



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Informática y Automática

**DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y
SISTEMAS DE CONTROL PREDICTIVO
MEDIANTE ÍNDICES DE CONTROLABILIDAD
BASADOS EN NORMAS**

Mario Francisco Sutil

Octubre 2011

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y AUTOMÁTICA

Universidad de Salamanca

Memoria del trabajo realizado por D. Mario Francisco Sutil
para optar al Grado de Doctor

**DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y SISTEMAS
DE CONTROL PREDICTIVO MEDIANTE ÍNDICES DE
CONTROLABILIDAD BASADOS EN NORMAS**

Bajo la dirección de la Dra. Pastora Isabel Vega Cruz

Salamanca, Octubre de 2011

D^a Dra. PASTORA ISABEL VEGA CRUZ, Catedrática de Universidad del Departamento de Informática y Automática de la Universidad de Salamanca en el Área de Ingeniería de Sistemas y Automática,

CERTIFICA:

que el trabajo titulado “DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y SISTEMAS DE CONTROL PREDICTIVO MEDIANTE ÍNDICES DE CONTROLABILIDAD BASADOS EN NORMAS” ha sido realizado bajo su dirección por D. Mario Francisco Sutil y cumple con los requisitos para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Salamanca, por lo que autoriza su presentación.

Salamanca, 3 de Octubre de 2011

Fdo: Pastora Isabel Vega Cruz

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a la profesora Pastora Vega su incondicional apoyo para la realización de este trabajo, sus ideas y su colaboración activa desde el inicio del mismo. El proceso hasta la consecución del mismo ha sido largo, y sin su implicación y estímulo en todo este tiempo no habría sido posible. Sus amplios conocimientos compartidos me han permitido adquirir una experiencia considerable en esta área.

Agradezco también la ayuda recibida por mis compañeros del grupo de investigación en la Universidad Simón Bolívar de Venezuela, en particular a la profesora Silvana Revollar por su generosa ayuda y fructífera colaboración en el trabajo, así como su excelente amistad y especial compañía. También al profesor Omar Pérez por su ayuda en algunas partes y su constante buen humor, así como a la profesora Rosalba Lamanna por sus comentarios y apuntes.

También mencionar a los compañeros de la Universidad Nacional de Colombia en Medellín que desde allí compartieron sus ideas conmigo, en particular al profesor Hernán Álvarez por sus valiosos aportes en control predictivo y en la buena orientación del trabajo final.

Por supuesto agradecer también a los compañeros de la Universidad de Valladolid su ayuda, en especial al profesor Fernando Tadeo por su importante contribución en control robusto y a María Jesús de la Fuente por sus ideas y comentarios.

No quiero olvidar tampoco a mis compañeros del departamento de Informática y Automática de la Universidad de Salamanca, que siempre han estado ahí para solucionar cualquier problema.

Por último, pero no menos importante, agradecer a mi familia y amigos su confianza y apoyo en todo este tiempo.

Resumen

El diseño de procesos químicos se ha venido realizando a lo largo de la historia sin tener en cuenta el efecto que este tiene en la controlabilidad del proceso, produciendo en muchos casos plantas mal dimensionadas que son difíciles de controlar. En la actualidad, hay ya un amplio consenso respecto a la necesidad de incluir aspectos de control en el diseño, de forma que los procesos obtenidos sean mucho más controlables. A pesar de que existen numerosas metodologías de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control aplicadas a muy diversos procesos, a nivel industrial todavía se utiliza el procedimiento clásico en la mayor parte de los casos. Esto es debido a la complejidad de estas técnicas, que se traducen en problemas de optimización de difícil solución, especialmente para procesos complejos.

Por otra parte, la evolución de los sistemas de control exige cada vez más precisión, teniendo en cuenta las distintas situaciones que puedan aparecer, por lo que la aplicación de técnicas de control avanzado está cada vez más extendida, incluyendo consideraciones de robustez que aseguren la estabilidad y desempeño del sistema a pesar de las perturbaciones y posibles errores de modelado.

En esta tesis se propone una metodología de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control, también denominado diseño integrado, basada en normas de funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado, que proporciona plantas óptimas en cuanto a costes y controlabilidad y tiene la ventaja de reducir la carga computacional con respecto a otras técnicas similares. Se trata de una metodología sencilla, de fácil aplicación a partir de la teoría de control clásica, y que utiliza algoritmos de optimización típicos como la Programación Secuencial Cuadrática (*Sequential Quadratic Programming*, SQP) u otros algoritmos multiobjetivo y estocásticos. El controlador que se ha seleccionado para implementar las técnicas de diseño integrado es el control predictivo basado en modelos (*Model Predictive Control*, MPC), ya que tiene una serie de características muy apropiadas para el proceso de fangos activados, como por ejemplo el tratamiento de restricciones y de sistemas multivariables, así como un funcionamiento bastante intuitivo. La metodología propuesta incluye aspectos de robustez a partir de regiones de incertidumbre poliédrica de fácil determinación, y puede aplicarse a la síntesis o determinación de la estructura de la planta.

En cuanto a la organización general de la tesis, el capítulo 1 se inicia con una breve introducción al diseño integrado y el concepto de controlabilidad de procesos, para finalizar con una revisión de antecedentes, estado del arte y los objetivos del trabajo.

En el capítulo 2 se describe el proceso de fangos activados en una planta de depuración de aguas residuales que se ha seleccionado como ejemplo de aplicación de la metodología propuesta. Se presentan distintos modelos matemáticos del proceso, desde la plataforma de simulación estándar BSM1 (*Benchmark Simulation Model n° 1*) desarrollado en el marco de los programas europeos COST 682 y 624 (*European Cooperation in Science and Technology 682 and 624*) a otros más sencillos que únicamente consideran eliminación de materia orgánica. Se trata de un proceso no lineal de difícil control sometido a fuertes perturbaciones, por lo que la aplicación de estas técnicas es interesante. Además, su importancia aumenta también debido a que las regulaciones medioambientales son cada vez más exigentes, implicando el rediseño de plantas ya existentes. A continuación se describe el problema de control y se realiza un

estudio de la controlabilidad en lazo abierto del proceso poniendo de manifiesto alguno de los problemas que presenta.

En el capítulo 3 se realiza una breve descripción del control predictivo basado en modelos junto con sus fundamentos. Se describen las dos formulaciones para el MPC que se utilizan, una básica y otra que incluye en la función objetivo un término de penalización terminal que asegura la estabilidad, en concreto una penalización obtenida de la ecuación de Lyapunov y de la aplicación de un regulador lineal cuadrático óptimo (*Linear Quadratic Regulator*, LQR). Este capítulo finaliza con la aplicación del control MPC al proceso de fangos activados con sus ajustes previos, realizando después un estudio de la controlabilidad en lazo cerrado.

En el capítulo 4, tras una introducción a las medidas de controlabilidad, se describen los índices de controlabilidad utilizados basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema, en particular el índice de sensibilidad mixta H_{∞} y otros índices basados en la norma l_1 que acotan los valores máximos de la entrada o la salida en el dominio temporal. También se incluye un índice que considera asimetrías en las restricciones sobre estas variables y en las perturbaciones. Estos índices se presentan particularizados para el caso de un controlador MPC puesto que es la estrategia de control utilizada en la tesis.

La metodología de diseño integrado o diseño simultáneo de procesos y sistemas de control, proporciona una planta y controlador óptimos, con costes de construcción y operación mínimos, por lo que los parámetros de sintonía del MPC se ajustan automáticamente para cumplir con las condiciones de desempeño marcadas. Dada la naturaleza de la metodología de diseño integrado propuesta en esta tesis, la sintonía automática del controlador se ha tratado de forma independiente, extrayéndola del método general. En el capítulo 5 se plantean distintos problemas de sintonía con diferentes condiciones para rechazo a perturbaciones o robustez, considerando diversos índices de desempeño basados en normas. Se muestran resultados numéricos y simulaciones, tanto para una planta sólo con eliminación de materia orgánica como para el modelo BSM1 completo con eliminación de nitrógeno.

En el capítulo 6 se plantea el problema general de diseño integrado y su traducción concreta al diseño del proceso de fangos activados, detallando el problema de optimización correspondiente. Estos problemas incluyen además de las restricciones de controlabilidad, otras restricciones físicas específicas del proceso de fangos activados, así como el propio modelo matemático para ajustar un punto de trabajo estacionario. Tras una descripción general del problema incluyendo condiciones de robustez, y de las distintas estrategias de optimización, éste se particulariza para el proceso de fangos activados. Los resultados comienzan luego con un caso motivador de diseño secuencial y basado en índices dinámicos, para pasar a continuación a la presentación de los resultados de la metodología propuesta en diversas condiciones. En todos ellos se analiza la situación de compromiso entre el rechazo a perturbaciones y la energía consumida (esfuerzos de control), los costes, la robustez del sistema o la estrategia de optimización, entre otros aspectos. De la misma forma que el capítulo anterior, los resultados finalizan con el diseño integrado aplicado a un modelo simplificado del BSM1.

En el capítulo 7 se plantea el problema de síntesis de procesos, que incluye en el diseño integrado la selección de la estructura de la planta a partir de una superestructura. Para

el proceso de fangos activados, se proponen tres casos de estudio: diseño considerando únicamente costes, diseño con un controlador proporcional integral (PI) y condiciones de controlabilidad basadas en índices dinámicos, y diseño integrado con síntesis incluyendo control MPC e índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema. El problema de optimización generado incluye variables binarias, y se ha resuelto utilizando el método del enfriamiento simulado (*simulated annealing*) y algoritmos genéticos.

La tesis finaliza en el capítulo 8 con las conclusiones y principales aportaciones, junto con algunas líneas de trabajo futuro que se podrían abordar en esta área.

Abstract

Chemical process design has been usually performed without considering its effect on controllability, obtaining plants with difficult control and also poorly sized. Nowadays, there is a wide consensus about the need to include control aspects in the design stage, in order to obtain more controllable processes. Despite of the existence of many simultaneous process and control design methodologies for a variety of processes, in the industry the conventional procedure is mostly used. The reason for that is the complexity of simultaneous techniques, involving difficult optimization problems particularly for complex processes.

On the other hand, control systems progress requires increasing accuracy, taking into account the possible conditions, so the use of advanced control is spreading, including robustness issues to guarantee system stability and performance, despite disturbances and modelling errors.

In this work a methodology for simultaneous process and control system design, also called integrated design, has been proposed to obtain optimal plants considering cost and controllability. It is based on closed loop transfer function norms, reducing the computational load in comparison to other existing techniques. It is a simple methodology, easy to use applying classical control theory. It uses popular optimization algorithms such as Sequential Quadratic Programming (SQP) or other multiobjective and stochastic methods. Model Predictive Control (MPC) has been chosen to implement the integrated design techniques because of its appropriate features for controlling the activated sludge process, such as constraints and multivariable systems managing and intuitive working. The methodology proposed includes robustness issues by means of polytopic uncertain regions of easy calculation, and it can be also applied to the synthesis problem or plant structure determination.

As for the general organization of the thesis, chapter 1 is started with a short introduction to the integrated design and process controllability, to follow with a review of the background, the state of the art in the area and the main objectives of the work.

In chapter 2 the activated sludge process in a wastewater treatment plant is described, as the chosen process to apply the integrated design methodology proposed. Different mathematical models are presented, including the benchmark BSM1 (Benchmark Simulation Model nº 1) developed in the framework of European programs COST 682 and COST 624 (European Cooperation in Science and Technology 682 and 624), and other simpler that only consider organic matter removal. The application of the proposed methodology is interesting because it is a non linear process, difficult to control and subject to large disturbances. Its relevance is increasing also because of the stricter environmental regulations, even implying redesign of existing plants. The chapter ends with the control problem description and an open loop controllability study to show up the existing difficulties.

Chapter 3 starts with a short description of MPC fundamentals. Two MPC formulations are described. The first is the basic one and the second includes a penalty term in the objective function to guarantee stability. Specifically it is a penalty obtained from the Lyapunov equation solution or the application of a linear quadratic regulator controller (LQR). The chapter ends with the MPC control applied to the activated sludge process, some presets, and a closed loop controllability analysis.

In chapter 4, after a short introduction about controllability measures, the controllability indexes used are described. They are based on sensitivity functions norms, particularly the H_∞ mixed sensitivity norm and l_1 norm that limits the input and output variables in time domain. One index considering asymmetrical constraints on that variables and disturbances is also included. All indexes are particularized for the MPC controller because it is the control algorithm used in this thesis.

The integrated design methodology, or simultaneous process and control system design, provides a plant and optimal controller, with minimum construction and operational cost, so the MPC tuning parameters are adjusted automatically in order to fulfil the performance requirements. Due to the special character of the proposed methodology, the controller automatic tuning can be treated independently out of the general method. In chapter 5 different MPC tuning problems are stated for different disturbance rejection or robustness conditions, considering norm based indexes. Numerical and simulation results are shown, both for a plant with only organic matter removal and the complete BSM1 benchmark plant with nitrogen removal.

In chapter 6 the integrated design general problem is stated, as well as its application to the activated sludge process, detailing the corresponding optimization problem. The problem includes controllability constrains, physical constrains and the mathematical model to obtain a steady state working point. After a general description of the problem including robustness conditions, and the optimization strategies used, it is particularized for the activated sludge process. The results start with two motivating examples: a sequential design and a design case based on dynamical indexes. Then the whole set of results for different conditions are presented. In all of them the trade-off between disturbance rejection and energy consumption, costs, robustness and the optimization strategy are analyzed. In the same way that in the previous chapter, the results end with the integrated design applied to a simplified version of the BSM1 with nitrogen removal.

In chapter 7 the synthesis problem is stated, which includes in the integrated design the plant structure selection using a defined superstructure. For the activated sludge process, three case studies are proposed: economical design only considering cost, integrated design with a PI controller and controllability based on dynamical indexes, and integrated design with MPC controllers and norm based indexes. The optimization problems generated here include binary variables, and they have been solved by stochastic methods such as simulated annealing and genetic algorithms.

The thesis ends in chapter 8 with some conclusions, the main contributions, and some future work in the area.

Índice de contenidos

INTRODUCCIÓN	23
1.1 DISEÑO CLÁSICO Y DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y SISTEMAS DE CONTROL.....	23
1.2 CONTROLABILIDAD DE PROCESOS	26
1.3 ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE	27
1.3.1 Metodologías preliminares de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control	27
1.3.2 Diseño integrado de procesos incluyendo control de tipo proporcional integral	28
1.3.3 Diseño integrado de procesos incluyendo control avanzado.....	29
1.3.4 Métodos de optimización en el diseño integrado	30
1.3.5 Diseño integrado aplicado al proceso de fangos activados	31
1.4 OBJETIVOS DE LA TESIS	32
DESCRIPCIÓN Y CONTROLABILIDAD DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS	35
2.1 DESCRIPCIÓN Y MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS	35
2.1.1 Etapas de tratamiento de las aguas residuales	35
2.1.2 Descripción del proceso de fangos activados	36
2.1.3 Modelo matemático para eliminación de materia orgánica (planta nº 1)	37
2.1.4 Modelo matemático de la plataforma de simulación estándar BSM1 (planta nº 2)	41
2.1.5 Modelo matemático obtenido por simplificación del BSM1 (planta nº 3)	48
2.1.6 Operación del proceso de fangos activados.....	52
2.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL	55
2.3 ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD EN LAZO ABIERTO	58
2.3.1 Comportamiento dinámico del proceso	59
2.3.2 Análisis de los problemas de controlabilidad	59
2.3.3 Influencia del punto de operación estacionario y las dimensiones de la planta.....	61
2.4 CONCLUSIONES.....	63
FUNDAMENTOS DE CONTROL PREDICTIVO Y APLICACIÓN AL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS	65
3.1 FUNDAMENTOS DE MPC Y FORMULACIÓN BÁSICA	65
3.2 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DEL MPC	67
3.2.1 Formulación sin restricciones.....	67
3.2.2 Formulación con restricciones.....	69
3.3 FORMULACIÓN DEL MPC CON ESTABILIDAD GARANTIZADA.....	70
3.3.1 Horizonte infinito y penalización terminal de Lyapunov	70
3.3.2 Horizonte infinito y penalización terminal óptima.....	72

3.4	CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS DEL MPC.....	73
3.5	CONTROL MPC APLICADO A LA PLANTA N° 1 DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS.....	75
	3.5.1 Planteamiento y ajustes previos.....	76
	3.5.2 Análisis de la controlabilidad del proceso en lazo cerrado.....	78
3.6	CONCLUSIONES.....	80

CONTROLABILIDAD DE PROCESOS E ÍNDICES DE DESEMPEÑO BASADOS EN NORMAS..... 81

4.1	INTRODUCCIÓN.....	81
4.2	CRITERIOS DE CONTROLABILIDAD BASADOS EN MODELOS LINEALES.....	82
	4.2.1 Funciones de sensibilidad en lazo cerrado con control MPC.....	82
	4.2.2 Índice de rechazo a perturbaciones.....	84
	4.2.3 Índice de sensibilidad mixta.....	85
	4.2.4 Límites en las variables manipuladas y controladas.....	87
	4.2.5 Efecto de las perturbaciones filtradas en la salida.....	88
	4.2.6 Funcional objetivo para límites asimétricos en las señales.....	89
	4.2.7 Normas para el caso de dos perturbaciones simultáneas.....	91
	4.2.8 Consideraciones computacionales.....	93
4.3	CONCLUSIONES.....	94

SINTONÍA AUTOMÁTICA DE CONTROLADORES PREDICTIVOS MEDIANTE ÍNDICES BASADOS EN NORMAS..... 95

5.1	INTRODUCCIÓN.....	95
5.2	METODOLOGÍA DE SINTONÍA AUTOMÁTICA.....	96
5.3	SINTONÍA AUTOMÁTICA UTILIZANDO UN ÍNDICE DE SENSIBILIDAD MIXTA H_∞	98
	5.3.1 Planteamiento general del problema de optimización.....	98
	5.3.2 Planteamiento de la optimización como un problema multiobjetivo.....	103
	5.3.3 Estrategia de resolución del problema de optimización.....	103
5.4	RESULTADOS DE SINTONÍA AUTOMÁTICA UTILIZANDO UN ÍNDICE DE SENSIBILIDAD MIXTA H_∞	104
	5.4.1 Planteamiento del problema de optimización para el proceso de fangos activados.....	106
	5.4.2 Determinación de los vértices de la región de incertidumbre.....	108
	5.4.3 Condición de estabilidad robusta.....	110
	5.4.4 Resultados.....	111
5.5	SINTONÍA AUTOMÁTICA UTILIZANDO ÍNDICES DE CONTROLABILIDAD BASADOS EN LA NORMA l_1	116
	5.5.1 Sintonía basada en el cálculo de la mínima variación de la salida.....	117
	5.5.2 Sintonía basada en el cálculo de la máxima perturbación permitida.....	118
	5.5.3 Inclusión de restricciones asimétricas.....	119
5.6	SINTONÍA AUTOMÁTICA DE CONTROLADORES MPC APLICADOS A LA PLANTA BSM1.....	122

5.6.1	Planteamiento del problema de optimización.....	122
5.6.2	Resultados.....	124
5.7	CONCLUSIONES.....	124

DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y SISTEMAS DE CONTROL PREDICTIVO: APLICACIÓN AL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS 127

6.1	METODOLOGÍA DE DISEÑO INTEGRADO	127
6.2	PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN	129
6.3	DISEÑO INTEGRADO ROBUSTO.....	130
6.4	ESTRATEGIAS DE OPTIMIZACIÓN	132
6.5	DISEÑO SIMULTÁNEO DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS Y CONTROLADOR MPC	133
6.5.1	Definición del problema de optimización para la planta nº 1 con eliminación de sustrato	134
6.5.2	Definición del problema de optimización para la planta nº 3 con eliminación de nitrógeno	137
6.6	RESULTADOS DE DISEÑO SIMULTÁNEO DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS Y CONTROL MPC.....	139
6.6.1	Parámetros del problema de optimización	140
6.6.2	Región de incertidumbre para el diseño integrado robusto	143
6.6.3	Diseño secuencial versus diseño simultáneo de procesos y sistemas de control.....	144
6.6.4	Resultados preliminares de diseño integrado utilizando índices de desempeño dinámicos.....	145
6.6.5	Resultados de diseño integrado robusto	147
6.6.6	Influencia de los pesos en los índices de controlabilidad.....	151
6.6.7	Análisis de Pareto del problema multiobjetivo.....	154
6.6.8	Utilización de diferentes índices de controlabilidad.....	156
6.7	Diseño integrado del proceso de fangos activados utilizando la planta nº 3	157
6.8	Conclusiones.....	159

SÍNTESIS DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS..... 161

7.1	SÍNTESIS DE PROCESOS	161
7.2	FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA.....	162
7.3	SÍNTESIS ECONÓMICA.....	167
7.3.1	Planteamiento del problema y algoritmo de optimización	167
7.3.2	Resultados.....	168
7.4	SÍNTESIS DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS CON CONTROL PI..	169
7.4.1	Planteamiento del problema y algoritmo de optimización	169
7.4.2	Resultados.....	171
7.5	SÍNTESIS DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS CON CONTROL MPC.....	172
7.5.1	Planteamiento del problema y algoritmo de optimización	172
7.5.2	Resultados.....	173
7.6	CONCLUSIONES.....	175

CONCLUSIONES, PRINCIPALES APORTACIONES Y TRABAJO FUTURO.....	177
LISTA DE PUBLICACIONES GENERADAS.....	178
TRABAJO FUTURO	181
REFERENCIAS	183
Apéndice I: DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE ALGUNAS NORMAS	191
Apéndice II: MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN UTILIZADOS	195
II.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN	195
II.2 BÚSQUEDA ALEATORIA DIRIGIDA.....	196
II.3 ENFRIAMIENTO SIMULADO	198
II.4 ALGORÍTMOS GENÉTICOS	201

Índice de Tablas

Tabla 2.1: Variables de estado para el modelo de la planta nº 1	39
Tabla 2.2: Dimensiones de la planta, características del influente, y parámetros cinéticos y estequiométricos para la planta nº 1.	41
Tabla 2.3: Variables de estado para el modelo ASM1 (planta nº 2)	45
Tabla 2.4: Procesos básicos para el modelo ASM1 (planta nº 2).....	46
Tabla 2.5: Dimensiones y características del influente en la planta nº 2.....	49
Tabla 2.6: Valor de los parámetros cinéticos y estequiométricos del ASM1 (planta nº 2) ..	49
Tabla 2.7: Variables de estado para la planta nº 3	50
Tabla 2.8: Dimensiones, características del influente y parámetros para la planta nº 3.....	52
Tabla 2.9: Límites sobre la calidad del efluente.....	55
Tabla 2.10: Punto de trabajo nominal del proceso	58
Tabla 2.11: Ganancias, ceros y valor final de s_I para distintos saltos en la entrada q_r	60
Tabla 2.12: Valor final de s_I y ganancias en la planta con punto de operación elevado	62
Tabla 2.13: Influencia del punto de operación en los ceros del sistema	62
Tabla 2.14: Ganancias para distintos saltos en q_r para la planta con V_I y A aumentados ...	63
Tabla 3.1: Restricciones dinámicas para el MPC	78
Tabla 5.1: Esquema de resultados de sintonía automática utilizando el índice de sensibilidad mixta H_∞	105
Tabla 5.2: Dimensiones de la planta y punto de trabajo para sintonía automática.....	105
Tabla 5.3: Resultados para sintonía automática robusta variando s_I en el extremo inferior de la región de incertidumbre	112
Tabla 5.4: Resultados de sintonía automática variando V_I y A en el extremo inferior de la región de incertidumbre.....	115
Tabla 5.5: Resultados de sintonía automática para MPC con penalización terminal.....	116
Tabla 5.6: Esquema de resultados de sintonía automática utilizando índices basados en la norma l_I	116
Tabla 5.7: Resultados de sintonía mediante índices basados en la norma l_I para distintas cotas en $\ \mathbf{M}_0\ $	118

Tabla 5.8: Valores de la perturbación máxima permitida obtenidos por sintonía automática.....	119
Tabla 5.9: Resultados de sintonía automática para diferentes límites asimétricos en la señal de control.....	121
Tabla 5.10: Resultados de sintonía automática para el BSM1	124
Tabla 6.1: Esquema resumen de resultados de diseño integrado	140
Tabla 6.2: Límites de las variables de decisión.....	141
Tabla 6.3: Límites para las restricciones de proceso.....	141
Tabla 6.4: Restricciones dinámicas del MPC con restricciones.....	142
Tabla 6.5: Resultados de diseño clásico versus diseño integrado	145
Tabla 6.6: Índices de controlabilidad y valores dinámicos para los resultados de diseño clásico e integrado	146
Tabla 6.7: Resultados de diseño integrado con índices dinámicos.....	147
Tabla 6.8: Índices de controlabilidad y valores dinámicos para los resultados de diseño integrado con índices dinámicos.....	147
Tabla 6.9: Resultados de diseño integrado robusto en el punto de operación nominal.....	148
Tabla 6.10: Índices de controlabilidad para los resultados de diseño integrado robusto en el punto estacionario nominal.....	149
Tabla 6.11: Resultados de diseño simultaneo robusto: coste e índices de controlabilidad cuando el proceso se desplaza al peor extremo de la región de incertidumbre.....	149
Tabla 6.12: Valores de las restricciones de proceso y del valor absoluto de las derivadas para los resultados de diseño integrado robusto en el punto estacionario nominal.....	150
Tabla 6.13: Resultados de diseño con $\ M_0\ _1 < 3500$, para dos estrategias de optimización, en el punto nominal	151
Tabla 6.14: Pesos $W_{esf_{si}}$ para el índice de sensibilidad mixta.....	152
Tabla 6.15: Resultados de diseño para distintos W_{esf} en el punto nominal	153
Tabla 6.16: Óptimos de Pareto para el problema multiobjetivo.....	156
Tabla 6.17: Resultados de diseño integrado para dos índices de desempeño diferentes....	156
Tabla 6.18: Resultados de diseño integrado utilizando el índice $\ S_0 \cdot R_{d0}\ _1$	157
Tabla 6.19: Restricciones de operación para el proceso con eliminación de nitrógeno....	158
Tabla 6.20: Resultados de diseño integrado para el proceso con eliminación de nitrógeno.....	159
Tabla 7.1: Restricciones de operación para dos escenarios de trabajo en el proceso de fangos activados	166
Tabla 7.2: Resultados de la síntesis económica del proceso de fangos activados.....	168
Tabla 7.3: Desempeño del enfriamiento simulado	169
Tabla 7.4: Resultados del diseño integrado del proceso de fangos activados con un controlador PI.....	171
Tabla 7.5: Resultados de diseño integrado con síntesis del proceso de fangos activados con un controlador MPC	174

Índice de Figuras

Figura 1.1: Diseño clásico de procesos	24
Figura 1.2: Diseño simultáneo de procesos y sistemas de control	25
Figura 2.1: Proceso de fangos activados	37
Figura 2.2: Variables del proceso de fangos activados en la planta nº 1.....	38
Figura 2.3: Procesos de nitrificación y desnitrificación	42

Figura 2.4: Esquema general de la planta BSM1 para el proceso de fangos activados (planta n° 2)	43
Figura 2.5: Configuración de planta y controlador para la planta n° 3	50
Figura 2.6: Perturbaciones BSM1 de sustrato y caudal en el influente para tiempo de tormenta	53
Figura 2.7: Perturbaciones BSM1 de sustrato y caudal en el influente para tiempo seco	53
Figura 2.8: Esquema general de la planta n° 1 con el sistema de control	57
Figura 2.9: Esquema general de la planta n° 2 con el sistema de control	58
Figura 2.10: Evolución de s_I para un salto en q_r ascendente (azul: modelo no lineal; magenta: modelo linealizado)	59
Figura 2.11: Evolución de s_I para perturbaciones BSM1 de tiempo seco en q_i y s_i (azul: modelo no lineal; magenta: modelo linealizado)	60
Figura 2.12: Evolución de s_I y x_I para un salto ascendente en q_r (azul: modelo no lineal; magenta: modelo linealizado)	61
Figura 3.1: Estrategia de funcionamiento del MPC	67
Figura 3.2: Diagrama de bloques del MPC sin restricciones	69
Figura 3.3: Estructura general del sistema en lazo cerrado con MPC para la planta n° 1	76
Figura 3.4: Rechazo a una perturbación salto ascendente en s_i para el MPC con penalización terminal y pesos $R=0.05$ (negro), $R=0.01$ (magenta), $R=0.003$ (azul)	78
Figura 3.5: Comportamiento del sistema en lazo cerrado con perturbaciones, para MPC con penalización terminal (línea continua), formulación básica (línea discontinua) y lazo abierto (azul)	79
Figura 3.6: Comportamiento del sistema en lazo cerrado con perturbaciones, para MPC con penalización terminal y $H_c=20$ (negro), $H_c=10$ (magenta), $H_c=5$ (azul)	79
Figura 4.1: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado nominal	83
Figura 4.2: Selección típica de W_p^{-1} (línea discontinua) junto con el espectro inverso de las perturbaciones medibles (línea continua fina) y la función de sensibilidad S (línea continua gruesa)	85
Figura 4.3: Selección típica de la magnitud de los pesos W_{esf}	87
Figura 4.4: Diagrama de bloques equivalente a la figura 4.1	89
Figura 4.5: Diagrama de bloques sistema en lazo cerrado con dos perturbaciones a la salida	92
Figura 5.1: Metodología general de sintonía automática de controladores MPC	97
Figura 5.2: Evaluación de la función objetivo y las restricciones	98
Figura 5.3: Vértices de la región de incertidumbre generada por variaciones en s_I , donde en rojo se representa el extremo más difícil de controlar	101
Figura 5.4: Vértices de la región de incertidumbre generada por variaciones en el influente, donde en rojo se representa el extremo más difícil de controlar	102
Figura 5.5: Vértices de la región de incertidumbre generada por variaciones en la planta, donde en rojo se representa el extremo más difícil de controlar	102
Figura 5.6: Estrategia de optimización iterativa en dos pasos	104
Figura 5.7: Magnitud de las incertidumbres multiplicativas Δ (línea continua para la incertidumbre del modelo localizado en $(s_I)_0 - 20$ mg/l)	111
Figura 5.8: Magnitud inversa del peor caso de las incertidumbres (Δ^{-1}) (línea continua), espectro inverso de la perturbación s_i (línea punteada) y magnitud de $W_{p_{si}}^{-1}$ (línea a trazos)	111
Figura 5.9: Magnitud de $W_{p_{si}}^{-1}$ (rojo) y de $(s_{si})_0$ para MPC sintonizado con robustez (negro) y sin robustez (azul)	113
Figura 5.10: Magnitud de $W_{p_{si}}^{-1}$ (rojo) y de $(s_{si})_1$ para MPC sintonizado con robustez (negro) y sin robustez (azul)	113

Figura 5.11: Evolución de s_I y q_r con MPC sintonizado con robustez (negro) y sin robustez (azul) en el extremo inferior de la región de incertidumbre	114
Figura 5.12: Evolución de s_I y q_r para el proceso con MPC sintonizado con $W_{p_{si}1}$ (azul), y $W_{p_{si}2}$ (negro).....	115
Figura 5.13: Evolución dinámica de s_I y q_r para el MPC sintonizado con $u_{max} = 2000$ (azul) y $u_{max} = 3500$ (negro)	118
Figura 5.14: Evolución de s_I y q_r para sintonía con $U^t = (420, q_r)$ (azul) y $U^t = (420, q_r - 100)$ (negro).....	121
Figura 5.15: Estructura general del sistema en lazo cerrado con MPC para la planta n° 2	122
Figura 6.1: Diseño simultáneo de procesos y sistemas de control MPC.....	128
Figura 6.2: Evaluación de las restricciones de controlabilidad para diseño integrado robusto	131
Figura 6.3: <i>Estrategia 1</i> de optimización en dos pasos	132
Figura 6.4: <i>Estrategia 2</i> de optimización, separando la sintonía del MPC	133
Figura 6.5: Evolución de q_r y s_I para la planta obtenida mediante diseño con robustez, en el punto nominal (azul) y en el peor vértice de la región de incertidumbre (negro)	150
Figura 6.6: Magnitud de $(S_{si})_0$ y $(S_{qi})_0$ para resultados de diseño sin robustez (azul) y con robustez (negro), junto con el módulo de $W_{p_{si}}^{-1}$ y $W_{p_{qi}}^{-1}$ (rojo) y el espectro inverso de las perturbaciones (verde).....	151
Figura 6.7: Evolución de $s_1 - (s_1)_0$ y q_r para los resultados de diseño utilizando el peso 1 (negro) y peso 3 (verde) de la tabla 6.14	152
Figura 6.8: Magnitudes de $s \cdot (M_{s_i})_0$ (izquierda) y $(S_{si})_0$ (derecha) para los resultados con pesos 1 (negro) y 3 (verde). En línea discontinua $W_{p_{si}}^{-1}$	153
Figura 6.9: Evolución de los objetivos f_1 y f_2 a lo largo de la optimización	154
Figura 6.10: Evolución de V_I y del peso R del controlador a lo largo de la optimización	154
Figura 6.11: Frente de Pareto para el problema multiobjetivo propuesto	155
Figura 6.12: Configuración de planta y controlador para la planta n° 3.....	158
Figura 6.13: Evolución de $S_{NO,dnit} - S_{NO,dnit,ref}$ y q_a para la planta diseñada con $\ \mathbf{M}_0\ < 2570$ (azul) y $\ \mathbf{M}_0\ < 2400$ (negro)	159
Figura 7.1: Superestructura del proceso de fangos activados.....	163
Figura 7.2: Evolución dinámica de s_I para la planta obtenida por síntesis económica	168
Figura 7.3: Evaluación de las soluciones candidatas durante la ejecución del enfriamiento simulado para el diseño integrado con un PI	170
Figura 7.4: Evolución dinámica de s_1 para la planta obtenida mediante síntesis con PI para el <i>escenario 2</i> (izquierda) y el <i>escenario 1</i> (derecha).....	172
Figura 7.5: Superestructura del proceso de fangos activados con controlador predictivo multivariable MPC	172
Figura 7.6: Magnitud de la función de sensibilidad $S_0 \mathbf{R}_{a0}$ para los casos 1 (izquierda) y 2 (derecha), junto con W_p^{-1} (línea punteada) y el inverso del espectro de perturbaciones en el influente.	175
Figura 7.7: Evolución de s_I para diseño y síntesis con MPC (línea punteada) comparada con la síntesis económica (línea continua) del punto 7.3, en el escenario 2 de restricciones.....	175
Figura II.1: Algoritmo de búsqueda aleatoria dirigida	197
Figura II.2: Algoritmo de búsqueda del método de enfriamiento simulado.....	200
Figura II.3: Procedimiento general de un algoritmo genético	203

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Resumen:

En este primer capítulo se realiza una introducción general al trabajo desarrollado, comenzando por la descripción de las características principales de las técnicas de diseño de plantas de procesos químicos, y la definición de algunos conceptos básicos como la síntesis de procesos y el diseño de un sistema de control. A continuación se presenta el marco general de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control o diseño integrado, que mejora las técnicas clásicas al considerar aspectos de controlabilidad dentro del diseño. El capítulo continúa con una descripción general de estas técnicas y una revisión del estado del arte recorriendo las diversas metodologías desarrolladas por otros investigadores. Finalmente, se describen los objetivos de la tesis y un esquema general de su organización.

1.1 DISEÑO CLÁSICO Y DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y SISTEMAS DE CONTROL

El diseño de procesos químicos es una tarea bien estructurada que tiene como objetivo la obtención de un producto industrial que cumpla ciertas especificaciones, para lo cual se realiza una definición cuantitativa de todas las variables estructurales, físicas, y de operación involucradas. Este procedimiento está basado en la consideración de diversos aspectos como son los costes de construcción, de operación y el consumo de energía o reactivos. De acuerdo con estos requerimientos, se determina el modo de operación, la estructura física de la planta y las dimensiones de las unidades que la componen. Tradicionalmente, el diseño se ha llevado a cabo de manera secuencial siguiendo las siguientes etapas: síntesis del proceso, diseño de los equipos individuales y el cálculo del punto de operación estacionario.

La síntesis de un proceso consiste en determinar la interconexión óptima entre las unidades del mismo, así como su número y tipo para obtener un comportamiento deseado. En concreto, se realiza un estudio preliminar de las operaciones básicas requeridas para transformar la materia prima en el producto final, y se analizan distintas alternativas estructurales de la planta física, eligiendo a posteriori la mejor desde el punto de vista de los costes de construcción y operación.

Tras el diseño del proceso, se lleva a cabo el diseño del sistema de control que se encarga de adaptar la planta a los cambios a los que está sujeta durante su operación, a fin de que trabaje en el punto para la que fue diseñada. El diseño del sistema de control consiste en la selección de las variables manipuladas y controladas, el emparejamiento óptimo de todas ellas en base a ciertos requisitos de estabilidad y desempeño, así como la determinación de los parámetros de sintonía.

Es una práctica común realizar secuencialmente las tareas de diseño del proceso y diseño del sistema de control (Figura 1.1), sin tener en cuenta aspectos dinámicos ni las condiciones reales en las que la planta va a operar, dando lugar en muchas ocasiones a

plantas con problemas de controlabilidad, calidad del producto, seguridad y beneficios económicos en general (Luyben, 1993; Gutiérrez, 2000).

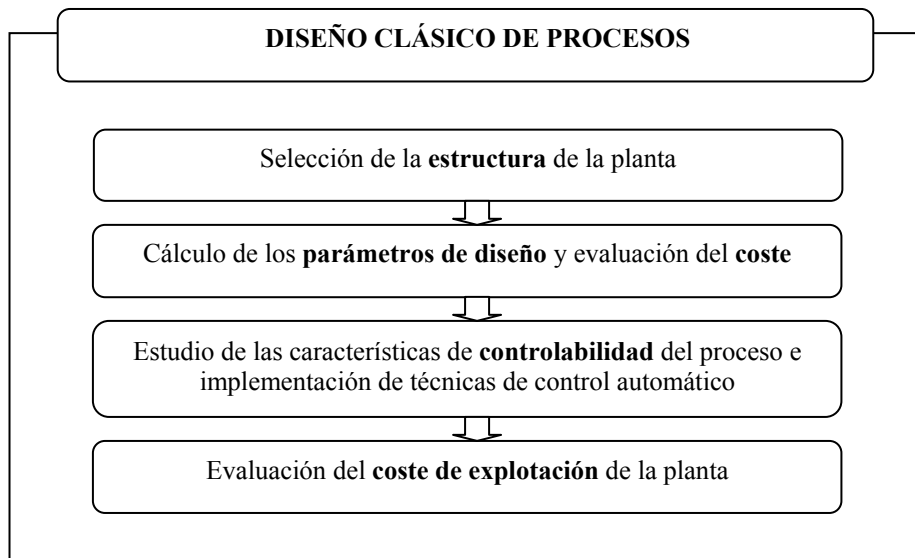


Figura 1.1: Diseño clásico de procesos

El *diseño simultáneo de procesos y sistemas de control* (también denominado diseño integrado, diseño y control simultáneo o únicamente diseño simultáneo) se puede definir como una metodología que desarrolla simultáneamente el diseño de los procesos y el diseño del sistema de control asociado. A pesar de que existen numerosos trabajos al respecto (Luyben y Floudas 1994; Lewin 1999; Sakizlis *et al.* 2004; Ricardez-Sandoval *et al.* 2009c), no se ha establecido una metodología única debido a que es complicado definir los objetivos globales del problema en cuanto a estabilidad, desempeño y controlabilidad en general. En cualquier caso, el diseño simultáneo de procesos y sistemas de control lleva a un problema de optimización multiobjetivo donde los objetivos económicos, de operabilidad, controlabilidad y desempeño se consideran de forma conjunta, proporcionando una planta óptima más controlable. El problema matemático que se genera es necesario resolverlo mediante adecuadas técnicas de optimización, que en muchos casos son complejas. En la Figura 1.2 se presentan los pasos generales a seguir para la realización del diseño integrado.

Los hechos que motivan la utilización del diseño integrado de procesos están relacionados principalmente con la interacción existente entre el diseño y la controlabilidad. Los procesos son cada vez más complicados, y las ventajas de considerar la controlabilidad en esta fase han sido ampliamente reconocidas (Luyben y Floudas 1994; Lewin 1999). En este contexto, es importante mencionar que por controlabilidad se entiende la habilidad del proceso de alcanzar un grado aceptable de desempeño dinámico, marcado por condiciones basadas en índices (Wolff *et al.*, 1992; Skogestad y Postlethwaite, 1996).

Además, las cada vez más estrictas regulaciones medioambientales y las exigencias en la calidad de los productos se traducen en mayores requerimientos en cuanto a la eficiencia de los procesos. Esto implica una mayor automatización para lograr las condiciones de operación óptimas que permitan satisfacer dichos requerimientos. Una forma de responder adecuadamente a estas imposiciones es la metodología de diseño integrado, que permite incorporar el desempeño dinámico del sistema en el

procedimiento de diseño. De esta manera, se obtienen plantas económicamente óptimas que garantizan inherentemente un desempeño dinámico satisfactorio, minimizando costes de construcción y operación.

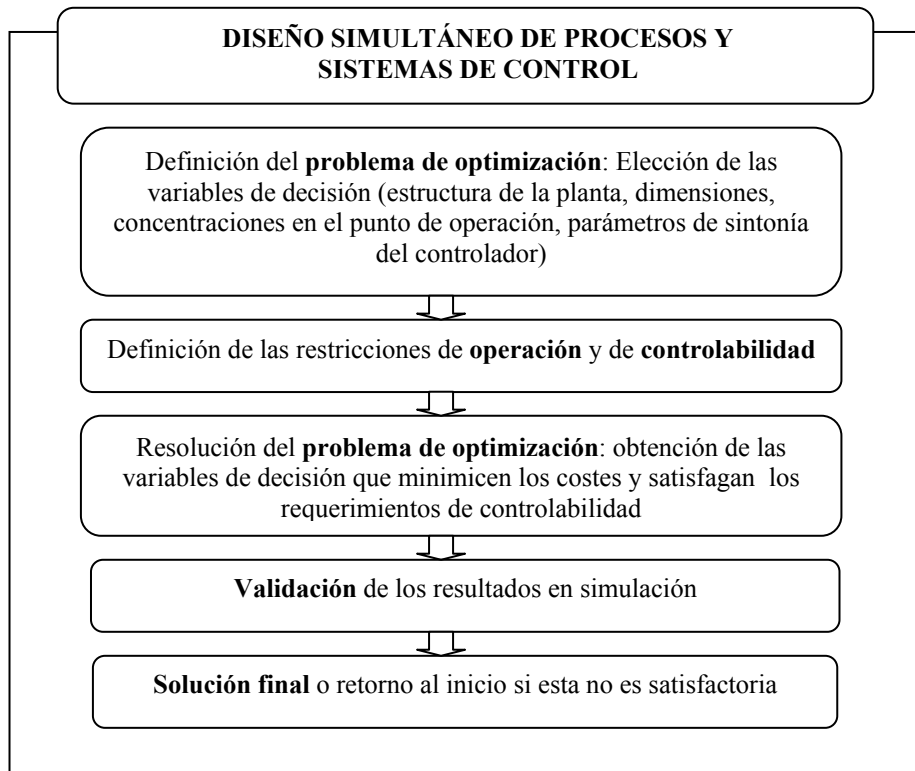


Figura 1.2: Diseño simultáneo de procesos y sistemas de control

Según puede verse en la literatura (Sakizlis *et al.*, 2004; Ricardez-Sandoval *et al.*, 2009c) el diseño simultáneo de procesos y sistemas de control se suele realizar utilizando simulaciones dinámicas del proceso en lazo cerrado, con el fin de obtener ciertos índices de controlabilidad como por ejemplo la integral del error cuadrático (*Integral Square Error*, ISE), que tiene en cuenta el efecto de las perturbaciones y las no linealidades de los procesos. Estas simulaciones dinámicas son relativamente lentas, y puesto que se realizan de forma iterativa en la optimización, los tiempos de cálculo son elevados en muchos casos. Una buena alternativa para acelerar el diseño integrado es el uso de normas de las funciones de sensibilidad del sistema, que es la base de la metodología desarrollada en este trabajo.

En cuanto a los esquemas de control utilizado, habitualmente se utilizan controladores de tipo Proporcional Integral (PI), debido a las dificultades de integrar control avanzado porque involucra problemas de optimización más complejos (Sakizlis *et al.*, 2004). La utilización de controladores como el controlador predictivo basado en modelos (*Model Predictive Control*, MPC) puede mejorar el comportamiento de los procesos diseñados.

En este trabajo se propone una nueva metodología para diseño integrado incluyendo controladores MPC, que incorpora índices basados en normas y robustez a través de la utilización de regiones de incertidumbre poliédrica definidas por modelos locales lineales. Como ejemplo de estudio, la metodología se aplica al proceso de fangos activados en una planta depuradora de aguas residuales (Moreno *et al.*, 1992).

1.2 CONTROLABILIDAD DE PROCESOS

El término “controlabilidad” se utiliza ampliamente en el diseño de sistemas de control con muy diversas interpretaciones, aunque se pueden identificar dos corrientes fundamentales. Una de ellas es la denominada controlabilidad de estado o de Kalman, basada en la teoría de sistemas, que afirma que un sistema es controlable si se puede llevar desde cualquier estado inicial a otro estado mediante una señal de control en un intervalo de tiempo finito (Ogata, 2003). La otra corriente, aplicada en el campo del diseño y control de procesos, define la controlabilidad como una propiedad que mide la capacidad de una planta para cumplir los objetivos de control a pesar de las perturbaciones y la incertidumbre en los parámetros de diseño, y la denomina con frecuencia controlabilidad de entrada-salida.

Englobando las distintas interpretaciones, la controlabilidad se puede definir como la habilidad de un sistema para alcanzar un desempeño de control aceptable, lo que significa mantener las salidas dentro de unos límites específicos, a pesar de las perturbaciones, ruido e incertidumbre del modelo, utilizando las entradas y mediciones disponibles (Skogestad y Postlethwaite, 1996). Esta definición sugiere que una planta es controlable si existe un controlador que logre un desempeño aceptable para todas las posibles variaciones en la planta. Desde este punto de vista, la controlabilidad es una propiedad inherente al proceso e independiente del controlador seleccionado, aunque también se puede aplicar a sistemas en lazo cerrado con un controlador concreto.

Otros conceptos básicos asociados al de controlabilidad son los siguientes (Jorgensen *et al.*, 1999; Kariwala y Skogestad, 2007):

- La operabilidad, definida como la habilidad de la planta de lograr un desempeño operacional estático y dinámico aceptable. Un proceso tiene la propiedad de la operabilidad si existe un controlador que pueda rechazar las perturbaciones hasta un determinado nivel. La operabilidad como propiedad incluye controlabilidad, flexibilidad y conmutabilidad.
- La flexibilidad es la posibilidad de alcanzar el estado estacionario en un conjunto determinado de condiciones de operación distintas o sobre un rango de condiciones de incertidumbre.
- La conmutabilidad (*switchability*) es la facilidad de un sistema para pasar de un punto de operación estacionario a otro. En algunas plantas es deseable que este cambio entre puntos de trabajo ocurra rápido para minimizar las pérdidas de producto y consumo de energía.

El concepto de controlabilidad tal como se interpreta en el diseño integrado es una medida de la capacidad de la planta para cumplir los objetivos de control (Luyben y Floudas, 1994a). Aunque se ha establecido como un concepto cualitativo, puede ser medida numéricamente a través de un conjunto de propiedades. La controlabilidad es una característica deseable en un diseño, y a lo largo de los años, el concepto ha ido evolucionando y tomando importancia como una condición necesaria en el diseño de procesos.

Numerosos trabajos muestran cómo la controlabilidad de un proceso está sujeta a las características estructurales, dimensiones y punto de trabajo establecidas en el diseño de

la planta (Morari, 1992). Estos trabajos establecen que un controlador es capaz de alcanzar un desempeño aceptable en la medida que el sistema sea fácil de controlar, mientras que un controlador implementado en un proceso con un diseño deficiente difícilmente logra el comportamiento deseado.

1.3 ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE

El diseño simultáneo de procesos y sistemas de control es una disciplina muy amplia y compleja que desde hace ya más de 30 años despierta gran interés tanto en la comunidad científica como en la industria. En la actualidad, el diseño simultáneo, o diseño integrado, está completamente aceptado como una línea de trabajo necesaria para la mejora del desempeño de los procesos y sus sistemas de control.

En las aplicaciones más completas de diseño integrado se contempla también la síntesis del proceso incluyendo la selección de la estructura de control, mediante la utilización de variables binarias en el problema de optimización. Por otro lado, existen otros trabajos que se centran más en la resolución del problema de diseño integrado fijando de antemano la estructura de la planta. A pesar de esta supuesta división, se procede a realizar una revisión del estado del arte de forma conjunta, puesto que las ideas subyacentes son comunes a pesar de que lógicamente los métodos de optimización puedan ser distintos.

1.3.1 Metodologías preliminares de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control

Los primeros estudios sobre los efectos del diseño en la controlabilidad de los procesos fueron realizados por Ziegler y Nichols (1943), que definieron la controlabilidad como la capacidad del proceso de alcanzar y mantener un valor de equilibrio deseado. A pesar de que la interacción entre el diseño y la controlabilidad de un proceso es un hecho constatado desde hace bastante tiempo, hasta la década de los 70 no surgieron los primeros trabajos en diseño simultáneo de procesos y sistemas de control, como por ejemplo (Nishida *et al.*, 1975).

Los trabajos preliminares en diseño integrado versan sobre el estudio de la controlabilidad de los procesos, y el efecto que el diseño produce en ésta. Se trata de estudios en los que las diversas alternativas de diseño se comparan en base a la información proporcionada por índices o magnitudes de controlabilidad tanto en lazo abierto como en lazo cerrado (Matriz de Ganancias Relativas RGA, números de condición de perturbación, ceros en el semiplano derecho, etc.) (Skogestad y Wolf, 1992; Skogestad y Morari, 1987; Barton *et al.* 1992) y de entre ellas se elige la más adecuada en función de los requerimientos del problema. En esta línea hay numerosos trabajos, donde destaca Luyben (1993), que propone diversas estructuras alternativas para un sistema de reactores en serie y evalúa la controlabilidad mediante un índice relacionado con parámetros operacionales de la planta. En trabajos más recientes como los de Ochoa (2005), se utilizan métricas de controlabilidad prácticas basadas en el análisis de la controlabilidad de estado para sistemas no lineales, y en Muñoz *et al.* (2007) se extiende el trabajo anterior para sistemas acoplados.

Aunque la utilización de estos índices de controlabilidad es sencilla, surgen problemas como la relación incierta entre el valor de su medida y el desempeño de la planta a diseñar, o los conflictos entre diferentes índices de controlabilidad (Sakizlis *et al.*, 2004). Además, el diseño de la planta y del sistema de control se llevan a cabo de forma secuencial, obteniéndose únicamente diversas alternativas de posibles diseños mediante la optimización del modelo en estado estacionario.

Las primeras metodologías que afrontan ya el diseño simultáneo de procesos y sistemas de control de forma conjunta tratan de diseñar procesos óptimos económicamente y que puedan operar de forma eficiente en un entorno del punto nominal de operación. Se utiliza normalmente un índice económico y un índice dinámico como por ejemplo el ISE, poniendo de manifiesto la necesidad de una solución de compromiso entre los costes y la controlabilidad, aunque con la dificultad de precisar la importancia de cada uno de ellos. Como ejemplos se tiene a (Schweiger y Floudas, 1997), que resuelven el problema de diseño integrado y síntesis con controladores de tipo proporcional integral (PI) utilizando el ISE calculado con el modelo dinámico no lineal, y (Gutiérrez y Vega, 2002), donde se presenta una metodología de diseño integrado basada en la resolución de un problema de programación no lineal (*Non linear Programming*, NLP) que incluye en las restricciones la estabilidad y la controlabilidad a partir de los autovalores de la matriz de estados y las ganancias del sistema respecto de las perturbaciones en lazo cerrado, respectivamente.

En las secciones siguientes se revisan los trabajos de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control más relevantes en relación a esta tesis, comenzando por el diseño con control PI, para pasar después a las metodologías que incluyen algún tipo de control avanzado, incertidumbre y condiciones de robustez, entre otras cosas. También se mencionan todos los trabajos que aplican diseño integrado al proceso de fangos activados en plantas de depuración de aguas residuales. Puesto que no se pretende hacer una revisión completa de trabajos de diseño integrado, se remite al lector a las revisiones bibliográficas de (Lewin, 1999; Sakizlis *et al.*, 2004; Seferlis y Georgiadis, 2004; Ricardez-Sandoval *et al.*, 2009c).

1.3.2 Diseño integrado de procesos incluyendo control de tipo proporcional integral

En el grupo inicial de trabajos de diseño integrado que utilizan control PI es interesante mencionar a aquellos que incluyen incertidumbre en su formulación. Entre ellos está Mohidden *et al.* (1996), que plantean un problema general de diseño integrado e incluyen en las restricciones la variabilidad del proceso debida a perturbaciones e incertidumbre; Bansal *et al.* (2000), que utilizan la misma metodología planteando mejoras en la resolución del problema de optimización dinámica mixto-entero (*Mixed Integer Dynamic Optimization*, MIDO) generado; Ekawati (2003), que incorpora el denominado índice de controlabilidad de salida (OCI) (Vinson y Georgakis, 2000) e introduce la incertidumbre en la representación geométrica multidimensional utilizada para el cálculo de este índice, y Blanco y Bandoni (2003), que incluyen incertidumbre determinista planteando conjuntos de valores discretos posibles para ciertos parámetros del problema.

Algunas mejoras en diseño integrado con control PI propuestas en trabajos recientes son las que introducen los trabajos siguientes. Asteasuain *et al.* (2007) incorporan control

por prealimentación (*feedforward*) y control de relación además de controladores PI multivariables, y para resolver el problema de diseño, aplica el algoritmo del “peor caso” consistente en una optimización de dos niveles. Primero se considera un conjunto de parámetros inciertos y luego se extiende para encontrar la mayor violación de las restricciones de operación sobre el dominio de parámetros con incertidumbre. En Grosch *et al.* (2008) se realiza diseño integrado del proceso de cristalización MSMRP (*continuous mixed-suspension mixed-product removal*) en presencia de incertidumbre paramétrica incluyendo el denominado “margen de retroceso” (*back-off*). El *back-off* consiste en dotar de cierto margen al diseño calculando lo que el proceso puede alejarse de las condiciones de operación óptimas a pesar de las perturbaciones e incertidumbres, garantizando que ninguna de las restricciones del proceso sea violada, y se utiliza también en otros trabajos como Bahri *et al.* (1995), Kookos y Perkins (2004) y (Swartz, 2004).

Muchos de los trabajos anteriores utilizan índices de controlabilidad dinámicos que implican la resolución de problemas MIDO complejos. Para evitar esto y reducir la optimización a problemas NLP se ha recurrido a la utilización de técnicas de control robusto, destacando los trabajos con control PI de Ricardez-Sandoval *et al.* (2008, 2009a, 2009b, 2010). Ricardez-Sandoval *et al.* (2008) desarrollan un método que utiliza técnicas robustas para calcular los límites de la estabilidad, la factibilidad y el escenario del peor caso, representando el sistema no lineal en lazo cerrado mediante modelos en el espacio de estados con parámetros inciertos. También Ricardez-Sandoval *et al.* (2009a) utilizan como índice el valor singular estructurado μ y consideran un modelo FIR (*Finite Impulse Response*) con incertidumbre en sus parámetros, y Ricardez-Sandoval *et al.* (2009b) incluyen además de lo anterior medidas de desempeño y estabilidad robusta basadas en la teoría de Lyapunov. A pesar de las ventajas de estas técnicas, todos estos trabajos utilizan únicamente leyes de control PI y no se consideran estrategias de control avanzado que pueden producir grandes mejoras sobre el desempeño de los sistemas de control.

1.3.3 Diseño integrado de procesos incluyendo control avanzado

La inclusión de control avanzado en el diseño simultáneo de procesos y sistemas de control fue lenta en los comienzos, debido a que muchos de estos esquemas de control implican en principio la resolución de problemas de optimización en línea, produciendo un aumento drástico de la complejidad de los cálculos. Por esto, la mayor parte de los trabajos se enfocaban en el uso de controladores PI convencionales. La introducción de esquemas de control avanzados fue uno de los grandes retos en este campo de investigación, aunque debido al aumento de la potencia de cálculo de los ordenadores, así como al desarrollo de técnicas de control paramétricas, en la actualidad ya hay numerosos trabajos de investigación enfocados en el control avanzado.

Un primer paso hacia la aplicación de esquemas de control predictivo en el diseño integrado se observa en Brengel y Seider (1992) y Loeblein *et al.* (1999), aunque ambos trabajos incorporan simulaciones dinámicas para calcular los índices de controlabilidad, y además el último implementa un controlador MPC sin restricciones.

En Sakilis *et al.* (2003, 2004) se incluye control MPC paramétrico en el diseño integrado. Este tipo de control MPC permite calcular las acciones de control de forma explícita evitando la optimización del controlador en línea, aunque para resolver el

problema MIDO generado se utiliza un complejo método de descomposición que requiere relajaciones del problema y/o resolución de secuencias de optimización no lineal NLP para llegar a la solución, causando inconvenientes relacionados con la dimensión de estos problemas y el gran esfuerzo computacional necesario. Además, se incluyen simulaciones dinámicas para chequear la factibilidad dinámica.

Posteriormente, (Baker *et al.*, 2006) también consideran controladores MPC en el diseño de un CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*). El problema de programación cuadrática (*Quadratic Programming*, QP) del MPC se introduce directamente en el diseño integrado, planteando una solución conjunta en la cual los subproblemas del MPC se sustituyen por sus condiciones de optimalidad KKT (Karush-Kuhn-Tucker). También Chawankul *et al.* (2007) incorporan control MPC y utiliza como medida de desempeño en lazo cerrado la peor variabilidad en la salida controlada debida a la incertidumbre en el modelo, añadiéndole a la función objetivo un coste asociado. Para calcular esta variabilidad y la estabilidad robusta, se utiliza el valor singular estructurado. Su metodología no incorpora simulaciones dinámicas pero no se aplica a la sintonía de todos los parámetros del MPC, además de considerar únicamente perturbaciones no medibles.

Otros trabajos que incluyen MPC pero con simulaciones dinámicas son Pajula *et al.* (2006), que consideran incertidumbre de medida y su efecto sobre el diseño de la estructura de control, que también puede ser de tipo PI o en cascada, y (Francisco *et al.* 2005, 2006, 2007), que incluyen MPC en el diseño integrado de un proceso de fangos activados en una planta depuradora de aguas residuales, considerando medidas dinámicas como el ISE y resolviendo un problema de optimización en dos pasos.

Hay también otros trabajos que incluyen en el diseño integrado estructuras de control avanzado diferentes al control MPC, como controladores Q -parametrizados en (Dunn *et al.*, 2003) y (Swartz, 2004), control por modelo interno (*Internal Model Control*, IMC) robusto en Chawankul *et al.* (2005), control óptimo en Terrazas-Moreno *et al.* (2008), Miranda *et al.* (2008), Patel *et al.* (2008) y Malcolm *et al.* (2007), estos dos últimos mediante un regulador lineal cuadrático (*Linear Quadratic Regulator*, LQR), y control borroso en Lu *et al.* (2010) donde este modelado se aplica para aproximar el proceso y derivar después reglas de control borroso que consigan la estabilidad, robustez y factibilidad.

1.3.4 Métodos de optimización en el diseño integrado

El planteamiento y resolución del problema de optimización es una parte muy importante en los desarrollos de diseño integrado. Debido a la necesidad de incorporar características dinámicas del proceso, en muchos trabajos se formula como un problema MIDO, por ejemplo Schweiger y Floudas (1997), Mohidden *et al.* (1996), Bansal *et al.* (2000), Sakizlis *et al.* (2004), Terrazas-Moreno *et al.* (2008), Asteasuain *et al.* (2006). Este planteamiento ofrece numerosas ventajas, como la facilidad de interpretar los resultados, de relacionar directamente índices económicos con el desempeño dinámico y de analizar la flexibilidad del proceso en presencia de perturbaciones, pero provocan que el problema de optimización sea complejo y requiera de un elevado esfuerzo computacional.

Por ello, en Mohidden *et al.* (1996) se proponen procedimientos de solución alternativos basados en una variante del *Generalized Benders Decomposition* (GBD) (Geoffrion, 1972); en Kookos y Perkins (2001) se propone un algoritmo de descomposición que se basa en la generación de cotas superiores e inferiores sobre el desempeño económico de la planta, y en Flores-Tlacuahuac y Biegler (2007) se propone la discretización completa obteniéndose un problema de dos etapas y se introduce la técnica de programación disyuntiva para mejorar el desempeño del algoritmo. Otra estrategia de descomposición es la de Hamid *et al.* (2010), que utiliza una metodología basada en modelos en la cual el problema de optimización se descompone en cuatro subproblemas: preanálisis, análisis del diseño, análisis del diseño del controlador y selección final junto con la verificación. La metodología hace uso de la termodinámica del proceso para determinar los parámetros óptimos de diseño, aunque sin incorporar incertidumbre. Otra posibilidad para aliviar la carga computacional impuesta por la resolución de los modelos dinámicos es la utilización de índices robustos para evaluar la controlabilidad (Ricardez *et al.*, 2008, 2009a, 2010).

Todos los trabajos mencionados utilizan métodos de optimización deterministas para resolver los problemas de diseño integrado de procesos. Debido a que el problema de optimización que se genera es normalmente no lineal, es común encontrar soluciones subóptimas, por lo que algunos autores han aplicado métodos de optimización estocásticos con éxito. Algunos de ellos son (Exler *et al.* 2008), que resuelven el problema no lineal mixto-entero (MINLP) generado en el diseño integrado mediante un algoritmo de optimización global, concretamente una modificación de la búsqueda tabú. Se aplica al modelo de referencia BSM1 (*Benchmark Simulation Model n° 1*) en una planta depuradora de aguas, incluyendo en la función objetivo factores como la calidad del efluente (EQ), la energía de bombeo (PE) y la energía de aireación (AE) y también al proceso de Tennessee-Eastman. También está Schlüter *et al.* (2009), que aplican el algoritmo de optimización global basado en colonias de hormigas a estos mismos problemas.

En Lamanna *et al.* (2009) se utilizan algoritmos genéticos para la resolución del problema, presentando una aproximación novedosa que considera tanto la controlabilidad de estado como la controlabilidad de salida. También hay otros trabajos que realizan diseño integrado de diversos procesos químicos mediante algoritmos genéticos como en (Revollar *et al.*, 2004), y (Revollar *et al.*, 2008, 2009). En estos últimos se aplican específicamente al proceso de fangos activados en una depuradora de aguas residuales, utilizando criterios de controlabilidad dinámicos como el ISE. Estos trabajos tienen la particularidad de que también se dedican a la selección de la estructura. Por último, en (Francisco *et al.*, 2005), los resultados de diseño integrado mediante algoritmos genéticos se comparan con los obtenidos mediante enfriamiento simulado (*simulated-annealing*).

1.3.5 Diseño integrado aplicado al proceso de fangos activados

Para finalizar con esta revisión es importante indicar aquellos trabajos de diseño integrado aplicados directamente al proceso de fangos activados en depuración de aguas residuales.

Los primeros trabajos de diseño integrado aplicados a este proceso son los de Gutiérrez (2000) y Gutiérrez *et al.* (2000, 2002) donde se realiza el diseño integrado y síntesis del

proceso de fangos activados con controladores PI. Se plantean varias estructuras de planta, con uno o dos reactores y decantadores, y tras un análisis de la controlabilidad, se realiza el diseño integrado utilizando índices de controlabilidad en lazo abierto y lazo cerrado. Se resuelve un problema NLP, y para la síntesis se utiliza el método GBD (*Generalized Benders Decomposition*). También en esta línea de aplicación está el trabajo de (Francisco *et al.*, 2003), que para una estructura fija de planta resuelve el diseño integrado con controladores PI y técnicas basadas en LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) para calcular los índices de controlabilidad.

En Rivas *et al.* (2001) se realiza el diseño óptimo del proceso de fangos activados, incluyendo costes de operación, y la parte de control se aplica al caso real de la planta de Galindo-Bilbao (España). En (Sendín *et al.*, 2004) se realiza el diseño de una planta depuradora con modelo simplificado utilizando métodos de optimización global multiobjetivo. Se incluyen controladores PI en la formulación que se sintonizan también de forma óptima. En el trabajo de Moles *et al.* (2008), se utiliza optimización global estocástica para resolver el problema de diseño integrado aplicado al proceso de fangos activados en una versión simplificada respecto al modelo BSM1.

En el trabajo de Rivas *et al.* (2008) se realiza el diseño de una planta depuradora de aguas residuales mediante la resolución de un problema de optimización mediante el algoritmo GRG2 (Gradiente Reducido Generalizado). La función objetivo está formada por los volúmenes de las unidades, y puede incluir otros costes de operación, mientras que las restricciones son las necesarias para un adecuado funcionamiento del proceso y también para imponer una cierta calidad del efluente. Se utilizan modelos estacionarios o dinámicos del proceso, pero no se incluye la sintonía de los controladores sino únicamente de las referencias marcadas. También con aplicación al proceso de fangos activados están el trabajo de (Exler *et al.* 2008) y los trabajos de Francisco *et al.* (2005, 2006), ya citados anteriormente.

