



**UNIVERSIDAD DE SALAMANCA**  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CARTOGRÁFICA Y DEL TERRENO

**TESIS DOCTORAL**

Automatización en el procesamiento de datos  
adquiridos mediante láser escáner 3D

Pablo Rodríguez González

2011



Departamento de Ingeniería Cartográfica y del Terreno  
Escuela Politécnica Superior de Ávila  
Universidad de Salamanca

AUTOR:

Pablo Rodríguez González

DIRECTOR:

Dr. D. Diego González Aguilera

**2011**



*Essentially, all models are wrong,  
but some are useful.*  
*Box (1979)*



## Resumen

Conducida por los progresos en la tecnología de sensores, algoritmos y capacidades de procesado de datos, la fotogrametría de rango cercano ha encontrado una amplia cantidad de nuevos campos de aplicación durante las dos últimas décadas. Particularmente, la aparición del láser escáner terrestre ha contribuido a la popularización de la fotogrametría a través diversos desarrollos y aplicaciones. Sin embargo, la cuestión clave en muchos de estos acercamientos es la integración del sensor con estructuras de procesamiento de datos fiables para generar sistemas fotogramétricos de medida altamente automatizados.

En esta Tesis Doctoral se presenta una novedosa y flexible aproximación para la automatización de los datos láser mediante el registro del láser escáner terrestre y otros sensores imagen; principalmente las cámaras digitales convencionales. No obstante, dicha automatización no puede entenderse sin la adecuación o corrección de los datos de entrada, ya que si estos no están correctamente estandarizados los procesos automáticos no podrían llevarse a cabo de forma eficaz. Dichas operaciones previas, las cuales son tan importantes como el propio proceso de registro, se enmarcan en la calibración geométrica de los láseres escáner terrestres y la estimación de la distorsión radial a partir de una única imagen, ambos procesos altamente automatizados en esta Tesis Doctoral.

El proceso de registro de sensores es el aspecto más innovador de esta Tesis Doctoral, el cual combina procesos y algoritmos de los campos de la Fotogrametría y la Visión Computacional de forma jerárquica y apoyada en procesos estadísticos y robustos. Sin embargo, el procesado de los datos láser no finaliza con el propio proceso de registro, sino que es explotado a través de una serie de productos derivados, siendo el más destacable el denominado imagen sólida verdadera. Este producto híbrido, fruto del registro de sensores, es explotado mediante procesos de modelización en sus vertientes geométrica y radiométrica.





## Abstract

Driven by progress in sensor technology, algorithms and data processing capabilities, close range Photogrammetry has found a wide range of new application fields over the past two decades. Particularly, the emergence of terrestrial laser scanner has contributed to the photogrammetry popularization through many developments and applications. Nevertheless, a central issue in many of these approaches is the integration of sensor technology with reliable data processing schemes to generate highly automated photogrammetric measurements systems.

In this Doctoral Thesis a novelty and flexible approximation for the automatization in processing of laser data by the registration of the terrestrial laser scanner and other image sensors, mainly the conventional digital cameras. However, this automation can not be understood without adequation or correction of input data, because if they are not properly standardized, the automatic process could not be carried out effectively. These previous operations, which are as important as the own registration process, are the geometric calibration of laser scanners and the estimation of radial distortion for only one image; process highly automated in this Doctoral Thesis.

The sensor registration process is the most innovative aspect of this Doctoral Thesis, which combines processes and algorithms from the Photogrammetry and Computer Vision fields in a hierarchical way and supported by statistical and robust methods. However, the laser data processing does not end with the registration process itself, but is operated through a series of derived products, where the most notable being the so-called true solid image. This hybrid product, result of the sensor fusion, is operated by modeling process in their geometric and radiometric aspects.



# Índice

## Capítulo 1

<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del conocimiento: tecnología láser y fotogrametría terrestre ....	2
1.1.1. Tecnología láser .....	2
1.1.2. Fotogrametría terrestre.....	12
1.2. Estado del conocimiento: hibridación de los sensores terrestres láser escáner y cámara digital .....	17
1.3. Objetivos .....	22
1.4. Contribuciones .....	23
1.5. Organización de la tesis .....	24

## Capítulo 2

<b>Geometría proyectiva .....</b>	<b>27</b>
2.1. Antecedentes .....	28
2.2. Coordenadas homogéneas .....	31
2.3. Jerarquización de la transformación proyectiva.....	34
2.4. Modelo de cámara proyectivo .....	46
2.5. Geometría epipolar.....	50

## Capítulo 3

<b>Calibración geométrica de sensores .....</b>	<b>57</b>
3.1. Estado del arte en la calibración de láser escáner terrestres.....	59
3.2. Errores láser escáner terrestre .....	62
3.2.1. Clasificación de las fuentes de error del láser escáner terrestre	63
3.2.2. Estudio de los errores instrumentales de los láser terrestre .....	67
3.3. Modelo de auto-calibración del láser escáner terrestre .....	72
3.3.1. Modelo funcional.....	73
3.3.2. Modelo estocástico .....	76
3.3.3. Precisión y exactitud.....	79
3.4. Calibración geométrica de la cámara .....	82
3.4.1. Concepto de distorsión radial .....	83
3.4.2. Modelos de distorsión.....	87

3.4.3.	Estimación automática de la distorsión radial.....	90
3.4.4.	Contrastación con herramientas de calibración existentes.....	93

## Capítulo 4

<b>Registro de sensores .....</b>	<b>101</b>	
4.1.	Introducción.....	101
4.2.	Pre-procesamiento .....	102
4.2.1.	Adquisición de datos .....	102
4.2.2.	Pre-procesamiento láser .....	104
4.2.3.	Pre-procesamiento imagen cámara .....	107
4.3.	Detección de puntos de interés .....	113
4.3.1.	Operador de Förstner.....	114
4.3.2.	Detector de Harris .....	117
4.3.3.	Operador FAST .....	119
4.4.	Correspondencia .....	122
4.4.1.	Correspondencia basada en características .....	122
4.4.2.	Correspondencia basada en áreas.....	123
4.4.3.	Correspondencia basada en mínimos cuadrados.....	126
4.4.4.	Estrategia piramidal .....	128
4.4.5.	Restricciones geométricas: epipolaridad.....	130
4.5.	Resección espacial.....	138
4.5.1.	Orientación Externa Simple (OES).....	138
4.5.2.	Orientación Externa Rigurosa (OER) .....	141
4.5.3.	Transformación Lineal Directa (DLT).....	143
4.5.4.	Procrustes Ortogonal Ponderado (POP).....	147
4.6.	Estimadores estadísticos y robustos .....	150

## Capítulo 5

<b>Modelización híbrida.....</b>	<b>165</b>	
5.1.	Imagen sólida verdadera .....	165
5.2.	Modelado híbrido. Geometría.....	173
5.3.	Modelado híbrido. Radiometría.....	180

## Capítulo 6

<b>Resultados experimentales.....</b>	<b>195</b>	
6.1.	Calibración geométrica de láser escáneres terrestres.....	196

6.1.1.	Diseño y señalización del campo de calibración .....	197
6.1.2.	Trabajo de campo .....	198
6.1.3.	Precisiones a priori de los equipos láser y topográficos .....	204
6.1.4.	Aplicación de la auto-calibración .....	206
6.1.5.	Análisis de posibles sistematismos previos .....	206
6.1.6.	Análisis de los resultados de auto-calibración .....	211
6.1.7.	Control externo .....	221
6.2.	Determinación de la distorsión radial con una única imagen.....	246
6.2.1.	Imagen con un punto de fuga.....	247
6.2.2.	Dos puntos de fuga .....	256
6.2.3.	Tres puntos de fuga.....	263
6.3.	Registro de sensores: caso visible desfavorable.....	270
6.3.1.	La cueva de Llonín .....	270
6.3.2.	Problema y objetivo .....	271
6.3.3.	Metodología y resultados.....	273
6.4.	Registro de sensores: caso visible favorable.....	280
6.4.1.	Ermita de San Segundo.....	280
6.4.2.	Problema y objetivo .....	281
6.4.3.	Metodología y resultados.....	282
6.5.	Registro de sensores: caso térmico .....	292
6.5.1.	Problema y objetivo .....	293
6.5.2.	Metodología y resultados.....	294
<b>Capítulo 7</b>		
<b>Conclusiones y perspectivas futuras.....</b>		<b>303</b>
7.1.	Síntesis de las contribuciones.....	303
7.2.	Perspectivas futuras.....	311
<b>Bibliografía .....</b>		<b>313</b>
<b>Apéndice A. Resultados calibración .....</b>		<b>329</b>
<b>Agradecimientos.....</b>		<b>373</b>

## Índice de figuras

Figura 2.1 Teorema de Desargues .....	28
Figura 2.2 Invarianza de la razón doble .....	29
Figura 2.3 Teorema de Pascal (izquierda) y de Pappus (derecha).....	30
Figura 2.4 Principio de dualidad de la geometría proyectiva .....	30
Figura 2.5 Teorema de Brianchon .....	31
Figura 2.6 Definición de la recta según la dirección y la normal al plano origen. 34	
Figura 2.7 Definición de la falta de ortogonalidad respecto al eje Z. Definición general (izquierda) y propuesta (derecha). .....	38
Figura 2.8 Ángulo de falta de ortogonalidad proyectado .....	38
Figura 2.9 Plano del infinito (izquierda) y cónica absoluta (derecha) (adaptado de Pollefeys, 2004).....	40
Figura 2.10 Resumen transformaciones proyectivas 3D .....	42
Figura 2.11 Puntos de fuga: objeto 3D y 2D .....	43
Figura 2.12 Transformación afín .....	44
Figura 2.13 Modelo geométrico de proyección central.....	46
Figura 2.14 Parámetros intrínsecos de la cámara .....	49
Figura 2.15 Geometría epipolar.....	51
Figura 2.16 Restricción epipolar .....	52
Figura 2.17 Ambigüedad en reconstrucción de la escena a partir de la matriz E.. 54	
Figura 3.1 Estructura de la norma ISO 17123 (adaptado de Gottwald, 2008) .....	59
Figura 3.2 Modelo geométrico del láser escáner terrestre (adaptado de Lichti, 2010).....	62
Figura 3.3 Proceso de reflexión difusa interna (Ingensand, 2003).....	64
Figura 3.4 Diagrama de los ejes y errores asociados a los ejes de un sistema láser (modificado de Reshetyuk, 2009).....	70
Figura 3.5 Vista frontal del escáner láser Trimble GX.....	71
Figura 3.6 Efecto de palanca óptica.....	71
Figura 3.7 Vista lateral del Riegl LMS-390i (izquierda). Espejo poligonal rotatorio (derecha) .....	72
Figura 3.8 Diseño y verificación del proceso iterativo de autocalibración sustentado por el modelo matemático de Gauss-Markov .....	79
Figura 3.9 Esquema de búsqueda: ángulo espacial $\beta$ y las distancias $b$ , $c$ para el punto $A$ .....	81

Figura 3.10 Componentes radial y tangencial de la distorsión de una lente .....	83
Figura 3.11 Descripción clásica del modelo de distorsión radial (tomado de González-Aguilera et al., 2011a) .....	84
Figura 3.12 Concepto de distorsión radial basado en la variación de la distancia principal (tomado de González-Aguilera et al., 2011a) .....	85
Figura 3.13 Distribución de múltiples distorsiones radiales asociadas a diferentes focales (tomado de González-Aguilera et al., 2011a) .....	85
Figura 3.14 Representación gráfica de los diferentes modelos de distorsión radial (tomado de González-Aguilera et al., 2011a) .....	88
Figura 3.15 Representación de la ecuación de la recta en su forma polar (tomado de González-Aguilera et al., 2011a) .....	92
Figura 3.16 Malla de calibración de Photomodeler® .....	94
Figura 3.17 Esquema de toma de fotografías para calibración mediante ImageMaster® .....	95
Figura 4.1 Esquema de trabajo en el registro de sensores .....	102
Figura 4.2 Factores que condicionan la toma de datos con los sensores láser y cámara .....	103
Figura 4.3 Generación de la imagen de rango .....	105
Figura 4.4 Antes y después de la regeneración de texturas .....	106
Figura 4.5 Desplazamiento debido a la distorsión radial .....	107
Figura 4.6 Izquierda: imagen original con distorsión radial. Derecha: imagen sin distorsión radial, corregida por el método directo. ....	108
Figura 4.7 Método de Newton-Raphson .....	109
Figura 4.8 Corrección de la distorsión de forma indirecta .....	110
Figura 4.9 Antes y después de eliminar el cielo de la imagen de alta resolución	111
Figura 4.10 Esquema del operador de Förstner .....	117
Figura 4.11 Clasificación según los valores propios .....	118
Figura 4.12 Resumen del detector de Harris .....	119
Figura 4.13 Evaluación del operador FAST (tomado de Rosten, 2006) .....	120
Figura 4.14 Esquema del operador FAST .....	121
Figura 4.15 Correspondencia robusta jerárquica .....	123
Figura 4.16 Correspondencia basada en áreas .....	124
Figura 4.17 Transformación iterativa de la ventana de búsqueda (adaptado de Luhmann, 2006) .....	126
Figura 4.18 Pirámide de imagen .....	129
Figura 4.19 Máscara gaussiana para $\sigma = 1$ .....	130
Figura 4.20 Efecto de la singularidad de la matriz fundamental .....	133

Figura 4.21 Esquema de cálculo de la matriz fundamental.....	137
Figura 4.22 Resolución de la orientación inversa.....	138
Figura 4.23 Contraste de hipótesis .....	152
Figura 4.24 Gráfico de la distribución de Chi-cuadrado .....	153
Figura 4.25 Esquema de detección de errores groseros.....	155
Figura 4.26 Área de rechazo para la distribución t de Student.....	156
Figura 4.27 Funciones de influencia de estimadores tipo M.....	162
Figura 4.28 Funciones de peso de estimadores tipo M.....	163
Figura 4.29 Resumen de la metodología de ajuste con estimadores robustos.....	164
Figura 5.1 Estructura clásica de la imagen sólida (tomado de Bornaz y Dequal, 2003a).....	166
Figura 5.2 Información de coordenadas X, Y, Z codificadas y expresadas visualmente (de izquierda a derecha respectivamente) .....	169
Figura 5.3 Capa de información de intensidad original (izquierda) y resultante de interpolar mediante el IDW (derecha).....	171
Figura 5.4 Esquema de interpolación por inundación .....	171
Figura 5.5 Capa de información de intensidad original (izquierda) y resultante de interpolar mediante las técnicas IDW e inundación (derecha).....	172
Figura 5.6 Segmentación de bordes (tomado de Aguilera, 2005).....	179
Figura 5.7 Esquema general del proceso de modelización híbrida para la extracción de la geometría.....	180
Figura 5.8 Comparación de diferentes técnicas de remuestreo .....	182
Figura 5.9 Proyección directa de la textura (adaptado de Gross y Pfister, 2007).....	183
Figura 5.10 Proyección textura mediante el texture splatting (adaptado de Gross y Pfister, 2007) .....	185
Figura 5.11 Rechazo de una arista ilegal (izquierda) y arista aceptada (derecha) .....	186
Figura 5.12 Esquema de funcionamiento de la triangulación incremental de Delaunay.....	187
Figura 5.13 Transformación afín sobre una malla triangular con tres puntos de anclaje (adaptado de Kraus, 1993) .....	188
Figura 5.14 Transformación bilineal de una malla cuadrada con cuatro puntos de anclaje (adaptado de Kraus, 1993) .....	189
Figura 5.15 Algoritmo de Z-buffer.....	190
Figura 5.16 Conjunto de datos inicial (izquierda) y resultado de la clasificación k-medias con 4 clases (derecha) .....	192
Figura 6.1 Tarjetas de puntería Riegl (izquierda) y Trimble (derecha).....	197
Figura 6.2 Esquema del campo de calibración.....	198



Figura 6.3 Distribución de las dianas escaneadas (círculos rojos) con el láser Riel LMS-Z390i.....	201
Figura 6.4 Distribución de las dianas escaneadas con el láser Trimble GX .....	202
Figura 6.5 Histograma de frecuencia de los errores en distancia láser.....	207
Figura 6.6 Histograma de frecuencia de los errores láser en acimut. ....	207
Figura 6.7 Histograma de frecuencia de los errores láser en ángulo cenital.....	208
Figura 6.8 Histograma de frecuencia de los errores según los componentes de las coordenadas tridimensionales para el sistema láser Trimble GX. ....	209
Figura 6.9 Histograma de frecuencia de los errores según los componentes de las coordenadas tridimensionales para el sistema láser Riegl .....	209
Figura 6.10 Gráficos bivariantes según la distancia láser y su error asociado....	210
Figura 6.11 Gráficos bivariantes según el ángulo acimutal y su error asociado.	210
Figura 6.12 Gráficos bivariantes para el error cenital y el valor angular correspondiente. ....	210
Figura 6.13 Números de redundancia para el ajuste con todos los sistematismos del Trimble GX.....	214
Figura 6.14 Números de redundancia para el ajuste con los sistematismos significativos del ajuste del Trimble GX .....	215
Figura 6.15 Números de redundancia para el ajuste con todos los sistematismos del láser Riegl.....	216
Figura 6.16 Números de redundancia para el ajuste con los sistematismos significativos del ajuste del láser Riegl.....	217
Figura 6.17 Histograma de frecuencia de los errores en distancia láser después de la calibración .....	218
Figura 6.18 Histograma de frecuencia de los errores en ángulo acimutal después de la calibración .....	218
Figura 6.19 Histograma de frecuencia de los errores en ángulo cenital después de la calibración .....	218
Figura 6.20 Histograma de frecuencia de los errores en coordenadas después de la calibración.....	219
Figura 6.21 Histograma de frecuencia de los errores en coordenadas después de la calibración.....	219
Figura 6.22 Gráficos bivariantes según la distancia láser calibrada y su error asociado.....	220
Figura 6.23 Gráficos bivariantes según el ángulo acimutal calibrado y su error asociado.....	220
Figura 6.24 Gráficos bivariantes según el ángulo cenital calibrado y su error asociado.....	220
Figura 6.25 Patrón de calibración .....	222

Figura 6.26 Vista isométrica del patrón metrológico (Trimble GX a 60 metros)	224
Figura 6.27 Diferentes vistas de la nube de puntos correspondiente a una esfera (Trimble GX a 60 metros)	225
Figura 6.28 Vista cenital de la esfera nº2 del sistema Trimble GX para 30m (izquierda), 60m (centro) y 120m (derecha)	226
Figura 6.29 Los sistemas láser Trimble y Riegl objeto de estudio dispuestos para la toma de datos	227
Figura 6.30 Histogramas del error en distancia (D=30m) para el láser Trimble GX	228
Figura 6.31 Histogramas del error en distancia D=60m para el láser Trimble GX	229
Figura 6.32 Histogramas del error en distancia (D=120m) para el láser Trimble GX	230
Figura 6.33 Vista isométrica de la nube de puntos laser del Riegl LMS-Z390i a 30 metros	231
Figura 6.34 Histogramas del error en distancia (D=30m) para el láser Riegl	232
Figura 6.35 Histogramas del error en distancia (D=60m) para el láser Riegl	233
Figura 6.36 Exactitud en la determinación de los invariantes en distancia de las nubes originales	234
Figura 6.37 Exactitud en la determinación de los invariantes en distancia. Todas las variantes	235
Figura 6.38 Repetibilidad en la determinación de los invariantes en distancia de las nubes de puntos originales	236
Figura 6.39 Repetibilidad en la determinación de los invariantes (todas las variantes)	237
Figura 6.40 Vista lateral (izquierda) y superior (derecha) del cubo de 100mm del patrón de calibración	237
Figura 6.41 Vista de perfil de un cubo “roto” por la alta reflectividad (nº2 de 80mm) con el láser Trimble GX a 30 metros	239
Figura 6.42 Perfil del cubo nº1(100mm) del escaneo del láser Riegl a 30 metros	241
Figura 6.43 Error en la determinación de la longitud del cubo con respecto al tamaño del cubo	243
Figura 6.44 Porcentaje de error en la determinación de la longitud del cubo con respecto a su tamaño	244
Figura 6.45 Valores de repetibilidad en función de las dimensiones de los cubos	245
Figura 6.46 Imagen con un único punto de fuga. Edificio de IberCaja en Ávila capturado con la Canon EOS 500D – 18mm	248

Figura 6.47 Mini-segmentos extraídos de la imagen mediante el software sv3Dvision .....	249
Figura 6.48 Error de reproyección de los puntos de la calibración con Bouguet	251
Figura 6.49 Histograma del error 2D de reproyección .....	252
Figura 6.50 Comparativa de curvas de distorsión radial.....	255
Figura 6.51 Imagen oblicua con dos puntos de fuga correspondiente al edificio Moneo (Ávila).....	257
Figura 6.52 Mini-segmentos extraídos automáticamente, coloreados según el eje: X (rojo) y Z (azul).....	257
Figura 6.53 Error de reproyección de los puntos mediante la calibración con Bouguet.....	259
Figura 6.54 Histograma del error 2D de reproyección .....	259
Figura 6.55 Curvas de distorsión radial .....	262
Figura 6.56 Imagen con tres puntos de fuga correspondiente al Palacio de Congresos de Ávila .....	264
Figura 6.57 Mini-segmentos automáticamente extraídos mediante sv3Dvision	264
Figura 6.58 Error de reproyección de la calibración con Bouguet .....	266
Figura 6.59 Histograma del error 2D de reproyección .....	266
Figura 6.60 Comparativa de curvas de distorsión radial.....	268
Figura 6.61 Levantamiento del sector central del Panel Principal según Magín Berenguer (tomado de Barroso y del Río, 2008) .....	271
Figura 6.62 Especificaciones técnicas láser escáner terrestre Trimble GX .....	271
Figura 6.63 Estacionamiento dentro de la cueva de Llonín.....	272
Figura 6.64 Pintura Rupestre de la Cueva de Llonín (Asturias, España). Signo Serpentina © Pedro Saura .....	273
Figura 6.65 Datos de entrada. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner. ....	274
Figura 6.66 Puntos de interés obtenidos mediante el detector de Harris .....	275
Figura 6.67 Correspondencia de puntos basada en restricciones epipolares. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner .....	276
Figura 6.68 Error de reproyección en píxeles con un factor de aumento (x5) sobre la imagen de alta resolución.....	278
Figura 6.69 Mapa de textura resultante de la fusión de ambos sensores .....	278
Figura 6.70 Vectorización del serpentiforme.....	279
Figura 6.71 Datos de entrada. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner .....	284

Figura 6.72 Puntos de interés obtenidos mediante del detector de Förstner sobre la imagen de alta resolución .....	284
Figura 6.73 Correspondencia de puntos basada en restricciones epipolares. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner.....	285
Figura 6.74 Error de reproyección en píxeles con un factor de aumento (x10) sobre la imagen de alta resolución.....	286
Figura 6.75 Mapa de textura resultante de la fusión de ambos sensores.....	287
Figura 6.76 Diferentes capas de la imagen sólida .....	287
Figura 6.77 Bordes extraídos a partir de la imagen sólida con diferentes parámetros .....	289
Figura 6.78 Superposición de los bordes (en azul) extraídos de la imagen sólida sobre la capa RGB .....	289
Figura 6.79 Elementos lineales de la imagen sólida representados en un entorno 3D para la segmentación $\sigma=1$ .....	290
Figura 6.80 Detalle de los elementos lineales de la fachada románica, representados en un entorno 3D .....	290
Figura 6.81 Detalle de los elementos lineales de la fachada románica para Canny con $\sigma=2$ .....	291
Figura 6.82 Datos de entrada: (Izquierda) Imagen de rango (GSD 1 cm) obtenida a partir del láser Faro Photon. (Derecha) Imagen termográfica (GSD 5 cm) adquirida con la cámara térmica SC640 FLIR. ....	294
Figura 6.83 Imagen obtenida con cámara digital .....	294
Figura 6.84 Minisegmentos obtenidos con el sv3Dvision.....	295
Figura 6.85 Puntos de interés obtenidos mediante el detector de Förstner .....	296
Figura 6.86 Correspondencia de puntos basada en restricciones epipolares. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner.....	297
Figura 6.87 Error de reproyección en píxeles con un factor de aumento (x10) sobre la imagen térmica .....	299
Figura 6.88 Productos híbridos resultantes de la fusión de sensores: modelo 3D térmico (Izquierda) ortofoto térmica (GSD 5 cm) (Derecha).....	299
Figura 6.89 Análisis térmico: isotermas .....	300

## Índice de tablas

Tabla 1.1 Clasificación de los métodos de registro groseros (modificado de Salvi et al., 2009).....	8
Tabla 1.2 Clasificación de los métodos de registro finos (modificado de Salvi et al., 2009) .....	9
Tabla 1.3 Comparación de ventajas y desventajas: láser escáner y cámara digital. ....	17
Tabla 2.1 Jerarquía de las transformaciones proyectivas.....	45
Tabla 2.2 Resumen de las transformaciones e invariantes para las diferentes geometrías tratadas (adaptado de Birchfield, 1998).....	45
Tabla 4.1 Situaciones existentes en el contraste de hipótesis .....	151
Tabla 4.2 Resumen de estimadores tipo M.....	164
Tabla 5.1 Ejemplo de codificación de las coordenadas X e Y para la imagen sólida verdadera.....	168
Tabla 6.1 Especificaciones técnicas del láser Trimble GX.....	198
Tabla 6.2 Especificaciones técnicas del láser Riegl LMS-Z390i.....	199
Tabla 6.3 Especificaciones técnicas. Leica TCA2003 .....	199
Tabla 6.4 Observables láser Riegl LMS-Z390i.....	200
Tabla 6.5 Observables láser Trimble GX.....	201
Tabla 6.6 Observables polares topografía alta precisión Leica TCA2003.....	202
Tabla 6.7 Observables cartesianos topografía alta precisión Leica TCA2003. ...	203
Tabla 6.8 Coordenadas Transformadas en (mm). Datum Topográfico (Verdad Terreno).....	203
Tabla 6.9 Resumen de precisiones (para $\rho=10m$ ).....	206
Tabla 6.10 Análisis de la exactitud de los observables láser antes de la calibración. ....	206
Tabla 6.11 Análisis de la exactitud de los componentes de las coordenadas cartesianas antes de la calibración.....	210
Tabla 6.12 Resumen de datos de correlación.....	211
Tabla 6.13 Parámetros externos e internos resultantes del modelo de auto-calibración propuesto .....	212
Tabla 6.14 Parámetros externos globales.....	212
Tabla 6.15 Test de bondad del ajuste, Chi-cuadrado .....	213
Tabla 6.16 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el Trimble GX con todos los sistematismos.....	213

Tabla 6.17 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el láser Trimble GX empleando solamente los sistematismos significativos.....	214
Tabla 6.18 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el láser Riegl con todos los sistematismos .....	215
Tabla 6.19 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el láser Riegl usando solamente los sistematismos significativos .....	216
Tabla 6.20 Análisis de la exactitud de los observables láser calibrados y porcentaje de mejora.....	217
Tabla 6.21 Análisis de la exactitud de los componentes de las coordenadas cartesianas según los parámetros de calibración obtenidos.....	219
Tabla 6.22 Resumen de los datos de correlación (C) para los observables calibrados.....	220
Tabla 6.23 Análisis de invariantes dimensionales para los observables calibrados .....	221
Tabla 6.24 Ficha del patrón de calibración del láser escáner .....	222
Tabla 6.25 Coordenadas de los centros de las esferas y radio.....	223
Tabla 6.26 Dimensiones de los cubos del patrón .....	223
Tabla 6.27 Parámetros de escaneos láser para ambos equipos.....	225
Tabla 6.28 Invariantes espaciales calibrados por métodos metroológicos.....	226
Tabla 6.29 Resumen de errores en distancia (D=30m) entre esferas para el láser Trimble GX .....	228
Tabla 6.30 Resumen de errores en distancia (D=60m) entre esferas para el láser Trimble GX .....	230
Tabla 6.31 Resumen de errores en distancia (D=120m) entre esferas para el láser Trimble GX .....	231
Tabla 6.32 Resumen de errores en distancia (D=30m) entre esferas para el láser Riegl .....	232
Tabla 6.33 Resumen de errores en distancia (D=60m) entre esferas para el láser Riegl LMS-Z390i .....	233
Tabla 6.34 Desviaciones a priori ( $e_T$ ) de los sistemas láser considerados para diferentes distancias.....	234
Tabla 6.35 Distancias calibradas de la longitud de los cubos .....	238
Tabla 6.36 Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Trimble GX para una distancia de 30m.....	239
Tabla 6.37 Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Trimble GX a una distancia de 60m.....	240
Tabla 6.38 Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Trimble GX a una distancia de 120m.....	241

Tabla 6.39 Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Riegl a una distancia de 30m.....	241
Tabla 6.40 Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Riegl a una distancia 60m.....	242
Tabla 6.41 Errores de la profundidad de los cubos (mm).....	242
Tabla 6.42 Exactitud en la determinación de la longitud del cubo expresado por el error (porcentual) .....	242
Tabla 6.43 Software y cámaras evaluadas para estimar la distorsión radial.....	246
Tabla 6.44 Especificaciones técnicas de la cámara Canon 500D (imágenes tomadas de shop.usa.canon.com).....	247
Tabla 6.45 Objetivo empleado conjuntamente con la Canon 500D (imagen tomada de shop.usa.canon.com) .....	248
Tabla 6.46 Datos de los puntos de fuga – Canon 500D y 18mm de focal.....	249
Tabla 6.47 Resultados distorsión radial mediante sv3dvision .....	249
Tabla 6.48 Resultados de la calibración con Faucal .....	250
Tabla 6.49 Resultados tras realizar la calibración con el programa Bouguet .....	251
Tabla 6.50 Resultados finales de la calibración con Photomodeler®.....	253
Tabla 6.51 Resultados de la calibración de la Canon 500D con ImageMaster®	253
Tabla 6.52 Resumen de los datos de distorsión radial mediante las herramientas existentes.....	254
Tabla 6.53 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados .....	254
Tabla 6.54 Modelo de distorsión radial balanceada (con distancia radial $r_0=8,94\text{mm}$ ).....	254
Tabla 6.55 Desviación típica a posteriori del ajuste (en píxeles).....	255
Tabla 6.56 Especificaciones técnicas de la cámara réflex Nikon D70 (imágenes tomadas de www.nikonusa.com) .....	256
Tabla 6.57 Objetivo empleado con la cámara Nikon D70 (imagen tomada de www.letsgodigital.org).....	256
Tabla 6.58 Datos de los puntos de fuga – Nikon D70 y 28mm de focal .....	258
Tabla 6.59 Resultados determinación distorsión radial mediante sv3Dvision ...	258
Tabla 6.60 Resultados finales de la calibración geométrica con Faucal .....	258
Tabla 6.61 Resultados completos de la calibración completa con Bouguet .....	259
Tabla 6.62 Resumen de la calibración completa con Photomodeler® .....	260
Tabla 6.63 Resultados de la calibración con ImageMaster®.....	260
Tabla 6.64 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados .....	261

Tabla 6.65 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados.....	261
Tabla 6.66 Modelo de distorsión radial balanceada (con distancia radial $r_0=9,458\text{mm}$ ) .....	261
Tabla 6.67 Desviación típica a posteriori del ajuste (en píxeles) .....	262
Tabla 6.68 Especificaciones técnicas de la cámara digital compacta IXUS 110 (imagen adaptada de <a href="http://www.dpreview.com">www.dpreview.com</a> ) .....	263
Tabla 6.69 Datos de los puntos de fuga – Canon IXUS 110 .....	264
Tabla 6.70 Resultados determinación de la distorsión radial mediante sv3division .....	265
Tabla 6.71 Calibración mediante Faucal para la cámara compacta IXUS 110 ..	265
Tabla 6.72 Resultados de la calibración con Bouguet.....	266
Tabla 6.73 Calibración completa de la cámara compacta Canon IXUS 100 con Photomodeler®.....	267
Tabla 6.74 Calibración completa de la cámara compacta Canon IXUS 100 con el programa ImageMaster®.....	267
Tabla 6.75 Resumen de los valores de distorsión radial para las herramientas empleadas .....	268
Tabla 6.76 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados.....	268
Tabla 6.77 Modelo de distorsión radial balanceada (con distancia radial $r_0=2,583\text{mm}$ ) .....	268
Tabla 6.78 Desviación típica a posteriori del ajuste (en píxeles) .....	269
Tabla 6.79 Aproximaciones iniciales para la generación de la imagen de rango	274
Tabla 6.80 Resultados resección espacial.....	277
Tabla 6.81 Parámetros e índices de calidad para resolver la resección espacial robusta entre la cámara digital y el láser escáner .....	277
Tabla 6.82 Especificación técnicas. Faro Photon 80 .....	281
Tabla 6.83 Especificación técnicas. Cámara réflex Nikon D200 .....	281
Tabla 6.84 Especificaciones técnicas. Objetivo Nikkor 18-70mm .....	282
Tabla 6.85 Aproximaciones iniciales para la generación de la imagen de rango	283
Tabla 6.86 Datos de los puntos de fuga - Nikon D200 y 18mm de m de focal...	283
Tabla 6.87 Parámetros de la distorsión radial para la cámara Nikon D200 y 18mm de distancia focal .....	283
Tabla 6.88 Resultados del proceso de resección espacial robusto .....	286
Tabla 6.89 Parámetros e índices de calidad para resolver la resección espacial robusta entre la cámara digital y el láser escáner .....	286
Tabla 6.90 Cámara termográfica FLIR SC640.....	293



Tabla 6.91 Aproximaciones iniciales para la generación de la imagen de rango	294
Tabla 6.92 Datos de los puntos de fuga - FLIR SC640 .....	295
Tabla 6.93 Parámetros de la distorsión radial para la cámara FLIR SC640 .....	296
Tabla 6.94 Resultados del proceso de resección espacial robusto .....	297
Tabla 6.95 Parámetros e índices de calidad resultantes del proceso de resección especial robusto apoyado por el test de Pope.....	298
Tabla 6.96 Estimación de la pérdida de calor en la fachada del edificio. Comparativa entre las isotermas por separado y conjuntamente .....	301



# Capítulo 1

## Introducción

En la popular y ya consolidada era digital, la captura de información ha sufrido una drástica evolución. Hemos pasado de los dispositivos que capturaban imágenes aisladas en los años ochenta correspondientes a los espectros visible y no visible, a las secuencias de video en los años noventa y más recientemente los escaneos láser en la primera década del siglo XXI. Esta diversidad de fuentes y procedimientos en la captura, pone de manifiesto el carácter incompleto de la información procedente de un único sensor, de ahí la necesidad de integrar fuentes y sensores en busca de una mejor calidad en los productos y resultados.

La creciente disponibilidad de los láser escáner terrestres, algunas de las innovaciones más recientes en Informática Gráfica y las mejoras en las herramientas computacionales están dando lugar a una proliferación de los modelos 3D en diferentes contextos y aplicaciones. Algunas de estas aplicaciones conciernen al diseño asistido por ordenador en Arquitectura (CAD) e Ingeniería (CAE), Medicina, Ingeniería Forense, y hasta juegos 3D y técnicas de animación por ordenador. El ámbito de las aplicaciones consideradas en esta tesis afectan principalmente a la documentación, modelización y visualización de objetos 3D pertenecientes al Patrimonio, y más especialmente al marco arquitectónico y urbano. En concreto, se pretende obtener modelos híbridos fruto del registro sensorial de dispositivos de rango (láser escáner) e imagen (cámara digital). La estimación de dichos modelos requerirá de herramientas fotogramétricas y de visión computacional que permitan garantizar precisión y fiabilidad en los procesos y resultados tanto geométricos como radiométricos.

A día de hoy, ningún sistema de escaneo láser satisface la totalidad de las necesidades geométricas y radiométricas asociadas a un objeto o escenario 3D. Es necesario fusionar la información procedente de diversos sensores tomando como referencia la geometría del propio objeto. Partiendo de la integración de una cámara y un láser, una reproyección y/o proyección de la imagen sobre la nube de puntos láser no es asequible, a priori, pues los rayos de la proyección que pasan por el punto ideal común (foco de la cámara o centro del dispositivo láser si se conociera) no están bajo el mismo sistema de coordenadas (datum), no existiendo intersección alguna con la nube de puntos. El problema de la reproyección y/o proyección no es elemental, debido a diferentes factores tales como la separación de la imagen y del escaneo (baselínea), la diferente resolución de la cámara y el láser, las diferentes calibraciones (a menudo desconocidas) de la cámara y del láser, la complejidad del objeto, etc. Por ello, hay dos estrategias básicas complementarias: reorientar la nube de puntos de acuerdo con la misma

orientación que la imagen y re proyectar la nube de puntos sobre la imagen, o superponer una estructura continua a la nube de puntos (una triangulación típicamente), obtener la localización (posición y orientación) de la cámara con respecto a la nube de puntos y calcular la intersección de cada uno de los píxeles de la imagen con el modelo láser mediante un proceso de proyección. Resuelto el problema, la fusión o registro de la información 2D (imagen) y 3D (láser) podrá utilizar la proyección y/o reproyección de cualquier tipo de imagen (incluyendo grabados, fotos históricas, dibujos, o reconstrucciones virtuales) e incluso imágenes correspondientes al espectro no-visible (infrarrojos, ultravioleta, termografía, geo-radar) sobre los modelos basados en láser, obteniendo así un soporte realista que permitirá consultas métricas, análisis y la evaluación de características.

En este sentido, esta Tesis Doctoral pone de manifiesto la necesidad de resolver problemas relacionados con las transformaciones geométricas rígidas (rotaciones, traslaciones) que permitan poner en relación los datos 2D (imagen) y 3D (láser), así como los procesamientos híbridos derivados de la integración de ambos sensores. La información geométrica y radiométrica obtenida fruto de la hibridación constituirá las bases para la toma de decisiones (Kern, 2001). Por otro lado, la falta de información sobre las características internas de los sensores (láser y cámara), unido a su inestabilidad a lo largo del tiempo, hacen necesario el desarrollo de procedimientos y protocolos de calibración que permitan la determinación de sus parámetros intrínsecos junto con el diagnóstico y corrección de posibles errores sistemáticos.

## **1.1. Estado del conocimiento: tecnología láser y fotogrametría terrestre**

### **1.1.1. Tecnología láser**

#### **Terminología**

Antes de empezar, conviene fijar unas breves cuestiones sobre la terminología habitualmente manejada en el contexto del sensor láser escáner terrestre. Como viene siendo habitual, cuando una nueva tecnología emerge, son diversos los términos y acrónimos que se crean para denominar a una misma cosa. Esto ha sucedido con el láser escáner terrestre y ha sido puesto de manifiesto en los últimos Congresos Internacionales de LADAR Calibration celebrados (Cheok, 2003, 2005). Con idea de conseguir una estandarización o normalización de términos en torno al láser escáner terrestre, son diversos los autores y organizaciones que han decidido aportar su opinión al respecto. Por ejemplo, la Organización responsable del Patrimonio en el Reino Unido (English Heritage), ha desarrollado un glosario de las diversas acepciones relacionadas con el láser escáner, empezando por su propio principio básico de medición del que se derivan los dos primeros acrónimos y terminando por las diferentes acepciones del

término láser escáner terrestre junto con los términos más comunes del propio contexto:

- LIDAR (*Light Detection and Ranging*), habitual de los láser escáner aerotransportados (ALS) y que básicamente destaca la medición de distancias como característica del instrumento. No confundir con los láseres atmosféricos, también denominados como LIDAR, pero cuyo objetivo es la medición de contaminantes en la atmósfera.
- LADAR (*LAser Detection And Ranging*), no tan habitual pero sin duda más clarificador en cuanto que especifica por primera vez el término láser. De este acrónimo se deriva que el láser proporciona tres medidas espaciales, una distancia y dos ángulos, y a menudo también la componente de intensidad del láser. También es conocido como *Laser Radar*.

