas matemáticas y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{C}_0$ es independiente del factor de capitalización, tenemos

$$E[\boldsymbol{C}_n] = E[\boldsymbol{C}_0]\cdot E\left[e^{(\rho - \frac{\sigma^2}{2})\cdot n + \sigma\cdot \boldsymbol{W}_2(n)}\right] = C_n \cdot e^{-\rho\cdot n} \cdot e^{\rho\cdot n} = C_n$$

Podemos observar que la distribución de $\boldsymbol{C}_n$ viene dada por

$$\boldsymbol{C}_n = C_n \cdot e^{-\sigma^2\cdot n + \sigma\cdot(\boldsymbol{W}_1(n) + \boldsymbol{W}_2(n))}$$

donde, por la independencia de los procesos de Wiener que intervienen, el factor será lognormal y, por tanto aplicando sucesivamente a C_n el descuento estocástico y la capitalización estocástica no se obtiene el valor C_n sino una variable aleatoria cuya esperanza es C_n, por ser producto de esta constante por una variable lognormal $(-\sigma^2\cdot n, 2\cdot\sigma^2\cdot n)$.

Si la capitalización estocástica se aplicase directamente sobre la esperanza matemática de la variable aleatoria obtenida a través del descuento estocástico el resultado sería otra variable aleatoria distinta

$$\boldsymbol{C}_n^* = C_n \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2}\cdot n + \sigma\cdot \boldsymbol{W}_2(n)}$$

Esta variable aleatoria se ha obtenido por el producto de la constante C_n por una variable aleatoria lognormal $(-\frac{\sigma^2}{2}\cdot n, \sigma^2\cdot n)$, con lo que su esperanza matemática será C_n.

Por tanto, la capitalización estocástica aplicada tanto sobre la variable aleatoria descuento estocástico como sobre su esperanza matemática llevan a un valor final que es estocástico y que se obtiene a través de un factor logarítmico-normal, siendo en ambos casos la esperanza matemática C_n y las varianzas,

$$V[C_n] = C_n^2 \cdot (e^{2 \cdot \sigma^2 \cdot n} - 1) \qquad V[C_n^*] = C_n^2 \cdot (e^{\sigma^2 \cdot n} - 1)$$

La relación entre ambas viene dada por,

$$V[C_n] = V[C_n^*] \cdot (e^{\sigma^2 \cdot n} + 1)$$

Esto nos indica que en la varianza de la capitalización estocástica de la variable aleatoria descuento estocástico existen dos componentes, la primera es la varianza del descuento y la segunda es la varianza de la capitalización. Si se sustituye la variable aleatoria por su esperanza, parte de la anterior esperanza disminuye.

6. Conclusiones

Como conclusión del trabajo podemos decir que las ecuaciones diferenciales estocásticas que nos dan la evolución continua de la capitalización y el descuento son formalmente la misma. Sin embargo, a diferencia del caso cierto en el que poniendo la condición de contorno inicial obtenemos la capitalización continua y poniendo la condición de contorno final obtenemos el descuento continuo, en la ecuación diferencial estocástica debemos tener presente que, además de las condiciones, la ecuación diferencial estocástica es diferente. Esto es debido a que como sabemos, existe una infinidad de integrales estocásticas, puesto que el límite de la suma discreta no es único al depender del punto del subintervalo donde se tome el valor del proceso.

La existencia de múltiples soluciones para la ecuación nos lleva a pensar que la solución adecuada para la capitalización será la que obtenga el límite aplicando la integración en el extremo inferior, ya que en el modelo discreto los intereses acumulados en un periodo se calculan sobre el capital al inicio de dicho periodo. La ecuación diferencial estocástica será por tanto de Itô, resultando la solución a partir del lema.

Con un razonamiento análogo, es evidente que en el descuento continuo la ecuación diferencial estocástica no es de Itô, ya que la integral estocástica debe calcularse como límite de la suma aplicada a los valores del proceso en el extremo superior de los subintervalos, puesto que en el descuento discreto la cuantía del mismo se calcula sobre el capital al final del periodo.

Para resolver esta ecuación diferencial estocástica nos hemos basado en la solución planteada por Stratonovich para la que se satisfacen las reglas clásicas del cálculo integral.

Este planteamiento en la consideración de la ecuación diferencial estocástica de la capitalización y descuento continuos, nos lleva a la obtención de los procesos estocásticos solución que son compatibles con los procesos discretos ya que en particular hemos probado que sus medias y varianzas coinciden con los límites a los que tienden las medias y varianzas del proceso discreto cuando el periodo $\Delta t \rightarrow 0$.

Resumiendo, aunque formalmente la ecuación diferencial estocástica sea la misma para la capitalización y el descuento, la solución adecuada para cada caso es distinta dando lugar a procesos evidentemente no recíprocos a diferencia de lo que ocurría en el caso cierto.

No siendo los procesos recíprocos, hemos probado que son compatibles a través del criterio de la esperanza matemática. Del mismo modo, hemos demostrado que al igual que la capitalización estocástica aplicada a un valor cierto da lugar a una variable aleatoria a través de un factor lognormal, el proceso de descuento aplicado sobre una cuantía constante también se realiza mediante un factor lognormal.

Además la compatibilidad de los procesos hace que aplicando la capitalización estocástica sobre la variable aleatoria descuento, el valor final se caracterice como el producto de una constante por un factor lognormal, siendo el valor esperado igual al valor final cierto C_n y quedando la varianza en función del parámetro σ y del plazo n. Asimismo, hemos visto que esta varianza disminuye en el caso de que sustituyamos la variable aleatoria descuento estocástico por su esperanza, conservándose la esperanza igual a C_n

BIBLIOGRAFIA

Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York.

Beekman, J. A., C. P. Fuelling (1990). Interest and mortality randomness in some annuities. *Insurance: Mathematics and Economics* 9, 185-196.

Beekman, J. A., C. P. Fuelling (1991). Extra randomness in certain annuity models. *Insurance: Mathematics and Economics* 10, 275-287.

Devolder, P. (1986). Operations stochastiques de capitalisation. *Astin Bulletin* 16S, S5-S30.

Dufresne, D. (1989). Weak convergence of random growth processes with applications to insurance. *Insurance: Mathematics and Economics* 8, 187-201.

Gardner, W. A. (1986). *Introduction to Random processes*. Macmillan Publishing Company, New York.

Gerber, H. U. (1995). *Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

Goovaerts, M. J., F. De Vylder, J. Haezendonck (1984). *Insurance premiums. Theory and applications.* North-Holland, Amsterdam.

Levi, E. (1964). *Corso di matematica finanziaria e attuariale.* Giuffré, Milano.

Malliaris, A. G., W. A. Brock (1982). *Stochastic Methods in Economics and Finance*. North-Holland, Amsterdam.

Rodríguez, A. (1994). *Matemática de la Financiación*. Ediciones S., Barcelona.

Schuss, Z. (1980). *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations.* John Wiley & Sons, New York.

Stratonovich, R.L. (1966). A new representation for stochastic integrals and equations. *Journal SIAM Control*, vol. 4, nº 2, 362-371.