1.4 OBJETIVOS DE LA TESIS

Los trabajos revisados sobre diseño integrado se centran en la utilización de controladores PI e índices dinámicos para la medida de la controlabilidad, así como algunas otras simplificaciones. Dado que el problema de optimización que se genera es complejo, su formulación específica y los métodos de resolución empleados son aspectos de gran importancia en estos trabajos.

En cuanto al proceso a diseñar, muy pocos consideran el proceso de fangos activados, y siempre incorporando controladores clásicos, por lo que aquí se propone la utilización de controladores MPC con las ventajas que suponen en el control de sistemas multivariables y no lineales como el proceso de fangos activados, así como en la gestión de las restricciones existentes.

El objetivo global de este trabajo consiste por lo tanto en desarrollar una metodología de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control MPC aplicada al proceso de fangos activados. Esta metodología utiliza índices de controlabilidad basados en normas de funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado, en contraposición a otras técnicas de diseño integrado que incluyen reguladores clásicos tipo PI y están basadas en índices dinámicos que implican una carga computacional elevada. Debido a la utilización de normas, se plantea la utilización de controladores MPC lineales que

pueden ser sustituidos por su versión no lineal en la aplicación final sin dejar de cumplir los requerimientos de desempeño y estabilidad impuestos.

Más específicamente, se proponen los siguientes objetivos desde el punto de vista de la metodología general de diseño:

- Desarrollar una metodología de diseño integrado que utilice índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado con el fin de reducir la carga computacional durante la resolución del problema de optimización que se genera.
- Desarrollar una metodología de diseño integrado robusto, de manera que las plantas obtenidas sean estables y tengan un desempeño adecuado a pesar de la incertidumbre existente.
- Desarrollar una metodología de diseño integrado que incluya la síntesis del proceso para determinar la estructura de la planta.

Desde el punto de vista del ejemplo de aplicación, los objetivos son los siguientes:

- Aplicación de las metodologías de diseño integrado desarrolladas al proceso de fangos activados para eliminación de materia orgánica y nitrógeno en una planta depuradora de aguas residuales, de forma que se diseñen plantas óptimas en cuanto a costes y operación. En concreto, se busca calcular los parámetros físicos de las plantas que minimicen los costes de construcción y operación, los parámetros óptimos del controlador MPC, y un punto de trabajo estacionario adecuado, todo ello cumpliendo con las condiciones de controlabilidad impuestas.

Desde el punto de vista del sistema de control, los objetivos son los siguientes:

- Inclusión de controladores predictivos dentro de la metodología de diseño integrado propuesta, con el fin de mejorar el desempeño del control clásico aplicado a procesos complejos.
- Inclusión de formulaciones del MPC que garanticen la estabilidad del proceso en lazo cerrado dentro de la metodología de diseño integrado desarrollada.

Capítulo 2

DESCRIPCIÓN Y CONTROLABILIDAD DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS

Resumen:

En este capítulo se describe el proceso de fangos activados en el marco de una planta depuradora de aguas residuales y sus etapas de tratamiento. En primer lugar se selecciona una planta con un reactor y un decantador secundario, y se presenta un modelo matemático del proceso sólo con eliminación de materia orgánica, para describir a continuación otros modelos con eliminación de nitrógeno, siendo el segundo de ellos una plataforma de simulación estándar denominada BSM1 (Benchmark Simulation Model n° 1) y el tercero una simplificación del anterior. A continuación se describen las perturbaciones que afectan al proceso, algunos índices dinámicos de calidad del efluente y las condiciones de operación requeridas para un adecuado funcionamiento. El capítulo finaliza con la descripción del problema de control y un estudio de la controlabilidad en lazo abierto del proceso, mostrando ciertos problemas existentes intrínsecos al funcionamiento del proceso.

2.1 DESCRIPCIÓN Y MODELO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS

2.1.1 Etapas de tratamiento de las aguas residuales

Para tratar adecuadamente las aguas residuales industriales o urbanas, y eliminar los residuos que transportan, son necesarias diversas operaciones tanto físicas como químicas o biológicas, que se agrupan en lo que se denominan tratamiento primario, secundario y terciario, además de un pretratamiento inicial.

En el pretratamiento, la planta depuradora elimina los sólidos de gran tamaño, sólidos finos y grasas que llegan directamente del colector. Mediante rejillas y tamices se separan los sólidos grandes y medianos, mientras que las arenas u otras partículas minerales con velocidad de sedimentación superior a las de los residuos orgánicos se separan del agua residual con desarenadores. Por último se separan las grasas y aceites aprovechando la flotación de estas sustancias. Se cumplen así dos objetivos importantes, como son la eliminación de una parte importante de la contaminación y la protección de los posteriores procesos de residuos inadecuados.

El tratamiento primario comprende el conjunto de procesos que tienen como misión la separación por medios físicos de las partículas en suspensión no retenidas en el pretratamiento. El agua se deja reposar unas horas en los decantadores primarios para que sedimenten las partículas inorgánicas que han pasado el pretratamiento y la materia orgánica sedimentable. Cuando la carga es elevada o el tiempo de retención es insuficiente, la decantación natural se puede complementar con la adición de coagulantes químicos que favorezcan la floculación (agrupaciones de partículas).

La etapa más importante del proceso de depuración es el tratamiento secundario, en el cual se trata de reducir la cantidad de materia orgánica degradable biológicamente que contienen las aguas residuales. El fundamento de esta etapa no es más que acelerar el proceso biológico que tendría lugar en la naturaleza, es decir, la degradación de esa materia orgánica disuelta por una población de microorganismos (biomasa). Esta reacción tiene lugar en unos reactores biológicos o biorreactores, que son tanques aireados dado que el proceso de degradación es normalmente aerobio. Tras un tiempo suficiente en estos reactores, y siguiendo el camino que recorre el agua dentro de la estación depuradora, la última de las etapas habituales es una nueva sedimentación en los decantadores secundarios para separar el agua tratada y la biomasa presente. La biomasa se decanta al fondo y el agua tratada continúa con su depuración, o bien se devuelve ya al río dependiendo de las posibilidades técnicas de la planta depuradora. Parte de la biomasa decantada se devuelve a los reactores biológicos con el fin de mantener una concentración suficiente de microorganismos (recirculación), mientras que otro pequeño porcentaje se evacua del sistema a fin de evitar que haya un crecimiento y envejecimiento excesivo de los microorganismos (purga).

Por último, el agua puede ser sometida al tratamiento terciario, que comprende tratamientos más avanzados como la cloración, la adsorción con carbón activo, o la ósmosis inversa, para disminuir aún más los niveles de los contaminantes todavía presentes en el agua.

Estos tratamientos conforman la denominada línea de aguas de una planta depuradora. Por otro lado, se tiene también la línea de fangos, que mediante un tratamiento específico (espesadores y deshidratadores) trata de reducir el volumen, peso y características de los fangos.

2.1.2 Descripción del proceso de fangos activados

El tratamiento secundario más utilizado es el proceso de fangos activados, que consiste en la oxidación bacteriana de los residuos orgánicos, seguida de una separación de los microorganismos y del agua tratada. Los fangos o lodos activados pueden definirse como un cultivo bacteriano aerobio disperso en forma de flóculo. Simplificando el proceso, se puede considerar que los microorganismos que forman esos fangos utilizan el oxígeno presente en el agua para consumir el sustrato o alimento, que en este caso son las moléculas orgánicas degradables biológicamente contenidas en el agua residual (Demanda Biológica de Oxígeno, DBO). Como resultado de este consumo, los microorganismos obtienen la energía necesaria para vivir y para generar nuevos individuos.

En cierta manera lo que se consigue es transformar la fracción soluble de materia orgánica en un material insoluble, facilitando así su separación en los decantadores secundarios.

En resumen, el proceso de fangos activados consiste en (Figura 2.1):

- Un tanque de aireación o reactor biológico donde los fangos activados y el agua a depurar se mezclan y airean durante un cierto período de tiempo.
- Un decantador secundario o clarificador, donde se separan los fangos del efluente ya tratado.

- Una recirculación de parte de los fangos hacia el reactor biológico y una purga para evacuar y tratar una pequeña parte de los fangos producidos.

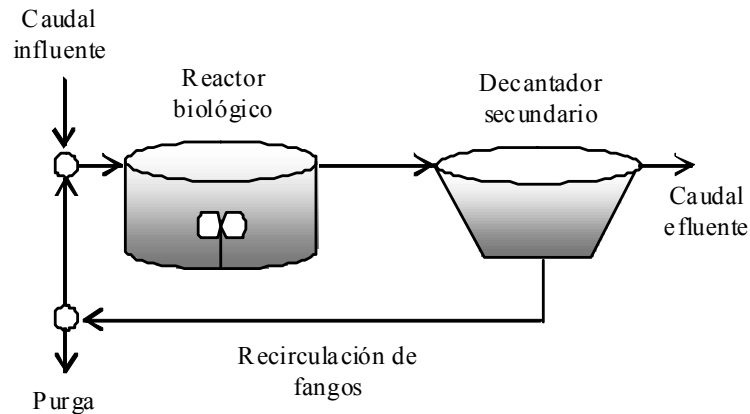


Figura 2.1: Proceso de fangos activados

En el reactor, la población bacteriana (biomasa) se debe mantener en un determinado nivel para que sea posible el consumo de la materia orgánica (sustrato), y es necesario también un buen sistema de aireación y agitación que proporcione el oxígeno necesario para la acción de las bacterias aerobias, que evite la sedimentación de los fangos en el reactor y que permita la homogeneización de los fangos activos.

El objetivo final de este proceso es depurar el agua que llega a la planta de modo que el líquido que se vierta nuevamente al medio tenga un contenido de materia orgánica inferior a los valores establecidos por las leyes medioambientales.

2.1.3 Modelo matemático para eliminación de materia orgánica (planta nº 1)

En primer lugar se describe un modelo matemático no lineal simplificado del proceso de fangos activados para una planta real localizada en Manresa (Barcelona), que se denominará de aquí en adelante planta nº 1. Un motivo para seleccionar esta depuradora es que sus parámetros cinéticos ya se encuentran calibrados mediante técnicas de estimación de parámetros a partir de datos experimentales de distintas campañas (Moreno, 1994). En la Figura 2.2 se representa la planta esquemáticamente, que consta de un reactor biológico y un decantador, con las variables utilizadas en el modelo. El desarrollo del modelo se realiza a partir de las ecuaciones que describen la dinámica tanto del reactor biológico como del decantador secundario. El reactor se modela considerando mezcla completa y el decantador considerando tres capas con concentraciones distintas.

De forma general, las entradas del sistema son la cantidad y calidad del agua a depurar (influyente), así como posibles modificaciones de los parámetros de operación de la planta, mientras que las salidas físicas son el agua depurada (efluente) y la purga del exceso de fangos.

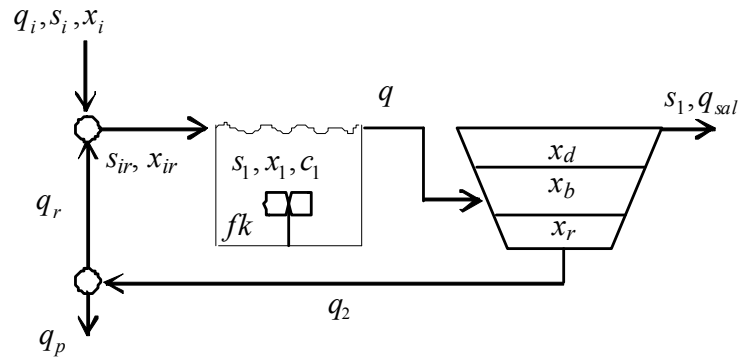


Figura 2.2: Variables del proceso de fangos activados en la planta n° 1

Las relaciones entre los caudales involucrados en el proceso son las siguientes:

$$\begin{aligned} q &= q_i + q_r \\ q_{sal} &= q_i - q_p \\ q_2 &= q_r + q_p \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde todos los caudales vienen expresados en m^3/h :

q_i : caudal de agua contaminada a la entrada de la planta.

q : caudal de entrada y salida del reactor.

q_p : caudal de purga de fangos.

q_2 : caudal de recirculación total.

q_r : caudal de recirculación de entrada al reactor.

q_{sal} : caudal de agua depurada a la salida del decantador.

Las variables de estado se presentan en la Tabla 2.1, donde el sustrato es la concentración de materia orgánica biodegradable, proporcional a la DBO, existente en el agua a depurar y la biomasa es la concentración de microorganismos (bacterias) que forman los fangos activados.

- Reactor biológico

Los cambios producidos en el interior del reactor biológico son debidos a los procesos de crecimiento, muerte de la biomasa y consumo de sustrato debido a la actividad bacteriana, a lo que hay que añadir el término de transporte debido a los caudales de entrada y salida. Teniendo en cuenta las tres variables principales que definen el estado del reactor, el modelo dinámico del mismo puede ser representado por las ecuaciones diferenciales que se presentan a continuación, basadas en la ley de conservación de la masa.

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu_{\max} y \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} - K_d \frac{x_1^2}{s_1} - K_c x_1 + \frac{q}{V_1} (x_{ir} - x_1) \quad (2.2)$$

$$\frac{ds_1}{dt} = -\mu_{\max} \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} + f_{kd} K_d \frac{x_1^2}{s_1} + f_{kd} K_c x_1 + \frac{q}{V_1} (s_{ir} - s_1) \quad (2.3)$$

$$\frac{dc_1}{dt} = K_{la}fk(c_s - c_1) - K_{01}\mu_{max} \frac{x_1^2}{(K_s + s_1)} - \frac{q}{V_1}c_1 \quad (2.4)$$

donde

x_1 : concentración de biomasa (mg/l).

s_1 : concentración de sustrato (mg/l).

μ_{max} : velocidad específica máxima de crecimiento (h^{-1}).

y : fracción de sustrato metabolizado que se convierte en biomasa.

x_{ir} : concentración de biomasa en el caudal de entrada al reactor (mg/l).

q : caudal de entrada y salida del reactor (m^3/h).

V_1 : volumen del reactor (m^3).

K_s : constante de saturación (mg/l).

K_d : coeficiente de descomposición endógena, o constante de mortandad (h^{-1}).

K_c : coeficiente de actividad celular de los microorganismos (h^{-1}).

s_{ir} : concentración de sustrato en el caudal de entrada al reactor (mg/l).

f_{kd} : fracción de biomasa muerta que se transforma en sustrato.

c_1 : concentración de oxígeno en el reactor (mg/l).

c_s : concentración de saturación de oxígeno disuelto (mg/l).

K_{la} : coeficiente de transferencia global de masa de oxígeno (h^{-1}).

fk : factor de aireación del reactor.

Descripción	Variable
Concentración de sustrato en el reactor (mg/l)	s_1
Concentración de biomasa en el reactor (mg/l)	x_1
Concentración de oxígeno disuelto en el reactor (mg/l)	c_1
Concentración de biomasa en la capa superior del decantador (mg/l)	x_d
Concentración de biomasa en la capa intermedia del decantador (mg/l)	x_b
Concentración de biomasa en la capa inferior del decantador (mg/l)	x_r

Tabla 2.1: Variables de estado para el modelo de la planta nº 1

El primer término de la ecuación (2.2) describe el crecimiento de la biomasa debido a la existencia de sustrato como alimento para los microorganismos, siguiendo una cinética de tipo Monod (Moreno, 1994). Los dos siguientes términos de la ecuación corresponden a la desaparición de biomasa del medio, debida respectivamente al metabolismo endógeno (muerte de los microorganismos) y a los desechos biológicos. El último término de la ecuación corresponde a la diferencia entre los flujos de biomasa entrante y saliente del reactor, donde la biomasa entrante x_{ir} , se puede obtener a partir de los caudales y las concentraciones de entrada:

$$x_{ir} = \frac{x_i q_i + x_r q_r}{q} \quad (2.5)$$

La ecuación (2.3) correspondiente al sustrato se divide también en varios términos, donde el primero representa la desaparición de sustrato debido a su consumo por parte de la biomasa, el segundo término describe la parte de la biomasa que se transforma en sustrato, el tercero el aumento de sustrato debido a los desechos biológicos, y el último la diferencia entre los flujos de masa de sustrato entrante y saliente del reactor.

Teniendo en cuenta que el valor de la concentración de sustrato en la realimentación coincide con la del reactor porque en el decantador no hay dinámica para el sustrato, el valor de s_{ir} es:

$$s_{ir} = \frac{s_i q_i + s_1 q_r}{q} \quad (2.6)$$

Por último, en la ecuación del oxígeno, el primer término describe el aporte de oxígeno al medio líquido por acción de las turbinas de aireación, el segundo representa el consumo de oxígeno asociado a las reacciones de crecimiento de los microorganismos, y el último es el término de transporte.

- Decantador secundario

El modelo que se utiliza para el decantador supone que está dividido en tres capas, en las que se consideran concentraciones de biomasa homogéneas como se muestra en la Figura 2.2. Mediante tres ecuaciones diferenciales se representa la variación de la concentración de biomasa en cada una de las tres capas mediante balances de masas, teniendo en cuenta los efectos de arrastre y de sedimentación. En el decantador secundario no hay dinámica relativa al sustrato puesto que al no haber aireación, no hay generación de biomasa, y la concentración de sustrato se mantiene constante e igual a la existente a la salida del reactor. Las ecuaciones son:

$$Al_d \frac{dx_d}{dt} = q_{sal} x_b - q_{sal} x_d - Av_s (x_d) \quad (2.7)$$

$$Al_b \frac{dx_b}{dt} = qx_1 - q_{sal} x_b - q_2 x_b + Av_s (x_d) - Av_s (x_b) \quad (2.8)$$

$$Al_r \frac{dx_r}{dt} = q_2 x_b - q_2 x_r + Av_s (x_b) \quad (2.9)$$

donde

- x_d : concentración de biomasa en la capa superior (mg/l).
- x_b : concentración de biomasa en la capa intermedia (mg/l).
- x_r : concentración de biomasa en la capa inferior (mg/l).
- v_s : velocidad másica de sedimentación de los fangos.
- A : área de la sección transversal del decantador (m^2).
- l_d : altura de la capa superior del decantador (m).
- l_b : altura de la capa intermedia (m).
- l_r : altura de la capa inferior (m).

En la ecuación correspondiente a la primera capa del decantador, el primer término representa la biomasa procedente de la capa intermedia por arrastre, el segundo describe la biomasa que sale fuera de la planta, y el último la biomasa que decanta en la siguiente capa. En la ecuación de la variación de biomasa en la capa intermedia el primer término representa la biomasa que proviene de la capa superior, el segundo y tercero representan los términos de arrastre y los dos últimos términos representan el aporte de biomasa debido a la sedimentación de la capa superior, y la pérdida por decantación en la capa inferior. Por último, la variación de biomasa en la capa inferior se representa mediante una ecuación análoga que cuantifica también las variaciones por arrastre y decantación.

El valor de la velocidad de sedimentación viene dado por la siguiente fórmula experimental, donde los coeficientes nnr y aar se ajustan en función de datos empíricos tomados de la planta:

$$v_s(x_b) = nnr \cdot x_b \cdot \exp(aar \cdot x_b) \tag{2.10}$$

$$v_s(x_d) = nnr \cdot x_d \cdot \exp(aar \cdot x_d) \tag{2.11}$$

- Valor de los parámetros de la planta

El modelo de la planta nº 1 descrito está basado en el obtenido para la planta depuradora de aguas residuales de Manresa (Barcelona), cuyas dimensiones, características del influente y parámetros cinéticos se presentan en la **Tabla 2.2** (Moreno, 1994).

Dimensiones de la planta y alturas de las capas del decantador	Valor
V_1 (m ³)	7268
A (m ²)	2770.9
l_d (m)	2
l_b (m)	1.5
l_r (m)	1
Caudal y concentraciones en el influente	Valor
q_i (m ³ /h)	1300
s_i (mg/l)	366.67
x_i (mg/l)	80
Parámetros cinéticos y estequiométricos	Valor
μ_{max} (h ⁻¹)	0.1824
y	0.5948
K_s (mg/l)	300
K_d (h ⁻¹)	5e-5
K_c (h ⁻¹)	1.3333e-4
f_{kd}	0.2
nnr	3.1563
aar	-0.00078567
K_{01}	1e-4
K_{1a} (h ⁻¹)	0.7
c_s (mg/l)	8

Tabla 2.2: Dimensiones de la planta, características del influente, y parámetros cinéticos y estequiométricos para la planta nº 1.

2.1.4 Modelo matemático de la plataforma de simulación estándar BSM1 (planta nº 2)

Con el fin de proporcionar un marco común en la investigación basada en modelos para el proceso de fangos activados, y de representar más fielmente sus características, se desarrolló una plataforma de simulación estándar denominada BSM1 (*Benchmark Simulation Model n° 1*) en el marco de los programas europeos COST 682 y 624. El BSM1 no solo consiste en una planta de referencia, sino también en protocolos de simulación, datos de diversos influentes e índices de desempeño para el estudio y comparación de diferentes estrategias de control. En este apartado se describen sus características y modelo matemático, y se denominará también planta n° 2 como una extensión a la planta n° 1 ya descrita.

En el BSM1, además de la eliminación de materia orgánica (sustrato), se incluyen los procesos sucesivos de nitrificación y desnitrificación para la eliminación biológica de nitrógeno (nutrientes), siendo estos compuestos también nocivos en la cuenca receptora de las aguas residuales (Figura 2.3). El primer paso consiste en la nitrificación aeróbica donde los microorganismos nitrificadores convierten el amonio en nitritos y nitratos, en presencia de oxígeno disuelto en el medio. A este proceso le sigue la desnitrificación en una zona anóxica, donde los nitritos y nitratos se transforman en nitrógeno gaseoso que se elimina así del agua y pasa a la atmósfera. Para este último proceso es necesaria la materia orgánica fácilmente biodegradable, y por ello el reactor anóxico se suele colocar en primer lugar para utilizar la materia orgánica del influente. En la planta se incluyen dos recirculaciones, una interna q_a para recircular los nitratos y nitritos al reactor anóxico y otra externa q_r para recircular los fangos del decantador.

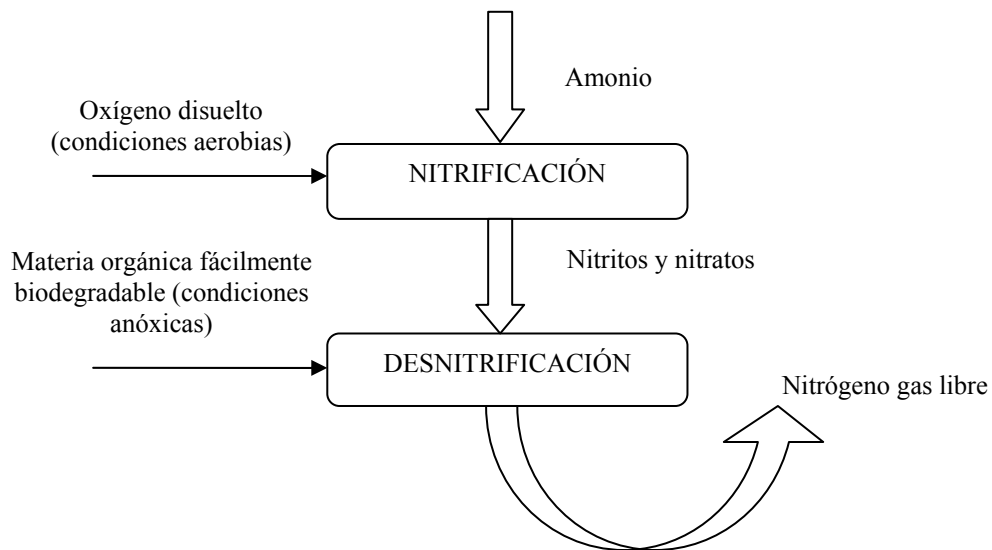


Figura 2.3: Procesos de nitrificación y desnitrificación

La estructura del BSM1 está compuesta por 5 reactores biológicos, dos de los cuales son anóxicos y los otros tres son aeróbicos. En los dos primeros se lleva a cabo el proceso de desnitrificación, mientras que los tres restantes se mantienen aireados y en ellos tiene lugar el proceso de nitrificación. Seguido de los reactores se encuentra un decantador secundario para separar los fangos del agua limpia, modelado mediante 10 capas. En la Figura 2.4 se muestra una representación completa del BSM1.

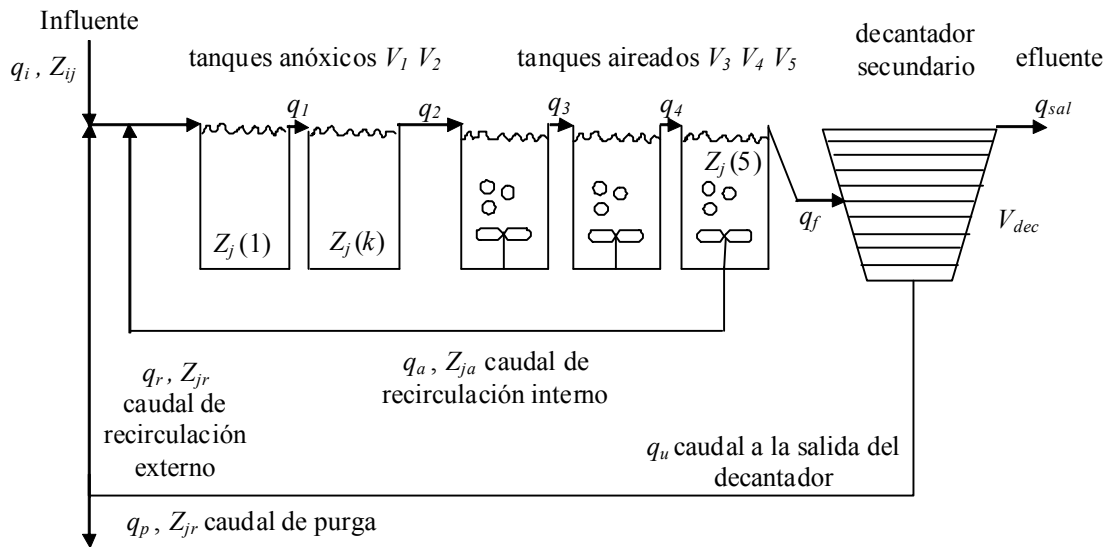


Figura 2.4: Esquema general de la planta BSM1 para el proceso de fangos activados (planta n° 2)

El conjunto de ecuaciones del BSM1 está dado por las relaciones entre caudales, los balances de masa en cada reactor, el modelo de los bioreactores (ASM1) y el modelo del decantador, como se explica a continuación (Alex *et al.*, 2008).

- Reactores biológicos

De acuerdo a la Figura 2.4 , las relaciones entre los caudales en los puntos de separación son:

$$q_1 = q_a + q_i + q_r \tag{2.12}$$

$$q_f = q_{sal} + q_u \tag{2.13}$$

$$q_u = q_r + q_p \tag{2.14}$$

$$q_k = q_{k-1} \tag{2.15}$$

donde:

- q_i : caudal de entrada.
- q_a : recirculación interna.
- q_r : recirculación externa.
- q_{sal} : caudal del efluente.
- q_p : caudal de purga.
- q_u : caudal a la salida del decantador.
- $k = 1, \dots, 5$: número de reactor.

La forma general de los balances de masa en cada reactor es la siguiente:

Para el primer reactor ($k=1$):

$$\frac{dZ_j(1)}{dt} = \frac{1}{V_1} [q_a \cdot Z_{qj} + q_r Z_{rj} + q_i \cdot Z_{ij} - q_1 \cdot Z_j(1) + r_j(1) \cdot V_1] \tag{2.16}$$

Para el reactor $k=2$ hasta el 5:

$$\frac{dZ_j(k)}{dt} = \frac{1}{V_k} [q_{k-1} \cdot Z_j(k-1) - q_k \cdot Z_j(k) + r_j(k) \cdot V_k] \quad (2.17)$$

Para el caso especial del oxígeno ($Z_j=S_O$):

$$\frac{dS_O(k)}{dt} = \frac{1}{V_k} [q_{k-1} \cdot S_O(k-1) - q_k \cdot S_O(k) + r_8(k) \cdot V_k + K_L a(k) (S_{O,Sat} - S_O(k))] \quad (2.18)$$

donde:

Z_j : concentración del compuesto j .

Z_{aj} : concentración del compuesto j en la recirculación interna.

Z_{rj} : concentración del compuesto j en la recirculación externa.

Z_{ij} : concentración del compuesto j en el influente.

r_j : tasa de reacción del compuesto j .

r_8 : tasa de reacción del oxígeno disuelto.

k : índice correspondiente al número de reactor.

V_k : volumen de cada reactor.

S_O : concentración de oxígeno.

$S_{O,Sat}$: concentración de saturación para el oxígeno.

El comportamiento de los reactores está representado por el modelo del proceso de fangos activados n° 1 (*Activated Sludge Model n° 1*, ASM1) desarrollado por la IWAQ (*International Association on Water Quality*) (Henze, 1987). En cada reactor se definen los compuestos a considerar como variables de estado (Tabla 2.3), su tasa de reacción (r_j) y los procesos biológicos involucrados, lo cuales se introducen en la expresión de general para los balances de masa dados por las ecuaciones (2.16)-(2.18).

En el ASM1 se consideran 13 variables de estado (Tabla 2.3) y 8 procesos biológicos (ρ_i) (Tabla 2.4), que se llevan a cabo en todos los reactores de acuerdo al modelo e indican consumo o crecimiento de un determinado compuesto según el signo con el que aparezcan en la tasa de reacción correspondiente $r_j(k)$. Los procesos son los siguientes:

- Crecimiento aeróbico de la biomasa heterótrofa (ρ_1), que convierte el sustrato fácilmente biodegradable, el oxígeno disuelto y el amonio en biomasa heterótrofa:

$$\rho_1(k) = \mu_H \cdot \left(\frac{S_S(k)}{K_S + S_S(k)} \right) \cdot \left(\frac{S_O(k)}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) X_{B,H}(k) \quad (2.19)$$

- Crecimiento anóxico de la biomasa heterótrofa (ρ_2), que convierte el sustrato fácilmente biodegradable, los nitratos, y el amonio en biomasa heterótrofa:

$$\rho_2(k) = \mu_H \cdot \left(\frac{S_S(k)}{K_S + S_S(k)} \right) \cdot \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) \left(\frac{S_{NO}(k)}{K_{NO} + S_{NO}(k)} \right) n_g X_{B,H}(k) \quad (2.20)$$

- Crecimiento aeróbico de la biomasa autótrofa (ρ_3), que convierte el oxígeno disuelto y el amonio en biomasa autótrofa y nitratos (nitrificación):

$$\rho_3(k) = \mu_A \cdot \left(\frac{S_{NH}(k)}{K_{NH} + S_{NH}(k)} \right) \cdot \left(\frac{S_O(k)}{K_{O,A} + S_O(k)} \right) X_{B,A}(k) \quad (2.21)$$

Descripción	Variable
Concentración de materia orgánica inerte soluble (g DQO/m ³)	S_I
Concentración de sustrato fácilmente biodegradable (g DQO/m ³)	S_S
Concentración de materia orgánica inerte insoluble (g DQO/m ³)	X_I
Concentración de sustrato de degradación lenta (g DQO/m ³)	X_S
Concentración de biomasa heterótrofa activa (g DQO/m ³)	$X_{B,H}$
Concentración de biomasa autótrofa activa (g DQO/m ³)	$X_{B,A}$
Concentración de productos insolubles que provienen de decaimiento de biomasa (g DQO/m ³)	X_P
Concentración de oxígeno disuelto (g/m ³)	S_O
Concentración de nitrógeno en forma de nitratos y nitritos (g N/m ³)	S_{NO}
Concentración de nitrógeno en forma de NH ₄ ⁺ + NH ₃ (g N/m ³)	S_{NH}
Concentración de nitrógeno orgánico soluble biodegradable (g N/m ³)	S_{ND}
Concentración de nitrógeno orgánico insoluble biodegradable (g DQO/m ³)	X_{ND}
Alcalinidad (g DQO/m ³)	S_{alk}

Tabla 2.3: Variables de estado para el modelo ASM1 (planta n° 2)

- Muerte de la biomasa heterótrofa (ρ_4), que se descompone en sustrato lentamente biodegradable, nitrógeno orgánico insoluble y otras partículas (X_P):

$$\rho_4(k) = b_H \cdot X_{B,H}(k) \quad (2.22)$$

- Muerte de la biomasa autótrofa (ρ_5), que se descompone en sustrato lentamente biodegradable, nitrógeno orgánico insoluble y otras partículas (X_P):

$$\rho_5(k) = b_A \cdot X_{B,A}(k) \quad (2.23)$$

- Amonificación del nitrógeno orgánico soluble (ρ_6), donde el nitrógeno orgánico soluble biodegradable se transforma en amonio:

$$\rho_6(k) = k_a \cdot S_{ND}(k) \cdot X_{B,H}(k) \quad (2.24)$$

- Hidrólisis de la materia orgánica lentamente biodegradable (ρ_7), donde el sustrato lentamente biodegradable se transforma en sustrato fácilmente biodegradable:

$$\rho_7(k) = k_h \cdot \left[\frac{\left(\frac{X_S(k)}{X_{B,H}(k)} \right)}{\left(K_X + \frac{X_S(k)}{X_{B,H}(k)} \right)} \right] \cdot \left[\left(\frac{S_O(k)}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) \left(\frac{S_{NO}(k)}{K_{NO} + S_{NO}(k)} \right) \right] X_{B,H}(k) \quad (2.25)$$

- Hidrólisis del nitrógeno orgánico insoluble (ρ_8), donde el nitrógeno orgánico insoluble particulado se transforma en nitrógeno orgánico soluble:

$$\rho_8(k) = k_h \cdot \left(\frac{\frac{X_S(k)}{X_{B,H}(k)}}{K_X + \frac{X_S(k)}{X_{B,H}(k)}} \right) \cdot \left[\left(\frac{S_O(k)}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) \left(\frac{S_{NO}(k)}{K_{NO} + S_{NO}(k)} \right) \right] \cdot X_{B,H}(k) \left(\frac{X_{ND}(k)}{X_S(k)} \right) \quad (2.26)$$

Proceso	Reacción básica
Crecimiento aeróbico de la biomasa heterótrofa (ρ_1).	$S_S + S_O + S_{NH} \rightarrow X_{B,H}$
Crecimiento anóxico de la biomasa heterótrofa (ρ_2).	$S_S + S_{NO} + S_{NH} \rightarrow X_{B,H}$
Crecimiento aeróbico de la biomasa autótrofa (ρ_3).	$S_O + S_{NH} \rightarrow X_{B,A} + S_{NO}$
Muerte de la biomasa heterótrofa (ρ_4).	$X_{B,H} \rightarrow X_P + X_S + X_{ND}$
Muerte de la biomasa autótrofa (ρ_5).	$X_{B,A} \rightarrow X_P + X_S + X_{ND}$
Amonificación del nitrógeno orgánico soluble (ρ_6).	$S_{ND} \rightarrow S_{NH}$
Hidrólisis de la materia orgánica lentamente biodegradable (ρ_7).	$X_S \rightarrow S_S$
Hidrólisis del nitrógeno orgánico insoluble (ρ_8).	$X_{ND} \rightarrow S_{ND}$

Tabla 2.4: Procesos básicos para el modelo ASM1 (planta nº 2)

La cinética de los procesos descritos viene dada por distintos términos que se describen a continuación de forma general. Los términos del tipo:

$$\left(\frac{S_S(k)}{K_S + S_S(k)} \right) \quad (2.27)$$

se denominan tasas específicas del proceso y corresponden a una cinética clásica de Monod para representar la influencia de la concentración de un determinado sustrato en la cinética del proceso. El parámetro K_S es la constante de semisaturación, es decir, la concentración para la cual la velocidad de reacción es la mitad de la tasa máxima.

Por otra parte, los términos del tipo:

$$\left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O(k)} \right) \quad (2.28)$$

se denominan funciones de control, que expresan el efecto inhibitorio de un determinado sustrato en la reacción. Así por ejemplo, se incluye este tipo de función en la cinética del crecimiento anóxico de la biomasa heterótrofa, indicando que esta reacción se ve inhibida por la presencia de oxígeno disuelto.

A continuación se presentan las tasas de reacción para cada variable de estado y cada reactor, en función de los procesos biológicos básicos descritos:

- Materia orgánica inerte soluble (S_I):

$$r_1(k) = 0 \quad (2.29)$$

- Sustrato fácilmente biodegradable (S_S):

$$r_2(k) = -\frac{1}{Y_H} \rho_1(k) - \frac{1}{Y_H} \rho_2(k) + \rho_7(k) \quad (2.30)$$

- Materia orgánica inerte insoluble (X_I):

$$r_3(k) = 0 \quad (2.31)$$

- Sustrato lentamente biodegradable (X_S):

$$r_4(k) = (1 - f_p) \cdot \rho_4(k) + (1 - f_p) \cdot \rho_5(k) - \rho_7(k) \quad (2.32)$$

- Biomasa heterótrofa activa ($X_{B,H}$):

$$r_5(k) = \rho_1(k) + \rho_2(k) - \rho_4(k) \quad (2.33)$$

- Biomasa autótrofa activa ($X_{B,A}$):

$$r_6(k) = \rho_3(k) - \rho_5(k) \quad (2.34)$$

- Productos insolubles de la biomasa muerta (X_P):

$$r_7(k) = f_p \cdot \rho_4(k) + f_p \cdot \rho_5(k) \quad (2.35)$$

- Oxígeno (S_O):

$$r_8(k) = -\frac{1 - Y_H}{Y_H} \rho_1(k) - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \rho_3(k) \quad (2.36)$$

- Nitratos y nitritos (S_{NO}):

$$r_9(k) = -\frac{1 - Y_H}{2.86 \cdot Y_H} \rho_2(k) + \frac{1}{Y_A} \rho_3(k) \quad (2.37)$$

- Amonio (S_{NH}):

$$r_{10}(k) = -i_{XB} \cdot \rho_1(k) - i_{XB} \cdot \rho_2(k) - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right) \rho_3(k) + \rho_6(k) \quad (2.38)$$

- Nitrógeno orgánico soluble (S_{ND}):

$$r_{11}(k) = -\rho_6(k) + \rho_8(k) \quad (2.39)$$

- Nitrógeno orgánico insoluble (X_{ND}):

$$r_{12}(k) = (i_{XB} - f_p \cdot i_{XP}) \cdot \rho_4(k) + (i_{XB} - f_p \cdot i_{XP}) \cdot \rho_5(k) - \rho_8(k) \quad (2.40)$$

- Alcalinidad (S_{alk}):

$$r_{13}(k) = -\frac{i_{XB}}{14} \cdot \rho_1(k) + \left(\frac{1 - Y_H}{14 \cdot 2.86 \cdot Y_H} - \frac{i_{XB}}{14} \right) \cdot \rho_2(k) - \left(\frac{i_{XB}}{14} + \frac{1}{7 \cdot Y_A} \right) \cdot \rho_3(k) + \frac{1}{14} \rho_6(k) \quad (2.41)$$

- Decantador

En el BSM1 la dinámica del decantador se representa con el modelo de Tacaks *et al.* (1991) suponiendo una unidad no reactiva de diez capas y una función de velocidad de sedimentación (Alex *et al.*, 2008). La altura de cada capa es de 0.4 m, proporcionando una altura total de 4 m. El volumen total del decantador es de $V_{dec} = 6000 \text{ m}^3$.

- Valor de los parámetros de la planta

Las dimensiones de la planta BSM1, o planta nº 2, el valor de los parámetros cinéticos y estequiométricos y las características del influente están definidas en la plataforma de simulación estándar BSM1, y se presentan aquí en la Tabla 2.5 y Tabla 2.6.

2.1.5 Modelo matemático obtenido por simplificación del BSM1 (planta nº 3)

Por último se describe un modelo matemático simplificado que se obtiene a partir del BSM1 (Nejjari y Quebedo, 2004), donde se tienen en cuenta únicamente las variables significativas en una escala media de tiempo. Este modelo conforma la denominada planta nº 3, que se aproxima por un reactor anóxico y uno aeróbico, y donde se supone que el proceso de desnitrificación tiene lugar sólo en el tanque anóxico y el proceso de nitrificación únicamente en el tanque aireado.

En esta planta se utiliza un modelo simplificado donde las variables con dinámica lenta se consideran constantes y las de dinámica rápida no se incluyen. Además, en el decantador únicamente se considera una capa y opera como un punto de mezcla de caudales. La utilización de este modelo está motivada en la dificultad de utilizar el modelo de fangos activados completo ASM1 en aplicaciones de control, debido a su complejidad y alta no linealidad.

Dimensiones de la planta	Valor
$V_1 = V_2$ (m ³)	1000
$V_3 = V_4 = V_5$ (m ³)	1333
V_{dec} (m ³)	6000
Características del influente	Valor
q_i (m ³ /d)	18446
$S_{l,i}$ (g DQO/m ³)	30
$S_{s,i}$ (g DQO /m ³)	69.5
$X_{l,i}$ (g DQO /m ³)	51.2
$X_{s,i}$ (g DQO /m ³)	202.32
$X_{B,H,i}$ (g DQO /m ³)	28.17
$X_{B,A,i}$ (g DQO /m ³)	0
$X_{P,i}$ (g DQO /m ³)	0
$S_{O,i}$ (g DQO /m ³)	0
$S_{NO,i}$ (g N/m ³)	0
$S_{NH,i}$ (g N/m ³)	6.96
$S_{ND,i}$ (g N/m ³)	31.56
$X_{ND,i}$ (g N/m ³)	10.59
$S_{ALK,i}$ (mol/m ³)	7

Tabla 2.5: Dimensiones y características del influente en la planta n° 2.

Parámetro	Unidad	Valor
Y_A	g DQO formado/(g N oxidado)	0.24
Y_H	g DQO formado/(g DQO oxidado)	0.67
f_p	adimensional	0.08
i_{XB}	g N/(g DQO) en la biomasa	0.08
i_{XP}	g N/(g DQO) en los productos insolubles	0.06
μ_H	1/d	4.0
μ_A	1/d	0.5
K_S	g DQO /m ³	10.0
$K_{O,H}$	g DQO /m ³	0.2
$K_{O,A}$	g DQO /m ³	0.4
K_{NO}	g NO ₃ -N.m	0.5
K_{NH}	g NH ₃ -N.m	1.0
K_X	g DQO lentamente biodegradable/(g DQO)	0.1
b_H	d ⁻¹	0.3
b_A	d ⁻¹	0.05
η_g	adimensional	0.8
η_h	adimensional	0.8
k_h	g DQO lentamente biodegradable/(g DQO.d)	3.0
k_a	m ³ /(g DQO.d)	0.05

Tabla 2.6: Valor de los parámetros cinéticos y estequiométricos del ASM1 (planta n° 2).

En este modelo se consideran como variables de estado seis componentes básicos en cada reactor, junto con la concentración de biomasa recirculada en el decantador, todos ellos descritos en la Tabla 2.7.

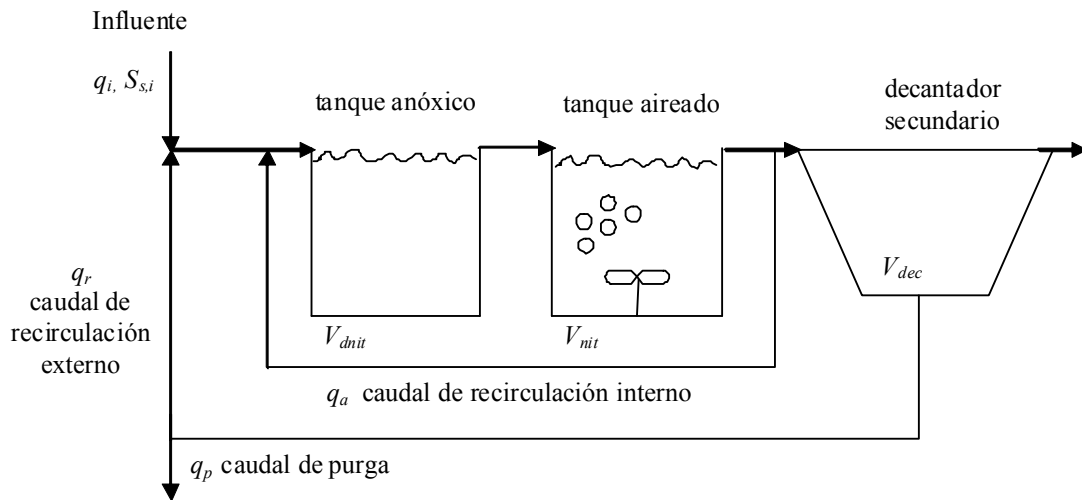


Figura 2.5: Esquema general de la planta nº 3 para el proceso de fangos activados.

Descripción	Variable
Biomasa autótrofa en el tanque aireado (mg/l)	$X_{A,nit}$
Biomasa autótrofa en el tanque anóxico (mg/l)	$X_{A,dnit}$
Biomasa heterótrofa en el tanque aireado (mg/l)	$X_{H,nit}$
Biomasa heterótrofa en el tanque anóxico (mg/l)	$X_{H,dnit}$
Sustrato rápidamente biodegradable en el tanque aireado (mg/l)	$S_{S,nit}$
Sustrato rápidamente biodegradable en el tanque anóxico (mg/l)	$S_{S,dnit}$
Nitratos y nitritos solubles en el tanque aireado (mg/l)	$S_{NO,nit}$
Nitratos y nitritos solubles en el tanque anóxico (mg/l)	$S_{NO,dnit}$
Amonio soluble en el tanque aireado (mg/l)	$S_{NH,nit}$
Amonio soluble en el tanque anóxico (mg/l)	$S_{NH,dnit}$
Oxígeno disuelto en el tanque aireado (mg/l)	$S_{O,nit}$
Oxígeno disuelto en el tanque anóxico (mg/l)	$S_{O,dnit}$
Concentración de biomasa recirculada del decantador (mg/l)	X_{rec}

Tabla 2.7: Variables de estado para la planta nº 3

El modelo matemático queda constituido por las siguientes ecuaciones obtenidas a partir de balances de masas, donde los valores numéricos de los parámetros, dimensiones y características del influente se definen en la Tabla 2.8.

- Reactores biológicos:

Para el reactor aireado, en el que se produce la nitrificación, las ecuaciones son las siguientes, donde los tres primeros términos corresponden al transporte de materia y los últimos al crecimiento o consumo del compuesto de forma análoga al BSM1:

$$\dot{X}_{A,nit} = (1 + r_1 + r_2)D_{nit}(X_{A,dnit} - X_{A,nit}) + (\mu_{A,nit} - b_A)X_{A,nit}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{H,nit} &= (1+r_1+r_2)D_{nit}(X_{H,dnit} - X_{H,nit}) + (\mu_{H,nit} - b_H)X_{H,nit} \\
 \dot{S}_{S,nit} &= (1+r_1+r_2)D_{nit}(S_{S,dnit} - S_{S,nit}) - (\mu_{H,nit} - \mu_{Ha,nit})\frac{X_{H,nit}}{Y_H} \\
 \dot{S}_{NH,nit} &= (1+r_1+r_2)D_{nit}(S_{NH,dnit} - S_{NH,nit}) - (i_{XB} + \frac{1}{Y_A})\mu_{A,nit}X_{A,nit} - (\mu_{H,nit} + \mu_{Ha,nit})i_{XB}X_{H,nit} \\
 \dot{S}_{NO,nit} &= (1+r_1+r_2)D_{nit}(S_{NO,dnit} - S_{NO,nit}) + \mu_{A,nit}\frac{X_{A,nit}}{Y_A} - \frac{1-Y_H}{2.86Y_H}\mu_{Ha,nit}X_{H,nit} \\
 \dot{S}_{O,nit} &= (1+r_1+r_2)D_{nit}(S_{O,dnit} - S_{O,nit}) + a_0Q_{air}(C_S - S_{O,nit}) - \dots \\
 &\quad - \frac{4.57-Y_A}{Y_A}\mu_{A,nit}X_{A,nit} - \frac{1-Y_H}{Y_H}\mu_{Ha,nit}X_{H,nit}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Para el reactor anóxico, en el que se produce la desnitrificación, las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{A,dnit} &= D_{dnit}(X_{A,i} + r_1X_{A,nit}) + \alpha r_2 D_{dnit}X_{rec} - (1+r_1+r_2)D_{dnit}X_{A,dnit} + (\mu_{A,dnit} - b_A)X_{A,dnit} \\
 \dot{X}_{H,dnit} &= D_{dnit}(X_{H,i} + r_1X_{H,nit}) + (1-\alpha)r_2 D_{dnit}X_{rec} - (1+r_1+r_2)D_{dnit}X_{H,dnit} + (\mu_{H,dnit} - b_H)X_{H,dnit} \\
 \dot{S}_{S,dnit} &= -(\mu_{H,dnit} - \mu_{Ha,dnit})\frac{X_{H,dnit}}{Y_H} + D_{dnit}(S_{S,i} + r_1S_{S,nit}) - (1+r_1+r_2)D_{dnit}S_{S,dnit} \\
 \dot{S}_{NH,dnit} &= D_{dnit}(S_{NH,i} + r_1S_{NH,nit}) - (1+r_1+r_2)D_{dnit}S_{NH,dnit} - \dots \\
 &\quad - (\mu_{H,dnit} + \mu_{Ha,dnit})i_{XB}X_{H,dnit} - (i_{XB} + \frac{1}{Y_A})\mu_{A,dnit}X_{A,dnit} \\
 \dot{S}_{NO,dnit} &= D_{dnit}(S_{NO,i} + r_1S_{NO,nit}) - (1+r_1+r_2)D_{dnit}S_{NO,dnit} + \dots \\
 &\quad + \mu_{A,dnit}\frac{X_{A,dnit}}{Y_A} - \frac{1-Y_H}{2.86Y_H}\mu_{Ha,dnit}X_{H,dnit} \\
 \dot{S}_{O,dnit} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

En las ecuaciones anteriores las velocidades de crecimiento en condiciones aeróbicas y anóxicas están basadas en la cinética de Monod de forma análoga a las descritas para la planta nº 2 (BSM1 completo) y su expresión detallada se puede encontrar en (Nejjari y Quevedo, 2004). Las relaciones entre el caudal de recirculación externo q_r , interno q_a , purga q_p e influente q_i son las siguientes, junto con las tasas de dilución D_{nit} , D_{dnit} y D_{dec} :

$$r_1 = \frac{q_a}{q_i}; r_2 = \frac{q_r}{q_i}; w = \frac{q_p}{q_i} \tag{2.44}$$

$$D_{nit} = \frac{q_i}{V_{nit}}; D_{dnit} = \frac{q_i}{V_{dnit}}; D_{dec} = \frac{q_i}{V_{dec}} \tag{2.45}$$

- Decantador secundario:

Por último, el decantador se considera en esta planta únicamente como un punto de mezcla:

$$\dot{X}_{rec} = (1+r_2)D_{dec}(X_{A,nit} + X_{H,nit}) - (r_2 + w)D_{dec}X_{rec} \tag{2.46}$$

Dimensiones de la planta	Valor
V_{nit} (m ³)	1000
V_{dnit} (m ³)	250
V_{dec} (m ³)	1250
Caudal y concentraciones en el influente	Valor
q_i (m ³ /d)	3000
$X_{A,i}$ (mg/l)	0
$X_{H,i}$ (mg/l)	30
$S_{S,i}$ (mg/l)	200
$S_{NH,i}$ (mg/l)	30
$S_{NO,i}$ (mg/l)	2
$S_{O,i}$ (mg/l)	0
Parámetros	Valor
Y_A (g DQO formado/g N oxidado)	0.24
Y_H (g DQO formado/g DQO oxidado)	0.67
Fp (adimensional)	0.08
i_{XB} (g N/g DQO) en la biomasa	0.08
K_s (g DQO /m ³)	10.0
b_H (d ⁻¹)	0.3
b_A (d ⁻¹)	0.05
k_h (g DQO lentamente biodegradable/g DQO.d)	3.0
k_a (m ³ /g DQO.d)	0.05

Tabla 2.8: Dimensiones, características del influente y parámetros para la planta n° 3.

2.1.6 Operación del proceso de fangos activados

- Entradas a la planta

El proceso de fangos activados se encuentra sometido a fuertes perturbaciones en el caudal y la concentración de materia orgánica en el influente. Como resultado, la calidad del efluente se deteriora y es difícil lograr la operación en estado estacionario, por lo que la planta se mantiene habitualmente en estado transitorio. Entre los objetivos de control se plantearán, además de satisfacer los requerimientos sobre la calidad del efluente, rechazar las perturbaciones y lograr una operación eficiente al menor coste.

Como perturbaciones típicas de entrada se utilizan los valores propuestos por el BSM1, donde se definen registros temporales del caudal de entrada a la planta y concentraciones de todos los compuestos en dicho caudal, para situaciones de tiempo seco, lluvia y tormenta. En la Figura 2.6 y

Figura 2.7 se presenta la evolución a lo largo de una semana (168 horas) de las perturbaciones de tiempo seco y tormentoso de caudal (q_i) y sustrato (s_i) para la planta n° 1, observándose como para tiempo seco hay una gran regularidad, con oscilaciones

diurnas y un claro descenso el fin de semana, mientras que para las perturbaciones de tormenta hay dos máximos en el caudal de entrada los días dos y cuatro debido a episodios tormentosos. El comportamiento de la planta frente a perturbaciones de carga en lazo abierto no es suficiente para atenuar completamente estas variaciones de sustrato y caudal que llegan en el influente, por lo que para mejorar el desempeño se necesita algún tipo de control en lazo cerrado.

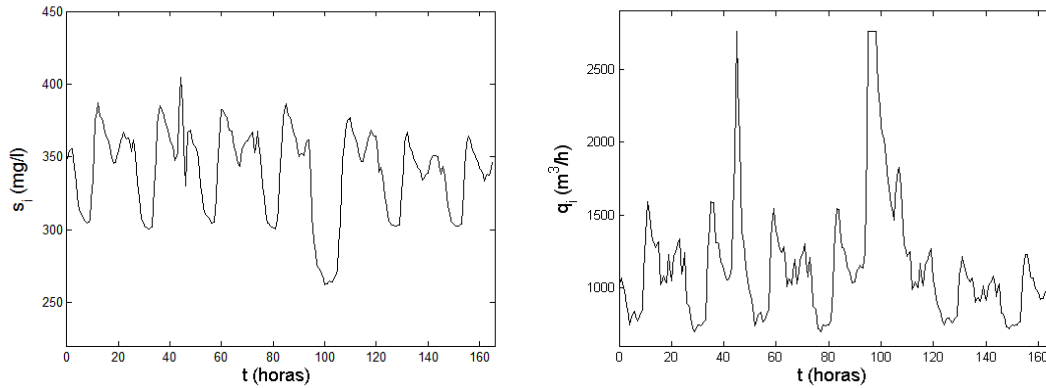


Figura 2.6: Perturbaciones BSM1 de sustrato y caudal en el influente para tiempo de tormenta.

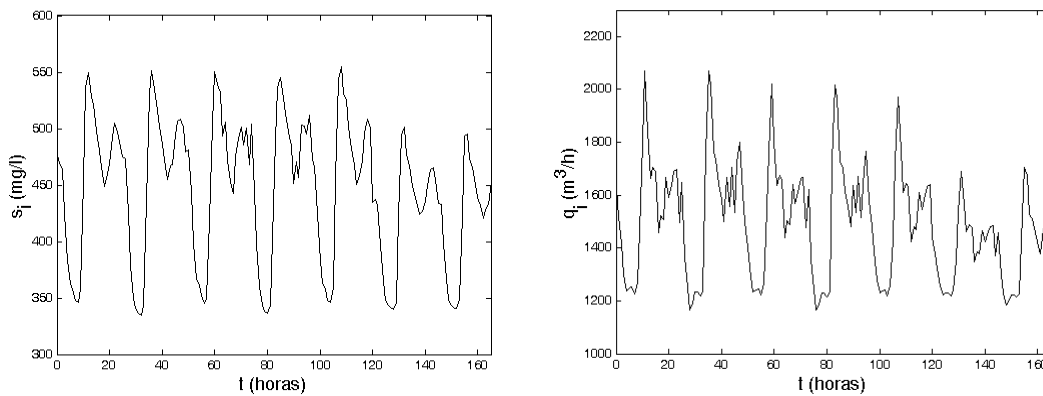


Figura 2.7: Perturbaciones BSM1 de sustrato y caudal en el influente para tiempo seco.

- Índices de calidad dinámicos

Las variables de estado definidas en el ASM1 son las variables más importantes que intervienen en el proceso, pero no siempre pueden ser medidas en aplicaciones prácticas. Por esto, los parámetros relacionados con la calidad del efluente y otras características del proceso se expresan en función de ciertas variables compuestas como la demanda química de oxígeno (DQO), la demanda biológica de oxígeno (DBO), el nitrógeno total (Nt) y la producción total de fangos (TSS) (Mulas, 2006):

$$DQO = (S_I + S_S + X_I + X_S + X_{B,A} + X_{B,H} + X_P) \text{ g DQO / m}^3 \quad (2.47)$$

$$DBO = 0.25 \cdot ((S_S + X_S) + (1 - 0.08)(X_{B,A} + X_{B,H})) \text{ g DQO / m}^3 \quad (2.48)$$

$$TSS = 0.75 \cdot (X_S + X_I + X_P + X_{B,A} + X_{B,H}) \text{ g SS / m}^3 \quad (2.49)$$

$$Nt = S_{NH} + S_{ND} + X_{ND} + i_{XB} \cdot (X_{B,H} + X_{B,A}) + i_{XP} \cdot (X_P + X_I) \text{ g N / m}^3 \quad (2.50)$$

Existen algunos índices de calidad del efluente dinámicos como por ejemplo la integral del error cuadrático (*ISE*) y la calidad del efluente (*EQ*) definidos en el modelo BSM1 para depuración de aguas residuales.

La calidad del efluente (*EQ*) es la suma ponderada de las cargas en el efluente de los compuestos con mayor efecto sobre la calidad del agua. Este índice se usa para determinar la penalización económica por las descargas fuera de especificación, y está dado por:

$$EQ = \frac{1}{7 \cdot 1000} \int_{t=7 \text{ dias}}^{t=14 \text{ dias}} [2 \cdot TSS_e + DQO_e + 30 \cdot Nt_e + 10 \cdot S_{NO,e} + 2 \cdot DBO_e] Q_e dt \quad (2.51)$$

con las concentraciones medidas en el efluente (denotadas con el subíndice *e*) y expresadas en g/m³, el caudal en m³/d y el *EQ* en Kg de polución/día

El desempeño dinámico del proceso de fangos activados está directamente relacionado con los costes de operación. En la plataforma de simulación BSM1 se presentan algunos índices de desempeño, para un periodo de operación T_{max} , que permiten cuantificar el gasto de energía del proceso, como la energía de bombeo y la energía de aireación.

La energía de bombeo (*Pumping Energy, PE*) depende los flujos de recirculación y de purga en el sistema, los cuales pueden variar debido a las acciones de control:

$$PE = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_f} (0.004 \cdot q_a(t) + 0.008 \cdot q_r(t) + 0.05 \cdot q_p(t)) dt \quad (2.52)$$

con los caudales expresados en m³/d y *PE* en Kwh.d⁻¹

La energía de aireación (*Aeration Energy, AE*) depende del equipo utilizado, la ubicación de los difusores y el tamaño de las burbujas. En el BSM1 se presenta la siguiente relación obtenida para un equipo particular.

$$AE = \frac{S_{O,sat}}{T \cdot 1.8 \cdot 1000} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{k=5} V_k \cdot K_L a_k(t) dt \quad (2.53)$$

con $K_L a$ expresado en 1/d y *AE* en Kwh.d⁻¹

- Restricciones de operación

Debido a la naturaleza química y biológica del proceso, el funcionamiento eficiente del proceso de fangos activados descrito depende de las siguientes restricciones de operación (Gutiérrez, 2000; Rodríguez Fernández-Alba et al, 2006; Mulas, 2006):

- La *concentración de oxígeno disuelto*. Se utilizan aireadores superficiales o difusores para suministrar a los microorganismos la cantidad de oxígeno requerida para oxidar la materia orgánica y mantener la calidad de los fangos. Si se suministra oxígeno en exceso, además del alto consumo de energía, puede afectarse la calidad de los fangos. En la práctica la concentración de oxígeno en

los tanques de aireación debe mantenerse alrededor de 2 g/m^3 , mientras que en los tanques anóxicos la cantidad de oxígeno requerida es mínima.

- Para evitar un excesivo consumo de aire en la zona aeróbica, la concentración de nitratos en la zona anóxica debe mantenerse entre 1 y 3 g/m^3 en los sistemas con recirculación interna.
- La *concentración de biomasa* en el reactor debe estar entre unos límites determinados para que se produzca la adecuada degradación del sustrato.
- La *edad de los fangos* es un parámetro que mide el tiempo medio que permanecen los fangos en el decantador. Esta magnitud suele tener un valor de 3-15 días en condiciones convencionales de operación, y se regula mediante caudales de purga adecuados.
- La *carga másica* conocida también como relación F/M . Se refiere a la relación entre la masa de materia orgánica alimentada al reactor por unidad de tiempo y la masa de microorganismos disponibles en el mismo, debe estar entre unos límites determinados en dependencia del caudal medio a tratar.
- El *tiempo de retención hidráulica* es el tiempo de permanencia del agua a tratar en los reactores para que se efectúen las reacciones, el cual debe estar entre 2 y 5 horas aproximadamente.
- Las *relaciones entre los caudales* de recirculación, purga y entrada deben mantenerse entre unos límites que dependen de la legislación ambiental en particular.
- La *capacidad hidráulica* del decantador no debe superar cierto límite.

La calidad del agua a ser descargada es el objetivo de la operación y determina la eficiencia del proceso. Se mide en función de los parámetros característicos del efluente, que deben mantenerse dentro de ciertos límites que dependen de la legislación regional. En la Tabla 2.9 se presentan algunos valores sugeridos en Alex *et al.* (2008) y Mulas (2006).

Variable	Valor
Nitrógeno total (Nt)	$< 18 \text{ g N/m}^3$
Demanda Química de Oxígeno (DQO)	$< 125 \text{ g DQO/m}^3$
Amonio (S_{NH})	$< 4 \text{ g N/m}^3$
Nitratos y nitritos (S_{NO})	$< 10 \text{ g N/m}^3$
Producción total de fangos (TSS)	$< 30 \text{ g SS/m}^3$

Tabla 2.9: Límites sobre la calidad del efluente

2.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTROL

El principal objetivo de control en el proceso de fangos activados consiste en mantener la calidad del efluente dentro de unos límites marcados por la legislación vigente, lo cual implica el diseño de un sistema de control que garantice un buen rechazo a las

perturbaciones de entrada a la planta. Las condiciones en el influente varían bastante dependiendo de la hora o el día de la semana como se ha visto en el punto anterior, y la planta debe tratar de mantener constante la calidad del efluente a pesar de estas fuertes variaciones en la entrada. Asimismo, igual que en cualquier planta industrial, otro objetivo primordial es la minimización de los costes de operación, que son principalmente los costes de bombeo y aireación.

El control del proceso de fangos activados es una tarea compleja debido principalmente a que la dinámica del proceso es altamente no lineal debido a la cinética de Monod involucrada en las reacciones, y está definida por el comportamiento de una población de distintos tipos de microorganismos que son los encargados de degradar la materia orgánica del agua que llega a la planta. Los microorganismos cambian su comportamiento y sus distribuciones de población dificultando el diseño e implementación de un controlador apropiado para el proceso.

Algunas otras características específicas de este proceso que dificultan su control, independientemente de la estrategia utilizada, son las siguientes (Olsson y Newell, 1999):

- Existencia de una gran cantidad de agua residual a tratar diariamente.
- La interacción entre las distintas variables es grande debido a las recirculaciones internas.
- Existencia de pocas variables realmente manipulables para el control, y la dificultad a la hora de medir ciertas variables de interés.
- El conocimiento detallado de los mecanismos del proceso es bastante empírico, y la comprensión de fenómenos como el esponjamiento filamentoso (*bulking*) o la formación de espumas (*foaming*) es todavía escaso.
- La necesidad de mantener continuamente las especificaciones del efluente para minimizar el impacto ambiental sobre el medio.

Por todo esto, tradicionalmente la implantación del sistema de control no se lleva a la práctica y simplemente se opera en lazo abierto. Esta forma de operar conlleva en el mejor de los casos el diseño de plantas sobredimensionadas y costes elevados de operación, sin obtener garantías sobre la calidad del efluente. De todas formas, en la literatura se han propuesto numerosas estrategias de control para el proceso de fangos activados (Weijers, 2000; Samuelsson, 2005).

Un sistema de control adecuado aplicado al proceso mantendría la calidad del efluente sin tener plantas sobredimensionadas, por lo que en la actualidad el control de las plantas de depuración de aguas se está convirtiendo en algo absolutamente necesario debido a las cada vez más estrictas y cambiantes regulaciones medioambientales.