Sin embargo, son las diferentes acepciones que giran en torno al término láser escáner terrestre las que están causando más confusión y por supuesto una falta de estandarización en el manejo de la terminología. Empecemos por la propia definición de láser escáner terrestre, definida por Mills y Barber (2003) como:

*Terrestrial Laser Scanning is the use of a ground based device that uses a laser to measure the 3D coordinates of a given region of an object's surface automatically, in a systematic order at a high rate in near real time*

Una descripción muy similar a la anterior del concepto de láser escáner terrestre es también propuesta por Johansson (2003). Sin embargo, son numerosas las publicaciones de carácter científico donde podemos encontrar diferentes denominaciones. Sirvan como ejemplo las siguientes:

- Láser Escáner Terrestre
- Láser Escáner 3D Terrestre
- Láser Escáner
- Láser Escáner 3D
- Láser 3D
- Láser Escáner de Rango Cercano
- Láser Escáner Fotogramétrico
- LIDAR Escáner
- Láser Escáner Taquimétrico

A estos términos habría que añadirles la posibilidad de alterar el orden de las palabras, habitualmente entre “láser” y “escáner”.

En el momento actual, el término más usado y quizás el más correcto desde el punto de vista científico es el de Láser Escáner Terrestre, abreviado como (TLS, Terrestrial Laser Scanner) en el contexto científico. Por tanto, TLS será el término que se utilizará en esta Tesis Doctoral, junto con los términos *láser escáner*, *láser*

terrestre y escaneado láser por referirse siempre en esta Tesis a los dispositivos terrestres.

Otra cuestión que merece especial atención es el principio de medición en el que se apoyan los TLS. En concreto, los TLS de tiempo de vuelo son a menudo llamados en la terminología científica TOF (*Time Of Flight*), lo cual no es del todo acertado ya que los láser escáner de diferencia de fase como AMCW (*Amplitude Modulated Continuous Wave*) y FMCW (*Frequency Modulated Continuous Wave*) también miden el tiempo de vuelo aunque indirectamente. Una correcta terminología y clasificación de los láser escáner terrestres puede encontrarse en Koskinen et al. (1991), Lange (2000) y Kilpelä (2004).

En cuanto a la captura de datos, hay que reseñar el concepto ya universalizado de nube de puntos (*point cloud*), definida por (Mills y Barber, 2003) como:

*Point cloud is a collection of XYZ coordinates in a common reference system that portrays to the viewer an understanding of the spatial distribution of a subject or site. It may also include additional information such as an intensity or RGB (red-green-blue) value*

Una nube de puntos contiene a menudo dos tipos de información:

- Métrica, que describe la geometría de los objetos.
- Visual o temática, que puede ser usada para describir las propiedades de la superficie del objeto.

Otro concepto que ha ido surgiendo con el continuo desarrollo de la tecnología del TLS es el concepto de *imagen de rango* (*range image*) sustituido en ocasiones incorrectamente por el de nube de puntos. La imagen de rango, es una imagen obtenida a través de la componente temática de la nube de puntos láser y que incorpora todas las propiedades métricas de ésta.

Otro término frecuentemente usado es el de *escaneo* (*scan*), el cual denota que una nube de puntos ha sido tomada desde una única estación, definida por una posición y orientación particular con respecto a un sistema de coordenadas externo. Todos estos términos, nube de puntos, imagen de rango y escaneo se emplearán también a lo largo de esta Tesis Doctoral.

## **Evolución Histórica**

La investigación y desarrollo en el área de la tecnología láser escáner cuenta con más de 40 años de historia desde la llegada de los primeros láser en 1960. Sin embargo, ha sido tan sólo en la primera década del siglo XXI cuando la tecnología láser escáner terrestre ha llegado a adquirir su propio campo de acción y crecimiento. Han sido las propiedades intrínsecas del láser: monocromaticidad, direccionalidad y coherencia (Ready, 1978; Wehr y Lohr, 1999), las que le han desmarcado como una tecnología singular con un campo de aplicación propio frente a otras tecnologías. De hecho, sus ventajas fueron en poco tiempo reconocidas en dos campos de aplicación: la medición remota de distancias (Topografía, Metrología y Geodesia) y su explotación como imagen (Fotogrametría). Al mismo tiempo, las actividades de investigación se han

desarrollado en paralelo en dos sectores: el civil y el militar. Como suele ser habitual con otro tipo de tecnologías, fueron los militares quienes primero explotaron el láser en aplicaciones aéreas y terrestres. En el sector civil, el láser encontró su propio “nicho” en la Topografía e Ingeniería Civil destacando tres aplicaciones principales (Kennie y Petrie, 1990):

- Medida electrónica de distancias (EDM)
- Construcción y obra civil
- Nivelación láser

En concreto, los primeros instrumentos topográficos que emplearon láser fueron a principios de los 60. Por ejemplo, el AGA Geodimeter como instrumento EDM fue introducido en 1967 por A. Bjerhammar, Profesor en Geodesia en el Instituto de Tecnología (KTH) en Estocolmo. Kennie y Petrie (1990) junto con Price y Uren (1989) dieron una acertada visión global de la instrumentación láser, así como las bases de la propia tecnología. Con posterioridad, en la década de los 90, la tecnología láser fue incorporada en las estaciones totales. Las primeras estaciones totales sin prisma fueron desarrolladas en 1994 en la Universidad de Ruhr, en Alemania (Scherer, 2004). Las estaciones totales sin prisma pueden, en cierta forma, ser consideradas como las “predecesoras” de los modernos láser escáner terrestres (Lingua y Rinaudo, 2001). De hecho, hoy en día alguno de estos instrumentos proporciona la opción de escaneo automático. A mediados de los 90, la compañía británica MDL (Measurement Devices Limited) diseñó un medidor de perfiles láser todavía usado en minería que permitía la medición de distancias y que estaba montado en una unidad rotatoria. Aunque inferior en cuanto a precisión y velocidad, se trataba de un equipo moderno.

Por otro lado, los láser escáner han sido utilizados en el sector civil con propósitos de explotar la imagen, pero inicialmente sólo en rangos cortos. La investigación se centraba básicamente en aplicaciones como la visión computacional, la robótica y el renderizado basado en imágenes (Hebert y Krotkov, 1992; Blais, 2004). Otra aplicación de especial interés en el sector civil lo ha constituido la Metrología y la Inspección Industrial con los láseres de corto alcance sustentados por el principio de triangulación óptica, permitiendo altas precisiones (micras). Una buena revisión de estos instrumentos puede encontrarse en (Määttä et al., 1993; Amann et al., 2001 y Blais, 2004).

En el sector militar, los láser fueron inicialmente utilizados para vigilancia, seguimiento y reconocimiento (Hovanessian, 1998). Al contrario que en el sector civil, las aplicaciones estaban caracterizadas por abarcar grandes dimensiones de la escena u objeto. Uno de los primeros ejemplos fue el láser escáner lunar (NASA) en la década de los años 60. La utilización del láser desde plataformas aerotransportadas (ALS) fue iniciada entre la década de los 70 y los 80. Pero no fue hasta 1980 cuando el ALS llegó a ser un elemento de investigación en el sector civil por parte del Instituto de Fotogrametría de Stuttgart. A mediados de los 90 fue regularmente aplicado para la generación automática de modelos digitales del terreno (MDT) y modelos de superficie (Ackermann, 1999; Wehr y Lohr, 1999).

A la vista de esta breve reseña histórica, puede afirmarse que el TLS llegó a las disciplinas de la Geodesia, Topografía, Cartografía y Fotogrametría a través de dos vías diferentes:

- La del sector civil, donde fruto de la enorme experiencia en el uso del láser en aplicaciones tales como: la robótica y la metrología, la geometría del objeto era adquirida casi en tiempo real. Posteriormente, la llegada de un hardware más avanzado ha hecho posible el aumento de la precisión y la velocidad de escaneo, extendiendo el rango y volumen de información que puede ser medido. Por tanto, ha llegado a ser posible llevar a cabo el levantamiento de objetos de grandes dimensiones, por ejemplo obras de ingeniería o edificios históricos. Los avances en el procesamiento de los datos 3D y la visualización han hecho posible manejar grandes cantidades de puntos generados por el TLS.
- La del sector militar, que propició la llegada del ALS en el campo de los levantamientos fotogramétricos. Como en otras muchas aplicaciones la propia necesidad llevó a extender esta tecnología al terreno. Sirva como ejemplo el de la empresa canadiense Optech, productora de ALS, que extendió su producción a instrumentos terrestres TLS (Blais, 2004).

No obstante, ha sido en primera década del siglo XXI donde los logros en investigación y desarrollo por parte del TLS han sido considerables. Estos sistemas han dado resultados muy interesantes tanto aplicados de forma individual (Balletti et al., 2004; El-Hakim, 2003, Rüther et al., 2003 y Yastikli, 2007, todos ellos aplicados al modelado de construcciones arquitectónicas de interés patrimonial) como combinados con las técnicas y métodos fotogramétricos. Entre este último modo de aplicación merecen ser destacados los trabajos de Beraldin (2004) donde se hace un análisis bastante exhaustivo de las características y fundamento de ambas técnicas centrándose principalmente en las aplicaciones patrimoniales, Tait et al. (2004) donde se analizan y comparan los resultados y las precisiones obtenidas en mediciones industriales utilizando sistemas láser y sistemas fotogramétricos, y Alshwabkeh y Haala (2004), que ensayan técnicas de segmentación para la combinación de modelos fotogramétricos con la información tridimensional detallada derivada de la medición mediante láser escáner, aplicado al estudio de la arquitectura patrimonial. El número de congresos y reuniones científicas internacionales donde se presentan este tipo de trabajos es muy amplio, destacando entre otros, los congresos internacionales bianuales de la CIPA, los congresos anuales de la Comisión V de la ISPRS, así como las reuniones y simposios de procesamiento de imágenes y sensores de la IEEE.

En relación al flujo de trabajo con el láser escáner terrestre, son numerosos los acercamientos y desarrollos incorporados en los últimos años. Desde el propio proceso de captura, al cual se le exige ser más eficiente, hasta la fase de modelización final o paso de la nube de puntos a una estructura 3D que pueda ser explotada sin ningún problema en un programa CAD/CAE. En relación a la primera **fase de captura**, Alshwabkeh y Haala (2005) proponen el procesamiento de la imagen proporcionada por el láser con el objetivo de extraer características lineales del objeto que permitan identificar aquellas zonas susceptibles de ser escaneadas con una resolución mayor. Se trata tan sólo de un



desarrollo experimental pero sustentado en criterios muy lógicos desde el punto de vista computacional y operacional del láser escáner. Más recientemente, la empresa Trimble ha incorporado en su último modelo de láser escáner de tiempo de vuelo (Trimble GX200 Advanced) la tecnología Trimble SureScan™ que permite la posibilidad de realizar un escaneo adaptativo, de forma que la malla de puntos resultantes presenta en todo momento una estructura regular manteniendo constante la resolución independientemente de la distancia al objeto. La densidad constante de puntos en la nube láser resultante permite aumentar la eficiencia de captura en campo, al evitar sobre-densificar las zonas más próximas al equipo. En la **fase de pre-procesamiento** correspondiente a la **depuración y eliminación de información no deseada sobre** la nube de puntos, Bornaz y Rinaudo (2004) proponen una técnica de eliminación de puntos que están situados entre el objeto y el sensor láser tales como (árboles, coches, personas, etc.) basado en un método estadístico. Para ello la nube de puntos es dividida en una malla regular cuyo paso es función de la resolución angular de captura. Para cada celda se calcula la mediana con los puntos contenidos en ella, permitiendo estimar la desviación para cada punto individual, ergo aquellos puntos que se alejen demasiado de la precisión del láser serán rechazados; Krzystek (2003) presenta un método similar pero apoyado en un ajuste de elementos finitos con un cierre convexo. La malla inicial del MDT es refinada por los puntos que descansan sobre importantes localizaciones morfológicas mediante un umbral de distancia geométrica. El TIN<sup>1</sup> del MDT será posteriormente ajustado mediante un proceso iterativo robusto usando los puntos restantes; Aschoff et al. (2004) emplean varios umbrales para evitar la presencia de ruido, concretamente, un filtrado inicial basado en la baja reflectividad de los puntos de ruido y su ángulo de incidencia con respecto a su vecindad. Asimismo aplica un filtro específico para detectar puntos aislados.

La **fase de alineamiento o registro de tomas láser** es quizás el punto donde más algoritmos y técnicas han sido presentados en los últimos años. Estos pueden ser clasificados como métodos de registro groseros o finos, según se pueden aplicar sin o con aproximaciones iniciales respectivamente. Dentro de las técnicas de registro grosero, las cuales se encuentran resumidas en la Tabla 1.1 (referidas por sus acepciones en inglés), nos podemos encontrar con los siguientes algoritmos: el descriptor *Point signature*, introducido por (Chua y Jarvis, 1997) es un método consistente en crear una nueva representación del punto 3D que permita describir la forma 3D de las superficies según la vecindad de dicho punto. Este método permite que el proceso de correspondencia sea muy rápido y eficiente, pero por el contrario el cálculo del descriptor (proceso previo a la correspondencia) requiere un alto coste computacional cuando la superficie está definida como una nube de puntos o un TIN; y además es muy sensible al ruido. El método *Spin Image* (Johnson y Hebert, 1999) está fundamentado en proyectar la vecindad de puntos 3D sobre un plano 2D tangente a un punto dado, obteniéndose una imagen bidimensional que representa a dicho punto. En los ejes de esta imagen se representa la distancia entre cada punto de la vecindad y el vector normal al plano tangente, y la distancia entre ese mismo punto y el plano tangente. El principal inconveniente de este acercamiento es la dependencia de la resolución de la imagen generada. El método *PCA* o análisis de componentes principales aplicado

---

<sup>1</sup> Red de triángulos irregular, iniciales del inglés: *Triangulated Irregular Network*

como algoritmo de registro fue propuesto por (Chung y Lee, 1998). Este método emplea los ejes del volumen de la nube de puntos para alinear una secuencia de imágenes de rango entre sí, siempre y cuando la región de solape sea lo suficientemente grande (mínimo un 50%). Chen et al. (1998) propusieron un método para determinar las tres mejores homologías entre dos imágenes de rango (*RANSAC-based DARCES*<sup>2</sup>). La búsqueda de dichos tres puntos se realiza en base a las distancias entre ellos. Esta búsqueda se repite exhaustivamente, y para cada tripleta de puntos se obtiene una solución particular de la transformación euclídea. Los parámetros de registro finales serán los que más votos hayan recibido. El *método de superficies algebraicas* propuesto por (Tarel et al., 1998) estima el registro entre superficies representadas como polinomios. El algoritmo *line-based* (Stamos y Leordeanu, 2003) está basado en la segmentación de las imágenes de rango y la extracción de segmentos rectos y planos. Este método funciona adecuadamente cuando en la escena hay grandes estructuras con regiones planas. El algoritmo de curvatura principal (Feldmar y Ayache, 1996) caracteriza a un punto dado según sus valores de curvatura principal (máxima y mínima curvatura), en base a los cuales se busca su correspondencia. Cada par de puntos permiten resolver la transformación euclídea, cuya bondad es valorada según el número de puntos cuyo homólogo se encuentra por debajo de un umbral de distancia dado. La aplicación de algoritmos genéticos para la solución del registro grosero también fue considerada (Brunnström y Stoddart, 1996).

Métodos de registro groseros	Correspondencia			Estimación			Robustez	Registro	
	Superficie	Curvas	Puntos	MMCC	Vet propios	Otros		Iterativo	Lineal
Point signature	•			•			•	•	
Spin Image	•			•			•	•	
PCA			•		•				•
RANSAC – Based DARCES	•			•			•	•	
Algebraic surface model			•		•			•	
Line-based		•				•	•	•	
Principal curvature	•					•			•
Genetic algorithm	•			•			•		•

Tabla 1.1 Clasificación de los métodos de registro groseros (modificado de Salvi et al., 2009)

Descripciones más detalladas sobre todos estos acercamientos y sus alternativas se pueden encontrar en (Salvi et al., 2009). Dentro de los métodos de registro de detalle, el más popular y universalizado es el ICP (*Iterative Closest Point*) desarrollado inicialmente por (Besl y McKay, 1992) el cual, dada una buena aproximación inicial, minimiza en un proceso iterativo la distancia entre los puntos y sus homólogos más cercanos. El algoritmo tiene un alto coste computacional, siendo la parte más pesada el proceso de búsqueda exhaustiva de correspondencias. Otras de sus desventajas, es que el algoritmo converja en un mínimo local, o su sensibilidad ante la presencia de errores groseros.

Sobre el algoritmo ICP se han realizado múltiples variantes, por ejemplo Zhang (1994) introduce un umbral para la distancia máxima tolerable y un control de la

<sup>2</sup> Siglas de *Random Sample Consensus y Data Aligned Rigidity Constrained Exhaustive Search*

orientación para evitar emparejamientos erróneos en cada iteración; Godin et al. (2001) reducen el espacio de búsqueda considerando como puntos candidatos aquellos que tienen atributos invariantes como el color, curvatura o vector normal.

Chen y Medioni (1992) propusieron una alternativa al algoritmo ICP, basada en la minimización de la suma de las distancia al cuadrado entre puntos y sus correspondientes superficies, en base al cálculo del vector normal. Este algoritmo normalmente es más rápido que el ICP porque trabaja con puntos y superficies, en vez de pares de puntos. Sin embargo la nube de puntos deber tener una alineación inicial aproximada mucho más precisa que en el caso del ICP.

Dentro de los métodos de registro de detalle también están presenten algoritmos clásicos como el tradicional ajuste por MMCC basado en una transformación tridimensional de 7 parámetros (Akca, 2007), el cual presenta grandes semejanzas con el ajuste por modelos independientes de fotogrametría aérea. Al emplear el algoritmo de mínimos cuadrados, puede apoyarse en el modelo de Gauss-Markov para proveer de controles de fiabilidad interna (detección de errores groseros). Además hay que destacar que incluye la posibilidad de considerar deformaciones entre las nubes de puntos asimiladas como diferencias en el factor de escala de cada una. Sobre este acercamiento, en el que la determinación de los puntos homólogos es parte del problema de ajuste, se han realizado estudios para determinar soluciones óptimas mediante la aplicación de tiempos polinómicos (Utriainen, 2010), los cuales son un caracterización aproximada del tamaño de los problemas que puede ser manejados por un algoritmo en un tiempo razonable.

El registro mediante *Signed Distance Fields* fue presentado por (Masuda, 2001), y consistente en generar una malla 3D arbitraria para cuyos nodos se establece la correspondencia con los puntos 3D de la superficie del objeto, calculándose la distancia entre ellos. Se resuelve los parámetros de transformación y se recalcula hasta que los residuos convergen. Su ventaja radica en la posibilidad de aplicarlo a múltiples casos simultáneamente y evitar así la propagación de errores, como el caso del registro por pares.

Al igual que en el registro grosero, para el alineamiento de detalle también se han aplicado algoritmos genéticos (Chow et al., 2004) para el registro de imágenes de rango, concretamente empleando la mediana como función de ajuste. Este algoritmo si bien es robusto y evita los mínimos locales, no es aplicable en aquellos casos en los que el solape sea inferior al 50%.

Métodos de registro finos	Registro		Minimización de distancia		Árboles kd	Robustez
	Pares	Múltiple	Punto-Punto	Punto-Plano		
ICP	●		●			
Chen	●			●		
3D LS Surface Matching		●	●			●
Signed Distance Fields		●	●			●
Genetic algorithm	●		●		●	●

Tabla 1.2 Clasificación de los métodos de registro finos (modificado de Salvi et al., 2009)

Dos acercamientos diferentes que permiten el alineamiento automático preciso de las nubes de puntos fueron presentados por (Akca, 2003) y (Artese et al., 2004). Por un lado, Akca utilizando tarjetas artificiales establece una extracción de las mismas y una búsqueda de invariantes en el espacio (dos distancias y un ángulo) para encontrar pares de puntos homólogos en las nubes de puntos. Por otro lado, Artese utiliza tarjetas volumétricas (conos) e implementa un acercamiento basado en el ajuste de primitivas junto con una búsqueda de homólogos en base a medidas entre las tarjetas realizadas por métodos topográficos.

El **mapeo de texturas** o **renderización** del modelo láser es otra de las fase que ha recibido particular atención, especialmente desde la disciplina de la Informática Gráfica. Lograr una representación realista de la escena u objeto pasa por resolver tareas relacionadas con la visibilidad de superficies (gestión de partes vistas y ocultas), propiedades de la iluminación del material y la escena, así como resolver aspectos correspondientes a la transición entre texturas. En Debevec et al. (1998) incorporan algoritmos que permiten determinar la idoneidad de una determinada zona de la imagen para ser renderizada. Criterios como el ángulo de incidencia o la distancia al objeto son incorporados por Debevec al cálculo de visibilidad para determinar su elección. Además su técnica propuesta (VDTM - *View-Dependent Texture Mapping*) incluye la recuperación de texturas en aquellas caras parcialmente ocultas mediante procesos de interpolación, aunque el resultado adolece de cierto grado de desenfoco. En (Neugebauer y Klein, 1999), (Bernardini et al., 2001) (Buehler et al., 2001), (Wang et al., 2001) y (Rocchini et al., 2002) se incorporan algoritmos destinados a mejorar la transición entre texturas, más concretamente en las juntas de los polígonos basándose en estrategias de interpolación. Más concretamente, Neugebauer y Klein tienen en cuenta la visibilidad de las imágenes capturadas para conseguir una transición suave, mediante una ponderación en el proceso de mezcla de texturas sobre malla. Buehler presenta la técnica ULR (*Unstructured lumigraph rendering*) como alternativa al VDTM. Usa una función de rango basada en los ángulos entre la vista original y la vista deseada para encontrar las imágenes más cercanas. Y dichas diferencias angulares serán más tarde usadas como parte de la ponderación de la transición radiométrica. Ambos acercamientos adolecen de una degradación de la textura global, debido a que el proceso de transición se aplica sobre todas las imágenes. Rocchini usa técnicas estéreo de fotogrametría para calcular mapas de textura difusa a partir de múltiples imágenes. Se generan ponderaciones para cada imagen en el proceso de fundido, pero para evitar degradaciones globales de la textura, solo se pondera en las caras situadas en el límite del borde. Por su parte Bernardini calcula la normal para cada punto visible de la superficie a partir de un conjunto de imágenes que muestran la misma vista de un objeto iluminado por una fuente de luz puntual, cuya posición varía entre imágenes, pero es conocida. Se genera un mapa de albedo (dirección del vector normal del color difuso) que asume que la superficie es completamente lambertiana, por lo que el método presentará dificultades cuando la superficie sea brillante. Wang desarrolla un método óptimo para reconstruir un mapa de texturas a partir de múltiples imágenes y establece que un único mapeo de texturas en modelo 3D es normalmente suficiente para la mayoría de casos en fotogrametría. Uno de los acercamientos más populares en la Comunidad Científica de la Informática Gráfica es el cálculo de la Función de Distribución de Reflectancia Bidireccional (BRDF). Varios modelos de reflectancia han sido propuestos en la forma de la

función BRDF, uno de los más frecuentes es el modelo usado por (Oren y Nayar, 1994) que expresa la estimación de dicha función sobre superficies rugosas parametrizando dicha rugosidad como función de los ángulos de pendiente de los surcos presentes en el terreno; Sato et al. (1997) proponen un método para estimar la función BRDF de un objeto completo en el cual extraen la información referida a los parámetros de reflexión difusa, especular a partir de una secuencia de imágenes en color y rugosidad a partir de los datos de distancia; y Lensch et al. (2003) quien desarrolla un acercamiento jerárquico que estima la variación espacial de la reflectancia de la superficie para representar la función BRDF de cada material como combinación lineal de BRDFs básicos. También se han realizado estudios referidos a la determinación de las propiedades invariantes de reflectancia e iluminación; en Karner et al. (1996) se determina la función BRDF para varios materiales mediante el posicionamiento de una fuente de luz cercana al plano del material y tomando múltiples imágenes. Dana et al. (1999) realiza un análisis similar de laboratorio para confeccionar una base de datos para un extenso número de texturas reales bajo diferentes condiciones de iluminación.

Finalmente y en un nivel más avanzado, las tareas de mapeo de texturas o renderización dan paso a las estrategias de **modelización**, es decir, pasar de la nube de puntos al modelo de superficies. Habitualmente existen dos posibles acercamientos a dicho problema: la **modelización de geometrías sencillas (primitivas básicas)** y la **modelización de geometrías complejas (generación de mallas)**. En relación al primero de los acercamientos de modelización, primitivas básicas, son diversos los esquemas de parametrización y votación que se han empleado para la extracción de geometrías básicas. De entre ellos, destacan especialmente los esquemas de parametrización y votación de la Transformada de Hough 3D, Esfera Gaussiana y RANSAC. Su mayor inconveniente radica en su alto coste computacional, especialmente en el caso del primero al trabajar en un entorno tridimensional. No obstante, partiendo de una buena aproximación inicial que permita acotar el espacio de búsqueda se podrían obtener muy buenos resultados. Algunos ejemplos son los desarrollados por (Krishnamurthy y Levoy, 1996), (Curless y Levoy, 1996), (Pottmann et al., 2002) y (Vosselman et al., 2004), quienes han desarrollado métodos automáticos y algoritmos para el ajuste de primitivas básicas, pero sólo aplicado a nubes de puntos pequeñas y estructuradas correspondientes a objetos independientes (láser de corto alcance). Por otro lado, Rabbani et al. (2006) aplican primero una segmentación creciente “*region growing*” y posteriormente la Transformada de Hough 3D para segmentar primitivas básicas. Von Hansen, Michaelesen y Thonnessen (2006) aplican RANSAC para segmentar planos sobre nubes de puntos láser. Nótese como gran parte de estos planteamientos han heredado y extrapolado, no sin esfuerzo, los desarrollos del análisis de imagen en un contexto bidimensional 2D. Sin embargo, en ocasiones la propia complejidad del objeto o superficie (con alternancia de formas cóncavas y convexas) deparará que los acercamientos anteriormente reseñados resulten inadecuados. En estos casos, la generación de mallas se desmarca como el planteamiento ideal al problema, incorporando gran cantidad de variantes que pueden subdividirse en dos grandes grupos: técnicas poligonales y paramétricas. Los casos más populares en cuanto a las técnicas poligonales se corresponden con las triangulaciones de Delaunay (Delaunay, 1934), tanto en su versión 3D (Osada et al., 2002; Shewchuk, 2002; Cignoni et al., 1998), como 2D y 2.5D (Bourke, 1989; Watson, 1981; Ruppert, 1993; Clarkson y Shor, 1988;

Seidel, 1991). En relación a las técnicas paramétricas, éstas proporcionan mallas más precisas pero con un mayor coste computacional que las técnicas poligonales. Los ejemplos más habituales abordan el uso de funciones paramétricas NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) utilizadas por (Han y Medioni, 1996), así como el empleo de la función RBF (Radial Basis Function) implementada por (Carr et al., 2001) y (González-Aguilera et al., 2008).

### 1.1.2. Fotogrametría terrestre

El desarrollo de la fotogrametría en general y de la fotogrametría de objeto cercano en particular se produjo de manera paralela hasta la expansión de la fotogrametría aérea en la Primera Guerra Mundial. A partir de la segunda guerra mundial surge un nuevo concepto de conservación que se desarrolla y culmina en 1964 con la Carta de Venecia, se despierta el interés por la fotogrametría arquitectónica, olvidada hasta ese momento. Organizaciones internacionales como la UNESCO recomiendan a partir de este momento el uso de la fotogrametría no topográfica en el campo arquitectónico y de la conservación. El ICOMOS organiza en 1969 el I Simposio sobre las aplicaciones de la fotogrametría en la documentación de monumentos y lugares. A raíz de este evento se crea en 1970 la CIPA (Comité Internacional de Fotogrametría Arquitectónica). El año 1970, con el acceso a los ordenadores, surge la fotogrametría analítica y, posteriormente, en los años 90, la fotogrametría digital. Su importancia viene dada por los recursos disponibles, la resolución de las imágenes y la extracción de datos en tiempo real (Atkinson, 1996). La ingeniería electrónica ha añadido nuevos diseños de cámara, revolucionando el campo de la captura de imágenes con la aparición de las cámaras digitales frente a las analógicas (Cramer, 2004). La imagen digital ha transformado en gran medida el mundo de la fotogrametría terrestre. Y lo ha hecho fundamentalmente en dos sentidos:

- Flexibilizando el proceso de toma al eliminar las películas y todo el proceso físico-químico asociado a ellas. Hoy podemos tomar fotografías con mucha más facilidad y en mucha mayor cantidad que antes.
- Flexibilizando el tratamiento de las imágenes que pueden ser mejoradas de brillo y contraste, limpiadas, ampliadas, reducidas, invertidas, estiradas, deformadas, fusionadas, estilizadas, etc. de forma sencilla. También podemos detectar de forma automática determinados elementos, extraer información de ellas y hasta aspirar a interpretar su contenido mediante un autómeta.

La realización de modelos 3D foto-realísticos a partir de fotografías tomadas con cámaras digitales, almacenando los resultados obtenidos en formato VRML para su visualización y animación en Internet (Drap, et al., 2004), es en estos momentos una de las líneas de los grupos que trabajan en fotogrametría sobre ordenadores personales, la automatización del proceso de restitución mediante la implantación de módulos de correlación o similares, así como, y derivado del uso de cámaras digitales, el desarrollo de nuevos algoritmos para visión computacional dentro del proceso fotogramétrico (Price y Gee, 2005). Particularmente, la modelización 3D a partir de imágenes “*image-based*

*modeling*” constituye hoy en día una alternativa versátil y de bajo coste para la reconstitución 3D de objetos a partir de una o varias imágenes. De hecho, su gran crecimiento en los últimos años permite augurar prometedoras expectativas de futuro. Gran parte de este éxito se debe a los siguientes aspectos:

- Nuevas disciplinas y nuevas relaciones entre ellas: Fotogrametría, Análisis de Imagen, Visión Computacional e Informática Gráfica.
- Nuevos algoritmos y métodos han surgido con objeto de lograr automatización en ciertas tareas.
- Nuevos clientes, los cuales también participan como elementos pasivos (usuarios) o incluso activos (desarrolladores) en este nuevo paradigma.

No obstante, a pesar de todo este influjo divergente su devenir metodológico pasa por aspirar a la automatización total “*full automatization*”, lo que plantea la resolución de problemas como: la auto-calibración de las cámaras, la extracción de características, la búsqueda de correspondencias “*matching*”, el ajuste de geometrías básicas, así como el mapeado dinámico de texturas.

La Fotogrametría de objeto cercano y la Visión Computacional son las dos disciplinas destacadas por excelencia en estas tareas. Juntas han proporcionado diversos acercamientos, métodos y algoritmos para tal fin. Prueba de ello son los trabajos desarrollados en el marco de la geometría proyectiva por (Pollefeys et al., 2000) o en el modelo de la cámara perspectiva “*pinhole camera*” por (Gruen y Beyer, 2001) y (Remondino, 2003). Ambos, aunque con diferentes formulaciones matemáticas tratan de explotar la relación geométrica que se verifica entre los puntos del objeto (3D), los puntos imagen correspondientes (2D) y el punto de vista (objetivo de la cámara).

Ahora bien, en función del proceso que estemos acometiendo, estos elementos geométricos, merecen diferentes consideraciones. Cabe así distinguir el proceso de toma fotográfica, en el que a partir del objeto formamos la imagen y el proceso de modelización 3D en el que a partir de la imagen formamos el objeto (su representación 3D o virtual).

En este sentido, podemos definir la modelización 3D a partir de imágenes como el proceso recíproco al de la toma fotográfica. A partir del punto de vista y de cada uno de los puntos contenidos en la imagen se trata de obtener (de situar en un sistema de referencia) los puntos del objeto.

Para ello deben resolverse tres problemas previos:

1. Debemos conocer la posición del punto de vista respecto de la imagen, es decir, debemos conocer la geometría interna de la cámara. Este proceso se conoce como determinación de los parámetros intrínsecos de la cámara.
2. Debemos conocer la localización de la imagen junto con su cámara (es decir, con su punto de vista) en el sistema de referencia que se quiere emplear, proceso conocido como determinación de los parámetros extrínsecos de la cámara.
3. Debemos resolver la intersección de las rectas disponibles con el objeto, lo que representa un absurdo: necesitamos el objeto para determinar la

posición de sus puntos. Para resolver esta cuestión se puede seguir dos caminos:

- La modelización 3D del objeto a partir de múltiples imágenes, consistente en superar la indeterminación anterior mediante la intersección de las direcciones asociadas a dos o más imágenes tomadas desde puntos de vista diferentes. En este caso, cada uno de los puntos del objeto es recuperado tridimensionalmente.
- La modelización 3D del objeto a partir de una sola imagen, consistente en superar la referida indeterminación mediante la intersección de las direcciones fotográficas con diversos planos (o superficies) asociables al objeto. En este caso, cada punto es recuperado bidimensionalmente dentro de la superficie a la que pertenece aunque tridimensionalmente en el conjunto del objeto.

El **modelizado 3D a partir de múltiples imágenes** requiere de un acercamiento jerárquico y secuencial que permita recuperar la estructura 3D del objeto. La base del proceso se encuentra en la puesta en correspondencia o relación de las diferentes imágenes, lo que a su vez conlleva los mayores problemas, especialmente cuando se trabaja con geometrías desfavorables, cámaras desconocidas y además se busca una automatización total del proceso.

La primera fase consiste en llevar a cabo un análisis de la imagen en base a una extracción de características que permita establecer el patrón de medida en la correspondencia entre las imágenes. Obviamente, la propia automatización actuará como fuente de correspondencias erróneas entre las imágenes, lo que exigirá de técnicas robustas y estadísticas que garanticen fiabilidad en el proceso. A través de estas correspondencias se establece un modelo matemático (transformación proyectiva) que permite poner en relación las diferentes imágenes. A partir de la extracción de características (puntos y líneas) homólogas en diversas imágenes puede calcularse: los parámetros intrínsecos (geometría de la cámara) y extrínsecos (posición y orientación de la cámara) de cada una de las imágenes que documentan el objeto; así como las coordenadas 3D de los propios puntos del objeto, unidos mediante las líneas definidas sobre las imágenes. Una vez que se ha completado este proceso puede procederse a la modelización radiométrica (renderizado) de las superficies del objeto. Este proceso consiste en una proyección de cada una de las caras, identificada sobre alguna de las imágenes, sobre la cara correspondiente del objeto y sólo es posible una vez que, en el paso anterior, se han determinado las relaciones entre los puntos imagen y los puntos objeto que delimitan las respectivas caras.

Existen bastantes técnicas y metodologías desarrolladas en la modelización 3D a partir de múltiples imágenes. Empezando por nuestro contexto fotogramétrico, (Atkinson, 1996) produce modelos 3D del alta precisión a partir de imágenes digitales, pero requiere un alto grado de intervención manual por parte del usuario (extracción de características y correspondencia). Otras técnicas como la de (Faugeras, 1993) incorpora una aproximación tradicional jerarquizada basada en la inclusión de la geometría Euclídea en la geometría afín y de ésta última en la proyectiva para un caso de cámara calibrada. Por otro lado, (Fitzgibbon, 1998) desarrolla un método para recuperar automáticamente la geometría 3D de un objeto mediante la extracción de puntos y su correspondencia sobre tripletas de



imágenes. La matriz fundamental y el sensor trifocal entre tripletas de imágenes son calculados apoyados por técnicas robustas. Esta información proporciona la geometría proyectiva 3D del sistema necesaria para acometer una modelización 3D del objeto. Otra técnica de modelizado 3D a partir de múltiples imágenes es desarrollada por (Liebowitz et al., 1999) quien empleando restricciones geométricas, bastante comunes en escenas arquitectónicas (paralelismo y ortogonalidad), recupera la geometría del objeto. (Pollefeys, 1999) hace uso del espacio proyectivo y de la correspondencia automática de puntos de interés para obtener una auto-calibración de la cámara y una modelización del objeto a partir de secuencias de video (Videometría). Estas técnicas y métodos son ampliamente discutidos en su tutorial (Pollefeys et al., 2000). Otro acercamiento ligeramente diferente a los vistos hasta ahora, se apoyan en la modelización 3D del objeto basándose en el empleo de primitivas geométricas. El usuario proporciona los parámetros de las primitivas para modelizar la estructura 3D del objeto. Estas primitivas son localizadas en las imágenes. Este acercamiento es empleado por (Debevec, 1996) y (Lang y Förstner, 1996). Una ventaja de este método radica en que las propias primitivas contienen de manera implícita reglas geométricas simples (ortogonalidad, paralelismo, etc.) que pueden ser explotadas. (Cipolla et al., 1999) presentan un método basado en la combinación de las primitivas geométricas y en la extracción de características y puesta en correspondencia. Además incorporan estimadores estadísticos que hacen el proceso de modelizado más robusto. Más recientemente, Hartley y Zisserman (2000) presentan una metodología para la modelización 3D a partir de múltiples vistas con cámaras sin calibrar basado en el empleo de primitivas y restricciones geométricas del objeto, todo ello en el marco de la geometría proyectiva.

A la vista de lo anteriormente reseñado, podría parecer irrazonable desarrollar métodos destinados a la **modelización a partir de una sola imagen** dada la indeterminación geométrica de la que se parte, y máxime cuando existe una gran proliferación de cámaras y ordenadores capaces de adquirir y procesar respectivamente múltiples imágenes. No obstante, el valor de poder obtener información métrica a partir de una sola imagen parece tener su propio espacio de interés en muy diversas disciplinas, desde la Visión Robótica que permita el guiado de robots y plataformas móviles de manera autónoma, hasta el propio Patrimonio Arquitectónico, a la hora de modelizar edificios destruidos o desaparecidos de los que apenas se tiene una imagen o boceto de los mismos, e incluso en el contexto de la Criminología de manera que a partir de una imagen tomada en la escena de un crimen se puedan obtener dimensiones métricas. Además, la posibilidad de explotación métrica a partir de una sola imagen hace de esta línea un complemento perfecto para la modelización 3D a partir de múltiples imágenes, de manera que permitan completar o mejorar los modelos en posibles zonas de oclusión o vacías.

A partir de una sola imagen es posible extraer información sustancial acerca del objeto e incluso modelizarlo en tres dimensiones. Uno de los pasos más críticos en este proceso se corresponde con la identificación con un alto grado de precisión y fiabilidad de los elementos estructurales pertenecientes a una imagen oblicua. Particularmente, en escenarios arquitectónicos los puntos de fuga constituyen el marco de trabajo que da soporte a todo el proceso, ya que proporcionan restricciones geométricas independientes las cuales pueden ser explotadas de

varias maneras: desde la auto-calibración de la cámara y un análisis dimensional del objeto, hasta su propia reconstrucción en tres dimensiones. No obstante, encontrar un equilibrio entre calidad y realidad es un objetivo difícil de alcanzar, especialmente si consideramos que la modelización 3D a partir de una sola imagen es una tarea que presenta una complejidad intrínseca derivada de su mal planteamiento inicial “*ill-posed problem*”, el cual aumenta con la escala. En este sentido, la clave pasa por desarrollar un acercamiento multidisciplinar que explote las sinergias con otras disciplinas de cara a establecer un marco de trabajo ideal. Hasta ahora, Fotogrametría y Visión Computacional son las principales disciplinas que participan en este contexto sinérgico proporcionando diferentes acercamientos que van desde la auto-calibración de la cámara hasta la modelización 3D.

En lo que se refiere al trabajo relacionado con esta línea de investigación: (Debevec, 1996) es la primera persona quien desarrolla un sistema de reconstrucción a partir de una sola imagen, explotando las características (bordes) seleccionadas por el usuario y construyendo un modelo a partir de primitivas. Además, Debevec verifica la precisión del modelo reconstruido proyectando el modelo sobre la imagen calibrada; (Parodi y Piccioli, 1996) investigan la reconstrucción de modelos 3D a partir de las líneas dibujadas en una imagen, asumiendo restricciones geométricas derivadas de la localización de los puntos de fuga; (Liebowitz et al., 1999) propone un método de modelización en dos pasos: en el primer paso, los planos visibles del objeto son individualmente reconstruidos por rectificación. En el segundo paso, los diferentes planos son orientados y colocados en el espacio; (Heuvel, 1998) describe un método para la modelización de objetos poliédricos a partir de una sola imagen. El método emplea medidas de líneas en la imagen, información del objeto, así como topología y restricciones geométricas (paralelismo y perpendicularidad); (Criminisi et al., 1999) presenta una técnica que hace uso de las siguientes asunciones: tres conjuntos ortogonales de líneas paralelas, cuatro puntos conocidos en el plano objeto y una altura de la escena; (Remondino, 2003) desarrolla un método para la modelización 3D del esqueleto humano utilizando una sola imagen. En este acercamiento el autor utiliza una proyección ortográfica escalada y alguna restricción geométrica para poder simplificar las relaciones entre las coordenadas objeto 3D y las medidas 2D sobre la imagen; (El-Hakim, 2000) presenta un método preciso y flexible el cual puede ser utilizado para una amplia gama de lugares y estructuras. El acercamiento no requiere modelos del objeto ni conocer los parámetros internos de la cámara. Tampoco usa puntos de fuga. En este sentido, El-Hakim establece varios tipos de restricciones geométricas basadas en relaciones topológicas y en primitivas básicas; (Sturm y Haybank, 1999) desarrolla un acercamiento similar basado en tres tipos de restricciones: coplanariedad de puntos, perpendicularidad de direcciones o planos y paralelismo de direcciones o planos. No obstante, en este caso el autor emplea puntos de fuga como elementos complementarios en la modelización 3D.