Los problemas de control planteados dependen obviamente del modelo del proceso considerado. En el modelo más simplificado correspondiente a la planta nº 1 (Figura 2.8), para conseguir un efluente bien depurado se trata de mantener la concentración de sustrato en el efluente s_1 por debajo de un determinado límite legal a pesar de las importantes variaciones del caudal de entrada (q_i) y de la concentración de sustrato en dicho caudal (s_i), que son las perturbaciones de entrada al sistema. Se busca por lo tanto un buen rechazo de las perturbaciones, a la vez que se asegura una concentración de biomasa suficiente para permitir la degradación del sustrato. De forma complementaria, es necesario mantener la concentración de oxígeno disuelto c_1 alrededor de 2 mg/l para

que los microorganismos puedan degradar la materia orgánica, por lo que este será otro objetivo de control. Para conseguir estos objetivos, se pueden utilizar en principio como variables manipuladas los caudales de recirculación (q_r), purga (q_p), y factores de aireación (fk), aunque habitualmente el caudal de purga se mantiene constante. Aunque el sistema sea multivariable y se tengan interacciones entre las distintas variables, se puede afirmar que los factores de aireación afectan especialmente a la concentración de oxígeno disuelto, y los caudales afectan a la concentración de sustrato en el reactor.

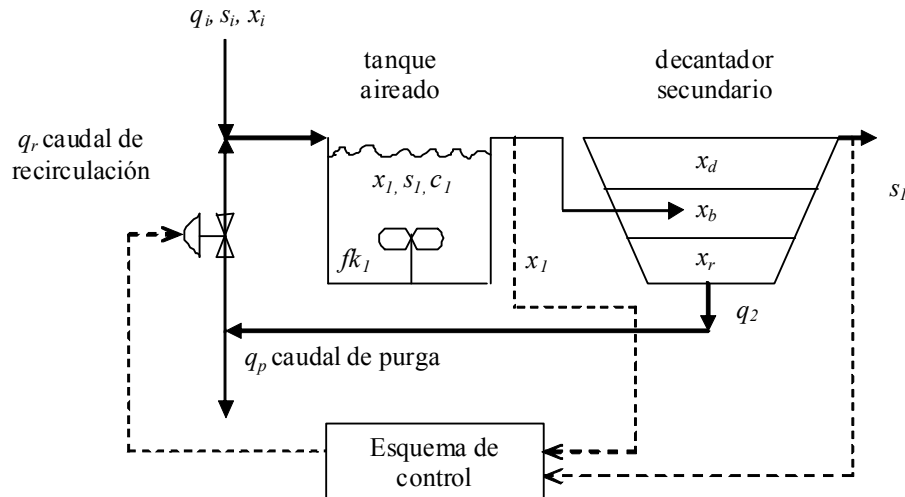


Figura 2.8: Esquema general de la planta n° 1 con el sistema de control

El control de la concentración de oxígeno disuelto en los tanques aireados es relativamente sencillo debido a que el comportamiento de dicha variable no es tan complejo como el del sustrato. Su dinámica es más rápida, sin retardos, y bastante desacoplada del resto de variables, por lo que su control se puede realizar con controladores PI simples.

Respecto al control del nitrógeno en la planta n° 2 (Figura 2.9), el objetivo consiste en mantener la concentración de nitritos y nitratos en el segundo tanque anóxico ($S_{NO}(2)$) por debajo de ciertos límites legales y regular la concentración de oxígeno disuelto en el último tanque aireado ($S_O(5)$) a pesar de las perturbaciones de entrada. Las variables manipuladas utilizadas son el caudal de recirculación interno (q_a) y la aireación en el último tanque aireado, concretamente a través del coeficiente de transferencia de oxígeno K_{La5} (Alex *et al.*, 2008; Cristea, 2008). El caudal de recirculación externo se mantiene constante en la configuración de control elegida. Si se utiliza la planta n° 3 correspondiente al BSM1 simplificado, el problema de control es análogo, aunque sin distinguir el número de reactor puesto que únicamente hay un reactor anóxico y otro aireado.

Si a estos objetivos de desempeño se unen los objetivos económicos de minimización de costes de operación, se pueden plantear problemas de control multiobjetivo con índices contrapuestos, por lo que el ingeniero de control tiene que decidir en esta situación de compromiso según las necesidades de cada planta.

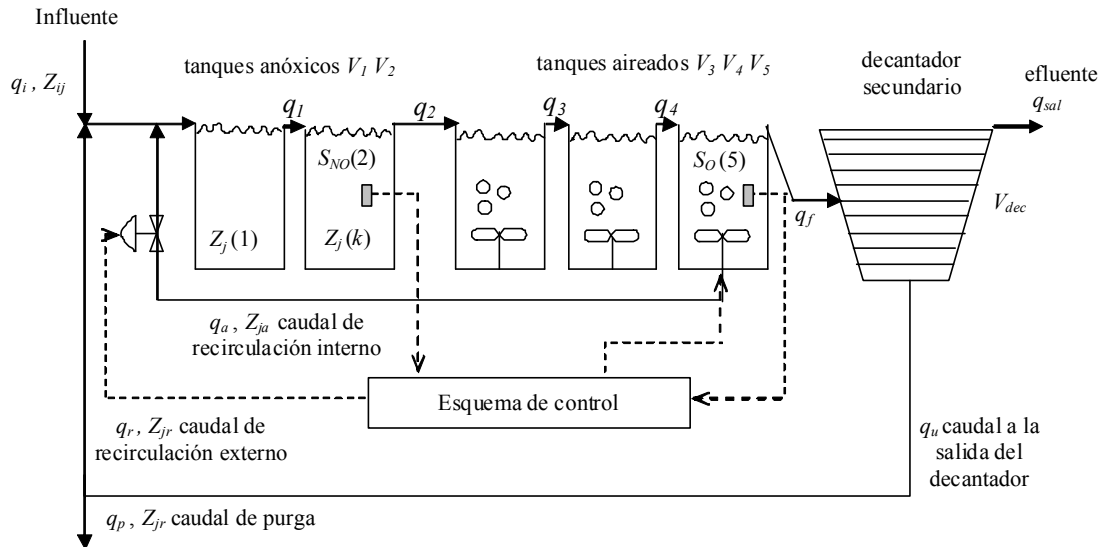


Figura 2.9: Esquema general de la planta n° 2 con el sistema de control

2.3 ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD EN LAZO ABIERTO

El análisis de la controlabilidad de la planta es útil para estudiar los problemas de controlabilidad intrínsecos al proceso y su comportamiento dinámico general. Este análisis permite además definir de forma más precisa el problema de diseño integrado y la estructura del sistema de control, incluyendo la selección de variables manipuladas y controladas más adecuadas. Por sencillez, el análisis de controlabilidad se realiza únicamente para la planta n° 1, que ya pone de manifiesto ciertos problemas de controlabilidad que es importante reseñar, dejando el comportamiento de las otras plantas para los apartados de resultados.

En primer lugar se selecciona un punto de operación estacionario para esta planta con el objetivo de estudiar la controlabilidad del proceso, diseñar un controlador MPC y también validar los métodos de sintonía automática de controladores MPC desarrollados en el capítulo 5. Esta planta consta de un reactor y un decantador en serie, con las dimensiones que se ya se presentaron en la Tabla 2.2. El punto de trabajo estacionario (Tabla 2.10), que se mantiene constante si no hay acciones de control ni perturbaciones, viene dado por el valor nominal de las variables manipulables de la planta real.

Punto de trabajo estacionario	
fk	0.15
q_r	570.4 m ³ /h
q_p	36.486 m ³ /h
x_l	2000.3 mg/l
s_l	55 mg/l
c_l	2.72 mg/l
x_d	80.044 mg/l
x_b	600.32 mg/l
x_r	5998.3 mg/l

Tabla 2.10: Punto de trabajo nominal del proceso

2.3.1 Comportamiento dinámico del proceso

El proceso de fangos activados es un proceso multivariable, y por lo tanto existe interacción entre las distintas variables involucradas. En (Gutiérrez, 2000) se hace un estudio de la matriz de ganancias relativas de Bristol (*Relative Gain Array*, RGA) concluyendo que para el control de la concentración s_I , una buena elección como variable manipulada es el caudal q_r . En efecto, si se somete al proceso a un escalón ascendente en la entrada q_r del 10% desde el estado estacionario en ausencia de perturbaciones (Figura 2.10), se puede comprobar que la biomasa x_I en el reactor aumenta ya que se están introduciendo más microorganismos, provocando un aumento del consumo de sustrato y por lo tanto una disminución de s_I .

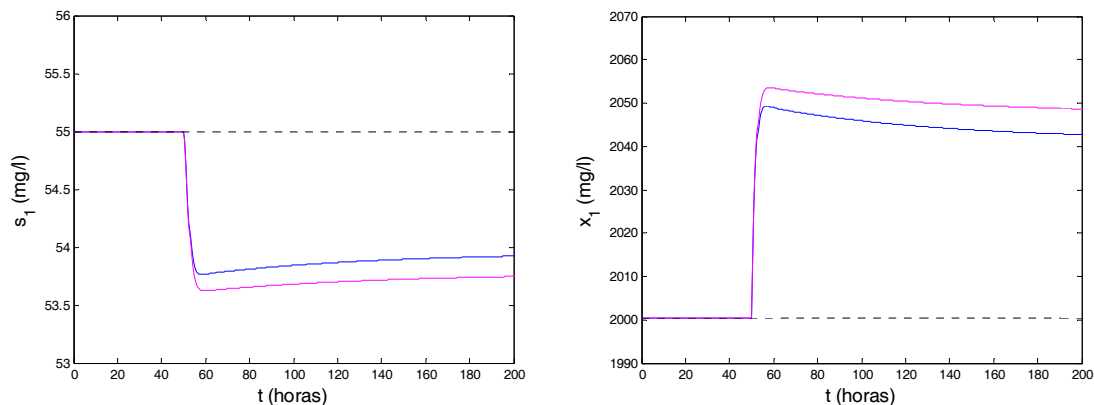


Figura 2.10: Evolución de s_I para un salto en q_r ascendente (azul: modelo no lineal; magenta: modelo linealizado)

Otra posible variable manipulada que provoca un comportamiento similar es el caudal de purga q_p , aunque no se utilizará porque la ganancia de s_I respecto a esta entrada es muy pequeña y además su valor está restringido por la edad de fangos requerida en el proceso.

Puesto que el principal objetivo de control en este proceso es rechazar las perturbaciones que llegan en el influente, a continuación se presenta el efecto de las perturbaciones de tiempo seco del BSM1 sobre el proceso en lazo abierto (Figura 2.11). En esta figura se observa como s_I aumenta o disminuye siguiendo el perfil de las perturbaciones de entrada, es decir, la concentración s_I va marcando un máximo diario para cada máximo de perturbación en el influente.

2.3.2 Análisis de los problemas de controlabilidad

Tras analizar el comportamiento dinámico general del proceso, a continuación se describen ciertas características específicas que dificultan su controlabilidad y es necesario tener en cuenta en el diseño del proceso y su sistema de control. Este análisis permite establecer restricciones en ciertas variables del problema de diseño simultáneo de la planta y el controlador que eviten estos comportamientos, así como para la selección de una nueva planta de referencia donde validar las técnicas de sintonía automática de MPC y el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

La primera dificultad que presenta el proceso consiste en la gran variación y cambio de signo de la ganancia de la salida s_I respecto a la entrada q_r , que se manifiesta cuando el proceso se somete a saltos de diversa magnitud en dicha entrada. En la Tabla 2.11 se presentan dichas ganancias, utilizando la planta de referencia y punto de operación de la Tabla 2.10 sin perturbaciones, junto con el valor final de s_I y los ceros del modelo lineal en el plano de Laplace después del correspondiente salto.

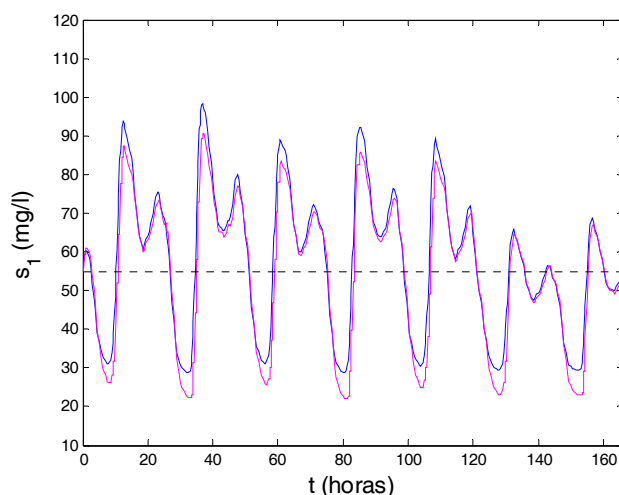


Figura 2.11: Evolución de s_I para perturbaciones BSM1 de tiempo seco en q_i y s_i (azul: modelo no lineal; magenta: modelo linealizado)

Punto estacionario: $q_r = 570.4 \text{ m}^3/\text{h}$ $s_I = 55 \text{ mg/l}$	Valor final de s_I (mg/l)	Ganancia del modelo no lineal	Ceros del modelo lineal en el nuevo punto de trabajo
Δq_r (m^3/h)			
-200	63.19	-0.04095	-0.012; -0.84; -2.21
200	52.474	-0.01263	-0.007; -0.47; -1.97
400	51.886	-0.00778	-0.001; -0.36; -1.91
600	52.084	-0.00486	0.009 ; -0.28; -1.87
1000	53.29	-0.00171	0.048 ; -0.17; -1.82
1500	55.079	5.2667e-005	0.14 ; -0.11; -1.79
2000	56.728	0.000864	0.25 ; -0.09; -1.78

Tabla 2.11: Ganancias, ceros y valor final de s_I para distintos saltos en la entrada q_r

En la Tabla 2.11 se observa que hay un punto a partir del cual el valor final de s_I empieza a aumentar cambiando así la tendencia general, llegando a aparecer un comportamiento de fase no mínima como puede verse en la Figura 2.12 para un salto de $\Delta q_r = 2000 \text{ m}^3/\text{h}$. También en esta figura se compara la respuesta del proceso con la del correspondiente modelo linealizado, observándose en este caso una gran discrepancia entre ellas. La linealización en torno a los nuevos puntos de operación tras cada salto muestra la aparición de ceros positivos (Tabla 2.11) para saltos de elevada magnitud que indican una respuesta inversa del proceso.

Desde el punto de vista de funcionamiento del proceso, estos hechos son debidos a que incrementos elevados del caudal q_r , provocan a su vez incrementos en el caudal de salida del reactor disminuyendo así el tiempo de retención hidráulica, resultando en estos casos en una disminución neta de la biomasa en el reactor y consecuentemente en un aumento de s_I . Como consecuencia de este funcionamiento, para cada punto de operación existe un nivel mínimo de s_I que no se puede sobrepasar, como se puede observar también en la Tabla 2.11 para la planta de referencia y punto de trabajo de la Tabla 2.10, siendo imposible reducir el valor de s_I por debajo de 51.886 mg/l.

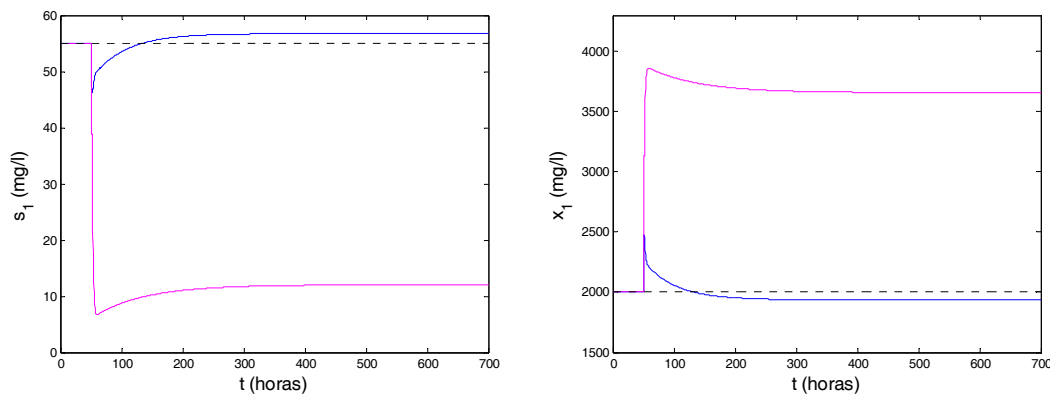


Figura 2.12: Evolución de s_I y x_I para un salto ascendente en q_r . (azul: modelo no lineal; magenta: modelo linealizado)

Este comportamiento dificulta el control del proceso en base a modelos linealizados e imposibilita el uso de controladores clásicos como el PID, que no permiten incluir restricciones para operar fuera de esa zona produciendo inestabilidades en estos casos. Es necesario por consiguiente elegir referencias y restricciones adecuadas en el controlador y en el diseño del proceso que eviten acercarnos a estas zonas.

Respecto al efecto de las perturbaciones de entrada, una perturbación de magnitud muy elevada también lleva al proceso a situaciones análogas en las cuales el cambio de las ganancias no permite su completa atenuación.

2.3.3 Influencia del punto de operación estacionario y las dimensiones de la planta

Punto de operación estacionario

Una posible solución para minimizar el comportamiento que se ha presentado en el apartado anterior consiste en aumentar la concentración s_I en el punto de operación estacionario. Dado que el objetivo del sistema de control para el proceso de fangos activados consiste fundamentalmente en rechazar las perturbaciones de entrada produciendo un efluente con s_I menor que un cierto límite legal, el hecho de elevar su valor estacionario, si viene acompañado de un mejor rechazo de las perturbaciones, puede ser beneficioso siempre que no se sobrepase dicho límite. En efecto esto es así porque el aumento del valor de s_I estacionario se consigue disminuyendo q_r , existiendo entonces una mayor flexibilidad en la introducción de biomasa en el reactor capaz de atenuar las perturbaciones de entrada. El aumento del valor de s_I coloca a la planta en un estado estacionario menos exigente.

Respecto a la ganancia de s_I respecto a q_r , al aumentar el valor de s_I estacionario ahora mantiene siempre su signo negativo debido a que la concentración s_I final después de aplicar un salto ascendente en q_r nunca supera a la inicial. En la Tabla 2.12 se presentan los valores de la ganancia para la planta de referencia en un punto de operación con $s_I=87$ mg/l. En consecuencia de lo anterior, cuando se aumenta el valor de s_I desaparecen también los ceros positivos del sistema linealizado con la consiguiente mejora en la controlabilidad (Tabla 2.13).

Punto de operación: $q_r=203.1$ m ³ /h $s_I=87$ mg/l	Valor final de s_I (mg/l)	Ganancia del sistema no lineal
Δq_r (m ³ /h)		
-200	300.99	-1.07
200	61.128	-0.12936
400	54.376	-0.08156
600	52.296	-0.05784
1000	52.156	-0.03484
1500	53.764	-0.02216
2000	55.536	-0.01573
3000	58.507	-0.00949
4000	60.727	-0.00656

Tabla 2.12: Valor final de s_I y ganancias en la planta con punto de operación elevado

Punto de operación		Ceros en el plano de Laplace para el correspondiente punto de operación
s_I estacionario (mg/l)	q_r estacionario (m³/h)	
204.87	50	-2.7329; -1.2856; -0.013155
87.000	203.1	-2.4244; -1.0679; -0.012976
76.834	250	-2.3538; -1.0012; -0.012859
56.864	500	-2.1067; -0.69651; -0.011409
52.149	1200	-1.863; -0.26608; 0.011054
54.832	2000	-1.7917; -0.11853; 0.12091

Tabla 2.13: Influencia del punto de operación en los ceros del sistema

Por último, indicar que también se ha comprobado la mejora en la controlabilidad al trabajar en un punto de operación con s_I mayor estudiando la capacidad de rechazo de perturbaciones concretas en simulación.

La conclusión de este análisis indica la conveniencia de fijar una cota superior para el valor de q_r , tanto en el punto de operación como su valor dinámico, evitando así puntos de operación con poca flexibilidad para rechazar perturbaciones y con cambios de signo en la ganancia. El valor inferior de q_r en el punto de operación debería fijarse también con cierto margen para evitar saturaciones en cero de la bomba. De forma

complementaria, se debe fijar una cota superior para s_I con el fin de evitar que se sobrepase el límite legal impuesto, dejando cierto margen para las perturbaciones.

Dimensiones de la planta

Las dimensiones del reactor biológico y el área del decantador son dos parámetros importantes del proceso de fangos activados que determinan también el punto de operación estacionario y la controlabilidad del proceso. En concreto, se observa que si se aumentan las dimensiones se elimina también el cambio de signo en las ganancias, debido a que los tiempos de retención hidráulica necesarios para la eliminación del sustrato aumentan a pesar de tener caudales de recirculación elevados. Por ejemplo, en la Tabla 2.14 se muestra el valor final de s_I y las ganancias para distintos saltos en la entrada q_r para la planta de referencia, con el volumen del reactor y el decantador aumentados un 10% respecto a su valor original:

$$V_I = 7994.8 \text{ m}^3$$

$$A = 3048 \text{ m}^2$$

Punto de operación: $q_r = 382.01 \text{ m}^3/\text{h}$ $s_I = 55 \text{ mg/l}$	Valor final de s_I	Ganancia del sistema no lineal
$\Delta q_r \text{ (m}^3/\text{h)}$		
-200	82.492	-0.13746
200	47.957	-0.035215
400	45.582	-0.023545
600	44.887	-0.016855
1000	45.290	-0.00971
1500	46.687	-0.005542
2000	48.125	-0.0034375
3000	50.506	-0.001498
4000	52.276	-0.000681

Tabla 2.14: Ganancias para distintos saltos en q_r para la planta con V_I y A aumentados

Las ventajas de utilizar plantas con dimensiones mayores también se han evaluado mediante simulaciones, mostrando que una planta con dimensiones aumentadas es capaz de rechazar completamente una perturbación escalón en s_i mediante un salto en q_r , mientras que la planta original no puede hacerlo.

2.4 CONCLUSIONES

En este capítulo se describe el proceso de fangos activados en una planta depuradora de aguas residuales, detallando un modelo matemático sencillo para eliminación de materia orgánica (planta nº 1) y dos modelos más complejos que incluyen también los procesos de nitrificación y desnitrificación para la eliminación del nitrógeno, como el BSM1 (planta nº 2) y una simplificación del mismo (planta nº 3). Se trata de un proceso

biológico no lineal con dinámica complicada, lo cual hace interesante su consideración como caso de estudio en la aplicación de la metodología propuesta de diseño.

La operación del proceso se inicia con la descripción de las perturbaciones típicas que afectan al proceso, para después describir algunos índices de calidad dinámicos asociados a este proceso particular, definidos en la plataforma de simulación BSM1, como por ejemplo el índice de calidad del efluente (EQ), las energías de bombeo y aireación y otros generales como el ISE . Finalmente se presentan los requerimientos generales para el funcionamiento adecuado del proceso (tiempos de retención, carga másica, edad de fangos, etc.), que serán de utilidad para imponer las restricciones en el planteamiento del diseño integrado.

También se ha descrito el problema de control del proceso, que consiste en mantener la calidad del efluente a pesar de las perturbaciones y con un gasto energético razonable en consumo de las bombas y turbinas de aireación. En particular, considerando la planta n° 1, el objetivo de control se traduce en atenuar las variaciones de sustrato s_1 debidas a las perturbaciones, manteniendo cierta cantidad de microorganismos en el reactor biológico y manipulando el caudal de recirculación de fangos q_r . Por otra parte, también es necesario controlar la concentración de oxígeno disuelto c_1 variando el factor de aireación fk_1 . Para las plantas n° 2 y n° 3, el objetivo consiste en mantener la concentración de nitritos y nitratos en la zona anóxica por debajo de un límite y regular la concentración de oxígeno disuelto en la zona aireada. Las variables manipuladas en este caso son el caudal de recirculación interno (q_a) y el coeficiente de transferencia de oxígeno K_La .

Para finalizar el capítulo, se realiza un estudio de la controlabilidad del proceso en lazo abierto utilizando la planta n° 1, poniendo de manifiesto ciertos problemas como la existencia de grandes variaciones en la ganancia del sustrato respecto a la variable manipulada dependiendo de la magnitud del salto, incluso con variaciones de signo, y la existencia de ceros positivos, debidos a la naturaleza de los procesos biológicos, dificultando la utilización de técnicas clásicas de control. A este respecto se presentan algunas soluciones sencillas como son la modificación del punto de operación o de las dimensiones de la planta, que dotan de una mayor flexibilidad al control del proceso. Estos cambios en el diseño se realizarán de forma automática cuando se resuelva el problema diseño integrado imponiendo restricciones adecuadas.

Capítulo 3

FUNDAMENTOS DE CONTROL PREDICTIVO Y APLICACIÓN AL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS

Resumen:

En este capítulo se presentan los fundamentos de control predictivo necesarios para la posterior resolución del problema de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control, así como de sintonía automática de controladores MPC. En primer lugar se expone la formulación básica del MPC y la resolución del problema de optimización que involucra el cálculo de las señales de control óptimas. Posteriormente se plantea el MPC con penalización terminal que garantiza la estabilidad del sistema para cualquier parámetro de sintonía. Se continúa con algunos aspectos particulares de la implementación del MPC utilizada para finalizar con un análisis de la controlabilidad en lazo cerrado del proceso de fangos activados.

3.1 FUNDAMENTOS DE MPC Y FORMULACIÓN BÁSICA

El control predictivo basado en modelos (*Model Predictive Control*, MPC) es una técnica de control avanzado basada en la utilización de un modelo del proceso para evaluar su comportamiento futuro y así calcular de forma óptima las señales de control más adecuadas. Su funcionamiento es sencillo e intuitivo y cada vez es más popular tanto en el ámbito académico como el industrial. La posibilidad de incorporar restricciones tanto en las variables manipuladas como en las salidas, así como de trabajar con sistemas multivariables y no lineales son razones que impulsan su utilización.

Matemáticamente, el algoritmo de control consiste en resolver un problema de optimización con restricciones que minimiza una función objetivo, la cual incluye el error de desviación de la salida predicha respecto de la referencia junto con el valor de los esfuerzos de control. El resultado de esta optimización son las señales de control óptimas a aplicar al proceso.

Debido a la necesidad de predecir las salidas futuras, es fundamental el tipo y fiabilidad modelo del proceso que se utilice. En función de este modelo se tienen entre otros el control predictivo en el espacio de estados (*State Space Model Predictive Control*, ssMPC) (Maciejowski, 2002), control predictivo generalizado (*Generalized Predictive Control*, GPC) (Clarke *et al.* 1987), que utiliza un modelo CARMA; control DMC (*Dynamic Matrix Control*) si se utiliza un modelo de respuesta escalón (Cutler *et al.*, 1980) y el control predictivo no lineal si se predice con un modelo no lineal del proceso (Allgöwer *et al.*, 2000), (Qin y Badgwell, 2000)

En este trabajo se utilizan específicamente controladores MPC en el espacio de estados con modelos de predicción lineales ya que es la representación más usada para demostrar las propiedades fundamentales de estabilidad y robustez de los sistemas. Por otra parte, su elección está motivada también por la utilización de índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema dentro de la metodología de diseño integrado que se propone en esta tesis.

El MPC considerado incorpora un modelo lineal para predecir la salida del proceso en futuros instantes de tiempo discretos, hasta el horizonte de predicción (H_p). Las señales de control se calculan resolviendo un problema de optimización con restricciones en línea, que en el caso de la formulación más básica consiste en minimizar la siguiente función de coste cuadrática que incluye los errores de seguimiento de la referencia así como los esfuerzos de control:

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\mathbf{y}(k+i|k) - \mathbf{r}(k+i|k)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+i|k)\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (3.1)$$

sujeta a las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\min} < \mathbf{u}(k+i|k) < \mathbf{u}_{\max} & \quad i = 0, \dots, H_c \\ \mathbf{y}_{\min} < \mathbf{y}(k+i|k) < \mathbf{y}_{\max} & \quad i = H_w, \dots, H_p \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} < \Delta \mathbf{u}(k+i|k) < \Delta \mathbf{u}_{\max} & \quad i = 0, \dots, H_c \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{y}(k+i|k)$ son las salidas predichas en el instante de muestreo $k+i$, con medidas hasta el instante k , $\mathbf{r}(k+i|k)$ es el valor de las trayectorias de referencia en el instante $k+i$ con medidas hasta k , $\Delta \mathbf{u}(k+i|k)$ es el incremento de las señales de control en el instante $k+i$ con medidas hasta k , \mathbf{R} es una matriz diagonal que representa los pesos de los esfuerzos de control a lo largo del horizonte de control, \mathbf{Q} es otra matriz diagonal que representa los pesos de los errores de las salidas respecto a las trayectorias de referencia marcadas, H_p es el horizonte de predicción, H_w es el horizonte de predicción inicial y H_c es el horizonte de control.

La trayectoria de referencia define la trayectoria ideal que debe seguir el proceso para llegar al valor de la consigna marcada, considerándose habitualmente una aproximación exponencial. Si llamamos $\mathbf{s}(k)$ a la función que define la consigna, la trayectoria de referencia se puede representar por la siguiente función, donde T es el periodo de muestreo y T_{ref} la constante que fija la velocidad de aproximación:

$$\mathbf{r}(k+i|k) = \mathbf{s}(k+i) - e^{-iT/T_{ref}} (\mathbf{s}(k) - \mathbf{y}(k|k)) \quad i = H_w, \dots, H_p \quad (3.3)$$

El problema de optimización (3.1) es un problema de Programación Cuadrática (*Quadratic Programming*, QP), cuando se trata de MPC con restricciones, y su solución proporciona las señales de control óptimas hasta el H_c . De estas señales, únicamente se aplica al proceso la primera de ellas siguiendo una estrategia de horizonte deslizante (Figura 3.1)

Los modelos de predicción del MPC utilizados son modelos discretos lineales e invariantes en el tiempo (LTI) en el espacio de estados:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}_u(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}(k) + \mathbf{B}_v\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d\mathbf{d}(k) + \mathbf{D}_v\mathbf{v}(k) + \mathbf{m}(k) \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estados, $\mathbf{u}(k)$ el vector de entradas, $\mathbf{d}(k)$ el vector de perturbaciones medibles, $\mathbf{v}(k)$ el vector de perturbaciones no medibles, $\mathbf{v}_u(k)$ el vector de

perturbaciones no medibles actuando sobre la entrada, $\mathbf{y}(k)$ el vector de salidas, $\mathbf{m}(k)$ el ruido en la medida, y las matrices que aparecen tienen las dimensiones adecuadas.

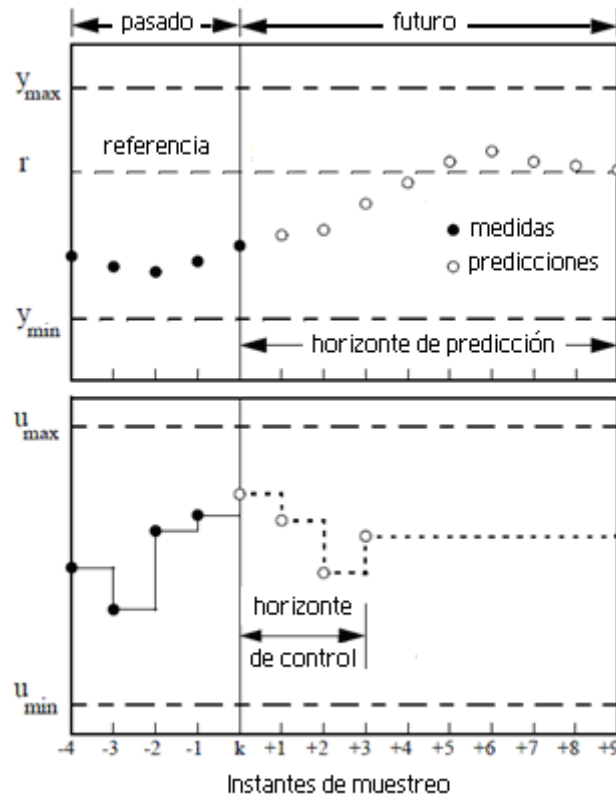


Figura 3.1: Estrategia de funcionamiento del MPC

Para conseguir un buen desempeño del MPC, existen diversos parámetros ajustables que el usuario debe sintonizar adecuadamente. Los más importantes son los pesos \mathbf{R} y \mathbf{Q} ; los horizontes H_p , H_c y H_w ; y la constante T_{ref} en la trayectoria de referencia.

El ajuste básico de los pesos está basado en que si se incrementa \mathbf{R} con respecto a \mathbf{Q} , entonces la actividad del control se reduce, es decir, las variaciones del control disminuyen. Si se incrementa indefinidamente se llega a un estado en el cual las señales de control se mantienen constantes. En cuanto a los horizontes, el horizonte de predicción se suele elegir a partir del tiempo de respuesta de la planta, de tal forma que $H_p - H_c$ debería ser mayor que el tiempo de asentamiento. También se recomienda que $H_p \gg H_c$, y tener en cuenta si la planta tiene retardos o fase no mínima. Por último, el parámetro T_{ref} determina la rapidez con que la salida vuelve a la referencia después del efecto de una perturbación en el sistema, o un cambio en la propia referencia.

3.2 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DEL MPC

3.2.1 Formulación sin restricciones

El problema de optimización del MPC sin restricciones que se plantea es el siguiente:

$$\min_{\Delta \mathcal{U}(k)} V(k) = \min_{\Delta \mathcal{U}(k)} \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\mathbf{y}(k+i|k) - \mathbf{r}(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+i|k)\|_R^2 \quad (3.5)$$

donde $V(k)$ es la función objetivo cuadrática (3.1) del MPC y las variables de optimización son:

$$\Delta \mathcal{U}(k) = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+H_c-1) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La solución, calculada a partir de la ecuación que iguala a cero el gradiente de $V(k)$, proporciona la siguiente ley de control (Maciejowski, 2002):

$$\Delta \mathcal{U}(k) = \mathcal{H}^{-1} \Theta^T Q \mathcal{E}(k) \quad (3.7)$$

El primer bloque de l elementos de $\Delta \mathcal{U}(k)$ se aplica al proceso, donde l es el número de entradas manipuladas y m el número de salidas controladas:

$$\Delta \mathbf{u}(k) = [\mathbf{I}, 0, \dots, 0] \mathcal{H}^{-1} \Theta^T Q \mathcal{E}(k) \quad (3.8)$$

donde

$$\mathcal{H} = \Theta^T Q \Theta + \mathbf{R} \quad (3.9)$$

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{T}(k) - \Psi \mathbf{x}(k) - \Upsilon \mathbf{u}(k-1) - \Xi \mathcal{D}_m(k) \quad (3.10)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \overbrace{\mathbf{Q} \ 0 \ \dots \ 0}^{m(H_p+1)} \\ 0 \ \mathbf{Q} \ \dots \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \overbrace{\mathbf{R} \ 0 \ \dots \ 0}^{lH_c} \\ 0 \ \mathbf{R} \ \dots \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^l \\ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_c-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \\ \sum_{i=0}^{H_c} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \dots & \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} & \dots & \sum_{i=0}^{H_p-H_c} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \Xi = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_d & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{AB}_d & \mathbf{B}_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}^{H_p-2} \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{B}_d \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p} \end{pmatrix} \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{H_p-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathcal{T}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(k+H_p) \end{pmatrix} \mathcal{D}_m(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{d}}(k+H_p-1) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

En las expresiones anteriores que definen la ley de control se considera por sencillez que todos los estados son medibles y $H_w=1$.

Respecto a las perturbaciones medibles, se asume que su valor se mantiene constante a lo largo del horizonte de predicción, manteniéndose el último valor medido:

$$\mathbf{d}(k) = \hat{\mathbf{d}}(k+1) = \dots = \hat{\mathbf{d}}(k+H_p-1) \quad (3.14)$$

En la Figura 3.2 se presenta el diagrama de bloques en lazo cerrado del MPC incluyendo perturbaciones medibles y todos los estados medibles, donde K_{MPC} se define según la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}_{MPC} = [\mathbf{I}, 0, \dots, 0] \mathcal{H}^{-1} \mathcal{Q}^T \mathbf{Q} \quad (3.15)$$

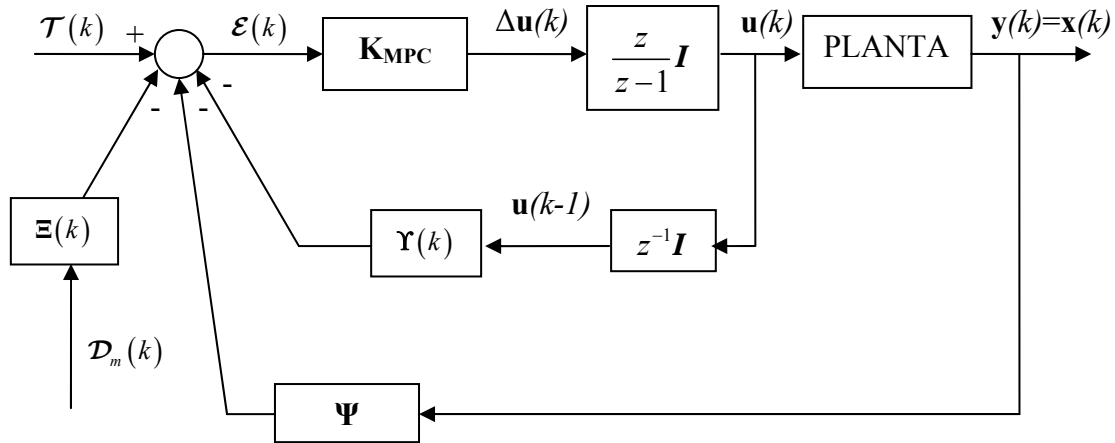


Figura 3.2: Diagrama de bloques del MPC sin restricciones

Para evitar los problemas numéricos derivados del cálculo de \mathcal{H}^{-1} , se utiliza el método de mínimos cuadrados para el cálculo de la señal de control.

3.2.2 Formulación con restricciones

Cuando existen restricciones sobre alguna de las variables del proceso, el problema de optimización planteado en (3.5) se resuelve como un problema de Programación Cuadrática (QP) que tiene la forma siguiente (Maciejowski, 2002):

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(k)} V(k) = \min_{\Delta \mathbf{u}(k)} \mathcal{E}(k) \mathbf{Q} \mathcal{E}(k) + \Delta \mathbf{u}(k)^T \mathcal{H} \Delta \mathbf{u}(k) - \mathcal{G}^T \Delta \mathbf{u}(k) \quad (3.16)$$

donde

$$\mathcal{G} = 2\Theta^T Q \mathcal{E}(k) \quad (3.17)$$

sujeto a las restricciones (3.2) sobre las entradas, salidas e incrementos de control.

El problema (3.16) tiene la forma típica de un problema QP puesto que todas las restricciones se pueden expresar linealmente en términos de $\Delta \mathbf{u}(k)$. Como la matriz \mathcal{H} es semidefinida positiva, el problema QP es convexo y se puede garantizar su convergencia.

De cara a la aplicación de la metodología de diseño integrado y sintonía automática propuesta en esta tesis, que está basada en la linealidad del MPC sin restricciones para el cálculo de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado, se puede demostrar que también se mantiene la linealidad cuando el conjunto de restricciones activas es fijo. En este caso el problema podría resolverse aplicando la teoría de multiplicadores de Lagrange, añadiendo a la función objetivo (3.16) un término dependiente de las restricciones activas, obteniéndose como solución una ley de control lineal que posibilita el análisis y diseño clásicos.

La existencia de restricciones en el problema de optimización que involucra el MPC puede hacer en algún caso que este problema sea no factible y no exista solución. Esto puede suceder porque aparezca una perturbación inesperadamente grande y sea imposible que la planta se mantenga dentro de las restricciones impuestas, o bien porque el comportamiento de la planta real difiera mucho del comportamiento del modelo de predicción.

En estos casos es muy conveniente tener una estrategia para evitar que el controlador que esté en línea con el proceso deje de dar una señal de control, como por ejemplo la imposición de restricciones blandas. El tratamiento utilizado para las restricciones blandas consiste en añadir nuevas variables, llamadas variables de holgura, definidas de tal manera que tomen un valor distinto de cero si y solo si las restricciones se violan. Este valor no nulo se penaliza de forma considerable en la función de coste del controlador, y así el optimizador trata de anularlas en la medida de lo posible.

3.3 FORMULACIÓN DEL MPC CON ESTABILIDAD GARANTIZADA

3.3.1 Horizonte infinito y penalización terminal de Lyapunov

Como alternativa más completa a la formulación anterior se tienen MPC con horizonte de predicción infinito, implementado como una penalización terminal en la función objetivo para tener un número finito de variables de decisión. Esta formulación se utiliza para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado (Rawlings y Muske, 1993) para cualquier valor de los parámetros de sintonía del MPC, puesto que las formulaciones que utilizan horizontes de predicción finitos no ofrecen una garantía de estabilidad en lazo cerrado ni siquiera en el caso nominal. La función objetivo considerada es la siguiente, para referencia nula:

$$V(k) = \|\mathbf{x}(k + H_c | k)\|_P^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \left(\|\mathbf{y}(k+i | k)\|_Q^2 + \|\Delta \mathbf{u}(k+i | k)\|_R^2 \right) \quad (3.18)$$

Esta función objetivo procede de la formulación con horizonte infinito de (Rawlings y Muske, 1993) cuya función objetivo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 V(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+i|k)\|_R^2 = \\
 &= \sum_{i=H_c}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \|\mathbf{y}(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \|\Delta \mathbf{u}(k+i|k)\|_R^2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Considerando que para instantes de muestreo $H_c \leq k < \infty$ la acción de control es nula por estar llevando las salidas al origen, y además la matriz A es estable, el sumatorio infinito puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=H_c}^{\infty} \|\mathbf{y}(k+i|k)\|_Q^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[(\mathbf{CA}^i \mathbf{x}(k+H_c|k))' \mathbf{Q} (\mathbf{CA}^i \mathbf{x}(k+H_c|k)) \right] = \\
 &= \mathbf{x}(k+H_c|k)' \left[\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{A}^i)' \mathbf{C}' \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{A}^i \right] \mathbf{x}(k+H_c|k) = \|\mathbf{x}(k+H_c|k)\|_P^2
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde la matriz P se define así:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{A}^i)' \mathbf{C}' \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{A}^i \tag{3.21}$$

Realizando manipulaciones algebraicas simples en la ecuación anterior, la matriz P se puede obtener como solución de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{P} - \mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{C}' \mathbf{Q} \mathbf{C} \tag{3.22}$$

De esta forma, se obtiene la función objetivo (3.18) con penalización terminal, y el problema se puede resolver mediante programación cuadrática de forma similar al punto anterior.

La demostración rigurosa de la estabilidad está basada en la teoría de la estabilidad de Lyapunov, centrándose en demostrar que la función objetivo del MPC es una función de Lyapunov, es decir, es decreciente y definida positiva. Los detalles se encuentran en (Rawlings y Muske, 1993), (Maciejowski, 2002), con la única diferencia que allí la función objetivo tiene un término que penaliza las magnitudes del control que en las formulaciones aquí presentadas no aparece, implicando que la matriz Q sea definida positiva para asegurar el decrecimiento de $V(k)$.

Los fundamentos de la demostración se basan en que si la función objetivo para un horizonte de predicción H_p se denota por $V_{H_p}(\mathbf{x}(k))$, cuando H_p es infinito se verifica la siguiente expresión, debido al principio de optimalidad (Bellman, 1957):

$$V_{H_p}(\mathbf{x}(k)) > V_{H_p}(\mathbf{x}(k+1)) \tag{3.23}$$

Como además la función objetivo es definida positiva y $V_{H_p}(0) = 0$, se cumplen las condiciones del método directo de Lyapunov y el origen (porque se considera referencia nula) es un estado estable como se quería demostrar (Mayne *et al.*, 2000).

La importancia de esta formulación es que la garantía de estabilidad se extiende al caso del MPC con restricciones, dado que la prueba de estabilidad de Lyapunov se aplica también a sistemas no lineales, y el único requerimiento es que siempre exista una secuencia de control factible a lo largo de todo el horizonte infinito.

3.3.2 Horizonte infinito y penalización terminal óptima

En esta formulación se considera un regulador lineal cuadrático (*Linear Quadratic Regulator*, LQR) a partir de un horizonte de control H_c hasta infinito, y se incluye el valor del coste óptimo (3.27) en la función objetivo del MPC como una penalización terminal. La estabilidad sigue estando garantizada, puesto que se sigue manteniendo el planteamiento de horizontes infinitos y se cumple que la función objetivo es una función de Lyapunov (Rawlings y Muske, 1993), (Sckaert *et al.*, 1998).

El MPC con formulación de horizonte infinito, implementado con penalización terminal utilizando la matriz P procedente de la resolución de la ecuación de Lyapunov asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado, pero puede empeorar el desempeño respecto al MPC con formulación básica para ciertos procesos. El problema que surge es que el término de penalización, que representa la contribución al valor de la función objetivo generada a partir del instante de muestreo H_c , considera una evolución libre del sistema. Para sistemas con el tiempo de respuesta elevado este coste puede ser muy elevado, con respecto al coste debido a tiempos desde k hasta H_c-1 . Una forma de solucionar esto consiste en que a partir del instante de tiempo H_c se implemente un control óptimo K por realimentación de estados (LQR). De esa forma en la parte final de la evolución del estado, existe un controlador que lleva al sistema de forma mucho más rápida hacia el estado estacionario deseado, con coste sensiblemente inferior.

La expresión matemática de la función objetivo es idéntica que (3.18), pero con la penalización terminal procedente de la resolución de la ecuación de Riccati del problema de control óptimo asociado:

$$P = A'PA - A'PB(B'PB + R)^{-1}B'PA + Q \quad (3.25)$$

La implementación del mencionado control LQR no se realiza explícitamente, sino que se calcula el valor del coste terminal y se introduce en la función objetivo del MPC. La ley de control es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k+i) &= -\mathbf{K}\mathbf{x}(k+i) \quad H_c < i < \infty \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ley de control que se obtiene es estabilizante y se puede demostrar que el coste óptimo es:

$$V_{\infty}(\mathbf{x}(k)) = \|\mathbf{x}(k)\|_P^2 \quad (3.27)$$

donde \mathbf{P} procede de la resolución de la ecuación de Riccati (3.25)

Para que la ecuación de Riccati tenga solución \mathbf{Q} y \mathbf{R} deben ser matrices constantes, \mathbf{R} definida positiva, el par $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ estabilizable (o controlable), y el par $\{\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{(1/2)}\}$ detectable (u observable) (Stengel, 1994).

Este planteamiento de control óptimo terminal se puede ver como un controlador MPC dual de forma que en el modo de trabajo próximo al estado estacionario, se utilice un control por realimentación de estados, que si se elije con ganancia \mathbf{K} óptima se denomina LQMP. En (Rossiter, 2003) se demuestra que la utilización de predicciones con modo dual, implica leyes de control MPC con garantía de estabilidad.

Tanto en este caso como el de la función objetivo (3.1), la resolución del problema QP estándar que se genera es análoga a la del MPC con formulación básica (ver punto 3.2).

Además de la estabilidad del controlador predictivo, no se deben olvidar las cuestiones de factibilidad del MPC respecto a las restricciones impuestas. Las demostraciones basadas en funciones de Lyapunov o similares tienen la importancia de que son completamente aplicables al caso de MPC con restricciones, aunque la ley de control ya sea no lineal. El único requerimiento es que la optimización con restricciones sea siempre factible (Muske y Rawlings, 1993; Mayne, 2000).

3.4 CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS DEL MPC

Una vez presentada la formulación del MPC y sus fundamentos, en este apartado se detallan algunos aspectos particulares relacionados con su implementación como son la utilización de un vector de estados aumentado y la inclusión de un estimador de estados con tratamiento de perturbaciones no medibles y ruido de medida.

Dado que el algoritmo de control predictivo proporciona directamente los incrementos de la variable manipulada $\Delta \mathbf{u}(k)$, se puede incluir en la dinámica del modelo de predicción la parte que realiza la integración discreta de $\Delta \mathbf{u}(k)$ a $\mathbf{u}(k)$, aumentando el vector de estados de la siguiente manera:

$$\xi(k) = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

donde $\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)$.

El MPC implementado consta de una etapa de estimación y otra de optimización que se repiten en cada instante de muestreo. Aunque todos los estados sean medibles, el estimador es necesario para eliminar errores en el seguimiento de la referencia debido a perturbaciones no medibles o a diferencias entre el modelo de predicción y la planta real. En la etapa de optimización se resuelve el problema QP con la información de los estados estimados, referencia y predicciones, obteniéndose la secuencia de variables de control óptimas.

Debido a la inclusión del estimador de estados, el sistema en lazo cerrado con MPC tiene la siguiente representación en el espacio de estados:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{cl}(k+1) = \mathbf{\Phi}_{cl}\mathbf{x}_{cl}(k) + \mathbf{\Gamma}_{cl}\mathbf{u}_{cl}(k) \\ \mathbf{y}_{cl}(k) = \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl}(k) + \mathbf{D}_{cl}\mathbf{u}_{cl}(k) \end{cases} \quad (3.29)$$

donde las matrices $\mathbf{\Phi}_{cl}$, $\mathbf{\Gamma}_{cl}$, \mathbf{C}_{cl} y \mathbf{D}_{cl} tienen las dimensiones adecuadas, y el vector de estados $\mathbf{x}_{cl}(k)$ incluye las siguientes variables en este orden:

- n_p estados de la planta.
- n_i cambios en el estimador de estados.
- n_y estimaciones de las salidas de la planta, sin ruido.
- n_u integradores que operan en la señal $\Delta\mathbf{u}$ producida por la formulación estándar del MPC para proporcionar una señal \mathbf{u} que pueda ser usada como entrada de la planta.
- n_d elementos diferenciadores que operan en la señal \mathbf{d} para producir la señal $\Delta\mathbf{d}$ necesaria en la formulación del MPC.

El vector de entradas $\mathbf{u}_{cl}(k)$ y de salidas $\mathbf{y}_{cl}(k)$ incluyen las siguientes señales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{cl}(k) &= (\mathbf{r}(k) \quad \mathbf{m}(k) \quad \mathbf{v}_u(k) \quad \mathbf{d}(k) \quad \mathbf{v}(k))' \\ \mathbf{y}_{cl}(k) &= (\mathbf{y}(k) \quad \mathbf{u}(k) \quad \hat{\mathbf{y}}(k|k))' \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $\mathbf{r}(k)$ es la señal de referencia, $\mathbf{m}(k)$ es el ruido de medida, $\mathbf{v}_u(k)$ son las perturbaciones no medibles en la entrada, $\mathbf{d}(k)$ son las perturbaciones medibles, $\mathbf{v}(k)$ son las perturbaciones no medibles actuando en la planta, $\mathbf{y}(k)$ son las salidas de la planta sin ruido, $\mathbf{u}(k)$ son las entradas e $\hat{\mathbf{y}}(k|k)$ es la estimación de las salidas.

Este modelo en el espacio de estados en lazo cerrado se genera a partir del modelo de predicción en lazo abierto (3.4), que se reescribe aquí de nuevo diferenciando salidas medibles (\mathbf{y}_m) y no medibles (\mathbf{y}_u):

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}_u(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}(k) + \mathbf{B}_v\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}_m(k) = \mathbf{C}_m\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{dm}\mathbf{d}(k) + \mathbf{D}_{vm}\mathbf{v}(k) + \mathbf{m}(k) \\ \mathbf{y}_u(k) = \mathbf{C}_u\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{du}\mathbf{d}(k) + \mathbf{D}_{vu}\mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (3.31)$$

El modelo de las perturbaciones no medibles es el siguiente, donde $\mathbf{n}_v(k)$ es una señal vectorial de ruido blanco con matriz de covarianza unidad y media cero:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_v(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_v(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{n}_v(k) \\ \mathbf{v}(k) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_v(k) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{n}_v(k) \end{cases} \quad (3.32)$$

El modelo del ruido es el siguiente, donde $\mathbf{n}_m(k)$ es también una señal vectorial de ruido blanco con matriz de covarianza unidad y media cero:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_m(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_m(k) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{n}_m(k) \\ \mathbf{m}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}_m(k) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{n}_m(k) \end{cases} \quad (3.33)$$

El estimador de estados proporciona estimaciones de los estados de la planta $\mathbf{x}(k)$, así como de los modelos de las perturbaciones no medibles $\mathbf{x}_v(k)$ y del ruido de medida $\mathbf{x}_m(k)$. Las ecuaciones que determinan su funcionamiento son las siguientes (denotando con acento circunflejo las señales estimadas):

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_v(k|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_m(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) \\ \hat{\mathbf{x}}_v(k|k-1) \\ \hat{\mathbf{x}}_m(k|k-1) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_{est} (\mathbf{y}_m(k) - \hat{\mathbf{y}}_m(k)) \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_v(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{x}}_m(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}_u(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}(k) + \mathbf{B}_v\bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_v(k|k) \\ \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_v(k|k) \\ \tilde{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_m(k|k) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_m(k) = \mathbf{C}_m\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{D}_{dm}\mathbf{d}(k) + \mathbf{D}_{vm}\bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_v(k|k-1) + \tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_m(k|k-1) \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) corresponde a la predicción de la salida a partir de los estados del observador, que se extiende en cada instante de muestreo hasta el horizonte de predicción.

La ganancia del observador \mathbf{K}_{est} se puede determinar por distintas técnicas, aunque en este trabajo se fija con el siguiente valor (Maciejowski, 2002):

$$\mathbf{K}_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Esta ganancia posibilita de forma sencilla la eliminación de errores estacionarios, que pueden producirse debido a perturbaciones no medibles en la salida, o a diferencias entre el modelo de predicción y la planta real.

Tanto el modelo de las perturbaciones no medibles (3.32) como la dinámica del observador \mathbf{K}_{est} se pueden considerar dos parámetros de sintonía adicionales en un MPC. Por ejemplo, al principio de cada instante de muestreo, el controlador estima el estado actual de la planta a partir de las salidas cuya medida está disponible. Cuanto más exacta sea esta estimación, mejor será la predicción, que a su vez mejora el desempeño del controlador.

3.5 CONTROL MPC APLICADO A LA PLANTA N° 1 DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS

En este punto se describe la aplicación del control MPC al proceso de fangos activados en una depuradora de aguas residuales y se realiza un breve análisis de la controlabilidad del proceso en lazo cerrado. Debido a su complejidad y los problemas de controlabilidad que presenta, es conveniente la utilización de un algoritmo de control avanzado como el MPC. De esta forma, por ejemplo, las diversas restricciones

existentes tanto de funcionamiento como relativas a requerimientos legales se pueden incluir fácilmente en la formulación. Para una mayor sencillez del estudio y poner de manifiesto los problemas generales, tanto el planteamiento como el análisis de controlabilidad se realiza con la planta n° 1, dejando los problemas de control de las plantas n° 2 y n° 3 para los apartados de resultados.

3.5.1 Planteamiento y ajustes previos

Los objetivos generales de control particularizados para la planta n° 1 de fangos activados consisten en regular s_I de forma que se atenúen las perturbaciones de entrada y mantener un valor adecuado de x_I y c_I para que el proceso se pueda desarrollar adecuadamente, como ya se indicó en 2.2. Dado que el oxígeno disuelto constituye una variable de dinámica mucho más rápida que el resto, se puede controlar de forma independiente de forma más sencilla con controladores PI, por lo que la estructura del MPC y esquema de la planta quedan expresados en la Figura 3.3 donde s_I es la variable controlada y x_I es una variable acotada en la formulación típica de control predictivo. La variable manipulada más apropiada es el caudal de recirculación q_r como ya se vio en el capítulo 2.

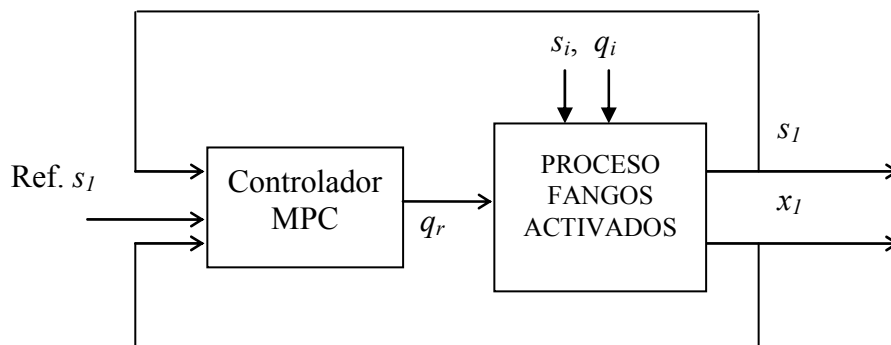


Figura 3.3: Estructura general del sistema en lazo cerrado con MPC para la planta n° 1

El modelo de predicción del MPC está basado en un modelo de la planta en el espacio de estados discreto como en (3.4), considerando que no existe ruido de medida ni perturbaciones no medibles. Los vectores de estados $\mathbf{x}(k)$, de entradas $\mathbf{u}(k)$, de perturbaciones $\mathbf{d}(k)$, y de salidas $\mathbf{y}(k)$ para el proceso son los siguientes:

$$\mathbf{x}(k) = (s_1, x_1, x_d, x_b, x_r)$$

$$\mathbf{u}(k) = (q_r)$$

$$\mathbf{d}(k) = (s_i, q_i)$$

$$\mathbf{y}(k) = (s_1, x_1)$$

Las perturbaciones de entrada s_i y q_i son variables no medibles, así como las concentraciones s_I y x_I , aunque en este trabajo en aras de la claridad metodológica se consideran medibles. Existen soluciones eficientes para su estimación como por ejemplo la utilización de modelos ARIMA para la estimación de s_i y q_i , y un método en dos pasos que estima en primer lugar la velocidad de consumo de oxígeno (OUR, *Oxygen Uptake Rate*) mediante técnicas de estimación paramétrica recursiva para luego utilizar estos valores en un filtro de Kalman no lineal mediante el que se estima finalmente s_I y x_I (Moreno, 1994) o la utilización directa de un filtro de Kalman

extendido (Mesquine *et al.*, 2010) y un observador de Luenberger (Elbahja *et al.*, 2010), entre otras posibilidades.

Las salidas del sistema son las concentraciones s_1 y x_1 puesto que son las variables a controlar o limitar. Dado que la dinámica del oxígeno es mucho más rápida que la del resto de compuestos como ya se ha comentado, se puede despreciar resultado un sistema de quinto orden con el que se ha trabajado de aquí en adelante.

El peso R en la función objetivo del MPC, que en este caso es un escalar y se denota por R , se ajustará dependiendo de los requisitos exigidos al sistema de control. El peso Q se fija a la unidad para la variable controlada y se anula para la variable limitada, por lo que tiene la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que el objetivo de control principal es rechazar las perturbaciones mientras que la referencia se mantiene constante, no se considera acción anticipativa de la referencia en el MPC. El periodo de muestreo se determina de forma empírica y se fija en $T=0.5$ horas.

Para el estudio de la controlabilidad en lazo cerrado, se selecciona también como planta de referencia y punto de operación estacionario los descritos en la Tabla 2.10. Este punto de operación es el punto de linealización para el cálculo de los modelos de predicción en el espacio de estados. Concretamente, los valores de las matrices de estado discretizadas con $T=0.5$ horas en dicho punto son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0.587 & -0.00999 & -4.097e-5 & -8.622e-6 & -0.00021 \\ 0.211 & 0.884 & 0.00957 & 0.00258 & 0.0349 \\ 0.0221 & 0.163 & 0.593 & 0.474 & 0.00342 \\ 0.00757 & 0.00791 & 0.0583 & 0.471 & 0.000114 \\ 0.00497 & 0.0549 & 0.459 & 0.181 & 0.897 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.00146 \\ 0.242 \\ 0.154 \\ 0.00699 \\ -0.875 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} 0.0694 & 0.0174 \\ 0.0105 & -0.121 \\ 0.000727 & 0.132 \\ 1.875e-5 & 0.038 \\ 0.000119 & 0.0435 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Las restricciones dinámicas del MPC incluyen cotas superiores e inferiores sobre el sustrato, la biomasa, el caudal de recirculación y sus incrementos:

$$\begin{aligned} s_{1d} < s_1 < s_{1u} & \quad q_{rd} < q_r < q_{ru} \\ x_{1d} < x_1 < x_{1u} & \quad \Delta q_{rd} < \Delta q_r < \Delta q_{ru} \end{aligned} \quad (3.40)$$

En particular, para el análisis que se realiza a continuación, se utilizan los valores de la **Tabla 3.1**.

Restricciones dinámicas del MPC	
s_{ld}	0
s_{lu}	125
x_{ld}	400
x_{lu}	3000
q_{rd}	0
q_{ru}	3500
Δq_{rd}	0
Δq_{ru}	1000

Tabla 3.1: Restricciones dinámicas para el MPC

Para determinar el valor de Δq_{ru} se realizaron diversas simulaciones con el fin de analizar el comportamiento del proceso en función de este parámetro, fijando un valor de $\Delta q_{ru}=1000 \text{ m}^3/\text{h}$ que permite gran libertad para atenuar las perturbaciones.

3.5.2 Análisis de la controlabilidad del proceso en lazo cerrado

En este apartado se estudia el comportamiento del MPC aplicado al proceso de fangos activados para distintos valores de los parámetros de sintonía, utilizando la planta nº 1. Este análisis es útil para estudiar su efecto sobre la calidad del control y estimar de forma más realista sus correspondientes límites.

Respecto a la influencia del peso R en el rechazo de las perturbaciones, se observa que a medida que su valor disminuye, la atenuación de las perturbaciones es cada vez más rápida a costa de provocar mayores variaciones en la señal de control. Este hecho se puede comprobar en la Figura 3.4, donde se compara la evolución dinámica de s_i y q_r para distintos pesos R cuando se aplica un escalón ascendente en s_i de 3% con $H_c=20$ para el MPC con penalización terminal. Si se aumenta mucho la magnitud de la perturbación el sistema se vuelve inestable para cualquier peso R del controlador, ya que la planta no es capaz de atenuarla debido a su escasa controlabilidad en estas situaciones como se explicó en 2.3.

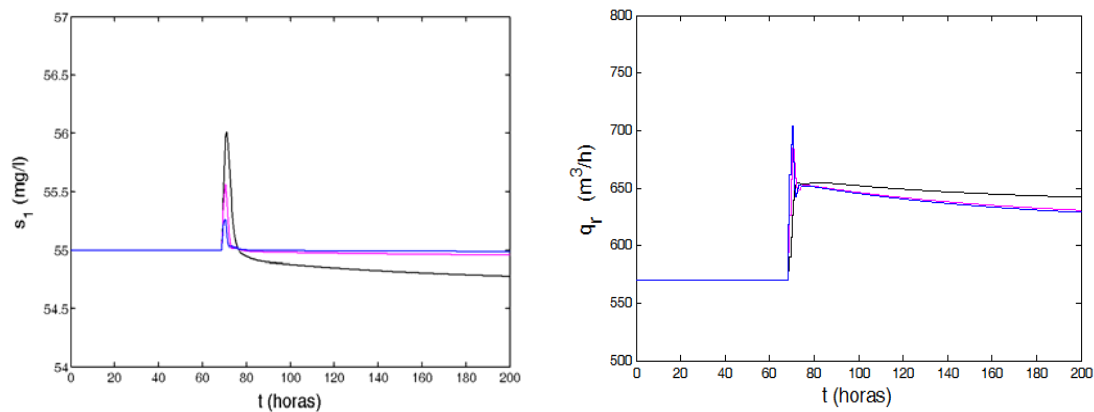


Figura 3.4: Rechazo a una perturbación salto ascendente en s_i para el MPC con penalización terminal y pesos $R=0.05$ (negro), $R=0.01$ (magenta), $R=0.003$ (azul)

Si se aplica sobre el proceso un perfil de perturbaciones completo de 7 días con tiempo seco tomado del BSM1, se observa que es imposible una atenuación completa de las mismas, ya que involucran saltos de elevada magnitud. En la Figura 3.5 se presenta la respuesta dinámica del proceso en este caso, comparando las dos formulaciones del MPC propuestas y la respuesta en lazo abierto. Las perturbaciones están atenuadas, el peso toma un valor de $R=0.003$, $H_c=20$ para el MPC con penalización terminal y $H_p=20$ para el MPC con formulación básica.

Por último se presenta la influencia del horizonte de control H_c , observándose como se deteriora el comportamiento del proceso para H_c pequeños, apareciendo saturaciones del control o comportamientos más oscilantes. En la Figura 3.6 se presenta una comparación para el MPC con estabilidad garantizada, $R=0.003$ y perturbaciones atenuadas al 40%.

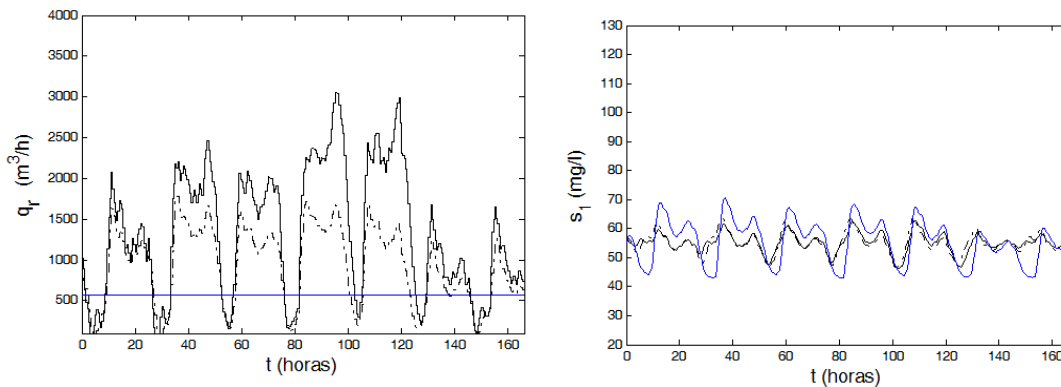


Figura 3.5: Comportamiento del sistema en lazo cerrado con perturbaciones, para MPC con penalización terminal (línea continua), formulación básica (línea discontinua) y lazo abierto (azul)

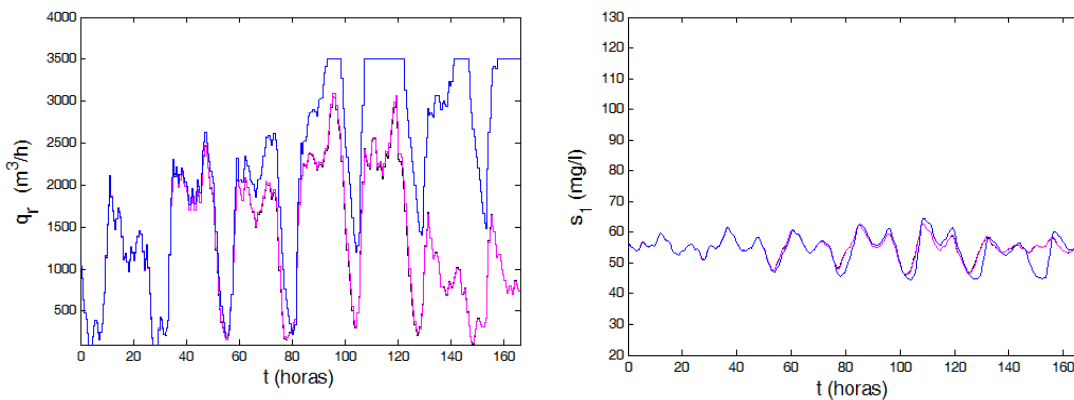


Figura 3.6: Comportamiento del sistema en lazo cerrado con perturbaciones, para MPC con penalización terminal y $H_c=20$ (negro), $H_c=10$ (magenta), $H_c=5$ (azul)

Como conclusión de este apartado, se pueden estimar ciertos límites para los parámetros de sintonía con el fin de mantener el proceso en una región con adecuada controlabilidad. El límite inferior del peso R debe ser pequeño para producir un buen desempeño, pero no demasiado para que las respuestas del proceso no sean muy oscilantes y por otro lado la ecuación de Ricatti del MPC con penalización terminal tenga solución. Respecto al H_c , su límite inferior también queda marcado por el desempeño del sistema en lazo cerrado.

3.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado los fundamentos de control predictivo y los aspectos básicos de las formulaciones utilizadas en el diseño integrado y la sintonía automática de controladores MPC. En primer lugar se propone una función objetivo básica que solo incluye un término que contiene los errores de desviación con respecto a la referencia y otro que penaliza los esfuerzos de control. Con esta formulación se resuelve el problema de optimización del MPC sin y con restricciones. La segunda función objetivo propuesta incluye además una penalización terminal que asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado para cualquier combinación de parámetros de sintonía. Esta penalización terminal se obtiene a partir de la resolución de una ecuación de Lyapunov o de Ricatti, siendo esta última la que mejores resultados proporciona en este trabajo. Se utilizan formulaciones en el espacio de estados, puesto que son las más apropiadas para determinar propiedades de estabilidad y robustez, y son ampliamente usadas en ámbitos académicos. Esta parte finaliza también con algunas características particulares del MPC utilizado como los modelos aumentados y el estimador de estados, que se encuentra disponible en la implementación del software.

La última parte del capítulo expone la aplicación del control MPC presentado al proceso de fangos activados en la versión de la planta n° 1, con el ajuste de algunas cuestiones específicas como las restricciones dinámicas u otros parámetros. El capítulo finaliza con un breve estudio del comportamiento del proceso en lazo cerrado con MPC, mostrando en general un buen desempeño en cuanto a rechazo de perturbaciones de entrada, evaluando la concentración de sustrato a la salida. Se estudian diversos casos con distintos pesos, que además indican el rango más adecuado para los parámetros de sintonía que se deberá imponer como restricciones en el diseño integrado o en la sintonía automática del MPC.

Capítulo 4

CONTROLABILIDAD DE PROCESOS E ÍNDICES DE DESEMPEÑO BASADOS EN NORMAS

Resumen:

En este capítulo se introducen los índices de desempeño seleccionados para cuantificar la controlabilidad de un proceso desde el punto de vista de entrada-salida. Tras una introducción general a las medidas de controlabilidad, se presentan los índices a utilizar en esta tesis, basados en normas H_∞ y l_1 de las funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado como son la función de sensibilidad, de sensibilidad complementaria y de sensibilidad al control, que se presentan particularizadas para el caso de un controlador MPC. Entre los más relevantes, se describe el índice de rechazo a perturbaciones y el índice de sensibilidad mixta utilizando la norma H_∞ y mediante la norma l_1 se describen otros índices que acotan los valores máximos de la entrada o la salida.

4.1 INTRODUCCIÓN

El concepto de controlabilidad tiene diversas interpretaciones como ya se indicó en el primer capítulo de esta tesis, aunque en el diseño simultáneo de procesos y sistemas de control se considera la controlabilidad de entrada-salida, definida como la habilidad de un proceso para alcanzar un desempeño de control aceptable, manteniendo las salidas en un rango especificado en torno a una referencia, a pesar de las perturbaciones y cambios en la planta, utilizando las entradas y mediciones disponibles (Skogestad y Postlewaite, 1996). Para evaluar esta controlabilidad, es necesario utilizar índices o magnitudes que permitan cuantificarla de forma objetiva, pudiendo referirse tanto a la planta en lazo abierto como al sistema en lazo cerrado incluyendo algún tipo de control.

El análisis de las características dinámicas de la planta en lazo abierto indica la facilidad de manejo cuando se implemente posteriormente el sistema de control. Sin embargo, el análisis del sistema en lazo cerrado resulta más ventajoso ya que corresponde a las condiciones reales de operación y permite comparar y decidir entre distintos esquemas de control posibles (Puigjaner *et al.*, 2006).

El estudio del comportamiento dinámico de una planta, y por consiguiente de su controlabilidad, puede tratarse mediante la simulación de su respuesta frente a distintas entradas y perturbaciones de interés, o bien mediante el cálculo de ciertos índices obtenidos a partir del modelo linealizado de la planta. En cualquier caso, para examinar la controlabilidad de una planta se necesita conocer su modelo matemático, y el análisis del desempeño será acertado en la medida que este modelo utilizado sea una buena representación del proceso.

Los índices dinámicos clásicos basados en simulaciones del sistema no lineal como el *ISE* (Error cuadrático medio), *ITAE* (Integral del error absoluto), etc. son muy útiles porque consideran toda la no linealidad del proceso, al utilizar directamente las ecuaciones diferenciales del modelo matemático no lineal para su cálculo. Pese a ello,

su tiempo de cálculo puede ser muy elevado, especialmente cuando se va a realizar de forma iterativa en los algoritmos planteados de sintonía y diseño integrado. Además, no tienen en cuenta aspectos como la máxima desviación de la salida respecto a la referencia, que en muchos sistemas son claves para su buen desempeño.

El análisis basado en el modelo lineal utilizando técnicas de la teoría de control es mucho más simple y menos costoso computacionalmente, y por ello el análisis de controlabilidad se lleva a cabo frecuentemente mediante medidas de controlabilidad basadas en modelos lineales, como los índices basados en normas de funciones de transferencia que se describirán a continuación. En cualquier caso, es importante seleccionar índices que realmente tengan relación con las características de la planta a diseñar y la definición del problema de control.

4.2 CRITERIOS DE CONTROLABILIDAD BASADOS EN MODELOS LINEALES

Para la definición de los índices de controlabilidad que se utilizan en este trabajo se necesitan las distintas funciones de transferencia del sistema en lazo cerrado, denominadas funciones de sensibilidad. Los índices vienen dados finalmente por las normas de dichas funciones, que proporcionan valores numéricos acerca del desempeño del sistema en cuanto a rechazo de perturbaciones, seguimiento de la referencia, estabilidad y robustez, entre otros. En el apéndice I se puede hallar una breve descripción matemática de las normas utilizadas.

Para la obtención de las funciones de transferencia se utilizan modelos linealizados en el espacio de estados obtenidos mediante desarrollos en serie de Taylor de las ecuaciones diferenciales no lineales del proceso:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estados, $\mathbf{u}(t)$ el vector de variables manipulables, $\mathbf{d}(t)$ el vector de perturbaciones medibles, $\mathbf{y}(t)$ el vector de salidas, \mathbf{A} la matriz de estados, \mathbf{B} la matriz de control, \mathbf{B}_d la matriz de las perturbaciones y \mathbf{C} la matriz de salidas.

Puesto que el tipo de control utilizado en este trabajo es el MPC, la descripción de los índices se particularizará para este caso concreto.

4.2.1 Funciones de sensibilidad en lazo cerrado con control MPC

La formulación de la ley de control del MPC sin restricciones en el dominio de Laplace, análoga a la expresión (3.6) en el espacio de estados, se puede expresar de forma general para un sistema SISO de la siguiente forma, teniendo en cuenta que el controlador incorpora prealimentación (acción *feedforward*) para las perturbaciones medibles d (Figura 4.1):

$$u(s) = K_1 e(s) + K_2 d(s) \quad (4.2)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) \quad (4.3)$$

donde K_1 es la función de transferencia entre la señal de control $u(s)$ y la señal de error $e(s)$ y K_2 es la función de transferencia entre $u(s)$ y la perturbación $d(s)$. Estas funciones dependen de los parámetros de sintonía del sistema de control MPC (Q , R , H_p , H_w y H_c), aunque esta dependencia no se puede obtener de forma explícita.

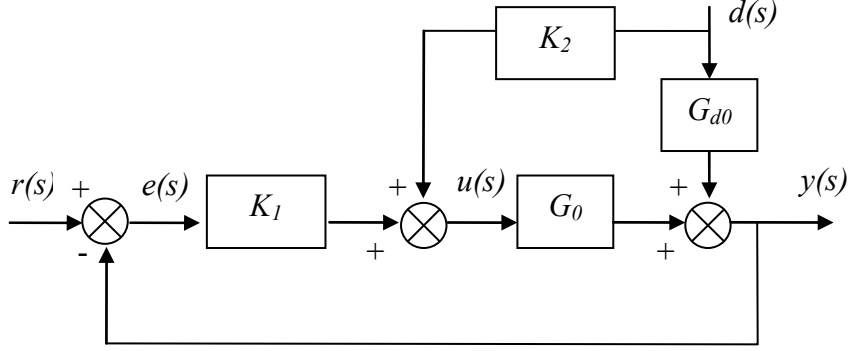


Figura 4.1: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado nominal

Entonces, teniendo en cuenta la ley de control (4.2) y la función de transferencia del sistema en lazo abierto, la respuesta en lazo cerrado se puede obtener así:

$$y(s) = \frac{G_0 K_1}{1 + G_0 K_1} r(s) + \frac{1}{1 + G_0 K_1} \tilde{d}(s) \quad (4.4)$$

donde G_0 y G_{d0} son las funciones de transferencia nominales del sistema y $\tilde{d}(s)$ son las perturbaciones filtradas según la siguiente expresión:

$$\tilde{d}(s) = (G_0 K_2 + G_{d0}) d(s) \quad (4.5)$$

La ecuación (4.4) se puede expresar de la forma siguiente, incluyendo las funciones de sensibilidad (S_0) y sensibilidad complementaria (T_0) para el caso nominal:

$$y(s) = T_0 r(s) + S_0 R_{d0} d(s) \quad (4.6)$$

donde

$$S_0 = \frac{1}{1 + G_0 K_1}; \quad T_0 = \frac{G_0 K_1}{1 + G_0 K_1} \quad (4.7)$$

$$R_{d0} = G_{d0} + K_2 G_0 \quad (4.8)$$

$$S_0 + T_0 = 1 \quad (4.9)$$

Por otra parte, se define la función de sensibilidad al control M_0 para el caso nominal, que es la función de transferencia entre las perturbaciones y las señales de control. Su cálculo es trivial a partir del diagrama de bloques de la figura 4.1 cuando la referencia es nula.

$$M_0 = \frac{u(s)}{d(s)} = \frac{K_2 - K_1 G_{d0}}{1 + G_0 K_1} \quad (4.10)$$

Por último se define la función de sensibilidad de los esfuerzos de control, o sensibilidad de los incrementos de la variable manipulada respecto a las perturbaciones $s \cdot M_0$. Esta función se obtiene directamente a partir de M_0 multiplicando por la variable de Laplace s , teniendo en cuenta que el producto por s equivale en el plano temporal a la derivada de la función:

$$s \cdot M_0 = \frac{\Delta u(s)}{d(s)} = s \frac{K_2 - K_1 G_{d0}}{1 + G_0 K_1} \quad (4.11)$$

4.2.2 Índice de rechazo a perturbaciones

Retomando la ecuación (4.6) del sistema en lazo cerrado, y las expresiones (4.3) y (4.9), el error se puede expresar como:

$$e(s) = -S_0 r(s) + S_0 R_{d0} d(s) \quad (4.12)$$

Esto es, a la vista de (4.12), los efectos de la referencia y perturbación sobre el error vienen dados por el módulo de S , que idealmente debería ser nulo en todo el rango de frecuencias para proporcionar un error nulo. Ahora bien, esta condición no puede satisfacerse ya que hay una situación de compromiso entre S y la función de sensibilidad complementaria T , impuesta por la relación matemática (4.9) en todo el rango frecuencial. Además de su influencia sobre la señal de error, S permite establecer otras propiedades del sistema en lazo cerrado como la robustez del mismo frente a incertidumbres en el modelo y rechazo del ruido entre otras.

La forma de capturar las distintas condiciones que deben imponerse sobre la función S en el dominio de la frecuencia, es la definición de un peso frecuencial con forma adecuada W_p que pondere dicha función. A modo de ejemplo, para el caso de rechazo de perturbaciones, se busca que en el rango frecuencial de las mismas se cumpla la siguiente desigualdad:

$$|S_0(j\omega) \cdot R_{d0}(j\omega)| \cdot |d(\omega)| < 1 \quad \omega \in (\omega_1, \omega_2) \quad (4.13)$$

donde $S_0(j\omega)$ y $R_{d0}(j\omega)$ son las respuestas en frecuencia de las funciones de transferencia correspondientes, $d(\omega)$ es el espectro de las perturbaciones normalizadas, y (ω_1, ω_2) es el rango frecuencial de las perturbaciones. La aparición de la función R_{d0} es debida a la prealimentación del MPC como ya se ha descrito.

Eligiendo un peso W_p cuyo módulo inverso sea menor que el espectro inverso de las perturbaciones, la condición anterior se traduce en:

$$|W_p(j\omega) \cdot S_0(j\omega) \cdot R_{d0}(j\omega)| < 1 \quad \omega \in (\omega_1, \omega_2) \quad (4.14)$$

Empleando la norma H_∞ , la condición anterior extendida a todas las frecuencias queda así:

$$\|W_p \cdot S_0 \cdot R_{d0}\|_\infty < 1 \quad (4.15)$$

Esta condición garantiza un adecuado rechazo de perturbaciones en el sistema en lazo cerrado con MPC. Una selección típica del peso W_p se puede observar en la Figura 4.2.

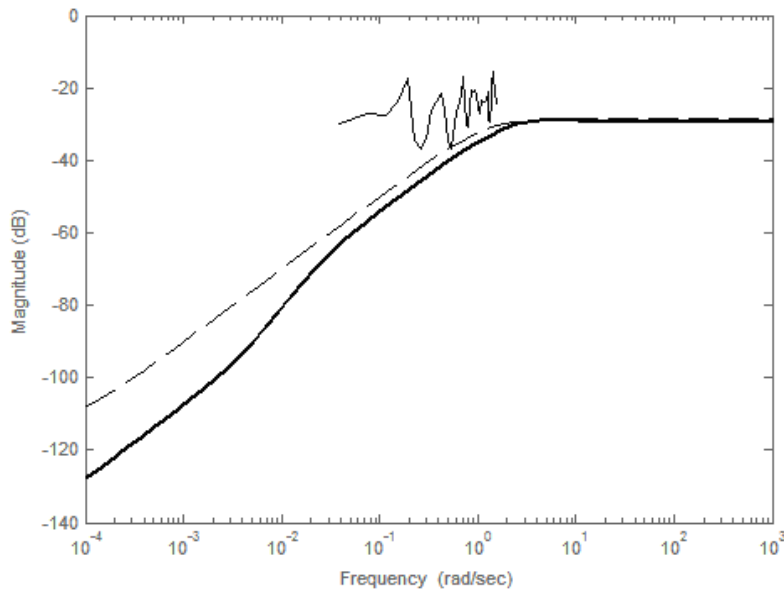


Figura 4.2: Selección típica de W_p^{-1} (línea discontinua) junto con el espectro inverso de las perturbaciones medibles (línea continua fina) y la función de sensibilidad S (línea continua gruesa)

4.2.3 Índice de sensibilidad mixta

El índice de sensibilidad mixta tiene en cuenta de forma conjunta el rechazo de las perturbaciones a través de la función de sensibilidad $S_0 \cdot R_{d0}$ y los esfuerzos de control a través de la función de sensibilidad de los esfuerzos de control $s \cdot M_0$, agrupando vectorialmente ambas funciones. Concretamente, se define de la siguiente manera para el sistema nominal:

$$\|N_0\|_\infty = \max_{\omega} |N_0(j\omega)| \quad (4.16)$$

$$\text{donde } N_0 = \begin{pmatrix} W_p \cdot S_0 \cdot R_{d0} \\ W_{esf} \cdot s \cdot M_0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

y las funciones W_p , W_{esf} son pesos adecuados para alcanzar las especificaciones de desempeño en lazo cerrado en cuanto a rechazo de perturbaciones y reducción de los esfuerzos de control. La dependencia en la variable de Laplace s de las funciones de transferencia se ha omitido por brevedad, y el subíndice 0 indica modelos nominales.

La acción de prealimentación en el controlador MPC hace que aparezca en el índice la función R_{d0} para facilitar la elección del peso W_p . Si no se incluyera esta función junto a

la S , el ajuste del peso W_p habría de realizarse de forma que su magnitud fuera menor que el espectro inverso de las perturbaciones filtradas \tilde{d} . Como este espectro depende de K_2 , no se podría seleccionar un peso fijo para todos los parámetros del controlador, con los subsiguientes problemas a la hora de implementar el diseño integrado, que necesitaría de pesos W_p variables.

El valor del índice de sensibilidad mixta nos indica el grado de cumplimiento de los requisitos impuestos por los pesos frecuenciales, que aunque no indican límites estrictos (Skogestad y Postlethwaite, 1997), no es un hecho crítico porque los pesos hay que ajustarlos hasta que el desempeño del controlador sea el adecuado. Por lo tanto, de cara a asegurar la controlabilidad no se impondrá una restricción estricta sobre el índice $\|N_0\|_\infty$ sino que se minimizará su valor, aumentando así la “distancia” de los módulos de las funciones de sensibilidad a los inversos del módulo de los respectivos pesos, con el fin de aumentar el rechazo a perturbaciones y minimizar los esfuerzos de control.

En cuanto a la ganancia de los pesos y su forma, se suelen elegir funciones de transferencia sencillas que marquen los criterios de desempeño. Una selección típica para W_p es una función racional con un polo y un cero (Ortega y Rubio, 2004):

$$W_p = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b}{s + \omega_b A} = \frac{1}{A} \left(\frac{\frac{s}{\omega_b M} + 1}{\frac{s}{\omega_b A} + 1} \right) \quad (4.18)$$

Los parámetros característicos del peso son los siguientes:

ω_b : Ancho de banda requerido del sistema

A : Error en régimen permanente permitido

M : Máximo pico de la función de sensibilidad de salida $S_0 \cdot R_{d0}$

En cuanto a los pesos W_{esf} , se han elegido aquí mediante la siguiente función de transferencia (Figura 4.3):

$$W_{esf} = \frac{\frac{s}{M_{esf}} + w_{esf}}{s + w_{esf} \cdot A_{esf}} \quad (4.19)$$

La elección de los pesos en esta tesis se ha realizado de forma empírica para cada caso concreto según las necesidades del problema.

Cuando se plantea el problema de sensibilidad mixta, ajustando tanto W_{esf} como W_p se consigue proporcionar más o menos importancia al rechazo de perturbaciones o a los esfuerzos de control. En cuanto a las magnitudes del control, estas se tienen en cuenta en restricciones adicionales que se comentan en los párrafos siguientes.

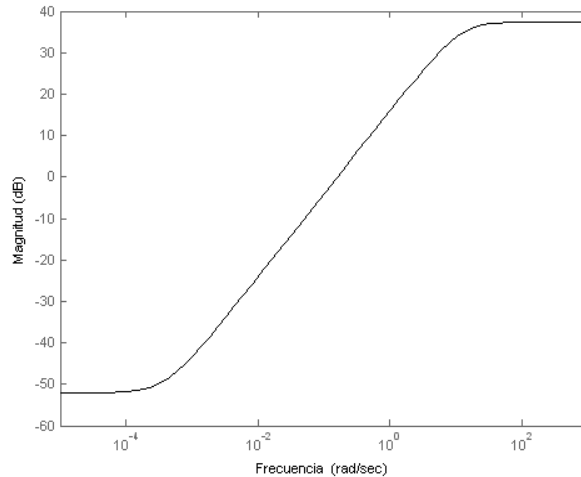


Figura 4.3: Selección típica de la magnitud de los pesos W_{esf}

4.2.4 Límites en las variables manipuladas y controladas

En el diseño de sistemas de control, es interesante muchas veces restringir el valor de algunas variables, por ejemplo el valor máximo de la variable manipulada para evitar saturaciones en los actuadores (válvulas, bombas) que deterioren el desempeño del sistema, para el peor caso de las perturbaciones, o el valor máximo de una salida. Una forma de representar estas restricciones en el análisis y diseño de sistemas de control es mediante la norma l_1 , ya que permite trabajar directamente con el máximo valor de las señales temporales e imponer de forma natural restricciones en las mismas en el dominio del tiempo.

Si se desea limitar la amplitud máxima de la salida ($y(t)$) de un sistema SISO con función de transferencia discreta estable H para todos los posibles valores de la entrada ($x(t)$), se puede utilizar la norma l_1 de la función de transferencia H , que proporciona dicha amplitud máxima. La norma l_1 (norma ∞ inducida o norma pico-a-pico) de la función de transferencia H se define de la siguiente manera:

$$\|H\|_1 = \max_{d(t)} \frac{\|y(t)\|_\infty}{\|x(t)\|_\infty} \tag{4.20}$$

y se puede calcular como la suma de los términos de la respuesta impulsional como se indica en el apéndice I.

En concreto, son de interés las normas $\|M_0\|_1$ y $\|S_0 \cdot R_{d0}\|_1$, que representan los valores máximos de la señal de control y de salida respectivamente, cuando se tiene el peor caso de las perturbaciones normalizadas afectando al sistema.

Por ejemplo, si se busca que el valor de la variable manipulada no supere una cota máxima permitida u_{max} para el peor caso de perturbaciones:

$$\max_{d \text{ posibles}} \|u(t)\|_\infty < u_{max} \tag{4.21}$$

Si la condición anterior se representa utilizando la norma l_1 de la función de sensibilidad al control M_0 y la variación máxima de las perturbaciones es d_{max} :

$$\|M_0\|_1 = \max_{d(t)} \frac{\|u(t)\|_\infty}{\|d(t)\|_\infty} < \frac{u_{max}}{d_{max}} \quad (4.22)$$

La otra condición que se puede imponer mediante la norma l_1 es sobre la función de sensibilidad de la salida respecto a las perturbaciones S_0R_{d0} . Esta condición es útil para limitar la salida a un valor máximo y_{max} para el peor caso de las perturbaciones:

$$\max_{d \text{ posibles}} \|y(t)\|_\infty < y_{max} \quad (4.23)$$

Representando la expresión anterior mediante la norma l_1 , se tiene:

$$\|S_0R_{d0}\|_1 = \max_{d(t)} \frac{\|y(t)\|_\infty}{\|d(t)\|_\infty} < \frac{y_{max}}{d_{max}} \quad (4.24)$$

En definitiva, teniendo en cuenta que las perturbaciones se encuentran normalizadas ($\hat{d}_{max} = 1$), se pueden imponer las siguientes condiciones sobre las funciones de sensibilidad del sistema:

$$\|M_0\|_1 < u_{max} \quad (4.25)$$

$$\|S_0R_{d0}\|_1 < y_{max} \quad (4.26)$$

Estas restricciones también pueden emplearse para mantener el funcionamiento del sistema de control en la región lineal, es decir, sin activar las restricciones del MPC, de cara al cálculo de los índices de controlabilidad.

Por último, indicar que de forma análoga pueden imponerse también restricciones sobre la variación de la señal de control (velocidad o aceleración) empleando la función de transferencia en lazo cerrado correspondiente, o sobre otras variables secundarias (W. Colmenares y F. Tadeo, 2005). Por ejemplo, si se considera la función $s \cdot M_0$ se podrían imponer restricciones del tipo (4.25) y (4.26) para los incrementos de la variable de control.

La normalización de la perturbación se puede realizar dividiendo sus valores por el máximo que ésta puede alcanzar (d_{max}):

$$\hat{d} = \frac{d}{d_{max}} \quad (4.27)$$

4.2.5 Efecto de las perturbaciones filtradas en la salida

Otro índice de desempeño que cuantifica el rechazo de las perturbaciones es la norma l_1 de la función de transferencia que filtra las perturbaciones medibles en la salida. A

partir del diagrama de bloques de la figura 4.1 se puede obtener el diagrama de la Figura 4.4, en el cual $\tilde{d}(s)$ es la perturbación filtrada afectando en la salida:

$$\tilde{d}(s) = (G_0 K_2 + G_{d0}) d(s) \quad (4.28)$$

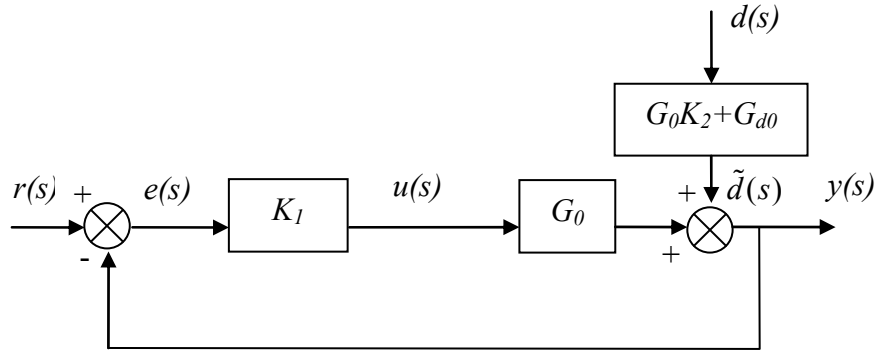


Figura 4.4: Diagrama de bloques equivalente a la figura 4.1

Uno de los objetivos del sistema de control es minimizar el efecto de las perturbaciones en la salida provocado por \tilde{d} . Por lo tanto, se busca minimizar el máximo valor de \tilde{d} con el peor caso de las perturbaciones. Teniendo en cuenta que:

$$G_{\tilde{d}0} = \frac{\tilde{d}(s)}{d(s)} = G_0 K_2 + G_{d0} \quad (4.29)$$

y utilizando la definición de norma l_1 con las perturbaciones normalizadas, este índice de controlabilidad se puede poner finalmente como:

$$\|G_0 K_2 + G_{d0}\|_1 = \max_{\|d(t)\|_{\leq 1}} \|\tilde{d}(t)\|_{\infty} \quad (4.30)$$

4.2.6 Funcional objetivo para límites asimétricos en las señales

Con frecuencia, en las plantas reales se tienen señales restringidas en dominios asimétricos, debido a razones tecnológicas, de seguridad o a la gran variabilidad de la señal. En el proceso de fangos activados es habitual encontrar perturbaciones en el influente donde los valores máximo y mínimo no son simétricos respecto a su valor estacionario. Por otro lado, el caudal de recirculación al reactor q_r tiene un límite fijo en cero (saturación de la bomba), mientras que el límite superior puede ser mucho más grande dependiendo de las características de la bomba.

De forma general, supongamos cierta variable manipulada $u(k)$ cuya evolución en tiempo discreto se encuentra restringida al siguiente dominio asimétrico:

$$-u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max} \quad (4.31)$$

donde $u_{\min} \geq 0$, $u_{\max} \geq 0$, $u_{\min} \neq u_{\max}$

Debido a esto, es interesante utilizar un índice que tenga en cuenta esta asimetría en los límites. El funcional propuesto en (Naib *et al.*, 2003) da información de dicha asimetría, y se define para la señal $u(k)$ como:

$$\|u(k)\|_a = \begin{bmatrix} \max\{0, \max_k(u(k))\} \\ \max\{0, -\min_k(u(k))\} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

La restricción que se impone entonces en el problema de control es la siguiente:

$$\|u(k)\|_a \leq \mathbf{U} \text{ donde } \mathbf{U}^t = (u_{\max}, u_{\min}) \quad (4.33)$$

Este índice reemplaza a la norma l_1 que se definió en puntos anteriores y que únicamente tiene en cuenta límites simétricos. Para la señal $u(k)$ considerada, la utilización de la norma l_1 no proporcionaría la información completa, porque la norma infinito de la señal (con la que se calcula la norma l_1), es la siguiente:

$$\|u(k)\|_\infty = \max_k(|u(k)|) = \max(u_{\max}, u_{\min}) \quad (4.34)$$

A la hora de evaluar el cumplimiento de las restricciones de este tipo, se utiliza el resultado obtenido en (Naib *et al.*, 2003), que se aplica aquí al sistema de control con MPC. Consideremos $d(k)$ y $u(k)$ la entrada de perturbación y señal de control respectivamente, y $M_0(z^{-1})$ la función de sensibilidad al control nominal discreta. Una condición necesaria y suficiente para que la señal de control esté restringida en el siguiente dominio asimétrico $\|u(k)\|_a \leq \mathbf{U}$, con $\mathbf{U}^t = (u_{\max}, u_{\min})$, para cualquier perturbación de entrada limitada en otro dominio asimétrico $\|d(k)\|_a \leq \mathbf{D}$, con $\mathbf{D}^t = (d_{\max}, d_{\min})$, es la siguiente:

$$\Psi \mathbf{D} \leq \mathbf{U} \quad (4.35)$$

donde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i^+ & \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i^- \\ \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i^- & \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i^+ \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\Phi_i^+ = \max\{\Phi_i, 0\}$$

$$\Phi_i^- = \max\{-\Phi_i, 0\}$$

y $\{\Phi_i \quad i=1, \dots, \infty\}$ son los términos de la respuesta impulsional de la función de

transferencia $M_0(z^{-1})$, $u(k) = \sum_{i=1}^k \Phi_i d(k-i)$

En (Naib *et al.*, 2003) se presenta la demostración para un sistema SISO, y para un sistema MIMO, la demostración es análoga. De esta forma, mediante la condición (4.35) se chequea si la señal de control se encuentra o no en el conjunto asimétrico requerido cuando existen perturbaciones de entrada acotadas también de forma asimétrica.

4.2.7 Normas para el caso de dos perturbaciones simultáneas

En este punto se definen las funciones de sensibilidad cuando existen dos perturbaciones simultáneas, que es el caso considerado en el proceso de fangos activados. Si $\mathbf{d} = (d_1 \ d_2)$ son las perturbaciones que afectan al sistema, las funciones $\mathbf{S}(s)$, $\mathbf{M}(s)$, $\mathbf{R}_d(s)$ y $\mathbf{N}(s)$; los pesos $\mathbf{W}_p(s)$ y $\mathbf{W}_{\text{esf}}(s)$, y la función de transferencia del controlador \mathbf{K}_2 han de ser expresados de forma matricial (representados en negrita), de forma que:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{R}_d = \begin{pmatrix} R_{d1} & 0 \\ 0 & R_{d2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_d = \begin{pmatrix} G_{d1} & 0 \\ 0 & G_{d2} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d \\ \mathbf{W}_{\text{esf}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

donde

$$S_1 = \frac{y}{\tilde{d}_1} = \frac{1}{1 + GK_1} \quad S_2 = \frac{y}{\tilde{d}_2} = \frac{1}{1 + GK_1} \quad (4.40)$$

$$M_1 = \frac{u}{d_1} = \frac{K_{21} - K_1 G_{d1}}{1 + GK_1} \quad M_2 = \frac{u}{d_2} = \frac{K_{22} - K_1 G_{d2}}{1 + GK_1} \quad (4.41)$$

$$R_{d1} = G_{d1} + K_{21}G \quad R_{d2} = G_{d2} + K_{22}G \quad (4.42)$$

G_{d1} y G_{d2} son las funciones de transferencia de salida respecto a cada una de las perturbaciones; K_{21} y K_{22} son las dos funciones de transferencia del controlador entre cada una de las perturbaciones y la señal de control (Figura 4.5).

En este caso se deben definir también pesos diferentes según la perturbación considerada, ya que los espectros de cada una de ellas son diferentes, y también las funciones de sensibilidad a los esfuerzos de control. Matricialmente:

$$\mathbf{W}_p = \begin{pmatrix} W_{p_{d1}} & W_{p_{d2}} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}_{\text{esf}} = \begin{pmatrix} W_{\text{esf}_{d1}} & W_{\text{esf}_{d2}} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

y sustituyendo estas expresiones en (4.39), el índice de sensibilidad mixta queda definido de la siguiente manera:

$$\|N\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} W_{p_{d1}} S_1 R_{d1} & W_{p_{d2}} S_2 R_{d2} \\ W_{esf_{d1}} \cdot s \cdot M_1 & W_{esf_{d2}} \cdot s \cdot M_2 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d \\ \mathbf{W}_{esf} \cdot s \cdot \mathbf{M} \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \quad (4.44)$$

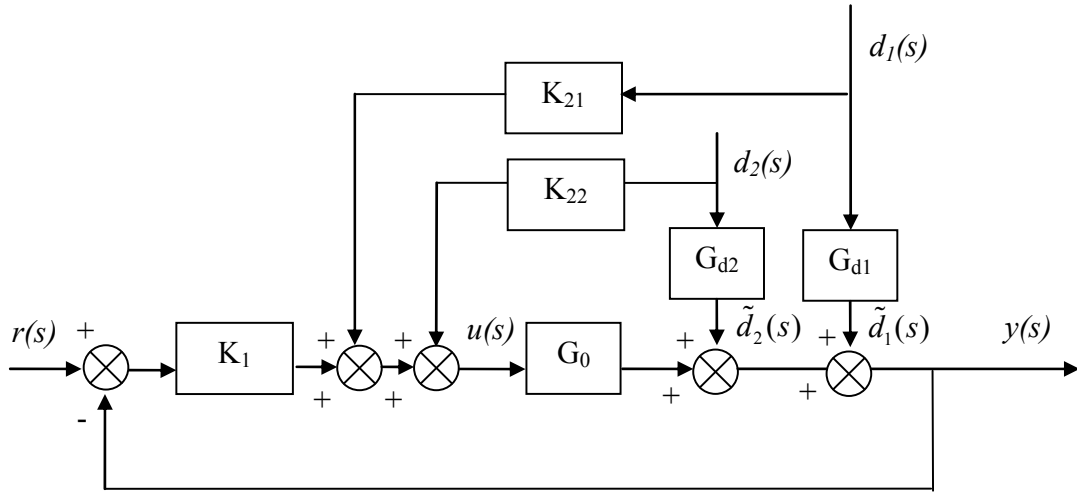


Figura 4.5: Diagrama de bloques sistema en lazo cerrado con dos perturbaciones a la salida

En cuanto a la norma l_1 de las matrices S y M para el caso de dos perturbaciones y una salida, se obtiene sumando las normas l_1 individuales, con lo que las restricciones (4.25) y (4.26) quedan de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{M}\|_1 = \|M_1\|_1 + \|M_2\|_1 < u_{\max} \quad (4.45)$$

$$\|\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d\|_1 = \|S_1 R_{d1}\|_1 + \|S_2 R_{d2}\|_1 < y_{\max} \quad (4.46)$$

donde

$$\|M_1\|_1 = \max_{d_1(t)} \frac{\|u(t)\|_{\infty}}{\|d_1(t)\|_{\infty}}; \quad \|M_2\|_1 = \max_{d_2(t)} \frac{\|u(t)\|_{\infty}}{\|d_2(t)\|_{\infty}} \quad (4.47)$$

Dado que en el proceso de fangos activados hay dos perturbaciones de entrada fundamentales, que son la concentración de sustrato y el caudal en el influente $\mathbf{d} = (s_i \quad q_i)^t$, las expresiones anteriores se pueden particularizar como sigue:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{s_i} & 0 \\ 0 & S_{q_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{s_i} & 0 \\ 0 & \frac{s_1}{q_i} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{s_i} & 0 \\ 0 & M_{q_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_r}{s_i} & 0 \\ 0 & \frac{q_r}{q_i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_d = \begin{pmatrix} R_{ds_i} & 0 \\ 0 & R_{dq_i} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_d = \begin{pmatrix} G_{ds_i} & 0 \\ 0 & G_{dq_i} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

donde

$$S_{s_i} = S_{q_i} = \frac{1}{1 + GK_1} \quad (4.49)$$

$$M_{s_i} = \frac{K_{21} - K_1 G_{ds_i}}{1 + G_0 K_1}; \quad M_{q_i} = \frac{K_{22} - K_1 G_{dq_i}}{1 + G_0 K_1} \quad (4.50)$$

$$R_{ds_i} = G_{ds_i} + K_{21}G; \quad R_{dq_i} = G_{dq_i} + K_{22}G \quad (4.51)$$

donde a su vez G_{ds_i} y G_{dq_i} son las funciones de transferencia de salida respecto a cada una de las perturbaciones.

En el índice de sensibilidad mixta \mathbf{N} los pesos son también vectoriales y para el proceso de fangos activados se definen así:

$$\mathbf{W}_p = \begin{pmatrix} W_{p_{si}} & W_{p_{qi}} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{W}_{esf} = \begin{pmatrix} W_{esf_{si}} & W_{esf_{qi}} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

4.2.8 Consideraciones computacionales

Para el cálculo de la norma H_∞ es conveniente realizar previamente una reducción del orden del sistema, eliminando estados innecesarios, y escalar los estados, entradas y salidas, para lograr un mejor condicionamiento de las matrices y evitar problemas numéricos. El escalado de los estados, definido por una matriz diagonal \mathbf{N}_x se ha realizado mediante una transformación de similitud \mathbf{T} , tal que $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{AT})$ y la nueva matriz de estados tengan las mismas normas por filas y por columnas. El orden del sistema se ha reducido por cancelación de polos y ceros cercanos.

Añadiendo también el escalado de entradas y salidas, teniendo en cuenta el rango de variación de las variables, se tienen ciertas matrices de escalado, \mathbf{N}_u , \mathbf{N}_x y \mathbf{N}_y de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{x} &= \mathbf{N}_x \cdot \mathbf{x}_n \\ \mathbf{y} &= \mathbf{N}_y \cdot \mathbf{y}_n \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde \mathbf{u}_n , \mathbf{x}_n e \mathbf{y}_n son los valores de las variables normalizados. El nuevo sistema en el espacio de estados con las matrices de estados normalizadas, queda definido así:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_n &= \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{C}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{D}_n \mathbf{u}_n \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_n &= \mathbf{N}_x^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}_x \\
 \mathbf{B}_n &= \mathbf{N}_x^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_u \\
 \mathbf{C}_n &= \mathbf{N}_y^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_x \\
 \mathbf{D}_n &= \mathbf{N}_y^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}_u
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

La norma l_1 de un sistema se calcula mediante la suma de los términos de la respuesta impulsional, previo escalado únicamente de las entradas, que son las perturbaciones. Hay que indicar también que el cálculo de las normas l_1 se ha realizado normalizando las perturbaciones de forma que su valor máximo sea 1.

4.3 CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado de forma detallada todos los índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema que se utilizarán en la metodología de diseño integrado. Tras una breve introducción a las medidas de controlabilidad y su evaluación en general, se seleccionan las basadas en modelos lineales en contraposición a las medidas dinámicas basadas en modelos no lineales, debido principalmente a su rapidez de cálculo y a la posibilidad del cálculo de normas que proporcionan un valor numérico preciso de los diferentes aspectos del control.

En particular, se seleccionan las normas H_∞ y l_1 porque permiten la utilización de los índices frecuenciales utilizados en control H_∞ y control óptimo l_1 que tienen en cuenta el desempeño, la estabilidad y la robustez de los diseños. Se han definido diversos índices que tienen en cuenta el rechazo de las perturbaciones, las magnitudes de la señal de control, las variaciones de la señal de control, el valor máximo de la salida o de la señal de control, las variaciones asimétricas de las perturbaciones y de la señal de control y el efecto de las perturbaciones filtradas en la salida de la planta.

Aunque la definición de los índices se ha realizado para sistemas SISO por sencillez en la notación, los índices son extensibles a sistemas con múltiples entradas y salidas sin más que utilizar la representación matricial de las funciones de sensibilidad. En particular, dado que el proceso de fangos activados se encuentra sometido fundamentalmente a dos perturbaciones en el influente, la definición de los índices se extendido explícitamente a este caso.

Capítulo 5

SINTONÍA AUTOMÁTICA DE CONTROLADORES PREDICTIVOS MEDIANTE ÍNDICES BASADOS EN NORMAS

Resumen:

En este capítulo se describe el problema de sintonía automática de un controlador predictivo basado en modelos (MPC) y se presenta una metodología de resolución basada en optimización, que incluye como índices de desempeño normas de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado. En primer lugar se utiliza como función objetivo el índice de sensibilidad mixta H_∞ y en segundo lugar se utilizan únicamente índices basados en la norma l_1 junto al índice que considera señales acotadas de forma asimétrica. Para asegurar la estabilidad y el desempeño robustos, se definen regiones de incertidumbre delimitadas por modelos locales lineales. Se describen también las estrategias de optimización en dos pasos y multiobjetivo utilizadas para resolver el problema de optimización y se presentan diversos resultados de sintonía en diferentes condiciones, para control MPC aplicado al proceso de fangos activados con eliminación de materia orgánica (planta n° 1) y al modelo más completo del BSM1 (planta n° 2).

5.1 INTRODUCCIÓN

La sintonía de los parámetros de un controlador MPC se lleva a cabo muchas veces mediante un procedimiento de prueba y error en base a la experiencia de un experto. Esta tarea se hace particularmente difícil si el sistema es multivariable, ya que el número de combinaciones posibles de los parámetros a determinar es muy elevado, y además muchos de ellos tienen efectos solapados en el desempeño o la robustez del sistema en lazo cerrado. Los parámetros de sintonía más comunes son los pesos relativos al error de seguimiento de la referencia Q y los pesos sobre los esfuerzos de control R , así como el valor de los horizontes de predicción H_p , de control H_c y de predicción inicial H_w .

En este apartado se propone un método general para su sintonía automática, con criterios basados en la controlabilidad y en los costes de operación, asociados a las magnitudes de las variables de control y sus incrementos (esfuerzos de control). Los procedimientos de sintonía automática serán útiles dentro del esquema de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control, como se verá en el siguiente capítulo. Una buena revisión de métodos de sintonía automática de MPC se encuentra en (J.L. Garriga, 2010).

Los métodos basados en el dominio de la frecuencia para sintonizar controladores lineales óptimos se han estudiado desde principios de los 80, siendo una buena alternativa frente al análisis temporal para reducir los tiempos de cálculo de la sintonía evitando simulaciones dinámicas. Además, estas técnicas permiten analizar propiedades del sistema en lazo cerrado como por ejemplo el grado de rechazo a perturbaciones en un rango de frecuencias determinado sin especificar un conjunto concreto de valores.

Por ello, en este trabajo se plantea el problema de sintonía automática de controladores MPC aplicados al proceso de fangos activados utilizando índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de transferencia del sistema, específicamente las normas H_∞ y l_1 .

5.2 METODOLOGÍA DE SINTONÍA AUTOMÁTICA

La metodología de sintonía automática propuesta se basa en la resolución de un problema de optimización multiobjetivo no lineal con restricciones, incluyendo también variables enteras (horizontes del MPC). La metodología general propuesta se puede desglosar en los siguientes pasos (Figura 1.1):

- a) Definición del problema de optimización:
 - Definición de la función objetivo, incluyendo alguno de los índices de controlabilidad propuestos en el capítulo 4. Selección de los pesos en los índices de controlabilidad.
 - Definición de las restricciones del problema, concretamente límites superiores e inferiores para los parámetros de sintonía y restricciones sobre los índices de controlabilidad.
- b) Linealización del modelo del proceso en el punto de operación estacionario para obtener su función de transferencia en lazo abierto.
- c) Resolución del problema de optimización:
 - En el algoritmo de optimización se evalúan sucesivamente las funciones objetivo y las restricciones. En cada evaluación se realizan las tareas siguientes (Figura 5.2):
 - Cálculo del modelo lineal del sistema en lazo cerrado, a partir del modelo en lazo abierto obtenido en b) y los parámetros de sintonía del MPC en la iteración actual.
 - Cálculo de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado a partir del modelo obtenido.
 - Cálculo de los índices de controlabilidad a partir de las funciones de sensibilidad, para obtener finalmente el valor de las funciones objetivo y de las restricciones.
 - El algoritmo de optimización finaliza cuando se alcanzan ciertos criterios de convergencia sobre los parámetros de sintonía, funciones objetivo y restricciones.
- d) Validación del controlador obtenido mediante simulaciones de la planta en lazo cerrado.

Si el desempeño del sistema de control MPC sobre el modelo no lineal de la planta es el requerido, esto es, existe un buen rechazo de las perturbaciones con esfuerzos de control razonables, entonces el MPC está correctamente sintonizado. En caso contrario, hay que retornar al paso a) para reajustar el problema de optimización y repetir el algoritmo.

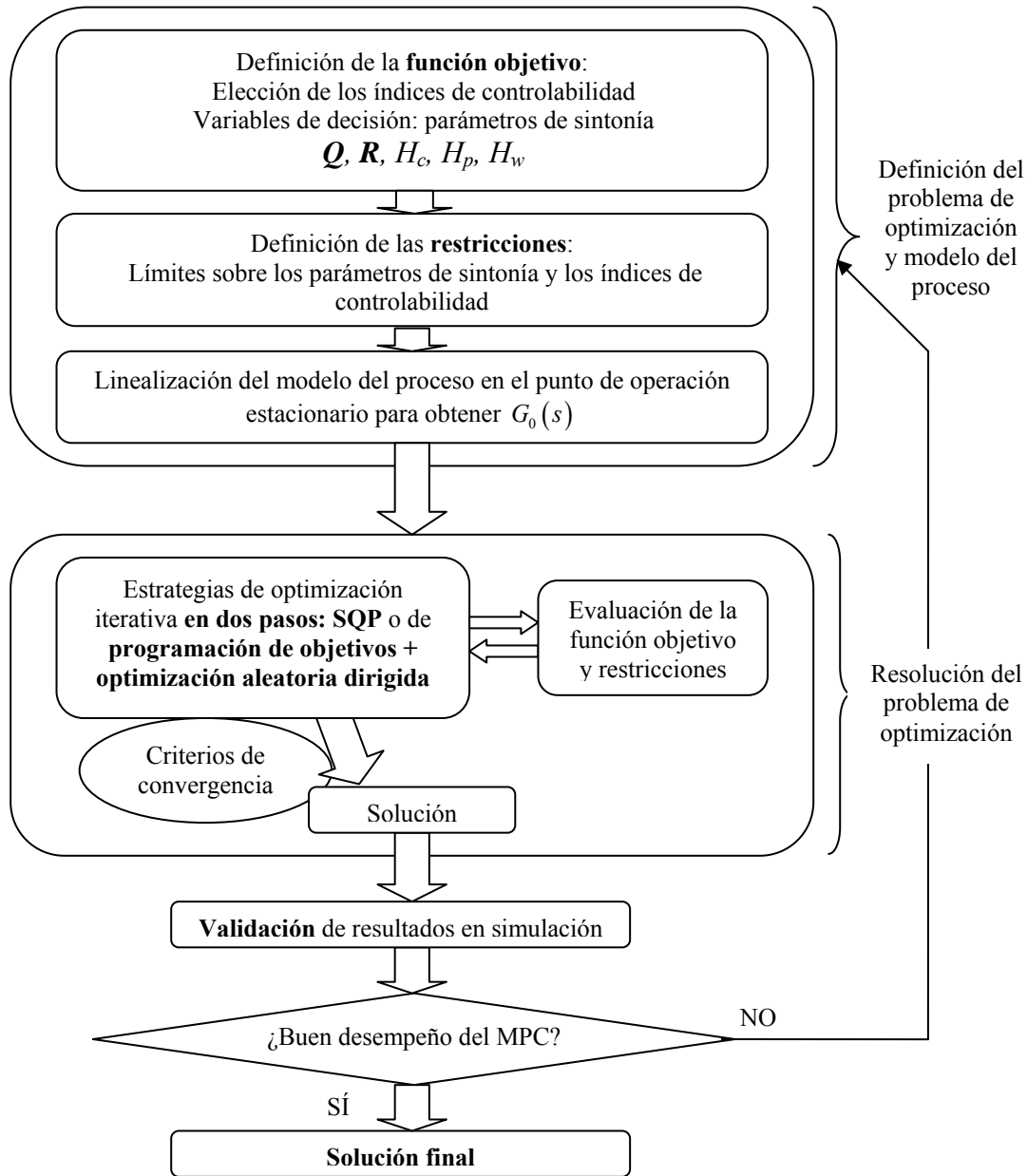


Figura 5.1: Metodología general de sintonía automática de controladores MPC

Sin pérdida de generalidad, en este trabajo se han seleccionado como parámetros de sintonía el peso R , que en este problema es un escalar dado que únicamente hay una variable manipulada, y los horizontes H_p y H_c , mientras que el resto se mantienen fijos por sencillez y porque su influencia en el desempeño final del sistema es menor. En cualquier caso, la extensión del método para sintonizar los parámetros Q y H_w es directa. En el caso de utilizar MPC con penalización terminal equivalente a un horizonte de predicción infinito, únicamente se debe sintonizar el horizonte H_c .

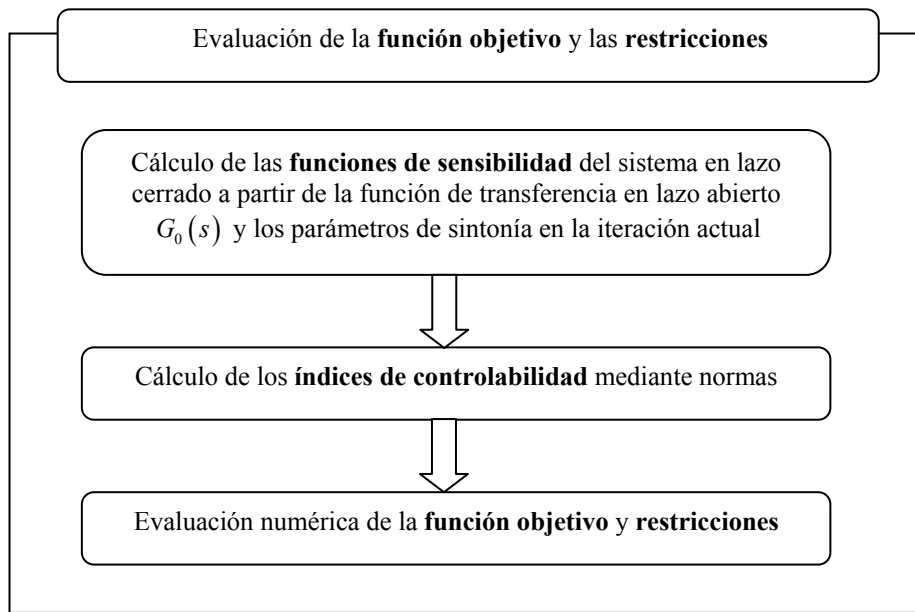


Figura 5.2: Evaluación de la función objetivo y las restricciones

Teniendo en cuenta los distintos índices de controlabilidad que se presentaron en el capítulo 4 se pueden plantear distintos problemas de sintonía automática dependiendo de los requerimientos específicos. En este trabajo se va a considerar en primer lugar la sintonía automática basada en el índice de sensibilidad mixta H_∞ y en segundo lugar la sintonía automática basada en índices de rechazo a perturbaciones definidos con la norma l_1 .

5.3 SINTONÍA AUTOMÁTICA UTILIZANDO UN ÍNDICE DE SENSIBILIDAD MIXTA H_∞

El primer problema planteado para realizar la sintonía automática de un MPC utiliza como función objetivo el índice de sensibilidad mixta que se presentó en el capítulo 4, que considera de forma conjunta el rechazo de perturbaciones y esfuerzos de control en el sistema.

5.3.1 Planteamiento general del problema de optimización

El problema de optimización para la sintonía automática se plantea de la forma siguiente, considerando las funciones de transferencia de la planta nominal:

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{N}_0\|_\infty \quad (5.1)$$

$$\mathbf{c} = (R, H_c, H_p)$$

sujeto a:

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\|_\infty < 1 \quad (5.2)$$

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 < u_{\max} \quad (5.3)$$

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}\|_1 < y_{\max} \quad (5.4)$$

$$H_{c\min} < H_c < H_{c\max} \quad (5.5)$$

$$H_{p\min} < H_p < H_{p\max}$$

$$R_{\min} < R < R_{\max}$$

donde el vector \mathbf{c} incluye los parámetros de sintonía seleccionados en este punto para la formulación básica del MPC.

La expresión del índice de sensibilidad mixta es la siguiente, retomando la expresión (4.44):

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d \\ \mathbf{W}_{\text{esf}} \cdot s \cdot \mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

donde $\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d$ es la función de sensibilidad de la salida respecto a las perturbaciones, $s \cdot \mathbf{M}$ es la función de sensibilidad de los esfuerzos de control respecto a las perturbaciones, y los pesos \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_{esf} fijan unos objetivos de desempeño para el sistema de control en cuanto a rechazo de perturbaciones y esfuerzos de control.

La restricción (5.2) se añade para asegurar el rechazo de las perturbaciones obligando a que la magnitud de $\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}$ sea inferior al inverso del peso \mathbf{W}_p para cada una de las perturbaciones que actúan sobre el proceso. Las restricciones (5.3) y (5.4) limitan la magnitud de la variable de control y la salida para el peor caso de las perturbaciones a valores u_{\max} e y_{\max} respectivamente, y las restricciones (5.5) indican los límites de las variables a optimizar.

Para dotar de robustez a los controladores sintonizados y evitar problemas derivados de la utilización de un único modelo lineal del sistema, es conveniente considerar la incertidumbre asociada al proceso debida a la no linealidad y las perturbaciones de entrada, extendiendo así la metodología a casos más realistas. De esta forma, las especificaciones de estabilidad y desempeño se satisfarán en todos los puntos de la región de incertidumbre además del punto de operación nominal.

5.3.1.1. Condiciones de estabilidad y desempeño robustos

Considerando incertidumbre multiplicativa inversa, se definen dos familias de modelos Π_u y Π_d para las funciones de transferencia del sistema:

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta(s))^{-1} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{G}_d(s) = \mathbf{G}_{d0}(s)(I + \Delta_d(s))^{-1} \quad (5.8)$$

donde $\Delta(s)$ and $\Delta_d(s)$ son ciertas funciones de incertidumbre acotadas, y se pueden calcular para cada caso según las siguientes expresiones:

$$\Delta(s) = \frac{G(s) - G_0(s)}{G(s)} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{\Delta}_d(s) = \begin{pmatrix} \Delta_{s_i} & 0 \\ 0 & \Delta_{q_i} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$\text{con } \Delta_{s_i} = \frac{G_{ds_i}(s) - G_{ds_i,0}(s)}{G_{ds_i}(s)}, \quad \Delta_{q_i} = \frac{G_{dq_i}(s) - G_{dq_i,0}(s)}{G_{dq_i}(s)} \quad (5.11)$$

Teniendo en cuenta la condición de desempeño para el sistema nominal en lazo cerrado (5.2), la condición de desempeño robusto consiste en extender esta restricción para cada uno de los modelos perturbados $G \in \Pi_u$ y $\mathbf{G}_d \in \Pi_d$, para toda perturbación d . Matemáticamente se puede expresar como:

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d\|_\infty < 1 \quad (5.12)$$

donde \mathbf{R}_d es la función de transferencia que representa el residuo en lazo abierto de las perturbaciones después de la compensación por prealimentación (*feedforward*) y debido a la incertidumbre:

$$\mathbf{R}_d(s) = \begin{pmatrix} R_{ds_i} & 0 \\ 0 & R_{dq_i} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{d0}(\mathbf{I} + \mathbf{\Delta}_d)^{-1} + \begin{pmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix} G_0(1 + \Delta)^{-1} \quad (5.13)$$

En cuanto a la condición necesaria y suficiente para dotar de estabilidad robusta al proceso cuando se tiene incertidumbre multiplicativa inversa, se puede expresar de la forma siguiente, teniendo en cuenta la función de sensibilidad $\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}$ para el sistema nominal y sus componentes para cada perturbación (Skogestad y Postlethwaite, 1996):

$$\left| S_{s_i,0} R_{ds_i,0} \right| < \frac{1}{|\Delta|}, \quad \left| S_{q_i,0} R_{dq_i,0} \right| < \frac{1}{|\Delta|} \quad \forall \omega \Leftrightarrow \|\Delta \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\|_\infty < 1 \quad (5.14)$$

5.3.1.2. Definición de la región de incertidumbre

Para definir la incertidumbre de forma práctica e implementar la sintonía automática robusta se han considerado regiones de tipo poliédrico, cuyos vértices quedan definidos por modelos locales lineales. Debido a esto, la restricción de desempeño robusto (5.12) únicamente se debe imponer en los vértices de dichas regiones garantizando así el desempeño robusto en puntos interiores si estas son convexas. Además, esta restricción se puede imponer sólo en los vértices con peor controlabilidad, asegurando así su cumplimiento para el resto.

Dado que en la sintonía automática únicamente se optimizan los parámetros del controlador y la planta es fija, las funciones de incertidumbre (5.9) y (5.10) se mantienen constantes y los modelos locales de los vértices se pueden determinar fuera del procedimiento iterativo de optimización.

A continuación se determinan de forma genérica las regiones de incertidumbre poliédrica para el proceso de fangos activados donde se va a aplicar la metodología de sintonía automática, teniendo en cuenta la variación de los parámetros inciertos según el funcionamiento del proceso.

Incetidumbre debida a variaciones en la concentración de sustrato

El primero de los factores que generan incertidumbre en el proceso es la variación de s_I en torno al punto de operación estacionario. Esta es una situación habitual puesto que las fuertes perturbaciones de entrada provocan que el valor de s_I varíe constantemente, a pesar de que la planta se diseñe normalmente para un valor estacionario medio. El controlador sintonizado considerando esta incertidumbre será robusto a estas variaciones y cumplirá los criterios de desempeño exigidos. En concreto, los vértices de la región de incertidumbre se obtienen variando el punto de operación s_I una cierta cantidad δ_{s_I} en torno al punto nominal $(s_I)_0$ (Figura 5.3):

$$s_I = (s_I)_0 \pm \delta_{s_I} \text{ mg/l} \tag{5.15}$$

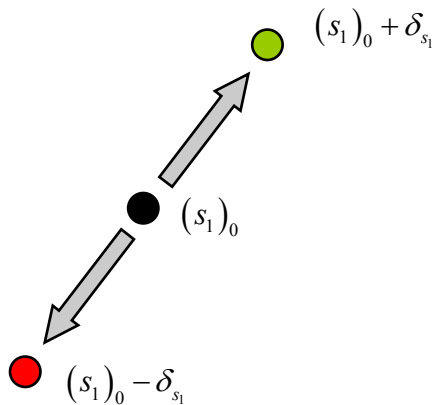


Figura 5.3: Vértices de la región de incertidumbre generada por variaciones en s_I , donde en rojo se representa el extremo más difícil de controlar

Incetidumbre debida a variaciones en el influente

El segundo factor que provoca incertidumbre es la variación de la concentración s_i y el caudal q_i en el influente del proceso. También se trata de una situación normal puesto que debido a las grandes perturbaciones el influente nunca se mantiene constante, siendo útil asegurar la robustez del controlador frente a dichas variaciones. En este caso los vértices de la región de incertidumbre se determinan modificando tanto s_i como q_i ciertas cantidades δ_{s_i} y δ_{q_i} respecto al punto nominal:

$$s_i = (s_i)_0 \pm \delta_{s_i} \text{ mg/l} \tag{5.16}$$

$$q_i = (q_i)_0 \pm \delta_{q_i} \text{ m}^3/\text{h} \tag{5.17}$$

Con esto, se obtienen cuatro vértices de la región de incertidumbre como se puede observar en la Figura 5.4.

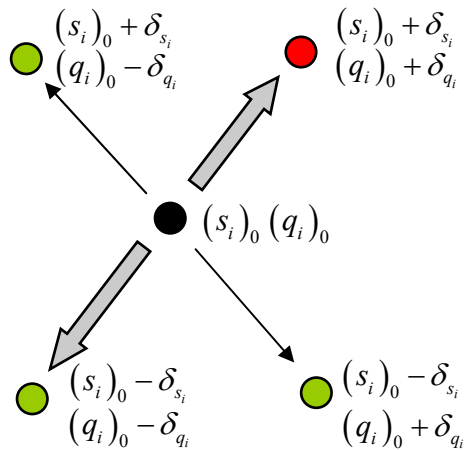


Figura 5.4: Vértices de la región de incertidumbre generada por variaciones en el influente, donde en rojo se representa el extremo más difícil de controlar

Incertidumbre debida a variaciones en las dimensiones de la planta

Una última fuente de incertidumbre son las posibles modificaciones en alguna característica física de la planta, como por ejemplo el volumen del reactor o el área del decantador. Los cuatro vértices quedarían definidos así a partir del punto nominal, aplicando variaciones δ_{V_1} y δ_A a los parámetros (Figura 5.5):

$$V_1 = (V_1)_0 \pm \delta_{V_1} \text{ m}^3 \quad (5.18)$$

$$A = (A)_0 \pm \delta_A \text{ m}^2 \quad (5.19)$$

De esta forma, se permite una cierta flexibilidad en el diseño de la planta que utilice el MPC sintonizado considerando esta incertidumbre, puesto que cumplirá los criterios de desempeño propuestos no solo para la planta nominal sino también para plantas similares o futuros rediseños, dotando de mayor fiabilidad al controlador sintonizado.

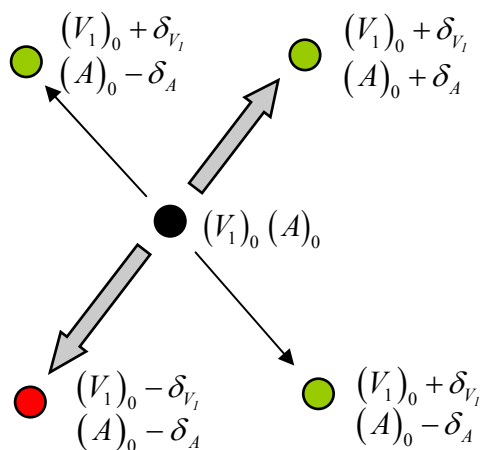


Figura 5.5: Vértices de la región de incertidumbre generada por variaciones en la planta, donde en rojo se representa el extremo más difícil de controlar

5.3.2 Planteamiento de la optimización como un problema multiobjetivo

El problema de optimización con restricciones generado en la sintonía automática (5.1) se puede tratar también como un problema multiobjetivo, transformando las restricciones (5.3) y (5.4) en nuevos objetivos junto con la $\|\mathbf{N}_0\|_\infty$. La función objetivo \mathbf{J} queda definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{J} = (f_1, f_2, f_3)$$

donde

$$f_1 = \|\mathbf{N}_0\|_\infty \quad (5.20)$$

$$f_2 = \|\mathbf{M}_0\|_1 \quad (5.21)$$

$$f_3 = \|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}\|_1 \quad (5.22)$$

y \mathbf{N}_0 es la matriz de sensibilidad mixta, \mathbf{S}_0 es la sensibilidad a la salida, \mathbf{R}_{d0} es la función de transferencia debido a la parte de prealimentación del MPC y \mathbf{M}_0 la sensibilidad al control, todas ellas para el modelo nominal.

El problema de optimización (5.1) se transforma en un problema multiobjetivo en el que se busca que los valores de las funciones objetivo se aproximen a un vector de valores deseados \mathbf{f}^* :

$$\mathbf{f}^* = (f_1^* \quad f_2^* \quad f_3^*) \quad (5.23)$$

Puesto que en el problema original se busca minimizar $\|\mathbf{N}_0\|_\infty$, el valor de f_1^* se elige próximo a cero. Por otra parte, para que se sigan cumpliendo las restricciones sobre las normas l_1 (5.3) y (5.4) cuando las soluciones no alcancen exactamente los valores deseados, los valores objetivo f_2^* y f_3^* se deben elegir con cierto margen sobre las cotas impuestas:

$$f_2^* < u_{\max} \quad (5.24)$$

$$f_3^* < y_{\max}$$

Aunque este planteamiento multiobjetivo y el problema (5.1) no son equivalentes, la resolución utilizando el método multiobjetivo es más sencilla debido a que no es necesario seleccionar cotas exactas para la entrada manipulada (u_{\max}) y la salida (y_{\max}) que pudieran provocar infactibilidades o dificultar la convergencia, por lo que tiene un gran interés práctico. Esto se pone de manifiesto sobre todo cuando la sintonía automática es una parte del problema general de diseño integrado.