Más recientemente, (González-Aguilera y Gómez-Lahoz, 2008) desarrollan una metodología para la modelización 3D a partir de una sola imagen que presenta cierta originalidad con respecto a los acercamientos anteriormente reseñados en la medida que incorpora un novedoso método de cálculo de puntos de fuga (Aguilera et al., 2005), así como la integración en cada una de las fases del proceso de

técnicas robustas y estadísticas que permiten garantizar precisión y fiabilidad en todo el proceso. La línea de modelización 3D desarrollada por Aguilera incorpora un software de carácter gratuito conocido como sv3DVision (Aguilera y Lahoz, 2006) que supone una plataforma perfecta de simulación, modelización y contraste de resultados.

## 1.2. Estado del conocimiento: hibridación de los sensores terrestres láser escáner y cámara digital

La modelización 3D de objetos y escenarios complejos constituye un campo de investigación multidisciplinar con muy diversos retos y dificultades, especialmente si aspiramos a la automatización total del proceso. Como se ha visto en los apartados anteriores, sensores pasivos, cámaras digitales y sensores activos, escáneres láser, monopolizan el campo de actuación en la modelización 3D. No obstante, más que solaparse, las técnicas y metodologías propuestas por ambas parecen complementarse de manera bastante prometedora.

La siguiente tabla (Tabla 1.3) muestra una comparación basada en las características más importantes, tanto positivas como negativas, en relación con el láser escáner y la cámara digital.

LÁSER ESCÁNER	CÁMARA DIGITAL
↓ Extracción inexacta de líneas	↑ Alta precisión en la extracción de líneas
↓ Uniones y juntas no visibles	↑ Uniones y juntas visibles
↓ Información del color no disponible o en baja resolución (interna)	↑ Información del color en alta resolución
↑ Información métrica inmediata	↓ Información métrica más laboriosa y lenta
↑ Gran potencia y automatización en la captura de datos	↓ Menos potencia y automatización en la captura de datos
↓ Más lentitud en la captura de datos. Grandes esperas entre escaneos.	↑ Más rapidez y flexibilidad en la captura de datos
↑ Apto para la modelización de superficies complejas e irregulares	↓ No apto para la modelización de superficies complejas e irregulares
↓ Técnica costosa (30.000€-90.000€.)	↑ Técnica de bajo coste (Desde 100€)
↑ No necesita luz para trabajar	↓ Necesita luz para trabajar y preferiblemente días nublados
↓ El modelo 3D en nube de puntos es una entidad desordenada y sin topología	↑ El modelo 3D procesado y modelizado tiene topología

**Tabla 1.3 Comparación de ventajas y desventajas: láser escáner y cámara digital.**

La pregunta: ¿qué sensor es mejor? surge inmediatamente a la vista de las características de la Tabla 1.3, no teniendo una respuesta única. Dependerá de lo requerimientos del trabajo, así como de la viabilidad y rentabilidad económica del mismo lo que nos lleve a decidir entre una u otra alternativa. No obstante, y como ha quedado claro anteriormente, ambas técnicas parecen complementarse perfectamente si se aplican en conjunto, con lo que en aplicaciones relacionadas con el modelizado 3D en las que se requiera trabajar con objetos de cierta complejidad tanto geométrica como radiométrica, una integración de ambas parece ser una prometedora línea de acción.

El problema de la integración (registro) de la imagen con respecto al modelo láser está íntimamente relacionado con el problema de calibración de la cámara, el cual proporciona un modelo de proyección entre los datos láser 3D (espacio objeto) y la imagen 2D (espacio imagen). Esta proyección viene caracterizada por una transformación rígida (rotación y traslación) junto con el modelo de la cámara (calibración), también conocido como determinación de los parámetros externos e internos respectivamente. La transformación rígida tomará como datos de entrada correspondencias entre puntos 3D del espacio objeto y puntos 2D del espacio imagen, mientras que el modelo de la cámara establecerá la forma en que los puntos son proyectados sobre el plano imagen.

La correspondencia basada en características suele ser la estrategia ideal para resolver el registro de la cámara con respecto al modelo láser. Estas características son habitualmente, puntos, líneas u objetos especialmente diseñados que son colocados en la escena. El proceso de correspondencia puede ser automático o asistido por el usuario, mientras que el número de pares de características requeridas dependerá de los parámetros de la cámara que queramos resolver.

Según (Mitka y Rzonca, 2009) la fusión de sensores puede dividirse en dos aproximaciones generales diferentes:

- *Integración in-situ*: basada en la integración física de los sensores. Este tipo de aproximación consiste en la elaboración de una estructura en la que se disponen los sensores y se calibra su posición. Esta solución proporciona un alto grado de automatización y disponibilidad para los procesos de captura, pero por el contrario carece de flexibilidad en la captura de datos.
- *Integración en gabinete*: Como su nombre indica, la fusión de los sensores se realiza durante la etapa de procesado en laboratorio. Mediante esta solución se dispone de mayor flexibilidad durante la captura de información en campo al no estar limitado por una estructura predefinida.

En el contexto del registro de la imagen para el modelizado 3D empleando datos procedentes de un láser escáner terrestre, varios acercamientos han sido desarrollados hasta ahora: Levoy et al. (2000) en el proyecto “Digital Michelangelo” realiza una pre-calibración de la cámara que permite integrar geometría y textura sin intervención del usuario. En esta misma línea, Rocchini et al. (1999) realizan un registro de imagen y modelo láser a través de la selección de correspondencias de puntos de forma manual. Ambos acercamientos son aplicados en un contexto de modelizado de objetos pequeños, tales como esculturas y estatuas. En busca de un método que automatice el registro multi-sensor, Lensch et al. (2001) desarrollan un registro imagen-láser basándose en la correspondencia de siluetas, donde el contorno de un objeto 3D es relacionado con la silueta homóloga del objeto en la imagen. No se requiere intervención del usuario, pero el método no arroja buenas precisiones y está limitado a aquellos casos donde la imagen engloba a todo el objeto. En otra escala de métodos aplicados a escenas de exterior y basándose en localizar invariantes de la imagen, McAllister et al. (1999) sugieren poner en correspondencia bordes de la imagen adquirida con la cámara digital con bordes extraídos a partir de la componente intensidad de la imagen de rango. Sin embargo, debe tenerse cuidado de colocar el punto nodal de la cámara digital en la misma localización física que el centro de

rotación del láser, y rotar ambos sensores respecto a este punto. Mediante esta relación homográfica se consigue simplificar el proceso de registro; Elstrom (1998) aplica un acercamiento similar pero apoyándose en la extracción de características invariantes (esquinas, bordes o contornos) sobre superficies planas. Más recientemente, Stamos y Allen (2001) presentan un método semi-automático para el registro de la imagen y el modelo láser aplicado a escenas urbanas, donde las líneas 3D son extraídas en un proceso de segmentación de las nubes de puntos y puestas en correspondencia con los bordes extraídos y segmentados de las imágenes. Este método involucra la utilización de las restricciones de paralelismo y ortogonalidad que están presentes en los entornos urbanos. Por lo tanto, este algoritmo sólo funciona en las escenas que contienen características lineales con fuertes condicionamientos geométricos. Además, el usuario debe fijar múltiples umbrales para controlar el proceso de segmentación; Ikeuchi et al. (2003) en el proyecto del “*Gran Budha*”, utiliza los bordes extraídos de la imagen de rango proporcionada por el láser y los bordes extraídos de la imagen adquirida por la cámara para estimar la posición de la cámara respecto del láser mediante un cálculo iterativo que busca minimizar el error 3D en posición. No obstante, esta aproximación sólo está enfocada para los objetos pequeños y simples; Allen et al. (2003) presenta un novedoso método para el mapeado de texturas sobre el modelo láser apoyado en el empleo de sombras. Mediante el conocimiento de la posición del Sol en el momento de la toma consigue estimar las sombras, las cuales son utilizadas como elementos clave en el proceso de registro de las imágenes con respecto al modelo láser; Kurazume et al. (2002) utiliza una detección de bordes en la imagen de alta resolución y en la de rango proporcionada por el láser para registrar ambos conjuntos de datos a través de un proceso iterativo apoyado en un estimador robusto tipo  $M^3$ .

De todos los métodos reseñados hasta ahora que hacen alusión al empleo de imágenes de intensidad proporcionadas por el láser, ninguno considera las diferentes características presentes en este tipo de imágenes con respecto a las proporcionadas por las cámaras digitales. De hecho, en el caso de la correspondencia entre datos radiométricos procedentes del infrarrojo cercano (IRC) y el espectro visible (RGB) la diferencia de longitud de onda hace inviable el uso de la luminancia como descriptor en el método de correspondencia. Siendo por lo tanto necesario comparar el IRC únicamente con el canal rojo de la imagen RGB, ya que al ser las longitudes de onda más próximas entre sí compartirán más características radiométricas, siendo la más relevante la reflectancia del objeto.

No obstante, en el caso de las imágenes térmicas se complica más, ya que estas poseerán unas características radiométricas y geométricas particulares. Desde el punto de vista geométrico son imágenes de baja resolución con una alta presencia de distorsión radial. Radiométricamente hablando los valores recogidos en la imagen proceden de la energía emitida por el objeto, y no de la energía reflejada como en el caso del espectro visible. Esto último es un importante inconveniente en el proceso de registro porque varía en gran medida el comportamiento del objeto. Algunas experiencias previas que han deparado interesantes resultados fueron (Rousseau et al., 2000) y (Jarc et al., 2007) quienes extraen información

---

<sup>3</sup> Para más datos consultar la sección 4.6

común de la textura de las imágenes térmicas y visible mediante la aplicación de filtros de convolución 2D, los cuales pueden ser (Gabor, 1946) o (Laws, 1980). Este último extrae diferentes características, tales como el nivel, borde, punto y onda; que pueden ser combinadas entre sí para la obtención de información textural.

De forma resumida, las dificultades de la correspondencia con imágenes térmicas se pueden condensar en:

- Gran distorsión radial.
- Elevado tamaño del píxel.
- Imágenes de reducidas dimensiones.
- Alta sensibilidad a las variaciones de temperatura y baja sensibilidad a las variaciones de reflectividad.
- Imposibilidad para desactivar el sistema de autoenfoque que incorporan las cámaras térmicas.
- Poca información sobre la geometría del sensor

Por otro lado, todos los métodos descritos hasta ahora para el registro de imágenes para el modelizado 3D parten de un conocimiento previo de los parámetros internos de la cámara. En busca de una solución a estas deficiencias hay que destacar a (Dias et al., 2003) quien desarrolla un método semi-automático para el registro de la imagen con respecto al modelo láser, explotando una búsqueda de correspondencias entre la imagen de rango y la imagen de alta resolución. La aportación más importante por parte de Dias está en el redimensionamiento que hace de la imagen de rango proporcionada por el láser para adaptarla al tamaño de la imagen de alta resolución, así como el procedimiento iterativo de re-proyección que permite mejorar el proceso de registro entre ambos sensores y por tanto los resultados del mapeo de texturas. No obstante, el acercamiento desarrollado por Dias requiere de interacción manual por parte del usuario en una fase del proceso, la destinada a la ubicación de la ventana de correspondencia. Más recientemente, Aguilera et al. (2006) aprovecharon el potencial del modelizado basado en una sola imagen para obtener el registro automático del láser escáner y una cámara digital sin calibrar. Concretamente, el problema del registro se solventa automáticamente a través de la correspondencia entre puntos 2D y 3D, los cuales es obtiene mediante la búsqueda de los invariantes espaciales: dos distancias y un ángulo. Sin embargo, los datos de entrada han de ser tarjetas especiales y es necesario tener en cuenta restricciones geométricas; Al Manasir y Fraser (2006) desarrollaron una estrategia usando paneles codificados colocados sobre el objeto, los cuales son registrados por una cámara digital calibrada unida físicamente al láser terrestre. Seguidamente se aplica un proceso automático para resolver la posición espacial y la orientación de la cámara respecto al sistema de coordenadas del láser. La identificación de las tarjetas codificadas permite aplicar una transformación de similaridad 3D. El problema de este sistema reside en la necesidad de ensamblar la cámara al láser y tener que colocar tarjetas sobre el objeto; Alshawabkeh et al. (2006) proponen un algoritmo robusto de detección de líneas sobre la imagen de alta resolución, basado en las propiedades matemáticas de la media, la cual es invariante respecto a las rotaciones y traslaciones. Esta segmentación se aplica sobre el modelo 3D y puede buscar diferente tipos de

bordes. Finalmente, utiliza los bordes resultantes para aplicar un matching entre los datos 2D y 3D. Sin embargo, en esta aproximación hay cuestiones que necesitan ser investigadas y estudiadas, como por ejemplo más tests y mejorarlo para conseguir una localización más eficiente y eficaz de los bordes segmentados.

Mientras que estos acercamientos han sido desarrollados por grupos de investigación, las propias casas comerciales han ido incorporando parte de estas soluciones con idea de aspirar a la hibridación automática de sensores. La primera solución aplicada fue incorporar cámaras digitales internas (fotográficas y de video) de baja resolución y de posición conocida (Trimble, Leica) con el intento de proporcionar un guiado más controlado al proceso “ciego” de escaneo. Este acercamiento disminuía a priori el trabajo de campo, pero en realidad la información de color aportada por la cámara de abordo sólo era válida como aproximación inicial, puesto que al no estar disponibles los controles de velocidad de obturación y apertura de la lente, el resultado final presentaba bruscos saltos radiométricos, así como una pobre resolución. La siguiente evolución aportada por algunas empresas, ha consistido en eliminar la cámara interna y distribuir los equipos únicamente para la captura de información geométrica. Para la captura de información radiométrica, los nuevos equipos tienen preparados acoples externos para integrar cámaras réflex digitales de alta resolución. Dentro de este tipo de aproximación podemos ejemplificar los casos de las marcas comerciales (Riegl y Faro). La casa Riegl opta por anclar la cámara en la parte superior del equipo, requiriendo una calibración previa en campo mediante el uso de tarjetas especiales. Por su parte la casa Faro, que también tiene la opción de un montaje superior excéntrico, permite una vez acabada la captura de datos láser, desplazar mediante manivelas la cámara hasta situarla en el centro de proyección del láser y capturar los datos fotográficos. Esta solución, si bien soluciona adecuadamente la fusión de sensores de forma práctica, depende de la correcta calibración de la distancia entre ambos sensores, así como la nivelación del equipo. Además, está limitada a una marca en concreto de cámara de réflex y a un objetivo particular, impidiendo por lo tanto la utilización de otros sensores fotográficos.

Por otro lado, este tipo de soluciones comerciales adolecen de dos problemas básicos:

- La escasa flexibilidad en la toma fotográfica, al no permitir realizar tomas fotográficas alejadas del equipo láser.
- La variación de las condiciones de iluminación en el momento de la toma láser e incluso la realización de trabajos bajo condiciones de iluminación deficiente, podrán hacer que las tomas fotográficas resulten inútiles, de ahí la necesidad de poder realizar la toma de datos de manera independiente.

Un ejemplo de estas limitaciones comerciales son reseñadas por (Abdelhafiz et al., 2009) donde las texturas proporcionadas por el equipo láser Riegl LMS-Z420i no eran adecuadas para documentar el mural principal de la catacumba Domitilla. Por ello emplearon una cámara profesional para tomar fotografías sin trípode en las mejores posiciones, además de emplear un sistema de iluminación profesional para conseguir una iluminación homogénea en una zona subterránea. En (González-Aguilera et al., 2011b) se recoge la misma problemática para el láser escáner terrestre Trimble GX, siendo necesario recurrir a fotografías con cámara

réflex e iluminación con luz fría ex profeso, para obtener ortofotografías de zonas amplias con textura radiométrica de alta calidad.

### 1.3. Objetivos

El láser escáner terrestre y la cámara digital como sensor activo y pasivo respectivamente, establecen el “hilo conductor” en esta Tesis Doctoral destinada a proporcionar un registro de ambos sensores, así como una modelización híbrida que permita completar y mejorar el modelo láser.

El contexto de aplicación de la metodología y herramientas desarrolladas es la del Patrimonio Arquitectónico y Arqueológico, particularmente edificios singulares con un especial interés patrimonial, así como los paneles principales de las cuevas. No obstante, el rango de aplicación de los métodos propuestos no está restringido exclusivamente a escenas arquitectónicas de exterior, pudiendo extrapolarse a otras aplicaciones más allá de las mencionadas.

En lo que se refiere al contexto disciplinar, las disciplinas de la Fotogrametría de Rango Cercano “*Close Range Photogrammetry*” y de la Visión Computacional “*Computer Vision*” sustentan todo el desarrollo de la metodología y herramientas de la Tesis Doctoral.

Con relación a los objetivos de la Tesis Doctoral podríamos destacar un objetivo general y varios objetivos específicos.

El **objetivo general** es el desarrollo y puesta en práctica de métodos y herramientas para el registro de sensores y la modelización integrada mediante el láser escáner y la cámara digital utilizando una metodología híbrida semi-automática.

Los **objetivos específicos** de la Tesis Doctoral son:

- Desarrollar un protocolo de calibración particularizado para la cámara digital y el láser escáner terrestre.
- Establecer un registro semi-automático de los sensores láser escáner y cámara digital.
- Incorporar diversos estimadores robustos y test estadísticos al proceso de registro.
- Adaptar diferentes modelos matemáticos en el proceso de resección espacial de la cámara.
- Desarrollar una estrategia de modelización híbrida en base al registro de ambos sensores que permita mejorar y completar aspectos geométricos y radiométricos de los modelos láser.
- Testear diversos tipos de imágenes multiespectrales. Desde las imágenes de rango en los espectros visibles e infrarrojo cercano del láser, hasta las imágenes de infrarrojo lejano proporcionadas por una cámara térmica.
- Obtener la imagen sólida verdadera como producto híbrido derivado del registro y modelización de ambos sensores.



- Desarrollo de herramientas informáticas (*USALing*, *TLSCalib*) que sustente gran parte del proceso metodológico implementado y que a su vez sirva como plataforma de testeo de los diferentes resultados experimentales.

## 1.4. Contribuciones

El tema de investigación de la presente Tesis Doctoral constituye un tópico importante y poco consolidado en la Comunidad Científica Internacional. Por ello, la estrategia planteada en esta Tesis Doctoral pasa por el desarrollo y puesta en práctica de métodos y herramientas para el registro de sensores y la modelización integrada mediante el láser escáner y la cámara digital utilizando una metodología híbrida semi-automática, de manera que, en base a unos resultados experimentales se puedan extraer valoraciones en relación con las hipótesis de partida y plantear líneas de acción para el futuro.

La contribución realizada en esta Tesis Doctoral toma parte de los acercamientos desarrollados hasta ahora por los autores reseñados, incorporando los siguientes aspectos relevantes y novedosos:

- Se desarrolla un método de registro de la imagen con respecto al modelo láser que presenta las siguientes novedades con respecto a otros acercamientos:
  - Se realiza de forma automática, cuando habitualmente se requiere una alta interacción manual y gran cantidad de tiempo por parte del usuario.
  - Se estima y corrige la distorsión radial de las imágenes obteniendo una mejora sustancial en los resultados.
  - Se desarrolla un método jerárquico y piramidal de correspondencia de imágenes que incorpora técnicas robustas y estadísticas.
  - Se incorporan diversos métodos de resección espacial para el cálculo del posicionamiento de la cámara que incorporan técnicas robustas y test estadísticos. Asimismo, se incorpora una técnica iterativa de mejora del registro imagen-láser apoyada en una estrategia de re-proyección y minimización.
  - Se incorporan diversas fuentes de imágenes multiespectrales. Desde las imágenes de rango en los espectros visibles e infrarrojo cercano del láser, hasta las imágenes de infrarrojo lejano proporcionadas por una cámara térmica.
- Se desarrolla una metodología de calibración geométrica para los láseres escáneres terrestres de tiempo de vuelo, que contribuye al avance en un campo de investigación muy activo, y en el cual aún no se ha establecido ningún protocolo y/o norma a este respecto.
- Se desarrolla una estrategia de modelización híbrida que permite los siguientes aspectos novedosos:

- Mejorar y completar el modelo láser geoméricamente, fundamentado en un acercamiento al modelo CAD tomando como base la vectorización automática sobre la imagen sólida verdadera para la extracción de elementos geométricos básicos (líneas y planos). Asimismo, conversión del modelo láser a un modelo CAD mediante la vectorización automática.
- Mejorar y completar el modelo láser radiométricamente, en base a la proyección de texturas y la gestión de partes vistas y ocultas y generación de un modelo fotorealista 3D.
- Se obtienen productos híbridos derivados en forma de imágenes sólidas y ortofotos de gran calidad tanto métrica como radiométrica, constituyendo al mismo tiempo un resultado de gran utilidad para ser explotado por otros profesionales.
- El propio desarrollo de la metodología de integración de ambos sensores supone una contribución en un contexto multidisciplinar, destinada a la integración sinérgica de distintos métodos y herramientas provenientes de diversas disciplinas, todas ellas de reconocida eficacia en campos diversos de la Comunidad Científica Internacional para el modelizado 3D.

En definitiva, los beneficios de la Tesis Doctoral propuesta presentan aspectos científico-técnicos, metodológicos y tecnológicos dependiendo de la fase de desarrollo de la misma.

## 1.5. Organización de la tesis

La Tesis Doctoral se ha estructurado en siete capítulos:

En el capítulo 1, *Introducción*, se presenta una visión general acerca de los antecedentes y situación actual en torno al modelizado 3D mediante láser escáner, el modelizado 3D a partir de imágenes, así como el estado de conocimiento del registro de ambos sensores. Se enmarca el contexto de aplicación de la Tesis Doctoral junto con los objetivos de la misma. Finalmente, se pasa a destacar la originalidad, coherencia y relevancia científica de la Tesis Doctoral y se describen brevemente los diferentes capítulos.

En el capítulo 2, *Geometría proyectiva*, actúa como marco de referencia entre las disciplinas de la Fotogrametría Terrestre y la Visión Computacional y está presente en gran parte del proceso metodológico y las herramientas desarrolladas en esta Tesis Doctoral. En él se establece la jerarquización de la transformación proyectiva y su conexión con las disciplinas de Fotogrametría y Visión Computacional, destacando el marco proyectivo de la cámara utilizada.

En el capítulo 3, *Calibración geométrica de sensores*, se establece un protocolo y modelo de calibración particularizado para la cámara digital y el escáner láser que permita mejorar las condiciones de trabajo de ambos sistemas. Particularmente, se pretende estimar los parámetros intrínsecos de ambos sensores, a menudo desconocidos para el usuario.

En el capítulo 4, *Registro de sensores*, se establece el flujo de trabajo desarrollado para conseguir la integración automática de ambos sensores. Constituye uno de los dos núcleos principales de la Tesis Doctoral y en él se recoge gran parte de la metodología desarrollada. Desde el pre-procesamiento previo de los datos, hasta los procesos de correspondencia y cálculo de la resección espacial de la cámara con respecto al láser. Es de especial interés los procesos robustos y estadísticos que toman parte en la mayoría de los acercamientos desarrollados aportando precisión y fiabilidad al registro.

En el capítulo 5, *Modelización híbrida*, se establece el planteamiento desarrollado para la mejora y completado de los modelos láser en base al registro de ambos sensores. En concreto se desarrollan procesos de mejora geométrica y radiométrica de los modelos láser que heredan planteamientos propios del Análisis de Imagen. Fruto de esta modelización híbrida se obtienen tres productos derivados; el propio modelo foto-realístico 3D, la imagen sólida y modelo CAD vectorizado.

En el capítulo 6, *Resultados experimentales*, se muestran los resultados obtenidos fruto de la metodología y herramientas desarrolladas, analizando diferentes casos de estudio correspondientes a diferentes situaciones favorables y desfavorables.

En el capítulo 7, *Conclusiones y perspectivas futuras*, se lleva a cabo una discusión técnica en base a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, estableciendo finalmente las conclusiones alcanzadas y planteamientos abiertos de cara al futuro.



# Capítulo 2

## Geometría proyectiva

Se conoce por geometría proyectiva a la generalización de la geometría euclídea que estudia la configuración de puntos y rectas (conocida como incidencia) de forma no métrica, permitiendo ignorar las limitaciones de la geometría euclídea, considerando los puntos, líneas y planos en el infinito o unificando diferentes transformaciones.

Durante mediados del siglo XX, la fotogrametría (concretamente la aérea) sufrió importantes avances hasta establecer el conocido como Método General de la Fotogrametría, en el cual las operaciones habían sido desarrolladas en el marco de la geometría euclídea analítica. No obstante, la proliferación de los ordenadores y la aparición de nuevas disciplinas asociadas, como la visión computacional permitieron aplicar en el proceso de cálculo la teoría de la geometría proyectiva, dando lugar a fotogrametría digital y permitiendo importantes avances en el campo de la fotogrametría de rango cercano.

Los métodos basados en la geometría proyectiva se han popularizado en la visión computacional dada su matemática “elegante” (expresiones compactas) y sus ecuaciones lineales de fácil resolución (Longuet-Higgins, 1981) (Hartley, 1997a) (Quan y Lan, 1999), y por consiguiente también se ha asentado en el campo de la fotogrametría.

Actualmente, la geometría proyectiva, y por tanto junto con la notación homogénea (ver apartado 2.2), está ampliamente desarrollada en el campo de la informática gráfica, la cual se utiliza principalmente para la representación de objetos tridimensionales en un plano bidimensional, y además ha permitido la unificación de transformaciones y operaciones gráficas comunes. Asimismo, la geometría proyectiva ha influenciado las matemáticas, permitiendo avances en campos tales como la topología, el álgebra o las ecuaciones diferenciales, aunque la rama que más ha progresado ha sido la geometría algebraica, donde se explota toda la potencia del espacio proyectivo.

La relevancia de la geometría proyectiva dentro de la disciplina de la fotogrametría es innegable, y por ello el desarrollo del proceso de registro de sensores tiene asociado de forma clara una serie de conceptos y herramientas en las cuales se fundamenta el proceso, destacando la **geometría epipolar** y la **notación homogénea**.

En la visión estéreo, la geometría epipolar describe la relación proyectiva entre dos vistas a partir de su calibración o estimada a partir de cámaras sin calibración. En el caso de las cámaras calibradas, la geometría epipolar es descrita por la

matriz esencial, y en el caso de las cámaras sin calibrar está referida por la matriz fundamental. Este enfoque es importante en tanto permite realizar desde operaciones con cámaras sin calibrar hasta establecer técnicas de calibración. Sin embargo, el fundamento matemático más relevante en el proceso de registro de sensores propuesto son las restricciones epipolares. La utilidad de la notación en coordenadas homogéneas radica en que es el soporte básico de las operaciones matemáticas proyectivas, ya que permite lidiar con situaciones en las que la geometría euclídea no es aplicable (por ejemplo: puntos en el infinito).

En este capítulo se introducirán los conceptos básicos de la geometría proyectiva así como una breve reseña de su evolución histórica, también se expone su descomposición jerárquica en diferentes tipos de transformaciones, y para ello se introducirá el concepto de coordenadas homogéneas, íntimamente asociado al principio de dualidad. Además se desarrollará la geometría epipolar, de relevancia en el apartado de correspondencia robusta y el modelo de cámara proyectivo, necesario para el registro de sensores.

## 2.1. Antecedentes

La geometría proyectiva se desarrolló en base a la teoría de la perspectiva y su aplicación práctica empleada por los artistas del Renacimiento. Aunque no sería hasta el siglo XIX y principios del XX, cuando se estableciese su formulación matemática. No obstante, ya se había dejado entrever con anterioridad, cuando el arquitecto e ingeniero militar Gerard Desargues (1591-1661) introdujo cambios en el método de estudio de las cónicas y comenzó a desarrollar las nociones básicas de la proyectividad; cambios que son recogidos en la publicación “*Brouillon project d’une atteinte aux événements des rencontres d’un cone avec un plan*” (Primer borrador sobre los resultados de intersectar un cono con un plano). Una de sus contribuciones más importantes, referidas a la geometría proyectiva, es el conocido como **teorema de Desargues**, que establece:

*Sean  $ABC$  y  $A'B'C'$  triángulos tales que  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  se cortan en un punto  $O$ . Entonces, las rectas homólogas  $AB$  y  $A'B'$ ,  $AC$  y  $A'C'$  y  $BC$  y  $B'C'$  se cortan en puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , alineados.*

La importancia de dicho teorema es que determina las condiciones para que dos triángulos sean perspectivos (sus lados han de intersectarse bajo la misma recta).

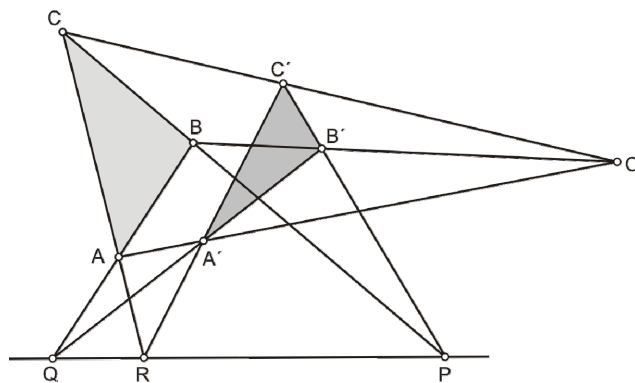


Figura 2.1 Teorema de Desargues

Otra aportación relevante de Desargues fue la **invarianza de la razón doble** que establece que varios puntos dados en una recta se pueden transformar (mediante proyecciones sucesivas) en otros tantos dados en otra. Dicha aseveración siempre es válida para el caso de tres puntos, mientras que cuando intervienen cuatro puntos ( $A, B, C, D$ ) el invariante numérico es su razón doble  $(AC/AD):(BC/BD) = (AC/BC) \cdot (BD/AD)$ , ya que cuatro puntos alineados sólo se pueden transformar en otros cuatro alineados si se preserva la razón doble. Este hecho puede apreciarse gráficamente en la Figura 2.2 en donde intervienen dos centros de proyección ( $O_1, O_2$ ) como el caso estereoscópico de la fotogrametría.

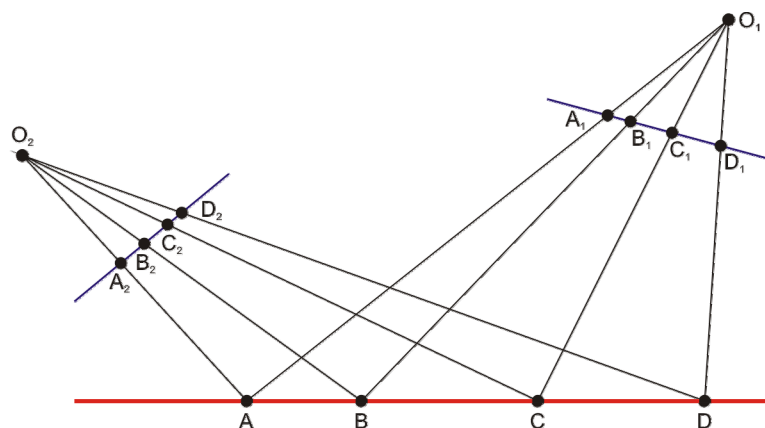


Figura 2.2 Invarianza de la razón doble

Sin embargo sería Blaise Pascal (1623-1662), alumno de Desargues, quién estableciese un axioma básico de la geometría proyectiva: el conocido como **teorema de Pascal** (Figura 2.3 izquierda), publicado en el trabajo “*Essay pour les coniques*” (1640)

*“Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos están alineados”*

Dicho teorema puede considerarse a su vez como una generalización del Teorema del hexágono de Pappus (siglo III-IV) (ver Figura 2.3 derecha):

*“Si en un par de rectas escogemos tres puntos al azar en cada una y los unimos dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen estarán en una línea recta”*

El teorema de Pappus no es válido, al utilizar la métrica en su demostración<sup>4</sup>, no pudiendo ser aplicado en geometría proyectiva (demostrado por Hilbert en 1899). Por el contrario, el teorema de Pascal es un teorema de incidencia (no hace referencia a medidas) por lo que se convirtió en una de las proposiciones básicas de la geometría proyectiva. Es decir, se pueden realizar las mismas demostraciones que en la geometría euclídea, pero sin necesidad de existir una métrica.

<sup>4</sup> Ya que en casos degenerados, si algún denominador es cero, aparece el infinito, el cual es un concepto propio de la métrica.

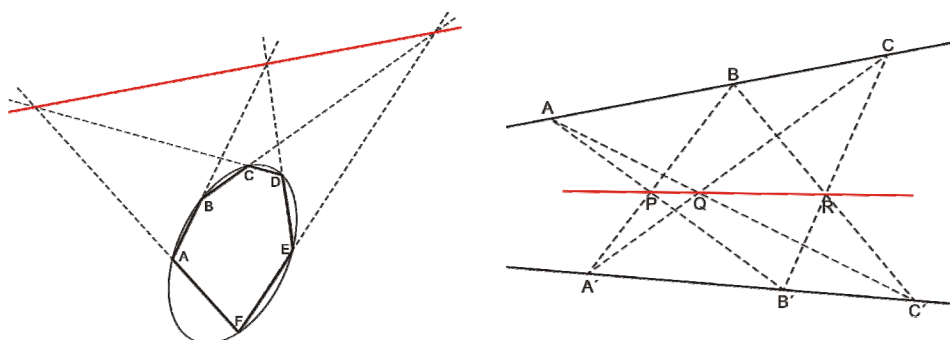


Figura 2.3 Teorema de Pascal (izquierda) y de Pappus (derecha)

Otra derivación del Teorema de Pascal fue el establecimiento del **principio de dualidad** (descubierto por Poncelet en 1822) que de forma simplificada establece que todo aquello que puede aplicarse para los puntos, se puede aplicar a las rectas, y viceversa. Este principio puede parecer a priori inválido, ya que si bien dos puntos definen una recta, dos rectas no siempre definirían un punto, ya que puede ser paralelas. Esta excepción queda obviada en el espacio proyectivo, donde cada haz de rectas paralelas define un punto en el infinito, o de una forma más laxa, rectas paralelas se cortan en el infinito. La dualidad se suele representar mediante un asterisco (\*). Por ejemplo, en el plano proyectivo ( $\Pi$ ) el punto  $p$  está contenido en la recta  $r$ ; mientras que en el plano proyectivo dual ( $\Pi^*$ ) la recta  $p^*$  dual del punto  $p$  contiene al punto  $r^*$  dual de la recta  $r$ . (Figura 2.4)

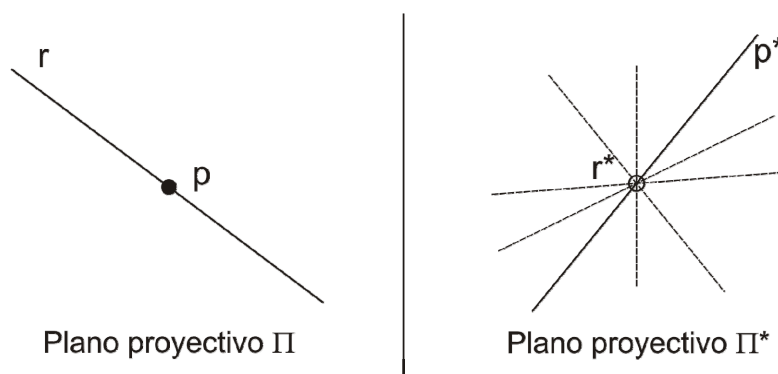
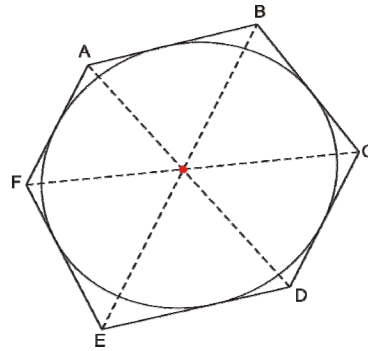


Figura 2.4 Principio de dualidad de la geometría proyectiva

El primer caso de dualidad en la geometría proyectiva fue mediante el teorema de Brianchon (1783-1864), que resultó ser el teorema dual del teorema de Pascal.

*En un hexágono circunscrito a una cónica, las diagonales que unen vértices opuestos son concurrentes.*





**Figura 2.5 Teorema de Brianchon**

No obstante, las aportaciones de Desargues y Pascal quedaron en el olvido durante dos siglos, puesto que en el momento de su descubrimiento, siglo XVII, los problemas científicos requerían de métodos algebraicos más efectivos, siendo la época del álgebra y el cálculo infinitesimal.

Sería a principios del siglo XIX cuando reapareciese la geometría proyectiva, auspiciada por el renacimiento de la geometría pura, de mano de Jean-Victor Poncelet (1788-1867) quien en 1822 publicó “*Traité des propriétés projectives des figures*” centrado en el estudio de las figuras homólogas, cuyo objetivo consistía en, para una figura dada, encontrar otra homóloga más simple que la anterior pero cuyo estudio permitiese deducir las propiedades de la original. Asimismo, Poncelet consideró la geometría proyectiva como una rama propia dentro de las matemáticas y recuperó los métodos de Desargues, Pascal y las transformaciones proyectivas.

A partir de entonces continuarían los desarrollos que darían forma a la geometría proyectiva tal y como es conocida actualmente, mediante las aportaciones de diferentes matemáticos, tal como, Michel Chasles (1793-1880) que obtuvo el invariante numérico de las homografías (isomorfismos proyectivos), Karl G. C. von Staudt (1798–1867) que desarrolló la geometría proyectiva sin aplicar referencias métricas, estableciéndose a partir de una generalización de la geometría euclídea, o Arthur Cayley (1821–1895) quien acuñó la famosa frase:

*“La geometría proyectiva es toda la geometría”*

## 2.2. Coordenadas homogéneas

Las coordenadas homogéneas (o coordenadas proyectivas) aparecieron por primera vez en el trabajo “*Der barycentrische Calcul*” (1827) realizado por August Ferdinand Möbius (1790-1868) quien las utilizó para la representación de curvas y superficies en el espacio proyectivo.

Las coordenadas homogéneas son una de las bases de la geometría proyectiva, y establecen que un punto  $n$ -dimensional ha de ser representado mediante  $n+1$  coordenadas (no todas nulas). Asimismo, se consideran como un sistema alternativo de coordenadas para trabajar en el espacio euclídeo, ya que este está incluido del espacio proyectivo. De forma simplificada (aunque se expondrá de forma más rigurosa seguidamente) este aumento en una dimensión da lugar a que

un punto cualquiera  $A(x, y, z)$  le corresponda la representación  $A'(x', y', z', w')$  con  $w' \neq 0$  de manera que,

$$\begin{aligned} x &= x' / w' \\ y &= y' / w' \\ z &= z' / w' \end{aligned} \tag{2.1}$$

Estas coordenadas proporcionan la posibilidad de resolver de forma compacta las múltiples operaciones geométricas asociadas a la visualización de la cartografía 3D especialmente, a sus posibilidades dinámicas. Asimismo permiten expresar todas las transformaciones geométricas mediante productos de matrices.

Un punto perteneciente a un plano es representado mediante el par de coordenadas  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ , razón por la cual es común identificar al plano con  $\mathbb{R}^2$ . Por otra parte, si consideramos a  $\mathbb{R}^2$  como un espacio vectorial, el punto  $(x, y)$  se identificaría como un vector. A partir de aquí se puede establecer la notación homogénea de puntos y líneas.