5.3.3 Estrategia de resolución del problema de optimización

Debido a la coexistencia de parámetros reales (pesos del controlador) con parámetros enteros (horizontes) en el problema de optimización generado, estaría indicado para su

resolución alguno de los algoritmos de tipo mixto-entero existentes (Grossmann, 2002). En cualquier caso, una solución sencilla que también proporciona buenos resultados es el uso de un método iterativo que combina la optimización clásica basada en el gradiente con un método estocástico muy simple, que es la estrategia propuesta en este trabajo.

En esta estrategia (Figura 5.6), partiendo de ciertos parámetros de sintonía iniciales, en un primer paso se sintonizan los horizontes usando un método de optimización aleatoria dirigida basada en el método de (Solis y Wets, 1981) (apéndice II), manteniendo el peso R constante, y en un segundo paso, se utiliza un método de optimización basado en el gradiente para sintonizar el peso R del controlador, con los horizontes obtenidos en el paso anterior. Este proceso se repite iterativamente hasta alcanzar un criterio de finalización. En el paso de sintonía del peso R se utiliza en particular el método de Programación Secuencial Cuadrática (SQP) o el método de la programación de objetivos (apéndice II) si el problema se plantea de forma multiobjetivo como en 5.3.2.

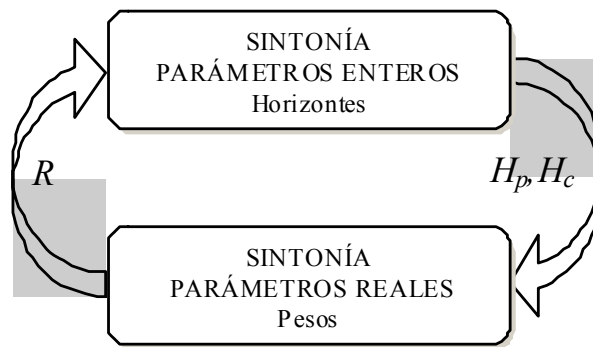


Figura 5.6: Estrategia de optimización iterativa en dos pasos

En el paso de optimización de los horizontes, si se utiliza el planteamiento multiobjetivo de 5.3.2, se considera una única función objetivo que pondera adecuadamente cada uno de los objetivos e incluye un término de penalización para la restricción (5.2).

El criterio de convergencia utilizado para detener el algoritmo global iterativo en dos pasos es que la disminución del valor de la función objetivo a lo largo de varias iteraciones consecutivas sea menor que una determinada cota. Aunque la convergencia de estos algoritmos no está demostrada para un caso general, se ha observado que para la sintonía de MPC aplicado al proceso de fangos activados, únicamente se necesitan unas pocas iteraciones para alcanzar tolerancias de 10^{-3} en la función objetivo y variables de optimización. La convergencia del algoritmo SQP y de programación de objetivos está basada en tolerancias normalizadas de 10^{-6} en la función objetivo, variables de optimización y restricciones.

5.4 RESULTADOS DE SINTONÍA AUTOMÁTICA UTILIZANDO UN ÍNDICE DE SENSIBILIDAD MIXTA H_∞

A continuación se muestran los resultados de la metodología propuesta aplicada al proceso de fangos activados. Para clarificar la exposición, en la **Tabla 5.1** se presenta un esquema de los resultados. En primer lugar, se plantea el problema de optimización eligiendo los parámetros que se mantendrán constantes en los diferentes casos de estudio y los vértices de la región de incertidumbre. A continuación se verifica la

condición de estabilidad robusta y se demuestra su cumplimiento a priori para todos los casos de sintonía propuestos. Finalmente, se muestran los resultados de sintonía automática para distintos casos.

Sección 5.4 RESULTADOS DE SINTONÍA AUTOMÁTICA MEDIANTE ÍNDICE DE SENSIBILIDAD MIXTA H_∞	
AJUSTE PREVIO DE LOS PARÁMETROS	
Planteamiento de problema de optimización para el proceso de fangos activados	5.4.1
Determinación de los vértices de la región de incertidumbre	5.4.2
Condición de estabilidad robusta	5.4.3
RESULTADOS	5.4.4
Diseño integrado robusto frente a variaciones en la concentración de sustrato	
Diseño integrado robusto frente a variaciones en las dimensiones de la planta	
Influencia de los pesos en los índices de controlabilidad	

Tabla 5.1: Esquema de resultados de sintonía automática utilizando el índice de sensibilidad mixta H_∞ .

Para aplicar la metodología de sintonía automática al proceso de fangos activados descrito en el capítulo 2, se ha seleccionado el conjunto de parámetros de la planta que se muestran en la Tabla 5.2. La selección de estos parámetros se ha realizado a partir de la planta de referencia de la Tabla 2.10, con ligeras modificaciones para mejorar su controlabilidad y clarificar así los resultados.

Dimensiones de la planta	
V_l	7668 m ³
A	2970.88 m ²
Punto de trabajo nominal	
fk	0.15
q_r	220 m ³ /h
q_p	31.49 m ³ /h
x_l	1432.9 mg/l
s_l	58.45 mg/l
c_l	3 mg/l
x_d	26.2 mg/l
x_b	241.5 mg/l
x_r	7689.4 mg/l
Características del influente	
s_i	340 mg/l
q_i	1150 m ³ /h

Tabla 5.2: Dimensiones de la planta y punto de trabajo para sintonía automática

5.4.1 Planteamiento del problema de optimización para el proceso de fangos activados

El problema de optimización para resolver la sintonía automática se ha planteado de forma multiobjetivo como se expuso en el apartado 5.3.2, considerando por sencillez únicamente dos índices de controlabilidad de forma simultánea. Se ha seleccionado la formulación básica del MPC con función objetivo (3.1), sin penalización terminal y horizontes finitos. Los distintos elementos del problema se enumeran a continuación:

- Función objetivo:

$$\mathbf{J} = (f_1, f_2) \quad (5.25)$$

donde

$$f_1 = \|\mathbf{N}_0\|_{\infty} \quad (5.26)$$

$$f_2 = \|\mathbf{M}_0\|_1 \quad (5.27)$$

- Vector objetivo con los valores deseados:

$$\mathbf{f}^* = (f_1^* \quad f_2^*) = (1 \quad 3000) \quad (5.28)$$

- Vector de pesos para las funciones objetivo en el método de la programación de objetivos:

$$\mathbf{w} = (-f_1^* \quad f_2^*) \quad (5.29)$$

- Restricciones sobre los parámetros de sintonía:

$$2 < H_c < 5 \quad (5.30)$$

$$5 < H_p < 10$$

$$0.001 < R < 10$$

- Restricción de desempeño robusto (5.12), expresada para cada vértice de la región de incertidumbre:

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{R}_d\|_{\infty} < 1 \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (5.31)$$

donde \mathbf{S}_i y \mathbf{R}_d son las funciones de sensibilidad para cada modelo local.

- Pesos en los índices de controlabilidad, elegidos en base a las perturbaciones del BSM1 y de la planta de Manresa (Gutiérrez, 2000):

$$W_{p_{si}} = 16 \cdot \frac{\frac{s}{2.5} + 0.9}{s + 1 \cdot 10^{-4}} \quad W_{p_{qi}} = 30 \cdot \frac{\frac{s}{1.5} + 0.8}{s + 1 \cdot 10^{-4}} \quad (5.32)$$

$$W_{esf_{s_i}} = 0.04 \cdot \frac{\frac{s}{3} + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad W_{esf_{q_i}} = 0.12 \cdot \frac{\frac{s}{2.5} + 0.9}{s + 0.9 \cdot 10^{-4}} \quad (5.33)$$

Las restricciones dinámicas del MPC para las simulaciones con el sistema en lazo cerrado obtenido son las siguientes:

$$0 < \Delta q_r < 1000 \text{ m}^3/\text{h} \quad (5.34)$$

$$0 < q_r < 3500 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$0 < s_1 < 125 \text{ mg/l} \quad (5.35)$$

$$400 < x_1 < 3000 \text{ mg/l}$$

Estas restricciones no se incluyen directamente en el algoritmo de sintonía automática del MPC, sino únicamente de forma indirecta en las cotas o valores deseados de los índices de controlabilidad. Es decir, la cota superior de q_r dinámica se considera mediante la restricción sobre la $\|\mathbf{M}_0\|_1$, para el peor caso de las perturbaciones, la cota superior dinámica en s_I se considera mediante la norma $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{a0}\|_1$ y los aspectos relativos a los esfuerzos de control aparecen en la $\|\mathbf{N}_0\|_1$. En cuanto a las restricciones dinámicas sobre la biomasa x_I , se consideran de forma indirecta también con la norma $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{a0}\|_1$.

Respecto a las perturbaciones de entrada s_i y q_i se han tomado del BSM1 para tiempo seco, y encuentran escaladas al 50% para una mejor evaluación de los resultados.

La selección de las dos funciones objetivo f_1 y f_2 en vez de las tres propuestas en (5.20)-(5.22), se realiza para simplificar el planteamiento del problema y porque el efecto de f_2 y f_3 en el problema es similar.

La elección del vector de pesos \mathbf{w} que aparece en la formulación del problema de optimización multiobjetivo está realizada para proporcionar la misma importancia a cada una de las funciones objetivo en el método de programación de objetivos (apéndice II), que se formula matemáticamente de la siguiente forma para este caso:

$$\begin{aligned} \min_{\gamma, \mathbf{c} \in \mathfrak{R}} \gamma \\ f_1(\mathbf{c}) - w_1 \gamma \leq f_1^* \\ f_2(\mathbf{c}) - w_2 \gamma \leq f_2^* \end{aligned}$$

donde γ es una variable de holgura y \mathbf{c} es el vector de variables de decisión que incluye los parámetros de sintonía.

Los signos en \mathbf{w} indican que el primer objetivo debe tratar de cumplirse con valores superiores al valor deseado, mientras que el segundo se debe alcanzar con valores inferiores, puesto que se busca que la variable manipulada no sobrepase la cota de $u_{max}=3000 \text{ m}^3/\text{h}$. De todas formas, para evitar una hipotética violación de la restricción (5.3), el valor de f_2^* se elige con cierto margen como en (5.24).

La resolución del problema de optimización se ha realizado según la estrategia del punto 5.3.3. Como es lógico, los resultados se encuentran condicionados al vector de valores deseados y pesos que elija el diseñador, obteniéndose una solución de compromiso entre un buen rechazo a perturbaciones y esfuerzos de control pequeños.

5.4.2 Determinación de los vértices de la región de incertidumbre

Incetidumbre debida a variaciones en la concentración de sustrato

Para determinar la región de incertidumbre poliédrica se consideran variaciones típicas en los parámetros inciertos y se calculan los modelos lineales en los correspondientes vértices. En primer lugar se consideran variaciones en la concentración s_I (Figura 5.3) de forma que los vértices concretos quedan fijados así:

$$s_1 = (s_1)_0 \pm 20 \text{ mg/l} \quad (5.36)$$

La representación discreta en el espacio de estados de los modelos locales linealizados en estos vértices y en el punto nominal es la siguiente, para un periodo de muestro $T=0.5$ h, sin ruido de medida ni perturbaciones no medibles:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_{d_i} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5.37)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estados, $\mathbf{u}(k)$ el vector de entradas, $\mathbf{d}(k)$ el vector de perturbaciones medibles, $\mathbf{y}(k)$ es el vector de salidas, \mathbf{A}_i es la matriz de estados, \mathbf{B}_i es la matriz de control, \mathbf{B}_{d_i} es la matriz de perturbaciones, \mathbf{C}_i es la matriz de salidas, $i=0$ para el modelo nominal, $i=1$ para el modelo localizado en $(s_1)_0 - 20 \text{ mg/l}$ e $i=2$ para el modelo localizado en $(s_1)_0 + 20 \text{ mg/l}$.

Debido al funcionamiento del proceso, el modelo localizado en $s_1 = (s_1)_0 - 20 \text{ mg/l}$ es el más restrictivo puesto que exige a la planta un nivel menor de sustrato sin variar sus características. Entonces, si se cumplen las condiciones de desempeño sobre este modelo, se cumplirán también para toda la región de incertidumbre.

En particular, las matrices de estados son las siguientes, tomando s_I y x_I como salidas:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0.6806 & -0.0116 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0001 \\ 0.1563 & 0.9206 & 0.0058 & 0.0017 & 0.0135 \\ 0.0099 & 0.0997 & 0.4442 & 0.4362 & 0.0008 \\ 0.0003 & 0.0041 & 0.0407 & 0.4473 & 0.0000 \\ 0.0040 & 0.0624 & 0.7300 & 0.3178 & 0.9589 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -0.0025 \\ 0.3832 \\ 0.1140 \\ 0.0043 \\ 1.1625 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{d0} = \begin{pmatrix} 0.0623 & 0.0158 \\ 0.0063 & -0.0828 \\ 0.0003 & 0.0912 \\ 0.0000 & 0.0159 \\ 0.0001 & 0.0561 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.53169 & -0.0068 & -3.31e-5 & -7.07e-6 & -0.0002 \\ 0.28139 & 0.8860 & 0.01116 & 0.00305 & 0.0427 \\ 0.02856 & 0.1573 & 0.6205 & 0.4940 & 0.0040 \\ 0.00081 & 0.0063 & 0.0497 & 0.4731 & 0.0001 \\ 0.00601 & 0.0490 & 0.4340 & 0.1731 & 0.8785 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -0.00074 \\ 0.17576 \\ 0.15801 \\ 0.00600 \\ -0.70066 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{d1} = \begin{pmatrix} 0.05562 & 0.01512 \\ 0.01194 & -0.12934 \\ 0.00079 & 0.14435 \\ 1.64e-5 & 0.03936 \\ 0.00012 & 0.04372 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.7587 & -0.0158 & -2.56e-5 & -5.88e-6 & -7.46e-5 \\ 0.1033 & 0.9284 & 0.0040 & 0.0012 & 0.0085 \\ 0.0059 & 0.0901 & 0.4020 & 0.4186 & 0.0005 \\ 0.0002 & 0.0037 & 0.0385 & 0.4420 & 1.28e-5 \\ 0.0027 & 0.0653 & 0.8022 & 0.3566 & 0.9722 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -0.0037 \\ 0.4210 \\ 0.0878 \\ 0.0033 \\ -1.2163 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{d2} = \begin{pmatrix} 0.0655 & 0.0154 \\ 0.0041 & -0.0594 \\ 0.0002 & 0.0648 \\ 3.43e-6 & 0.0105 \\ 5.38e-5 & 0.0463 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Incertidumbre debida a variaciones en el influente

Como ya se indicó, el segundo factor que introduce incertidumbre es la variación de las características del influente debida a la acción de perturbaciones, en particular los valores de q_i y s_i . Concretamente, los vértices de la región de incertidumbre se han fijado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} s_i &= (s_i)_0 \pm 120 \text{ mg/l} \\ q_i &= (q_i)_0 \pm 230 \text{ m}^3/\text{h} \end{aligned} \quad (5.39)$$

En este caso, el extremo más exigente de la región de incertidumbre sobre el que se impondrán las condiciones de desempeño robusto es el definido por el siguiente punto de operación, puesto que exige a la planta que mantenga s_I , para un influente con q_i y s_i mayores:

$$\begin{aligned} s_i &= (s_i)_0 + 120 \text{ mg/l} \\ q_i &= (q_i)_0 + 230 \text{ m}^3/\text{h} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Los modelos locales lineales en el espacio de estados para este caso y el siguiente se obtendrían de forma análoga al primer caso y no se presentan aquí por brevedad.

Incertidumbre debida a variaciones en las dimensiones de la planta

Respecto a las variaciones de las dimensiones de la planta como último factor de incertidumbre, los vértices de la región se fijan la forma siguiente:

$$\begin{aligned} V_1 &= (V_1)_0 \pm 1100 \text{ m}^3 \\ A &= (A)_0 \pm 1100 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ahora el vértice más exigente tiene las siguientes dimensiones de planta reducidas:

$$\begin{aligned} V_1 &= (V_1)_0 - 1100 \text{ m}^3 \\ A &= (A)_0 - 1100 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

5.4.3 Condición de estabilidad robusta

La condición de estabilidad robusta aplicada en la sintonía automática es la desigualdad (5.14), que se reescribe aquí por conveniencia:

$$\|\Delta \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\|_\infty < 1 \quad (5.43)$$

donde $\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}$ es la función de sensibilidad a la salida respecto a las perturbaciones en el punto nominal y Δ son las funciones de incertidumbre que se consideren. Por lo tanto, para verificar esta condición es necesario calcular primero las funciones de incertidumbre Δ definidas en (5.9) utilizando los modelos locales (5.37) y representar la magnitud de su respuesta en frecuencia (Figura 5.7).

Teniendo en cuenta incertidumbre frente a variaciones en s_I , para garantizar la estabilidad robusta la incertidumbre más limitante es la correspondiente al modelo localizado en $(s_1)_0 - 20 \text{ mg/l}$. Para ilustrar mejor la situación, en la Figura 5.7 se muestran también las magnitudes de las funciones de incertidumbre para una región más pequeña, con vértices localizados en $(s_1)_0 \pm 10 \text{ mg/l}$.

Como los pesos \mathbf{W}_p elegidos en la restricción (5.2) o (5.12) imponen en el problema condiciones más estrictas sobre las funciones de sensibilidad \mathcal{S} que la condición (5.14) (Figura 5.8), la estabilidad robusta se satisface siempre sin necesidad de imponer restricciones adicionales al problema de optimización principal (5.1). Este análisis se ha llevado a cabo fuera del algoritmo de optimización de la sintonía dado que la región de incertidumbre se mantiene constante.

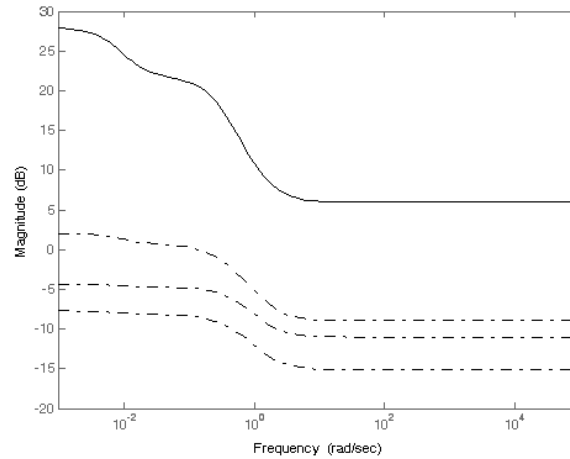


Figura 5.7: Magnitud de las incertidumbres multiplicativas Δ (línea continua para la incertidumbre del modelo localizado en $(s_1)_0 = 20$ mg/l)

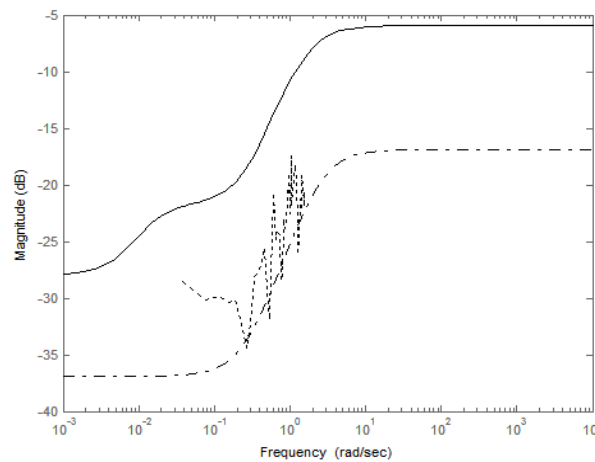


Figura 5.8: Magnitud inversa del peor caso de las incertidumbres (Δ^{-1}) (línea continua), espectro inverso de la perturbación s_1 (línea punteada) y magnitud de $W_{p_{s_1}}^{-1}$ (línea a trazos)

5.4.4 Resultados

Sintonía automática robusta frente a variaciones en la concentración de sustrato

En este punto se detallan los resultados obtenidos de sintonía automática con robustez frente a variaciones de s_1 , comparados con un caso de sintonía automática sin imponer condiciones de robustez. En la Tabla 5.3 se presentan los parámetros de sintonía obtenidos MPC junto con algunos valores dinámicos e índices de controlabilidad cuando la planta trabaja en el vértice de la región de incertidumbre más difícil de controlar, es decir $s_1 = (s_1)_0 = 20$ mg/l.

En primer lugar se observa que cuando se considera robustez en la sintonía, el MPC obtenido provoca en general mayores esfuerzos de control, como se deduce de los valores de $\|\mathbf{M}_0\|_1$ y los valores máximos de q_r . Esto es debido a que el controlador ha de ser capaz de cumplir la condición de desempeño no sólo en el punto nominal sino en toda la región de incertidumbre. Por otra parte, cuando el MPC se sintoniza sin considerar robustez, en este punto de operación ya no se cumple la condición de rechazo de perturbaciones representada por $\|\mathbf{W}_p \mathbf{S}_1 \mathbf{R}_{d1}\|_\infty < 1$. La calidad del rechazo a perturbaciones se comprueba también comparando los valores máximos de s_I en la tabla y en las simulaciones realizadas.

Puesto que no todos los puntos de operación en la región de incertidumbre propuesta proporcionan respuestas estables cuando los MPC obtenidos se aplican al modelo no lineal de la planta debido a la utilización de índices de controlabilidad lineales, para la validación sobre el proceso no lineal se ha considerado una región más reducida en torno al punto nominal incluida en la región propuesta inicialmente. Para este ejemplo, se ha considerado la región reducida limitada inferiormente por $s_1 = (s_1)_0 - 10$ mg/l. En los resultados se presentan también variables del modelo linealizado denotadas con el con el subíndice *lin*, con el fin de validar mejor los resultados, por lo que se trata de desviaciones respecto al punto de linealización.

	Sintonía sin robustez	Sintonía con robustez
Parámetros del MPC		
R	0.008	0.003
H_p	7	10
H_c	2	5
Punto de operación	$s_1 = (s_1)_0 - 20$ mg/l	
$\max(q_{rlin})$	3034	3683
$\max(s_{Ilin})$	48.50	44.21
$\ \mathbf{N}_1\ _\infty$	2.48	3.02
$\ \mathbf{M}_1\ _1$	3284	5258
$\ \mathbf{W}_p \mathbf{S}_1 \mathbf{R}_{d1}\ _\infty$	1.840	0.990
Punto de operación	$s_1 = (s_1)_0 - 10$ mg/l	
$\max(q_r)$ (m ³ /h)	1454.1	1511.3
$\max(s_I)$ (mg/l)	54.95	53.21

Tabla 5.3: Resultados para sintonía automática robusta variando s_I en el extremo inferior de la región de incertidumbre

La magnitud de la función de sensibilidad de salida para el modelo nominal $(S_{s_I})_0$ junto con el valor de la magnitud del peso $W_{ps_I}^{-1}$ elegido se muestra en la

Figura 5.9, cuando se tiene un MPC sintonizado con y sin condiciones de robustez, observándose que ambas cumplen la restricción de desempeño (5.2). Cuando el proceso

se desplaza al extremo inferior de la región de incertidumbre (Figura 5.10), esta restricción deja de satisfacerse en el segundo caso.

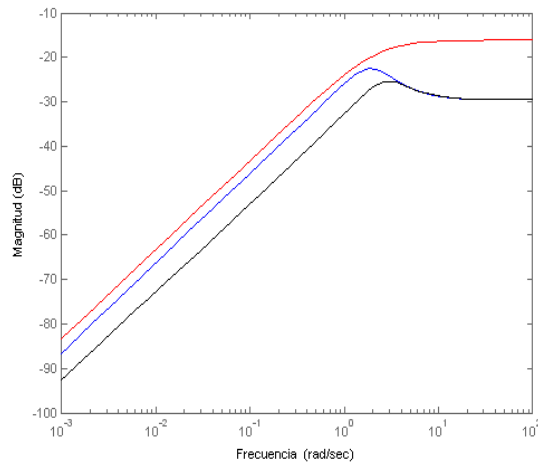


Figura 5.9: Magnitud de W_{ps}^{-1} (rojo) y de $(S_{si})_0$ para MPC sintonizado con robustez (negro) y sin robustez (azul)

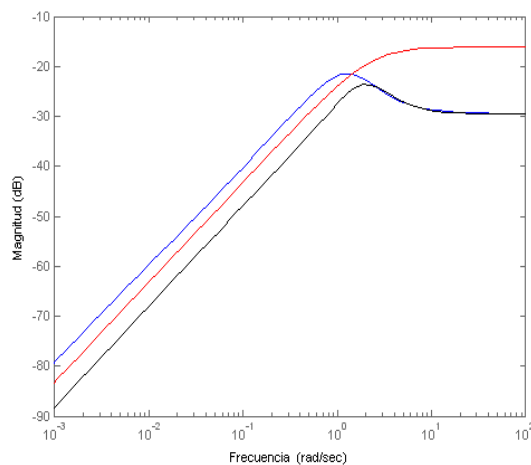


Figura 5.10: Magnitud de W_{ps}^{-1} (rojo) y de $(S_{si})_1$ para MPC sintonizado con robustez (negro) y sin robustez (azul)

En cuanto a la evolución dinámica de s_l y q_r cuando el proceso trabaja en el extremo inferior de la región de incertidumbre, se observa un mejor desempeño del controlador sintonizado con condiciones de robustez (Figura 5.11).

El análisis del comportamiento del proceso en el extremo superior de la región de incertidumbre con $s_1 = (s_1)_0 + 20$ mg/l, es análogo y no causa problemas de controlabilidad puesto que es una situación más sencilla de alcanzar para la planta.

Sintonía automática robusta frente a variaciones en las dimensiones de la planta

Los resultados de sintonía automática con robustez frente a variaciones en las dimensiones de la planta son similares a los anteriores, observándose un mejor rechazo de las perturbaciones con el MPC sintonizado con robustez, especialmente en el

extremo inferior de la región de incertidumbre, donde el controlador sintonizado sin robustez no cumple la restricción $\|\mathbf{W}_p \mathbf{S}_I \mathbf{R}_{d1}\|_\infty < 1$.

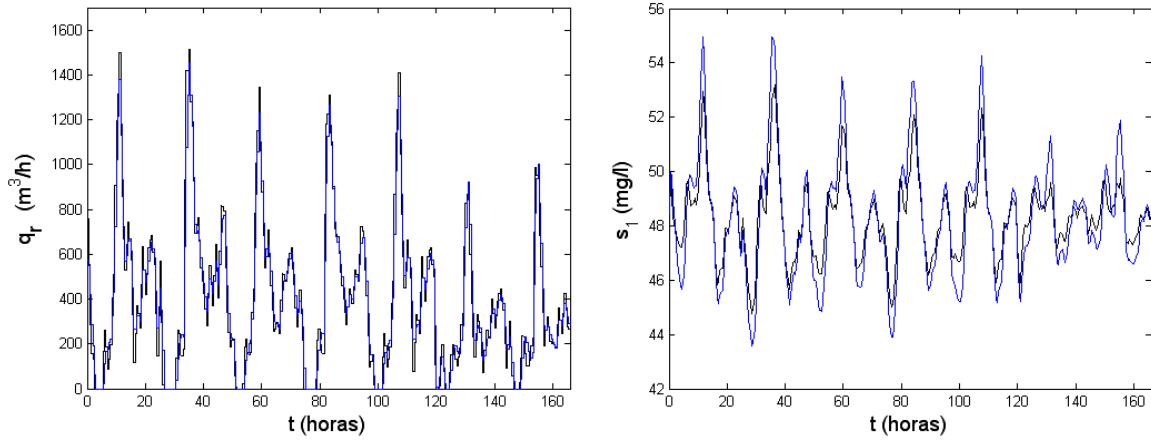


Figura 5.11: Evolución de s_I y q_r con MPC sintonizado con robustez (negro) y sin robustez (azul) en el extremo inferior de la región de incertidumbre

En la Tabla 5.4 se muestran los resultados numéricos cuando se opera en el extremo inferior de la región de incertidumbre, comparando también con el desempeño de un MPC obtenido sin condiciones de robustez. Este punto de operación es el de más difícil controlabilidad puesto que las dimensiones de la planta están disminuidas. Los resultados del comportamiento del MPC obtenido en el extremo superior de la región no se presenta puesto que se trata del extremo con mejor controlabilidad.

Los resultados de sintonía automática frente a cambios en los valores de s_i y q_i en el influente son análogos a los ya mostrados y no se exponen por brevedad.

Influencia de los pesos de los índices de controlabilidad

Los pesos en los índices de controlabilidad determinan las características dinámicas de los MPC obtenidos por el método de sintonía propuesto, debiendo ser elegidos cuidadosamente. Por ejemplo, para obtener un adecuado rechazo de las perturbaciones, es importante la selección del peso \mathbf{W}_p . En este punto se presenta su influencia, resolviendo dos casos con distintos pesos $W_{p_{si}}$. En concreto se han elegido:

$$W_{p_{si}1} = 0.007 \cdot \frac{\frac{s}{0.001} + 2500}{s + 2500 \cdot 10^{-4}} \quad (5.44)$$

$$W_{p_{si}2} = 0.003 \cdot \frac{\frac{s}{0.001} + 2500}{s + 2500 \cdot 10^{-4}} \quad (5.45)$$

manteniendo constantes $W_{p_{qi}}$ y \mathbf{W}_{esf} :

$$W_{p_{si}} = 0.007 \cdot \frac{\frac{s}{10^{-3}} + 2500}{s + 25 \cdot 10^{-2}} \quad W_{p_{qi}} = 0.02 \cdot \frac{\frac{s}{10^{-3}} + 2000}{s + 20 \cdot 10^{-2}} \quad (5.46)$$

$$W_{esf_{si}} = 0.04 \cdot \frac{\frac{s}{3} + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad W_{esf_{qi}} = 0.12 \cdot \frac{\frac{s}{3} + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad (5.47)$$

	Sintonía sin robustez	Sintonía con robustez
Parámetros del MPC		
R	0.008	0.003
H_p	7	7
H_c	2	2
Punto de operación	$V_1 = (V_1)_0 - 1100 \text{ m}^3; A = (A)_0 - 1100 \text{ m}^2$	
$\ N_1\ _\infty$	3.923	3.965
$\ M_1\ _1$	6392.4	8400.6
$\ W_p S_1 R_{d1}\ _\infty$	1.927	0.943
Punto de operación	$V_1 = (V_1)_0 - 550 \text{ m}^3; A = (A)_0 - 550 \text{ m}^2$	
$\max(q_r) \text{ (m}^3/\text{h)}$	1302.7	1333.6
$\max(s_l) \text{ (mg/l)}$	64.87	63.84

Tabla 5.4: Resultados de sintonía automática variando V_1 y A en el extremo inferior de la región de incertidumbre

Los resultados numéricos se presentan en la Tabla 5.5, considerando en este caso un MPC con penalización terminal como se presentó en 3.3. La diferencia fundamental que implica esta formulación es que el único horizonte a sintonizar es el horizonte de control H_c puesto que el horizonte de predicción es infinito, además de que futuras resintonías proporcionarán siempre sistemas estables en lazo cerrado. La sintonía automática se realiza incluyendo también condiciones de desempeño robusto frente a variaciones en s_l . Aunque el desempeño de ambos controladores es bueno (Figura 5.12), el MPC sintonizado con $W_{p_{si1}}$ rechaza mejor las perturbaciones debido a que el peso es más restrictivo, aunque lógicamente con esfuerzos de control mayores.

La influencia del peso W_{esf} es análoga pero actuando sobre los esfuerzos de control, provocando que cuanto más restrictivo sea este peso, el MPC sintonizado genera menores variaciones de la señal de control, con el consiguiente deterioro del rechazo de las perturbaciones. En los resultados de la Tabla 5.5 se ha considerado $H_c=10$ constante por sencillez, aunque la inclusión de la sintonía del H_c en los resultados es inmediata.

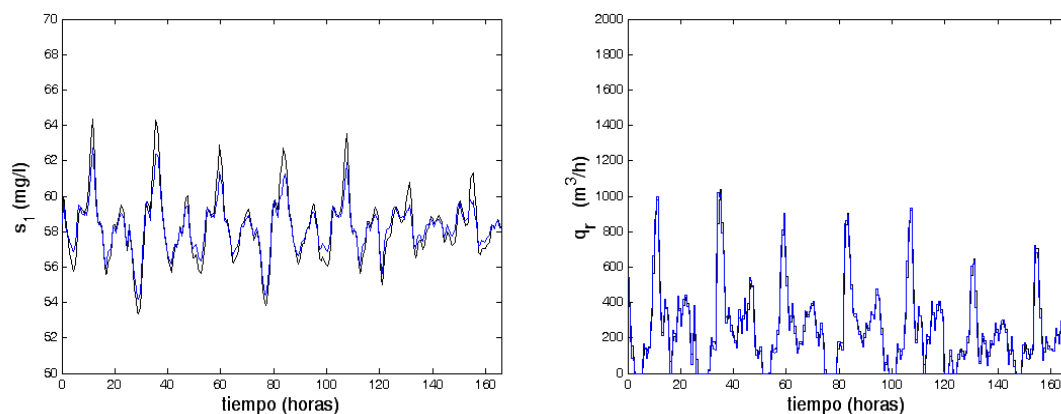


Figura 5.12: Evolución de s_l y q_r para el proceso con MPC sintonizado con $W_{p_{si1}}$ (azul), y $W_{p_{si2}}$ (negro)

	MPC sintonizado con $W_{p_{si}1}$	MPC sintonizado con $W_{p_{si}2}$
R	0.0043	0.0092
H_c	10	10
$\max(q_r)$ (m ³ /h)	1019.4	1037.1
$\max(s_f)$ (mg/l)	62.71	64.36
$\ N_0\ _\infty$	1.603	1.311
$\ M_0\ _1$	2843.5	1930.3
$\ W_p S_0 R_{d0}\ _\infty$	0.814	0.839
Tiempo de cálculo (s)	26.36	46.83

Tabla 5.5: Resultados de sintonía automática para MPC con penalización terminal

5.5 SINTONÍA AUTOMÁTICA UTILIZANDO ÍNDICES DE CONTROLABILIDAD BASADOS EN LA NORMA l_1

El problema de sintonía automática de controladores MPC se puede plantear de forma alternativa considerando directamente las medidas de rechazo a perturbaciones planteadas de forma general en (Kariwala y Skogestad, 2007), como son el valor del mínimo error en la salida cuando la entrada se encuentra acotada para el peor caso de las perturbaciones, y el valor máximo de la perturbación permitida para entradas y salidas acotadas. Este planteamiento tiene interés en el marco de este trabajo porque además de tratar de forma directa el rechazo de perturbaciones en el dominio del tiempo, estas medidas se pueden representar utilizando únicamente índices de controlabilidad basados en la norma l_1 como norma inducida de la norma ∞ de una señal (apéndice I). Además, los resultados de este apartado se aprovechan también para introducir el funcional objetivo que considera restricciones asimétricas en algunas variables (ver 4.2.6). En la Tabla 5.6 se muestra un esquema resumen de los resultados obtenidos mediante este planteamiento.

RESULTADOS DE SINTONÍA MEDIANTE ÍNDICES DE CONTROLABILIDAD BASADOS EN LA NORMA l_1	
Sintonía basada en el cálculo de la mínima variación de la salida	5.5.1
Sintonía basada en el cálculo de la máxima perturbación permitida	5.5.2
Resultados incluyendo restricciones asimétricas	5.5.3
Sintonía automática de controladores MPC aplicada a la plataforma de simulación estándar BSM1	5.6

Tabla 5.6: Esquema de resultados de sintonía automática utilizando índices basados en la norma l_1

5.5.1 Sintonía basada en el cálculo de la mínima variación de la salida

El primer caso consiste en sintonizar un MPC de forma que error en la salida sea mínimo, para el peor caso de las perturbaciones, cuando la variable manipulada se encuentra limitada por una cota u_{max} . Utilizando los índices de controlabilidad basados en la norma l_1 y su definición, el planteamiento matemático del problema para el caso de la formulación básica del MPC sin penalización terminal queda así:

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}\|_1 \tag{5.48}$$

sujeto a

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 < u_{max} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} 2 < H_c < 5 \\ 5 < H_p < 10 \\ 0.001 < R < 10 \end{aligned} \tag{5.50}$$

donde $\mathbf{c} = (R, H_p, H_c)$ es el vector de parámetros de sintonía seleccionados y las perturbaciones están normalizadas a la unidad.

El problema (5.48)-(5.50) proviene del planteamiento descrito en (Kariwala y Skogestad, 2007), que se basa en los valores máximos de las señales temporales en el sistema en lazo cerrado, y se expresa así para un sistema SISO:

$$\max_{\|d\|_{\infty} \leq 1} \min_{\|u\|_{\infty} \leq u_{max}} \|y\|_{\infty} \tag{5.50}$$

donde

$$y = G_0 \cdot u + G_{d0} \cdot d \tag{5.51}$$

considerando también referencia nula y perturbaciones normalizadas.

En la Tabla 5.7 se presentan los resultados numéricos para diferentes valores de u_{max} , incluyendo los parámetros de sintonía del MPC obtenido, algunos índices de controlabilidad y los valores máximos de la entrada y la salida cuando el proceso esta sometido a perturbaciones del BSM1 para tiempo seco.

En estos resultados se puede comprobar que el rechazo a perturbaciones es mejor cuando aumenta el valor de u_{max} , debido a que el controlador sintonizado permite mayores variaciones del q_r porque el peso R es menor. En la Figura 5.13 se presenta la evolución dinámica de s_I y q_r para dos casos de sintonía comprobándose que cuando $u_{max}=3500$ las variaciones del sustrato son menores. Para la obtención de estos resultados y los del punto siguiente, se utiliza la estrategia de optimización de 5.3.3 y la planta y punto de trabajo descritos en la Tabla 5.2. Por sencillez, la sintonía automática se ha realizado aquí sin incluir condiciones de robustez.

Valor de u_{max}	2000	3000	3500
R	0.0077	0.0036	0.0024
H_p	5	10	8
H_c	2	3	3
$\max(q_r)$	1045.5	1021.1	1056.6
$\max(s_I)$	64.06	62.54	62.02
$\ \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{a0}\ _1$	13.44	9.71	8.90
$\ \mathbf{M}_0\ _1$	2000	3000	3500

Tabla 5.7: Resultados de sintonía mediante índices basados en la norma l_1 para distintas cotas en $\|\mathbf{M}_0\|_1$

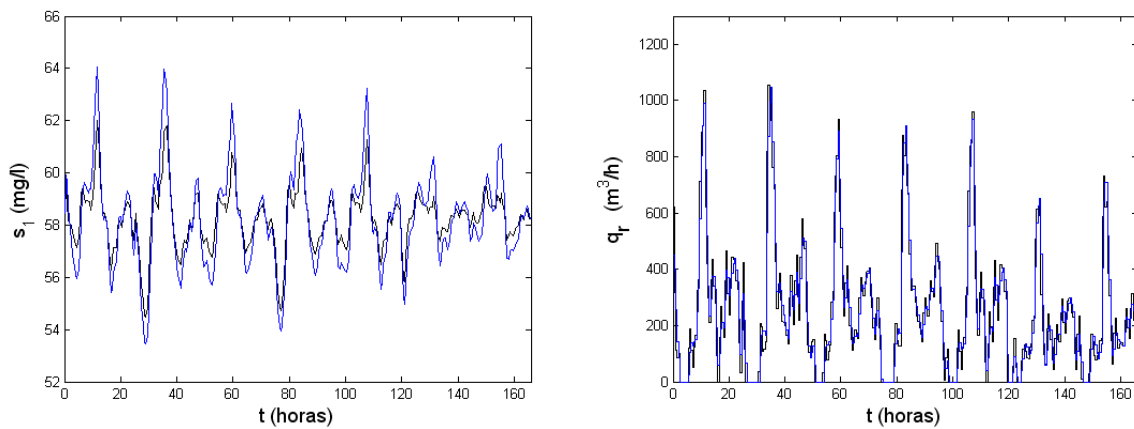


Figura 5.13: Evolución dinámica de s_I y q_r para el MPC sintonizado con $u_{max} = 2000$ (azul) y $u_{max} = 3500$ (negro)

5.5.2 Sintonía basada en el cálculo de la máxima perturbación permitida

Un segundo problema motivado también por las medidas de rechazo a perturbaciones presentadas en (Kariwala y Skogestad, 2007) consiste en obtener los parámetros de sintonía del MPC de forma que se maximice el valor máximo de la perturbación tal que para el peor caso de la misma hasta ese nivel, se obtenga una salida acotada por y_{max} con la variable de control también acotada por u_{max} . Matemáticamente, utilizando la norma l_1 , el problema queda definido así:

$$\min_{\sigma} \sigma \quad (5.52)$$

sujeto a

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{a0}\|_1 \leq y_{max} \cdot \sigma \quad (5.53)$$

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 \leq u_{max} \cdot \sigma \quad (5.54)$$

donde

$$\sigma = \frac{1}{d_{\max}} \tag{5.55}$$

El valor de σ es el inverso de la perturbación máxima d_{\max} , y por eso su minimización implica que se maximiza el valor de la máxima perturbación permitida d_{\max} . Las restricciones proceden de la definición de norma l_1 , teniendo en cuenta que se busca el valor máximo de la perturbación para el peor perfil de perturbaciones. Planteando la igualdad para las restricciones, que se corresponde con el caso límite, se tiene que:

$$\|S_0 R_{d0}\|_1 = \frac{y_{\max}}{d_{\max}} = y_{\max} \cdot \sigma \tag{5.56}$$

$$\|M_0\|_1 = \frac{u_{\max}}{d_{\max}} = u_{\max} \cdot \sigma \tag{5.57}$$

La resolución del problema (5.52)-(5.54) se ha planteado entonces como un problema de optimización multiobjetivo que busca el valor mínimo de σ que cumpla los límites de ambas restricciones. Entonces, despejando σ se puede plantear el siguiente problema:

$$\min_c \left(\frac{\|M_0\|_1}{u_{\max}}, \frac{\|S_0 R_{d0}\|_1}{y_{\max}} \right) \tag{5.58}$$

donde se busca minimizar ambos términos utilizando un vector de objetivos próximo a cero.

En la Tabla 5.8 se presentan algunos resultados de la perturbación máxima de sustrato s_i permitida para distintos casos de sintonía con diferentes cotas en la variable manipulada y la salida u_{\max} e y_{\max} . En esta tabla se observa que cuando se relajan las mencionadas cotas, el valor de la máxima perturbación permitida d_{\max} normalizada sobre el sistema en lazo cerrado con el MPC obtenido aumenta. Esto es lógico puesto que si se permiten magnitudes de control o salida mayores, es posible que el sistema trabaje con perturbaciones más elevadas sin violar las restricciones impuestas. Para la resolución de este problema de optimización se ha utilizado el método de la programación de objetivos (apéndice II).

y_{\max}	u_{\max}	σ	$d_{\max}=1/\sigma$
3000	10	0.982	1.014
3000	14	0.833	1.201
4000	10	0.883	1.133

Tabla 5.8: Valores de la perturbación máxima permitida obtenidos por sintonía automática

5.5.3 Inclusión de restricciones asimétricas

Para finalizar con los resultados de este bloque, se incluye en los problemas anteriores el índice de controlabilidad definido en (4.32), para estudiar el efecto de las asimetrías

existentes en las perturbaciones y la variable manipulada. Este índice se incluye aquí por conveniencia, aunque también se puede utilizar en los problemas del apartado 5.4.

El problema de optimización planteado es análogo a (5.48)-(5.50) pero sustituyendo la norma l_1 como restricción por el funcional $\|\bar{q}_r\|_a$:

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}\|_1 \quad (5.59)$$

sujeto a:

$$\|\bar{q}_r\|_a \leq U \quad (5.60)$$

donde

$$\mathbf{c} = (R, H_p, H_c) \quad (5.61)$$

$$U = \begin{pmatrix} \bar{q}_{r \max} \\ \bar{q}_{r \min} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ q_r \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

Las variables que representan desviaciones con respecto al estado estacionario se denotan aquí con la barra superior para simplificar la notación, es decir, la restricción (5.60) impone que la señal de control en la planta se encuentre entre los dos valores siguientes:

$$q_{r \max} = q_r + \bar{q}_{r \max} = q_r + 420 \text{ m}^3/\text{h} \quad (5.63)$$

$$q_{r \min} = q_r - \bar{q}_{r \min} = q_r - q_r = 0 \text{ m}^3/\text{h} \quad (5.64)$$

donde q_r es el valor estacionario del caudal de recirculación.

La asimetría de las perturbaciones se determina de forma sencilla a partir de los datos que proporciona el BSM1, en concreto para este ejemplo se ha seleccionado el perfil de tiempo tormentoso. Para perturbaciones escaladas al 50% el valor mínimo de caudal es $q_{imin}=923.6 \text{ m}^3/\text{h}$ y el valor máximo es $q_{imax}=1956.7 \text{ m}^3/\text{h}$. En desviaciones respecto al estado estacionario, se tiene que:

$$-226.4 \leq \bar{q}_i \leq 806.7 \quad (5.65)$$

La asimetría es por lo tanto clara, y utilizando el funcional que se definió en el punto 4.2.6, se verifica que el dominio asimétrico en el cual evoluciona la perturbación en q_i es:

$$\|\bar{q}_i\|_a \leq \mathbf{D} \text{ donde } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 806.7 \\ 226.4 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Si se trabaja con valores normalizados respecto al valor del máximo pico:

$$\|\hat{\bar{q}}_i\|_a \leq \mathbf{D} \text{ donde } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.281 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

Dado que las perturbaciones están definidas en este dominio asimétrico, la restricción (5.60) se implementa con la desigualdad (4.35) sobre los términos de la respuesta impulsional. En definitiva, en el problema de optimización generado se busca un MPC tal que para cualquier perturbación q_i definida en $\|\bar{q}_i\|_a \leq D$ el sistema produzca una señal de control q_r restringida en el dominio también asimétrico $\|\bar{q}_r\|_a \leq U$. La optimización se resuelve utilizando la estrategia en dos pasos descrita en 5.3.3. En los resultados que siguen, por sencillez únicamente se ha considerado la restricción en la perturbación q_i .

En la Tabla 5.9 y Figura 5.14 se presentan algunos resultados cambiando las restricciones asimétricas sobre la variable manipulada, observándose que cuando \bar{q}_{r1min} es menor (límite más estricto), el peso R obtenido en la sintonía automática es mayor de forma que las variaciones de la señal de control que se produzcan sean menores sin sobrepasar el dominio asimétrico impuesto por U . Cuando los dos valores del vector U coinciden, esta restricción es equivalente a la $\|\mathbf{M}_0\|_1$. Para los resultados de la tabla 5.7 se ha considerado la planta de referencia y punto de trabajo de apartados de la tabla 5.1 y perturbaciones en q_i atenuadas al 10%.

Restricciones	$U^t = (420, q_r)$	$U^t = (420, q_r - 100)$	$U^t = (q_r, q_r)$
R	0.024	0.163	0.159
H_p	8	10	10
H_c	2	3	3
$\max(q_r)$ (m^3/h)	423.72	356.85	357.19
$\max(s_I)$ (mg/l)	61.30	63.25	63.22
$\ \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}\ _1$	6.300	10.279	10.194
$\ \mathbf{M}_0\ _1$	375.0	218.8	220.0

Tabla 5.9: Resultados de sintonía automática para diferentes límites asimétricos en la señal de control

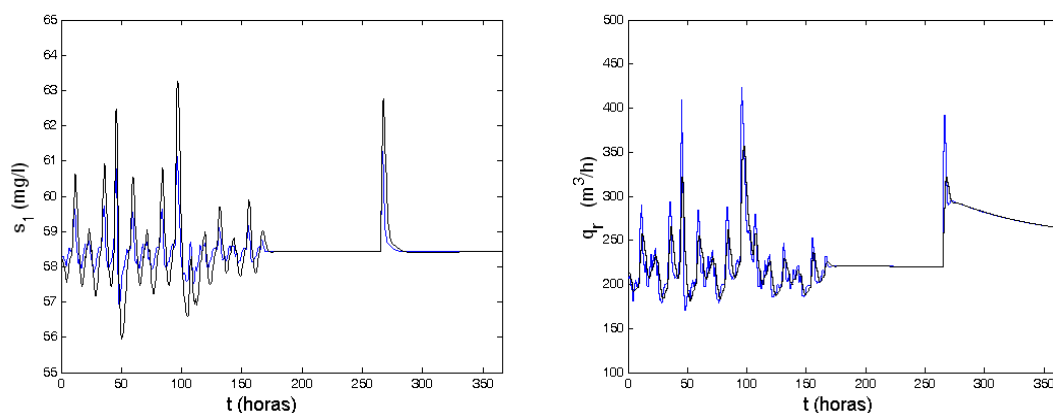


Figura 5.14: Evolución de s_I y q_r para sintonía con $U^t = (420, q_r)$ (azul) y $U^t = (420, q_r - 100)$ (negro)

5.6 SINTONÍA AUTOMÁTICA DE CONTROLADORES MPC APLICADOS A LA PLANTA BSM1

La metodología de sintonía automática de controladores MPC se aplica en este punto a la plataforma de simulación BSM1 para el proceso de fangos activados. El problema de control consiste ahora en regular la concentración de nitritos y nitratos en el segundo tanque anóxico ($S_{NO}(2)$) y la concentración de oxígeno disuelto en el último tanque aireado ($S_O(5)$), a pesar de las perturbaciones en el influente. Las variables manipuladas utilizadas son el caudal de recirculación interno (q_a) y el coeficiente de transferencia de oxígeno $K_L a_5$ en el último tanque aireado (Figura 5.15).

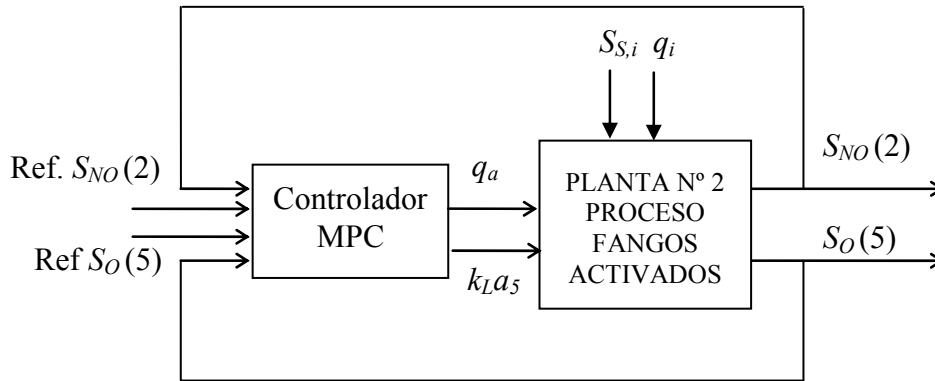


Figura 5.15: Estructura general del sistema en lazo cerrado con MPC para la planta n° 2

5.6.1 Planteamiento del problema de optimización

El problema de optimización planteado en este caso para la sintonía automática es el expuesto en (5.1) con condiciones de robustez, pero añadiendo restricciones asimétricas como en 5.5.3:

$$\min_c \|\mathbf{N}_0\|_\infty \quad (5.69)$$

sujeto a:

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{R}_a\|_\infty < 1 \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (5.70)$$

$$\|\bar{q}_a\|_a \leq U_1 \quad (5.71)$$

$$\|\overline{K_L a_5}\|_a \leq U_2 \quad (5.72)$$

$$H_{c\min} < H_c < H_{c\max} \quad (5.73)$$

$$\mathbf{R}_{\min} < \mathbf{R} < \mathbf{R}_{\max}$$

donde \bar{q}_a es el caudal de recirculación interno y $\overline{K_L a_5}$ el coeficiente de transferencia de oxígeno, ambas como variables de desviación respecto al estado estacionario.

Debido a la naturaleza del problema de control para este proceso, se utiliza un MPC multivariable, por lo que el peso \mathbf{R} del MPC es una matriz diagonal, cuyos elementos son $\mathbf{R}(1,1)$, que representa el peso relativo a la entrada q_a y $\mathbf{R}(2,2)$ que representa el peso para la entrada $K_L a_5$. En concreto, se elige la formulación del MPC con penalización terminal.

Los valores de los vectores \mathbf{U}_1 y \mathbf{U}_2 para las restricciones asimétricas sobre las variables manipuladas se eligen teniendo en cuenta la saturación de la bomba y las turbinas de aireación en cero, que imponen un límite inferior más estricto mientras que el superior puede ser mayor, dependiendo de las características particulares del actuador. Concretamente se han elegido los siguientes valores:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8.5 \end{pmatrix}, \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.4 \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

En cuanto a las perturbaciones en el influente, se utilizan las definidas en el BSM1 para tiempo seco en las variables $S_{s,i}$ y q_i , cuyos valores nominales son $S_{s,i}=69.5$ mg/l y $q_i=18446$ m³/d. Para el tratamiento de las restricciones asimétricas (5.71)-(5.72), es necesario tener en cuenta los dominios asimétricos de variación de las perturbaciones al igual que en 5.5.3. De esta forma, estas restricciones se implementan como en (4.35) con los términos de la respuesta impulsional de \mathbf{M}_0 . Trabajando con valores normalizados respecto al valor del máximo pico, se tiene que

$$\|\bar{S}_{s,i}\|_a \leq \mathbf{D}_1 \text{ donde } \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.461 \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

$$\|\bar{q}_i\|_a \leq \mathbf{D}_2 \text{ donde } \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.615 \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

Los pesos \mathbf{W}_p en los índices de controlabilidad son los siguientes, válidos para las dos salidas debido a la normalización del modelo interno en el MPC:

$$W_{p_{S_{s,i}}} = 8 \cdot \frac{s+20}{s+0.2} \quad W_{p_{q_i}} = 8 \cdot \frac{s+8}{s+1.6} \quad (5.77)$$

La región de incertidumbre elegida para imponer las condiciones de robustez se ha determinado variando un 1% los valores de q_a , $K_L a_5$, $S_{s,i}$ y q_i , de forma análoga a lo expuesto en 5.3.1.2 porque estos cambios implican variaciones típicas en el punto de operación del proceso.

Por último, indicar que las restricciones dinámicas en el MPC son las siguientes:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta q_a < 100000 \text{ m}^3 / d \\ 0 < \Delta K_L a_5 < 100000 \text{ d}^{-1} \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} 0 < q_a < 92230 \text{ m}^3 / d \\ 0 < K_L a_5 < 240 \text{ d}^{-1} \end{aligned} \quad (5.79)$$

5.6.2 Resultados

Los resultados de sintonía automática de controladores MPC aplicados al BSM1 se muestran en la Tabla 5.10. En concreto se muestran dos casos con pesos \mathbf{W}_{esf} diferentes, manteniendo el peso \mathbf{W}_p constante:

$$\text{Pesos 1: } W_{\text{esf}_{Ss,i}} = 5 \cdot \frac{0.33s + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad W_{\text{esf}_{qi}} = 3 \cdot \frac{0.33s + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad (5.80)$$

$$\text{Pesos 2: } W_{\text{esf}_{Ss,i}} = 8 \cdot \frac{0.33s + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad W_{\text{esf}_{qi}} = 10 \cdot \frac{0.33s + 4}{s + 4 \cdot 10^{-4}} \quad (5.81)$$

	Pesos 1	Pesos 2
Parámetros del MPC		
$\mathbf{R}(1,1)$	0.0200	0.3547
$\mathbf{R}(2,2)$	0.0206	0.0932
H_c	10	10
Medidas de controlabilidad		
$\max(S_{NO}(2))$ (mg/l)	5.607	5.666
$\max(S_O(5))$ (mg/l)	0.934	0.986
$\ \mathbf{N}_0\ _\infty$	1.976	6.446
$\ \bar{q}_a\ _a$	[9.96 8.49]	[9.93 8.45]
$\ \overline{K_L a_s}\ _a$	[4.77 4.40]	[4.75 4.37]
$\ \mathbf{W}_p \mathbf{S}_1 \mathbf{R}_{d1}\ _\infty$	0.112	0.995
PE (KWh/d)	485.65	434.12
EQ (Kg/d)	5385.86	5405.76

Tabla 5.10: Resultados de sintonía automática para la planta BSM1 (planta nº 2)

El valor de los pesos es el mismo para las dos entradas, debido a la normalización. El análisis de los resultados genera conclusiones análogas a las vistas en la sintonía automática con la planta nº 1. El MPC sintonizado con los pesos 1 rechaza mejor las perturbaciones que con los pesos 2, tanto para $S_O(5)$ como para $S_{NO}(2)$ porque los esfuerzos de control se penalizan menos con el peso \mathbf{W}_{esf} correspondiente. Se puede comprobar también que la condición de desempeño robusto se cumple en el peor vértice de la región de incertidumbre, como corresponde a la sintonía automática robusta.

5.7 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha desarrollado una metodología de sintonía automática de controladores MPC basada en normas H_∞ y l_1 de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado, así como un índice que considera señales acotadas de forma asimétrica.

En primer lugar se describe la metodología general, planteando un problema de optimización basado en un índice de sensibilidad mixta H_∞ con restricciones de

controlabilidad y de estabilidad y desempeño robustos. Se ha considerado incertidumbre poliédrica a partir de la variación de parámetros inciertos del proceso, describiendo las distintas posibilidades. Este tipo de incertidumbre ha permitido aplicar de forma sencilla las condiciones de robustez consideradas.

En segundo lugar, se presenta un problema de optimización alternativo para resolver la sintonía automática, consistente en la utilización de la norma l_1 como función objetivo de la optimización. Este planteamiento, que procede de la definición de medidas de rechazo a perturbaciones clásicas, permite también sintonizar controladores MPC con buen desempeño.

Dado que el problema de optimización generado incluye variables reales y enteras, se propone un algoritmo sencillo de optimización en dos pasos iterativos con buenos resultados. Además, para evitar problemas de infactibilidades, se ha propuesto un problema de optimización multiobjetivo muy similar al inicial, considerando algunas de las restricciones de controlabilidad como objetivos.

En los resultados se muestran diversos MPC sintonizados en distintas condiciones. Se han utilizado distintas regiones de incertidumbre mostrando en todos los casos las ventajas de incluir robustez, para distintos pesos en los índices de controlabilidad. También se ha incluido un índice que considera señales acotadas asimétricamente, muy apropiado para el proceso de fangos activados, que permite afinar con mayor precisión las condiciones impuestas. Respecto a la sintonía automática mediante la norma l_1 , se han utilizado distintos límites en la variable manipulada así como otros límites asimétricos.

Los controladores obtenidos demuestran siempre la existencia de una situación de compromiso entre el rechazo de las perturbaciones y los esfuerzos o magnitudes de la variable manipulada, por lo que las condiciones impuestas deberán ser elegidas dependiendo de las necesidades particulares.

Por último, se presentan resultados cuando el MPC se aplica al proceso de fangos activados del BSM1 en la planta nº 2. En este caso se considera como novedad un MPC multivariable para el control de nitrógeno y oxígeno disuelto, mostrando la posibilidad de extender la metodología propuesta a sistemas multivariables.

Capítulo 6

DISEÑO SIMULTÁNEO DE PROCESOS Y SISTEMAS DE CONTROL PREDICTIVO: APLICACIÓN AL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS

Resumen:

En este capítulo se presenta la metodología de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control predictivo propuesta, y se aplica al proceso de fangos activados en una planta de depuración de aguas residuales. En primer lugar se plantea el problema de optimización general incluyendo condiciones de robustez, para luego particularizarlo para el diseño del proceso de fangos activados. A continuación se detallan las diversas estrategias de optimización utilizadas para su resolución, que tienen en cuenta tanto los parámetros reales como los horizontes del controlador predictivo, que son valores enteros. Para motivar los resultados, se presentan primero dos casos de diseño secuencial y diseño basado en índices dinámicos, para pasar después a los resultados de la metodología para diversas condiciones, analizando las ventajas de introducir condiciones de robustez y utilizando distintos índices de controlabilidad. Los resultados finalizan con la aplicación al modelo de la plataforma de simulación BSM1 simplificada (planta n° 3).

6.1 METODOLOGÍA DE DISEÑO INTEGRADO

El diseño integrado o diseño simultáneo de procesos y sistemas de control determina los parámetros de la planta y del sistema de control de forma conjunta, haciendo que el sistema resultante sea más controlable, por medio de la resolución de un problema de optimización que tiene en cuenta los costes de construcción y operación junto con la controlabilidad de los procesos.

La metodología propuesta consiste en la secuencia de pasos que se describen a continuación y en la figura 6.1, teniendo en cuenta que se trata de un procedimiento iterativo, en el que se pueden revisar etapas anteriores si los resultados no son los adecuados:

a) Definición del problema de optimización:

- Selección de las variables de decisión en la optimización: parámetros físicos de la planta, parámetros de sintonía del controlador, concentraciones y caudales que determinan un punto de trabajo estacionario, variables binarias que determinan la estructura de la planta y el sistema de control.
- Definición de las funciones objetivo, que incluyen costes y controlabilidad incluyendo alguno de los índices propuestos en el capítulo 4. Selección de los pesos en dichos índices.

- Definición de las restricciones del problema, concretamente límites superiores e inferiores para las variables de decisión, restricciones de operación y restricciones sobre los índices de controlabilidad.

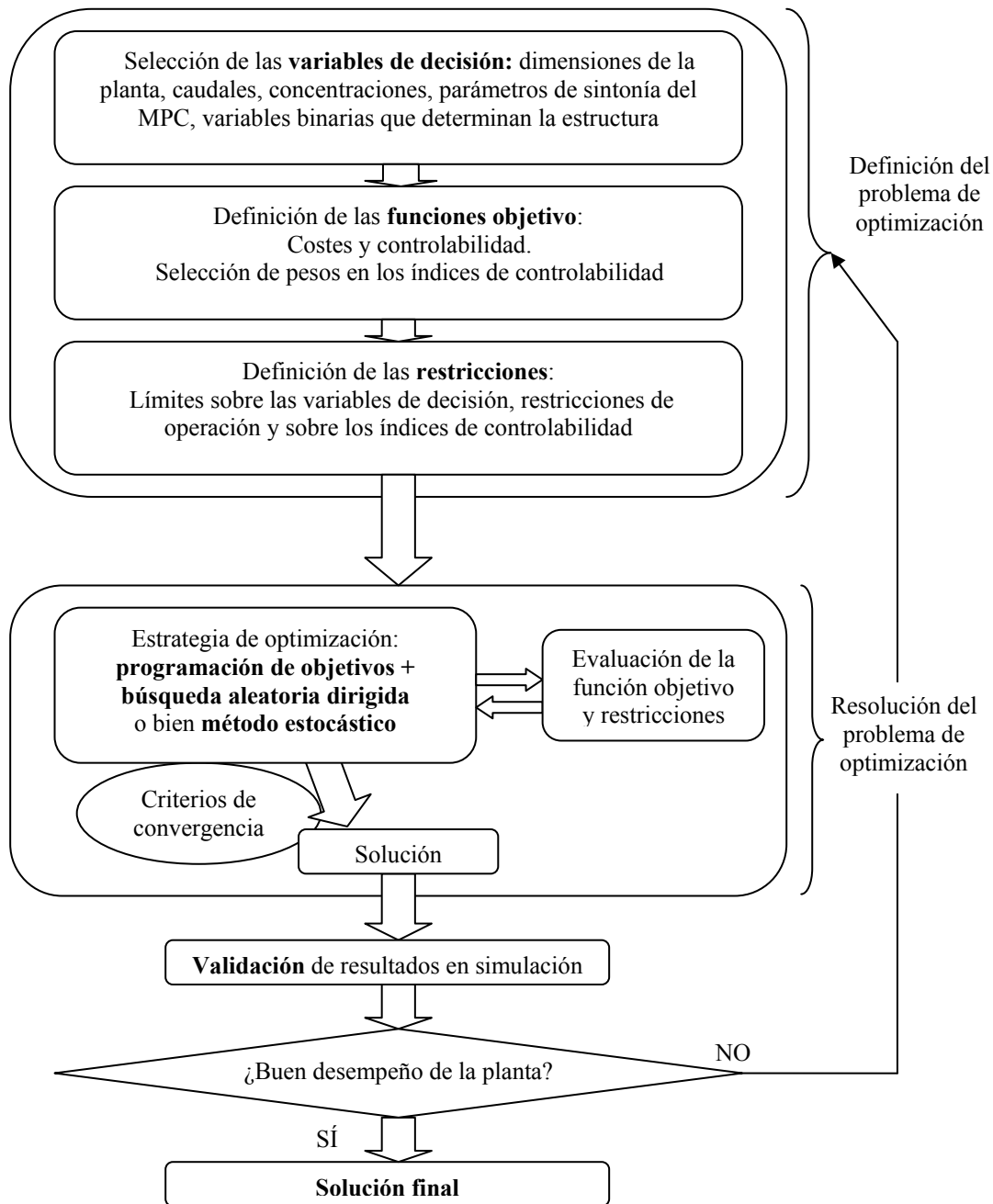


Figura 6.1: Diseño simultáneo de procesos y sistemas de control MPC

b) Resolución del problema de optimización:

- En la estrategia de optimización utilizada, se evalúan de forma sucesiva las funciones objetivo y las restricciones. En cada evaluación se realizan las siguientes tareas:

- Cálculo del modelo lineal del sistema en lazo cerrado, a partir del modelo de la planta y los parámetros de sintonía del MPC en la iteración actual.
 - Cálculo de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado a partir del modelo obtenido.
 - Cálculo de los índices de controlabilidad a partir de las funciones de sensibilidad, para obtener finalmente el valor de las funciones objetivo y de las restricciones.
- El algoritmo de optimización finaliza cuando se alcanzan ciertos criterios de convergencia sobre las variables de optimización, funciones objetivo y restricciones.
- e) Validación mediante simulaciones de la planta obtenida en lazo cerrado.

Si el desempeño de la planta es adecuado en cuanto a rechazo de perturbaciones con esfuerzos de control razonables, la planta diseñada es válida. En caso contrario, es necesario retornar al paso a) para reajustar el problema de optimización y repetir el algoritmo.

6.2 PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Dentro de la metodología general de diseño integrado presentada, el problema de optimización se puede expresar conceptualmente de la siguiente forma:

Minimizar (*coste económico*)

Sujeto a:

Ecuaciones diferenciales y algebraicas del modelo del proceso, restricciones físicas y de operación, ecuaciones del sistema de control, restricciones de controlabilidad.

Matemáticamente, el problema se puede expresar de forma genérica como un problema de optimización MINLP, incluyendo consideraciones económicas y de control (Sakizlis *et al.*, 2004)

$$\min_{\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}} \mathbf{J}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}) \quad (6.1)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}(t)) &= 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}(t)) &= 0 \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta}(t)) &\leq 0 \\ \boldsymbol{\varphi}(\dot{\boldsymbol{\chi}}(t), \boldsymbol{\chi}(t), \boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{c}, \boldsymbol{\delta}) &= 0 \\ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\chi}(t), \boldsymbol{\xi}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{c}, \boldsymbol{\delta}) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde \mathbf{J} es la función objetivo, $\mathbf{x}(t)$ representa las variables de estado diferenciales, $\mathbf{z}(t)$ son las variables algebraicas, $\mathbf{u}(t)$ son las variables de control, \mathbf{p} son las variables de diseño del proceso invariantes en el tiempo, \mathbf{c} son los parámetros de sintonía del controlador, δ son las variables binarias que definen la estructura del proceso y del sistema de control, $\theta(t)$ es el vector de parámetros inciertos, \mathbf{f} representa las ecuaciones diferenciales del proceso (modelo matemático), \mathbf{h} son las restricciones de igualdad, \mathbf{g} son las restricciones de desigualdad (restricciones físicas, de proceso, de controlabilidad, etc.), ϕ son las ecuaciones diferenciales del controlador, η son las ecuaciones algebraicas del controlador, χ son las variables diferenciales del controlador, ξ son las variables algebraicas del controlador.

Esta es la formulación general del problema de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control. Dependiendo del alcance del problema, la forma de evaluar la controlabilidad y la estrategia de control utilizada, entre otros aspectos, se puede tratar como un problema de optimización dinámica (MIDO) o no, y puede ser planteado simplemente un problema de optimización no lineal (NLP) o un problema de optimización mixta-entera (MINLP). El resultado de la optimización es una planta que satisface el mejor compromiso entre economía y controlabilidad.

El problema (6.1)-(6.2) se puede plantear también de forma natural como un problema de optimización multiobjetivo, puesto que se deben tener en cuenta simultáneamente costes de inversión, de operación y controlabilidad, entre otros aspectos. En este caso la función objetivo queda definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{J} = (f_1, \dots, f_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

donde n es el número total de objetivos y f_i son las distintas funciones objetivo.

Puesto que en este capítulo se considera una estructura de planta fija, las variables binarias δ quedan ya determinadas, y la solución del problema de diseño integrado del proceso y su sistema de control proporcionará únicamente los parámetros de diseño óptimos (\mathbf{p}), los parámetros de sintonía del controlador (\mathbf{c}), y un estado estacionario de trabajo (\mathbf{x}_0) junto con todas las variables algebraicas relacionadas.

Aunque en la metodología propuesta la dinámica se introduce a través de las funciones de transferencia del sistema, la función objetivo no depende explícitamente del tiempo porque no se utilizan simulaciones para analizar la controlabilidad.

6.3 DISEÑO INTEGRADO ROBUSTO

A la hora de diseñar un sistema de control, es importante considerar aspectos de robustez, de forma que el sistema de control sea insensible a diferencias entre el proceso real y el modelo que se utiliza para diseñar el controlador. Para ello es necesario definir ciertas regiones de incertidumbre en torno al punto de operación nominal, de la misma forma que en la sintonía automática de MPC, para asegurar las condiciones de estabilidad y desempeño robusto.

En este trabajo se considera incertidumbre poliédrica, delimitada en sus vértices por modelos locales linealizados. El procedimiento es el mismo que ya se presentó para la

sintonía automática (ver punto 5.3.1.2), por lo que aquí únicamente se retoman las condiciones finales de desempeño (5.31) y estabilidad robusta (5.14) respectivamente:

$$\|W_p \cdot S_i \cdot R_{d_i}\|_{\infty} < 1 \quad i \in \{0,1,2\} \tag{6.4}$$

$$\|\Delta \cdot S_0 \cdot R_{d0}\|_{\infty} < 1 \tag{6.5}$$

donde S_i y R_{d_i} son las funciones de sensibilidad para los vértices de la región de incertidumbre y el modelo nominal, Δ son las funciones de incertidumbre y W_p es el peso elegido para el índice de desempeño.

En cada evaluación de las restricciones dentro de la estrategia de optimización utilizada para resolver el problema de diseño integrado robusto, se llevan a cabo los pasos descritos a continuación (figura 6.2):

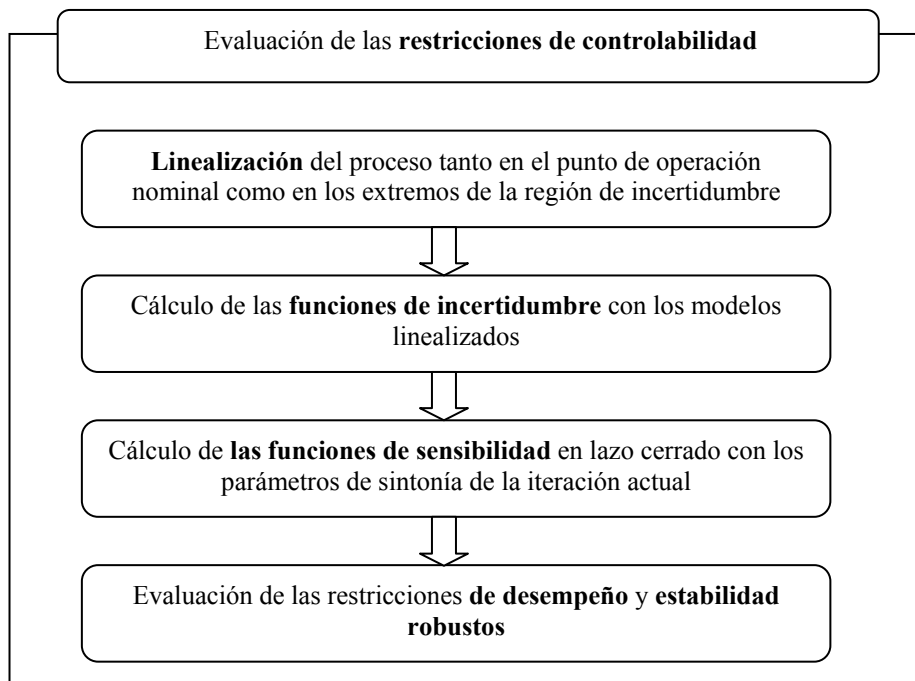


Figura 6.2: Evaluación de las restricciones de controlabilidad para diseño integrado robusto

- a) Linealización del proceso tanto en el punto nominal como en los vértices que definen la región de incertidumbre en la iteración actual, con el fin de calcular las funciones de transferencia en lazo abierto del sistema $G(s)$ y $G_d(s)$ para cada modelo local.
- b) Cálculo de las funciones de incertidumbre Δ según (5.9) utilizando los modelos lineales obtenidos en el paso a).
- c) Cálculo de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado con los valores de los parámetros del controlador en la iteración actual.
- d) Evaluación de la restricción (6.4) para desempeño robusto en cada vértice de la región de incertidumbre y el punto nominal.

- e) Evaluación de la condición de estabilidad robusta (6.5) sobre el modelo nominal en esa iteración. A diferencia de lo que ocurre en la sintonía automática del MPC, aquí es necesario comprobar esta condición en cada iteración puesto que la planta cambia durante la optimización, y no se puede asegurar a priori que el peso \mathbf{W}_p impuesto para desempeño sea más estricto que cualquier límite que imponga la incertidumbre.

Una diferencia importante con la metodología aplicada en el problema de sintonía automática, es que como en aquel caso la planta era fija y únicamente se optimizaban los parámetros de sintonía del controlador, la obtención del modelo linealizado del sistema se realizaba fuera del algoritmo de optimización, mientras que aquí la planta va cambiando con la optimización, y junto a ella también cambia la región de incertidumbre.

6.4 ESTRATEGIAS DE OPTIMIZACIÓN

Como ya se indicó en el capítulo anterior, debido a la necesidad de optimizar parámetros reales (dimensiones y punto de operación de la planta, pesos del controlador) y parámetros enteros (horizontes), se proponen aquí estrategias sencillas similares a las propuestas para la sintonía automática que proporcionan buenos resultados. En concreto se proponen las dos estrategias que se describen a continuación.

Estrategia 1: Optimización en dos pasos iterativos de todas las variables reales y de los horizontes

Esta estrategia divide el problema de optimización (6.1)-(6.2) en dos pasos iterativos, de forma que en el primer paso se optimizan las variables reales del problema (dimensionado de la planta, punto de trabajo estacionario y peso R del controlador) mediante el método de la programación de objetivos y en un segundo paso se ajustan los horizontes H_p y H_c mediante una búsqueda aleatoria dirigida (apéndice II), repitiéndose esta secuencia hasta que se cumpla la condición de convergencia (figura 6.3).

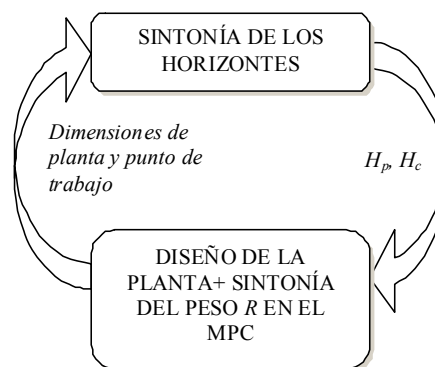


Figura 6.3: Estrategia 1 de optimización en dos pasos

Estrategia 2: Optimización en dos pasos iterativos de las variables de la planta y del controlador

Esta estrategia optimiza también en dos pasos iterativos pero separando por un lado los parámetros de sintonía del MPC (peso R y horizontes) y por otro las variables de la planta. Por lo tanto, en el primer paso se sintoniza el controlador aplicando algún

método como por ejemplo el propuesto en el capítulo 5, manteniendo fijas las características de la planta, y en el segundo paso se diseña ésta manteniendo fijo el controlador (figura 6.4), utilizando el método de programación de objetivos. Este procedimiento iterativo se lleva a cabo hasta que se alcanzan ciertos criterios de convergencia sobre la función objetivo, las restricciones, y las variables de optimización.

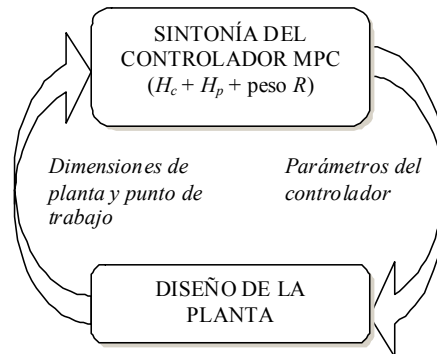


Figura 6.4: Estrategia 2 de optimización, separando la sintonía del MPC

Consideraciones de implementación

El problema de optimización multiobjetivo que genera el diseño integrado es un problema complejo debido en gran parte al elevado número de restricciones que posee, muchas de ellas no lineales, generando una región factible muy pequeña y provocando que los métodos basados en el gradiente proporcionen a veces soluciones subóptimas. Este hecho, unido al incremento de las dimensiones del dominio de búsqueda en la *estrategia 1* al considerar también el peso R de forma conjunta con los parámetros de la planta, justifica en algunos casos la utilización de la *estrategia 2* con el fin de mejorar la convergencia. Otra ventaja de la *estrategia 2* es que dado que el problema de sintonía del MPC se resuelve de forma independiente, permite utilizar para ello otros métodos diferentes a los propuestos en esta tesis, sin alterar la metodología de diseño integrado.

El criterio seguido en esta tesis para la elección de la estrategia de optimización es empírico, seleccionando la que proporcione una solución de mejor calidad. Para el diseño integrado del proceso de fangos activados se ha observado que las estrategias de optimización en dos pasos son válidas puesto que convergen en pocas iteraciones a un valor constante, aún en las que se generan bucles anidados.

Para resolver los problemas de optimización multiobjetivo generados, se puede utilizar la aproximación consistente en considerar ciertos objetivos como restricciones al igual que se planteó en 5.3.2. para la sintonía automática.

6.5 DISEÑO SIMULTÁNEO DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS Y CONTROLADOR MPC

Como ejemplo de aplicación de las técnicas de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control se ha considerado el diseño integrado del proceso de fangos activados con control MPC dentro de una planta de tratamiento de aguas residuales. Es

interesante aplicar el diseño integrado a este proceso debido a que las fuertes perturbaciones a las que se encuentra sometido dificultan su control y su atenuación mejora si se consideran en la etapa de diseño. El modelo matemático y estructura de la planta utilizada se describen en el capítulo 2, y la formulación del MPC elegida incluye un término de penalización terminal como se describe en el capítulo 3.

El planteamiento general del problema de diseño consiste en que para un punto de operación fijado por las características del influente (caudal de agua a tratar q_i , y concentraciones de sustrato s_i y biomasa x_i presentes), se trata de obtener una planta óptima en cuanto a costes de construcción y operación, así como un punto de operación estacionario y un controlador MPC óptimo, todo ello satisfaciendo los requerimientos de controlabilidad impuestos sobre el proceso.

En este trabajo se resolverá el problema de diseño integrado considerando los índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema que se definieron en el capítulo 4, de la misma forma que en la sintonía automática.

6.5.1 Definición del problema de optimización para la planta nº 1 con eliminación de sustrato

Funciones objetivo

El problema de diseño integrado del proceso de fangos activados se plantea como un problema de optimización multiobjetivo incluyendo costes y controlabilidad. La función objetivo J se puede expresar así:

$$J = (f_1, f_2) \quad (6.6)$$

donde f_1 representa los costes de construcción y operación como una función cuadrática de las dimensiones de la planta y la energía consumida por las bombas respectivamente, mientras que f_2 representa la controlabilidad del proceso mediante el índice de sensibilidad mixta (4.39).

En concreto para la planta nº 1 el problema de optimización queda definido de la forma siguiente:

$$\min_{\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}} \{f_1, f_2\} \quad (6.7)$$

$$f_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \alpha_1 \cdot \hat{V}_1^2 + \alpha_2 \cdot \hat{A}^2 + \alpha_3 \cdot \hat{q}_2^2 \quad (6.8)$$

$$f_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{N}_0\|_\infty \quad \text{con} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0} \\ \mathbf{W}_{\text{esf}} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

donde

\hat{V}_1 : volumen normalizado del reactor biológico.

\hat{A} : área transversal normalizada del decantador secundario.

\hat{q}_2 : caudal total de recirculación normalizado.

$\mathbf{p} = (V_1, A)$: variables de diseño del proceso invariantes en el tiempo.

$\mathbf{x} = (s_1, x_1, c_1, x_d, x_b, x_r)$: vector de estados.

$\mathbf{z} = (q_r, q_p)$: variables algebraicas.

$\mathbf{c} = (R, H_c)$: parámetros de sintonía del MPC.

α_i : pesos en la función f_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$.

Las variables de decisión en la optimización son las concentraciones de sustrato s_1 , biomasa x_1 y oxígeno c_1 en el reactor biológico, las concentraciones de biomasa x_d , x_b y x_r en las distintas capas del decantador secundario, el caudal de recirculación de fangos al reactor q_r , el caudal de purga q_p , el volumen del reactor V_1 y el área del decantador A y los parámetros de sintonía del controlador predictivo R y H_c . El punto de operación estacionario queda definido por las concentraciones, caudales y factor de aireación, junto con las dimensiones de la planta. Se considera que el nivel medio de s_i , q_i y x_i en el influente no varía.

En este problema todas las concentraciones de compuestos son variables de decisión en el diseño integrado, aunque una posibilidad alternativa consiste en fijar la concentración de alguna de las variables, por ejemplo s_1 , y optimizar el resto, puesto que de esta forma si se fija por ejemplo un valor estacionario de s_1 bajo se puede conseguir que su máximo pico tenga un valor menor.

El vector de objetivos, o valores deseados para el problema (6.7) se define de la forma siguiente:

$$\mathbf{f} = (f_1^* \quad f_2^*) \quad (6.10)$$

donde f_1^* se fija con un valor pequeño, puesto que uno de las metas del diseño integrado es minimizar los costes, y f_2^* también debe ser muy pequeño porque se busca minimizar el valor de $\|\mathbf{N}_0\|_\infty$ para mejorar la controlabilidad.

Los pesos α_1 y α_2 indican la importancia proporcionada a los costes de construcción representados por el volumen del reactor y el área del decantador, mientras que el peso α_3 , indican la importancia de los costes de operación representados por el caudal total de fangos recirculados (costes de bombeo). Puesto que f_i no representa costes reales sino un índice proporcional a éstos, su valor es adimensional. Dado que las variables están normalizadas, todos los pesos son comparables entre sí sin necesidad de efectuar ninguna conversión. Los pesos \mathbf{W}_p y \mathbf{W}_{est} se han de elegir siguiendo los criterios que ya se expusieron en el capítulo de sintonía automática.

La función f_2 que representa la controlabilidad podría incluir cualquiera de los índices utilizados para sintonía automática del MPC, puesto que son índices de desempeño del sistema en lazo cerrado en los que las características de la planta tienen también su influencia. En cualquier caso, se trataría de plantear problemas donde todos los aspectos del desempeño del sistema, es decir el rechazo a perturbaciones, magnitudes del control y magnitudes de los cambios del control, estén considerados sin redundancias.

Restricciones de operación

Para un adecuado funcionamiento del proceso de fangos activados se imponen las siguientes restricciones de operación, junto con ciertos límites físicos razonables para las variables de decisión.

- Restricciones físicas para las variables de decisión en la optimización:

$$\mathbf{l}_b \leq (\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{c}) \leq \mathbf{u}_b \quad (6.11)$$

donde \mathbf{l}_b y \mathbf{u}_b son los vectores de límites inferiores y superiores respectivamente y el vector de variables de decisión es:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{c}) = (s_1, x_1, c_1, x_d, x_b, x_r, q_r, q_p, V_1, A, R, H_c) \quad (6.12)$$

- Tiempo de retención hidráulico en el reactor, acotado por ret_d y ret_u :

$$ret_d \leq \frac{V_1}{q} \leq ret_u \quad (6.13)$$

- Carga másica en el reactor, acotada por ml_d y ml_u :

$$ml_d \leq \frac{q_i \cdot s_i + q_r \cdot s_1}{V_1 \cdot x_1} \leq ml_u \quad (6.14)$$

- Capacidad hidráulica del decantador limitada por ch :

$$\frac{q}{A} \leq ch \quad (6.15)$$

- Edad de fangos acotada por sa_d y sa_u :

$$sa_d \leq \frac{V_1 \cdot x_1 + A \cdot l_r \cdot x_r}{q_p \cdot x_r \cdot 24} \leq sa_u \quad (6.16)$$

- Relación entre el caudal de entrada y el caudal de recirculación acotada por rec_d y rec_u , y relación entre el caudal de recirculación y el caudal de purga acotada por pg_d y pg_u :

$$rec_d \leq \frac{q_2}{q_i} \leq rec_u \quad (6.17)$$

$$pg_d \leq \frac{q_p}{q_2} \leq pg_u \quad (6.18)$$

- Restricciones sobre las ecuaciones diferenciales del proceso que garantizan un punto inicial de operación en estado estacionario y posibilitan el cálculo de los modelos linealizados que proporcionan las funciones de sensibilidad del sistema:

$$\left| \frac{dx_1}{dt} \right| = \left| \mu_{\max} y \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} - K_d \frac{x_1^2}{s_1} - K_c x_1 + \frac{q}{V_1} (x_{ir} - x_1) \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| \frac{ds_1}{dt} \right| = \left| -\mu_{\max} \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} + f_{kd} K_d \frac{x_1^2}{s_1} + f_{kd} K_c x_1 + \frac{q}{V_1} (s_{ir} - s_1) \right| \leq \varepsilon \quad (6.19)$$

$$\left| \frac{dc_1}{dt} \right| = \left| K_{la} f_k (c_s - c_1) - K_{01} \mu_{\max} \frac{x_1^2}{(K_s + s)} - \frac{q}{V_1} c_1 \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| A \cdot l_d \frac{dx_d}{dt} \right| = \left| q_{sal} x_b - q_{sal} x_d - A \cdot v_s (x_d) \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| A \cdot l_b \frac{dx_b}{dt} \right| = \left| q x_1 - q_{sal} x_b - q_2 x_b + A \cdot v_s (x_d) - A \cdot v_s (x_b) \right| \leq \varepsilon \quad (6.20)$$

$$\left| A \cdot l_r \frac{dx_r}{dt} \right| = \left| q_2 x_b - q_2 x_r + A \cdot v_s (x_b) \right| \leq \varepsilon$$

donde ε es un número real positivo próximo a cero.

Restricciones de controlabilidad

Para imponer desempeño robusto en cuanto a rechazo de perturbaciones, se incluye la siguiente restricción sobre los vértices de la región de incertidumbre:

$$\left\| \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{R}_d \right\|_{\infty} < 1 \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (6.21)$$

donde \mathbf{S}_i y \mathbf{R}_d son las funciones de sensibilidad para cada modelo local.

Se incluyen también las restricciones (4.45) o (4.46) para limitar el máximo de la variable de control o de la salida, para el peor caso de las perturbaciones:

$$\left\| \mathbf{M}_0 \right\|_1 < u_{\max} \quad (6.22)$$

o bien

$$\left\| \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0} \right\|_1 < y_{\max} \quad (6.23)$$

donde u_{\max} e y_{\max} son las correspondientes cotas impuestas para la variable manipulada y la salida, respectivamente.

Por último, se deben incluir las condiciones adecuadas para que la ecuación de Riccati utilizada para calcular la penalización terminal del MPC tenga solución.

6.5.2 Definición del problema de optimización para la planta nº 3 con eliminación de nitrógeno

A continuación se define el mismo problema de diseño integrado para la planta nº 3. El problema de optimización multiobjetivo queda definido en este caso con las siguientes

funciones objetivo que representan los costes y la controlabilidad:

$$f_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \alpha_1 \cdot V_{nit,n}^2 + \alpha_1 \cdot V_{dnit,n}^2 + \alpha_2 \cdot V_{dec,n}^2 + \alpha_3 \cdot (q_a + q_r + q_p)^2 \quad (6.24)$$

$$f_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|N\|_\infty \quad (6.25)$$

donde

$V_{nit,n}$, $V_{dnit,n}$ y $V_{dec,n}$: volúmenes de los reactores y el decantador normalizados.

$q_a + q_r + q_p$: caudal de recirculación total.

$\mathbf{p} = (V_{nit}, V_{dnit}, V_{dec})$: vector de variables de diseño invariantes con el tiempo.

$\mathbf{x} = (X_{A,nit}, X_{H,nit}, S_{S,nit}, S_{NH,nit}, S_{NO,nit}, X_{A,dnit}, X_{H,dnit}, S_{S,dnit}, S_{NH,dnit}, S_{NO,dnit}, S_{O,nit}, X_{rec})$:

vector de estados.

$\mathbf{z} = (q_a, q_r, q_p)$: variables algebraicas.

$\mathbf{c} = (R, H_c)$: parámetros de sintonía del MPC.

α_i : pesos en la función f_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$.

Al igual que para la planta nº 1, el problema de optimización se completa con una serie de restricciones de límites para todas las variables, así como las siguientes restricciones de proceso:

- Tiempo de retención hidráulico en los reactores acotado por ret_d y ret_u :

$$ret_d \leq \frac{V_{dnit}}{q_i + q_a + q_r} \leq ret_u \quad (6.26)$$

$$ret_d \leq \frac{V_{nit}}{q_i + q_a + q_r} \leq ret_u \quad (6.27)$$

- Carga másica en los reactores, acotada por ml_d y ml_u :

$$ml_d \leq \frac{q_i S_{s,i} + q_a S_{s,nit} + q_r S_{s,nit}}{V_{dnit} \cdot X_{H,dnit}} \leq ml_u \quad (6.28)$$

$$ml_d \leq \frac{(q_i + q_a + q_r) \cdot S_{s,dnit}}{V_{nit} \cdot X_{H,nit}} \leq ml_u \quad (6.29)$$

- Capacidad hidráulica del decantador limitada por ch :

$$\frac{q_i + q_a + q_r}{V_{dec}} \leq ch \quad (6.30)$$

- Edad de fangos acotada por sa_d y sa_u :

$$sa_d \leq \frac{V_{dnit} \cdot (X_{A,dnit} + X_{H,dnit}) + V_{nit} \cdot (X_{A,nit} + X_{H,nit}) + V_{dec} X_{rec}}{q_p \cdot X_{rec}} \leq sa_u \quad (6.31)$$

- Relación entre el caudal de entrada y el caudal de recirculación externo acotada por rec_d y rec_u , y relación entre el caudal de recirculación externo y el caudal de purga acotada por pg_d y pg_u :

$$rec_d \leq \frac{q_r + q_p}{q_i} \leq rec_u \quad (6.32)$$

$$pg_d \leq \frac{q_p}{q_r + q_p} \leq pg_u \quad (6.33)$$

- Restricciones sobre las ecuaciones diferenciales del proceso para obtener una solución próxima a un estado estacionario.
- Restricción de desempeño robusto para rechazo a perturbaciones:

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{R}_d\|_{\infty} < 1 \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (6.34)$$

donde \mathbf{S}_i y \mathbf{R}_d son las funciones de sensibilidad para cada modelo local.

- Restricción para limitar el máximo de la variable de control:

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 < u_{\max} \quad (6.35)$$

6.6 RESULTADOS DE DISEÑO SIMULTÁNEO DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS Y CONTROL MPC

Tras plantear de forma general el problema de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control predictivo para el proceso de fangos activados, en esta sección se fijan los parámetros concretos para resolver el problema y se presentan resultados para distintos casos. El diseñador tiene la posibilidad de elegir el caso que más convenga a sus intereses, cambiando por ejemplo los pesos del problema multiobjetivo para dar más importancia a los costes o a la controlabilidad, los pesos en los índices de controlabilidad, los valores de las restricciones, los índices de desempeño, o las características de robustez del controlador.

En los apartados siguientes se definen los valores numéricos de los parámetros del problema de optimización que se mantendrán constantes en todos los resultados, y a partir de ahí los resultados se estructuran en distintos bloques, comenzando como introducción motivadora por un caso de diseño secuencial y otro de diseño integrado con índices dinámicos. A continuación se presentan los resultados principales de la metodología de diseño integrado, y después se hace un breve estudio de la influencia de los pesos en los índices de controlabilidad. Finalmente se realiza un estudio del frente de Pareto para un caso concreto, y se presentan resultados adicionales variando los índices de controlabilidad utilizados. Los resultados se amplían con la aplicación de la metodología al proceso de fangos activados con eliminación de nitrógeno. Con la finalidad de clarificar la organización en la Tabla 6.1 se presenta un esquema.

6.6.1 Parámetros del problema de optimización

En esta sección se fijan los valores numéricos de los parámetros de la optimización para el problema de diseño integrado de la planta nº 1, que se mantienen invariables para todos los resultados obtenidos salvo que se indique lo contrario. La formulación del MPC utilizada incluye penalización terminal, por lo que el único horizonte a sintonizar es H_c .

Funciones objetivo

Los pesos α_1 , α_2 , y α_3 de la función objetivo f_I , se fijan a 1 proporcionando así el mismo coste al reactor, al decantador y a la energía de bombeo.

El vector de pesos w en el método de la programación de objetivos, se define de la siguiente manera con el fin de dar la misma importancia a cada uno de los objetivos:

$$w = \begin{pmatrix} -f_1^* & -f_2^* \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Sección 6.6 RESULTADOS	
Definición de los parámetros fijos del problema de optimización	6.6.1
Definición de las regiones de incertidumbre para robustez	6.6.2
RESULTADOS PREVIOS	
Resultados de diseño secuencial versus diseño integrado	6.6.3
Resultados de diseño integrado con índices dinámicos (<i>ISE</i>)	6.6.4
RESULTADOS DE DISEÑO INTEGRADO UTILIZANDO ÍNDICES BASADOS EN NORMAS	
Resultados de diseño integrado robusto	6.6.5
Influencia de los pesos en los índices de controlabilidad	6.6.6
Análisis de Pareto del problema multiobjetivo	6.6.7
Resultados con diferentes índices de controlabilidad	6.6.8
Resultados de diseño integrado del proceso de fangos activados con eliminación de materia orgánica y nitrógeno	6.7

Tabla 6.1: Esquema resumen de resultados de diseño integrado

Restricciones:

Los límites superiores e inferiores de las variables de decisión del problema de optimización se han elegido también según los criterios del capítulo 2 para mejorar la controlabilidad del proceso, y se presentan en la Tabla 6.2.

$$\begin{aligned} 0.001 < R < 1 \\ 8 < H_c < 15 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Los valores numéricos para las cotas de las restricciones de operación (6.13) a (6.18) se presentan en la Tabla 6.3, con ciertas modificaciones para mejorar la controlabilidad de las plantas obtenidas, según se obtuvo en el capítulo 2.

Límites de las variables de decisión		
Variable	Límite inferior (\mathbf{l}_b)	Límite superior (\mathbf{u}_b)
s_l (mg/l)	35	100
x_l (mg/l)	400	3000
c_l (mg/l)	2	8
x_d (mg/l)	8	300
x_b (mg/l)	100	3000
x_r (mg/l)	1000	10000
q_r (m ³ /h)	150	600
q_p (m ³ /h)	20	40
V_l (m ³)	800	10000
A (m ²)	800	10000
R	0.001	1
H_c	8	15

Tabla 6.2: Límites de las variables de decisión

Restricciones de operación					
$ret_d=2.5$ h	$ml_d=0.001$	$sa_d=2$ d	$rec_d=0.05$	$pg_d=0.03$	$ch=0.7$ m/h
$ret_u=8$ h	$ml_u=0.1$	$sa_u=10$ d	$rec_u=0.9$	$pg_u=0.3$	

Tabla 6.3: Límites para las restricciones de proceso.

Respecto a las restricciones (6.19)-(6.20), la tolerancia que determina el cumplimiento de las ecuaciones diferenciales del modelo en estado estacionario se ha fijado en $\epsilon=0.00001$, ya que valores inferiores pueden producir infactibilidades en el problema de optimización.

En cuanto a las restricciones de controlabilidad, se incluye siempre la restricción (6.22) sobre las magnitudes de la variable de control con $u_{max}=3500$ m³/h:

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 < 3500 \tag{6.38}$$

Pesos en los índices de controlabilidad:

En cuanto a los pesos que aparecen en los índices de controlabilidad, se han seleccionado los siguientes:

$$W_{p_{si}} = \frac{7 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{s}{M_p} + w_{B1} \right)}{s + w_{B1} \cdot A_p} \quad W_{p_{qi}} = \frac{0.02 \cdot \left(\frac{s}{M_p} + w_{B2} \right)}{s + w_{B2} \cdot A_p} \tag{6.39}$$

donde $w_{B1}=2500$, $w_{B2}=2000$, $A_p=10^{-4}$, $M_p=10^{-3}$

$$W_{esf_{si}} = \frac{0.0175 \cdot \left(\frac{s}{M_{esf}} + w_{B3} \right)}{s + w_{B3} \cdot A_{esf}} \quad W_{esf_{qi}} = \frac{0.0525 \cdot \left(\frac{s}{M_{esf}} + w_{B4} \right)}{s + w_{B4} \cdot A_{esf}} \quad (6.40)$$

donde $w_{B3}=4$, $w_{B4}=4$, $A_{esf}=10^{-4}$, $M_{esf}=3$

Otras consideraciones:

En las simulaciones realizadas para la validación de los resultados de diseño integrado se ha utilizado un MPC con restricciones, donde el valor de las restricciones dinámicas que incluye está en la Tabla 6.4. Estas restricciones no se incluyen directamente en el diseño integrado sino a través de las cotas de los índices de controlabilidad, como ya se indicó en el capítulo 5.

Restricciones dinámicas del MPC			
$s_{1d}=20$ mg/l	$x_{1d}=400$ mg/l	$q_{rd}=0$ m ³ /h	$\Delta q_{rc}=0$ m ³ /h
$s_{1u}=150$ mg/l	$x_{1u}=3000$ mg/l	$q_{ru}=3500$ m ³ /h	$\Delta q_{ru}=1000$ m ³ /h

Tabla 6.4: Restricciones dinámicas del MPC con restricciones

Los valores medios del influente de la planta son $q_i=1150$ m³/h y $s_i=340$ mg/l. Los perfiles dinámicos de las perturbaciones se toman de la plataforma de simulación BSM1.

Por último, indicar que para la mayoría de los resultados, la sintonía del horizonte de control se ha realizado de antemano para reducir la carga computacional y además su efecto sobre la controlabilidad del sistema es pequeño. Si no se indica lo contrario, el H_c se mantiene constante con un valor de $H_c=10$.

Consideraciones sobre la optimización

Respecto a la implementación del problema multiobjetivo (6.6) en la *estrategia 2*, en principio parece lógico que en cada uno de los pasos se incluyan todos los objetivos y restricciones propuestos, aunque para disminuir la carga computacional, en cada paso se ha incluido únicamente aquella función objetivo sobre la que las variables de decisión correspondientes tienen mayor influencia. Es decir, f_1 sólo se considera en el paso de diseño de la planta puesto que la influencia de los parámetros del MPC sobre ella es nula, y f_2 sólo se ha incluido en el paso de sintonía del MPC porque son sus parámetros los que más afectan a su valor, aunque este índice es susceptible de encontrarse en ambos pasos. Análogamente, en el paso de sintonía de H_c de la *estrategia 1*, la función objetivo f_1 no se considera.

Respecto a la convergencia de las estrategias de optimización propuestas, cuando se aplica el método de la programación de objetivos la convergencia está basada en tolerancias normalizadas de 10^{-5} para la función objetivo, variables de optimización, y

restricciones. Aunque la convergencia global no queda demostrada para un caso general excepto para la *estrategia 1* prefijando el H_c , se ha comprobado que para el diseño de este proceso son necesarias únicamente 4 iteraciones globales para alcanzar tolerancias de convergencia de 10^{-3} en la función objetivo y las variables de optimización.

Para evitar el problema de los posibles mínimos locales en la optimización, los resultados se han obtenido utilizando diferentes puntos iniciales y eligiendo los mejores en base al valor de las funciones objetivo y el cumplimiento de las restricciones.

6.6.2 Región de incertidumbre para el diseño integrado robusto

En el diseño integrado robusto es necesario determinar una región de incertidumbre que al igual que en la sintonía automática, se considera de tipo poliédrico delimitada por modelos lineales localizados en sus vértices. Los criterios utilizados para definir esta región de incertidumbre son análogos a los utilizados en la sintonía y se retoman a continuación particularizados para este problema. Las novedades incluidas en este caso son la consideración simultánea de distintos factores de incertidumbre, y la inclusión de incertidumbre en el peso R del controlador MPC.

- *CASO 1:*

La primera región de incertidumbre utilizada viene determinada por variaciones en s_I (figura 5.5). Concretamente, en la expresión general (5.15) se ha fijado el siguiente tamaño de la región de incertidumbre:

$$\delta_{s_I} = 10 \text{ mg / l} \quad (6.41)$$

- *CASO 2:*

La segunda región de incertidumbre considerada viene determinada por variaciones en las características del influente. En este caso es necesario modificar tanto s_i como q_i respecto al punto nominal, obteniéndose cuatro vértices de la región de incertidumbre (figura 5.6), aunque como ya se comentó, únicamente se consideran los dos extremos. En concreto se ha fijado el siguiente tamaño de la región de incertidumbre:

$$\begin{aligned} \delta_{s_i} &= 60 \text{ mg / l} \\ \delta_{q_i} &= 130 \text{ m}^3 / \text{h} \end{aligned} \quad (6.42)$$

- *CASO 3:*

La siguiente región de incertidumbre fijada tiene en cuenta variaciones de las dimensiones de la planta y del influente de forma simultánea con el fin de considerar un caso más realista. Ahora el número de vértices de la región de incertidumbre es elevado, pero únicamente se consideran los dos más extremos para imponer las condiciones de robustez. El vértice con peor controlabilidad es el que tiene menores dimensiones de planta y el influente con peores características, quedando definido por los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (V_1)_0 - 300 \text{ m}^3 \\
 A &= (A)_0 - 180 \text{ m}^2 \\
 s_i &= (s_i)_0 + 60 \text{ mg/l} \\
 q_i &= (q_i)_0 + 130 \text{ m}^3/\text{h}
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Por otro lado, el vértice opuesto de la región con la planta más sencilla de controlar sería el siguiente:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (V_1)_0 + 300 \text{ m}^3 \\
 A &= (A)_0 + 180 \text{ m}^2 \\
 s_i &= (s_i)_0 - 60 \text{ mg/l} \\
 q_i &= (q_i)_0 - 130 \text{ m}^3/\text{h}
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

- *CASO 4:*

La última región de incertidumbre considerada tiene en cuenta variaciones en s_I y en el peso R del controlador MPC. De esta forma, el controlador obtenido es robusto también a posibles variaciones en R , dando un margen de error a pequeñas resintonías futuras. En concreto, los valores del peso R en los vértices de la región de incertidumbre son:

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 + 0.0008 \\
 R &= R_0 - 0.0008
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

donde R_0 es el valor nominal del peso R .

6.6.3 Diseño secuencial versus diseño simultáneo de procesos y sistemas de control

Antes de comenzar el estudio de los resultados de diseño integrado, se presenta un resultado concreto de diseño secuencial para comparar ambas metodologías. El procedimiento de diseño secuencial de procesos consiste en obtener primero una planta sin considerar controlabilidad y a continuación obtener su sistema de control, planteando dos problemas de optimización independientes.

En primer lugar la planta se determina resolviendo el siguiente problema de optimización, sin incluir controlabilidad e únicamente minimizando costes de construcción y operación:

$$\min_{\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \alpha_1 \cdot \hat{V}_1^2 + \alpha_2 \cdot \hat{A}_n^2 + \alpha_3 \cdot \hat{q}_2^2 \tag{6.46}$$

sujeto a:

restricciones físicas, restricciones de operación, restricciones sobre las ecuaciones diferenciales ((6.11)-(6.23)).

En segundo lugar, una vez diseñada la planta, se añade un controlador MPC que se sintoniza mediante algún método específico. Para este ejemplo se ha utilizado el procedimiento descrito en el capítulo 5, que plantea el siguiente problema de optimización, ya utilizando restricciones de controlabilidad concretas:

$$\min_{\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}} f_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{N}\|_\infty \tag{6.47}$$

sujeto a:

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 < 1416 \tag{6.48}$$

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{R}_d\|_\infty < 1 \quad i \in \{0, 1, 2\} \tag{6.49}$$

En este ejemplo, el problema de optimización (6.47) resulta no factible, puesto que la planta diseñada resolviendo (6.46) sin tener en cuenta condiciones de controlabilidad (Tabla 6.5) no es capaz de cumplirlas a posteriori al añadir el MPC. En la Tabla 6.6 se comprueba de forma empírica este hecho observando que para tres pesos R elegidos manualmente, no es posible satisfacer a la vez las restricciones (6.48) y (6.49).

	Planta diseñada sin incluir condiciones de controlabilidad	Planta obtenida mediante diseño integrado con $\ \mathbf{M}_0\ _1 < 1416$
Coste y dimensiones de la planta		
Coste (f_i)	0.145	0.199
$(V_1)_0$ (m ³)	3693.2	4721.6
$(A)_0$ (m ²)	2253.2	1995.7
$(s_1)_0$ (mg/l)	99.740	97.836
$(q_r)_0$ (m ³ /h)	214.98	150.00

Tabla 6.5: Resultados de diseño clásico versus diseño integrado

En cambio, la planta obtenida mediante diseño integrado según la metodología propuesta sí cumple las restricciones (6.48) y (6.49) (Tabla 6.6), mostrándose así sus beneficios. Esta planta tiene un coste más elevado, lo cual es lógico si se desean cumplir unas condiciones de desempeño de rechazo a perturbaciones con magnitudes de control limitadas. Todos los resultados se presentan aquí para el punto de trabajo nominal.

6.6.4 Resultados preliminares de diseño integrado utilizando índices de desempeño dinámicos

El primer caso de diseño integrado se ha resuelto utilizando índices de controlabilidad dinámicos en contraposición a los índices basados en normas y se presenta como resultado preliminar. Concretamente se utilizan la integral del error cuadrático (ISE) y la energía de bombeo (PE) en el proceso de fangos activados. Aunque los resultados son buenos, el tiempo de cálculo es en general más elevado que en el diseño integrado mediante índices basados en normas. A pesar de que el diseño no se realiza en línea con el proceso, es importante reducir su tiempo de cálculo para poder obtener distintas

soluciones con diferentes criterios entre las cuales el diseñador pueda elegir convenientemente.

Las funciones objetivo del problema de optimización que se debe resolver en este caso son análogas a (6.8) y (6.9), pero sustituyendo el índice de sensibilidad mixta $\|\mathbf{N}_0\|_\infty$ por el *ISE* normalizado:

$$f_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \alpha_1 \cdot \hat{V}_1^2 + \alpha_2 \cdot \hat{A}^2 + \alpha_3 \cdot \hat{q}_2^2 \quad (6.50)$$

$$f_2(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{ISE}{ISE_m} \quad (6.51)$$

donde ISE_m es un parámetro de normalización que se corresponde con el valor del *ISE* cuando el proceso se encuentra en lazo abierto.

	Planta obtenida con diseño clásico y peso R fijado a posteriori manualmente			Planta obtenida con diseño integrado
Peso del MPC				
R	0.0083	0.0081	0.0079	0.0083
Índices de controlabilidad				
$\ \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\ _\infty$	1.009	0.994	0.979	0.905
$\ \mathbf{M}_0\ _1$	1410.0	1423.1	1443.1	1293.0
$\ \mathbf{N}_0\ _\infty$	1.453	1.448	1.444	1.310
$\max s_1 - s_{1ref} $ (mg/l)	14.050	14.052	14.054	10.009
$\max(s_1)$ (mg/l)	113.79	113.79	113.79	107.85
<i>ISE</i>	751.11	748.68	746.40	383.63

Tabla 6.6: Índices de controlabilidad y valores dinámicos para los resultados de diseño clásico e integrado

Las restricciones físicas y de proceso se mantienen como en el punto 6.5.1, excepto las restricciones de controlabilidad basadas en normas que se sustituyen por una restricción sobre la energía de bombeo *PE* para de limitar los costes de operación dinámicos. Para resolver el problema de optimización se utiliza la *estrategia 1* fijando $H_c=10$.

Los resultados numéricos aparecen en la Tabla 6.7 y Tabla 6.8, observándose un mejor rechazo de las perturbaciones según indica el *ISE* cuando *PE* se encuentra menos restringido. El valor de *PE* alcanza el límite impuesto por la restricción ya que la minimización del *ISE* se consigue con costes de bombeo lo más elevados posibles. También se presentan los valores de las normas de las funciones de sensibilidad, y se observa como en el segundo caso no se cumple la condición de desempeño para rechazo a perturbaciones $\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\|_\infty < 1$ debido a la restricción en *PE*.

Las simulaciones que de manera iterativa se realizan en la optimización son las causantes de que el tiempo de cálculo sea elevado, por lo que dada la periodicidad de las perturbaciones en este ejemplo se ha simulado y obtenido los índices de controlabilidad únicamente con $T_{max}=48$ h.

	$PE < 220$	$PE < 185$
Peso del MPC y dimensiones de la planta		
R	0.0068	0.0308
$(V_1)_0$ (m ³)	3873.9	4468.5
$(A)_0$ (m ²)	2397.4	2150.9
$(s_1)_0$ (mg/l)	100	100
$(q_r)_0$ (m ³ /h)	184.15	151.76

Tabla 6.7: Resultados de diseño integrado con índices dinámicos

	$PE < 220$	$PE < 185$
Coste e índices de controlabilidad		
Coste (f_i)	0.1475	0.1806
$\max s_1 - s_{1ref} $ (mg/l)	11.714	11.012
$\max q_r$ (m ³ /h)	539.17	500.46
ISE	284.84	361.15
PE	220	185
$\ W_p \cdot S_0 \cdot R_{d0}\ _\infty$	0.835	2.078
$\ M_0\ _1$	1481.4	706.4
$\ N_0\ _\infty$	0.907	2.090
Iteraciones totales	40	28
Tiempo calculo (s)	1002.3	453.7

Tabla 6.8: Índices de controlabilidad y valores dinámicos para los resultados de diseño integrado con índices dinámicos

6.6.5 Resultados de diseño integrado robusto

Parámetros del problema

En este apartado y siguientes se muestran ya resultados de diseño integrado utilizando índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema. En primer lugar se muestran algunos resultados de diseño integrado robusto indicando las ventajas de introducir la robustez, que se resumen en que el proceso rechaza adecuadamente las perturbaciones no sólo en el punto nominal de operación sino en una región en torno a dicho punto.

El vector de valores deseados para el problema de optimización multiobjetivo elegido en este apartado es el siguiente:

$$f = (f_1^* \quad f_2^*) = (0.1 \quad 0.7) \tag{6.52}$$

El peso \mathbf{W}_p se mantiene aquí con el valor definido en (6.39), mientras que el peso \mathbf{W}_{esf} se fija con el siguiente valor:

$$W_{esf_{si}} = \frac{0.058 \cdot s + 0.07}{s + 0.004} \quad (6.53)$$

$$W_{esf_{qi}} = 3 \cdot W_{esf_{si}}$$

Como perturbaciones de entrada, se utilizan las perturbaciones BSM1 de tiempo tormentoso.

Análisis de los resultados

En la Tabla 6.9 y Tabla 6.10 se presentan los resultados de diseño integrado utilizando las distintas regiones de incertidumbre definidas en 6.6.2 para el punto nominal de operación. Para evaluar la robustez de los diseños, en la Tabla 6.11 se presentan los valores de los índices de controlabilidad para cada una de las plantas diseñadas en el vértice de la región de incertidumbre con peor controlabilidad, observándose que únicamente los resultados de diseño que incluyen robustez cumplen con la restricción de desempeño $\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d\|_\infty < 1$ en ese punto, implicando un adecuado rechazo de las perturbaciones en toda la región de incertidumbre. En el diseño integrado sin robustez, dado que no existe región de incertidumbre, se toma prestada del CASO 2 y se evalúa la planta en su vértice de peor controlabilidad. En este caso el controlador MPC es no factible, poniendo de manifiesto las ventajas de considerar condiciones de robustez en el diseño integrado.

	<i>Diseño sin robustez</i>	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4
Peso del MPC y dimensiones de la planta					
R	0.00699	0.00737	0.00647	0.00589	0.00430
$(V_1)_0$ (m ³)	3605.5	3628	3923	4743	4507.9
$(A)_0$ (m ²)	2452	2449.4	2445.5	2405.5	3338.3
Punto de operación estacionario					
$(s_1)_0$ (mg/l)	100	100	98.985	95.047	99.997
$(x_1)_0$ (mg/l)	1685.9	1675.4	1567.7	1358.6	1347.5
$(x_d)_0$ (mg/l)	49.024	48.609	43.662	36.402	18.279
$(x_b)_0$ (mg/l)	372.06	368.68	331.94	274.41	186.72
$(x_r)_0$ (mg/l)	9793.6	9818.4	10000	10000	10000
$(q_r)_0$ (m ³ /h)	208.17	205.78	183.95	151.34	150.00
$(q_p)_0$ (m ³ /h)	20.000	20.000	20.218	21.332	23.135

Tabla 6.9: Resultados de diseño integrado robusto en el punto de operación nominal

Adicionalmente, en la Tabla 6.12 se presenta el valor de las restricciones y de las derivadas de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático, que deben ser casi nulas puesto que corresponden a un estado estacionario.

Respecto al diseño con región de incertidumbre del CASO 4, que considera también variaciones en el peso R del MPC, por brevedad únicamente se presentan aquí los resultados para el punto de operación nominal. En este caso se observa que el peso R tiene un valor menor que en el resto para poder cumplir con la condición de desempeño en los extremos de la región de incertidumbre.

	<i>Diseño sin robustez</i>	CASO 1	CASO 2	CASO 3
Coste índices de controlabilidad				
Coste (f_i)	0.14194	0.14199	0.15468	0.21898
$\ W_p \cdot S_0 \cdot R_{d0}\ _\infty$	0.8846	0.9095	0.8118	0.7305
$\ M_0\ _1$	3500	3403.3	3500	3500
$\ N_0\ _\infty$	0.9578	0.9776	0.8884	0.8146
max (s_i) (mg/l)	114.02	113.98	111.28	105.17
max (q_r) (m ³ /h)	997.58	981.16	885.2	764.86
ISE	516.38	519.15	382.65	257.59
Estrategia de optimización				
Estrategia de optimización	2	1	2	2
Iteraciones totales	67	76	60	84
Iteraciones globales	4	1	4	4
Tiempo calculo (s)	200.53	500.18	260.19	504.77

Tabla 6.10: Índices de controlabilidad para los resultados de diseño integrado robusto en el punto estacionario nominal

	<i>Diseño sin robustez</i>	CASO 1	CASO 2	CASO 3
Coste e índices de controlabilidad				
Coste (f_i)	0.998	0.184	0.364	0.4707
$\ W_p \cdot S_1 \cdot R_{d1}\ _\infty$	33.829	1	1	1
$\ M_1\ _1$	20030	3632.4	4889.5	5558.3
$\ N_1\ _\infty$	33.841	1.0785	1.0997	1.1234
max (s_i) (mg/l)	MPC no factible	107.89	125.28	118.72
max (q_r) (m ³ /h)	MPC no factible	1088.8	1491.2	2094.2
ISE	MPC no factible	837.73	3696.7	5760.1
EQ	MPC no factible	10247	19819	21249
PE	MPC no factible	314.28	591.95	771.30

Tabla 6.11: Resultados de diseño simultaneo robusto: coste e índices de controlabilidad cuando el proceso se desplaza al peor extremo de la región de incertidumbre

En cuanto a la validación de los diseños mediante simulaciones, en la Figura 6.5 se presenta la evolución dinámica de s_i y q_r para la planta obtenida mediante diseño integrado robusto con la región de incertidumbre del CASO 1, cuando se trabaja en el punto nominal y en el punto de la región de incertidumbre $s_i = (s_i)_0 - 10$ mg/l. Se

observa que a pesar del alejamiento del punto nominal, el rechazo a perturbaciones de la planta continúa siendo bueno.

	<i>Diseño sin robustez</i>	CASO 1	CASO 2	CASO 3
Tiempo de retención (h)	2.6547	2.6759	2.9409	3.6447
Carga másica	0.0677	0.0677	0.0665	0.0629
Capacidad hidráulica (m/h)	0.5539	0.5535	0.5455	0.5410
Edad de fangos (d)	6.4014	6.3927	6.3073	5.9574
q_2/q_i	0.1984	0.1963	0.1775	0.1501
q_p/q_2	0.0877	0.0886	0.0990	0.1235
$(\dot{x}_i)_0$	-0.0388	-0.0386	0.0357	0.0295
$(\dot{s}_i)_0$	0.0011	0.0011	0.0010	0.0008
$(\dot{c}_i)_0$	-0.0001	0.0001	-0.0001	0.0001
$(\dot{x}_d)_0$	-0.0075	-0.0076	0.0076	0.0077
$(\dot{x}_b)_0$	-0.0237	-0.0237	0.0237	0.0241
$(\dot{x}_r)_0$	-0.0285	-0.0286	0.0286	0.0291

Tabla 6.12: Valores de las restricciones de proceso y del valor absoluto de las derivadas para los resultados de diseño integrado robusto en el punto estacionario nominal

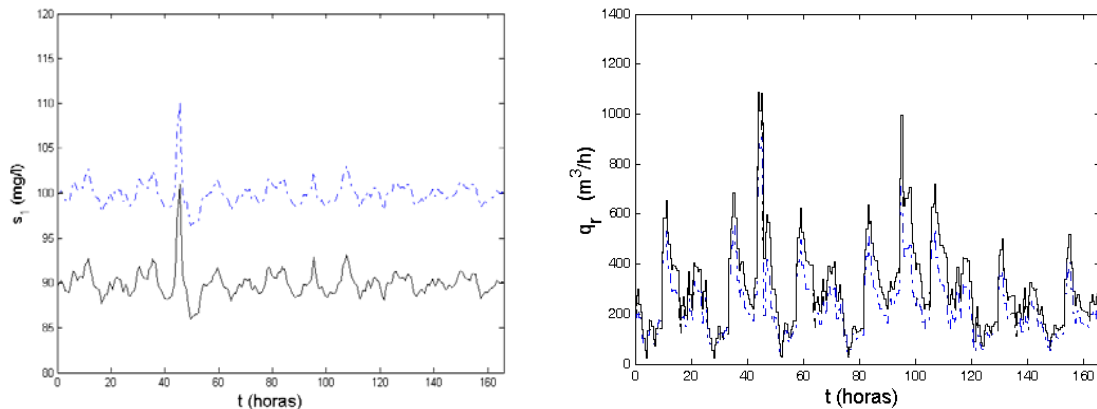


Figura 6.5: Evolución de q_r y s_i para la planta obtenida mediante diseño con robustez, en el punto nominal (azul) y en el peor vértice de la región de incertidumbre (negro)

Por último, en la Figura 6.6 se presentan los módulos de las funciones de sensibilidad de salida respecto de las perturbaciones $(S_{si})_0$ y $(S_{qi})_0$ en el punto nominal junto con los pesos correspondientes. En ella se observa que las funciones de sensibilidad para el sistema obtenido mediante diseño integrado sin robustez están más cercanas al módulo de $W_{p_{si}}^{-1}$, lo que se traduce en un comportamiento no deseado cuando el proceso se acerca al extremo de la región de incertidumbre.

Para finalizar este punto, se comparan los resultados de un mismo caso de diseño integrado con región de incertidumbre del CASO 1 utilizando las *estrategias 1 y 2* de

optimización (Tabla 6.13). Los resultados son muy similares, corroborando la validez de la optimización en dos pasos y dando una mayor solidez a la solución obtenida.

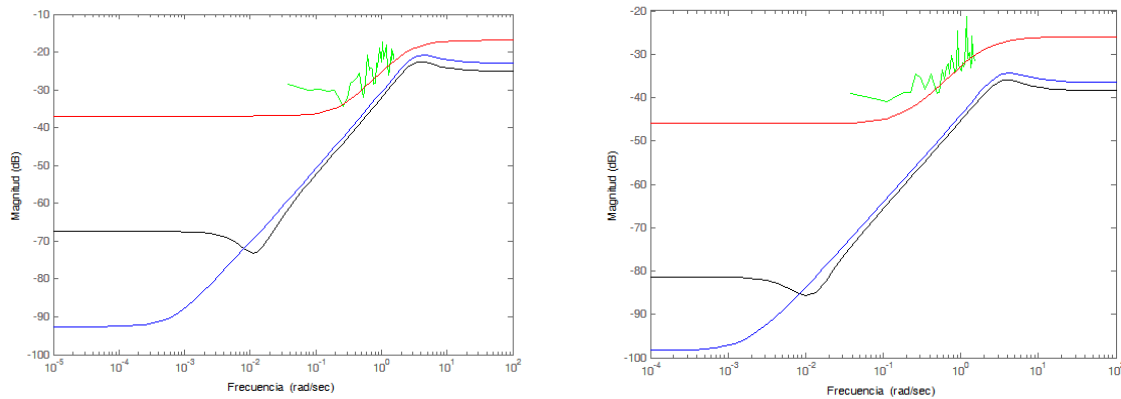


Figura 6.6: Magnitud de $(S_{si})_0$ y $(S_{qi})_0$ para resultados de diseño sin robustez (azul) y con robustez (negro), junto con el módulo de $W_{p_{si}}^{-1}$ y $W_{p_{qi}}^{-1}$ (rojo) y el espectro inverso de las perturbaciones (verde)

$\ M_0\ _1 < 3500$	Diseño utilizando la <i>Estrategia 1</i> de optimización	Diseño utilizando la <i>Estrategia 2</i> de optimización
Peso del MPC y dimensiones de la planta		
R	0.00737	0.006944
$(V_1)_0$ (m ³)	3628	3616.5
$(A)_0$ (m ²)	2449.4	2459.4
Punto de operación estacionario		
$(s_1)_0$ (mg/l)	100	100
$(q_r)_0$ (m ³ /h)	205.78	206.41

Tabla 6.13: Resultados de diseño con $\|M_0\|_1 < 3500$, para dos estrategias de optimización, en el punto nominal

6.6.6 Influencia de los pesos en los índices de controlabilidad

La influencia de los pesos en los índices controlabilidad es importante y determina en gran medida el éxito de la metodología propuesta. El diseñador debe elegir bien sus valores para conseguir un determinado desempeño, pero evitando situaciones que provoquen la inexistencia de soluciones. En esta sección se evalúa la influencia del peso W_{esf} que aparece en el índice de sensibilidad mixta N_0 , manteniendo constante el peso W_p con los valores (6.31) puesto que su influencia es análoga a la ya mostrada en la sintonía automática de controladores MPC.

Parámetros del problema

En la Tabla 6.14 se exponen los pesos $W_{esf_{si}}$ elegidos variando su ganancia de forma progresiva, mientras que los pesos $W_{esf_{qi}}$ también se han modificado de forma proporcional en cada caso.

Peso 1	Peso 2	Peso 3
$W_{esf_{si}} = \frac{0.14 \cdot \left(\frac{s}{M_{esf}} + w_{B3} \right)}{s + w_{B3} \cdot A_{esf}}$	$W_{esf_{si}} = \frac{0.08 \cdot \left(\frac{s}{M_{esf}} + w_{B3} \right)}{s + w_{B3} \cdot A_{esf}}$	$W_{esf_{si}} = \frac{0.05 \cdot \left(\frac{s}{M_{esf}} + w_{B3} \right)}{s + w_{B3} \cdot A_{esf}}$
$w_{B3}=4, A_{esf}=10^{-3}, M_{esf}=3$		

Tabla 6.14: Pesos $W_{esf_{si}}$ para el índice de sensibilidad mixta

El vector de valores deseados para el problema de optimización multiobjetivo (6.1) se fija aquí con los siguientes valores:

$$\mathbf{f} = (f_1^* \quad f_2^*) = (0.1 \quad 0.1) \quad (6.54)$$

En estos resultados se considera la región de incertidumbre del CASO 1 y perturbaciones BSM1 de tiempo seco, atenuadas al 40% como en el resto de resultados del capítulo. El problema de optimización se resuelve mediante la *Estrategia 1*.

Análisis de los resultados

En la Tabla 6.15 se presentan los resultados numéricos de tres casos de diseño integrado obtenidos con los pesos de la Tabla 6.14, junto con algunos índices de controlabilidad. Se observa que para pesos \mathbf{W}_{esf} con mayor magnitud, que penalizan más los esfuerzos de control, se obtienen diseños con pesos R mayores que implican peor rechazo de las perturbaciones. Este hecho se puede comprobar también en las simulaciones de la Figura 6.7. En definitiva, mediante \mathbf{W}_{esf} se están regulando los esfuerzos de control que proporciona el MPC obtenido en el diseño integrado.

Por último, en la Figura 6.8 se presentan también las distintas funciones de sensibilidad obtenidas $s \cdot (M_{s_i})_0$ y $(S_{s_i})_0$, que se traducen en diferentes esfuerzos de la variable de control.

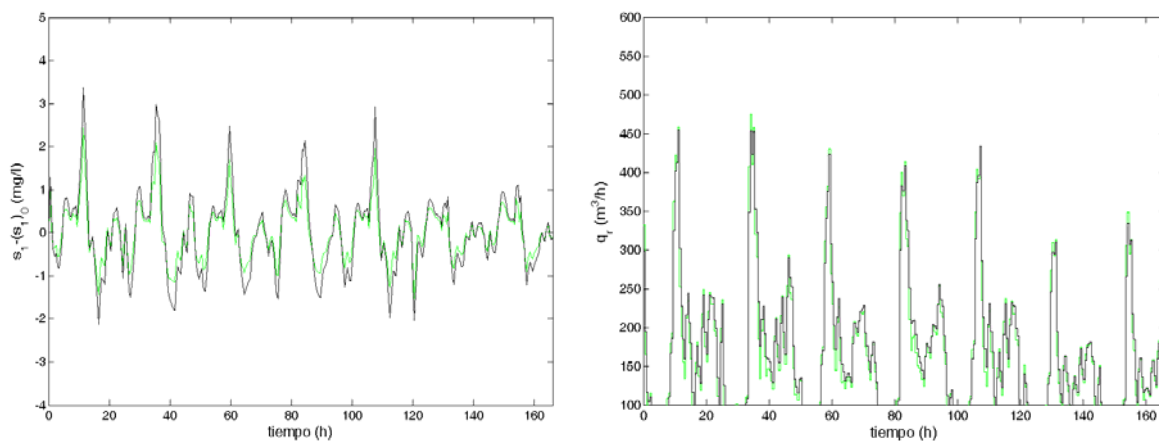


Figura 6.7: Evolución de $s_1 - (s_1)_0$ y q_r para los resultados de diseño utilizando el peso 1 (negro) y peso 3 (verde) de la tabla 6.14

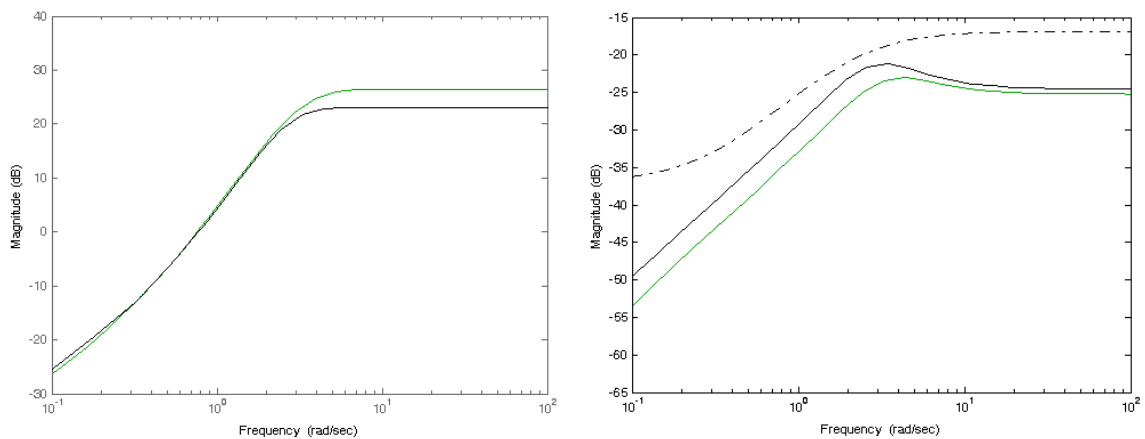


Figura 6.8: Magnitudes de $s \cdot (M_{s_r})_0$ (izquierda) y $(S_{si})_0$ (derecha) para los resultados con pesos 1 (negro) y 3 (verde). En línea discontinua $W_{p_{si}}^{-1}$

Peso W_{esf} utilizado:	Peso 1	Peso 2	Peso 3
Peso del MPC y dimensiones de la planta			
R	0.0087	0.0056	0.0050
$(V_1)_0$ (m ³)	4554.5	4507.9	4864.8
$(A)_0$ (m ²)	2202.5	2147.8	4618.7
Punto de operación			
$(s_1)_0$ (mg/l)	99.462	100.000	99.391
$(q_r)_0$ (m ³ /h)	150.001	150.000	150.007
Coste e índices de controlabilidad			
Coste (f_l)	0.1902	0.1839	0.4681
$\ W_p \cdot S_0 \cdot R_{a0}\ _\infty$	0.9224	0.7040	0.6788
$\ M_0\ _1$	1259.5	1516.5	1662.0
$\ N\ _\infty$	2.7514	1.7882	1.3097
$\max s_1 - s_{1ref} $ (mg/l)	3.367	2.873	2.427
$\max(q_r)$ (m ³ /h)	454.46	460.28	475.17
ISE	137.50	92.80	60.26

Tabla 6.15: Resultados de diseño para distintos W_{esf} en el punto nominal

En resumen, en el marco del diseño integrado aplicado al proceso de fangos activados, el efecto que produce la variación del peso W_{esf} es muy similar al que produce la variación del límite u_{max} sobre $\|M_0\|_1$, aunque para otros procesos sí podrían existir más diferencias.

Aunque en los resultados de diseño integrado presentados se ha fijado a priori el valor de H_c , la metodología propuesta es general y permite también obtenerlo. En concreto

para el resultado de diseño con el peso 3 se incluyó en la optimización y se obtuvo un valor de $H_c=8$, realizando múltiples pruebas porque que en este caso la estrategia de optimización tiene una parte estocástica.