Una línea contenida en un plano se representa mediante la ecuación  $ax+by+c=0$ , de forma que los diferentes valores de los parámetros  $a, b, c$  definen distintas rectas. Por lo tanto una línea puede representarse mediante el vector  $(a, b, c)^T$ . No obstante, la correspondencia entre líneas y vectores no es uno-a-uno, ya que las líneas  $ax+by+c=0$  y  $(ka)x+(kb)y+(kc)=0$  son las mismas para cualquier valor no nulo de la constante  $k$ , o expresado de forma diferente, los vectores  $(a, b, c)^T$  y  $k(a, b, c)^T$  representan la misma recta (siempre y cuando  $k \neq 0$ ). De hecho, cuando dos vectores están relacionados vía una escala global se les considera como equivalentes, y una de las clases de equivalencia existentes bajo dicha relación es la conocida como **vector homogéneo**. El conjunto de clases de equivalencia de vectores en  $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)^T$  conforma el **espacio proyectivo**  $\mathbb{P}^2$ . Nótese que la notación  $-(0,0,0)^T$  hace referencia a que el vector  $(0,0,0)^T$  no se corresponde con ninguna línea, y por tanto está excluido.

Un punto de coordenadas  $p=(x, y)^T$  en el plano euclídeo pertenece a la línea  $r=(a, b, c)^T$  si y solo si se cumple que  $ax+by+c=0$ . Dicha ecuación puede escribirse en términos de un producto interno de vectores:  $(x, y, 1)(a, b, c)^T = pr = 0$ ; es decir, el punto  $p$  en  $\mathbb{R}^2$  es representado como un vector tridimensional mediante la adición de una tercera componente cuyo valor es 1. Obsérvese que para cualquier valor distinto de cero de la constante  $k$  se verificará la igualdad  $(kx, ky, k)r = 0$ , por lo cual el conjunto de vectores  $(kx, ky, k)^T$  pueden considerar como la representación de  $(x, y)^T$  en  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, al igual que ocurría con las líneas, los puntos son representados mediante vectores homogéneos. Por ejemplo, el vector homogéneo  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$  es la representación del punto  $(x_1/x_3, x_2/x_3)$  en el espacio  $\mathbb{R}^2$  en coordenadas no homogéneas. Además, los puntos por ser vectores homogéneos también son elementos de  $\mathbb{P}^2$ .

Un plano en el espacio puede denotarse como  $ax+by+cz+d=0$ , ecuación que no se ve afectada por a la multiplicación de un escalar distinto de cero, por lo que existen solo tres valores independientes  $(a/d, b/d, c/d)$ , es decir, el plano en el espacio tridimensional tiene 3 grados de libertad. La representación homogénea

del plano será el vector homogéneo tetradimensional:  $\pi=(a, b, c, d)^T$ . Homogeneizando la ecuación del plano mediante las sustituciones siguientes:  $x \rightarrow x_1/x_4, y \rightarrow x_2/x_4, z \rightarrow x_3/x_4$ , se obtiene la notación compacta  $\pi^T \mathbf{X}=0$  que define si un punto pertenece al plano.

La representación de las líneas en el espacio  $\mathbb{P}^3$  mediante coordenadas homogéneas, es diferente de la anteriormente mencionada para el plano, además de poder ser definidas de diferentes maneras. Sean dos puntos alineados, intersección de dos planos, sea la línea  $u$  que pasa a través de dos puntos en coordenadas homogéneas  $\mathbf{P}_1=(x_1, x_2, x_3, x_4)$  y  $\mathbf{P}_2=(y_1, y_2, y_3, y_4)$ , sus coordenadas vendrán dadas por los seis menores de orden 2 resultantes de la siguiente matriz.

$$[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Pudiendo definir la recta en el espacio como  $\mathbf{u}=(l_{41}, l_{42}, l_{43}, l_{23}, l_{31}, l_{12},)$ , siendo:

$$\begin{aligned} l_{41} &= x_4 y_1 - x_1 y_4 & l_{23} &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ l_{42} &= x_4 y_2 - x_2 y_4 & l_{31} &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ l_{43} &= x_4 y_3 - x_3 y_4 & l_{12} &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde  $l_{ij}$  son las denominadas **coordenadas Plücker** de la línea, pudiendo representarse matricialmente mediante la matriz antisimétrica  $\mathbf{L}=\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^T - \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^T$ , donde sus elementos cumplen que  $l_{ij}=(P_1)_i(P_2)_j - (P_2)_i(P_1)_j$ . De ellas se derivan las siguientes interpretaciones (siempre y cuando  $x_4 \neq 0$  e  $y_4 \neq 0$ ),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &\equiv (l_{41}, l_{42}, l_{43}) = \bar{\mathbf{P}}_2 - \bar{\mathbf{P}}_1 \\ \bar{\mathbf{v}} &\equiv (l_{23}, l_{31}, l_{12}) = \bar{\mathbf{P}}_1 \times \bar{\mathbf{P}}_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde  $\bar{\mathbf{P}}_i$  son las coordenadas no homogéneas del punto en el espacio euclídeo. Por lo que las tres primeras coordenadas Plücker,  $\bar{\mathbf{u}}$ , definen la dirección de la línea, y las tres últimas,  $\bar{\mathbf{v}}$ , describen el vector normal del plano que contiene a la línea, el origen y la distancia entre el origen y la línea. Dichas 6 coordenadas no son independientes, porque siempre tienen que satisfacer la condición de homogeneidad o proporcionalidad que se establece mediante la anulación del determinante de la matriz  $\mathbf{L}$  (que en este caso resulta como un trinomio al cuadrado).

$$\det(\mathbf{L}) \equiv l_{41} l_{23} + l_{42} l_{31} + l_{43} l_{12} = 0 \quad (2.5)$$

La otra restricción que verifica una línea es que dicha línea esté contenida en el plano origen (plano que pasando por el origen de coordenadas contiene a la línea), según se aprecia en la Figura 2.6

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.6)$$

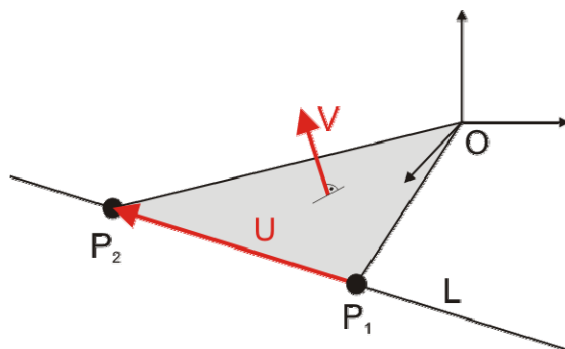


Figura 2.6 Definición de la recta según la dirección y la normal al plano origen

Ergo, las líneas en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$  solo tienen 4 grados de libertad, porque aun estando definidas por 6 parámetros, existen 2 restricciones: de proporcionalidad (2.5) y geométrica (2.6).

Si se buscara definir una recta en  $\mathbb{P}^3$  como la intersección de dos planos dados (**A** y **B**), está vendría dada por la matriz dual  $\mathbf{L}^* = \mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T$ , que comparte propiedad con la matriz **L**.

Finalmente, las coordenadas homogéneas también son útiles para aplicar diferentes tipos transformaciones tales como traslaciones, rotaciones o cambios de escala. En las ecuaciones siguientes, se muestran ejemplos para el caso proyectivo tridimensional:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\text{sen} \omega & 0 \\ 0 & \text{sen} \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \text{sen} \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\text{sen} \kappa & 0 & 0 \\ \text{sen} \kappa & \cos \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.3. Jerarquización de la transformación proyectiva

La geometría proyectiva se caracteriza por mantener, en el proceso de transformación (para cualquier número de dimensiones), la incidencia (por dos puntos pasa una única recta) y la razón doble o cruzada; pero por el contrario no conserva otras propiedades tales como la longitud, los ángulos, perpendicularidad,... etc.

Una transformación lineal proyectiva se conoce como *proyectividad*. En el caso del plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  se denomina **homografía**, siendo esta una transformación biyectiva dada por  $h: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ , definiendo la aplicación del plano sobre sí mismo, es decir, la alineación de cualquier grupo de puntos se preserva. Al ser biyectiva la

transformación verifica que es lineal e invertible, propiedades muy importantes que ha permitido el desarrollo de muchos algoritmos de visión computacional.

La homografía es fácilmente extrapolable al espacio  $\mathbb{P}^3$  y superiores, denominándose en estos casos como **colineación** (del inglés *collineation*). La colineación es la transformación proyectiva entre dos espacios proyectivos de la misma dimensión  $n$ . Esta colineación se representa mediante una matriz de dimensiones  $(n+1)*(n+1)$  y definida salvo proporcionalidad o escala (que restringe un grado de libertad).

En tanto el espacio proyectivo es la generalización de los espacios afín y euclídeo, la transformación proyectiva puede desglosarse en diferentes transformaciones de amplio uso en el campo de la fotogrametría: isometrías, semejanzas, afinidades y la propia proyectividad. Por tanto, se propone avanzar hasta alcanzar la transformación proyectiva tridimensional, que es la más general que existe en el caso fotogramétrico, en base a su descomposición en la geometría afín y euclídea.

**Transformación euclídea 3D** o isometría, también se denomina transformación de sólido rígido, porque es la empleada para modelar los movimientos de los sólidos. Dicha transformación conserva el volumen del sólido, por lo que los parámetros de la transformación son la traslación y la rotación tridimensional, conformando 6 incógnitas. Su expresión matemática compacta es:

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Donde  $p=(x, y, z)$  son las coordenadas de entrada,  $p'=(x', y', z')$  las coordenadas transformadas,  $\mathbf{R}$  la matriz de rotación tridimensional,  $\mathbf{t}$  el vector de traslaciones, y  $\mathbf{0}$  un vector nulo.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \phi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \phi \cos \kappa \\ -\cos \phi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \phi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \phi \sin \kappa \\ \sin \phi & -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{t} = (t_x \ t_y \ t_z)^T$$

La matriz  $\mathbf{R}$  de (2.9) es la denominada matriz de rotación de fotogrametría aérea, en tanto la definición y sentido de giro de los ángulos  $(\omega, \phi, \kappa)$ . Alternativamente, a dicha matriz puede utilizarse otra en la que los giros responden a los movimientos de una cámara. Esta matriz se denomina matriz de rotación terrestre.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin a \cdot \cos t \cdot \sin s - \cos a \cdot \cos s & -\cos a \cdot \cos t \cdot \sin s + \sin a \cdot \cos s & -\sin t \cdot \sin s \\ -\sin a \cdot \cos t \cdot \cos s + \cos a \cdot \sin s & -\cos a \cdot \cos t \cdot \cos s - \sin a \cdot \sin s & -\sin t \cdot \cos s \\ -\sin t \cdot \sin a & -\sin t \cdot \cos a & \cos t \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde las rotaciones  $(a, t, s)$  se corresponden con los giros acimutal, cabeceo (*tilt*) y giro propio (*swing*) respectivamente.

Es muy común el empleo de notación abreviada, ya que permite que (2.8) sea válida para cualquier espacio dimensional, una vez esté desarrollada. Véase por ejemplo el caso 3D (2.11) y el 2D (2.12), en el cual existe un único giro denotado por  $\alpha$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & t_x \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Al disminuir en una dimensión varía el rango de la matriz de transformación, no obstante, los diferentes elementos mantienen su posición relativa dentro de la matriz.

En la isometría 3D existen 6 parámetros geométricos, por lo que para resolverla parecería que sólo son necesarios únicamente 2 puntos homólogos para determinar los parámetros de la transformación, pero en ese caso la matriz de diseño presentaría un defecto de rango de uno, por lo que no sería viable su resolución. Esto es muy fácil de ver porque con dos puntos el objeto queda determinado por una línea, existiendo un grado de libertad que es la rotación alrededor de dicho eje.

El invariante de la transformación euclídea 3D es el volumen, es decir, después de aplicar la transformación sobre un sólido este conservará el volumen, y por tanto, las propiedades asociadas tales como áreas, ángulos y distancias.

**Transformación de semejanza 3D:** Agrega un nuevo parámetro independiente a la transformación de sólido rígido, el factor de escala, el cual permite conservar la forma del objeto pero no el tamaño como en el caso anterior. Los parámetros que intervienen en el cálculo son las 3 rotaciones, 3 traslaciones y el escalado, que se corresponden con la conocida transformación *Helmert 3D*, ampliamente usada en la fotogrametría, y más particularmente por su aplicación en la resolución de la orientación absoluta.

Su expresión matemática correspondiente en forma compacta es:

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Donde  $\lambda$  es el factor de escala tal que  $\lambda \neq 0$ , mientras que el resto de parámetros son los mismo de (2.8). La transformación de semejanza tienen 7 parámetros geométricos, por lo que serían necesarios 3 puntos homólogos en dos sistemas de coordenadas para poder resolver sus parámetros.

El efecto de la transformación de semejanza es un escalado isótropo, por lo cual, el invariante es la forma, conservándose por tanto:

- Ángulos.
- Líneas paralelas.
- Razón entre dos distancias.
- Razón entre dos áreas.
- Cónica absoluta<sup>5</sup>.

**Transformación afín 3D.** Es una generalización de la transformación de semejanza al incluir, aparte de sus 7 parámetros propios, 2 factores de escala, uno según cada eje, así como 3 deformaciones de los ejes por la falta de perpendicularidad.

Su representación matemática es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x a'_{11} & \lambda_x a'_{12} & \lambda_x a'_{13} & t_x \\ \lambda_y a'_{21} & \lambda_y a'_{22} & \lambda_y a'_{23} & t_y \\ \lambda_z a'_{31} & \lambda_z a'_{32} & \lambda_z a'_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Donde se pueden apreciar los diferentes factores de escala  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ , tal que  $\lambda_x \neq 0$ ,  $\lambda_y \neq 0$  y  $\lambda_z \neq 0$ , mientras que los términos  $a'_{ij}$  son la composición de los factores de rotación y falta de perpendicularidad de los ejes. Expresándola en forma compacta:

$$\begin{pmatrix} p' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

En donde la matriz  $\mathbf{A}$  da cuenta de la transformación afín. En el campo de la visión computacional, la matriz que da cuenta de la transformación afín es la denominada como *matriz fundamental* que será recogida en el apartado 2.5.

Las componentes  $a_{ij}$  de la matriz de afinidad  $\mathbf{A}$  representan 9 parámetros geométricos mediante 9 variable matemáticas. Si bien en el caso 2D la relación entre los parámetros geométricos y las variables matemáticas es ampliamente conocida (ver apartado de afinidad 2D) en el caso 3D no existen publicaciones que lo trate. Al ser una casuística muy concreta, sólo existen referencias generales en artículos de visión computacional (Herter y Lott, 1993) (Heckbert, 1994) (Shoji y Yano, 1998) (Bartoli y Sturm, 2004) obviándose siempre el establecimiento explícito de la relación matemática. Como aporte de la geometría proyectiva aplicada a la fotogrametría se va a exponer una relación matemática para los parámetros geométricos de la afinidad 3D, concretamente para los más controvertidos: falta de ortogonalidad según los 3 ejes ( $\varepsilon$ ).

---

<sup>5</sup> La cónica absoluta  $\Omega_\infty$  es una cónica definida puntualmente sobre el plano  $\pi_\infty$ , y está definida por las ecuaciones:  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ,  $x_4 = 0$ . Dicha entidad geométrica tiene la propiedad de ser invariante ante la rotación y traslación, es decir, en el campo de la calibración de cámaras dependería solamente de la matriz de calibración, pudiéndose derivar los parámetros internos de la cámara.

Como se ha mencionado previamente, la falta de criterio unificado en la expresión de la falta de perpendicularidad en el espacio  $\mathbb{R}^3$  da lugar a una ambigüedad que ha de ser solucionada. La falta de ortogonalidad se define como el ángulo comprendido entre el eje actual y su posición ideal, ergo al estar en un espacio 3D es la definición de un cono cuyo vértice coincide con el origen (ver Figura 2.7 izquierda).

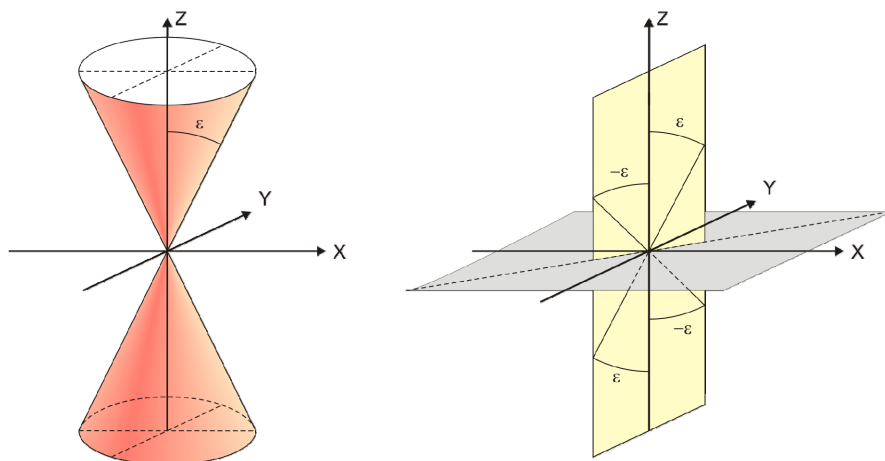


Figura 2.7 Definición de la falta de ortogonalidad respecto al eje Z. Definición general (izquierda) y propuesta (derecha).

Para poder aplicar la formulación matemática es necesario añadir una restricción adicional, que a falta de criterios de más peso, es que el ángulo  $\varepsilon$  esté contenido en la bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano formado por los dos ejes restantes (ver Figura 2.7 derecha). De esta forma se obtienen 4 soluciones de las cuales, por simetría, sólo 2 son diferentes, correspondiéndose a los casos positivo y negativo de  $\varepsilon$ .

La definición mencionada requiere un pequeño desarrollo para obtener los componentes según los ejes, que a efectos de notación se denotará  $\varepsilon_n$  a la falta de ortogonalidad proyectada según el eje  $n$ .

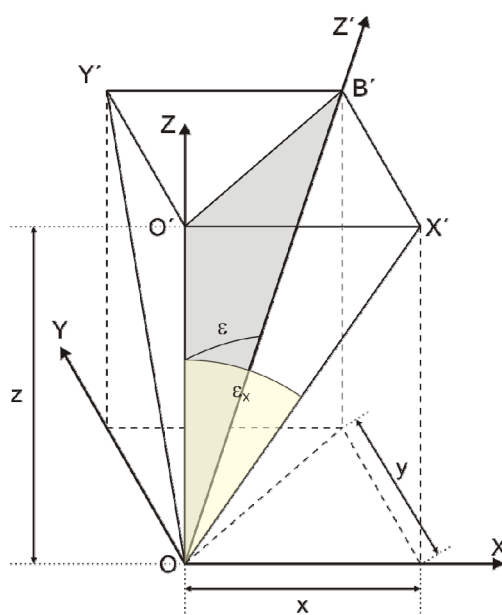


Figura 2.8 Ángulo de falta de ortogonalidad proyectado



Mediante unas sencillas relaciones trigonométricas:

$$\sphericalangle O'OX' : \tan \varepsilon_x = \frac{\overline{O'X'}}{\overline{O'O}} \rightarrow \tan \varepsilon_x = \frac{\overline{O'X'}}{Z} \quad (2.16)$$

$$\sphericalangle B'O'X' : \cos 45^\circ = \frac{\overline{O'X'}}{\overline{O'B'}} \rightarrow \overline{O'X'} = \frac{\overline{O'B'}}{\sqrt{2}} \quad (2.17)$$

$$\sphericalangle O'OB' : \tan \varepsilon = \frac{\overline{O'B'}}{\overline{O'O}} \rightarrow \overline{O'B'} = z \cdot \tan \varepsilon_x \quad (2.18)$$

Relacionando (2.17) y (2.18).

$$\overline{O'X'} = \frac{z \cdot \tan \varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (2.19)$$

E igualando (2.16) y (2.19)

$$\tan \varepsilon_x = \frac{z \cdot \tan \varepsilon}{z \cdot \sqrt{2}} = \frac{\tan \varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) da cuenta del ángulo proyectado para los ejes  $X$  e  $Y$ , según un valor dado ( $\varepsilon$ ) de falta de ortogonalidad del eje  $Z$ . El ángulo proyectado  $\varepsilon_x$  expresado de forma explícita:

$$\varepsilon_x = \arctan\left(\frac{\tan \varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.21)$$

Por tanto, la matriz de afinidad se puede definir como una concatenación de matrices para los diferentes grupos de parámetros geométricos:

$$X_{\text{GLOBAL}} = M_T \cdot M_R \cdot M_\lambda \cdot M_\varepsilon \cdot X_{\text{LOCAL}} \quad (2.22)$$

Donde  $M_i$  son las matrices de las diferentes sub-transformaciones englobadas dentro de la afinidad: traslación ( $T$ ), rotación ( $R$ ), escalado anisótropo ( $\lambda$ ) y falta de perpendicularidad ( $\varepsilon$ ). Según la Figura 2.8 y la ecuación (2.21), la matriz de falta de ortogonalidad ( $M_\varepsilon$ ) se define como:

$$M_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tan \varepsilon_Y}{\sqrt{2}} & \frac{\tan \varepsilon_Z}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tan \varepsilon_X}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{\tan \varepsilon_Z}{\sqrt{2}} \\ \frac{\tan \varepsilon_X}{\sqrt{2}} & \frac{\tan \varepsilon_Y}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

que es susceptible de ser simplificada sustituyendo el ángulo  $\varepsilon$  por los siguientes coeficientes:

$$E_X = \frac{\tan \varepsilon_X}{\sqrt{2}}; \quad E_Y = \frac{\tan \varepsilon_Y}{\sqrt{2}}; \quad E_Z = \frac{\tan \varepsilon_Z}{\sqrt{2}} \quad (2.24)$$

Resultando la matriz de afinidad final como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (S_X R_{11} + S_Y E_X R_{12} + S_Z E_X R_{13}) & (S_X E_Y R_{11} + S_Y R_{12} + S_Z E_Y R_{13}) & (S_X E_Z R_{11} + S_Y E_Z R_{12} + S_Z R_{13}) \\ (S_X R_{21} + S_Y E_X R_{22} + S_Z E_X R_{23}) & (S_X E_Y R_{21} + S_Y R_{22} + S_Z E_Y R_{23}) & (S_X E_Z R_{21} + S_Y E_Z R_{22} + S_Z R_{23}) \\ (S_X R_{31} + S_Y E_X R_{32} + S_Z E_X R_{33}) & (S_X E_Y R_{31} + S_Y R_{32} + S_Z E_Y R_{33}) & (S_X E_Z R_{31} + S_Y E_Z R_{32} + S_Z R_{33}) \end{bmatrix} \\
 &\quad (2.25)
 \end{aligned}$$

La resolución de la transformación de afinidad entre dos sistemas de coordenadas diferentes se puede realizar si se conocen al menos 4 puntos en ambos sistemas, ya que la transformación tiene 12 parámetros geométricos.

Las condiciones inherentes a la transformación afin permiten que se conserven las siguientes invarianzas:

- Líneas paralelas.
- Planos paralelos.
- Centroides<sup>6</sup>.
- Razón entre dos volúmenes.
- Plano en el infinito<sup>7</sup>.

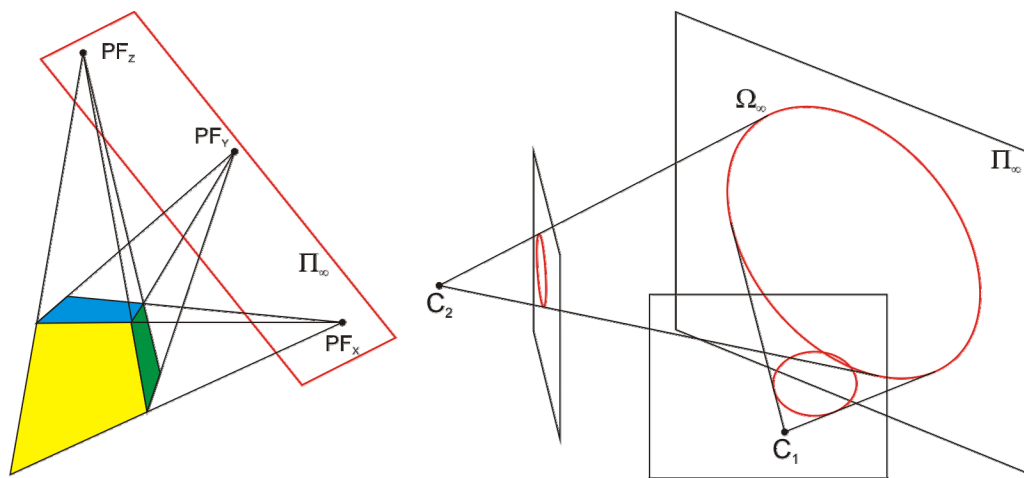


Figura 2.9 Plano del infinito (izquierda) y cónica absoluta (derecha) (adaptado de Pollefeys, 2004)

**Transformación proyectiva 3D.** Constituye la transformación más general existente que incluye, aparte de los 12 parámetros propios de la afinidad, 3 nuevos parámetros que se corresponden con la generación de perspectiva en las tres

<sup>6</sup> Ya que según (2.14) al aplicar sumatorios se obtiene que el centroide transformado es función de las coordenadas del centroide en el sistema de coordenadas origen.

<sup>7</sup> Es aquel cuya forma canónica es  $\pi_\infty = (0,0,0,1)^T$  y contiene a los 3 puntos de fuga correspondientes a las 3 direcciones principales (X, Y, Z).

direcciones del espacio tridimensional debido a los puntos de fuga o transformación perspectiva.

La transformación proyectiva 3D es una transformación lineal invertible  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que un plano transformado continúa siendo un plano. La proyectividad se define como:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{H}$  es una matriz 4x4 invertible, denominada en el contexto de la visión computacional como **homografía**, que se define como la correspondencia entre dos elementos, de forma tal que después de la transformación a uno de ellos, le corresponde otra de las mismas características. La expresión desarrollada de la proyectividad es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Nótese que la matriz  $\mathbf{H}$  tiene 15 grados de libertad; 16 derivados de la matriz 4x4 menos uno de la escala general indeterminada.

Por ello, son necesarios al menos 5 puntos homólogos para poder resolver la homografía en el espacio tridimensional.

Una forma alternativa a (2.27) de denotar la proyectividad 3D sería:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{w}^T & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

En donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de afinidad y  $\mathbf{t}$  el vector de traslación idéntico a la afinidad vista anteriormente; mientras que  $\mathbf{w}^T$  es un vector tridimensional cualquiera que controla la perspectiva (puntos de fuga) en las tres direcciones principales ( $X, Y, Z$ ), y  $v$  un escalar cualquiera, el cual es habitual que tome el valor  $v=1$ , aunque dicha suposición no es correcta del todo al ser una homografía igualmente válida si  $v=0$  (pudiendo dar lugar a los denominados puntos ideales, que son aquellos tales que verifican que  $x_i=0$ ).

Aunque la proyectividad es la transformación más general en tanto que tiene la mayor capacidad de deformación y distorsión sobre los objetos, existe una serie de invarianzas, a saber:

- Intersección de superficies
- Tangencia de superficies
- Signo de la curvatura gaussiana<sup>8</sup>
- Razón cruzada

---

<sup>8</sup> Permite distinguir entre los puntos elípticos (curvatura positiva) y los puntos hiperbólicos (curvatura negativa).

La razón cruzada,  $\tau$ , o razón doble, se puede definir como la proporción de proporciones de distancias, o expresado de otra forma, como el cociente de dos razones simples. Su nombre deriva del hecho de que en espacio proyectivo, no se conserva invariante la razón simple entre dos vectores con origen común, sino la relación entre dos razones simples. Dadas 4 líneas concurrentes en un plano, y denotando la distancia euclídea entre las líneas  $l_i$  y  $l_j$  como  $D_{ij}$ , la definición de la razón cruzada es:

$$\tau(l_1, l_2; l_3, l_4) = \frac{D_{13}/D_{14}}{D_{23}/D_{24}} = \frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}} \quad (2.29)$$

Dadas las dualidades existentes en el espacio proyectivo, la expresión anterior también es válida para el caso unidimensional: 4 puntos colineales o para la situación más general: 4 planos que se intersectan en una línea común.

En el caso de un haz de planos en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ , la razón cruzada para cuatro planos de dicho haz, se calcularía conociendo dos puntos pertenecientes al eje del haz ( $A, B$ ) y un punto  $P_i$  contenido en cada plano  $\pi_i$  (pero no en el eje), siendo  $i=1, \dots, 4$ .

$$\tau(\pi_1, \pi_2; \pi_3, \pi_4) = \frac{|ABP_1P_3| \cdot |ABP_2P_4|}{|ABP_1P_4| \cdot |ABP_2P_3|} \quad (2.30)$$

Donde  $|ABP_iP_j|$  es el determinante 4x4 de los vectores de los cuatro componentes.

Aunque la razón cruzada,  $\tau$ , es invariante una vez escogidos los puntos, líneas o planos, su valor es diferente según el orden.... Para los cuatro elementos existen  $4!=24$  posibles valores, aunque en realidad sólo dan lugar a 6 valores posibles, que se resumen según el siguiente conjunto (Birchfield, 1998):

$$\left\{ \tau, \frac{1}{\tau}, 1-\tau, \frac{1}{1-\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}, \frac{\tau}{\tau-1} \right\} \quad (2.31)$$

En la siguiente figura (Figura 2.10) se muestra un resumen de las transformaciones proyectivas tridimensionales, y el efecto de su aplicación sobre un cubo.

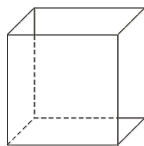
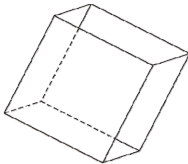
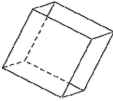
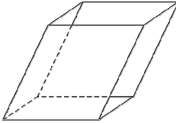
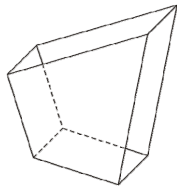
Original	Isometría	Semejanza	Afinidad	Proyectividad
				

Figura 2.10 Resumen transformaciones proyectivas 3D

Hasta ahora se ha desarrollado la proyectividad 3D y sus diferentes transformaciones en el espacio, no obstante en fotogrametría se suele explotar el espacio bidimensional 2D, debido a que habitualmente los datos de entrada están constituidos por imágenes. La particularización de (2.27) en un espacio

bidimensional se obtiene eliminando los componentes de la matriz asociados a la tercera coordenada. Dicha particularización verifica la fórmula general de las proyectividades (2.28). La expresión resultante es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde se ha variado la nomenclatura utilizada hasta el momento por la comúnmente utilizada en fotogrametría.

La reducción de una dimensión puede comprobarse en la Figura 2.11 donde desaparecen los parámetros asociados al tercer eje Z: punto de fuga y variación de escala a lo largo del eje Z, se imposibilitan dos giros, así como sus posibles faltas de ortogonalidad.

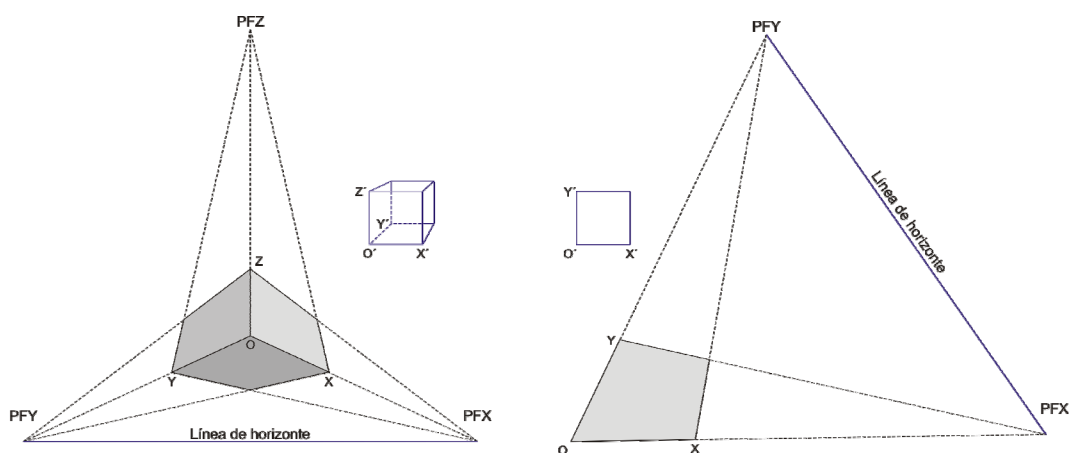


Figura 2.11 Puntos de fuga: objeto 3D y 2D

La ecuación (2.32) es la conocida como **transformación proyectiva 2D**, más conocida en fotogrametría por su expresión no homogénea.

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + 1} \quad y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + 1} \quad (2.33)$$

Donde los parámetros  $g$  y  $h$  representan el efecto de la perspectiva en las direcciones  $X$  e  $Y$  respectivamente, ya que según la nomenclatura de la expresión general 3D:  $g=h_{41}$  y  $h=h_{42}$  controlan la perspectiva según las direcciones principales  $X$  e  $Y$ . Véase que el número necesario de puntos para resolver la proyectividad 2D son 4 puntos en ambos sistemas, uno menos que en el caso espacial.

En fotogrametría esta transformación se aplica cuando se busca establecer el sistema de fotocoordenadas a partir de la imagen escaneada de un fotograma. Las deformaciones causadas durante la digitalización no modelables mediante una afinidad, quedan absorbidas a través de los parámetros de perspectiva ( $g,h$ )

Si  $g=h=0$  indicaría que en la transformación entre el objeto original y final no existen deformaciones causadas por el efecto de la perspectiva, por lo que la expresión que vincularía a ambos sería la denominada **transformación afín 2D**:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

La transformación es de 6 parámetros: 2 traslaciones  $(t_x, t_y)$ , una rotación  $(\theta)$ , la falta de perpendicularidad entre ejes  $(\varepsilon)$  y 2 variaciones de escala a lo largo de los ejes  $(\lambda_x, \lambda_y)$  (Figura 2.12). Dicha transformación se suele emplear en el proceso de matching en fotogrametría.

La ecuación (2.34) es la expresión linealizada de la transformación afín, ya que la expresión original (2.35) no es lineal, requiriéndose para su resolución el empleo de múltiples iteraciones.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_x \cos \theta \cdot x + \lambda_y (\cos \theta \operatorname{sen} \varepsilon + \operatorname{sen} \theta \cos \varepsilon) \cdot y + t_x \\ y' &= -\lambda_x \operatorname{sen} \theta \cdot x + \lambda_y (\cos \theta \cos \varepsilon - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varepsilon) \cdot y + t_y \end{aligned} \tag{2.35}$$

De las expresiones (2.34) y (2.35) se deduce la equivalencia existente entre los parámetros físicos y los parámetros matemáticos.

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \sqrt{a^2 + b^2} & \theta &= \arctan(d/a) & t_x &= c \\ \lambda_y &= \sqrt{d^2 + e^2} & \varepsilon &= \arctan(b/e) - \theta & t_y &= f \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} a &= \lambda_x \cos \theta & b &= \lambda_y \operatorname{sen}(\theta + \varepsilon) \\ d &= -\lambda_x \operatorname{sen} \theta & e &= \lambda_y \cos(\theta + \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.37}$$

No obstante, existe una transformación ligeramente diferente asociada a (2.34) en la cual solo interviene 5 parámetros físicos; es la conocida como **transformación afín-ortogonal**, la cual como indica su nombre considera que en ambos sistemas coordenados los ejes son perfectamente perpendiculares  $(\varepsilon=0)$ . En ambos casos son necesarios 3 puntos para poder resolver la transformación.

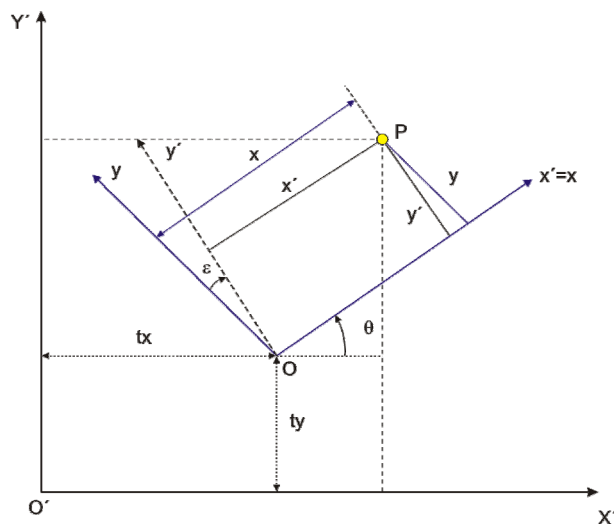


Figura 2.12 Transformación afín

También puede darse el caso de que no sea necesario considerar diferentes factores de escala según los ejes  $(\lambda = \lambda_x = \lambda_y)$ , lo cual junto con la hipótesis de perpendicularidad entre ejes  $(\varepsilon=0)$ , se obtiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' & t_x \\ -b' & a' & t_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Tal que  $a' = \lambda \cos \theta$  y  $b' = \lambda \sin \theta$ . La ecuación anterior es la expresión matricial no homogénea de la **transformación de semejanza 2D**, también conocida como *Helmert 2D*, la cual es considerada como la transformación básica de la fotogrametría aérea, en el proceso de orientación interna.

Sin embargo, existe aún un tipo de transformación más simple que la anterior, basada en considerar que ambos espacios coordenados están escalados, que es la **transformación euclídea 2D**, por lo que  $\lambda=1$ , reduciendo a 3 el número de incógnitas ( $\theta, t_x, t_y$ ), aunque seguirían siendo necesarios 2 puntos para resolver la relación.

De esta forma se ha descompuesto la proyectividad en sus diferentes subtransformaciones, según las restricciones consideradas, o según el número de puntos disponibles para relacionar ambos sistemas (Tabla 2.1).

Transformación	Proyectiva	Afinidad	Semejanza	Euclídea
Expresión	$\begin{bmatrix} A & t \\ w^T & v \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Parámetros (3D/2D)	15 / 8	12 / 6	7 / 4	6 / 3
Nº de puntos (3D/2D)	5 / 4	4 / 3	3 / 2	3 / 2

Tabla 2.1 Jerarquía de las transformaciones proyectivas

En el cuadro anexo (Tabla 2.2) se resumen las diferentes transformaciones tratadas, indicando las modificaciones que permite y los invariantes asociados a cada uno de ellos (Birchfield, 1998). Dicha tabla resumen es válida tanto en el caso 2D como en el caso 3D.

	Euclídea	Semejanza	Afinidad	Proyectividad
<b>Transformaciones</b>				
Rotación	X	X	X	X
Traslación	X	X	X	X
Escalado uniforme		X	X	X
Escalado desigual			X	X
Falta perpendicularidad			X	X
Proyección perspectiva				X
<b>Invariantes</b>				
Longitud	X			
Ángulo	X	X		
Proporción de longitudes	X	X		
Paralelismo	X	X	X	
Incidencia	X	X	X	X
Razón cruzada	X	X	X	X

Tabla 2.2 Resumen de las transformaciones e invariantes para las diferentes geometrías tratadas (adaptado de Birchfield, 1998)

La geometría proyectiva, a través de sus diferentes transformaciones, forma parte del esqueleto de la fotogrametría clásica, aunque sea mayoritariamente en su versión 2D. En la metodología de registro de sensores propuesta, la proyectividad no sólo es relevante en tanto suministra algoritmos indispensables para la ejecución de diferentes operaciones (expuestos en este capítulo), sino que establece un marco, sobre el cual se desarrollan conceptos propios de la visión computacional y que son capitales dentro de proceso general expuesto en esta Tesis Doctoral, como se expondrá en la secciones subsiguientes.

## 2.4. Modelo de cámara proyectivo

En visión computacional, el conocimiento de los parámetros (internos y externos) de una cámara asociados a una secuencia de dos o más imágenes de una misma escena, permite reconstruir su geometría 3D en el sistema de coordenadas terreno, e incluso, solamente con los parámetros internos de la cámara es posible obtener una reconstrucción métrica (Slama et al., 1980). Por ello, el establecimiento del modelo de cámara es importante no sólo en la visión computacional, sino también en fotogrametría, y en el proceso de registro de sensores propuesto, en tanto es parte de la reconstrucción métrica.

La proyección de un objeto tridimensional ( $P$ ) en un objeto bidimensional ( $p$ ) en el plano imagen de una cámara fotográfica responde a las leyes de la proyección perspectiva o proyección central (Figura 2.13), en la que los rayos de luz procedentes del objeto atraviesan el centro óptico de la cámara, que actúa como centro de proyección ( $C$ ) donde convergen todos los rayos, y se plasman sobre la película o sensor según el tipo de cámara. El plano imagen ( $R$ ) donde se proyecta la imagen está ubicado a una distancia  $f$  (distancia focal) del centro óptico y es perpendicular al eje óptico  $Z$ .