Evolución de la optimización

Los resultados de este apartado se aprovechan también para evaluar de forma cualitativa la convergencia del método de programación de objetivos incluido en la estrategia de optimización propuesta, presentando la evolución del valor de las funciones objetivo f_1 y f_2 a lo largo de la optimización, así como del volumen del reactor V_1 y del peso R del controlador MPC (Figura 6.9 y Figura 6.10). Claramente se observa como todos ellos tienden a un valor constante a medida que el algoritmo se acerca al óptimo.

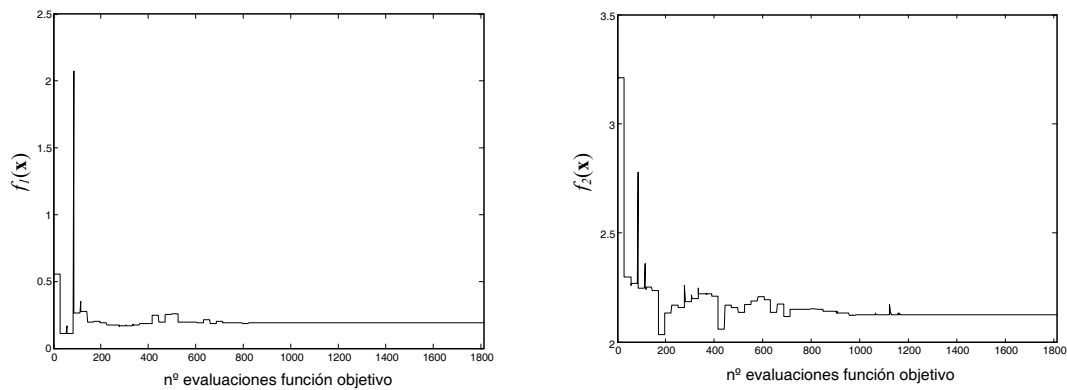


Figura 6.9: Evolución de los objetivos f_1 y f_2 a lo largo de la optimización

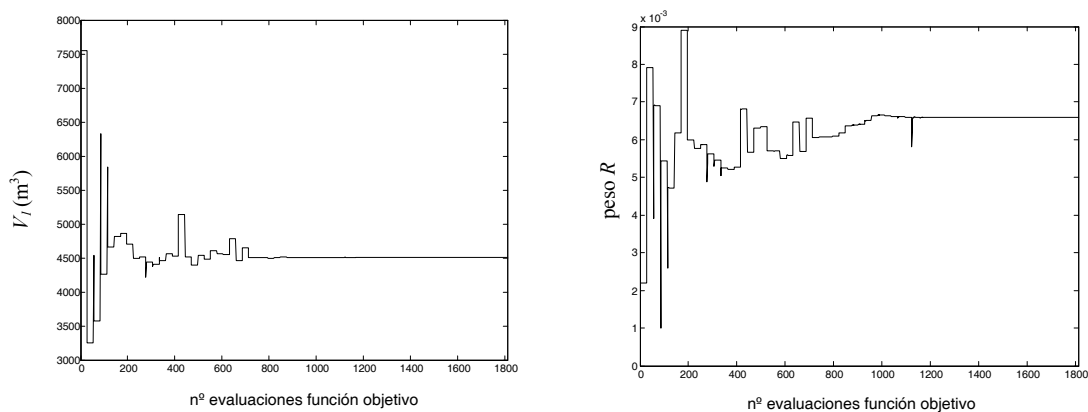


Figura 6.10: Evolución de V_1 y del peso R del controlador a lo largo de la optimización

6.6.7 Análisis de Pareto del problema multiobjetivo

El diseño simultáneo de procesos y sistemas de control se traduce en nuestro caso en un problema de optimización no lineal multiobjetivo con dos funciones objetivo f_1 y f_2 , y como tal es posible calcular el frente de Pareto en dos dimensiones para valorar la situación de compromiso existente entre ellos. Cuando el H_c se mantiene fijo, el problema de optimización multiobjetivo planteado se resuelve mediante el método de la programación de objetivos de la forma siguiente, donde γ es una variable de holgura que representa la desviación de las funciones objetivo respecto al vector de valores deseados (apéndice II):

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{c}, \gamma \in \mathcal{R}} \gamma \tag{6.55}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{c}) - w_1 \gamma &\leq f_1^* \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{c}) - w_2 \gamma &\leq f_2^* \end{aligned} \tag{6.56}$$

Para obtener los distintos óptimos de Pareto se han variado los pesos w_1 y w_2 , que indican de forma inversamente proporcional la importancia proporcionada al cumplimiento del correspondiente objetivo. También se ha obtenido el vector objetivo ideal $\mathbf{v} = (0.14194, 0.92347)$, minimizando cada objetivo por separado. Los valores objetivo prefijados son los mismos que en el apartado 6.6.5:

$$\begin{aligned} f_1^* &= 0.1 \\ f_2^* &= 0.7 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Los resultados se pueden ver en la Figura 6.11 y la Tabla 6.16, incluyendo los resultados para los problemas de optimización considerando un único objetivo para el cálculo del vector objetivo ideal, observándose que el mejor coste se obtiene cuando únicamente se considera f_1 , y el mejor índice de controlabilidad cuando se considera solamente f_2 . Se utilizan pesos negativos que implican que los objetivos se traten de cumplir con valores por exceso para evitar infactibilidades. En la tercera fila de la Tabla 6.16, el valor elegido para los pesos es igual en valor absoluto al correspondiente objetivo dando así la misma importancia a cada objetivo.

El problema de diseño planteado considera la región de incertidumbre del CASO 1 y se ha utilizado la *Estrategia 1* de optimización prefijando el H_c .

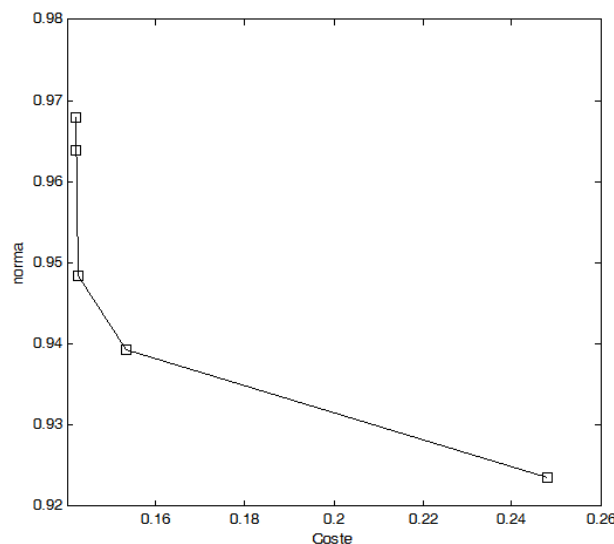


Figura 6.11: Frente de Pareto para el problema multiobjetivo propuesto

$f_1 = \text{coste}$	$f_2 = \ \mathbf{N}_0\ _\infty$	w_1	w_2
0.14194	0.96390	-	-
0.14207	0.96786	-0.1	-7
0.14240	0.94841	-0.1	-0.7
0.15338	0.93923	-1	-0.7
0.24796	0.92347	-	-

Tabla 6.16: Óptimos de Pareto para el problema multiobjetivo

6.6.8 Utilización de diferentes índices de controlabilidad

Por último, el problema de diseño integrado se ha resuelto sustituyendo el índice de sensibilidad mixta \mathbf{N}_0 por otros descritos en el capítulo 4 con objeto de estudiar su influencia, manteniendo el resto de las condiciones del problema de optimización. En particular, se utiliza el índice (4.30) que se reescribe a continuación:

$$f_2 = \|\mathbf{G}_0 \mathbf{K}_2 + \mathbf{G}_{a0}\|_1 \quad (6.58)$$

En la Tabla 6.17 se presentan los resultados comparados con el caso análogo del punto 6.6.5 (Tabla 6.9) utilizando el índice de sensibilidad mixta.

	Diseño utilizando $f_2 = \ \mathbf{N}_0\ _\infty$	Diseño utilizando $f_2 = \ \mathbf{G}_0 \mathbf{K}_2 + \mathbf{G}_{a0}\ _1$
Peso del MPC y dimensiones de la planta		
R	0.00737	0.007242
$(V_1)_0$ (m ³)	3628	3605.4
$(A)_0$ (m ²)	2449.4	2452.1
Punto de operación		
$(s_1)_0$ (mg/l)	100	100
$(q_r)_0$ (m ³ /h)	205.78	208.17
Coste e índices de controlabilidad		
Coste	0.14199	0.14194
$\ \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{a0}\ _\infty$	0.9095	0.9032
$\ \mathbf{M}_0\ _1$	3403.3	3443.4
$\ \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{a0}\ _1$	27.042	27.004
$\ \mathbf{N}_0\ _\infty$	0.9776	0.9739
$\max(s_1)$ (mg/l)	113.98	114.09
$\max(q_r)$ (m ³ /h)	981.16	994.63
ISE	519.15	526.08

Tabla 6.17: Resultados de diseño integrado para dos índices de desempeño diferentes

A la vista de las tablas, los resultados obtenidos son muy similares, como cabía esperar ya que los dos índices están relacionados directamente con un adecuado rechazo a perturbaciones. La única diferencia entre ellos es que (6.58) no tiene en cuenta los esfuerzos de control, sino únicamente el efecto de las perturbaciones en la salida para el peor caso de éstas. Como región de incertidumbre se utilizó la del CASO 1, debida a variaciones en s_1 , y la *estrategia 1* de optimización.

Otra opción considerada ha sido cambiar la restricción de controlabilidad sobre $\|M_0\|_1$ por otra sobre el índice $\|S_0 \cdot R_{a0}\|_1$ que permite imponer una condición directa sobre la magnitud de la salida. En la Tabla 6.18 se presentan los resultados para dos límites y_{max} diferentes, observándose que cuanto más pequeño es este valor, más pequeño es el peso R del MPC con el fin de permitir una mayor variación de la señal de control que pueda rechazar las perturbaciones.

	$\ S_0 \cdot R_{a0}\ _1 < 12$	$\ S_0 \cdot R_{a0}\ _1 < 15$
Peso del MPC y dimensiones de la planta		
R	0.001435	0.001618
V_I (m ³)	3605.3	3605.7
A (m ²)	2451.9	2451.8
Coste e índices de controlabilidad		
Coste (f_I)	0.14194	0.14194
s_1 (mg/l)	100	100
$\max s_1 - s_{1ref} $ (mg/l)	12.373	12.444
$\ W_p \cdot S_0 \cdot R_{a0}\ _\infty$	0.4593	0.4750
$\ M_0\ _1$	6986.5	6449.4
$\ S_0 \cdot R_{a0}\ _1$	12.000	12.566

Tabla 6.18: Resultados de diseño integrado utilizando el índice $\|S_0 \cdot R_{a0}\|_1$

6.7 Diseño integrado del proceso de fangos activados utilizando la planta nº 3

La aplicación de la metodología de diseño integrado al proceso de fangos activados se completa considerando los procesos de nitrificación y desnitrificación para la eliminación de nitrógeno, utilizando la planta nº 3 y su modelo matemático consistente en el BSM1 simplificado de (Nejjari y Quebedo, 2004) descrito en el capítulo 2, con la estructura de control de la Figura 6.12. Se recuerda que el problema de control consiste en regular la concentración de nitritos y nitratos en el tanque anóxico ($S_{NO,dnit}$) y la concentración de oxígeno disuelto en el tanque aireado ($S_{O,mit}$), a pesar de las perturbaciones en el influente. Las variables manipuladas utilizadas son el caudal de recirculación interno (q_a) y el coeficiente de transferencia de oxígeno K_{La} en el tanque aireado.

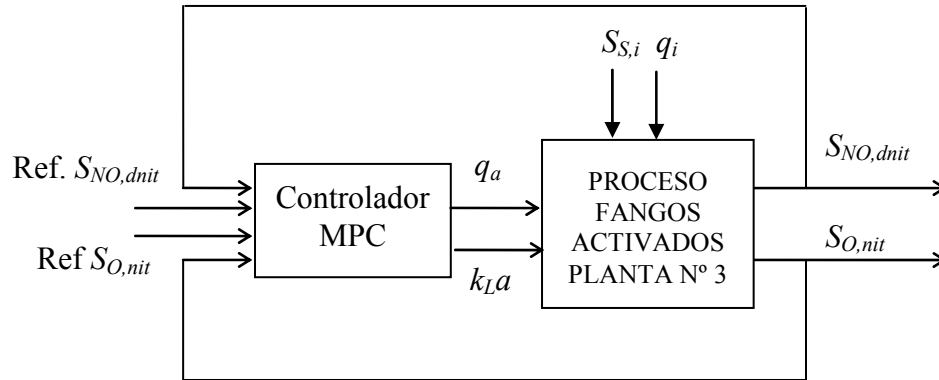


Figura 6.12: Configuración de planta y controlador para la planta n° 3

Parámetros del problema de optimización

En los resultados que se presentan a continuación, los pesos en los índices de controlabilidad se mantienen constantes con los siguientes valores:

$$W_{p_{S_{S,i}}} = \frac{40 \cdot \left(\frac{s}{2} + 6 \right)}{s + 6 \cdot 0.3}; \quad W_{p_{q_i}} = \frac{70 \cdot \left(\frac{s}{1.5} + 7 \right)}{s + 7 \cdot 0.3} \quad (6.59)$$

$$W_{esf_{S_{S,i}}} = \frac{0.0175 \cdot \left(\frac{s}{3} + 4 \right)}{s + 4 \cdot 0.0001}; \quad W_{esf_{q_i}} = \frac{0.525 \cdot \left(\frac{s}{3} + 4 \right)}{s + 4 \cdot 0.0001} \quad (6.60)$$

Los valores numéricos para las restricciones de operación se muestran en la Tabla 6.19, y en la validación de resultados las restricciones dinámicas del MPC son las siguientes:

$$\begin{aligned} S_{NO,dnit,d} < S_{NO,dnit} < S_{NO,dnit,u} \\ q_{ad} < q_a < q_{au} \\ \Delta q_{ad} < \Delta q_a < \Delta q_{au} \end{aligned} \quad (6.61)$$

donde $S_{NO,dnit,d}$, $S_{NO,dnit,u}$; q_{ad} , q_{au} ; Δq_{ad} , Δq_{au} son los límites para el nitrato, caudal de recirculación interno, y sus respectivos incrementos.

Restricciones de operación					
$ret_d=0.1$ d	$ml_d=0.001$	$sa_d=2$ d	$rec_d=0.05$	$pg_d=0.03$	$ch=9$ m/h
$ret_u=0.4$ d	$ml_u=0.024$	$sa_u=10$ d	$rec_u=0.9$	$pg_u=0.3$	

Tabla 6.19: Restricciones de operación para el proceso con eliminación de nitrógeno

Resultados

El diseño integrado se ha resuelto para dos restricciones de controlabilidad diferentes sobre $\|\mathbf{M}_0\|_1$ y los resultados se muestran en la Tabla 6.20 y Figura 6.13, donde se puede

comprobar que cuando el límite sobre $\|\mathbf{M}_0\|_1$ disminuye, el rechazo de perturbaciones empeora porque las magnitudes de la señal de control están más restringidas. Se ha utilizado la formulación del MPC con penalización terminal, la *estrategia 2* para la resolución del problema de optimización y $H_c=10$ fijado a priori.

	$\ \mathbf{M}_0\ _1 < 2400$	$\ \mathbf{M}_0\ _1 < 2570$
R	0.00373	0.00001
V_{dnit}	7944.3	7361.5
V_{nit}	8062.2	6878.9
V_{dec}	2587.6	2505.8
$S_{NO,dnit}$	8.171	8.330
$\max(S_{NO,dnit} - S_{NO,dnit,ref})$	0.1999	0.0045
$\ \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\ _\infty$	0.9541	0.0410
$\ \mathbf{M}_0\ _1$	2400	2570
$\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_d\ _1$	0.523	0.0077
Coste (f_i)	0.0510	0.04005

Tabla 6.20: Resultados de diseño integrado para el proceso con eliminación de nitrógeno

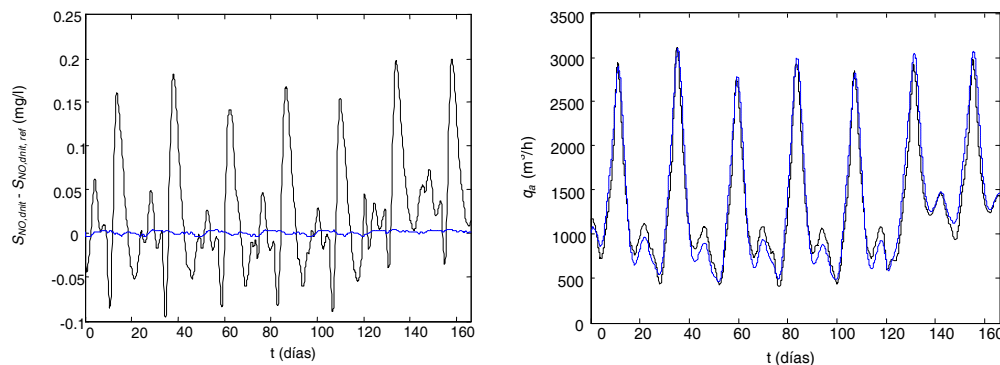


Figura 6.13: Evolución de $S_{NO,dnit} - S_{NO,dnit,ref}$ y q_a para la planta diseñada con $\|\mathbf{M}_0\|_1 < 2570$ (azul) y $\|\mathbf{M}_0\|_1 < 2400$ (negro)

6.8 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la metodología de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control MPC que constituye el principal objetivo de este trabajo. La metodología está basada en la resolución de un problema de optimización multiobjetivo que tiene en cuenta aspectos diversos como los costes de construcción asociados al dimensionamiento de las unidades, los costes de operación asociados al consumo de las bombas y la controlabilidad mediante índices basados en normas H_∞ y l_1 de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado. Estos índices se seleccionan con el fin de ponderar los distintos aspectos de controlabilidad como el rechazo de las perturbaciones de entrada, las magnitudes de las variables manipuladas, o los esfuerzos de control. Además se tienen en cuenta también las restricciones de operación necesarias para que el proceso de fangos activados se desarrolle adecuadamente.

Tras presentar la metodología general, incluyendo el planteamiento completo del problema de optimización, la definición de las regiones de incertidumbre y las estrategias de optimización propuestas, ésta se ha particularizado para el diseño del proceso de fangos activados con control MPC para las plantas nº 1 y nº 3 y se han presentado los resultados más relevantes.

En primer lugar se presenta un caso previo de diseño secuencial con control MPC como motivación al diseño integrado, comprobando las ventajas que éste produce cuando las condiciones de controlabilidad son exigentes. También se muestra un resultado de diseño utilizando índices de controlabilidad dinámicos como el *ISE* en contraposición a la utilización de normas. Finalmente se muestran los resultados de diseño simultáneo del proceso y sistema de control MPC para la planta nº 1. Al tratarse de un problema complejo, que depende de numerosos parámetros de ajuste que el diseñador debe fijar de antemano según sus necesidades, se estudia brevemente la influencia de alguno de ellos.

Un aspecto importante es la existencia de incertidumbre debida a la no linealidad del proceso y la acción de las perturbaciones, por lo que se han incluido condiciones de robustez, considerando diferentes regiones de incertidumbre basadas en el funcionamiento normal del proceso y definidas mediante modelos locales lineales ubicados en los vértices de dicha región. Se han comparado distintos y se comprueba que las plantas con MPC diseñadas incluyendo condiciones de robustez verifican las condiciones de controlabilidad en un rango de operación mayor.

También se han diseñado plantas utilizando distintos pesos en los índices de controlabilidad, con diferentes resultados según los requerimientos impuestos. Se han considerado otros índices de controlabilidad en el problema, con resultados análogos, y se han validado las dos estrategias de optimización propuestas. Finalmente, la metodología se aplica al diseño integrado de la planta nº 3 y se muestran algunos resultados.

Capítulo 7

SÍNTESIS DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS

Resumen:

En este capítulo se plantea el problema de síntesis de procesos, que completa el diseño integrado del proceso de fangos activados con la selección de la estructura de la planta a partir de una superestructura del proceso. Se proponen tres casos de estudio: diseño considerando únicamente costes, diseño con un controlador PI y condiciones de controlabilidad basadas en índices dinámicos, y diseño integrado con síntesis incluyendo control MPC e índices de controlabilidad basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema. El problema de optimización generado incluye variables binarias, y se resuelve utilizando el método del enfriamiento simulado (simulated annealing) y algoritmos genéticos (apéndice II).

7.1 SÍNTESIS DE PROCESOS

Dentro del problema general de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control hay diversos aspectos particulares que surgen del propio diseño del proceso y la incorporación de cuestiones relacionadas con el control. Uno de ellos es la síntesis del proceso, que consiste en la selección de la estructura óptima de la planta, conjuntamente con el dimensionamiento y cálculo del punto de operación.

La síntesis de un proceso puede plantearse de forma algorítmica, como un problema de optimización basado en el análisis de una superestructura que contiene todas las alternativas estructurales posibles, y su objetivo es encontrar la mejor estructura y parámetros de la planta en principio únicamente considerando costes. El modelo matemático contiene variables continuas, que representan dimensiones y condiciones de operación, y variables discretas, que representan decisiones relacionadas con la estructura del proceso. El problema formulado a partir de la superestructura es un problema de optimización no lineal mixta entera (MINLP), de la forma siguiente:

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7.1)$$

sujeto a:

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (7.2)$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^l$$

El vector \mathbf{x} contiene variables continuas que pueden ser caudales, presiones, temperaturas o dimensiones de unidades, entre otras variables de proceso, las cuales deben satisfacer los balances de materia, de energía y ecuaciones de diseño.

El vector \mathbf{y} contiene variables discretas y representan decisiones estructurales, como la presencia ($\mathbf{y}=1$) o no ($\mathbf{y}=0$) de un elemento en el diagrama de flujo del proceso.

La función objetivo $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ generalmente representa los costes a minimizar o algún otro criterio de desempeño relacionado con la economía del proceso, como por ejemplo, el gasto de energía, el rendimiento de las reacciones o la penalización por violación a restricciones ambientales.

Las variables de decisión deben satisfacer ecuaciones $h(\mathbf{x},\mathbf{y})$ relacionadas con los balances de masa y energía en el proceso. Las inecuaciones $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ vienen dadas por restricciones de operación, restricciones asociadas a especificaciones de diseño, regulaciones ambientales o condiciones lógicas.

Al resolver el problema de síntesis algorítmica se debe obtener la estructura, dimensiones y punto de operación de la planta que mejor satisface los objetivos representados por la función $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

El planteamiento más completo de la síntesis de procesos es el que integra la controlabilidad, ya sea en lazo abierto o en lazo cerrado. Se debe seleccionar también la estructura de control, en cuanto a variables controladas y manipuladas, su emparejamiento, el propio esquema de control y la selección del tipo de controlador. Al incorporar la selección de la estructura de control al problema de diseño se añade un conjunto de variables binarias y_c , que establecen la existencia o no de los posibles emparejamientos variable controlada-variable manipulada, y restricciones relacionadas con las acciones de control (Bansal *et al.*, 2002).

Si es necesario simular la respuesta dinámica del sistema en base al modelo no lineal para evaluar los índices de desempeño del control, se deben incluir en el problema las ecuaciones diferenciales que representan el modelo del proceso convirtiéndolo en un Problema de Optimización Dinámica Mixto Entero (*Mixed Integer Dynamic Optimization*, MIDO).

En este capítulo se resolverá este problema para tres casos con diferentes condiciones, pero siempre fijando la estructura de control, por lo que las variables enteras se referirán únicamente a la estructura de la planta. Matemáticamente se trata del problema que ya se planteó en (6.1)-(6.2) para el diseño integrado fijando la estructura de la planta, pero ahora se deben utilizar nuevos algoritmos de optimización para obtener también las variables binarias.

7.2 FORMULACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

En el planteamiento del problema de diseño integrado de este apartado se introduce la síntesis del proceso considerando la posibilidad de seleccionar la estructura de la planta, eligiendo entre uno o dos reactores aireados, siempre seguidos por un decantador. Ambas alternativas se representan en la superestructura que se muestra en la Figura 7.1.

A partir de la superestructura y haciendo uso del modelo de la planta nº 1 presentado en el capítulo 2 extendido para dos reactores, se derivan una serie de ecuaciones diferenciales y algebraicas que, junto con la función objetivo y el esquema de control, se traducen en un problema de optimización mixto-entero con restricciones no lineales y requerimientos sobre índices de desempeño dinámicos o basados en normas. El conjunto de variables de decisión está dado por: la estructura del proceso definida por la variable binaria (y_l), las dimensiones de la planta, el punto de trabajo y los parámetros

del sistema de control. El objetivo consiste en minimizar una función general, que incluye costes de inversión y de operación, respecto a las variables de decisión. Las restricciones físicas y de operación son análogas a las del punto 6.5.1 pero expresadas para la superestructura propuesta.

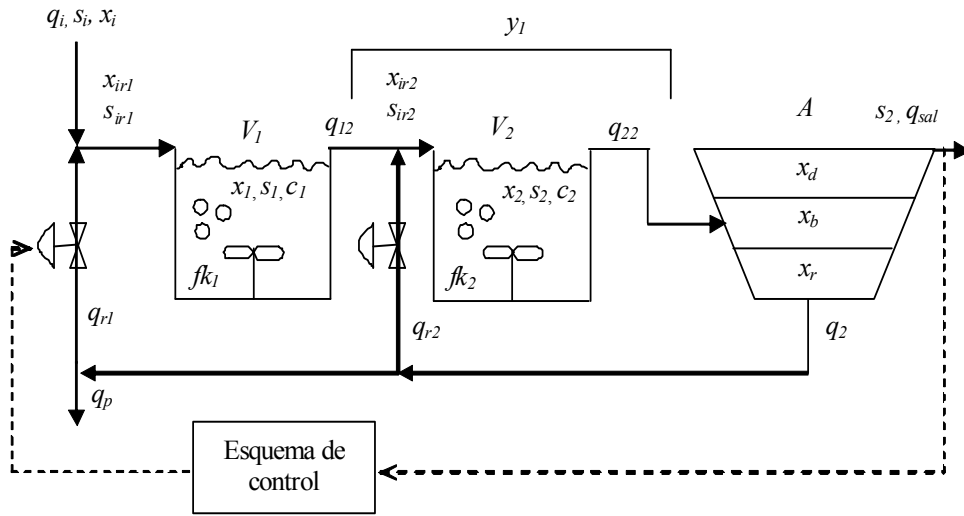


Figura 7.1: Superestructura del proceso de fangos activados

Se presenta a continuación la formulación general del problema de diseño integrado sin especificar la técnica de control a utilizar ni los índices de controlabilidad, pues estos se describen de manera individual en cada uno de los casos de estudio propuestos. A diferencia del capítulo 6, aquí el problema de diseño se plantea siempre con un único objetivo económico introduciendo la controlabilidad en las restricciones.

Función objetivo:

$$f_1(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \alpha_1 \cdot V_1^2 + \alpha_1 \cdot V_2^2 + \alpha_2 \cdot A + \alpha_3 \cdot q_2^2 + \alpha_4 \cdot fk_1^2 + \alpha_4 \cdot fk_2^2 \quad (7.4)$$

donde

$\mathbf{p} = (V_1, V_2, A)$ son las variables de diseño del proceso invariantes en el tiempo, con V_1 y V_2 los volúmenes de los reactores 1 y 2 respectivamente, y A el área transversal del decantador.

\mathbf{c} son los parámetros de sintonía del controlador.

$\mathbf{x} = (s_1, s_2, x_1, x_2, c_1, c_2, x_d, x_b, x_r)$ es el vector de estados incluyendo las concentraciones de sustrato, biomasa y oxígeno en cada reactor.

$\mathbf{z} = (q_{r1}, q_{r2}, q_p, fk_1, fk_2)$ es el vector de variables algebraicas, con q_{r1} y q_{r2} los caudales de recirculación a cada reactor, q_p el caudal de purga, y fk_1 y fk_2 los factores de aireación para cada reactor.

q_2 es el caudal de recirculación total.

α_i con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ son los pesos que determinan la importancia relativa de cada factor en la función de coste.

Los tres primeros términos están asociados a los costes de construcción, y el resto corresponden a los costes operacionales relacionados con el bombeo (purga y recirculación) y la energía utilizada por las turbinas de aireación.

Condiciones lógicas del problema:

Es necesario imponer condiciones lógicas que garanticen la coherencia matemática del modelo para cada posible configuración de la planta. Dependiendo de la existencia o no del segundo reactor (representada por la variable binaria y_1), se establece lo siguiente:

- Si el segundo reactor no existe $y_1=0$, entonces $V_2=0$, $x_2=x_1$, $s_2=s_1$, $c_2=c_1$, $fk_2=0$, $q_{r2}=0$.
- Si el segundo reactor existe $y_1=1$, entonces V_2 , x_2 , s_2 , fk_2 y q_{r2} toman valores adecuados dentro del rango correspondiente a cada variable.

Para ello se definen las variables de holgura W_1 , W_2 , W_3 , W_4 , con el fin de anular las ecuaciones y restricciones que se desactivan cuando el segundo reactor no existe ($y_1=0$), sin afectar a las mismas cuando sí existe ($y_1=1$).

Restricciones sobre los balances de masa:

Se imponen restricciones sobre los balances de masa en los reactores y el decantador desarrollados para la superestructura del proceso presentada en la Figura 7.1, con la finalidad de garantizar un punto de trabajo inicial estacionario.

$$\left| V_1 \frac{dx_1}{dt} \right| = \left| \mu_{\max} Y \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} V_1 - K_d \frac{x_1^2}{s_1} V_1 - K_c x_1 V_1 + (x_i \cdot q_i + x_r \cdot q_{r1} - q_{12} \cdot x_1) \right| \leq \varepsilon \quad (7.5)$$

$$\left| V_1 \frac{ds_1}{dt} \right| = \left| -\mu_{\max} \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} V_1 + f_{kd} K_d \frac{x_1^2}{s_1} V_1 + f_{kd} K_c x_1 V_1 + (s_i \cdot q_i + s_1 \cdot q_{r1} - q_{12} \cdot s_1) \right| \leq \varepsilon \quad (7.6)$$

$$\left| V_1 \frac{dc_1}{dt} \right| = \left| K_{la} F k_1 (c_s - c_1) V_1 - K_{o1} \mu_{\max} \frac{s_1 x_1}{(K_s + s_1)} V_1 - q_{12} c_1 \right| \leq \varepsilon \quad (7.7)$$

$$\left| V_2 \frac{dx_2}{dt} \right| = \left| \mu_{\max} Y \frac{s_2 x_2}{(K_s + s_2)} V_2 - K_d \frac{x_2^2}{s_2} V_2 - K_c x_2 V_2 + (x_1 \cdot q_{12} + x_r \cdot q_{r2} - q_{22} \cdot x_2) \right| \leq \varepsilon \quad (7.8)$$

$$\left| V_2 \frac{ds_2}{dt} \right| = \left| -\mu_{\max} \frac{s_2 x_2}{(K_s + s_2)} V_2 + f_{kd} K_d \frac{x_2^2}{s_2} V_2 + f_{kd} K_c x_2 V_2 + (s_1 \cdot q_{12} + s_2 \cdot q_{r2} - q_{22} \cdot s_2) \right| \leq \varepsilon \quad (7.9)$$

$$\left| V_2 \frac{dc_2}{dt} \right| = \left| K_{la} f k_2 (c_s - c_2) V_2 - K_{o1} \mu_{\max} \frac{s_2 x_2}{(K_s + s_2)} V_2 - q_{22} c_2 + W_1 \right| \leq \varepsilon \quad (7.10)$$

$$\left| A l_d \frac{dx_d}{dt} \right| = \left| q_{sal} x_b - q_{sal} x_d - A \cdot v_s (x_d) \right| \leq \varepsilon \quad (7.11)$$

$$\left| A l_b \frac{dx_b}{dt} \right| = \left| q_{22} x_2 - q_{sal} x_b + A \cdot v_s (x_d) - A \cdot v_s (x_b) \right| \leq \varepsilon \quad (7.12)$$

$$\left| A l_r \frac{dx_r}{dt} \right| = \left| q_2 x_b - q_2 x_r + A \cdot v_s (x_b) \right| \leq \varepsilon \quad (7.13)$$

donde ε es un número real positivo próximo a cero.

Las relaciones entre los caudales vienen dadas por:

$$q_{12} = q_i + q_{r1} \quad (7.14)$$

$$q_{22} = q_{12} + q_{r2} \quad (7.15)$$

$$q_2 = q_{r1} + q_{r2} + q_p \quad (7.16)$$

Para el caso de la estructura de la planta con un reactor y un decantador ($y_1=0$), las ecuaciones (7.8) a (7.10) se desactivan de acuerdo a las condiciones lógicas antes descritas. Cuando $y_1=0 \Rightarrow V_2=0$ y $q_{r2}=0$, entonces se anulan directamente los términos multiplicados por V_2 en todas las ecuaciones, los términos restantes en las ecuaciones (7.8) y (7.9) desaparecen al quedar $q_{22} = q_{12}$ en (7.15), finalmente, para anular el último término de la ecuación (7.10) se requiere de una variable de holgura (W_1):

$$W_1 = (1 - y_1) q_{22} \cdot c_2 \quad (7.17)$$

Restricciones de operación:

Se establecen las siguientes restricciones con el fin de garantizar la operación adecuada de la planta:

- Tiempo de residencia en los reactores:

$$ret_{d1} \leq \frac{V_1}{q_{12}} \leq ret_{u1} \quad (7.18)$$

$$ret_{d2} \leq \frac{V_2 + (1 - y_1) \cdot W_2}{q_{22}} \leq ret_{u2} \quad (7.19)$$

Esta última restricción se descompone en dos inecuaciones:

$$V_2 + (1 - y_1) \cdot W_2 - ret_{u2} \cdot q_{22} \leq 0 \quad (7.20)$$

$$ret_{d2} \cdot q_{22} - V_2 + (1 - y_1) \cdot W_2 \leq 0 \quad (7.21)$$

donde W_2 se utiliza para ajustar la relación a la estructura actual de la planta siendo $W_2 = ret_{u2} \cdot q_{22}$ para (7.20) y $W_2 = -ret_{d2} \cdot q_{22}$ para (7.21).

- Carga másica en los reactores:

$$ml_{d1} \leq \frac{q_i s_i + q_{r1} s_2}{V_1 x_1} \leq ml_{u1} \quad (7.22)$$

$$ml_{d2} \leq \frac{q_{12} s_1 + q_{r2} s_2 - (1 - y_1) W_3}{V_2 x_2} \leq ml_{u2} \quad (7.23)$$

donde:

$$W_3 = q_{12} \cdot s_1 \quad (7.24)$$

- Edad de los fangos en el decantador:

$$sa_d \leq \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + Al_r x_r}{q_p x_r 24} \leq sa_u \quad (7.25)$$

- Capacidad hidráulica:

$$\frac{q_{22}}{A} \leq ch \quad (7.26)$$

- Relación entre el caudal de purga y el caudal de recirculación:

$$pg_d \leq \frac{q_p}{q_2} \leq pg_u \quad (7.27)$$

- Relación entre el caudal de recirculación y el caudal de entrada:

$$rec_d \leq \frac{q_2}{q_i} \leq rec_u \quad (7.28)$$

En concreto, los límites en las restricciones anteriores se toman de Moreno *et al.* (1992), que se denominarán a partir de ahora “*escenario 1*”, y límites menos estrictos con el fin de facilitar la controlabilidad similares a los de la Tabla 6.3, y se denominará “*escenario 2*” (Tabla 7.1)

Restricciones de proceso para escenario 1		Restricciones de proceso para escenario 2	
$ret_{d1}=2.5$ h	$ret_{u1}=8$ h	$ret_{d1}=2.5$ h	$ret_{u1}=8$ h
$ret_{d2}=2$ h	$ret_{u2}=6$ h	$ret_{d2}=2$ h	$ret_{u2}=6$ h
$ml_{d1}=0.001$	$ml_{u1}=0.6$	$ml_{d1}=0.001$	$ml_{u1}=0.12$
$ml_{d2}=0.001$	$ml_{u2}=0.6$	$ml_{d2}=0.001$	$ml_{u2}=0.12$
$sa_d=3$ d	$sa_u=10$ d	$sa_d=2$ d	$sa_u=10$ d
$rec_d=0.5$	$rec_u=0.9$	$rec_d=0.05$	$rec_u=0.9$
$pg_d=0.03$	$pg_u=0.07$	$pg_d=0.03$	$pg_u=0.7$
$ch=1.5$ m/h		$ch=1.5$ m/h	

Tabla 7.1: Restricciones de operación para dos escenarios de trabajo en el proceso de fangos activados

7.3 SÍNTESIS ECONÓMICA

7.3.1 Planteamiento del problema y algoritmo de optimización

La síntesis económica del proceso permite obtener una planta cuyas características están determinadas únicamente por criterios económicos. Para ello, se resuelve el problema de optimización descrito por las ecuaciones (7.4)-(7.28). Los pesos de la función objetivo se escogen de manera arbitraria: $\alpha_1=0.3$, $\alpha_2=0.3$, $\alpha_3=0.5$ y $\alpha_4=0.1$, pudiendo modificarse en función de la importancia que quiera darse a cada factor.

El método de optimización utilizado es el enfriamiento simulado (*simulated annealing*) (apéndice II), que permite la inclusión sencilla de la variable binaria y_l en la formulación. A continuación se describe su configuración particular para este problema.

Los candidatos a solución en el algoritmo se codifican como vectores que contienen las variables de decisión del problema, incluyendo las variables reales normalizadas y la variable binaria y_l localizada en la última posición de la forma siguiente:

$$\left[x_{1n}, x_{2n}, s_{1n}, s_{2n}, c_{1n}, c_{2n}, x_{dn}, x_{bn}, x_{rn}, q_{r1n}, q_{r2n}, q_{pn}, fk_{1n}, fk_{2n}, V_{1n}, V_{2n}, A_n, y_l \right]$$

donde el subíndice n indica que se trata de una variable normalizada entre el valor máximo y mínimo de su rango factible.

Para generar los nuevos estados se varían aleatoriamente y al mismo tiempo cuatro variables de la solución actual. El número de iteraciones para cada temperatura es inicialmente de 120, incrementándose con un factor $\beta=1.02$. La temperatura inicial es de 50, con una probabilidad de aceptación de 0.9. La tasa de enfriamiento se fija como una variación lineal del parámetro c con pendiente 0.88, para lograr una disminución lenta de este parámetro de control, permitiendo una búsqueda amplia del espacio en la primera etapa del algoritmo.

El funcionamiento general del algoritmo en la etapa inicial del proceso de búsqueda consiste en que casi cualquier solución es aceptada, aunque aumente el valor de la función objetivo, porque el parámetro de control c es grande. La aceptación se hace luego más selectiva al aumentar el número de iteraciones porque c decrece. Al final, sólo se aceptan las soluciones con menor coste, hasta llegar a la solución óptima.

Para tratar las restricciones se penaliza la función objetivo con un término proporcional a la desviación de las mismas multiplicado por cierto factor de penalización:

$$F(x) = f(x) + \left[\sum_{i=1}^m r_{k,i} \cdot \max[0, g_i(x)]^2 \right] \quad (7.29)$$

donde:

$f(x)$ es la función objetivo de la optimización.

r_i son constantes positivas escogidas como factores de penalización.

g_i corresponden a las restricciones de desigualdad.

m es el número de restricciones de desigualdad.

x son las variables de decisión en la optimización.

7.3.2 Resultados

En Tabla 7.2 se muestran los parámetros característicos de las plantas óptimas obtenidas al resolver el problema de síntesis para el conjunto de restricciones de operación más exigentes, correspondientes al *escenario 1* de la Tabla 7.1. La Figura 7.2 muestra la respuesta dinámica de la planta óptima obtenida frente a perturbaciones BSM1 de tiempo seco.

	Resultados
Coste	0.1757
Numero de reactores	1
s_1 (mg/l)	87.25
s_2 (mg/l)	-
V_1 (m ³)	6137
V_2 (m ³)	-
A (m ²)	1416.0
q_{r1} (m ³ /h)	630.67
q_{r2} (m ³ /h)	-
fk_1	0.070
fk_2	-

Tabla 7.2: Resultados de la síntesis económica del proceso de fangos activados

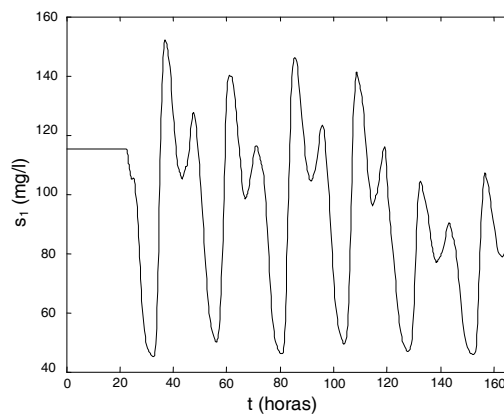


Figura 7.2: Evolución dinámica de s_1 para la planta obtenida por síntesis económica

A continuación se muestran algunos detalles de la evaluación de desempeño del algoritmo de enfriamiento simulado. Se realizan varios experimentos, variando el punto inicial, y también se estudia la sensibilidad del método a la variación de sus parámetros ajustables, como por ejemplo el parámetro de control c .

Las mejores soluciones halladas presentan una desviación promedio del 2% con respecto al óptimo. En la Tabla 7.3 se hace una comparación del desempeño en base a 10 ejecuciones del algoritmo con los parámetros ajustables que proporcionaron la mejor solución.

Promedio	Mejor solución	Repetibilidad	(%) Soluciones factibles	Tiempo de cómputo (s)
0.1840	0.1757	0.042	50	96.00

Tabla 7.3: Desempeño del enfriamiento simulado

7.4 SÍNTESIS DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS CON CONTROL PI

7.4.1 Planteamiento del problema y algoritmo de optimización

La formulación del diseño integrado en este caso se basa en la superestructura presentada en la figura 7.1, usando un controlador PI. El diseño debe definir la estructura de la planta, las dimensiones y punto de operación óptimos económicamente, y los parámetros de sintonía del controlador PI, todo ello cumpliendo ciertas condiciones de desempeño dinámico.

El objetivo de control consiste en mantener la concentración de sustrato a la salida (s_1 o s_2) dentro de los límites permitidos a pesar de las fuertes perturbaciones a las que está sometido el proceso, utilizando el caudal de recirculación de fangos q_{r1} como variable manipulada.

Entonces, la ley de control del PI para este caso es:

$$q_{r1} = q_{r1ss} + K_p \cdot (s_{ref} - s_{(1+\gamma_1)}) + \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^t (s_{ref} - s_{(1+\gamma_1)}) d\tau \quad (7.30)$$

donde:

s_{ref} : valor deseado para la concentración de sustrato a la salida, que corresponde al punto de operación óptimo.

q_{r1ss} : caudal de recirculación en estado estacionario, correspondiente al punto de equilibrio $s_{(1+\gamma_1)} = s_{ref}$

K_p : constante proporcional del controlador.

T_i : tiempo integral del controlador.

Para tener una medida del efecto de la estrategia de control sobre la calidad de la operación se introduce el *ISE* como índice de desempeño dinámico:

$$ISE = \int_{t=0}^{T_{max}} (s_{ref} - s_{(1+\gamma_1)})^2 \cdot dt \quad (7.31)$$

donde T_{max} es el tiempo de simulación

Al minimizar el ISE se minimiza la desviación de la concentración de sustrato a la salida respecto al punto de operación deseado en presencia de perturbaciones, por lo que se impone una cota superior al ISE como restricción de controlabilidad:

$$ISE \leq ISE_{max} \quad (7.32)$$

donde la cota ISE_{max} se fija dependiendo de los requerimientos del problema.

La formulación del problema de diseño integrado para este caso particular es por lo tanto la presentada en 7.2 pero incluyendo aquí la restricción sobre el ISE .

Algoritmo de optimización

Respecto a la configuración del algoritmo de optimización, todo lo mencionado en 7.3 para el enfriamiento simulado es válido aquí también, con la única diferencia de que ahora el vector que codifica las soluciones candidatas varía porque se introducen los parámetros del controlador PI:

$$\left[x_{1n}, x_{2n}, s_{1n}, s_{2n}, c_{1n}, c_{2n}, x_{dn}, x_{bn}, x_{rn}, q_{r1ss}, q_{r2n}, q_{pn}, fk_{1n}, fk_{2n}, V_{1n}, V_{2n}, A_n, K_{pn}, T_{in}, y_l \right]$$

La forma de evaluar cada solución candidata en este caso de estudio, es un poco más compleja, porque es necesaria la linealización del modelo para el cálculo de los autovalores de lazo cerrado y también la simulación del modelo dinámico no lineal para calcular el índice de desempeño (ISE). Mediante el cálculo de los autovalores se estudia la estabilidad de los modelos y se evitan las simulaciones en los casos inestables. En la Figura 7.3 se describe el procedimiento para cada solución candidata.

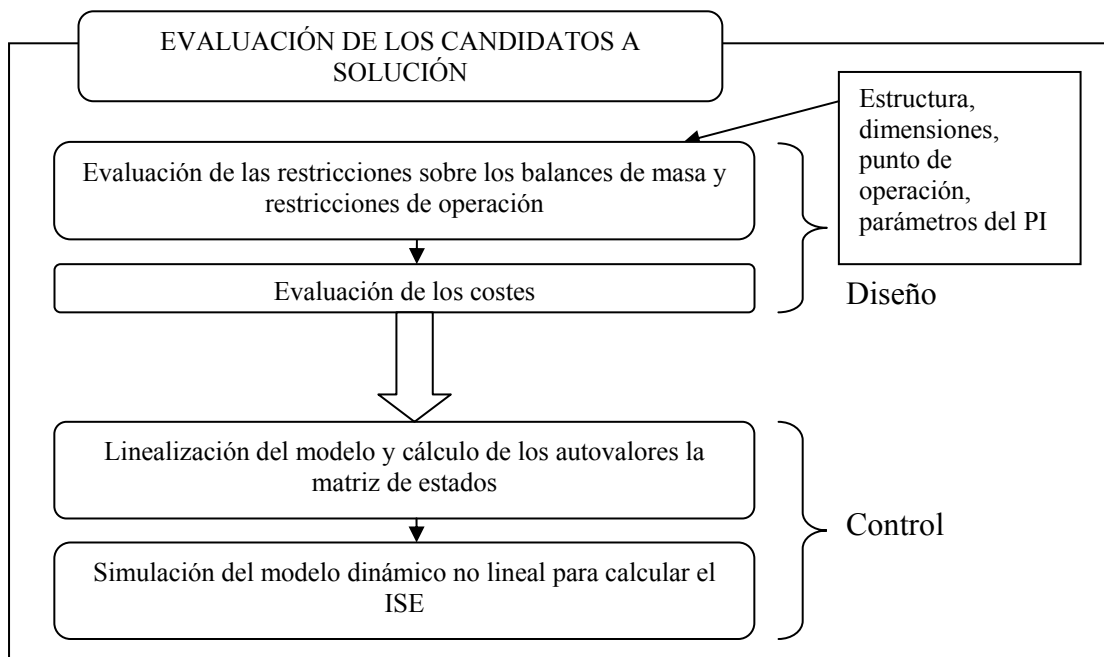


Figura 7.3: Evaluación de las soluciones candidatas durante la ejecución del enfriamiento simulado para el diseño integrado con un PI

7.4.2 Resultados

En la Tabla 7.4 se presentan los parámetros característicos de la mejor solución encontrada después de realizar 10 pruebas con el método del enfriamiento simulado, para los dos escenarios con diferentes restricciones de proceso. Se utilizan las perturbaciones del BSM1 para tiempo seco.

	Resultados con escenario 1	Resultados con escenario 2
<i>Coste</i>	0.2911	0.1611
s_1 (mg/l)	81.98	131.52
s_2 (mg/l)	25.68	27.72
V_1 (m ³)	5281.5	3737.8
V_2 (m ³)	3964.9	6100.1
A (m ²)	2588.8	2212.3
q_{r1} (m ³ /h)	643.4	234.82
q_{r2} (m ³ /h)	0.18	1.64
fk_1	0.037	0.076
fk_2	0.067	0.160
K_p	-12.24	-40.65
T_i	188.11	112.84
<i>ISE</i>	1901.7	823.98

Tabla 7.4: Resultados del diseño integrado del proceso de fangos activados con un controlador PI

Se puede observar que la variación en los límites de las restricciones afecta significativamente al resultado obteniéndose alternativas con grandes diferencias en los costes de construcción y operación.

En el escenario de restricciones de operación relajadas (*escenario 2*) se obtiene naturalmente una planta menos costosa. Sin embargo, las condiciones más exigentes dadas por el *escenario 1* permiten lograr una mayor eliminación de materia orgánica (s_2) a costa de mayor volumen del reactor y caudal de recirculación y una mayor penalización sobre el desempeño dinámico porque el *ISE* es mayor. En cuanto a la estructura óptima, en ambos casos se obtiene un sistema con dos reactores.

Si se compara la solución obtenida aquí, con la síntesis económica presentada en la Tabla 7.2, se encuentra un incremento significativo en los costes, ya que es necesario mayor volumen para atenuar el efecto de las perturbaciones. En consecuencia se obtiene, en ambos escenarios, una solución que es el compromiso entre los costes y un desempeño dinámico aceptable frente a perturbaciones, cuantificado por el *ISE*. En la Figura 7.4 se muestra la evolución dinámica de s_1 , con la evidente mejora alcanzada cuando se realiza diseño integrado del proceso con el controlador.

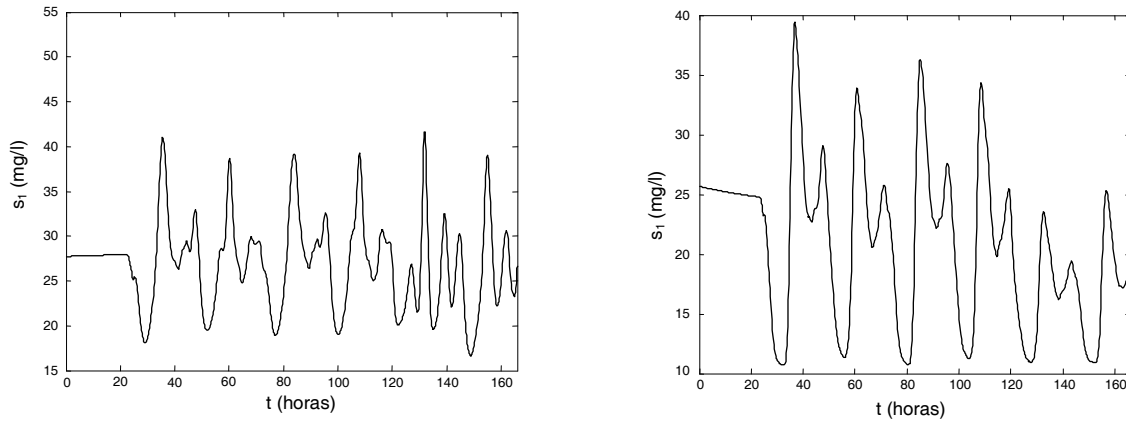


Figura 7.4: Evolución dinámica de s_1 para la planta obtenida mediante síntesis con PI para el *escenario 2* (izquierda) y el *escenario 1* (derecha)

7.5 SÍNTESIS DEL PROCESO DE FANGOS ACTIVADOS CON CONTROL MPC

7.5.1 Planteamiento del problema y algoritmo de optimización

En este último caso de estudio se resuelve el problema de diseño integrado incluyendo la síntesis del proceso con control predictivo basado en modelos (MPC) y los índices de controlabilidad basados en normas propuestos en el capítulo 4. Para ello se define la superestructura de la Figura 7.5.

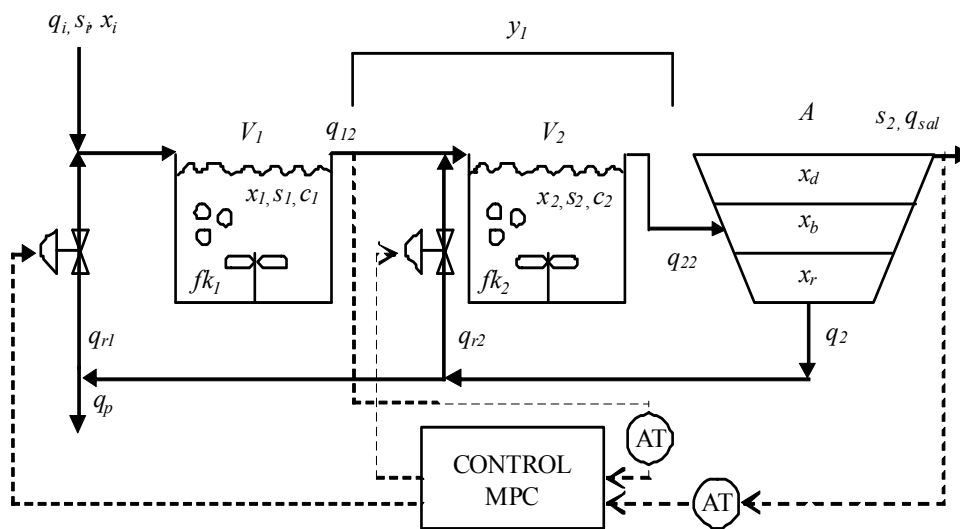


Figura 7.5: Superestructura del proceso de fangos activados con controlador predictivo multivariable MPC

El modelo de predicción para el MPC es el modelo discreto linealizado en el espacio de estado del proceso que representa la superestructura, con las salidas, entradas manipuladas y perturbaciones dadas respectivamente por los vectores siguientes:

$$\mathbf{y} = [s_1 \quad s_2]^T$$

$$\mathbf{u} = [q_{r1} \quad q_{r2}]^t$$

$$\mathbf{d} = [s_i \quad q_i]^t$$

Se considera la formulación básica del MPC, por lo que entre las variables de decisión se incluyen los parámetros de sintonía H_p , H_c y R .

La optimización se plantea como en las ecuaciones (7.4)-(7.28) considerando un objetivo económico f_I e introduciendo restricciones de controlabilidad basadas en normas. En concreto las restricciones son las siguientes:

$$\|\mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\|_{\infty} < 1 \tag{7.33}$$

$$\|\mathbf{M}_0\|_1 < u_{\max} \tag{7.34}$$

$$\|\mathbf{N}_0\|_1 < 1 \tag{7.35}$$

En la superestructura se observa que la selección de la estructura de control depende directamente de la configuración de la planta. Para $y_I=0 \Rightarrow V_2=0$ y $q_{r2}=0$ y el sistema de control es SISO, se controla s_I manipulando q_{r1} y se tiene solo un peso R asociado a los esfuerzos de control. Para $y_I=1 \Rightarrow V_2 \neq 0$ y $q_{r2} \neq 0$, y se tiene un sistema de control multivariable con los emparejamientos siguientes s_I - q_{r1} , s_2 - q_{r2} por lo que el peso \mathbf{R} es una matriz diagonal.

Puesto que el problema de optimización que se genera es complejo, se utiliza aquí para su resolución un algoritmo genético implementado en (Revollar *et al.*, 2010) (ver apéndice II), en el que cada solución se representa por un cromosoma mixto que incluye 19 variables reales y 3 enteras (horizontes del MPC y estructura de la planta):

$$[x_{1n}, x_{2n}, s_{1n}, s_{2n}, c_{1n}, c_{2n}, x_{dn}, x_{bn}, x_{rn}, q_{r1ss}, q_{r2n}, q_{pn}, fk_{1n}, fk_{2n}, V_{1n}, V_{2n}, A_n, R_{1n}, R_{2n}, H_p, H_c, y_I]$$

donde R_{1n} y R_{2n} denotan los pesos asociados a los esfuerzos de control, que conforman una matriz diagonal cuando $y_I=1$ y es un escalar cuando $y_I=0$, implicando a su vez que $R_{2n}=0$.

7.5.2 Resultados

En la Tabla 7.5 se presentan resultados para dos casos de diseño con selección de la estructura de la planta considerando diferentes pesos W_p para rechazo a perturbaciones y diferente cota sobre $\|\mathbf{M}_0\|_1$. Todos los pesos indicados aquí son relativos a la perturbación s_i .

$$\text{Caso 1: } W_{p1} = \frac{8s + 19.2}{s + 0.0001} \text{ y } \|\mathbf{M}_0\|_1 < 1000. \tag{7.36}$$

$$\text{Caso 2: } W_{p2} = \frac{4.4s + 10.56}{s + 0.0001} \text{ y } \|\mathbf{M}_0\|_1 < 450. \tag{7.37}$$

Los valores de los pesos W_{esf} para las funciones de sensibilidad al control de q_{r1} y q_{r2} se establecen en:

$$W_{esf_{qr1}} = \frac{0.0117s + 0.14}{s + 0.0004} \quad W_{esf_{qr2}} = \frac{0.0183s + 0.22}{s + 0.0004} \quad (7.38)$$

En esta tabla se observa cómo la variación en las condiciones de controlabilidad produce un cambio de estructura y condiciones de operación de la planta. En el caso 1 el resultado de la optimización es una planta con un mejor desempeño ante perturbaciones que el caso 2. El peso W_{p1} es más restrictivo para la función de sensibilidad $\mathbf{S}_0 \mathbf{R}_{d0}$, y además, la cota más relajada sobre $\|\mathbf{M}_0\|_1$ permite tener un rango más amplio de acción sobre la variable manipulada para rechazar perturbaciones. El perfil de perturbaciones utilizado es el de la plataforma BSM1 para la concentración s_i . En cuanto a las restricciones de operación, se utilizan las del *escenario 2* de la Tabla 7.1.

En cuanto al algoritmo genético se han utilizado los operadores de ruleta para la selección, de cruce aritmético y de mutación aleatoria (Revollar *et al.*, 2006). Concretamente, para la obtención de estos resultados se ha utilizado una población de 100 cromosomas, un número máximo de iteraciones de 1000, una tasa de mutación decreciente con las iteraciones desde 0.1 hasta 0.02 y una probabilidad de cruce del 80%. La selección se realiza manteniendo un 50% de los mejores individuos de la generación anterior, añadiendo el 50 % restante de los generados por las operaciones de cruce.

	Caso 1	Caso 2
V_1	5409.2	3442.7
V_2	0	2819.2
A	1253.1	1147.0
s_1 o s_2	$s_1=107.03$	$s_2=93.86$
\mathbf{R}	[0.009]	$\begin{bmatrix} 0.347 & 0 \\ 0 & 0.052 \end{bmatrix}$
H_p	7	7
H_c	2	4
$\ \mathbf{N}_0\ _\infty$	0.74	0.96
$\ \mathbf{M}_0\ _1$	725.7	281.3
$\ \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{R}_{d0}\ _\infty$	0.63	0.93
$\max s_1 - s_{1ref} $	17.7	36.5
$\max q_{r1}$ o q_{r2}	563.9	254.5

Tabla 7.5: Resultados de diseño integrado con síntesis del proceso de fangos activados con un controlador MPC

En la Figura 7.6 se muestra la función de sensibilidad para ambos casos de estudio junto con los pesos W_p y el inverso del espectro de perturbaciones en el influente. Aquí se observa como en el caso 2 hay menor separación entre el peso W_{p2} y la función de sensibilidad, evidenciando peor desempeño ante perturbaciones. Esto se puede observar también en la respuesta dinámica con el sistema lineal presentada en la Figura 7.7.

Si se comparan estos resultados con los obtenidos para el sistema con controlador PI, es notable la ventaja del esquema MPC al obtenerse plantas más reducidas, aunque no es fácil comparar las respuestas dinámicas porque se usan índices de distintos tipos para el diseño y las condiciones no son idénticas.

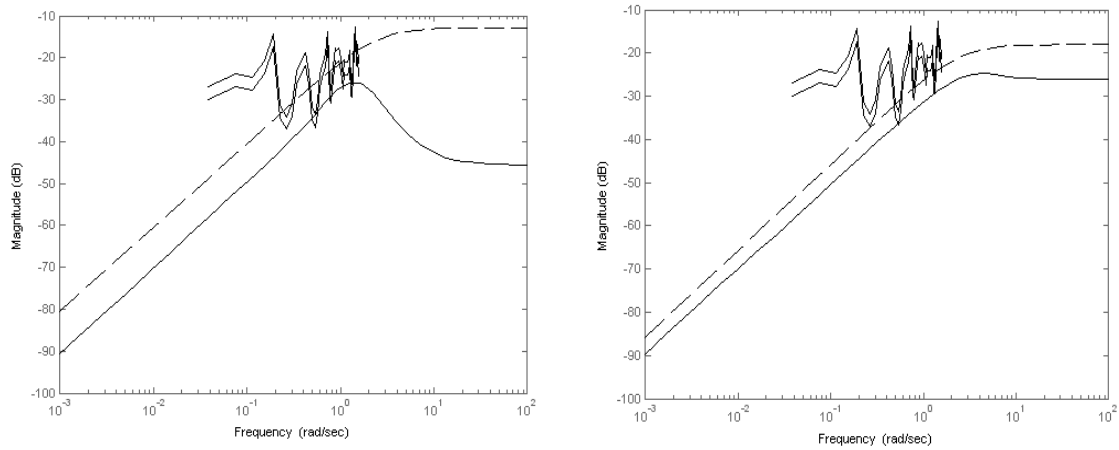


Figura 7.6: Magnitud de la función de sensibilidad S_0R_{d0} para los casos 1 (izquierda) y 2 (derecha), junto con W_p^{-1} (línea punteada) y el inverso del espectro de perturbaciones en el influente.

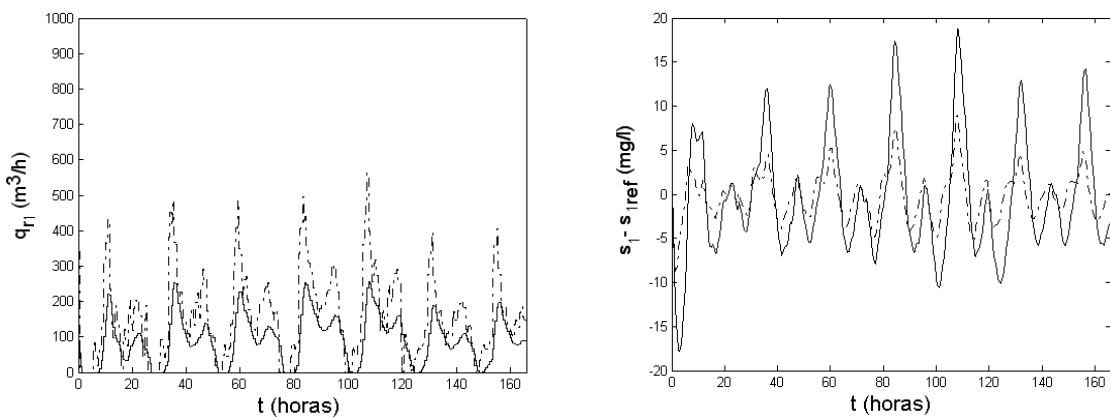


Figura 7.7: Evolución de s_1 para diseño y síntesis con MPC (línea punteada) comparada con la síntesis económica (línea continua) del punto 7.3, en el escenario 2 de restricciones

7.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se lleva a cabo el diseño integrado del proceso de fangos activados incluyendo la síntesis para la selección automática de la estructura. Partiendo de una superestructura que incluye dos reactores biológicos en serie y un decantador secundario, el problema de diseño se plantea como un problema de optimización mixto-entero no lineal con restricciones.

Los casos de estudio planteados se seleccionan para evaluar distintas aplicaciones de la metodología donde se contempla la síntesis solamente económica del proceso, la

síntesis y diseño con controladores PI y la síntesis con controladores MPC, considerando la evaluación de índices de controlabilidad basados en el modelo dinámico no lineal e índices basados en la evaluación de normas de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado.

Los resultados muestran las distintas situaciones de compromiso entre costes y controlabilidad, donde la estructura y dimensiones de la planta obtenida dependen de las restricciones de controlabilidad impuestas y de la estrategia de control utilizada. Para la síntesis económica se obtienen plantas con un solo reactor pero cuando las condiciones son más exigentes en cuanto a controlabilidad se obtienen plantas ya con dos reactores.

La resolución de este problema se lleva a cabo mediante algoritmos de optimización estocásticos: enfriamiento simulado (*simulated annealing*) y algoritmos genéticos, puesto que sus características hacen posible la incorporación de variables binarias asociadas a decisiones estructurales de la planta de forma sencilla. Además, estos métodos no necesitan información numérica relativa al gradiente de la función objetivo, su uso extensible a casos multiobjetivo, y tienen un buen comportamiento en cuanto a su convergencia a óptimos globales, a pesar de las no linealidades.

Capítulo 8

CONCLUSIONES, PRINCIPALES APORTACIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo está dedicado al desarrollo de una metodología de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control predictivo, también denominado diseño integrado, basada en índices de controlabilidad definidos mediante normas de funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado. En el diseño integrado los procedimientos de diseño del proceso y del sistema de control se integran en el marco de un problema de optimización único que proporciona la estructura de la planta, sus parámetros físicos, los parámetros de sintonía del MPC y un punto de operación estacionario, siempre cumpliendo las condiciones de controlabilidad impuestas.