Este tipo de proyección es el modelo más básico de cámara, denominado “*pinhole camera*”.

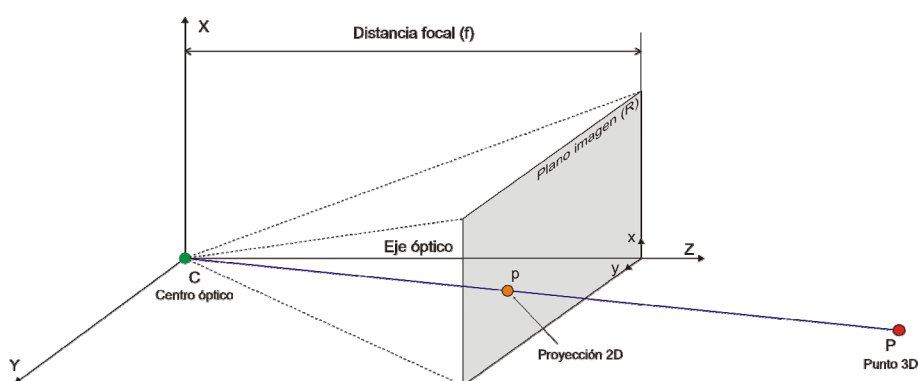


Figura 2.13 Modelo geométrico de proyección central

Nótese que en la Figura 2.13 se representa el positivo de la imagen, forma de trabajo común en fotogrametría terrestre, en contraposición a los desarrollos en fotogrametría aérea en los cuales se considera el negativo de la imagen, por lo que la focal tendría signo diferente.



La formación de la imagen 2D se realiza a través de las relaciones de similaridad, mediante el teorema de Thales, existentes entre la distancia focal y la distancia, medida a lo largo del eje óptico  $Z$ , entre  $C$  y un punto en el espacio  $(X,Y,Z)$ , resumibles así:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{f}{Z} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde la  $f/Z$  es la relación de escala entre cada punto imagen y su correspondiente en el terreno.

No obstante, expresando el vector coordenadas imagen (2.39) mediante coordenadas homogéneas se tiene que:

$$\bar{x} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} f \cdot X \\ f \cdot Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Desarrollando la equivalencia (2.40) y teniendo en cuenta el vector homogéneo de coordenadas terreno, se tiene

$$Z \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Que puede ser resumido de la siguiente forma

$$\lambda \bar{x} = \underbrace{\mathbf{K}_f \mathbf{C}_0}_{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{X}} \quad (2.42)$$

Donde  $\lambda$  es el factor de profundidad (escalar arbitrario),  $\mathbf{P}$  es la matriz 3x4 denominada *matriz de proyección perspectiva* de la cámara, sabiendo que  $\mathbf{C}_0$  es la matriz canónica de proyección, y  $\mathbf{K}_f$  expresa la geometría de la cámara. Por su parte,  $\bar{x}$  y  $\bar{\mathbf{X}}$  son los vectores coordenados homogéneos del punto 2D y 3D respectivamente.

Mediante el uso de las coordenadas homogéneas se ha convertido una expresión no lineal (2.39) en otra lineal (2.42).

Para puntos reales,  $\lambda$  nunca puede ser igual a 0, ya que en ese caso  $Z$  sería nula ( $Z=0$ ) y todos los puntos 3D estarían situados sobre el plano focal y las coordenadas imagen estarían indeterminadas, con excepción del punto  $C$  (centro óptico).

La relación entre el sistema de coordenadas definido por el centro óptico de la cámara y un sistema de coordenadas terreno local arbitrario  $(X_L, Y_L, Z_L)$ , se define mediante una transformación euclídea 3D (2.8), tal que existirán 6 variables a determinar: 3 traslaciones y 3 rotaciones, denominadas **parámetros extrínsecos** o externos de la cámara.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Donde el subíndice  $L$  hace referencia al sistema de coordenadas local y arbitrario,  $\mathbf{R}$  es la matriz ortonormal 3x3 que contienen las rotaciones, y  $\mathbf{t}$  el vector 3x1 de traslación.

Con esta consideración la expresión (2.42) se transforma en la siguiente:

$$\lambda \bar{x} = \mathbf{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \bar{X}_L \quad (2.44)$$

Hasta ahora se ha considerado un modelo idealizado, sin embargo en los casos reales se emplean sensores en los que existen una serie de discrepancias tales como el desplazamiento del centro óptico de la cámara respecto al origen del plano imagen, falta de perpendicularidad entre ambos o cambios en escala entre ambos sistemas. Dichas diferencias se incorporan al sistema (2.44) mediante la matriz  $\mathbf{K}$  o *matriz de calibración*.

$$\lambda \bar{x} = \mathbf{KPH}\bar{X}_L \quad (2.45)$$

Esta ecuación final es la que permite resolver la proyección  $(X_L, Y_L, Z_L)^T \rightarrow (x, y)^T$ .

La matriz  $\mathbf{K}$  es independiente de la posición de la cámara y contiene los **parámetros intrínsecos** o internos de la cámara, estructurados en una matriz triangular superior, cuyo último elemento de la diagonal es la unidad.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha & s & x_0 \\ 0 & \beta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Esta estructuración facilita las operaciones matemáticas, aunque la interpretación geométrica es menos intuitiva. Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionados con sendos factores de escala diferentes según el eje;  $s$  es el denominado *skew factor* que se relaciona con la falta de ortogonalidad entre ejes, y  $x_0, y_0$  que son tanto parámetros matemáticos de (2.46) como geométricos de la cámara (Figura 2.14), son las conocidas como coordenadas del punto principal. Según Faugeras (1993) los parámetros matemáticos de (2.46) se relacionan con los parámetros geométricos intrínsecos según:

$$k_x = \alpha \quad \theta = -\text{arc cot} \left( \frac{s}{\alpha} \right) \quad k_y = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + s^2}} \quad (2.47)$$

donde  $k_x, k_y$  son factores de escala que relacionan el sistema de coordenadas cámara con el sistema objeto, y  $\theta$  es ángulo existente entre los ejes del sistema imagen.

Sustituyendo y recordando que  $1 + \cot^2 x = \sec^2 x$  la matriz  $\mathbf{K}$  resulta:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & -k_x \cot \theta & x_0 \\ 0 & k_y / \operatorname{sen} \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

De esta forma se establece una relación entre el sistema de fotocoordenadas  $(x,y)$  y el sistema de coordenadas imagen  $(u,v)$  (Figura 2.14) Las transformaciones modeladas por la matriz  $\mathbf{K}$  son:

- *Cambio de escala*  $(k_x, k_y)$ : El sistema de coordenadas imagen de los sensores CCD trabajan en unidades píxel, a diferencia del sistema coordinado terreno que utiliza otras unidades métricas (metros, milímetros,...). Por esta razón se tiene en cuenta un factor de escala diferente según los ejes  $x$  e  $y$ , ya que los píxeles pueden no ser cuadrados sino rectangulares (relación de aspecto).
- *Traslación del origen*  $(x_0, y_0)$ : o también conocido como desplazamiento del punto principal. Permite que el origen de coordenadas del sistema de fotocoordenadas sea coincidente con la intersección del eje óptico con el plano de la imagen.
- *Falta de ortogonalidad*  $(\theta)$ : o *skew*, es el ángulo existente entre las filas y columnas de los píxeles del sensor, y permite considerar que en el modelo de la cámara los ejes no son perfectamente ortogonales, aunque para la mayoría de cámaras se cumple que  $\theta=90^\circ$ .

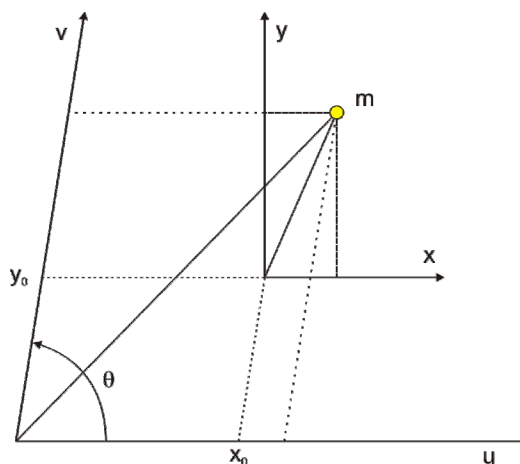


Figura 2.14 Parámetros intrínsecos de la cámara

Una cuarta transformación que se podría considerar sería la rotación entre sistemas, no obstante, la discrepancia en orientación entre el sistema terreno y el sistema imagen es absorbido por la matriz de rotación de la transformación (2.43).

Resumiendo, para resolver la proyección de un punto 3D en un espacio 2D según (2.45), intervienen las siguientes matrices y parámetros:

- *Matriz K*: 5 parámetros intrínsecos  $(k_x, k_y, x_0, y_0, \theta)$
- *Matriz P*: distancia focal  $(f)$
- *Matriz H*: 6 parámetros extrínsecos  $(\omega, \phi, \kappa, t_x, t_y, t_z)$

Es decir, dicha proyección dependería de 12 parámetros. Pero de la composición de las matrices  $\mathbf{KP}$  resulta, que no todos los parámetros se determinarían de forma individual, en este caso, la distancia focal.

$$\mathbf{KP} = \begin{bmatrix} k_x & -k_x \cot \theta & x_0 \\ 0 & k_y / \text{sen} \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & -f_x \cot \theta & x_0 \\ 0 & f_y / \text{sen} \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Donde  $f_x = k_x f$  y  $f_y = k_y f$  son las longitudes focales en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente. Por ello, al producto de matrices  $\mathbf{KP}$ , se suele expresar descompuesto para una focal normalizada de valor unidad, que permite obtener las coordenadas normalizadas.

$$\mathbf{KP} = \begin{bmatrix} f'_x & f'_\theta & x_0 \\ 0 & f'_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Por lo que el modelo de la cámara estará definido mediante **11 parámetros**, los intrínsecos (5) y los externos (6).

Con respecto al modelo de cámara proyectivo descrito y expuesto en esta sección, en ningún momento se ha hecho mención a las distorsiones de la imagen, tanto radial, como tangencial, que están presentes en las cámaras reales. Estas distorsiones que desplazan a los puntos de la imagen respecto a sus posiciones ideales, han de ser tenidas en cuenta en el modelo de la cámara y serán desarrolladas en un apartado propio (ver sección 3.4).

## 2.5. Geometría epipolar

El esquema de trabajo propuesto de fusión de sensores busca explotar las relaciones que depara la geometría proyectiva en la geometría de dos cámaras. Si bien, no responde al planteamiento clásico del caso estereoscópico, la extracción de una imagen 2D a partir de una nube de puntos láser y su posterior puesta en común con una imagen procedente de una cámara digital, permite reproducir la casuística de la geometría epipolar. En este apartado también subyace parte de la originalidad de la Tesis expuesta, en tanto se incorporan algoritmos y conceptos propios de disciplinas como la visión computacional o la fotogrametría clásica, en la automatización del procesado de datos tridimensionales láser.

Cuando se emplea más de una imagen, ya sean dos tomas diferentes de la misma escena o dos tomas simultáneas, se entra en el campo de la visión estéreo, donde a partir de la información bidimensional que proporciona cada imagen se pueden obtener datos espaciales de los objetos de la escena. Esta configuración da lugar a la geometría epipolar, la cual contiene toda la información geométrica de una escena y dos proyecciones de la misma.

Dicha geometría está representada en la Figura 2.15, donde un punto  $P$  es proyectado en dos imágenes definidas por los centros ópticos de proyección  $(C_1, C_2)$ , definiendo sendos puntos imagen bidimensionales  $p_1, p_2$ . Entonces se

verifica la condición de coplanariedad, ampliamente conocida en fotogrametría clásica, tal que el punto en el espacio objeto ( $P$ ), los puntos proyectados en el espacio imagen ( $p_1, p_2$ ) y los centros de proyección ( $C_1, C_2$ ) pertenecen al mismo plano, definido como **plano epipolar**. Una definición alternativa, basándose en las relaciones geométricas, sería la del plano que contiene al punto objeto y a la línea base que une los centros de proyección ( $C_1C_2$ ).

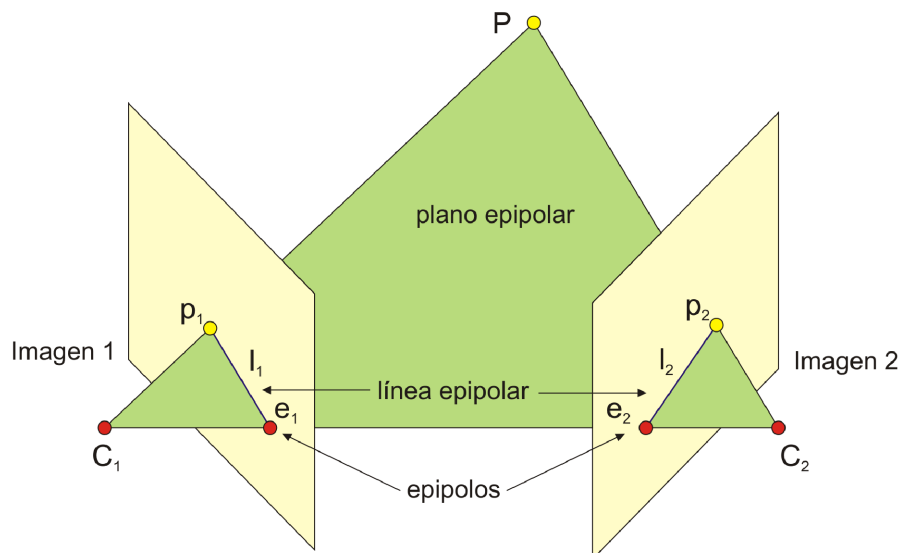


Figura 2.15 Geometría epipolar

La intersección del plano epipolar con los planos de las imágenes da lugar a la conocida como **línea epipolar** ( $l_1, l_2$ ), concepto de gran importancia en fotogrametría digital y que en este trabajo será la base para reforzar el proceso de correspondencia (ver apartado 4.4.5).

El tercer concepto básico de la geometría epipolar es el **epipolo** que es el centro del haz de líneas epipolares. Se define como la proyección del centro óptico de la segunda imagen sobre el plano imagen de la primera. Geométricamente se determina como la intersección entre una línea epipolar cualquiera con la línea base ( $C_1C_2$ ). De forma análoga existe un segundo epipolo ( $e_2$ ) generado como la proyección de  $C_1$  sobre la imagen 2.

La característica más relevante de la geometría epipolar es la posibilidad de establecer *restricciones geométricas* que permiten resolver de forma más eficiente el problema de la búsqueda de puntos homólogos. Dado el punto  $p_1$  sobre la imagen izquierda, y siendo desconocidos los parámetros de orientación externa de la imagen derecha ( $C_2$ ), el proceso de localización de  $p_2$  debería aplicarse sobre la totalidad del plano imagen 2 con el consecuente coste en tiempo de procesamiento.

Gracias a las restricciones epipolares (Figura 2.16) se sabe que el punto homólogo  $p_2$  está contenido en el plano epipolar, cuya intersección con la imagen 2 es por definición la línea epipolar  $l_2$ . De esta forma se ha reducido el espacio de búsqueda de un espacio bidimensional a otro unidimensional: el punto homólogo debe pertenecer a la línea epipolar  $l_2$ .

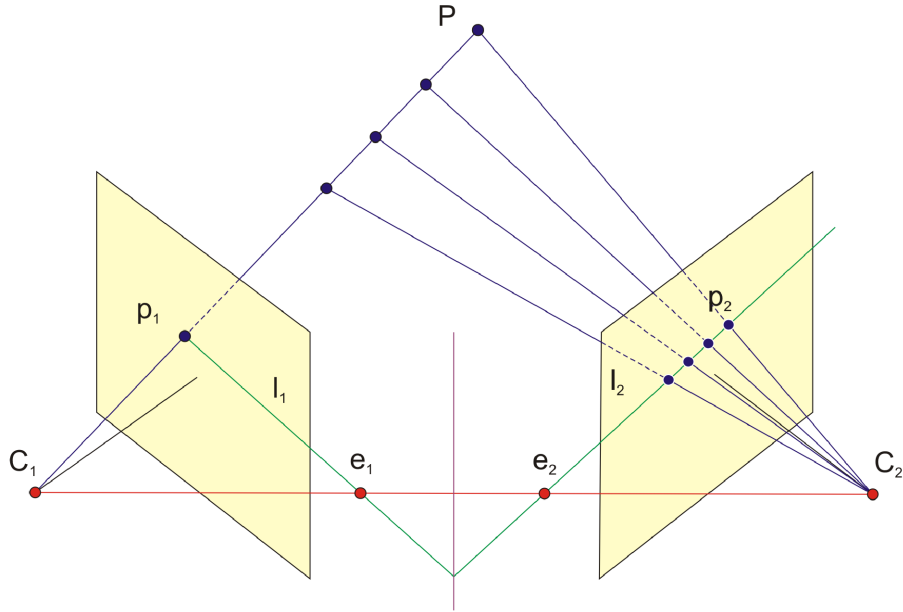


Figura 2.16 Restricción epipolar

A partir de las relaciones existentes derivadas de la geometría epipolar se deducen matemáticamente dos matrices de alta relevancia en el campo de visión computacional: la matriz esencial y la matriz fundamental.

Sea un par de imágenes (configuración similar a la Figura 2.15), donde el punto  $P$  se proyecta sobre los planos imagen como los puntos  $p_1$  y  $p_2$ . Para esta deducción se emplea la notación homogénea, por lo que  $\mathbf{P}$  es un vector  $4 \times 1$  mientras que  $\mathbf{p}_i$  tiene dimensiones  $3 \times 1$ . Suponiendo que ambas cámaras (cada plano imagen puede responder a diferente geometría interna) están calibradas, los puntos  $p_1$  y  $p_2$  se los denominan como coordenadas calibradas o normalizadas, se denotarán como  $p'_1$  y  $p'_2$ .

La expresión matemática de la restricción epipolar se puede expresar como la transformación de los puntos  $p'_1$  para llevarlos a coincidir con el sistema en el que esta expresado  $p'_2$ :

$$\mathbf{p}'_2{}^T (\mathbf{T} \times \mathbf{R} \mathbf{p}'_1) = 0 \quad (2.51)$$

Donde  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{T}$  contienen la rotación y traslación entre los dos sistemas coordenados de ambas imágenes. Esta transformación es similar a la correspondiente a la euclídea 3D, ya que son los parámetros asociados a la línea base ( $C_1C_2$ ). Definiendo la matriz antisimétrica  $[\mathbf{t}]_x$  de forma tal que  $[\mathbf{t}]_x \mathbf{k} = \mathbf{t} \times \mathbf{k}$ , siendo  $\mathbf{k}$  un vector cualquiera, se obtiene:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad [\mathbf{t}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Esta última aseveración es fácilmente verificable en tanto el resultado del producto vectorial puede expresarse según filas o columnas.

$$\begin{aligned}
[t]_x \cdot k &= \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_y k_3 - t_z k_2 \\ t_z k_1 - t_x k_3 \\ t_x k_2 - t_y k_1 \end{bmatrix} \\
t \times k &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ t_x & t_y & t_z \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = (t_y k_3 - t_z k_2)i - (t_x k_3 - t_z k_1)j + (t_x k_2 - t_y k_1)k
\end{aligned} \tag{2.53}$$

La ecuación (2.51) puede reescribirse linealmente como:

$$p_2^{rT} ([t]_x R p_1') = p_2^{rT} E p_1' = 0 \tag{2.54}$$

Donde **E** es la denominada **matriz esencial** que fue obtenida por Longuet-Higgins en 1981, y que permitió importantes avances en la visión computacional, aunque posteriormente quedaría obsoleta con la aparición de la matriz fundamental.

Alternativamente, la expresión (2.54) puede derivarse a partir de la condición de coplanariedad recogida en (2.51) mediante el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

donde  $a_i$  son los elementos del vector que representa al punto  $p'_1$ ; y  $c_i$  los elementos del vector del punto  $p'_2$  rotado para coincidir el orientación con el sistema coordenado de  $p'_1$ . Finalmente  $t_i$  son los parámetros de traslación entre ambos sistemas. El determinante de tres vectores se puede representar como el producto mixto de dichos vectores, con independencia del orden:

$$\begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = t \cdot (a \times c) = a \cdot (c \times t) = c \cdot (t \times a) \tag{2.56}$$

Llegándose a una expresión análoga a la ecuación (2.51).

Una característica importante de la matriz esencial tiene 5 grados de libertad: 3 debidos a las rotaciones y 2 para la dirección de las traslaciones, ya que debido a la ambigüedad en la profundidad no se puede obtener la magnitud de la traslación en el tercer eje (Birchfield, 1998).

$$E = [t]_x R \tag{2.57}$$

Por otra parte, la matriz esencial está afectada por dos restricciones: su determinante es cero, y dos de sus valores singulares han de ser iguales (y distintos de cero) mientras el tercero ha de ser cero. Esta última restricción se puede expresar mediante la descomposición en valores singulares (*svd*). Para más datos consultar la sección 4.4.5, concretamente la ecuaciones (4.48) en adelante.

$$E = U \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & 0 \end{bmatrix} V^T \quad (2.58)$$

Para la resolución de la matriz esencial  $E$  se necesitan conocer al menos 8 puntos en ambas imágenes mediante una resolución lineal (Longuet-Higgins, 1981), o 7 puntos si la solución se localiza como las raíces de una ecuación cúbica (Hartley, 1992).

Conocida la matriz esencial  $E$  se puede reconstruir las posiciones relativas originales de  $C_1$  y  $C_2$  (cámaras calibradas o normalizadas), con la salvedad de que se derivan cuatro soluciones diferentes (Figura 2.17), aunque la ambigüedad puede ser eliminada comprobando que el punto  $P$  esté en frente de ambas cámaras (testeo fácilmente realizable con un punto cualquiera de la escena). La recuperación de la orientación relativa contenida por la matriz  $E$ , expresada a través de la baselínea contenida  $[t]_x$  y la matriz de rotación  $R$  que la definen (2.57) se realiza mediante la descomposición de Horn (1990). Las dos soluciones para la baselínea  $t$  (2.52) se obtienen:

$$tt^T = \frac{1}{2} \text{traza}(EE^T)I - EE^T \quad (2.59)$$

donde  $I$  es la matriz identidad 3x3. Las dos soluciones de orientación resultan de:

$$(t \cdot t)R = \text{cof}(E)^T - [t]_x E \quad (2.60)$$

donde  $\text{cof}$  hace referencia a la matriz de cofactores de la matriz  $E$ .

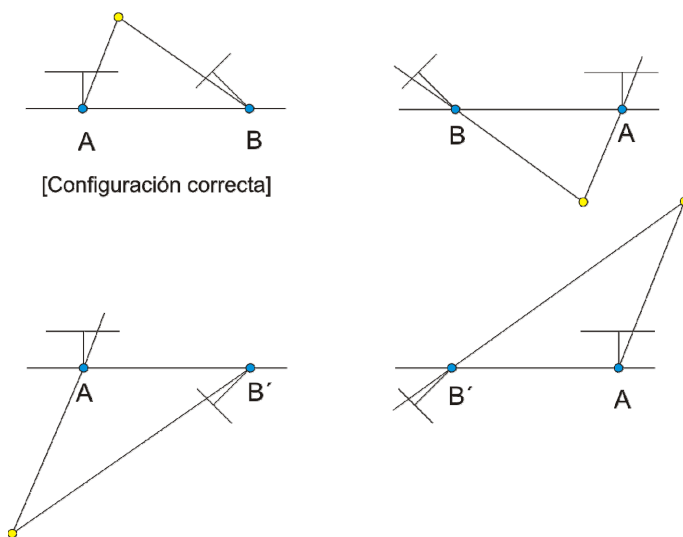


Figura 2.17 Ambigüedad en reconstrucción de la escena a partir de la matriz  $E$

La utilidad de la matriz esencial  $E$  está limitada en cuanto sólo es válida en los casos donde se conozcan los datos de la calibración asociados a las cámaras. Por ello, en visión computacional es más común usar la conocida como **matriz fundamental** ( $F$ ) que es una generalización de la anterior para las situaciones en las que las cámaras no estén calibradas, y es de gran importancia para el análisis en el caso de dos vistas.



Según la hipótesis anterior, es necesario considerar los parámetros de orientación interna contenidos en la matriz  $\mathbf{A}$ , tal que  $\mathbf{A}_i = (\mathbf{K}\mathbf{P})_i$  donde  $\mathbf{K}$  son los componentes internos y  $\mathbf{P}$  los de perspectiva (2.49) respectivamente, y el subíndice  $i$  indica la imagen. Por lo tanto la relación entre las coordenadas calibradas o normalizadas ( $p'_i$ ) y las coordenadas píxel ( $p_i$ ) es:

$$\begin{aligned} p_1 &= A_1 p'_1 \\ p_2 &= A_2 p'_2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Y sustituyendo las coordenadas píxel en la ecuación de la restricción epipolar (2.51) resulta<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_2^{-1} p_2)^T (\mathbf{t} \times \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} p_1) &= 0 \\ p_2^T \mathbf{A}_2^{-T} (\mathbf{t} \times \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} p_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

En donde definida la matriz  $\mathbf{F}$  tal que  $\mathbf{F} = \mathbf{A}_2^{-T} \mathbf{E} \mathbf{A}_1^{-1}$  se obtiene la ecuación:

$$p_2^T \mathbf{F} p_1 = 0 \quad (2.63)$$

Con la inclusión de las matrices de parámetros internos, la matriz  $\mathbf{F}$  tiene 7 grados de libertad: dos por cada epipolo y tres por la homografía existente entre los dos haces de líneas epipolares<sup>10</sup> (Hartley y Zisserman, 2000). Otra forma de interpretarlo es que aunque  $\mathbf{F}$  tiene 9 elementos, uno se elimina debido al escalado común y otro porque su determinante es cero, obteniendo los 7 grados de libertad restantes.

Alternativamente, a la sustitución realizada para obtener (2.63), se puede obtener una expresión diferente pero equivalente de la matriz Fundamental mediante la derivación algebraica (ver Birchfield, 1998):

$$\mathbf{F} = [\mathbf{A}_2 \mathbf{t}]_x \mathbf{A}_2 \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \quad (2.64)$$

La utilidad de la matriz  $\mathbf{F}$  es que actúa como una proyección que transforma puntos bidimensionales en líneas, como por ejemplo la conversión de puntos en líneas epipolares. Aunque dicha operación no es una transformación reversible, puesto que  $\mathbf{F}$  no es de rango completo (al ser una matriz 3x3 de rango 2) y no existiría  $\mathbf{F}^{-1}$ .

La matriz  $\mathbf{F}$  es independiente de la configuración de la escena puesto que no depende de  $p_1, p_2$  ni  $P$ , solamente de las matrices de proyección y componentes internos  $\mathbf{A}_i$ , o expresado de otra manera sólo depende de las matrices de la cámara.

Según (2.63) se puede definir matemáticamente la representación homogénea de las líneas epipolares  $l_1, l_2$  como:

<sup>9</sup> Nótese que se emplea la notación  $^{-T}$  para indicar la trasposición de la inversa.

<sup>10</sup> Las homografías 1D se definen mediante una matriz 2x2, perdiendo un grado de libertad debido a la ambigüedad en escala.

$$\begin{aligned} l_2 &= \mathbf{F}p_1 \\ l_1 &= \mathbf{F}^T p_2 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Asimismo, si un punto  $p_i$  pertenece a la línea epipolar  $l_i$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} l_i^T p_i &= 0 \\ l_i^T e_i &= 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Nótese que por definición un epipolo es el centro del haz de rectas epipolares.

Observando la ecuación (2.63), la matriz fundamental relaciona los puntos homólogos en ambas imágenes, y puesto que los epipolos  $(e_1, e_2)$  representan los espacios nulos de la matriz fundamental se cumple:

$$\mathbf{F}e_1 = 0 \quad e_2^T \mathbf{F} = 0 \tag{2.67}$$

La matriz  $\mathbf{F}$  es homogénea ya que para cualquier escalar  $k$ , tal que  $k \neq 0$ , la matriz  $k\mathbf{F}$  sigue siendo una matriz fundamental.

Las matrices  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{F}$  comparten una serie de similaridades, tal que ambas permiten expresar la restricción de epipolariedad o factorizarse como el producto de una matriz antisimétrica y otra matriz dada. Sin embargo, la matriz  $\mathbf{E}$  es un entidad euclídea en tanto puede ser descompuesta en parámetros de rotación y traslación; mientras que la matriz  $\mathbf{F}$  es una entidad proyectiva en tanto puede descomponerse en parámetros de una homografía.

## Capítulo 3

# Calibración geométrica de sensores

Todo instrumento responde a un modelo teórico o ideal, sin embargo debido a las imperfecciones mecánicas debidas al proceso de construcción su comportamiento no será exactamente el modelizado, dando lugar a discrepancias entre el modelo ideal y el instrumento real; denominadas como errores instrumentales. El conocimiento de los errores instrumentales es esencial para adquirir medidas fiables (Schutlz, 2007). Cuanto mejor sean conocidos los errores instrumentales, en mejor disposición se estará para corregir al instrumento real con respecto a su construcción mediante la aplicación de modelos matemáticos.

Los parámetros de calibración pueden obtenerse del fabricante, sin embargo estos pueden no ser suficientemente precisos. Además, el empleo y manipulación del instrumental variará dichos parámetros a lo largo del tiempo. Por ello, es necesario determinarlos periódicamente mediante el proceso de calibración.

Una forma común de entender la calibración es como el proceso de identificación del alejamiento de las observaciones reales con respecto a las ideales, para así poder corregirlas. No obstante, la definición formal de calibración viene dada por el Vocabulario Internacional de Metrología (VIM, 2008):

*Operación que, bajo condiciones especificadas, en una primera etapa establece una relación entre los valores de la magnitud y sus incertidumbres de medida obtenidos a partir de los patrones de medida, y los valores correspondientes con sus incertidumbres asociadas obtenidos por un instrumento de medida y, en una segunda etapa, utiliza esta información para establecer una relación que permita obtener un resultado de medida a partir de las magnitudes proporcionadas por el instrumento de medida.*

Dentro de los procesos de calibración hay definiciones metrológicas desarrolladas por diferentes organizaciones e instituciones como la ISO (*International Organization for Standardization*) o el ANSI (*American National Standards Institute*). Algunas de estas definiciones están sujetas a confusión, por lo que se detallarán a continuación las más relevantes:

**Exactitud:** se define como el grado de concordancia entre la cantidad medida y el valor real del mensurando. Es un concepto cualitativo en tanto el valor verdadero de la medida no es conocido.

**Precisión:** grado de concordancia entre el resultado de mediciones de una misma magnitud obtenidas bajo condiciones especificadas. Normalmente se expresa en términos de imprecisión tales como la desviación estándar, varianza...

**Repetibilidad:** grado de concordancia entre resultados de sucesivas mediciones del mismo mensurando obtenidas con el mismo método, operador, e instrumento de medida y durante un corto intervalo de tiempo.

**Reproducibilidad:** grado de concordancia entre los resultados de las mediciones del mismo mensurando pero efectuadas bajo diferentes condiciones de medida (diferentes emplazamientos, equipos de medida, operadores, etc). Este término está fuertemente relacionado con la calibración, ya que las condiciones bajo las cuales opera un instrumento son diferentes a las del proceso de calibración.

**Incertidumbre:** Parámetro positivo que caracteriza la dispersión de los valores que podrían ser atribuidos al mensurando en el proceso de medida, según la información disponible. Se identifica con la desviación estándar ( $\sigma$ ) o un múltiplo razonable de esta (por ejemplo:  $3\sigma$ ).

En esta tesis se busca integrar dos sensores totalmente diferentes (Tabla 1.3) para obtener un producto que aglutine lo mejor de ambos. No obstante, la consecución de este objetivo pasa por disponer de instrumental en correcto estado de funcionamiento, es decir, lo más próximo a su comportamiento ideal. Por esta razón entra en juego el proceso de calibración, aunque ambos sensores han de ser calibrados por separado, siguiendo procedimientos distintos que se adapten a sus diseños y funcionamiento diferentes, con el fin de garantizar la calidad de ambos.

En el caso de la cámara fotográfica, la cual es una tecnología asentada y desarrollada ya desde sus inicios en la segunda mitad del siglo XIX, no existe una estandarización en cuanto a los protocolos de calibración. Si bien dentro del instituto ISO, el TC42 (*photography*) realizaba actividades relacionadas con la calibración de cámaras hasta 1979, año en el cual se formó el TC172 (*Optics and Photonics*) el cual absorbió sus competencias para evitar duplicidades. Concretamente el SC1-WG1 se encarga de la determinación de la distorsión radial (Ziemann, 1986). Las sociedades científicas, como la ISPRS (*International Society for Photogrammetry and Remote Sensing*) son las encargadas de realizar recomendaciones sobre los protocolos de calibración, pero no son las encargadas de definir un estándar (Clarke, 1998). Actualmente estos organismos científicos, sobretodo el EUROSDR (*European Spatial Data Research*), están involucrados en la calibración de las nuevas cámaras fotogramétricas digitales aéreas (ADS40<sup>©</sup>, DMC<sup>©</sup>, Ultracam<sup>©</sup>) consistente en tres aspectos diferentes: calibración geométrica, radiométrica y determinación de la resolución (Cramer, 2005).

Respecto al láser escáner terrestre, a pesar de que han pasado más de dos décadas desde sus primeros usos, aun no hay protocolos estandarizados para la evaluación de la precisión del láser terrestre, ni métodos para asegurar la precisión final de los productos derivados, como los modelos tridimensionales, volúmenes derivados o las dimensiones geométricas.

La discusión sobre los protocolos de testeo y chequeo de equipos geodésicos ya había sido abordada por el instituto ISO en 1985, concretamente por TC172-SC6: el subcomité sexto (*Geodetic and Surveying Instruments*) del comité técnico 172 (*Optics and Photonics*); dando lugar a la publicación de la norma ISO 17123 (*Field procedures for testing geodetic and surveying instruments*) entre los años 2001 y 2007. Su estructura puede verse en la Figura 3.1 (Gottwald, 2008).

ISO 17123			
Ópticas e instrumentos ópticos - Procedimientos de campo para el chequeo de instrumentos geodésicos y topográficos			
<i>(Optics and optical instruments - Field procedures for testing geodetic and surveying instruments)</i>			
<b>ISO 17123-1</b>	<b>ISO 17123-2</b>	<b>ISO 17123-3</b>	<b>ISO 17123-4</b>
Teoría	Niveles	Teodolitos	Distanciómetros electrónicos
2002	2001	2001	2001
<b>ISO 17123-5</b>	<b>ISO 17123-6</b>	<b>ISO 17123-7</b>	<b>ISO 17123-8</b>
Taquímetros electrónicos	Láseres rotatorios	Instrumentos de plomada óptica	Sistemas de medida GNSS cinemáticos en tiempo real (RTK)
2005	2003	2005	2007

Figura 3.1 Estructura de la norma ISO 17123 (adaptado de Gottwald, 2008)

Con la publicación de la norma 17123-8 (*GNSS field measurement systems in real-time kinematic (RTK)*) en septiembre de 2007, el láser escáner terrestre queda como el último sistema de medición geodésico sin protocolos de medida estandarizados. Por ello es necesario un estudio más profundo sobre el estado del arte en los procesos de calibración (apartado 3.1).

En este capítulo se estudiarán los procedimientos y métodos de calibración para ambos sensores de forma separada, mientras que los resultados del proceso de calibración se recogerán en las secciones 6.1 y Resultados calibración Apéndice A. para el láser escáner terrestre y la cámara digital respectivamente.

### 3.1. Estado del arte en la calibración de láser escáner terrestres

Como se ha comentado los dispositivos láser escáner terrestres se han popularizado gracias a su gran versatilidad, estando presentes campos tan diferentes tales como el patrimonio, ingenierías o ciencia forense. Su gran punto a favor es el volumen de datos capturados frente a otras técnicas permitiendo modelizaciones detalladas gracias a la densidad de información recogida, no obstante, dada la opacidad del método de medición (piezas móviles, mecánica particular para cada instrumento,...) se generan errores instrumentales que impiden la utilización del láser escáner en trabajos donde es imperativo disponer de una alta precisión y fiabilidad del equipo.

En las disciplinas clásicas, tales como la fotogrametría o la topografía, antes de proceder a realizar cualquier medición es necesario contar con la modelización de los posibles errores junto con su estimación a priori, para poder corregir los observables de campo. En la fotogrametría esto se traduce en poseer el modelo de calibración de la cámara utilizada; mientras que en la topografía consiste en conocer el modelo de errores sistemáticos. Esta situación no se da en el caso de los equipos láser escáner terrestre para los cuales no existe un proceso de calibración estandarizado ni es posible estimar los posibles errores instrumentales.

Debido a la falta de estándares, las especificaciones de precisión proporcionadas por los fabricantes de láseres terrestres en sus folletos y publicaciones no son comparables (Staiger, 2005). Asimismo, (Boehler et al., 2003) indica que estos datos de precisión no son reales, en tanto los láser escáner terrestre se fabrican en pequeñas series, variando de instrumento a instrumento y siendo necesario calibraciones individuales.

Según (Xu y Chi, 1993) la calibración de un sensor láser escáner terrestre implica los siguientes pasos:

- **Modelado:** Es necesario un modelo de error para describir las relaciones entre las fuentes de error y las medidas del sensor, el cual se basa en el conocimiento del diseño del equipo.
- **Medidas:** La identificación de los parámetros está basada en los datos experimentales. Las medidas se realizarán en laboratorio bajo condiciones controladas.
- **Identificación:** de los parámetros desconocidos.
- **Corrección:** Con el modelo desarrollado se pueden corregir los datos del sensor, a la par que los datos corregidos permiten verificar la validez de dicho modelo y refinarlo.

La literatura concerniente a la evaluación de errores y calibración en la última década se ha focalizado en dos objetivos principales:

- Descripción cuantitativa de la precisión alcanzable con un instrumento particular. La evaluación del rendimiento es un aspecto importante y esencial para entender las limitaciones y características de los láseres escáner, a la vez que sirven para establecer comparaciones entre equipos. Sin embargo, la evaluación del rendimiento no analiza en detalle los sistematismos o errores metodológicos, siendo necesarias investigaciones y calibraciones.
- Identificación de los errores sistemáticos (parámetros de calibración) más relevantes del instrumento. Estos parámetros constituyen el modelo de calibración, el cual puede usarse para corregir los errores instrumentales. El procedimiento de calibración puede llevarse a cabo como una calibración del sistema (auto-calibración) o una calibración de los componentes (Schulz, 2007)

En la calibración de los componentes se llevan a cabo procesos de calibración específicos para cada uno de los elementos individuales (distanciómetro, mecanismo de deflexión,...) por separado, bajo condiciones controladas. La autocalibración se basa en considerar todos los componentes de un láser escáner en conjunto. Pudiéndose así modelar tanto los errores de los elementos individuales, como los derivados de las relaciones entre los diferentes componentes (por ejemplo: falta de alineamiento entre ejes),

El doble objetivo que se pretende conseguir es tanto que el láser terrestre pueda usarse de forma fiable en trabajos de alta precisión (tales como control de deformaciones y monitorización de estructuras), como en la eliminación de sistematismos, incrementándose así la precisión de los trabajos estándar. No obstante el modelo de calibración que se expondrá en este capítulo será

únicamente para los sistemas de escaneo basado en tiempo de vuelo, ya que los modelos de cambio de fase han sido extensamente investigados en este campo (Reshetyuk, 2009), véase:

- Calibración basada en puntos (mediante el uso de elementos de puntería cuyos centroides pueden ser extraídos para el proceso de calibración)
  - Lichti ha realizado múltiples experimentos de autocalibración con el equipo FARO 880 (Lichti y Franke, 2005), (Lichti y Licht, 2006) y (Lichti, 2007). El modelo de error utilizado se basa en el modelo de error de una estación total, al cual se le han añadido errores instrumentales que han sido identificados y modelados de forma empírica a partir del análisis de los residuos de la calibración. En algunos de dichos parámetros se apreció una dependencia con el instrumento utilizado. Adicionalmente han estudiado el comportamiento temporal de los parámetros de calibración.
  - Parian presentó un modelo de error extendido al uso de cámaras panorámicas: (Parian y Gruen, 2005) y (Parian, 2007). El modelo matemático se basó en la transformación proyectiva y la calibración se realizó para el equipo Zoller+Fröhlich Imager 5003.
- Calibración basada en planos (mediante la extracción de las coordenadas láser de puntos de la superficies de dianas o tarjetas planas)
  - Rietdorf expuso un método de registro usando planos idénticos: (Gielsdorf et al., 2004) y (Rietdorf, 2005). Para ello dispuso un campo de test indoor con planos calibrados y usó un láser escáner construido en laboratorio y el modelo comercial Imager 5003. Los parámetros de transformación entre las diferentes posiciones de escaneo y el campo de pruebas se calcularon en un único ajuste.
  - En el caso de Lichti, también se probó una calibración con un número reducido de parámetros de calibración (Bae y Lichti, 2007), aunque con resultados diferentes al caso de la calibración basada en puntos, ya que el patrón de los residuos difería sustancialmente dificultando así la identificación de posibles sistematismos. En vez de utilizar paneles específicamente colocados se emplearon las paredes, suelo y techo de una habitación.
  - Otras investigaciones se centraron en la estimación in-situ de los errores cíclicos o periódicos en la medida de distancias, usando elementos planos (Dorninger et al., 2008) y (Molnár et al., 2009). Las medidas originales del láser escáner son corregidas mediante funciones cuyos parámetros se obtienen a partir de los datos del proyecto. En estas investigaciones se calibró el equipo Faro LS880.