En la literatura existente dentro del área de diseño integrado aparecen muy diversas metodologías basadas en optimización de índices de controlabilidad dinámicos, pero muy pocas que utilicen índices basados en normas de las funciones de sensibilidad del sistema. Estos últimos permiten la incorporación sencilla de condiciones de desempeño ya establecidas para sistemas lineales, incluso con robustez, además de acelerar la resolución de los problemas de optimización al no requerir de simulaciones dinámicas del proceso. En este trabajo se ha planteado su utilización combinada con esquemas de control MPC, con el fin de aunar las ventajas de ambos. La metodología se ha aplicado al diseño del proceso de fangos activados por su relevancia en depuración de aguas, su interés de control y su difícil dinámica.

Los objetivos se han cumplido, puesto que se ha desarrollado una metodología de diseño integrado con control MPC que utiliza índices basados en normas H_∞ y l_1 de las funciones de sensibilidad del sistema en lazo cerrado, con buenos resultados. Para ello ha sido necesario comenzar con la exploración de otras técnicas secuenciales o basadas en índices dinámicos, con el fin de poner de manifiesto su problemática particular y focalizar adecuadamente las condiciones del diseño integrado, definiendo los índices más adecuados.

Un aspecto relevante es la inclusión de controladores MPC dentro de la metodología de diseño simultáneo de procesos y sistemas de control propuesta, con objeto de mejorar el desempeño del control clásico. Dado que la sintonía de controladores predictivos es un tema con gran interés por la dificultad que entraña para algunos procesos, y en el diseño integrado se ajustan sus parámetros junto con el diseño de la planta, se han derivado algunas técnicas de sintonía automática de controladores MPC que se presentan de forma independiente.

La formulación del MPC elegida se basa en modelos de predicción lineales en el espacio de estados, que permite la evaluación de los índices de controlabilidad propuestos y es lo suficientemente sencilla para ser integrada en el diseño integrado sin perder los beneficios del MPC. Además, esta formulación permite incluir un término de penalización terminal que garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Tras un exhaustivo estudio de las posibilidades (horizonte infinito, restricción terminal, penalización terminal, etc.), se propuso la mencionada técnica por ser la más aceptada actualmente.

La metodología se ha desarrollado incluyendo condiciones de estabilidad y desempeño robusto basadas en la teoría clásica de control, puesto que la incertidumbre está siempre presente tanto en las perturbaciones como en los modelos utilizados. Para la aplicación práctica de estas condiciones se han considerado regiones de incertidumbre poliédricas definiendo adecuadamente los vértices mediante modelos lineales locales. De esta forma, asumiendo la convexidad de estas regiones, únicamente es necesario aplicar las condiciones de robustez en estos vértices simplificando en gran medida el problema.

Como caso de estudio se ha elegido el diseño integrado del proceso de fangos activados en una planta depuradora de aguas residuales, tanto para eliminación de materia orgánica como de nitrógeno, utilizando el BSM1. El objetivo particular aquí consiste en diseñar plantas óptimas en cuanto a costes de construcción y operación, junto con el sistema de control MPC, cumpliendo las correspondientes condiciones de controlabilidad.

La complejidad de los problemas involucrados, especialmente si existen variables binarias para la selección de la estructura y además se tienen en cuenta los horizontes del MPC (problemas MINLP), ponen de manifiesto la necesidad de utilizar métodos de optimización particulares. En este trabajo, como alternativa a otros métodos más complejos se ha propuesto una estrategia en dos pasos iterativos que proporciona buenos resultados con rápida convergencia. Por otro lado, también se han utilizado métodos de optimización estocásticos como el enfriamiento simulado o los algoritmos genéticos, que permiten de forma sencilla incorporar variables enteras en su formulación.

Los resultados de diseño integrado del proceso de fangos activados mostrados se han realizado en diferentes condiciones, variando las regiones de incertidumbre, los índices de controlabilidad, los pesos en los índices y las estrategias de optimización. En todas ellas se observa una situación de compromiso entre costes, rechazo a perturbaciones y esfuerzos de control que el diseñador deberá valorar según sus necesidades.

La resolución del problema de diseño incluyendo la síntesis para la selección de la estructura se ha llevado a cabo considerando controladores PI y MPC, como ejemplos particulares de aplicación de la metodología.

LISTA DE PUBLICACIONES GENERADAS

En revistas indexadas en Science Citation Index (SCI):

Francisco, M.; Vega, P. y H. Álvarez. Robust Integrated Design of processes with terminal penalty model predictive controllers. *Chemical Engineering Research and Design*, 89, 1011-1024 (2011).

En este artículo se presenta una metodología de diseño integrado robusto con controladores MPC que incluyen un término de penalización terminal para garantizar la estabilidad. Los índices de controlabilidad están basados en normas de funciones de transferencia y las regiones de incertidumbre quedan determinadas por múltiples modelos locales. El problema de optimización no lineal con restricciones que se

genera se resuelve utilizando distintas estrategias. La metodología se aplica al proceso de fangos activados.

Francisco, M. y Vega, P. Automatic Tuning of Model Based Predictive Controllers based on Multiobjective Optimization. *Latin American Applied Research*, 40, 255-265. ISSN (paper version): 0327-0793.

En este artículo se presenta una metodología de sintonía automática robusta de controladores MPC. Los índices de controlabilidad están basados en normas de funciones de transferencia y las regiones de incertidumbre quedan determinadas por múltiples modelos locales. El problema de optimización no lineal con restricciones que se genera se resuelve en dos pasos iterativos debido a la existencia de parámetros enteros (horizontes) y reales. La metodología se aplica al proceso de fangos activados.

Revollar, S.; Francisco, M.; Lamanna, R. y Vega, P. Stochastic Optimization for the Simultaneous Synthesis and Control System Design of an Activated Sludge Process. *Latin American Applied Research*, 40, 137-146. ISSN (paper version): 0327-0793.

En este artículo se utilizan dos métodos de optimización estocásticos, en concreto los algoritmos genéticos y el *simulated annealing*, para la resolución del problema de diseño integrado y síntesis del proceso de fangos activados, y se comparan los diversos resultados. La formulación matemática del problema traslada una superestructura del proceso en un problema de optimización mixto entero con restricciones no lineales. Los índices de desempeño están basados en simulaciones dinámicas del proceso.

Francisco, M. y Vega, P. Diseño Integrado de Procesos de Depuración de Aguas Utilizando Control Predictivo Basado en Modelos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Vol. 3, Núm. 4, Octubre 2006. ISSN: 1697-7912 (v. impresa); ISSN: 1697-7920, 88-98 (v. electrónica) CEA/IFAC.

En este artículo se presenta una metodología de diseño integrado del proceso de fangos activados incluyendo un controlador predictivo con restricciones. Matemáticamente se plantea un problema de optimización multiobjetivo no lineal con restricciones, que considera costes y controlabilidad. Los índices de desempeño están basados fundamentalmente en simulaciones dinámicas como la integral del error cuadrático (*ISE*). La resolución del problema de optimización se realiza en dos pasos iterativos incluyendo una parte de optimización estocástica.

- **En congresos internacionales:**

Francisco, M.; Vega, P.; Elbahja, H.; Álvarez, H. y Revollar, S. (2010). Integrated Design of Processes with Infinity Horizon Model Predictive Controllers. ETFA 2010 (Bilbao, Spain).

Francisco, M.; Álvarez, H.; Vega, P. y Revollar, S. (2010). Stable Model Predictive Control tuning considering asymmetric bounded signals. ESCAPE 20 (Ischia, Italy).

- Francisco, M.; Vega, P. y Fuente, M. J. (2009).** Model predictive control tuning considering l_1 norm for disturbance rejection. European Control Conference, ECC09 (Budapest, Hungary). pp. 2241-2246.
- Revollar, S.; Francisco, M.; Vega, P. y Lamanna, R. (2008).** Genetic algorithms for the synthesis and integrated design of processes using advanced control strategies. International Symposium on Distributed Computing and Artificial Intelligence, DCAI'08 (Salamanca, Spain). Lecture Notes on Computer Science. Volume 50/2009, pp 205-214.
- Francisco, M. y Vega, P. (2008).** Multi-model approaches for Integrated Design of Wastewater Treatment plants with Model Predictive Control. 17th IFAC World Congress. (Seoul, Korea).
- Vega, P.; Francisco, M. y Tadeo, F. (2008).** Multiobjective optimization for automatic tuning of robust Model Based Predictive Controllers. 17th IFAC World Congress. (Seoul, Korea).
- Francisco, M. y Vega, P. (2007).** Norm based approaches for Integrated Design of Wastewater Treatment Plants. ECCE-6 (Copenhagen, Denmark).
- Vega, P.; Francisco, M. y Sanz, E. (2007).** Norm based approaches for automatic tuning of Model Based Predictive Control. ECCE-6 (Copenhagen, Denmark).
- Francisco, M. y Vega, P. (2007).** Integrated Design of Wastewater Treatment Processes using Model Predictive Control. European Control Conference (ECC 07). ISBN 976-960-89028-5-5, pp. 5333-5340 (Kos, Greece).
- Francisco, M.; Vega, P. y Pérez, O. (2005).** Process Integrated design within a Model Predictive Control framework. 16th IFAC World Congress. (Prague, Czech Republic).
- Francisco, M.; Revollar, S.; Vega, P. y Lamanna, S. (2005).** A comparative study of deterministic and stochastic optimization methods for the Integrated design of processes. 16th IFAC World Congress. (Prague, Czech Republic).

TRABAJO FUTURO

La metodología de diseño integrado propuesta está basada en índices de controlabilidad basados en normas, que evitan la utilización de optimización dinámica y su elevada carga computacional. Esta formulación permite imponer condiciones de desempeño y estabilidad utilizando modelos linealizados del sistema, pero no restricciones físicas en las variables manipuladas debido a que habitualmente el proceso real es no lineal. La solución propuesta en este trabajo ha sido la imposición de restricciones sobre las normas con cierto margen para evitar que perturbaciones de gran magnitud provoquen infactibilidades, pero este procedimiento no asegura con certeza su cumplimiento.

Una línea de trabajo futuro consistiría en la utilización de medidas de controlabilidad práctica dentro del procedimiento de diseño integrado, que permitirían evaluar la controlabilidad de estado no lineal en el diseño del proceso con aspectos como las restricciones físicas mencionadas en el párrafo anterior. Estas medidas surgen fundamentalmente del estudio de la matriz de controlabilidad no lineal análoga a la propuesta por Kalman para sistemas lineales; en concreto su rango, que está relacionado con la imposibilidad física de alcanzar un estado deseado, pero también se estudiarían los grados de libertad insatisfechos y efectivos mediante el determinante de la matriz asociada con la respuesta forzada, o la pertenencia de la acción de control al conjunto disponible de las mismas.

Otra línea futura sería la utilización de medidas de controlabilidad no lineal en el espacio de estados en combinación con las medidas de entrada-salida basadas en normas, de forma que las primeras constituyan las condiciones necesarias para aplicar con sentido las segundas a nivel de la regulación del proceso. La utilización única de medidas de entrada-salida no produce necesariamente diseños controlables en el espacio de estados, y además todos los índices se obtienen en torno a un punto de equilibrio, por lo que no se garantiza la operación del proceso en todo su espacio de estados. Una propuesta es la utilización de índices basados en controlabilidad de estado para poder determinar estabilidad, observabilidad y controlabilidad desde el punto de vista clásico, y extender los resultados a la controlabilidad no lineal. La controlabilidad en el espacio de estados para sistemas lineales supone siempre entradas sin acotar, lo que habitualmente no se ajusta mucho a la realidad en una planta, por lo que se propone introducir la matriz de controlabilidad no lineal, mejorando así la definición del problema de diseño integrado.

La incorporación de medidas de incertidumbre en el diseño integrado es otro aspecto importante, por lo que se plantea como línea futura explorar otras formas de representación diferentes a la incertidumbre poliédrica basada en modelos locales linealizados, como por ejemplo incertidumbre no lineal mediante modelos afines en las variables de estado o modelos de series de Volterra inciertos, que producirían resultados menos conservativos, aunque requerirían de la identificación de sus parámetros a partir de simulaciones no lineales del proceso. Por otra parte, también sería posible incluir algún tipo de incertidumbre en las medidas de controlabilidad práctica con el fin de obtener diseños robustos y a la vez controlables. Dada la variabilidad de los procesos biológicos involucrados, la consideración de incertidumbre paramétrica sería un aspecto

a investigar de forma que las condiciones de robustez reflejen fielmente la variabilidad del proceso de fangos activados.

En cuanto al algoritmo de control MPC utilizado, la formulación con modelos de predicción lineales puede no ser una solución adecuada si se tiene en cuenta la variabilidad y complejidad del proceso de fangos activados, con un alto grado de no linealidad e incertidumbre, y sometido a fuertes perturbaciones. Una línea de trabajo consistiría en la inclusión de controladores MPC no lineales en el diseño integrado, complementada con nuevos índices de controlabilidad no lineal como los mencionados anteriormente, de forma que el desempeño del controlador no se deteriore cuando el proceso se aleja del punto de operación. Respecto al algoritmo de control, la utilización de formulaciones con estabilidad y robustez garantizada serían exploradas.

Para que el tratamiento del agua sea óptimo además de un buen control es necesaria una operación adecuada de la planta. Una posible solución sería la incorporación de optimización dinámica para generar trayectorias óptimas basadas en criterios económicos y de calidad, de forma que el control realimentado rechace las perturbaciones y sea capaz de seguirlas. De la misma forma que el diseño tiene su influencia sobre la controlabilidad de lazo, también la tiene sobre la optimización de las consignas, por lo que una línea futura de trabajo sería la implantación de estas estructuras de control, incluyendo las perturbaciones en el nivel superior para evitar infactibilidades y dotar de mayor robustez los diseños. El resultado del diseño deberá englobar la sintonía de los controladores de lazo junto con los de supervisión.

Otra línea de trabajo a completar en la parte correspondiente al diseño integrado incluyendo la síntesis o determinación de la estructura del proceso, sería considerar también la obtención de la estructura de control mediante nuevas variables binarias. El problema de optimización generado se podría resolver con alguno de los métodos de optimización estocásticos propuestos en la tesis que admiten en su formulación este tipo de variables. En general, dado que el problema de diseño integrado no es convexo, muchos de los resultados están obtenidos partiendo de distintos puntos iniciales con el fin de validar la solución, pero esto conlleva un esfuerzo añadido al problema de diseño integrado, por lo que la utilización de métodos de optimización global también sería una línea a explorar.

REFERENCIAS

- Alex, J.; Benedetti, L.; Copp, J.; Gernaey, K.; Jeppsson, U.; Nopens, I.; Pons, M.; Rieger, L.; Rosen, C.; Steyer, J.; Vanrolleghem, P. y Winkler, S. (2008).** Benchmark Simulation Model no. 1 (BSM1). IWA Taskgroup on benchmarking of control strategies for WWTPs. Dpt. of Industrial Electrical Engineering and Automation, Lund University. Cod.: LUTEDX-TEIE 7229. 1-62.
- Allgöwer, F. and A. Zheng (Eds.) (2000).** Nonlinear Model Predictive Control, Ed. Birkhäuser
- Asteasuain, M; Sarmoria, C; Brandolin, A. y Bandoni, A. (2007).** Integration of control aspects and uncertainty in the process design of polymerization reactors. Chemical Engineering Journal, 131: 135–144.
- Bahri, P. A.; Bandoni, J. A.; Barton, G. W. y Romagnoli, J. A. (1995).** Back-off calculations in optimising control. Computers and Chemical Engineering, S19: S699-S708.
- Baker, R. y Swartz, C. (2006).** Interior point solution of integrated plant and control design problems with embedded MPC. AIChE Annual Meeting, San Francisco, CA. 12-17.
- Bansal, V.; Perkins, J. D.; Pistikopoulos, E. N.; Ross, R.; van Schijndel, J. M. G. (2000).** Simultaneous design and control optimization under uncertainty. Computers and Chemical Engineering, 24: 261–266.
- Barton, G.; Padley, M. y Perkins, J. (1992).** Incorporating operability measures into the process synthesis stage of design. Proceedings IFAC Workshop on Interactions between Process Design and Process Control. Pergamon Press. London. 95-98.
- Bellman, R. (1957).** Dynamic programming. Princeton University Press.
- Blanco, A. y Bandoni, A. (2003).** Interaction between process design and process operability of chemical processes: an eigenvalue optimization approach. Computers and Chemical Engineering 27(8-9): 1291-1301.
- Bregel, D. y Seider, W. (1992).** Coordinated design and control optimization of nonlinear processes. Computers and Chemical Engineering, 16: 861–886.
- Chawankul, N.; Budman, H.; Douglas, P.L. (2005).** The integration of design and control: IMC control and robustness, Computers & Chemical Engineering, 29: 261–271.
- Chawankul, N.; Ricardez Sandoval, L.; Budman, H.; Douglas, P.L. (2007).** Integration of design and control: A robust control approach using MPC. Canadian J. of Chemical Engineering, 85: 433–446.
- Clarke, D. W.; Mohtadi, C. y Tuffs, P.S. (1987).** Generalised predictive control, Parts 1 and 2. Automatica, 23: 137-160.

- Colmenares, W. y Tadeo, F. (2005).** Apuntes sobre control robusto y multiobjetivos de sistemas. Ed. Equinoccio, Universidad Simón Bolívar
- Copp, J.B. (2002).** The COST Simulation Benchmark: Description and Simulator Manual. Office for Official Publications of the European Community. http://www.ensic.inpl-nancy.fr/benchmarkWWTP/Pdf/Simulator_manual.pdf
- Cutler, C. R. y Ramaker, B. L. (1980).** Dynamic matrix control – a computer control algorithm. Proceedings of the American Control Conference.
- Dahleh, M. y Diaz-Bobillo, I. (1995).** Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach, Prentice-Hall.
- Deb (1995).** Optimization methods for engineering design. Prentice Hall. New Delhi.
- De la Cruz, J. M. (2003).** Optimización multiobjetivo con restricciones. IV Curso de Especialización en Automática (Málaga).
- Dominguez, D.; Revollar, S.; Francisco, M.; Lamanna, R. y Vega, P. (2009).** Simultaneous Synthesis and Integrated Design of Chemical Processes Using IMC PID Tuning Methods. International Conference on Chemical and Process Engineering (IcheaP). Roma
- Elbahja, H., Bakka, O., Vega, P. y Mesquine F. (2010).** Investigation of Different Control Strategies for the Waste Water Treatment Plant. Proceedings of STA'2010. Monastir, Túnez.
- Exler, O.; Antelo, L.; Egea, J.; Alonso, A. y Banga, J. (2008).** A Tabu search-based algorithm form mixed-integer-nonlinear problems and its applications to integrated process and control system design. Computers and Chemical Engineering, 32: 1877-1891.
- Flores-Tlacuahuac, A. y Biegler L. (2007).** Simultaneous mixed-integer dynamic optimization for integrated design and control. Computers and Chemical Engineering, 31:588-600.
- Francisco, M.; Vega, P.; Pérez, O.; Poch, M. (2003).** Dynamic Optimization for Activated Sludge Integrated Design. Proceedings of European Control Conference (Cambridge, United Kingdom).
- Francisco, M.; Vega, P.; Pérez, O. (2005).** Process Integrated design within a Model Predictive Control framework. Proceedings 16th IFAC World Congress. Pavel Zítek (Editor). Praga.
- Francisco, M.; Revollar S.; Lamanna R. y Vega, P. (2005).** A Comparative Study of Deterministic and Stochastic Optimization Methods for Integrated Design of Processes. Proceedings 16th IFAC World Congress. Pavel Zítek (Editor). Praga.
- Francisco, M. y Vega, P. (2006).** Diseño Integrado de procesos de depuración de aguas utilizando Control Predictivo Basado en Modelos. Rev. Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 3 (4): 88-98.

- Francisco, M. y Vega, P. (2007).** Integrated Design of Wastewater Treatment Processes using Model Predictive Control. Proceedings of European Control Conference (Grecia), 5333-5340.
- Francisco, M. y Vega, P. (2007).** Norm based approach for automatic tuning of Model Predictive Controllers. Proceedings of ECCE-6, Copenhagen.
- Francisco, M. y Vega, P. (2008).** Multi-model approaches for Integrated Design of Wastewater Treatment Plants with Model Predictive Control. Proceedings 17th IFAC World Congress. (Seúl, Korea).
- Francisco, M.; Revollar, S; Vega, P. y Lamanna, R. (2009).** Simultaneous synthesis, design and control of processes using model predictive control. Proceedings International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes (Adchem). Istanbul.
- Francisco, M.; Álvarez, H.; Vega, P.; Revollar, S. (2010).** Stable Model Predictive Control tuning considering asymmetric bounded signals. Proceedings of ESCAPE 20 (Ischia, Italy)
- Francisco, M.; Vega, P.; Elbahja, H.; Alvarez, H. y Revollar, S. (2010).** Integrated Design of Processes with Infinity Horizon Model Predictive Controllers. Emerging Technologies and Factory Automation (ETF A 2010). Bilbao.
- Garriga, J. L. y Soroush., M. (2010).** Model Predictive Control Tuning Methods: A Review. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 49 (8): 3505–3515.
- Geoffrion, A. Generalized bender decomposition. (1972).** *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4), 237–260.
- Grosch, R.; Mönnigmann, M. y Marquardt, W. (2008).** Integrated Design and Control for robust performance: Application to an MSMR crystallizer. *Journal of Process Control*, 18: 173-188.
- Grossmann, I. (2002).** Review of Nonlinear Mixed-Integer and Disjunctive Programming Techniques. *Optimization and Engineering*, 3: 227–252.
- Gupta, O. y Ravindran, V. (1985).** Branch and Bound experiments in nonlinear integer programming. *Management Sciences*. 31(12): 1533-1546.
- Gutierrez, G. (2000).** Diseño integrado y síntesis de procesos aplicada al proceso de fangos activados. Ph.D. Tesis, Universidad de Valladolid, Spain.
- Gutierrez, G. y Vega, P. (2000).** Integrated design of Activated Sludge Processes taking into account the closed loop controllability. Proceedings del ESCAPE 2000. Florencia, Italia.
- Gutiérrez, G. y Vega, P. (2002).** Integrated design of chemical processes and their control system including closed loop properties for disturbances rejection. 15th IFAC Triennial World Congress. Barcelona.

- Hamid, M.; Sin, G. y Gani, R. (2010).** Integration of process design and controller design for Chemicals processes using model based methodology. *Computers and Chemical Engineering*. 34: 683-699.
- Kariwala, V. y Skogestad, S. (2007).** L1/Q approach for efficient computation of disturbance rejection measures for feedback control. *Journal of process control*, 17: 501-508.
- Kookos, I. y Perkins, J. D. (2001).** An algorithm for simultaneous process design and control. *Industrial and Engineering Chemical Research*. 40: 4079–4088.
- Kookos, I. y Perkins, J. D. (2004).** The back-off approach to simultaneous design and control. In “The Integration of Process Design and Control”. P. Seferlis and M.C. Georgiadis (Editors). Elsevier.
- Lamanna, R., Vega, P., Revollar, S., Alvarez, H. (2009).** Diseño Simultáneo de Proceso y Control de una Torre Sulfitadora de Jugo de Caña de Azúcar. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI)*. 6(3): 32 – 43.
- Lewin, D. (1999).** Interaction of design and control. *Proceedings of the 7th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation. (MED'99)*. Haifa.
- Loeblein, C., y Perkins, J. (1999).** Structural design for on-line process optimization: I. Dynamic economics of MPC. *AIChE J.*, 45(5): 1018–1029.
- Lu, X.; Li, H.; Duan, J. y Su, D. (2010).** Integrated Design and Control under uncertainty: A fuzzy modelling approach. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 49: 1312–1324
- Luyben, W. (1993).** Trade-off between design and control in chemical reactor systems. *Journal of Process Control*. 3(1): 17-41
- Luyben, M. y Floudas, C. (1994).** Analyzing the interaction of design and control- 1. A multiobjective framework and application to binary distillation synthesis. *Computers and Chemical Engineering*. 18: 933-969.
- Maciejowsky, J. M. (2002).** Predictive control with constraints. Prentice Hall.
- Malcolm, A.; Polan, J.; Zhang, L.; Ogunnaike, B. A.; Linninger, A. A. (2007).** Integrating Systems Design and Control using Dynamic Flexibility Analysis. *AIChE J*, 53: 2048–2061.
- Mayne, D. Q.; Rawlings, J. B.; Rao, C. V.; Scokaert; P. O. M. (2000).** Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica* 36:789-814.
- Mesquine, F., Bakka O., Elbahja H. y Vega, P. (2010).** : Observer based regulator problem for WWTP with constraints on control. *Proceedings of ETFA 2010, (Bilbao)*.
- Miranda, M.; Reneaume, J.; Meyer, X.; Meyer M. y Szigetid, F. (2008).** Integrating process design and control: An application of optimal control to chemical processes. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*. 47(11): 2004-2018

- Mohideen, M.; Perkins, J. y Pistikopoulos, E. (1996b).** Optimal synthesis and design of dynamic systems under uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, 20S: S895–S900.
- Moles, C. G.; Gutierrez, G.; Alonso, A. A.; Banga, J. R. (2003).** Integrated process design and control via global optimization: A wastewater treatment plant case study. *Chemical Engineering Research and Design*, 81: 507–517.
- Morari, M. (1992).** Effect of design on the controllability of continuous plants. *Proceedings IFAC Workshop on Interactions between Process Design and Process Control*. Pergamon Press. London. 3-16.
- Morari, M. y Zafiriou, E. (1989).** Robust process control. Ed. Prentice Hall.
- Moreno, R. (1994).** Estimación de estados y control predictivo del proceso de fangos activados. Ph.D. Tesis, Universitat Autònoma de Barcelona, España.
- Muñoz, D. (2007).** Controlabilidad de sistemas dinámicos no lineales acoplados. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia-Medellín.
- Muske, K. R. y Rawlings, J. B. (1993).** Linear model predictive control of unstable processes. *Journal of Process Control*, 3, nº 2: 85-96.
- Naib, M.; Benzaouia, A.; Tadeo, F. (2003).** l_1 - optimal control with asymmetric bounds. *Proceedings European Control Conference* (Cambridge, UK).
- Nejjari, F.; Quevedo, J. (2004).** Predictive Control of a Nutrient Removal Biological plant. *Proceedings American Control Conference* (Boston, Massachusetts).
- Ochoa, S. (2005).** Metodología para la integración diseño-control en el espacio de estados. Tesis de Maestría en Ingeniería Química. Universidad Nacional de Colombia-Medellín.
- Ortega, M.G. y Rubio, F.R. (2004).** Systematic design of weighting matrices for the H_∞ mixed sensitivity problem. *Journal of Process Control* 14: 89–98.
- Ostace, G.S., Cristea, V.M. y Agachi, P.S. (2010).** Investigation of Different Control Strategies for the BSM1 Waste Water Treatment Plant with Reactive Secondary Settler Model. *Proceedings of ESCAPE'20* (Italia).
- Pajula, E. y Ritala, R. (2006).** Measurement uncertainty in integrated control and process design - A case study. *Chemical Engineering and Processing* 45: 312-322.
- Patel, J.; Uygun, K. y Huang, Y. (2007).** A path constrained method for integration of process design and control. *Computers & Chemical Engineering*. 32: 1373-1384.
- Puigjaner, L.; Ollero, P.; De Prada, C.; Jimenez, L. (2006).** Estrategias de modelado, simulación y optimización de procesos químicos. Editorial Síntesis
- Qin, S.J. y Badgwell, T.A. (2000).** An overview of nonlinear model predictive control applications. *Progress in Systems and Control Theory*, Vol. 26, part III, 369-392.

- Rawlings, J. B.; Muske, K. R. (1993).** The stability of constrained receding horizon control. *IEEE transactions on automatic control*, 38, nº 10: 1512-1516.
- Revollar, S; Vega, P. y Lamanna, R. (2004).** Algorithmic synthesis and integrated design of chemical reactor systems using genetic algorithms. *Proceedings of the World Automation Conference Vol 17*, 453-457. Sevilla.
- Revollar, S.; Lamanna, R y Vega, P. (2006).** Genetic Algorithms for Simultaneous Design and Control of Continuous Stirred Tank Reactor System. *Proceedings Chemical Process Control, CPC7*. Lake Louise. Canada
- Revollar, S., Francisco, M.; Vega, P. y Lamanna, R. (2008b).** Genetic algorithms for the synthesis and integrated design of processes using advanced control strategies. *International Symposium on Distributed Computing and Artificial Intelligence (DCAI'08).Lecture Notes on Computer Science. Volume 50/2009 pp 205-214*.Salamanca.
- Revollar, S.; Francisco, M.; Vega, P. y Lamanna, R. (2010a).** Stochastic optimization for the simultaneous synthesis and control system design of an activated sludge process. *Latin American Applied Research*. 40: 137-146.
- Ricardez Sandoval, L.; Budman, H. M. y Douglas, P. (2008).** Simultaneous design and control of processes under uncertainty: A robust modelling approach. *Journal of Process Control*, 18: 735–752.
- Ricardez-Sandoval, L.; Budman, H. y Douglas, P. (2009a).** Simultaneous design and control of chemical processes with application to the Tennessee Eastman process. *Journal Process Control*, 19: 1377–1391.
- Ricardez-Sandoval, L.; Budman, H. y Douglas, P. (2009b).** Application of robust control tools to the simultaneous design and control of dynamic systems, *Industrial & Engineering Chemistry Research* 48: 801–813.
- Ricardez-Sandoval, L.; Budman, H. y Douglas, P. (2009c).** Integration of design and control for chemical processes: A review of the literature and some recent results. *Annual Reviews in Control*, 33: 158–171.
- Ricardez-Sandoval, L.; Budman, H. y Douglas, P. (2010).** Simultaneous design and control: A new approach and compaisons with existing methodologies. *Industrial Engineering Chemical Research*, 49: 2822-2833.
- Rivas, A.; Ayesa, E.; Galarza, A.; Salterain, A. (2001).** Application of mathematical tools to improve the design and operation of activated sludge plants. Case study: the new WWTP of Galindo-Bilbao. Part I: Optimum design. *Water Science and Technology*, 43 (7):157–165.
- Rivas, A.; Irizar, I.; Ayesa, E. (2008).** Model-based optimisation of Wastewater Treatment Plants design. *Environmental Modelling & Software* 23: 435-450.
- Rossiter, J. A. (2003).** *Model Based Predictive Control, a practical approach*. Ed. CRC Press.

- Sakizlis, V.; Perkins, J. D. y Pistikopoulos, E. N. (2003).** Parametric controllers in simultaneous process and control design optimization. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 42(20): 4545–4563.
- Sakizlis, V.; Perkins, J. D. y Pistikopoulos, E. N. (2004).** Recent advances in optimization-based simultaneous process and control design. *Computers and Chemical Engineering*, 28: 2069–2086.
- Sakizlis, V.; Perkins, J. D. y Pistikopoulos, E. N. (2004).** Simultaneous process and control design using mixed integer dynamic optimization and parametric programming. In P. Seferlis, M.C. Georgiadis (Eds.). *The Integration of Process Design and Control. Computer-Aided Chemical Engineering*, Ed. Elsevier, 17: 187-215.
- Salamon, P.; Sibani, P. y Frost, R. (2002).** Facts, Conjectures and Improvements for Simulated Annealing. *SIAM Monographs on Mathematical Modelling and Computation*.
- Samuelsson, P. (2005).** Control of nitrogen removal in activated sludge processes. Uppsala Dissertations from the Faculty of Science and Technology (PhD). Uppsala University. Sweden.
- Seferlis, P. y Georgiadis, M. (2004).** The integration of process design and control. *Computer-aided Chemical Engineering*, first ed., vol. 17, Eds. Elsevier, Amsterdam.
- Schlüter, M.; Egea, J. A.; Antelo, L. T.; Alonso, A. A.; Banga, J. R. (2009).** An extended ant colony optimization algorithm for integrated process and control system design. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 48 (14): 6723–6738.
- Schweiger, C. y Floudas, C. (1997).** Interaction of design and control: optimization with dynamic models. W. Hager y P. Pardalos (Eds.), *Optimal control: Theory, algorithms and applications*. 388–435.
- Sokaert, P. O. M.; Rawlings, J. B. (1998).** Constrained Linear Quadratic Regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 (8): 1163-1169.
- Sendin, O. H.; Moles, C. G.; Alonso, A. A.; Banga, J. R. (2004).** Multiobjective integrated design and control using stochastic global optimization methods. In P. Seferlis, M.C. Georgiadis (Eds.). *The Integration of Process Design and Control. Computer-Aided Chemical Engineering*, Ed. Elsevier, 17: 555–581.
- Skogestad, S., y Morari, M. (1987).** Effect of disturbance directions on closed loop performance. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 26(10): 2029–2035.
- Skogestad, S. y Wolff, E. (1992).** Controllability measures for disturbance rejection. *Proceedings IFAC Workshop on Interactions between Process Design and Process Control*. Pergamon Press. London. 23-30.
- Skogestad, S. y Postlethwaite, I. (1996).** *Multivariable Feedback Control Analysis and Design*. (2nd Edition). Wiley. New York.
- Stengel, R. F. (1994).** *Optimal control and estimation*. Dover Publications, Inc.

- Swartz, C.L.E. (2004).** The use of controller parametrization in the integration of design and control. In P. Seferlis, M.C. Georgiadis (Eds.). *The Integration of Process Design and Control. Computer-Aided Chemical Engineering*, Ed. Elsevier, 17: 239-263.
- Takacs, I.; Patry, G. y Nolasco, D. (1991).** A dynamic model of the clarification-tickening process. *Water Research*, 25(10):1263–1271.
- Terrazas-Moreno, S.; Flores-Tlacuahuac, A.; Grossmann, I. E. (2008).** Simultaneous Design, Scheduling, and Optimal Control of a Methyl-Methacrylate Continuous Polymerization Reactor. *AIChE Journal*, 54 (12): 3160-3170.
- Vega, P.; Gutiérrez, G. (1999).** Optimal Design Control and Operation of wastewater treatment plants. *Proceedings European Control Conference (Alemania)*.
- Vinson, D.R.; Georgakis, C. (2000).** A new measure for process output controllability. *Journal of Process Control*, 10 (2-3):185-194.
- Wolff, E.; Skogestad, S.; Hovd, M. y Mathisen, K. (1992).** A procedure for controllability analysis. *Proceedings IFAC Workshop on Interactions between Process Design and Process Control*. Pergamon Press. London. 127-132.
- Ziegler, J.; Nichols, N. (1943).** Process lags in automatic control circuits. *Transactions of the ASME*. 65: 433-444.

Apéndice I: DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE ALGUNAS NORMAS

El desempeño de un sistema de control se puede evaluar fácilmente utilizando normas de funciones de transferencia del sistema, cuando éste se comporta de forma lineal. Por lo tanto, es necesario definir las normas como instrumentos de medida que nos permiten evaluar la controlabilidad del sistema. En este apéndice se realiza una breve descripción matemática de las normas utilizadas en esta tesis.

- *Definición:*

Las normas son operaciones matemáticas, concretamente funciones con valores reales, realizadas sobre un operando (un vector, matriz, una señal, un sistema), de tal forma que permitan su fácil comparación. Realmente se trata de métricas que dan información sobre el “tamaño” del elemento al cual se aplican (W. Colmenares y F. Tadeo, 2005).

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una función $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathfrak{R}$ es una norma en E si y solo si satisface las siguientes propiedades:

- 1) $\|\mathbf{e}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{e} \in E$; $\|\mathbf{e}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e} = 0$
- 2) Homogénea: $\|\alpha \cdot \mathbf{e}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{e}\| \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}$
- 3) Desigualdad triangular: $\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\| \leq \|\mathbf{e}_1\| + \|\mathbf{e}_2\|$

donde \mathbf{e} puede ser un vector, matriz, señal o sistema. En sistemas de control son interesantes las normas de señales y sistemas, pero antes es conveniente comenzar con las normas de vectores y señales.

- *Normas de vectores y señales:*

Dado un vector $\mathbf{e} \in E$, con componentes $\{e_i\}$ se define su norma p como:

$$\|\mathbf{e}\|_p = \left(\sum_i |e_i|^p \right)^{1/p} \quad (\text{I.1})$$

Por ejemplo, son de interés la norma 2, que es la distancia Euclídea, o la menor distancia entre dos puntos, o la norma infinito, que se corresponde con el valor de la componente del vector con mayor magnitud:

$$\|\mathbf{e}\|_\infty = \max_i |e_i| \quad (\text{I.2})$$

Cuando se tiene una señal $\mathbf{e}(t)$ variable en el tiempo, las normas quedan definidas de forma equivalente al caso de vectores:

$$\|\mathbf{e}(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_i |e_i(\tau)|^2 d\tau} \quad (\text{I.3})$$

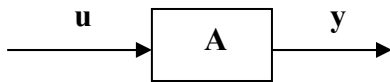
$$\|\mathbf{e}(t)\|_{\infty} = \max_{\tau} \left(\max_i |e_i(\tau)| \right) \quad (\text{I.4})$$

- *Normas inducidas:*

Para medir la controlabilidad de un sistema, las normas más utilizadas son la l_1 , H_2 y H_{∞} . Se trata de normas inducidas de sistemas (o de matrices), que se definen de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{A}\|_{ip} = \max_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_p}{\|\mathbf{u}\|_p} \quad (\text{I.5})$$

donde $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Se puede pensar en \mathbf{y} y \mathbf{u} como vectores de salida y entrada respectivamente, y se considera esta norma como la máxima ganancia para todas las posibles direcciones de entrada



Escogiendo determinadas normas de señales ($p=1, 2, \infty$) se obtienen normas inducidas con significado físico y fácilmente calculables, como son las siguientes, particularizando ya para sistemas definidos por la función de transferencia \mathbf{G} :

Norma H_{∞} (norma inducida de la norma 2):

$$\|\mathbf{G}\|_{\infty} = \max_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \quad (\text{I.6})$$

Norma l_1 (norma inducida de la norma ∞):

$$\|\mathbf{G}\|_1 = \max_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}\|_{\infty}}{\|\mathbf{u}\|_{\infty}} \quad (\text{I.7})$$

La norma H_{∞} de un sistema, también se puede definir como el máximo de la respuesta en frecuencia del máximo valor singular (Skogestad y Postlethwaite, 1997):

$$\|\mathbf{G}\|_{\infty} = \max_{\omega} |\bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))| \quad (\text{I.8})$$

- *Cálculo de la norma l_1*

La norma l_1 de una función de transferencia estable se calcula como se expone a continuación, para un ejemplo concreto que es la función de sensibilidad al control M , para un sistema SISO. Aplicando la definición de norma l_1 se obtendría como el máximo pico de la variable de control dividido por el máximo valor pico de las perturbaciones cuando se tiene el peor caso de perturbaciones, es decir:

$$\|M\|_1 = \max_{d(t)} \frac{\|u(t)\|_\infty}{\|d(t)\|_\infty} \quad (\text{I.9})$$

Matemáticamente, teniendo en cuenta que la función de transferencia $M(z^{-1})$ está discretizada, la norma l_1 se puede calcular de la siguiente manera (M. Dahleh y I. Díaz-Bobillo, 1995; W. Colmenares y F. Tadeo, 2005)

$$\|M\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |m_i| \quad (\text{I.10})$$

donde $\{m_i\}$ son los términos de la respuesta impulsional discreta de M .

Apéndice II: MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN UTILIZADOS

II.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Cuando se desea minimizar una serie de objetivos de manera conjunta, se puede plantear un problema de optimización multiobjetivo, que se puede expresar así:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n} \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\ h_i(\mathbf{x}) = 0 \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

$$h_i, g_j : \mathfrak{R}^n \longrightarrow \mathfrak{R} \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, m$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ son las variables a optimizar, f es la función objetivo o función de coste, h_i y g_j son las funciones que representan la restricciones, x_l y x_u son los límites inferiores y superiores de las variables a optimizar, p es el número de restricciones de igualdad y m el número de restricciones de desigualdad.

Cada una de las m funciones objetivo quedan definidas de la siguiente forma:

$$f_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{II.2})$$

y se puede definir un vector de funciones objetivo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad (\text{II.3})$$

Se denomina vector objetivo \mathbf{v} a un elemento perteneciente a la imagen de la región factible X , que se representa por $J(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} \in X$:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad (\text{II.4})$$

Un vector de decisión $\mathbf{x}^* \in X$ es *óptimo de Pareto* si no existe otro vector de decisión \mathbf{x} de X capaz de mejorar al menos una de las funciones objetivo a la vez que no empeora ninguna de las otras, esto es, si se cumple la siguiente expresión:

$$\neg \exists \mathbf{x} \in X : f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*) \quad i = 1, 2 \quad \wedge \quad \exists j : f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}^*) \quad (\text{II.5})$$

De la misma forma, un vector objetivo factible \mathbf{v} es *óptimo de Pareto* si su correspondiente vector de decisión es *óptimo de Pareto*, o bien no existe otro vector

objetivo factible \mathbf{v}^* para el que se cumpla que todas sus componentes son menores o iguales a las de \mathbf{v} y alguna de ellas es menor.

Por último, se denomina vector objetivo ideal a aquel vector cuyas componentes se obtienen minimizando individualmente cada una de las funciones objetivo, esto es, resolviendo para cada objetivo el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{II.6}$$

Los problemas de optimización multiobjetivo con variables reales se pueden resolver utilizando diversos métodos (Deb, 1995; De la Cruz, 2003). Uno de ellos es el denominado el método de la programación de objetivos (implementado en la función *fgoalattain* de MATLAB[®]). Este método combina todos los objetivos incluyendo las restricciones necesarias, minimizando una variable de holgura γ que representa la desviación de las funciones objetivo respecto al vector de valores deseados (o vector de objetivos). Matemáticamente la formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \gamma \in \mathbb{R}} \quad & \gamma \\ f_i(\mathbf{x}) - w_i \gamma \leq & f_i^* \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \tag{II.7}$$

donde $\mathbf{f}^*=(f_i^*)$ es el vector objetivo con los valores deseados y m es el número de objetivos considerado.

La formulación del problema permite que los valores objetivo se alcancen tanto por exceso como por defecto, y la importancia relativa que se le proporciona a cada objetivo se controla mediante el vector de pesos $\mathbf{w}=(w_i)$. En particular, si $w_i=0$ se tiene una restricción dura en el problema. Mediante el signo de los pesos se controla el hecho de que los valores finales de las funciones objetivo se acerquen por exceso o por defecto a los valores objetivo. Si w_i es negativo, las funciones objetivo tomarán valores por encima de la meta propuesta, mientras que si es positivo, se quedarán por debajo.

Una vez que el problema queda planteado de esta manera, se aplica el método SQP para su resolución final.

II.2 BÚSQUEDA ALEATORIA DIRIGIDA

El método de búsqueda aleatoria dirigida es un método de optimización estocástico que permite de forma sencilla la resolución de problemas con variables enteras y reales. El método comienza explorando en una amplia porción del espacio de búsqueda, para luego focalizarse en la vecindad de la posible solución final. De esta forma, trata de evitar una prematura convergencia en mínimos locales. Este método permite resolver problema de optimización con variables enteras, con la única modificación de que en la generación de nuevas soluciones candidatas únicamente se utilicen números aleatorios enteros.

Los pasos detallados del algoritmo son los siguientes (Figura II.1):

- a) Selección de un punto inicial para la optimización \mathbf{x}_0 junto con la varianza inicial de los vectores aleatorios de distribución gaussiana que se utilizarán para obtener las sucesivas soluciones candidatas.
- b) Inicio del proceso iterativo, generando un vector de enteros aleatorio ξ_k con distribución gaussiana de centro nulo y la varianza que corresponda, donde k representa la iteración actual.

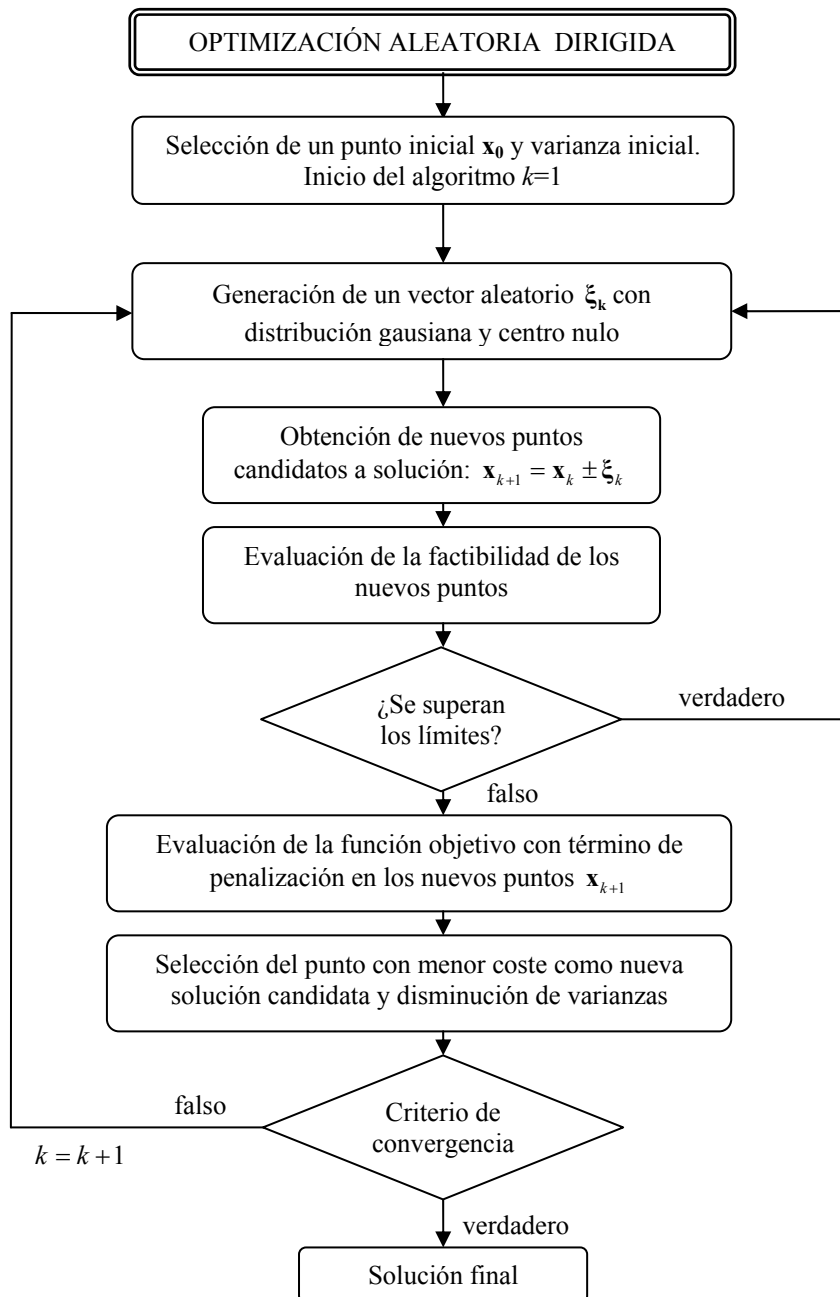


Figura II.1: Algoritmo de búsqueda aleatoria dirigida

- c) Obtención de dos nuevos puntos sumando y restando ξ_k al punto actual (solución candidata actual) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k \pm \xi_k$

- d) Evaluación de la factibilidad de estos nuevos puntos en la región definida por las restricciones de límites sobre las variables de optimización. En caso de que no sean factibles, se vuelve al apartado b) generando un nuevo vector aleatorio.
- e) Evaluación de la función objetivo para la solución candidata actual y en los nuevos puntos. El algoritmo selecciona como nueva solución candidata la que menor valor proporciona.
- f) Disminución de la varianza dirigiendo así la búsqueda aleatoria hacia el óptimo. Si se cumple el criterio de convergencia, detener el algoritmo. En caso contrario, volver al paso b) y hacer $k=k+1$, iniciando una nueva iteración.

Las restricciones del problema en la optimización aleatoria dirigida se incorporan en la función objetivo como un término de penalización proporcional a la violación de la restricción. En cuanto al criterio de convergencia, el algoritmo se detiene cuando la disminución del valor de la función objetivo en varias iteraciones es menor que una determinada cota.

II.3 ENFRIAMIENTO SIMULADO

El enfriamiento simulado o equilibrio termodinámico simulado (*simulated annealing*) es un método de optimización estocástico inspirado en la física de la materia condensada, donde el *annealing* es un proceso térmico para obtener estados de baja energía de un sólido en un baño de calor. Este proceso consta de dos pasos: en primer lugar se incrementa la temperatura del baño de calor hasta el punto de fusión del sólido, y después se enfría lentamente para que las partículas se coloquen en su estado fundamental, de mínima energía, correspondiente con el estado óptimo.

De esta manera se genera una secuencia de estados hasta llegar al óptimo. Las transiciones entre los estados vienen determinadas por las fórmulas de distribución de probabilidad de Boltzmann, donde E_0 es la energía del estado actual, y E_1 la del estado siguiente.

Si $E_1 < E_0$, se produce siempre la transición al nuevo estado. La probabilidad de que el nuevo estado sea aceptado es la unidad:

$$p_{01} = 1 \quad (\text{II.8})$$

Si $E_2 > E_1$, el estado nuevo también puede ser aceptado con una probabilidad dada por:

$$p_{01} = \exp\left(\frac{E_0 - E_1}{k_B T}\right) \quad (\text{II.9})$$

donde

T = temperatura del sólido

k_B = Constante de Boltzmann

La relación entre esta analogía física y el problema de optimización es la siguiente:

- Las soluciones candidatas en el problema de optimización son equivalentes a los estados en el sistema físico.
- El coste de una solución, es decir, el valor de la función objetivo en ese punto, es equivalente a la energía del estado físico.
- La temperatura equivale al parámetro de control c en el método de optimización, que es el que regula la aceptación o rechazo de nuevos puntos de búsqueda (transiciones entre estados). Al igual que ocurre en el proceso físico, el parámetro de control debe partir de un valor elevado y descender lentamente según algún tipo de enfriamiento para alcanzar la solución óptima.

El enfriamiento de la temperatura, o equivalentemente la disminución del parámetro de control, no se realiza de forma continua sino que el sólido se mantiene a una misma temperatura durante un número determinado de posibles transiciones, que se denomina longitud de la cadena por su analogía con las cadenas de Markov (Salamon *et al.*, 2002). En el algoritmo este parámetro se denomina *MaxCadena*, y se incrementa por un factor β en cada iteración general.

En cuanto a la codificación de las variables de decisión en el problema de optimización, para variables reales se suele utilizar algún tipo de discretización del espacio de búsqueda de manera que el mecanismo de generación de soluciones sea sencillo. Una posibilidad es la codificación en binario del espacio de búsqueda con un número determinado de bits, siempre con la resolución suficiente para llegar a una solución óptima. El algoritmo trabaja con estos valores binarios para generar nuevas soluciones, aunque para evaluar la función objetivo y las restricciones, que se incluyen como una penalización, es necesario pasar de nuevo al valor continuo de las variables. El mecanismo que genera nuevas soluciones candidatas está basado en la modificación de uno o varios bits de la solución actual de manera aleatoria. Debido a este tipo de codificación, la elección de los rangos de las variables de optimización es importante.

Otra posibilidad a la hora de codificar las variables de optimización en el enfriamiento simulado es directamente como números reales, evitando las transformaciones antes mencionadas. En este caso la generación de nuevas soluciones consiste en la modificación aleatoria de una o varias variables reales de una solución candidata para general el siguiente estado de equilibrio.

Este método permite optimizar de forma simultánea valores reales y enteros, únicamente adaptando el algoritmo de generación de nuevas soluciones a las características de cada variable.

Los pasos detallados del algoritmo son los siguientes (Figura II.2):

- a) Selección de una solución inicial aleatoria \mathbf{x}_0 junto con la temperatura inicial T_0 .
 Selección de los parámetros iniciales: número máximo de iteraciones *MaxIter*, longitud de la cadena *MaxCadena* y factor de incremento de la longitud de cadena β .
 Evaluación del coste de esta solución inicial: E_0 . Inicialización de los índices en los bucles repetitivos: $i=1, j=1$.

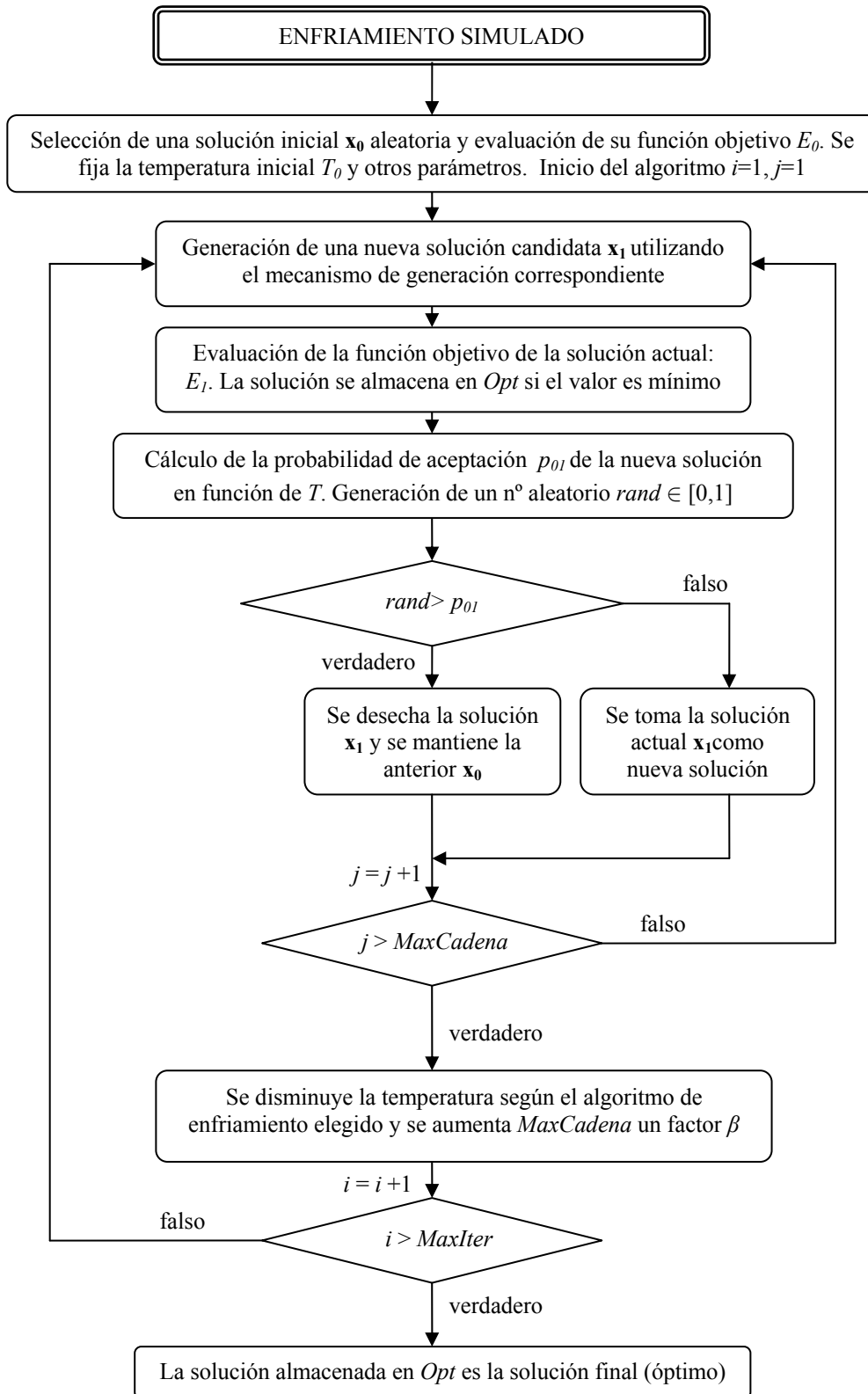


Figura II.2: Algoritmo de búsqueda del método de enfriamiento simulado

- b) Inicio del proceso iterativo: Generación de una nueva solución candidata x_1 utilizando el mecanismo de generación correspondiente, que puede consistir en la modificación aleatoria de algún bit en las variables de decisión (si la codificación es binaria) o de alguna variable de decisión completa (si la codificación es real).

- c) Evaluación de la función objetivo (energía) de la solución actual, incluyendo las restricciones del problema como penalización: E_j . La solución actual se almacena en Opt si tiene el mejor valor de la función objetivo de las evaluadas hasta el momento.
- d) Cálculo de la probabilidad de aceptación de la nueva solución p_{01} , en función de la temperatura actual T , siguiendo las reglas de transición de estados (II.8) y (II.9). Hay que hacer notar que siguiendo estas reglas, el algoritmo puede aceptar soluciones que aumenten el valor de la función objetivo, con el fin de evitar posibles mínimos locales y explorar mejor el espacio de búsqueda.
- e) Generación de un número aleatorio $rand$ entre 0 y 1. Teniendo en cuenta la probabilidad de aceptación calculada, si $rand < p_{01}$, la nueva solución candidata \mathbf{x}_1 sustituye a la anterior \mathbf{x}_0 , y en caso contrario se mantiene la anterior y se desecha la nueva.
- f) Si $j < MaxCadena$ se vuelve al paso b), en caso contrario, si $i < MaxIter$, se disminuye la temperatura según algún tipo de enfriamiento (lineal, exponencial, etc.), se actualiza la longitud de la cadena haciendo $MaxCadena = \beta \cdot MaxCadena$, y también se retorna a b).
- g) Si $i > MaxIter$ se finaliza el algoritmo. La solución almacenada en Opt es la solución óptima.

II.4 ALGORÍTMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos son métodos estocásticos de optimización basados en los principios de la selección natural. La optimización se lleva a cabo con una población de soluciones potenciales, las cuales son evaluadas y a cada una se le asigna una función de calidad denominada función de adaptación o de evolución (*fitness*). Para un problema de minimización, el mejor individuo es el que tiene menor valor de la función de adaptación. En el desarrollo del algoritmo, la población evoluciona hacia regiones favorables en el espacio de búsqueda haciendo uso de los operadores de cruce, selección y mutación, hasta que después de varias generaciones, converge a la mejor solución.

Los algoritmos genéticos, son métodos de búsqueda global especialmente recomendados para problemas de optimización complejos debido a su simplicidad, facilidad de operación, requerimientos matemáticos mínimos y su perspectiva de búsqueda paralela. La codificación de las soluciones en cromosomas puede ser binaria o real.

El cromosoma que describe a una solución (individuo de la población) se define como un vector \mathbf{x} de longitud fija que contiene las variables de decisión del problema de optimización, que pueden ser reales y binarias de forma simultánea. La función de adaptación (*fitness*) para un determinado cromosoma es el valor de $f_{coste}(\mathbf{x})$

El procedimiento general del algoritmo consiste en los pasos de la Figura II.3. En primer lugar es necesario partir de una población inicial de soluciones candidatas, a las cuáles se le aplica f_{coste} para calcular el valor de su función de adaptación. Si no se satisface el criterio de convergencia, se procede con los siguientes operadores genéticos:

- Selección: es el primer algoritmo que se aplica a la población, escogiéndose para su reproducción a los individuos o cromosomas que exhiben la mejor función de adaptación, de manera que puedan generar descendientes con mejores características y contribuir con su presencia lo más posible en la siguiente generación. Una forma de selección típica es la selección por ruleta, en la cual la probabilidad de selección de cada individuo es proporcional a su función de adaptación, aunque también existen otras formas como el método de jerarquización o la selección por torneo.

- Cruce: El proceso de cruce se lleva a cabo sobre los individuos seleccionados para la reproducción, permitiendo intercambiar información entre dos cromosomas seleccionados como padres, los cuales combinan sus genes para producir nuevos individuos, que probablemente presentarán mejores características. La definición de los operadores de cruce depende en gran medida de la estrategia de representación utilizada. Para codificación real y variables reales se puede utilizar el cruce aritmético, obteniéndose dos descendientes de la forma:

$$\mathbf{H}_K = (h_1^K, h_2^K, \dots, h_N^K) \quad K=1,2 \quad (\text{II.10})$$

donde cada gen h_i^K se genera haciendo:

$$\begin{aligned} h_i^1 &= \lambda \cdot x_i + (1-\lambda)y_i \\ h_i^2 &= \lambda \cdot y_i + (1-\lambda)x_i \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ los cromosomas padres, con N el número de genes, que es equivalente al número de variables, y $\lambda \in [0,1]$

Cuando la variable a optimizar es binaria, también se puede utilizar este procedimiento, pero como los genes correspondientes de los descendientes deben ser binarios, estos se obtienen redondeando el valor final en (II.11) hacia el valor más cercano 0 ó 1.

El cruce clásico para codificación binaria se lleva a cabo entre dos cadenas de bits que representan a dos cromosomas, tomando una posición al azar que determina el lugar donde se dividen ambos cromosomas para intercambiar sus características y producir los descendientes.

- Mutación:

La mutación es un mecanismo necesario para mantener la diversidad de la población introduciendo la probabilidad de que ocurra un cambio inesperado y favorable en alguno de los genes. Existen diversos tipos de mutación, entre las que destaca la mutación aleatoria, donde el cromosoma H se convierte en:

$$H = (h_1, \dots, h_i', \dots, h_N) \quad (\text{II.12})$$

siendo h_i' un número aleatorio del intervalo de definición del correspondiente gen.

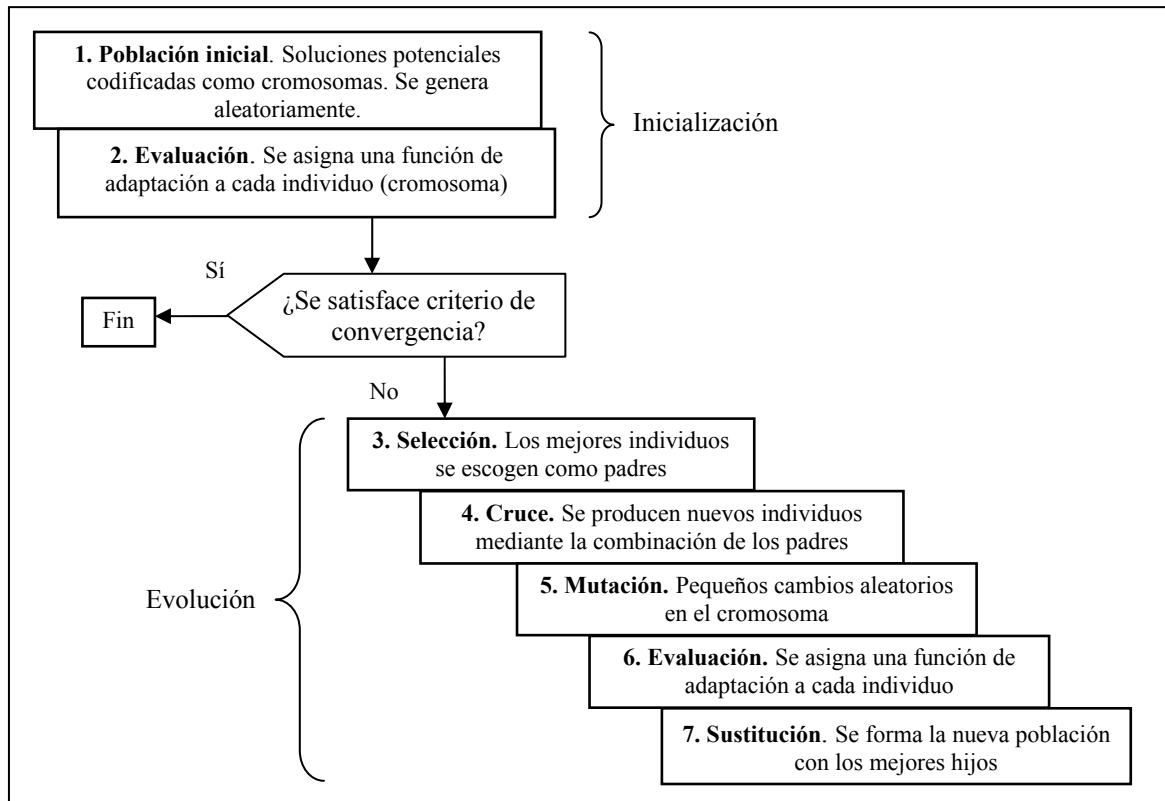


Figura II.3: Procedimiento general de un algoritmo genético

- Evaluación:

La evaluación de la función de adaptación del correspondiente individuo se realiza simplemente calculado el valor de $f_{coste}(\mathbf{x})$. Para tratar las soluciones que no cumplen las restricciones se agrega una penalización a la función de adaptación, de manera que ésta se calcula finalmente del siguiente modo:

$$F(\mathbf{x}) = f_{coste}(\mathbf{x}) + R \cdot \left(\sum_{k=1}^p [\max\{0, g_k(\mathbf{x})\}]^2 \right) \tag{II.13}$$

donde \mathbf{x} es el cromosoma, R es el coeficiente de penalización asociado a las restricciones de desigualdad, p es el número de restricciones de desigualdad del problema, y $g_k(\mathbf{x})$ es la actual desviación de la k -ésima restricción.

- Sustitución:

Mediante la sustitución se eligen los individuos que conforman la nueva población, reemplazando alguno de los integrantes de la población actual. En general, se espera que algunos de los descendientes puedan competir con sus padres para ser incluidos en la siguiente generación. Existen distintas estrategias, desde la más simple que consiste en sustituir toda la población por sus descendientes, hasta la utilización de operadores de selección por ruleta o el elitismo. En este último caso, se obliga a mantener el mejor o los mejores cromosomas de la población actual en la nueva generación antes de cruce, previniendo la pérdida de la mejor solución encontrada hasta el momento.