Otros análisis de esta clase de equipos en el campo de la calibración son los llevados a cabo por:

- Bohler et al. (2003) desarrollaron una serie de procedimientos para evaluar la calidad de las medidas obtenidas con diferentes láseres terrestres. Usaron

esferas para las determinaciones de distancias y tableros planos para investigar el comportamiento de superficies de diferentes reflectividades y el ruido en la medida de distancias. Además construyeron objetos especiales para otros análisis complementarios, por ejemplo: estrella de Siemens tridimensional para evaluar la resolución del láser (tamaño del spot). Una de las mayores limitaciones del acercamiento de Bohler es que no se analizan los errores sistemáticos ni metodológicos en detalle.

- Schulz y Ingensand (2004) obtuvieron los parámetros que representaban la estabilidad mecánico-óptica, la geometría de los ejes, así como la excentricidad o constante aditiva para el equipo Z+F Imager 5003.
- Mechelke et al. (2007) presentaron una investigación sobre el comportamiento del láser escáner mediante múltiples tests: precisión en la medida de distancias en comparación con una referencia, influencia del compensador, influencia del ángulo de incidencia en la posición 3D o la variación en la medida de distancias según el color del objeto. Para el análisis emplearon cuatro equipos diferentes.

En los apartados siguientes de este capítulo se presentará un protocolo y modelo de calibración únicamente para los sistemas de escaneo de tiempo de vuelo. Particularmente se presentará un modelo matemático de calibración y el establecimiento de un campo de calibración para el testeo de dos equipos: Trimble GX y Riegl LMS-Z390i, y la comparativa de los resultados entre ambos, que está recogida en la sección 6.1.

### 3.2. Errores láser escáner terrestre

Para entender los errores instrumentales de un TLS es necesario disponer de un modelo geométrico. En este caso, un TLS puede modelarse de forma similar a la de una estación total (Figura 3.2).

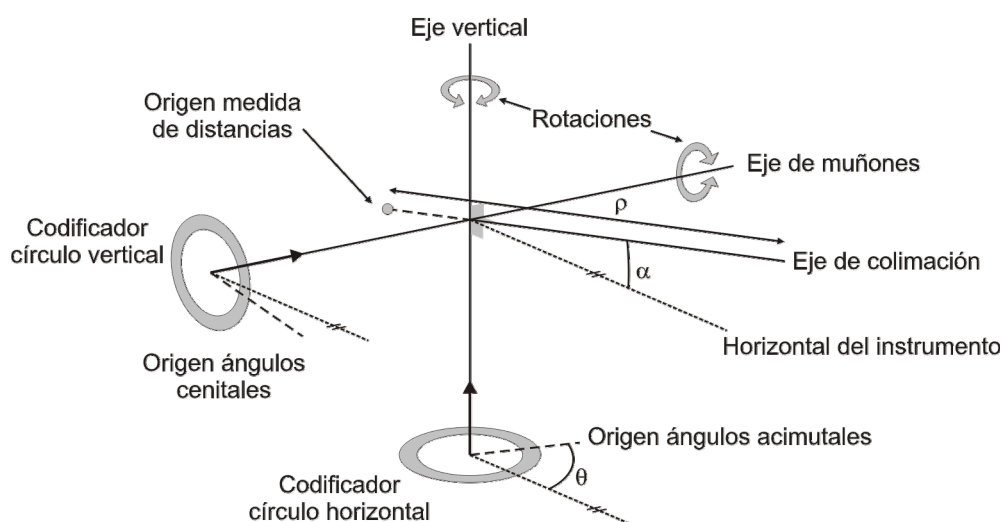


Figura 3.2 Modelo geométrico del láser escáner terrestre (adaptado de Lichti, 2010)



Donde la distancia al objeto ( $\rho$ ) puede determinarse de diferentes formas (tiempo de vuelo o diferencia de fase). El equipo rota respecto al eje vertical cubriendo la totalidad del rango acimutal, mientras que para los ángulos verticales el láser escáner cuenta con un deflector que barre el plano vertical. El mecanismo deflector puede ser un espejo oscilante o un espejo rotatorio. Los vectores normales a los planos contienen los codificadores que permiten registrar el ángulo acimutal ( $\theta$ ) y la elevación ( $\alpha$ ), y se presumen coincidente con sus correspondientes ejes de rotación (Lichti, 2010).

### 3.2.1. Clasificación de las fuentes de error del láser escáner terrestre

Como en toda técnica de medida, especialmente las técnicas topográficas, las observaciones realizadas con escáneres terrestres están influenciadas por diferentes tipos de errores inherentes a la propia construcción y diseño. Es necesario hacer la distinción entre el láser escáner y otros aparatos topográficos convencionales en tanto es un dispositivo cerrado, no siendo posible acceder al interior para modificar o ajustar los diferentes elementos que lo componen a fin de corregir las fuentes de error. Es por tanto necesario modelizar las fuentes de error a fin de lograr, no sólo la corrección de dichos factores sino una evaluación de la precisión de las medidas para un equipo concreto.

Según Staiger (2005) los errores que influyen en la calidad de los escaneos láser pueden agruparse según:

- **Instrumentales:** son los derivados del diseño y ensamblaje del láser.
- **Método de adquisición:** o protocolo de adquisición de datos en campo.
- **Objeto:** siendo función de las propiedades físicas del elemento escaneado.
- **Ambientales:** incluyen aspectos tales los efectos atmosféricos, perturbaciones ópticas, vibraciones...
- **Método de cálculo:** referidos a los algoritmos de reconocimiento de tarjetas de puntería/esferas, procedimientos de georreferenciación de escaneos y el registro.

El conjunto de errores instrumentales son los parámetros a considerar en un proceso de calibración, y por ello serán objeto de estudio en la sección 3.2.2 Los otros cuatro grupos de errores están relacionados con fuentes de error externas al propio equipo láser, por lo que si bien afectan a la precisión tanto de los mensurables láser como de los productos derivados, no son atribuibles al equipo, ergo serán brevemente descritos seguidamente.

La consideración del protocolo de adquisición de datos como fuente de error por parte de Staiger (2005) es debido a que es necesario seguir una serie de pautas a fin de que el producto final cumpla los requisitos iniciales de precisión y calidad. De forma genérica, los parámetros de toma de datos que deben ser analizados y establecidos de forma previa a la salida a campo son: densidad de puntos, localización y número de estacionamientos, recubrimiento entre escaneos,

distancia al objeto, empleo de referencias externas...etc. Gran parte de estos parámetros proceden del diseño de redes utilizado en fotogrametría terrestre.

El láser escáner es un instrumento englobado dentro de la distanciometría óptica activa, que está basada en la iluminación de una porción de la superficie bajo condiciones controladas y la extracción de mensurandos (diferencia de fase, retraso de tiempo) para determinar la posición del área iluminada de la superficie. Esta posición se expresa en forma de un único punto tridimensional. Por ello, de las fuentes de error asociadas con los objetos escaneados la principal es la **reflectancia**, característica más significativa de las propiedades ópticas de los materiales. Según (Ingensand et al., 2003) se puede definir la reflectancia como la relación existente entre la intensidad de radiación reflejada y la intensidad incidente. Una demostración de la influencia de la reflectancia en la medidas del láser terrestre es cuando se escanean objetos con diferentes valores de reflectancia a la misma distancia, pudiendo obtenerse discrepancias entre ambos valores de distancia. Esto se debe a que las superficies con menor coeficiente de reflectancia (oscuras) devuelven menos energía láser al receptor empeorando el factor señal-ruido.

El procedimiento estándar de trabajo con láser terrestre asume que las superficies a escanear son opacas, por lo que el proceso de reflexión se produce en la superficie del objeto. En realidad una importante cantidad de elementos comúnmente escaneados presenta la denominada reflexión difusa, es decir, no sólo se refleja la luz de la superficie del objeto, sino también la dispersada en su interior (Godin et al., 2001). No obstante en la práctica, la gran mayoría de los elementos son suficientemente opacos como para despreciar dicho efecto.

Sin embargo, en el campo del patrimonio arquitectónico existen materiales para los cuales este efecto es relevante, siendo el más destacado el mármol. Su composición mayoritaria a base de calcita ( $\text{CaCO}_3$ ) le dota de una estructura granular. La luz incidente al no encontrarse con un medio homogéneo para su propagación, sino con microrregiones de diferentes propiedades ópticas (función del tamaño, forma, orientación,...) da lugar a una reflexión difusa interna, como se puede apreciar en la Figura 3.3

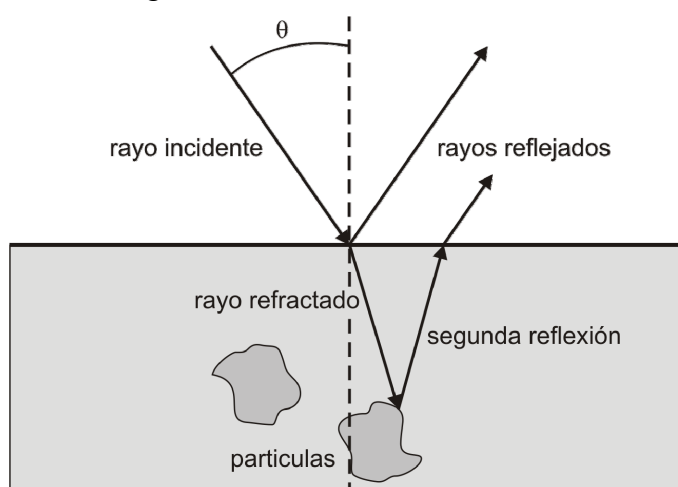


Figura 3.3 Proceso de reflexión difusa interna (Ingensand, 2003)

Un error asociado con superficies complejas muy reflectantes es el efecto multipath cuando el ángulo de incidencia es muy acusado, pudiendo llegar hasta el receptor rayos que han sufrido múltiples reflexiones en varias superficies diferentes. Esto da lugar a errores en la medida de la distancia que pueden alcanzar valores de hasta varios metros (Gordon, 2005).

La propagación del rayo láser en la atmósfera no sólo se ve afectada por la atenuación de la intensidad sino que en el caso de los escáneres de tiempo de vuelo afecta a su precisión en la determinación de distancias debido a la variación de velocidad de propagación del láser. Esta velocidad depende del **índice de refracción del aire**, el cual a su vez en función de la temperatura, presión, humedad atmosférica y contenido en CO<sub>2</sub> de la atmósfera.

Existen múltiples ecuaciones para determinar el índice de refracción del aire en el espectro visible e infrarrojo cercano, siendo las más recientes las desarrolladas por Ciddor (Ciddor, 1996) (Ciddor y Hill, 1999) que ya han sido incorporadas en software láser específico, concretamente en el *Leica Cyclone*® desde su versión 4, aunque sólo sea de forma parcial ya que se asumen valores fijos del 60% para la humedad y 450ppm en el contenido de CO<sub>2</sub> (Harvey, 2004)

Concretamente, el estudio de la influencia del índice de refracción para un láser escáner *Cyrax 2500* de espectro visible ( $\lambda=532$  nm) para una distancia fija de 100 metros realizado por (Harvey, 2004) deparó los siguientes resultados:

- El incremento de temperatura provoca un incremento de la corrección (4,3mm para el rango de 0° a 45°C)
- El incremento de presión atmosférica conlleva una disminución de la corrección (3,9mm en el rango 960-1050hPa)
- Las variaciones de humedad no tienen efecto significativo en la medida de la distancia (corrección inferior a 0,005mm)

Por lo tanto, la corrección por refracción (para el ejemplo reseñado) puede llegar a alcanzar valores de 5mm en determinadas condiciones de campo. Asimismo, este error se traduce en un error de escala en las coordenadas tridimensionales de los puntos.

Otros factores ambientales que pueden considerarse son el tiempo adverso (lluvia, niebla, calima) dando lugar a los siguientes problemas (Grantham et al., 1997):

- Píxeles perdidos (*dropout pixels*): causados por una intensidad de retorno del láser muy débil, de forma que no es recogida por el receptor.
- Falsos retornos: ocurren cuando el rayo láser es dispersado por las gotas lluvia, aerosoles o partículas en suspensión en el aire, siendo la intensidad de retorno suficiente como para ser detectada por el receptor; resultando además múltiples retornos del pulso.

La radiación procedente de fuentes de iluminación externa (lámparas, luz solar) puede interferir en la precisión de las medidas de distancia, si estas son significativamente fuertes en comparación con la señal emitida, pudiendo incluso llegar a impedir la medición (Boehler y Marbs, 2003)

Los objetos escaneados con láser escáner terrestres suelen poseer grandes dimensiones y/o formas complejas, siendo necesario múltiples escaneos para capturar el objeto completo. La obtención del objeto final expresado en un sistema de coordenadas externo requiere de dos procesos separados: **registro** y **geo-referenciación**. Ambos procesos, enmarcados en grupo de métodos de cálculo mencionado anteriormente, están sujetos a la presencia errores que degradan la calidad del producto final.

El registro de escaneos es similar al proceso de orientación relativa de la fotogrametría, en el cual los escaneos individuales (expresados en un sistema de coordenadas locales) se combinan en un sistema coordinado común, obteniendo la representación final del objeto en un sistema local. Matemáticamente se basa en la resolución de una transformación Euclídea 3D (2.8) de 6 parámetros, existiendo varias posibilidades para su determinación:

- Basado en elementos de puntería (tarjetas/esferas): para cada par de escaneos se establecen tres o más elementos en el área de solape. La precisión del método depende de la como se ha identificado el centro de las tarjetas/esferas y su distribución en la zona de recubrimiento.
- Mediante características naturales: similar al anterior, pero empleando puntos distintivos del objeto. La precisión final se verá afectada por la densidad del escaneos en dichas zonas y habilidad del operador para identificar los puntos homólogos. Debido a la ambigüedad en la determinación, esta técnica es la que peores resultados da.
- Puntos masivos o algoritmo ICP- *Iterative Closest Point* (Besl y McKay, 1992): emplea todos los puntos de ambos escaneos en la zona de solape para calcular la transformación. La redundancia de datos permiten obtener buenos resultados, siempre y cuando el recubrimiento sea suficiente (mínimo 25%). El proceso es iterativo, por lo que requiere de una aproximación inicial de los parámetros de transformación, que debe ser aportada por el usuario, en forma de tres puntos homólogos bien definidos.
- Basado en objetos geométricos: se sustenta en modelar las primitivas geométricas presentes en los escaneos (planos, cilindros,...), por lo que es el método más empleado en entorno industriales. La precisión no sólo depende del algoritmo de ajuste de primitivas, sino de su distribución en la escena, siendo recomendable que éstas se distribuyan ortogonalmente según los tres ejes.

El proceso de geo-referenciación, que transforma el sistema de referencia de los escaneos es una fuente adicional de error, por lo que si es posible, las coordenadas del objeto escaneado se mantienen en un sistema local, en vez del global. El proceso de geo-referenciación puede acometerse de dos maneras, afectando de forma diferente al esquema de trabajo y al producto final.

En la geo-referenciación indirecta se emplean puntos de control (puntos de coordenadas conocidas en el sistema final) que han sido escaneados conjuntamente con el objeto. Estos puntos de control están normalmente definidos como tarjetas de puntería, o más raramente como esferas, y han sido dotados de coordenadas en el sistema destino mediante estación total, fotogrametría o GPS. El diseño de esta red condiciona la precisión del modelo final, siendo óptima una

distribución uniforme sobre la superficie del objeto, con variaciones en profundidad, y con elementos redundantes para detectar y eliminar errores groseros en el cálculo final de los parámetros de transformación.

En el procedimiento de geo-referenciación directa se determinan las coordenadas del láser escáner terrestre antes de realizar el escaneo, ya sea por orientación inversa (*Leica HDS*) o estacionado en un punto de coordenadas conocidas, medición de altura del instrumento y visado a una referencia externa para fijar el acimut (*Trimble GX*). Los errores, por lo tanto, serán los propios de un estacionamiento topográfico convencional (Reshetyuk, 2009).

Cuando se trabaja con elementos de puntería (tarjetas y/o esferas) aparece la problemática asociada a la determinación del centro, ya que se estima a partir de los retornos láser de la superficie de la tarjeta/esfera. Este proceso da lugar al conocido como *error por reducción* (Gordon y Lichti, 2004). En el caso de las tarjetas, la estimación del centro empeora cuanto mayor sea el ángulo de incidencia del láser. Las esferas no están limitadas por el ángulo de incidencia, pero se ven influenciadas por el ruido que dificulta la delimitación de los retornos pertenecientes a la superficie de la esfera.

### 3.2.2. Estudio de los errores instrumentales de los láser terrestre

Los errores instrumentales o parámetros de calibración a considerar dentro del proceso de calibración proceden en gran medida del estudio de errores sistemáticos instrumentales de la topografía clásica (Ghilani y Wolf, 2006; Chueca et al., 1996), pudiendo en el caso del láser escáner dividirse en dos grupos (Hebert y Krotkov, 1992):

- **Errores inherentes** al sistema láser escáner, provenientes de la física del propio instrumento, en concreto las limitaciones de la distanciametría láser, que no pueden ser eliminadas o reducidas, como el ruido existente en los pulsos entrantes causados por el calentamiento del fotodiodo detector y que es amplificado conjuntamente con la señal, la resolución temporal del reloj para la medida del tiempo de vuelo, las variaciones de la frecuencia nominal de oscilación de la señal, la divergencia láser...
- **Errores específicos**, tales como el sistema de medida angular, el distanciómetro láser, los errores en los ejes,...etc. Este tipo de errores puede ser eliminado o minimizado mediante el proceso de calibración.

En el caso de los errores instrumentales existen tanto componentes aleatorias como sistemáticas. Los errores sistemáticos son los más relevantes en cuanto están asociados a los diferentes componentes internos del láser terrestre limitándose la precisión de las medidas individuales.

Seguidamente se detallarán los errores instrumentales considerados:

#### Errores en la medida de distancias (range unit)

**Error del cero / offset ( $k_0$ ):** Representa la discrepancia entre la posición eléctrica y mecánica del cero en el escáner, debido al retraso causado por los cables y

demás componentes eléctricos. Las investigaciones desarrolladas hasta el momento indican que el error del cero u offset en distancia está en torno a los 5mm. En concreto los experimentos desarrollados con el escáner Mensi GS100 por (Kresten et al., 2004, 2005 y Eriksson, 2004) en una base de calibración usando tarjetas planas y esferas, arrojan un sistematismo de offset ( $k_0$ ) de +12,1mm y -3,1mm respectivamente. Los autores atribuyen esta discrepancia de valores al algoritmo de ajuste de primitivas en tarjetas y esferas. No obstante, dichos resultados sirvieron para arrojar una clara evidencia de la existencia de dicho sistematismo.

Este error también es relevante en los escáneres cuyo campo de vista acimutal sea superior a 180°, porque el sistematismo aparecerá dos veces cuando se mida una distancia entre dos puntos en direcciones opuestas, véase por ejemplo, la medición de la distancia entre dos muros con el equipo colocado en el medio de ambos

**Error de escala ( $m$ ):** Un error correspondiente a un factor de escala en la distancia medida, cuya magnitud es dependiente de la distancia de forma idéntica a los equipos topográficos. Sírvese de ejemplo (Ingensand et al., 2003) que detectaron un error de escala de 400ppm en el Leica HDS 2500, o (Santala y Joala, 2003) que calibraron el aparato Cyrax 2500 mediante un panel rotatorio acimutalmente (dotado de coordenadas mediante estaciones totales) y resolviendo una transformación Helmert 3D, cuyo factor de escala resultó en 275ppm.

Ambos errores (cero y escala) influyen en la medición de distancia láser de la siguiente forma:

$$\Delta r = k_0 + m \cdot r \quad (3.1)$$

donde  $\Delta r$  es el error en la distancia medida,  $r$ , y  $k_0$  y  $m$  son los errores de cero y escala respectivamente.

La consideración del error de escala,  $m$ , en los equipos láser escáner puede considerarse contraproducente ya que si el aparato está correctamente calibrado, este factor absorbería los efectos de otros errores angulares distorsionando la realidad. Por ello, si bien se va a considerar dicho error en el modelo general de calibración, su determinación debería valorarse de forma particularizada para cada equipo, según los requerimientos de precisión buscados.

### **Errores en la medida de ángulos (unidad de deflexión / rotación)**

Los errores en la medida de los ángulos verticales causados por la unidad de deflexión representarán la parte más diferenciable y característica de los láser escáner en comparación con los equipos topográficos. No obstante, no se debe perder de vista el error angular horizontal derivado de la unidad de rotación del láser escáner, máxime cuando los equipos empleados utilizan este movimiento acimutal para conseguir escanear el objeto o escena.

**Error de cero / offset ( $\theta_0$ ,  $\varphi_0$ ):** constante aditiva en el ángulo vertical ( $\theta$ ) u horizontal medido ( $\varphi$ ). Se corresponde con el error de eclímetro y del limbo horizontal de la estación total, respectivamente. Este error puede ser causado por una falta de alineamiento del espejo oscilatorio y el codificador o un

desplazamiento del cero dentro del convertidor analógico-digital (A/D), el cual convierte una entrada continua en una representación digital discreta.

**Error de escala** ( $\delta\theta$ ,  $\delta\varphi$ ): el cual será linealmente dependiente del ángulo vertical u horizontal medido. Su causa se puede deber a un error en el control de ganancia del convertidor A/D o a fallos en el codificador. Esta última causa puede explicarse debido a que la posición angular del espejo del escáner es resuelta por el codificador mediante incrementos fijos, de forma que el ángulo cenital es grabado como la suma de esos incrementos. Si el valor actual de dichos incrementos difiere de su valor nominal, aparece el error en escala. Análogamente, puede extrapolarse a los ángulos horizontales ya que los acimutales se obtienen con la ayuda de servomotores a partir de incrementos mecánicos de la cabeza de escaneo (que se verifica en el caso de los equipos analizados en el apéndice correspondiente).

El efecto de ambos errores en el ángulo medido ( $\Delta\theta$ ,  $\Delta\varphi$ ) pueden expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{array}{l} \theta_{\text{corr}} = \theta_{\text{scan}}(1 - \delta\theta) - \theta_0 \\ \Delta\theta = \theta_{\text{scan}} - \theta_{\text{corr}} = \theta_{\text{scan}} \cdot \delta\theta + \theta_0 \\ \varphi_{\text{corr}} = \varphi_{\text{scan}}(1 - \delta\varphi) - \varphi_0 \\ \Delta\varphi = \varphi_{\text{scan}} - \varphi_{\text{corr}} = \varphi_{\text{scan}} \cdot \delta\varphi + \varphi_0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Verticales} \\ \text{Horizontales} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Donde  $\theta_{\text{scan}}$  y  $\theta_{\text{corr}}$  son los ángulos verticales medidos por el láser y el ángulo vertical corregido respectivamente, y  $\theta_0$  y  $\delta\theta$  son los errores de cero (eclímetro) y escala vertical respectivamente. De forma análoga para los ángulos horizontales ( $\varphi$ ).

### Errores de los ejes

Previo al estudio de los errores asociados a los ejes de los láseres escáner terrestres, deberemos definir los ejes principales del instrumento (Figura 3.4):

- **Eje vertical:** para los láseres terrestres panorámicos este eje es coincidente con el eje de rotación. Habitualmente este eje está contenido en el plano vertical de escaneo, es decir, el plano en que el haz láser se mueve en la dirección vertical para escanear el objeto.
- **Eje de colimación:** asumiendo que la divergencia del haz láser tiene forma cónica, el eje de colimación se definirá como aquel que atraviese el centro del espejo de escaneo y el centro del spot láser sobre la superficie de escaneo (Neitzel, 2006). De forma más general, se asume el eje de colimación es coincidente con el haz láser.
- **Eje horizontal:** definido por el eje de rotación del espejo de escaneo y que pasa por el centro del mismo.

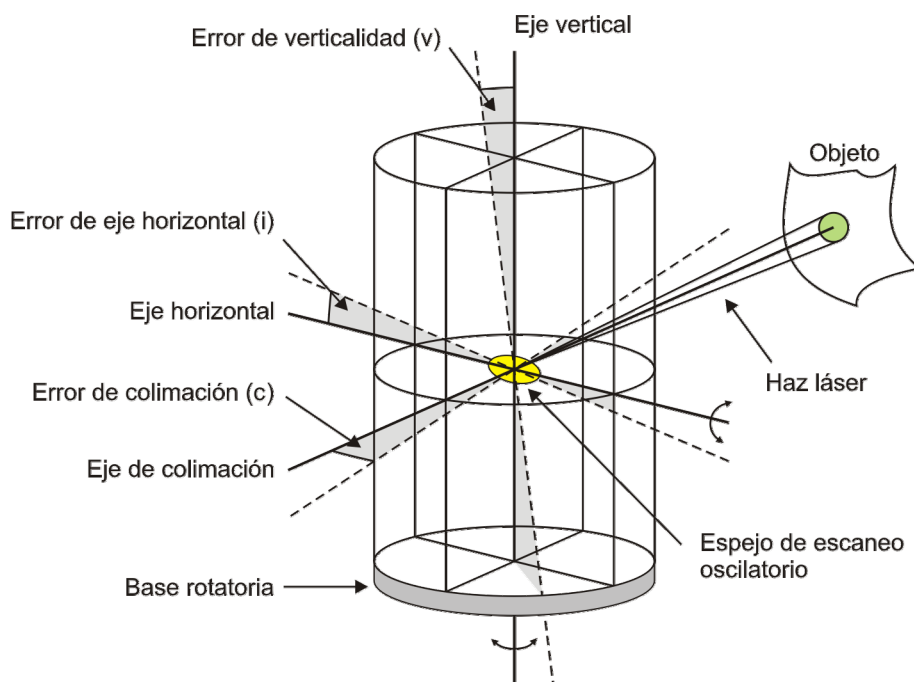
Debido al proceso de fabricación el alineamiento de los ejes sólo se puede conseguir hasta una cierta tolerancia, por lo que podrían existir desalineaciones, dando lugar a los siguientes errores:

**Error de colimación ( $c$ ):** definido como el ángulo existente entre el eje de colimación y la normal al eje horizontal, medido en el plano que contiene a ambos ejes.

**Error de eje horizontal ( $i$ ):** ángulo delimitado por el eje horizontal y la normal al eje vertical, medido en el plano que contiene a dichos ejes.

**Error de eje vertical o de verticalidad ( $v$ ):** constituido por la falta de ortogonalidad del eje vertical con la base rotatoria acimutal del láser. Este error puede derivar en el clásico error topográfico de precesión o de muñones, donde la rotación del instrumento respecto a su eje vertical no permanece fija, sino que oscila respecto a su posición promedio, habitualmente de forma sinusoidal. Las posibles causas de este error residen en las características mecánicas propias del láser escáner. Asimismo este error puede verse afectado e incluso incrementado por la inestabilidad de la base del láser escáner. En principio todos aquellos equipos que cuenten con compensador de la vertical de doble eje deberían verse exentos de este error.

Los errores anteriormente mencionados son descritos en la Figura 3.4 y particularizados posteriormente para los sistemas láser Trimble y Riegl. Se asume que el origen de coordenadas del láser escáner se encuentra en la intersección de los ejes del instrumento y coincide con el centro del espejo de escaneo.



**Figura 3.4 Diagrama de los ejes y errores asociados a los ejes de un sistema láser (modificado de Reshetyuk, 2009)**

Particularmente, en el caso del láser escáner Trimble GX (Figura 3.5) el acimut  $\varphi$  viene determinado por la posición de la plataforma giratoria que soporta el láser escáner. La elevación  $\theta$  viene dada por la intersección del espejo plano móvil.



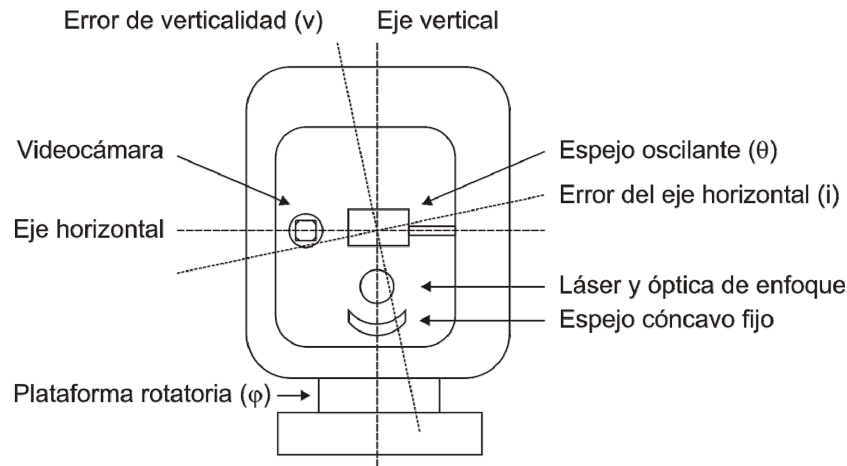


Figura 3.5 Vista frontal del escáner láser Trimble GX

El haz láser después de salir del emisor atraviesa un sistema óptico (telescopio invertido) constituido por una lente divergente y un espejo cóncavo. La posición longitudinal de la lente se puede modificar para conseguir enfocar el haz a diferentes distancias, garantizándose así que el tamaño del spot láser sea el más pequeño posible. Seguidamente el haz láser se refleja en un espejo cóncavo fijo y se dirige a un espejo plano que oscila a una frecuencia constante entre dos posiciones angulares (máximo y mínimo), permitiendo el barrido vertical del objeto.

Según las características técnicas del escáner Trimble GX, el ángulo de elevación  $\theta$  puede tomar valores en el rango de  $-20^\circ$  y  $+40^\circ$ . Sin embargo el espejo plano sólo ha de girar la mitad (de  $-10^\circ$  a  $+20^\circ$ ) en virtud del efecto de palanca óptica ilustrado en la Figura 3.6, puesto que cuando un espejo gira un ángulo  $\alpha$ , el rayo reflejado gira un ángulo  $2\alpha$ . Es fácilmente demostrable mediante la ley de reflexión, donde el ángulo entre el rayo incidente  $I$  y la normal al espejo es igual al ángulo entre el rayo reflejado  $R$  y dicha normal.  $R_1$  es el rayo reflejado antes de girar el espejo, mientras que  $R_2$  es el rayo reflejado tras girar el espejo.

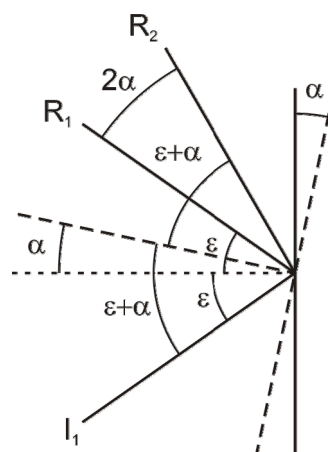


Figura 3.6 Efecto de palanca óptica

En el láser escáner Riegl LMS-390i el ángulo vertical  $\theta$  es determinado por la orientación del espejo poligonal, mientras que el ángulo acimutal  $\varphi$  es fijado por el movimiento de la cabeza rotatoria. Este equipo emplea un espejo poligonal

rotatorio (Figura 3.7, derecha), estando basado este mecanismo en un espejo poligonal cuyas caras espejadas son paralelas, equidistantes y están opuestas al eje de rotación. Las ventajas de este mecanismo es que permite altas velocidades de giro, mayor rango de ángulos cenitales y velocidades estables. Cuando el espejo poligonal rota un ángulo  $\alpha$ , el haz láser es reflejado en un ángulo cenital  $\theta$  de  $2\alpha$ .

Nótese que el eje de colimación presenta una excentricidad ( $e$ ) con respecto al equipo Trimble GX. Dicha excentricidad es tenida en cuenta por el software del equipo al realizar la conversión de coordenadas polares a tridimensionales.

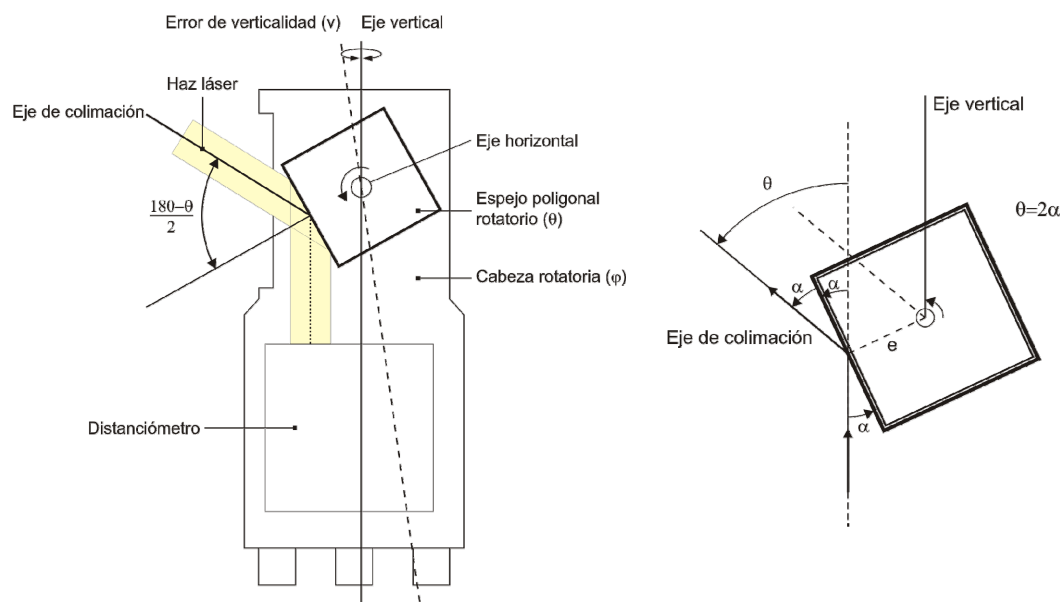


Figura 3.7 Vista lateral del Riegl LMS-390i (izquierda). Espejo poligonal rotatorio (derecha)

Además cualquier fuente de error en los espejos (poligonales u oscilantes), como las imperfecciones o su propio comportamiento, serán considerados como sistematismos dentro de los errores de cero y escala angulares.

### 3.3. Modelo de auto-calibración del láser escáner terrestre

El modelo de calibración del láser escáner terrestre expresa la relación entre los observables (distancia, ángulo horizontal y cenital) y los errores instrumentales sistemáticos. Aunque el sistema láser está basado en el mismo principio de medición polar de las estaciones sin prisma, su comportamiento no es exactamente el mismo, en tanto los láseres escáner incorporan la unidad de deflexión y una plataforma rotatoria para la medición de los ángulos verticales y horizontales respectivamente. El modelo propuesto basado inicialmente en el comportamiento de los instrumentos topográficos se adapta, en base a la experimentación y el análisis, al comportamiento de los sistemas láser escáner terrestre. Con el modelo de autocalibración se puede determinar de forma simultánea los parámetros de calibración y los parámetros de orientación externa del sistema láser respecto al sistema de referencia (datum), el cual es definido mediante un sistema de topografía de alta precisión.

### 3.3.1. Modelo funcional

El modelo funcional propuesto para la auto-calibración del sistema láser terrestre ha sido desarrollado usando 14 parámetros, 6 para los parámetros de orientación externa (tres rotaciones y tres traslaciones) y 8 para los parámetros internos (correspondientes a los parámetros adicionales de los errores sistemáticos instrumentales). De forma específica, las correcciones para los ángulos horizontales ( $\Delta\varphi_{corr}$ ) y verticales ( $\Delta\theta_{corr}$ ) se calculan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{corr} &= -\left(\varphi_0 + \frac{c}{\cos\theta_{scan}} + i \cdot \tan\theta_{scan} + \varphi_{scan} \cdot \delta\varphi\right) \\ \Delta\theta_{corr} &= -(\theta_0 + \theta_{scan} \cdot \delta\theta)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Donde  $c$ ,  $i$ ,  $\varphi_0$ ,  $\delta\varphi$ ,  $\theta_0$ ,  $\delta\theta$  son los errores correspondientes al eje de colimación, eje horizontal, error de cero y de escala de los ángulos horizontales y de los ángulos verticales respectivamente. Y  $\varphi_{scan}$  y  $\theta_{scan}$  son las medidas de los ángulos horizontales y verticales, respectivamente. Nótese que tanto el error de colimación como el error de eje horizontal aparecen en la ecuación (3.3) expresados para visuales de elevación arbitraria (Deumlich, 1982).

El punto de partida del modelo se basa en una transformación euclídea tridimensional (2.8), que contiene los elementos de orientación externa:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\quad (3.4)$$

Donde  $[X, Y, Z]^T$  y  $[x, y, z]^T$  son las coordenadas de los centros de las tarjetas de puntería en el sistema de coordenadas externo (topografía) y láser respectivamente;  $[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$  es el vector de las traslaciones;  $\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  es la matriz de rotación entre ambos sistemas de referencia, la cual es función de los ángulos de rotación ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) en torno a los ejes coordenadas  $x, y, z$  respectivamente.

Nótese como el modelo funcional (3.4) no incluye el factor de escala al tratarse de datos métricos y escalados. Algunos autores como (Gordon y Lichti, 2004) afirman que la presencia del factor de escala en el modelo podría deteriorar la solución, y por tanto sugieren sacarlo fuera. Otros en cambio, como (Balzani et al., 2001) aconsejan incluirlo en el modelo en aras de tener una comprobación en base a dicho factor. En el modelo general propuesto hemos incluido el factor de escala como un error instrumental, para permitir aplicar a posteriori restricciones al modelo (como por ejemplo  $m=1$ ).

Asimismo en este aspecto se hace necesario distinguir dos tipos de factores de escala a incluir que pueden ser fácilmente confundibles: factor de escala en distancia ( $m$ ), referido en la ecuación (3.1) y considerado en el modelo funcional propuesto; y el factor de escala propio de una transformación Helmert 3D ( $\lambda$ ) (ver

(2.13)). Como se ha descrito anteriormente, el único factor de escala considerado es el referido al observable de distancia.

El modelo de auto-calibración propuesto, al incluir los errores instrumentales, es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \begin{bmatrix} (m \cdot r_{scan} - k_0) \cdot \cos(\varphi_{scan} - (c) - (i) - \varphi_0 - \delta\varphi \cdot \varphi_{scan}) \cdot \cos(\theta_{scan} - \theta_0 - \delta\theta \cdot \theta_{scan}) \\ (m \cdot r_{scan} - k_0) \cdot \sin(\varphi_{scan} - (c) - (i) - \varphi_0 - \delta\varphi \cdot \varphi_{scan}) \cdot \cos(\theta_{scan} - \theta_0 - \delta\theta \cdot \theta_{scan}) \\ (m \cdot r_{scan} - k_0) \cdot \sin(\theta_{scan} - \theta_0 - \delta\theta \cdot \theta_{scan}) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde los  $r_{scan}$ ,  $\varphi_{scan}$  y  $\theta_{scan}$  son los observables láser: distancias, ángulos horizontales y ángulos verticales respectivamente. Y donde:

$$(c) = \frac{c}{\cos\theta_{scan}} \quad (i) = i \cdot \tan\theta_{scan} \quad (3.6)$$

El modelo funcional planteado (3.5) ha sido linealizado mediante el desarrollo en serie de Taylor y calculado en base a un ajuste de mínimos cuadrados ponderados. El modelo linealizado resultante es:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - F^0 = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \frac{\partial F^0}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial F^0}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \frac{\partial F^0}{\partial \alpha_3} \delta\alpha_3 + \frac{\partial F^0}{\partial m} \delta m + \frac{\partial F^0}{\partial k_0} \delta k_0 + \frac{\partial F^0}{\partial c} \delta c + \frac{\partial F^0}{\partial i} \delta i + \frac{\partial F^0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial F^0}{\partial (\partial \theta)} \partial(\partial \theta) + \frac{\partial F^0}{\partial \varphi_0} \delta \varphi_0 + \frac{\partial F^0}{\partial (\partial \varphi)} \partial(\partial \varphi) \quad (3.7)$$

donde,

$$F^0 = R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^0 & r_{12}^0 & r_{13}^0 \\ r_{21}^0 & r_{22}^0 & r_{23}^0 \\ r_{31}^0 & r_{32}^0 & r_{33}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \cos(\varphi_{scan} - (c)^0 - (i)^0 - \varphi_0^0 - \delta\varphi^0 \cdot \varphi_{scan}) \cdot \cos(\theta_{scan} - \theta_0^0 - \delta\theta^0 \cdot \theta_{scan}) \\ (m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \sin(\varphi_{scan} - (c)^0 - (i)^0 - \varphi_0^0 - \delta\varphi^0 \cdot \varphi_{scan}) \cdot \cos(\theta_{scan} - \theta_0^0 - \delta\theta^0 \cdot \theta_{scan}) \\ (m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \sin(\theta_{scan} - \theta_0^0 - \delta\theta^0 \cdot \theta_{scan}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Los superíndices indican que son valores aproximados de los parámetros incógnita. Por lo tanto en el proceso de auto-calibración se estimarán las correcciones a dichos valores aproximados. Los valores iniciales para los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se aproximan a cero en la iteración inicial considerando que los sistemas láser estaban bien nivelados. Asimismo, los valores aproximados para los parámetros de calibración se establecen a cero, al asumir a priori que los equipos láser parten con errores instrumentales mínimos.

Particularizando las derivadas de (3.7) para los parámetros de orientación externa, tenemos que:

$$\frac{\partial F^0}{\partial \alpha_1} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{13}^0 & -r_{12}^0 \\ 0 & -r_{23}^0 & -r_{22}^0 \\ 0 & -r_{33}^0 & -r_{32}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial \alpha_2} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_2^0 \cos \alpha_3^0 & -r_{32}^0 \cos \alpha_3^0 & -r_{33}^0 \cos \alpha_3^0 \\ \sin \alpha_2^0 \sin \alpha_3^0 & r_{32}^0 \sin \alpha_3^0 & r_{22}^0 \sin \alpha_3^0 \\ \cos \alpha_2^0 & \sin \alpha_1^0 \sin \alpha_2^0 & -\cos \alpha_1^0 \sin \alpha_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial \alpha_3} = \begin{bmatrix} r_{21}^0 & r_{22}^0 & r_{23}^0 \\ -r_{11}^0 & -r_{12}^0 & -r_{13}^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_o^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

En el caso de las derivadas correspondientes a los parámetros de los errores instrumentales:

$$\frac{\partial F^0}{\partial k_0} = -R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ \sin(\zeta_\theta) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial m} = R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} r_{\text{scan}} \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\theta \zeta_\theta) \\ r_{\text{scan}} \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ r_{\text{scan}} \cdot \sin(\zeta_\theta) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial c} = \frac{1}{\cos \theta_{\text{scan}}} \cdot R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ -(m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial i} = \tan \theta_{\text{scan}} \cdot R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ -(m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial \theta_0} = R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \sin(\zeta_\theta) \\ (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \sin(\zeta_\theta) \\ -(m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \cos(\zeta_\theta) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial \varphi_0} = R(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial(\delta\theta)} = \theta_{scan} \cdot \mathbf{R}(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \sin(\zeta_\theta) \\ (m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \sin(\zeta_\theta) \\ -(m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \cos(\zeta_\theta) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial(\delta\varphi)} = \varphi_{scan} \cdot \mathbf{R}(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) \cdot \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ -(m^0 \cdot r_{scan} - k_0^0) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

En donde, por simplificación de notación, se han empleado las variables siguientes:

$$\begin{aligned} \xi_\varphi &= \varphi_{scan} - (\mathbf{c})^0 - (\mathbf{i})^0 - \varphi_0^0 - \delta\varphi^0 \cdot \varphi_{scan} \\ \zeta_\theta &= \theta_{scan} - \theta_0^0 - \delta\theta^0 \cdot \theta_{scan} \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.3.2. Modelo estocástico

El modelo estocástico propuesto para la autocalibración del láser terrestre parte del principio base de los mínimos cuadrados, reforzado por la adición de estimadores robustos y estadísticos (ver sección 4.6).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= \min \\ \text{ó} \quad \frac{\partial(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde  $\mathbf{v}$  es el vector de residuos,  $\mathbf{P}$  es la matriz de pesos y  $\mathbf{x}$  es el vector de las incógnitas.

Para ello, este modelo toma la ley de propagación de varianzas-covarianzas como hilo conductor, de forma que la matriz de varianza-covarianza de los observables láser  $\Sigma_{ll}$  vendrá determinada por:

$$\Sigma_{ll} = \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \mathbf{J} \cdot \Sigma_{inst} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \quad (3.23)$$

donde  $\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  es la matriz de rotación entre ambos sistemas,  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de la derivadas de las coordenadas láser  $(x, y, z)$  con respecto a  $r_{scan}$ ,  $\varphi_{scan}$  y  $\theta_{scan}$ . Nótese que la matriz de rotación queda excluida de la jacobiana en la propagación de errores porque esta no depende de los observables láser. Finalmente, la matriz  $\Sigma_{inst}$  es calculada de la siguiente forma:

$$\Sigma_{inst} = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\varphi^2 + \sigma_{beam}^2, \sigma_\theta^2 + \sigma_{beam}^2) \quad (3.24)$$

Donde  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_\theta$ , son las desviaciones de los observables láser  $r_{scan}$ ,  $\varphi_{scan}$  y  $\theta_{scan}$  respectivamente, incluyendo la divergencia del haz láser  $\sigma_{beam}$  y que son proporcionados por los fabricantes. Sin embargo, estas especificaciones técnicas proporcionadas por los fabricantes se corresponden con la medición de puntos

individuales, mientras que la extracción del centro de las tarjetas de puntería se corresponde con un proceso de extracción a partir de un conjunto de puntos.

Respecto a la incertidumbre asociada al spot láser sobre el objeto, según (Lichti y Gordon, 2004) está debería calcularse como:

$$\sigma_{\text{beam}} = \pm \frac{\gamma}{4} \quad (3.25)$$

Donde  $\gamma$  es la divergencia del haz láser en radianes, y que en incluida en la ecuación (3.24), a través de  $\sigma_{\text{beam}}$ , siguiendo el modelo de propagación propuesto por (Lichti y Gordon, 2004).

Finalmente, la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  es calculada como sigue:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial r_{\text{scan}}} & \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_{\text{scan}}} & \frac{\partial x_j}{\partial \theta_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial y_j}{\partial r_{\text{scan}}} & \frac{\partial y_j}{\partial \varphi_{\text{scan}}} & \frac{\partial y_j}{\partial \theta_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial z_j}{\partial r_{\text{scan}}} & \frac{\partial z_j}{\partial \varphi_{\text{scan}}} & \frac{\partial z_j}{\partial \theta_{\text{scan}}} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

En donde empleando la notación simplificada de (3.21):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial r_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial y_j}{\partial r_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial z_j}{\partial r_{\text{scan}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^0 \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ m^0 \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ m^0 \cdot \sin(\zeta_\theta) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial \varphi_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial y_j}{\partial \varphi_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial z_j}{\partial \varphi_{\text{scan}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot (1 - \delta\varphi) \cdot \sin(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot (1 - \delta\varphi) \cdot \cos(\xi_\varphi) \cdot \cos(\zeta_\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial \theta_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial y_j}{\partial \theta_{\text{scan}}} \\ \frac{\partial z_j}{\partial \theta_{\text{scan}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \left\{ \sin(\xi_\varphi) \cdot \left( \frac{i^0 + c^0 \cdot \sin \theta_{\text{scan}}}{\cos^2 \theta_{\text{scan}}} \right) \cdot \cos(\zeta_\theta) - \cos(\xi_\varphi) \cdot (1 - \delta\theta) \cdot \sin(\zeta_\theta) \right\} \\ (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot \left\{ -\cos(\xi_\varphi) \cdot \left( \frac{i^0 + c^0 \cdot \sin \theta_{\text{scan}}}{\cos^2 \theta_{\text{scan}}} \right) \cdot \cos(\zeta_\theta) - \sin(\xi_\varphi) \cdot (1 - \delta\theta) \cdot \sin(\zeta_\theta) \right\} \\ (m^0 \cdot r_{\text{scan}} - k_0^0) \cdot (1 - \delta\theta) \cdot \cos(\zeta_\theta) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matriz varianza-covarianza de los parámetros  $\Sigma_{\mathbf{XX}}$  vendrá dada por:

$$\Sigma_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} \quad (3.30)$$

Donde  $Q_{xx}$  es la matriz cofactor de los parámetros que contiene en su diagonal las precisiones asociadas a los mismos;  $\hat{\sigma}_0^2$  es la varianza a posteriori del ajuste;  $A$  es la matriz de diseño, resultante de aplicar el desarrollo en serie de Taylor y el cálculo de derivadas parciales de la función establecida respecto a los parámetros; y  $P$  es la matriz de pesos.

Finalmente, se incluyen estimadores estadísticos y robustos (ver sección 4.6) en una doble estrategia:

- Estimador robusto de Huber (4.136) donde la matriz de pesos  $P$  es recalculada en cada iteración en función del valor del residuo ( $v_i$ ) de la iteración anterior, con el objeto de subponderar los posibles errores groseros, en función de la desviación a priori ( $\sigma$ ) y la constante de Huber ( $a$ ) fijada por el usuario.

$$p(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{para } |v_i|/\sigma \leq a \\ \frac{a}{|v_i|/\sigma} & \text{para } |v_i|/\sigma > a \end{cases} \quad (3.31)$$

- Computo de los residuos normalizados ( $w_i$ ) según el test de Pope según las ecuaciones (4.118) en una estrategia iterativa *data snopping* (Figura 4.25) para detectar los errores groseros.

$$w_i = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{q_{v_i v_i}}} > \tau_{r, \alpha_0/2} \quad (3.32)$$

Donde  $q_{v_i v_i}$  es el elemento  $i$ -ésimo de la diagonal principal de la matriz cofactor de los residuos ( $Q_{vv}$ ),  $\hat{\sigma}_0$  es la desviación estándar a posteriori,  $\tau$  es el valor del umbral de Pope según la distribución estadística Tau (4.119), y  $\alpha_0$  es el nivel de significación para el número de contrastes a realizar.

En definitiva, tras analizar el modelo funcional y estocástico, el esquema siguiente (Figura 3.8) ilustra el proceso iterativo a seguir en la autocalibración de los sistemas láser, sustentado por el modelo de Gauss-Markov.



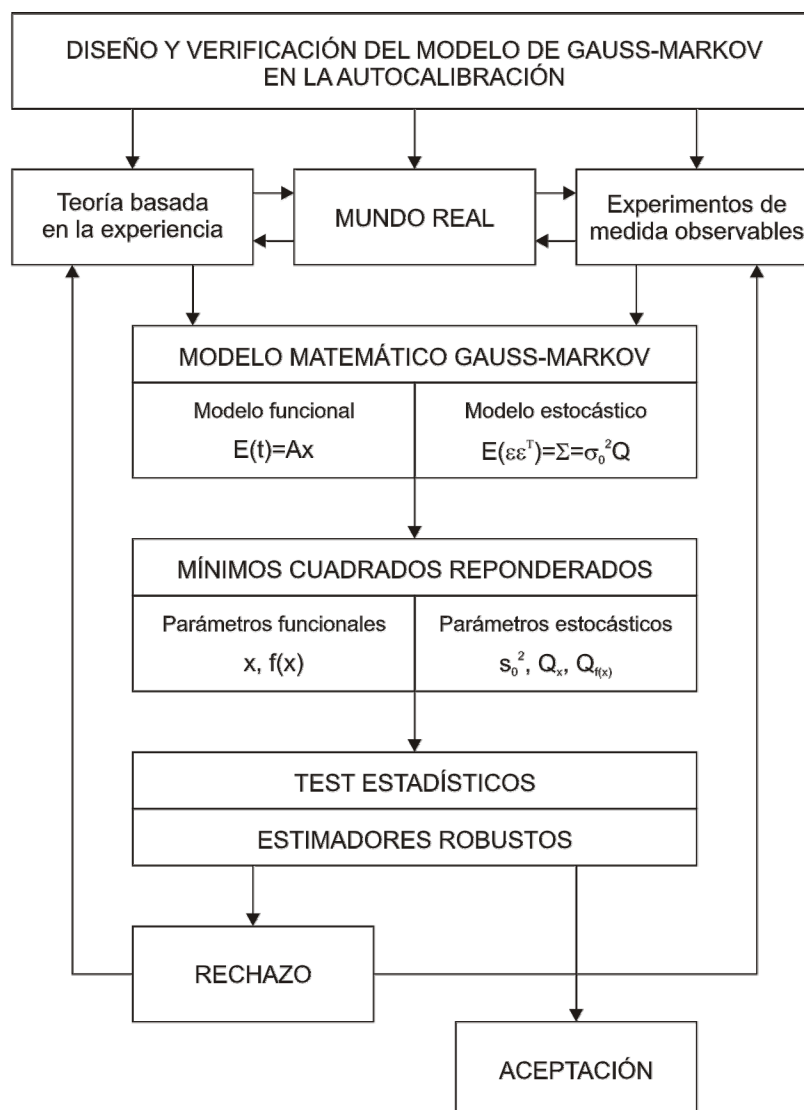


Figura 3.8 Diseño y verificación del proceso iterativo de autocalibración sustentado por el modelo matemático de Gauss-Markov

### 3.3.3. Precisión y exactitud

Para proporcionar una estimación de la precisión y exactitud de cada uno de los observables y parámetros de los sistemas láser (calibrados y sin calibrar), es necesario incorporar procedimientos estadísticos que permitan analizar la precisión de los observables (matriz de varianza-covarianza de las observaciones), así como la asociada a los parámetros (matriz de varianza-covarianza de los parámetros).

#### Estimación de la precisión de la geo-referenciación de los datos láser respecto de la verdad terreno (topografía).

Considerando que el vector con los observables láser viene definido por:

$$\bar{x}_L = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} r_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \\ r_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \\ r_i \sin \theta_i \end{bmatrix}_L \quad (3.33)$$

Y los observables topográficos según:

$$\bar{x}_T = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} r_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \\ r_i \sin \varphi_i \cos \theta_i \\ r_i \sin \theta_i \end{bmatrix}_T \quad (3.34)$$

siendo  $i$  el punto/tarjeta correspondiente. Los puntos láser serán geo-referenciados en el sistema global (datum) establecido por la topografía de alta precisión mediante la siguiente transformación:

$$\bar{x}_T = t_{LT} + R_{LT} \cdot \bar{x}_L \quad (3.35)$$

La matriz de varianza-covarianza asociada a las coordenadas  $\bar{x}_T$  es:

$$\Sigma_{\bar{x}_T} = J_p^{LT} \cdot \Sigma_p^T \cdot (J_p^{LT})^T + R_{LT} \cdot \Sigma_{\bar{x}_L} \cdot R_{LT}^T \quad (3.36)$$

Siendo la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  definida como:

$$J_p^{LT} = \frac{\partial \bar{x}_T}{\partial p_{LT}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_T}{\partial t_{x_{LT}}} & \frac{\partial X_T}{\partial t_{y_{LT}}} & \frac{\partial X_T}{\partial t_{z_{LT}}} & \frac{\partial X_T}{\partial R_{x_{LT}}} & \frac{\partial X_T}{\partial R_{y_{LT}}} & \frac{\partial X_T}{\partial R_{z_{LT}}} \\ \frac{\partial Y_T}{\partial t_{x_{LT}}} & \frac{\partial Y_T}{\partial t_{y_{LT}}} & \frac{\partial Y_T}{\partial t_{z_{LT}}} & \frac{\partial Y_T}{\partial R_{x_{LT}}} & \frac{\partial Y_T}{\partial R_{y_{LT}}} & \frac{\partial Y_T}{\partial R_{z_{LT}}} \\ \frac{\partial Z_T}{\partial t_{x_{LT}}} & \frac{\partial Z_T}{\partial t_{y_{LT}}} & \frac{\partial Z_T}{\partial t_{z_{LT}}} & \frac{\partial Z_T}{\partial R_{x_{LT}}} & \frac{\partial Z_T}{\partial R_{y_{LT}}} & \frac{\partial Z_T}{\partial R_{z_{LT}}} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Donde  $\Sigma_p^T$  es la matriz varianza-covarianza de los parámetros de transformación  $p_{LT}$  entre ambos sistemas láser y topográfico.

$$p_{LT} = [t_{LT} \quad R_{LT}] \quad (3.38)$$

Por tanto la estimación de la precisión de las coordenadas láser transformadas dependerá directamente de la precisión de los parámetros de transformación entre ambos sistemas (geo-referenciación), los cuales son además dependientes de la geometría de los puntos de control utilizados para la geo-referenciación.

### Estimación de la precisión de las coordenadas.

La precisión de los parámetros de la transformación sólido-rígida y los residuos de la auto-calibración darán una buena indicación de la precisión del escáner. Además, los residuos de la auto-calibración a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas calculadas como residuos 3D se determinarán como sigue:

$$\varepsilon_{3D} = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2} \quad (3.39)$$

Donde  $\varepsilon_X$ ,  $\varepsilon_Y$ ,  $\varepsilon_Z$  son los residuos a lo largo de los diferentes ejes de coordenadas. El valor  $\varepsilon_{3D}$  da una buena idea acerca de la precisión en coordenadas 3D de un sistema láser en particular.

### Estimación de la exactitud en ángulos y distancias en base a un análisis dimensional de invariantes.

Se plantea la extracción de invariantes espaciales (ángulos y distancias) entre las tarjetas de puntería que conforman el campo de calibración. Para ello se plantea un análisis dimensional de invariantes geométricos en forma de distancias y ángulos a partir de combinaciones de triadas de tarjetas (triángulos) que sirva como base para establecer comparaciones entre ambos sistemas láser con independencia del sistema de referencia utilizado. La determinación de invariantes espaciales correspondientes a cada triada de tarjetas: dos distancias y un ángulo, viene determinados por:

$$L_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \quad (3.40)$$

Donde  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$ ,  $z_{i,j}$  son las coordenadas láser del centro de cada tarjeta y  $L$  es la distancia espacial que queremos calcular.

Con relación a las medidas angulares, para un triángulo en el plano euclídeo con bordes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son las distancia calculadas anteriormente y  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  los ángulos opuestos a dichas distancias.

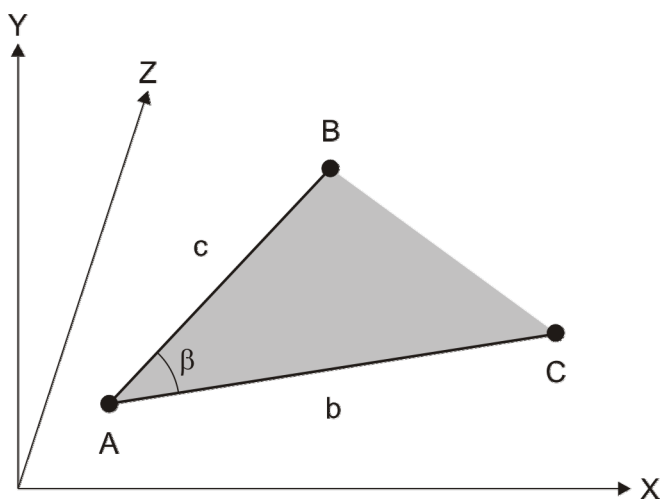


Figura 3.9 Esquema de búsqueda: ángulo espacial  $\beta$  y las distancias  $b$ ,  $c$  para el punto  $A$ .

Inicialmente dicho análisis dimensional será aplicado sobre aquellas tarjetas contenidas en un mismo plano. Posteriormente, el análisis dimensional de invariantes se extenderá a tarjetas contenidas en planos diferentes.

Asimismo, dado el elevado número de combinaciones y para eliminar la influencia de observaciones groseras que puedan distorsionar el valor final de exactitud se aplica de forma iterativa el test de Pope (4.118).

### 3.4. Calibración geométrica de la cámara

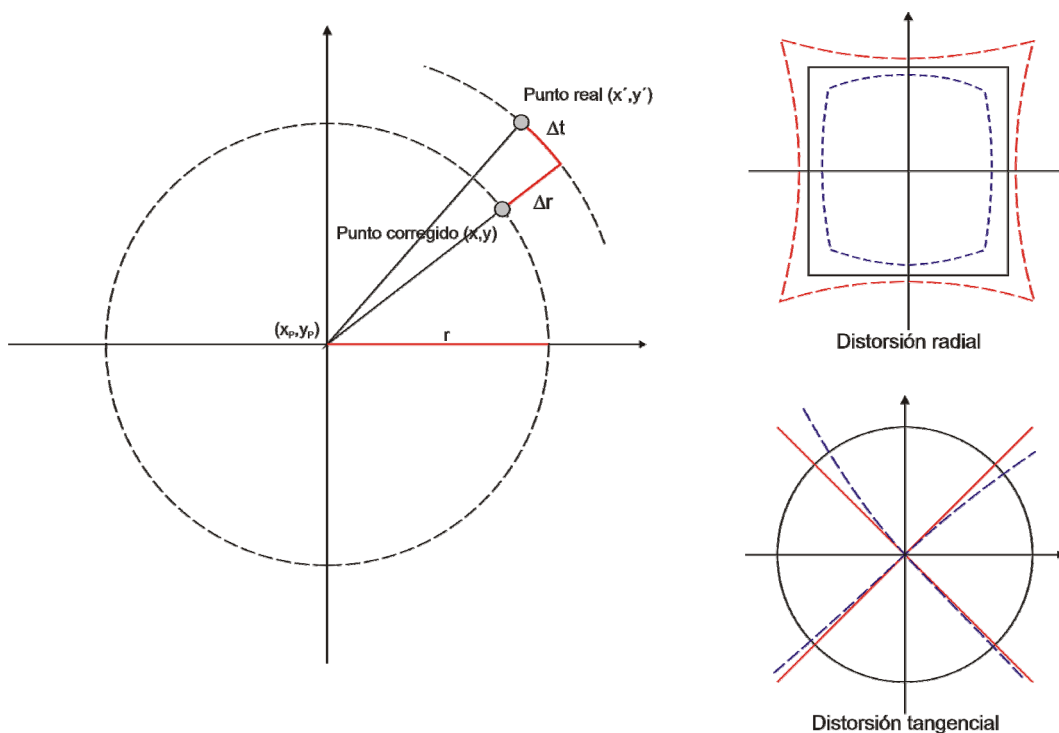
El propósito de la calibración de la cámara dentro del contexto de la metrología fotogramétrica es el determinar el modelo geométrico que de cuenta de los parámetros internos de la cámara, de forma que podamos transformar la escena en imagen. Como resultado de dicha calibración, la cámara real es idealizada o simplificada para poder expresar un comportamiento mediante expresiones matemáticas.

En general, la calibración de la cámara se asume como conocida y constante para el caso de las cámaras métricas, mientras que para el caso de las cámaras convencionales (no métricas) esta calibración además de ser desconocida podrá variar en el tiempo.

Un requisito importante en el contexto de registro de sensores es maximizar la cantidad de sensores compatibles, por ello en el caso de las cámaras digitales ha de ser posible abrirlo al empleo de las cámaras digitales convencionales (no métricas), de forma que a partir de cámaras de bajo coste de las que no se cuenta con certificado de calibración se puedan determinar sus parámetros internos.

La calidad de la calibración geométrica viene determinada por la estabilidad y precisión con que se pueden determinar una serie de constantes de la cámara. Estos parámetros, que definen la orientación interna de la cámara, son de dos tipos:

- **Geométricos:** son las constantes que determinan la geometría de la cámara, es decir, que establecen la posición del punto de vista respecto del plano de la imagen. Estas constantes establecen el funcionamiento ideal de la cámara y son las que permiten aplicar modelos matemáticos ideales (funcionales) para procesar los datos obtenidos. La posición del punto de vista respecto del plano de la imagen se concreta en la determinación de tres parámetros:  $(x_p, y_p)$  coordenadas (en el sistema de referencia en el que se esté midiendo) del punto principal y distancia principal / focal ( $f$ ).
- **Físicos:** son las constantes que expresan el rendimiento real de la cámara respecto de su rendimiento ideal y representan las desviaciones de la imagen respecto de su principio de proyección central (*pinhole camera*). En el caso de una cámara digital convencional, este rendimiento geométrico real se concreta en la determinación de dos componentes diferenciadas:
  - **Distorsión radial:** es debida al incorrecto pulido de las lentes, y causa el desplazamiento de los puntos de la imagen radialmente desde el centro.
  - **Distorsión tangencial:** desplaza los puntos perpendicularmente a la línea radial, debido a la falta de alineación entre los componentes ópticos.



**Figura 3.10 Componentes radial y tangencial de la distorsión de una lente**

No obstante, la calibración geométrica no es en sí un proceso sencillo, ya que el tratamiento de los parámetros físicos implicados varía según dos puntos de vista (Sánchez, 2004):

- La falta de una notación estandarizada que facilite la interpretación de los sistemas de coordenadas en las diferentes técnicas de calibración.
- La dificultad para evaluar la precisión de la técnica utilizada, recurriendo a métodos empíricos de distinta índole.

Por ello, seguidamente se analizarán varios métodos de calibración geométrica, junto con diferentes modelos de distorsión, con especial detalle en la distorsión radial, la cual constituye la mayor fuente de error en las imágenes.

### 3.4.1. Concepto de distorsión radial

Tradicionalmente según diversos autores (Bonneval, 1972), (Wolf y Dewitt, 2000), (Ghosh, 1979), (Moffit and Mikhail 1980); (Mikhail et al., 2000) y (Kraus, 1997) la distorsión radial se ha definido como la desviación que experimentan los rayos ópticos al atravesar la lente.

Esta definición se deriva de la necesidad de ajustar el modelo de una lente a un modelo proyectivo perfecto en el que el centro de proyección está perfectamente definido (*pinhole camera*) o, en su defecto, en el que la posición del punto nodal imagen del sistema óptico se supone definida y determinable.

Así, la distorsión radial es definida como la separación (a lo largo de los radios del plano de la imagen) entre la imagen de hecho ( $r'$ ) y la imagen ideal ( $r$ ), quedando

determinada esta posición ideal por el valor de la distancia principal y el ángulo de incidencia del rayo.

$$\Delta r = r' - r = r' - f \cdot \tan \alpha \tag{3.42}$$

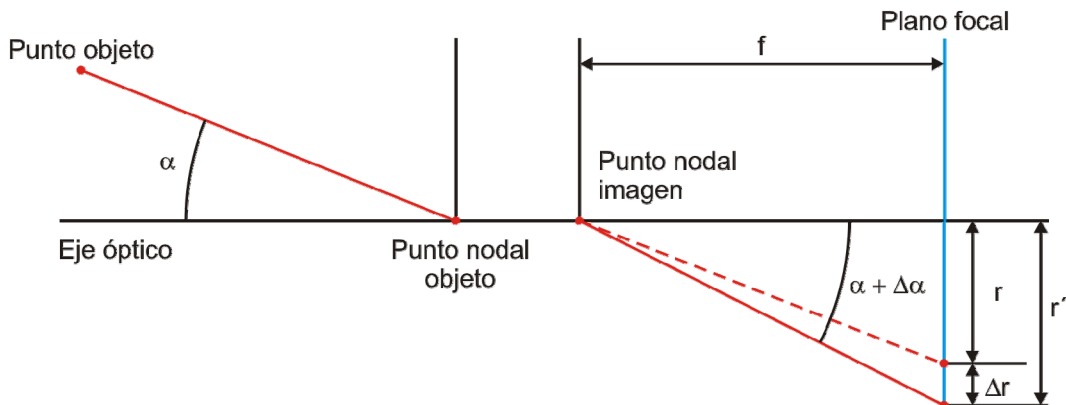


Figura 3.11 Descripción clásica del modelo de distorsión radial (tomado de González-Aguilera et al., 2011a)

En cualquier caso, esta formulación implica un concepto de distancia principal inamovible, perfectamente definido y determinable. Esta idea coincide con la gran importancia operativa concedida a la focal en todo el proceso fotogramétrico: desde los modelos matemáticos (condición de colinealidad, condición de coplanariedad) a la ejecución de las tareas operativas de manejo de un restituidor pasando por la planificación de cualquier proyecto de levantamiento. Si hay un parámetro básico en fotogrametría, ese es la distancia principal. El caso es que mientras que los ángulos de incidencia objeto ( $\alpha$ ), así como las distancias radiales de los puntos de la imagen ( $r'$ ) pueden ser medidos físicamente, la distancia principal  $f$  no puede medirse directamente.

Otra manera de expresar la distorsión radial es la empleada por autores como (Albertz y Kreiling 1989), (Kraus, 1997) y (Burnside, 1985) que establecen el concepto de distorsión radial como el efecto de la variación de la distancia principal  $f$  sobre el plano de la imagen. En este caso, se evita el considerar que la distancia principal es inamovible y se enfatiza la selección previa de la distancia principal que es una consecuencia directa de la diferente distribución de la distorsión radial. Como resultado, la distorsión radial de la lente se expresa como función de variaciones de la longitud focal en lugar de como variaciones en los ángulos de salida de los rayos ópticos por detrás del punto nodal (Figura 3.12). Por tanto el radio empírico  $r'$  se expresa como:

$$r' = (f + \Delta f) \cdot \tan \alpha \tag{3.43}$$

Con  $\Delta f$  directamente relacionado con  $\alpha$  en vez de  $\Delta \alpha$  en función de  $\alpha$ .

$$r' = f \cdot \tan(\alpha + \Delta \alpha) \tag{3.44}$$

De esta manera, aunque existiera un punto nodal físico de la lente, no tiene demasiado sentido la determinación del mismo, pues cualquier valor de la distancia principal elegido es bueno siempre que se tenga en cuenta que la discrepancia  $\Delta f$  (que la distancia principal elegida  $f'$  tiene respecto de la distancia

focal ideal  $f$ ), que no generaría distorsión radial alguna trae como consecuencia una determinada distribución de la distorsión radial ( $\Delta r$ ) a partir de la posición radial ideal  $r$ , libre de distorsión radial

$$\frac{r}{f} = \frac{r'}{f'}; \Delta r = \Delta f \cdot \frac{r}{f} \tag{3.45}$$

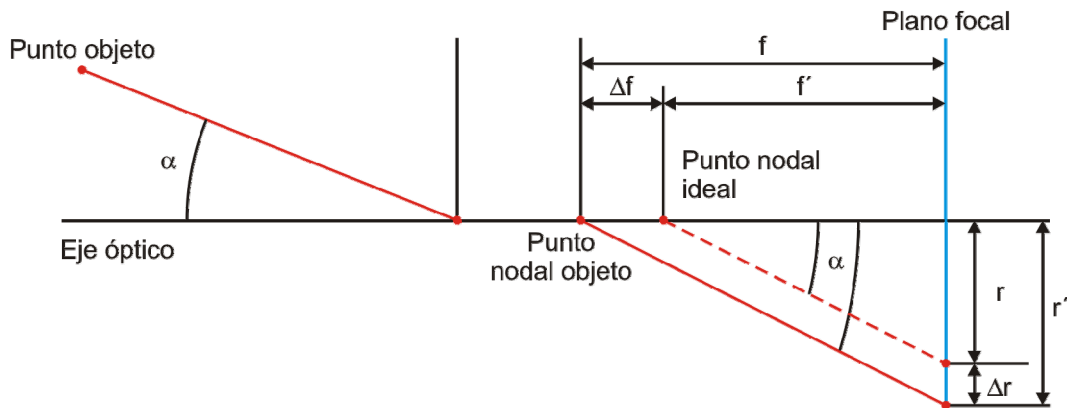


Figura 3.12 Concepto de distorsión radial basado en la variación de la distancia principal (tomado de González-Aguilera et al., 2011a)

En otras palabras, no es necesario utilizar el concepto de una distancia principal ideal, pero sirve para conocer las diversas distribuciones de la distorsión radial ( $F_1(\Delta r)$ ,  $F_2(\Delta r)$ , ...  $F_i(\Delta r)$ ) asociadas con el uso de varias distancias focales correspondientes ( $F_1, F_2, \dots, f_i$ ) (Figura 3.13),

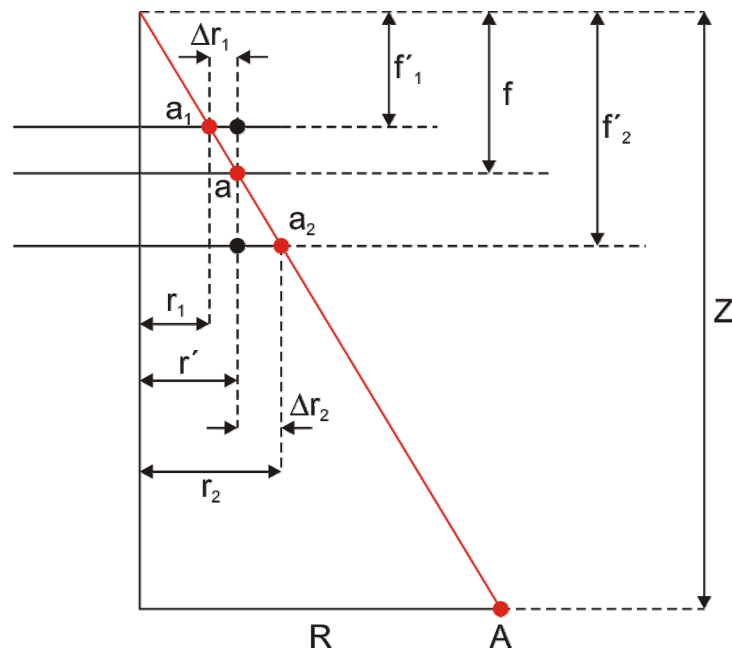


Figura 3.13 Distribución de múltiples distorsiones radiales asociadas a diferentes focales (tomado de González-Aguilera et al., 2011a)

Supongamos un punto  $a$  en la imagen para el que se verifica que no hay distorsión radial. Para este punto podemos plantear la condición de colinealidad que, en este caso simplificado puede plantearse como:  $r/f = R/Z$ , siendo  $f$  la focal ideal (sin

distorsión radial),  $r$  el radio ideal,  $R$  el radio objeto correspondiente y  $Z$  la altura del punto de vista sobre el objeto.

Si en lugar de esta focal ideal empleamos una focal  $f_1'$ , más corta, tendremos el mismo radio empírico  $r'$ , pero una nueva posición  $a_1$  teórica y, por tanto, una distorsión radial  $\Delta r_1 = r' - r_1$ , positiva en este caso. De forma correspondiente, si empleamos una focal  $f_2'$ , más larga, tendremos, de nuevo, el mismo radio empírico  $r'$ , y otra posición teórica  $a_2$  y, por tanto, una distorsión radial  $\Delta r_2 = r' - r_2$ , que ahora es negativa.

En cualquier caso, para cada uno de los puntos teóricos se verifica la condición de colinealidad:  $r/f = r_1 / f_1' = r_2 / f_2' = R/Z$  y puesto que  $r_1 = r' - \Delta r_1$ ,  $r_2 = r' - \Delta r_2$ , tenemos:

$$\frac{r' - \Delta r_1}{f_1} = \frac{r' - \Delta r_2}{f_2} = \frac{r}{f} = \frac{R}{Z} \quad (3.46)$$

### Método de calibración

Los métodos de calibración en laboratorio consideran un sistema espacial compuesto por el plano de la imagen y una lente con su centro perspectivo. Los parámetros geométricos de la orientación interior de la cámara definen la posición espacial del centro perspectivo, distancia principal ( $f$ ) y punto principal ( $x_p, y_p$ ). Estos abarcan también las desviaciones del principio de proyección central para incluir las distorsiones radiales y tangenciales

Más concretamente, cada método de calibración requiere un protocolo de toma de datos y procesado específico. Un punto común es la toma de datos, que se basa en obtener una serie de fotografías convergentes de una malla compuesta por patrones y de dimensiones conocidas, variando la cantidad de fotografías necesarias, su disposición o el tipo de patrón empleado (círculos, triángulos, malla cuadradas,...etc). La etapa de procesado se puede resumir en la extracción de los puntos de interés de las mallas, su correspondencia (*matching*) en las imágenes, el cálculo de la intersección inversa (resección espacial) de las imágenes y finalmente la estimación de los parámetros internos de la cámara según el modelo matemático de calibración elegido. Si bien dichos modelos varían según el método, todos toman como base la condición de colinealidad (3.47) que permite relacionar los puntos imagen con los puntos objetos y determinar de forma simultánea los parámetros de calibración.

El modelo geométrico de la condición de colinealidad constata que un punto imagen ( $x', y'$ ) queda relacionado con su correspondiente punto objeto ( $X, Y, Z$ ), a través del punto de vista ( $X_s, Y_s, Z_s$ ),

$$\begin{bmatrix} x' - x_p \\ y' - y_p \\ -f \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} X - X_s \\ Y - Y_s \\ Z - Z_s \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

donde ( $x_p, y_p$ ) son las coordenadas del punto principal,  $f$  es la focal o distancia principal de la cámara y  $\mathbf{R}$  es la matriz de rotación. Para evitar el factor de escala  $\lambda$ , esta relación en tres ecuaciones suele escribirse en dos (dividiendo la primera y la segunda por la tercera):



$$\begin{bmatrix} x' - x_p \\ y' - y_p \end{bmatrix} = -f \cdot \begin{bmatrix} U/W \\ V/W \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X - X_s \\ Y - Y_s \\ Z - Z_s \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Obteniéndose la expresión final de la colinealidad la cual se somete a un proceso de ajuste iterativo mediante mínimos cuadrados.

$$\begin{aligned} x' - x_p + \Delta x &= -f \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_s) + r_{12} \cdot (Y - Y_s) + r_{13} \cdot (Z - Z_s)}{r_{31} \cdot (X - X_s) + r_{32} \cdot (Y - Y_s) + r_{33} \cdot (Z - Z_s)} \\ y' - y_p + \Delta y &= -f \cdot \frac{r_{21} \cdot (X - X_s) + r_{22} \cdot (Y - Y_s) + r_{23} \cdot (Z - Z_s)}{r_{31} \cdot (X - X_s) + r_{32} \cdot (Y - Y_s) + r_{33} \cdot (Z - Z_s)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde  $r_{ij}$  son los elementos de la matriz de rotación, función de tres ángulos elementales,  $\omega, \phi, \chi$  que dan cuenta de la diferente orientación de los dos sistemas cartesianos implicados. En la ecuación final (3.49) se incorporan los elementos  $(\Delta x, \Delta y)$  que engloban a las componentes por coordenadas de las distorsión radial  $(\Delta r)$  y tangencial  $(\Delta t)$  de la cámara.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta r_x + \Delta t_x \\ \Delta y &= \Delta r_y + \Delta t_y \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.4.2. Modelos de distorsión

Como se comentó anteriormente cada método de calibración emplea su propio modelo de distorsión. Particularmente, la formulación anterior se complica con el hecho de que no existe un modelo único que dé cuenta de la distribución de la distorsión radial. En este sentido, nos encontraremos con dos modelos básicos de distorsión radial, los cuales podrán presentar ligeras modificaciones dependiendo de las series polinomiales empleadas y del número de parámetros de distorsión. En cualquier caso, para la mayoría de las lentes, dichas series pueden ser truncadas después del segundo o tercer término sin una pérdida de precisión significativa (Luhmann, 2006).

**Modelo de distorsión radial Gaussiano** desarrollado por Brown (Brown, 1971) en base a los conceptos introducidos por (Conrady, 1919) y que representa el concepto de distorsión radial en bruto, sin introducir ninguna restricción que dé cuenta de la dependencia de la focal en la formulación.

$$\Delta r = k_1 r'^3 + k_2 r'^5 + k_3 r'^7 \quad (3.51)$$

Recordando que  $r'$  es la distancia radial medida sobre la imagen,  $\Delta r$  es la distorsión radial y  $k_i$  son los coeficientes que permiten modelar dicha distorsión.

**Modelo de distorsión radial Balanceado** que incorpora la restricción de la dependencia de la distancia principal o focal, obligando a la distorsión a anularse en un determinado punto. Particularmente, los parámetros de distorsión definidos en (3.51) presentan una correlación numérica con la distancia principal. De cara a evitar estas correlaciones una parte lineal de la función de distorsión es separada

(3.52). Esto es equivalente a una rotación de la curva de distorsión en la dirección del eje  $r$ , y por tanto producir un segundo cruce por cero (ver Figura 3.14).

$$\Delta r = a_0 r' + a_1 r'^3 + a_2 r'^5 + a_3 r'^7 \tag{3.52}$$

Donde  $a_i$  son los coeficientes polinómicos de distorsión. Este es el modelo de distorsión radial balanceado propuesto por la **USGS - United States Geological Survey** (Light, 1992) que incorpora la restricción mediante la introducción de la distorsión radial como función del radio de una recta de pendiente  $a_0$  a la que se van a referir los valores de la distorsión radial (ver Figura 3.14).

Alternativamente, un polinomio equivalente a la ecuación (3.52) del siguiente tipo es propuesto por la **ISPRS** (Sánchez, 2004):

$$\Delta r = a_1 r'(r'^2 - r_0^2) + a_2 r'(r'^4 - r_0^4) + a_3 r'(r'^6 - r_0^6) \tag{3.53}$$

que incorpora como restricción la introducción de un radio  $r_0$  en el que se obliga a la distorsión radial a anularse (ver Figura 3.14). Mediante una reordenación sencilla de la ecuación (3.53) puede verse como la siguiente ecuación (3.54) depara el mismo efecto:

$$\Delta r = a_1 r'^3 + a_2 r'^5 + a_3 r'^7 - r'(a_1 r_0^2 + a_2 r_0^4 + a_3 r_0^6) \tag{3.54}$$

Nótese como el término entre paréntesis de la ecuación (3.54) es una constante análoga a  $a_0$ . Sin embargo,  $r_0$  no puede ser fijado de forma arbitraria ya que existe una dependencia sobre los parámetros  $a_1, a_2, a_3$ . En la práctica  $r_0$  debería ser elegido de forma que los valores mínimos y máximos de distorsión radial sean más o menos iguales con respecto al formato completo de la imagen (distorsión radial balanceada, Fryer, 1996). Habitualmente,  $r_0$  es elegido como 2/3 del radio máximo de la imagen (Luhmman et al, 2006). En ocasiones para las cámaras aéreas de gran formato, también se depara una tabla que presenta los valores de distorsión radial para distintos valores de  $r_0$  de forma que permita una interpolación en caso de ser requerida.

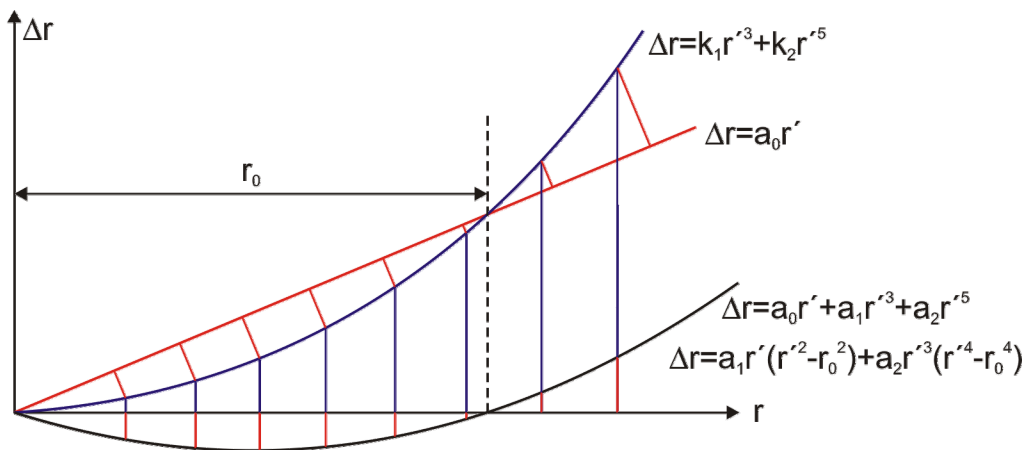


Figura 3.14 Representación gráfica de los diferentes modelos de distorsión radial (tomado de González-Aguilera et al., 2011a).

En la Figura 3.14 podemos ver cómo la recta  $a_0 r'$  sirve para pasar de la representación  $\Delta r = k_1 r^3 + k_2 r^5$  (modelo Gaussiano) a la representación  $\Delta r = a_0 r' + a_1 r'^3 + a_2 r'^5$  (modelo Balanceado). La pendiente  $a_0$  puede ser elegida de manera

que la representación se ajuste a algún requisito. Este requisito puede ser el de conseguir un radio  $r_0$  para el que  $\Delta r = 0$ . De esta manera se tiene que  $a_0 = -a_1 r_0^2 - a_2 r_0^4$  y, por tanto, sustituyendo en la ecuación (3.52) del modelo balanceado de la USGS tenemos:

$$\Delta r = -(a_1 r_0^2 + a_2 r_0^4) r' + a_1 r'^3 + a_2 r'^5 = a_1 r' (r'^2 - r_0^2) + a_2 r' (r'^4 - r_0^4) \quad (3.55)$$

el modelo balanceado propuesto por la ISPRS.

Partiendo de la consideración de que tanto el modelo Gaussiano ( $\Delta r_g$ ) como el Balanceado ( $\Delta r_b$ ) son modelos polinomiales que dependen de la distancia principal o focal, la cual a su vez es desconocida, podremos relacionar los diferentes modelos de distorsión radial asociados al empleo de diferentes distancias principales o focales. Suponiendo una  $f_g$  (focal de la representación Gaussiana) para la que  $\Delta r_g = k_1 r'^3 + k_2 r'^5$  y una  $f_b$  (focal de la representación balanceada) para la que  $\Delta r_b = a_0 r' + a_1 r'^3 + a_2 r'^5$  tendremos que:

$$\frac{r' - \Delta r_g}{f_g} = \frac{r' - k_1 r'^3 - k_2 r'^5}{f_g} \quad (3.56)$$

$$\frac{r' - \Delta r_b}{f_b} = \frac{(1-a_0)r' - a_1 r'^3 - a_2 r'^5}{f_b} = \frac{r' - \frac{a_1 r'^3}{(1-a_0)} - \frac{a_2 r'^5}{(1-a_0)}}{(1-a_0)f_b} \quad (3.57)$$

Y por tanto, estableciendo la igualdad entre las dos ecuaciones anteriores:

$$\frac{f_b(1-a_0)}{f_g} = \frac{r' - \frac{a_1 r'^3}{(1-a_0)} - \frac{a_2 r'^5}{(1-a_0)}}{r' - k_1 r'^3 - k_2 r'^5} \quad (3.58)$$

con lo que el paso del modelo de distorsión gaussiano al modelo de distorsión balanceado y viceversa puede establecerse como:

$$\begin{aligned} f_b &= \frac{f_g}{(1-a_0)} & f_g &= f_b(1-a_0) \\ a_0 &= -k_1 r_0^2 - k_2 r_0^4 \\ a_1 &= k_1(1-a_0) & k_1 &= \frac{a_1}{(1-a_0)} \\ a_2 &= k_2(1-a_0) & k_2 &= \frac{a_2}{(1-a_0)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Por último, la **distorsión radial asimétrica** también denominada **tangencial o distorsión de descentrado** se debe a la excentricidad de los múltiples sistemas ópticos. Esta tiene una dirección normal al radio de la imagen y presenta valores más pequeños (del orden de 1/10) que la distorsión radial, con lo que sólo en los proyectos fotogramétricos de gran precisión, es modelizada. Puede ser compensada mediante la siguiente función (Brown, 1971):

$$\begin{aligned}\Delta t_x &= P_1 \left( r'^2 + 2(x' - x_p)^2 \right) + 2P_2 (x' - x_p)(y' - y_p) \\ \Delta t_y &= P_2 \left( r'^2 + 2(y' - y_p)^2 \right) + 2P_1 (x' - x_p)(y' - y_p)\end{aligned}\tag{3.60}$$

donde  $P_1$  y  $P_2$  son los coeficientes que modelizan la distorsión tangencial.

Los datos de calibración son susceptibles a su variación en el tiempo, siendo por ello generalmente recomendado que se realice el proceso de calibración cada vez que se use la cámara (Sánchez, 2004) debido a la falta de estabilidad del sistema objetivo y por lo tanto de la focal. Por esta razón, es necesario establecer un periodo o intervalo de calibración según el tipo de cámara empleada: réflex o convencional, focal fija o zoom, etc... para evitar variaciones significativas en los parámetros.

Según el estudio realizado por Sanz (2009) en su Tesis Doctoral acerca de la estabilidad geométrica en las cámaras convencionales, las causas principales de inestabilidad son debidas a los siguientes factores:

- Apagado / Encendido: esta acción implica el accionamiento de motores, causando variación de los parámetros internos. En el caso de las cámaras réflex esta problemática no existe, quedando sustituida por la variación de parámetros al cambiar el objetivo.
- Diseño: existen cámaras en las que se permite al sensor desplazamientos respecto al cuerpo para protegerlo frente a impactos externos. Asimismo, otras cámaras están dotadas con estabilizadores ópticos, tales que el sensor se desplaza para compensar las trepidaciones o vibraciones.
- Zoom: la utilización de zoom implica una modificación directa de la focal, pero la causa de inestabilidad radica en el empleo de los motores, ya que un accionamiento que no sea totalmente preciso dará lugar a que la vuelta a la longitud focal de partida no se corresponda con la inicial.
- Enfoque: dado que el movimiento de enfoque (ya sea manual o automático) requiere del desplazamiento de al menos uno de los elementos ópticos para hacer coincidir el plano de la imagen con el plano del sensor, se produce una variación en la longitud focal, aunque su magnitud es bastante inferior al uso del zoom.
- Apertura del diafragma: la regulación del diafragma de la cámara conlleva el desplazamiento del plano de mayor nitidez, obligando de esta manera al desplazamiento de las lentes de enfoque para formar la imagen nítida en el plano del sensor y variándose la longitud focal final.

### 3.4.3. Estimación automática de la distorsión radial

La determinación práctica de la distorsión radial mediante las herramientas existentes en la actualidad (ver 3.4.4) requiere la interacción del usuario durante el proceso. Esta limitación está aceptada dentro del campo de la fotogrametría, pero si se enmarca dentro de un proceso de registro de sensores que aspira a la

automatización, dicha intervención del usuario no es aceptable. Por ello, es necesario disponer de un proceso automatizado, y por ello se utilizará el desarrollo propuesto por (González-Aguilera et al., 2011a) basado en restricciones geométricas, concretamente en las restricciones de la condición de colinealidad, incorporado en el programa *sv3Dvision*.

Esta aproximación será testada conjuntamente con otras herramientas existentes de determinación de la distorsión radial en la sección 6.2 para asegurar su validez dentro del flujo de trabajo del proceso de registro de sensores.

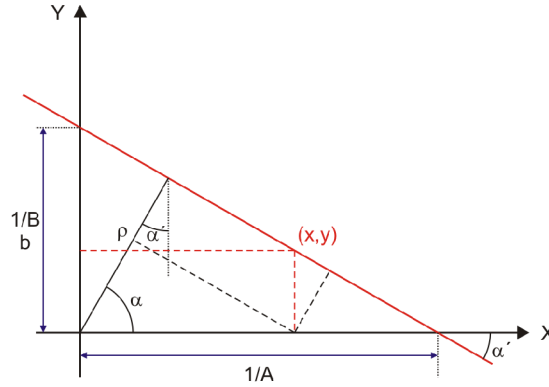
Antes de exponer la fundamentación del método automático, es necesario hacer una breve pero concisa discusión sobre el estado del arte en la determinación de la distorsión radial mediante restricciones geométricas, que ha sido objeto de estudio para muchos investigadores: (Heuvel, 1999) ya usó las restricciones de paralelismo establecidas entre los vectores normales de los planos de interpretación<sup>11</sup> de líneas 3D para estimar el coeficiente  $k_1$  de la distorsión radial; (Bräuer-Burchardt y Voss, 2000) estiman los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  junto con los puntos de fuga en un proceso iterativo; (Becker y Bove, 1995) estiman la distorsión radial y tangencial minimizando la dispersión de los puntos de fuga en la esfera gaussiana. Hay que hacer un inciso para indicar que el método de la esfera gaussiana consiste en una esfera centrada en el punto de vista, donde los planos de interpretación correspondientes a líneas convergentes en la imagen generarán círculos máximos, cuya intersección determinarán la dirección de un punto de fuga. Otros autores han tratado este problema mediante la técnica de la plomada (Brown, 1971), (Devernay y Faugeras, 2001), (Thormaehlen et al., 2003) basado el hecho de que una línea recta debe mantenerse recta en la imagen.

El modelo automatizado propuesto por (González-Aguilera et al., 2011a) estaba basado en el modelo gaussiano de la distorsión radial (3.51), pero no incluye la distorsión tangencial porque su magnitud es significativamente bajo en comparación con la radial. Asimismo, asume que el punto principal de la imagen es el punto principal de mejor simetría (alrededor del cual la distorsión radial es simétrica). Basado en la hipótesis de que el modelo de proyección central (sección 2.4) está libre de la presencia de distorsión radial y por tanto, cualquier elemento rectilíneo verifica la condición de colinealidad para todos aquellos puntos pertenecientes a él, se establece un modelo funcional que explota esta restricción para mini-segmentos extraídos automáticamente a partir de una imagen. Ergo, los parámetros de la distorsión radial ( $k_1$ ,  $k_2$ ) pueden ser estimados a partir del incumplimiento de la hipótesis de partida, como desviación respecto a la condición de colinealidad ideal.

La extracción automática de segmentos es un proceso automatizado basado en el algoritmo de detección de bordes de Canny (Canny, 1986) y su posterior segmentación mediante el algoritmo de Burns (Burns et al., 1986).

---

<sup>11</sup> Se denomina plano de interpretación a aquel plano formado por cualquier segmento recto y el punto de vista.



**Figura 3.15 Representación de la ecuación de la recta en su forma polar (tomado de González-Aguilera et al., 2011a)**

Según el gráfico de la Figura 3.15, una línea recta se define geoméricamente por su distancia al origen ( $\rho$ ) y el ángulo que forma dicha distancia con uno de los ejes cartesianos ( $\alpha$ ), en nuestro caso el X, según  $\rho = x \cos \alpha$  ó  $\rho = y \sin \alpha$ . De esta manera la expresión lineal de una línea puede venir expresada por su expresión simplificada (o punto-pendiente) tal que  $y = ax + b$ , estando definida por los valores ( $a, l, b$ ); coeficientes de las variables del plano ( $x, y$ ) y el término independiente respectivamente. Otra forma ecuacional que representa la ecuación de una recta es la denominada forma normal:  $Ax + By = l$ , donde los valores que la definen serían ( $A, B, l$ ). Estas expresiones lineales conducen a los siguientes sistemas de observación:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [y] \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = [-1] \quad (3.61)$$

Considerando la ecuación normal de la recta, para  $j=1, \dots, m$  rectas con  $i=1, \dots, n_j$  puntos en cada recta (restricción de colinealidad) tenemos el modelo general:

$$A_j x_{ij} + B_j y_{ij} + 1 = 0 \quad (3.62)$$

Para que las coordenadas  $(x_i, y_i)$  de una misma recta verifiquen el modelo anterior deben estar corregidas de distorsión radial. De manera que, si  $(x', y')$  son las coordenadas observadas sobre la imagen y  $(x, y)$  las correspondientes coordenadas corregidas (ambas referidas al centro de la imagen), tenemos el siguiente modelo gaussiano:

$$\begin{aligned} r &= r' + k_1' r'^3 + k_2' r'^5 \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ \frac{x}{x'} &= \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'} = 1 + k_1' r'^2 + k_2' r'^4 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} x &= x' \cdot (1 + k_1' r'^2 + k_2' r'^4) \\ y &= y' \cdot (1 + k_1' r'^2 + k_2' r'^4) \end{aligned}$$

De manera que, sustituyendo en el modelo general (3.62) obtenemos:

$$A_j x'_{ij} + B_j y'_{ij} + \frac{1}{(1 + k'_1 r'^2_{ij} + k'_2 r'^4_{ij})} = F = 0 \quad (3.64)$$

obteniéndose un modelo no lineal en los parámetros  $(A_j, B_j, k_1, k_2)$ , el cual, para obtener su expresión lineal, será linealizado empleando los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor,

$$\begin{bmatrix} x'_{ij} & y'_{ij} & \frac{-r'^2_{ij}}{(1 + k'_1 r'^2_{ij} + k'_2 r'^4_{ij})^2} & \frac{-r'^4_{ij}}{(1 + k'_1 r'^2_{ij} + k'_2 r'^4_{ij})^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial A_j \\ \partial B_j \\ \partial k'_1 \\ \partial k'_2 \end{bmatrix} + F = 0 \quad (3.65)$$

Como valores iniciales para los parámetros de la distorsión radial en primera iteración se consideran iguales a cero. Los valores iniciales aproximados para los parámetros de la recta  $(A_j, B_j)$  se obtienen a partir de un segmento seleccionado aleatoriamente en cada una de las rectas. Sin embargo, y para garantizar buenas aproximaciones iniciales, este proceso de selección es apoyado por el estimador robusto RANSAC (para más información consultar la sección 4.4.5), específicamente, los puntos que pertenecen a una recta en concreto participan en el proceso de votación, donde los que verifican la ecuación según un umbral dado son clasificados como puntos válidos, mientras que el resto son excluidos como *outliers*.

#### 3.4.4. Contrastación con herramientas de calibración existentes

Para determinar la distorsión radial existen multitud de herramientas y programas informáticos, y dentro de esa variedad se puede distinguir entre las herramientas comerciales y las gratuitas. Para los casos de aplicación de registro de sensores, además de la herramienta automatizada proporcionada por el software *sv3Dvision* (3.4.3) se contrastarán los resultados con otras herramientas pre-existentes, eligiéndose dos programas informáticos de tipo comercial *Photomodeler*<sup>®</sup> ([www.photomodeler.com](http://www.photomodeler.com)) e *ImageMaster*<sup>®</sup> ([www.terrageomatics.com](http://www.terrageomatics.com)) y dos herramientas de software libre: *Fauccal* (Douskos, 2009) y *Bouguet* (Bouguet, 2004). Seguidamente se explicitarán los modelos propios de distorsión radial empleados por dichas herramientas, así como la relación entre los diferentes coeficientes y los modelos más extendidos

##### Photomodeler

*PhotoModeler 6.0*<sup>®</sup> es una aplicación comercial de fotogrametría distribuida por la empresa *EOS Systems Inc*<sup>®</sup> (Vancouver, Canadá) orientada a la creación de objetos y escenarios tridimensionales a partir de imágenes 2D. Se fundamenta en los principios de la fotogrametría, clásica, principalmente en la condición de colinealidad; y dentro de sus funcionalidades la más relevante para este apartado es la capacidad de realizar la calibración de cámaras.

Para realizar dicho proceso emplea un patrón de calibración propio consistente en una malla regular de círculos (Figura 3.16). El procedimiento de toma de

fotografías también es particular, ya que requiere seguir un protocolo de forma sistemática consistente en tomar al menos tres tomas diferentes (rotadas 90°) en 4 posiciones distintas.

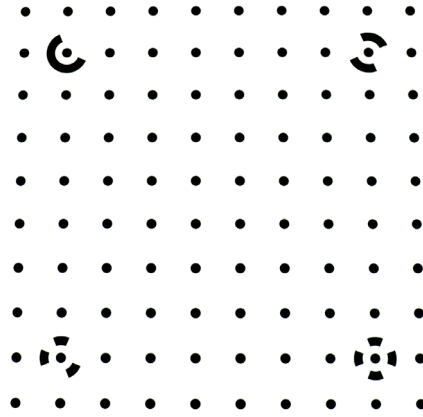


Figura 3.16 Malla de calibración de Photomodeler®

El modelo matemático de la condición de colinealidad que da cuenta de los parámetros involucrados en la autocalibración es:

$$\begin{aligned} x' - x_p &= -f \cdot \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{12}(Y - Y_0) + r_{13}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} + \Delta r_x + \Delta t_x \\ y' - y_p &= -f \cdot \frac{r_{21}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{23}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} + \Delta r_y + \Delta t_y \end{aligned} \quad (3.66)$$

Donde  $(x', y')$  son las coordenadas imagen medidas para un punto determinado,  $(x_p, y_p)$  las coordenadas del punto principal,  $(X, Y, Z)$  coordenadas terreno correspondiente al punto imagen,  $r_{ij}$  son los elementos de la matriz de rotación,  $(X_0, Y_0, Z_0)$  las coordenadas del punto de proyección en el sistema terreno, y  $\Delta r$  y  $\Delta t$  son componentes radial y tangencial de la distorsión.

La formulación para la modelización de la distorsión radial empleada es la Gaussiana (3.51) en la siguiente variación:

$$\Delta r = r' \cdot (k_1 r'^2 + k_2 r'^4 + k_3 r'^6) \quad (3.67)$$

Por lo que las coordenadas imagen son corregidas proporcionalmente:

$$\Delta r_x = \tilde{x} \cdot \frac{\Delta r}{r'} \quad \Delta r_y = \tilde{y} \cdot \frac{\Delta r}{r'} \quad (3.68)$$

Donde  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  son las coordenadas imagen corregidas por punto principal. Por su parte, la distorsión tangencial se modela mediante la expresión (3.60), donde únicamente se renombran las variables involucradas.

$$\begin{aligned} \Delta t_x &= P_1(r'^2 + 2\tilde{x}^2) + 2P_2\tilde{x}\tilde{y} \\ \Delta t_y &= P_2(r'^2 + 2\tilde{y}^2) + 2P_1\tilde{x}\tilde{y} \end{aligned} \quad (3.69)$$



Este método de calibración tiene la posibilidad de modelar la desviación entre el sistema de coordenadas imagen con respecto a un sistema de ejes ortogonal y de escala uniforme mediante parámetros propios de una transformación afín según la función (Enoc-Ablanedo et al., 2009),

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{aff}} &= C_1 \tilde{x} + C_2 \tilde{y} \\ \Delta y_{\text{aff}} &= 0\end{aligned}\quad (3.70)$$

modelada por los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ .

Resumiendo, las correcciones a aplicar para obtener las coordenadas finales  $(x,y)$  se calcularían como:

$$\begin{aligned}x &= x' - x_p - (\Delta r_x + \Delta t_x + \Delta x_{\text{aff}}) \\ y &= y' - y_p - (\Delta r_y + \Delta t_y + \Delta y_{\text{aff}})\end{aligned}\quad (3.71)$$

Recordando que  $(x',y')$  son las coordenadas imagen medidas.

### ImageMaster

*Topcon ImageMaster Photo*<sup>®</sup> es una evolución del software fotogramétrico *PI-3000*<sup>®</sup> desarrollado por la casa *Topcon Corporation*<sup>®</sup> (Tokio, Japón). Es un software comercial que permite realizar tareas de fotogrametría convergente, entre otras la generación de nubes de puntos por estéreo-correlación, con cámaras compactas por un coste inferior al de una estación fotogramétrica digital.

Los parámetros de calibración utilizados para describir la lente se agrupan en:

- Orientación interna:  $f, x_p, y_p$
- Distorsión radial:  $k_1, k_2$
- Distorsión tangencial:  $p_1, p_2$

El protocolo de captura de datos está basado en tomar cinco fotografías según ángulos dados (ver Figura 3.17) sobre un patrón específico basado en puntos.

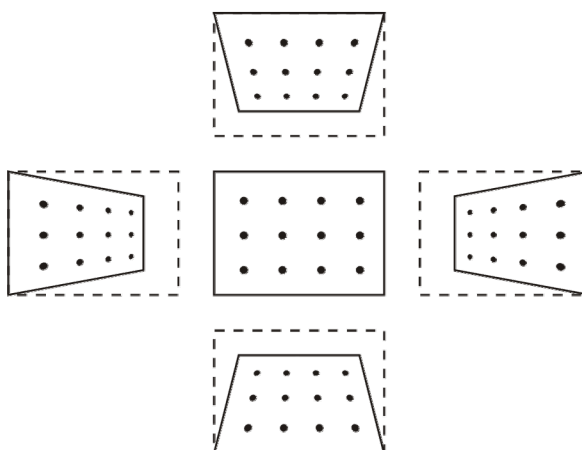


Figura 3.17 Esquema de toma de fotografías para calibración mediante ImageMaster<sup>®</sup>

Las ecuaciones que resumen el proceso de calibración de este software son:

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= x' - x_p \\
 \tilde{y} &= y' - y_p \\
 r'^2 &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\
 \Delta r &= k_1 r'^3 + k_2 r'^5 \\
 x &= \tilde{x} + \tilde{x} \frac{\Delta r}{r'} + P_1 (r'^2 + 2\tilde{x}^2) + 2P_2 \tilde{x}\tilde{y} \\
 y &= \tilde{y} + \tilde{y} \frac{\Delta r}{r'} + P_2 (r'^2 + 2\tilde{y}^2) + 2P_1 \tilde{x}\tilde{y}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Donde  $(x', y')$  son las coordenadas imagen medidas,  $r'$  la distancia radial corregida de punto principal  $(x_p, y_p)$  y  $(x, y)$  son las coordenadas finales corregidas de distorsión tanto radial con tangencial.

### Fauccal

Es un algoritmo automático de calibración (Douskos, 2009) implementado como software de código abierto, que funciona bajo la plataforma propietaria *Matlab*<sup>®</sup>. Como patrón de calibración esta herramienta funciona con un diseño tipo tablero de ajedrez, que alterna cuadrados blancos y negros, no existiendo limitación alguna en cuanto a sus dimensiones o número de elementos de la cuadrícula. Para la toma de imágenes tampoco hay un protocolo específico, pudiendo tomarse cualquier número de fotografías, siempre que no sean muy oblicuas. El modelo matemático de la condición de colinealidad implementado es:

$$\begin{aligned}
 x' &= x_p - f \cdot \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{12}(Y - Y_0) + r_{13}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \\
 &\quad - f \cdot \alpha \cdot sk \cdot \frac{r_{21}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{23}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} + \Delta r_x + \Delta t_x \\
 y' &= y_p - f \cdot \alpha \cdot \frac{r_{21}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{23}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} + \Delta r_y + \Delta t_y
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Donde  $(x', y')$  son las coordenadas observadas en la imagen,  $(x_p, y_p)$  son las coordenadas del punto principal,  $\alpha$  es la relación de aspecto (proporción entre su anchura y altura) y  $sk$  la falta de ortogonalidad entre los ejes  $X$  e  $Y$  (*skewness*). Los componentes de la distorsión radial ( $\Delta r_x, \Delta r_y$ ) se calculan en base a las fórmulas:

$$\begin{aligned}
 \Delta r_x &= (x' - x_p) \cdot (k_1 \cdot r'^2 + k_2 \cdot r'^4) \\
 \Delta r_y &= (y' - y_p) \cdot (k_1 \cdot r'^2 + k_2 \cdot r'^4) \\
 r'^2 &= (x' - x_p)^2 + (y' - y_p)^2
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Si se calcula la componente total de la distorsión radial se obtiene:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta r_x)^2 + (\Delta r_y)^2} = r' \cdot (k_1 \cdot r'^2 + k_2 \cdot r'^4) = k_1 \cdot r'^3 + k_2 \cdot r'^5 \tag{3.75}$$

Que es la expresión de la distorsión según el modelo gaussiano (3.51). La expresión de la distorsión tangencial es coincidente con (3.60):

$$\begin{aligned}\Delta t_x &= P_1 \cdot (r'^2 + 2 \cdot (x' - x_p)^2) + 2 \cdot P_2 \cdot (x' - x_p) \cdot (y' - y_p) \\ \Delta t_y &= P_2 \cdot (r'^2 + 2 \cdot (y' - y_p)^2) + 2 \cdot P_1 \cdot (x' - x_p) \cdot (y' - y_p)\end{aligned}\quad (3.76)$$

### Bouquet

Es una herramienta de calibración de cámaras de código abierto, diseñada para funcionar bajo el software privado *Matlab*<sup>®</sup> diseñada por (Bouquet, 2004). Emplea el mismo patrón 2D que *Fauccal* (tablero de ajedrez), no tiene restricciones en cuanto al número y disposición de imágenes, pero a diferencia del anterior, requiere como datos de entrada para realizar la calibración el tamaño real del lado de las celdas del patrón.

Las coordenadas imagen de un punto se calculan como coordenadas normalizadas o adimensionales  $(x_n, y_n)$  obtenidas en base a la relación de proporcionalidad para las coordenadas terreno  $(X, Y, Z)$  de dicho punto, estando definido el origen del marco terreno coincidente con el punto de proyección,

$$x_n = \frac{X}{Z} \quad y_n = \frac{Y}{Z} \quad (3.77)$$

Las coordenadas normalizadas de un punto  $(x_d, y_d)$  tras aplicar la corrección por distorsión son:

$$\begin{aligned}x_d &= (1 + kc_1 r_n^2 + kc_2 r_n^4 + kc_5 r_n^6) \cdot x_n + \Delta t_x \\ y_d &= (1 + kc_1 r_n^2 + kc_2 r_n^4 + kc_5 r_n^6) \cdot y_n + \Delta t_y\end{aligned}\quad (3.78)$$

Donde  $kc$  son los coeficientes de distorsión radial y tangencial y  $(\Delta t_x, \Delta t_y)$  son las componentes de la distorsión tangencial.

Despreciando la componente tangencial (sólo se busca correlación entre formulación para la radial) y el coeficiente de mayor orden  $kc_5$  (por ser cero o muy próximo a cero) se obtiene:

$$\begin{aligned}x_d &= x_n + (kc_1 r_n^2 + kc_2 r_n^4) \cdot x_n \\ y_d &= y_n + (kc_1 r_n^2 + kc_2 r_n^4) \cdot y_n\end{aligned}\quad (3.79)$$

La componente total de la distorsión radial es

$$\Delta r = \sqrt{(x_d - x_n)^2 + (y_d - y_n)^2} = (kc_1 r_n^2 + kc_2 r_n^4) \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad (3.80)$$

Ergo, verifica la expresión gaussiana de la distorsión

$$\Delta r = kc_1 r_n^3 + kc_2 r_n^5 \quad (3.81)$$

Sin embargo los coeficientes  $kc$  no son idénticos a  $k_1, k_2$  de la ecuación (3.51), por lo que es necesario analizar la expresión de la coordenadas final  $(x_p, y_p)$

$$\begin{aligned}x_p &= fc_x (x_d + \alpha_c \cdot y_d) + x_p \\y_p &= fc_y \cdot y_d + y_p\end{aligned}\quad (3.82)$$

Donde  $(fc_x, fc_y)$  es la distancia focal expresada según el tamaño de los píxeles horizontales y verticales respectivamente,  $(x_p, y_p)$  son las coordenadas del punto principal y  $\alpha_c$  es el ángulo entre los ejes del plano imagen. Todos estos coeficientes permiten definir el conocido como modelo de distorsión afín.

Para unificar los coeficientes de distorsión de los modelos de *Fauccal* y *Bouguet* entre sí, es necesario remitirse a (3.87) donde se explicitan el orden de las unidades de los coeficientes del modelo gaussiano, y puesto que los parámetros de distorsión radial  $kc$  son adimensionales por causa de (3.77), la conversión entre factores se expresa en relación a la focal media (suponiendo píxeles cuadrados).

$$k_1 = \frac{kc_1}{\left(\frac{fc_x + fc_y}{2}\right)^2} \quad k_2 = \frac{kc_2}{\left(\frac{fc_x + fc_y}{2}\right)^4} \quad (3.83)$$

Recordando que en ambos modelos se trabaja con unidades píxel.

Mientras que la distorsión tangencial, recogida en (3.78), viene expresada por una fórmula análoga a (3.60).

$$\begin{aligned}\Delta t_x &= 2 \cdot kc_3 \cdot x_n y_n + kc_4 \cdot (r_n^2 + 2x_n^2) \\ \Delta t_y &= kc_3 \cdot (r_n^2 + 2y_n^2) + 2 \cdot kc_4 \cdot x_n y_n\end{aligned}\quad (3.84)$$

Su relación con los parámetros correspondientes de distorsión tangencial del modelo de *Fauccal* ( $p_1, p_2$ ) es:

$$p_1 = \frac{kc_3}{\frac{fc_x + fc_y}{2}} \quad p_2 = \frac{kc_4}{\frac{fc_x + fc_y}{2}} \quad (3.85)$$

### Conversión de unidades en la estimación de la distorsión radial y tangencial

Para poder realizar comparativas y puesta en común de resultados de calibración mediante el empleo de diferentes métodos es necesario establecer una formulación y un sistema de unidades común. En el caso de los coeficientes de distorsión, en donde cada método o modelo emplea su propia formulación, la conversión entre unidades no es directa, como en el caso de transformación entre modelos gaussiano y balanceado (3.59).

La fórmula de distorsión radial de *Fauccal* es la gaussiana por lo que:

$$\Delta r = r' \cdot (k_1 r'^2 \cdot k_2 r'^4) \quad (3.86)$$

partiendo de la consideración de que el resultado de la distorsión radial  $\Delta r$  está en coordenadas píxel y que el término entre paréntesis de la expresión (3.87) es adimensional, podemos establecer un análisis de las unidades involucradas de la expresión de la siguiente manera:

$$\underbrace{\Delta r}_{\text{pix}} = \underbrace{r'}_{\text{pix}} \cdot \underbrace{\left( k_1 r'^2 \cdot k_2 r'^4 \right)}_{\text{a dimensional}} \quad (3.87)$$

Comprobamos que las unidades de los coeficientes son inversamente proporcionales al factor de multiplicación ( $\text{pix}^{-2}$  y  $\text{pix}^{-4}$ ) para garantizar que  $\Delta r$  se mantiene como unidades píxel.

El factor de conversión de los coeficientes se obtiene si conocemos las dimensiones del sensor en unidades píxeles ( $F_p$ ) y milímetros ( $F_m$ ),

$$k_1(\text{sensor}) = k_1(\text{imagen}) \cdot \frac{1}{\text{pix}^2} \cdot \left( \frac{F_p}{F_m} \cdot \frac{\text{pix}}{\text{mm}} \right)^2 \quad (3.88)$$

siendo el desarrollo equivalente en el caso de  $k_2$  donde el factor de conversión es la focal elevada a la cuarta potencia.

En el caso de la distorsión tangencial, recordando su expresión matemática:

$$\underbrace{\Delta t_x}_{\text{pix}} = P_1 \underbrace{\left( r'^2 + 2(x' - x_p)^2 \right)}_{\text{pix}^2} + 2 \cdot P_2 \underbrace{\left( x' - x_p \right) \left( y' - y_p \right)}_{\text{pix}^2} \quad (3.89)$$

Encontramos que para verificar que  $\Delta t_x$  tenga unidades píxel de longitud, los coeficientes  $P_1$  y  $P_2$  se deben expresar como  $\text{pix}^{-1}$ , de forma que:

$$P_1(\text{sensor}) = P_1(\text{imagen}) \cdot \frac{1}{\text{pix}} \cdot \frac{F_p}{F_m} \cdot \frac{\text{pix}}{\text{mm}} \quad (3.90)$$

En el caso de  $P_2$  dado la expresión (3.89) compartirá el factor de conversión con  $P_1$  reflejado en la ecuación anterior.

Para el método de calibración de *Bouguet* la conversión de unidades a milímetros se realiza mediante la transformación a modelo de *Fauccal* según (3.83) y (3.85), y a partir de ahí se aplican las fórmulas desarrolladas en los párrafos anteriores.



# Capítulo 4

## Registro de sensores

En este capítulo se describirán los procedimientos llevados a cabo para conseguir referenciar ambos sensores. Para ello se utilizarán diferentes algoritmos y herramientas de campos tales como la fotogrametría y/o la visión computacional.

### 4.1. Introducción

El modelo de registro de sensores propuesto se basa en una estructura básica de la fotogrametría aérea: dadas dos imágenes con solapamiento, encontrar y emparejar los puntos comunes u homólogos. Este armazón se basa en primer lugar en la detección de puntos de interés, consistente en algoritmos ampliamente conocidos en fotogrametría como el detector de Förstner (Förstner y Guelch, 1987) o Harris (Harris y Stephen, 1988), u otros propios de la visión computacional como el FAST - *Features from Accelerated Segment Test* (Rosten, 2005), y la correspondencia entre dichos puntos, mediante el proceso de matching.

La estructura básica de fotogrametría aérea es un caso muy favorable ya que presenta el denominado caso normal, en el cual ambas imágenes presentan un elevado solape, similar alejamiento del terreno (altura de vuelo) y los giros están restringidos a valores cercanos a cero. No obstante, dicho esquema básico ha de ser complementado para poder aplicarse al caso particular aquí presentado. Primeramente es necesario obtener dos inputs compatibles con los algoritmos subsiguientes, por ello es necesario preprocesar los datos, tanto las imágenes de alta resolución procedentes de la cámara digital; como la nube de puntos láser para convertirla en una imagen de rango (ver sección 4.2.2 para más datos) y poder ser tratada conjuntamente con la anterior. Los reseñados algoritmos de detección de puntos de interés permitirá obtener los puntos representativos de la imagen de alta resolución, los cuáles entraran en la fase de matching para encontrar sus homólogos. Como se expondrá en la sección correspondiente (4.4), esta etapa es fundamental para la correcta resolución del registro. Se han implementado varios algoritmos: correlación cruzada, correspondencia por mínimos cuadrados, estimadores robustos y estadísticos, sistema de votación de RANSAC y restricciones epipolares con el objetivo de garantizar el mejor resultado. Una vez solventado este paso crítico sólo resta resolver de forma análoga a la fotogrametría clásica la orientación externa de la cámara digital respecto al sensor láser en base a la condición de colinealidad.

En la Figura 4.1 se puede ver resumido el esquema de trabajo que se ha descrito con las diferentes etapas que conforman el proceso de registro, y que serán desglosadas en las secciones siguientes.

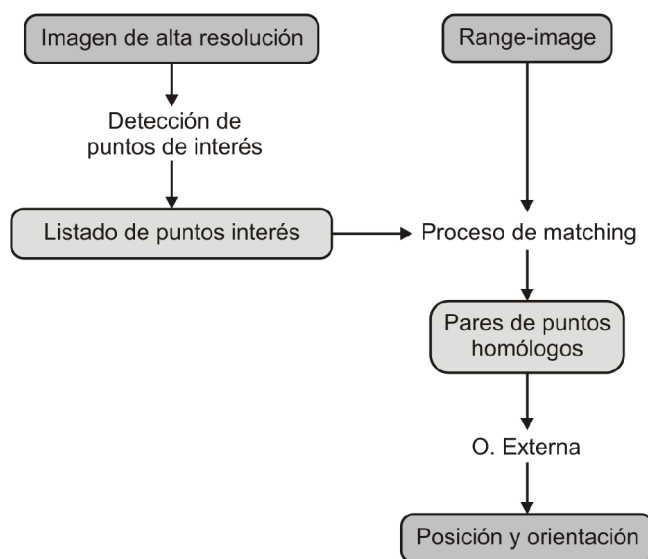


Figura 4.1 Esquema de trabajo en el registro de sensores

## 4.2. Pre-procesamiento

En este apartado se expondrá el tratamiento previo de los datos de entrada adquiridos por ambos sensores para adaptarlos a la línea de trabajo establecida.

### 4.2.1. Adquisición de datos

El protocolo de adquisición de toma de datos ha sido establecido con la mayor flexibilidad posible, de forma que el método desarrollado sea aplicable tanto a casos favorables como desfavorables. En este sentido los factores que condicionarán el nivel de dificultad serán:

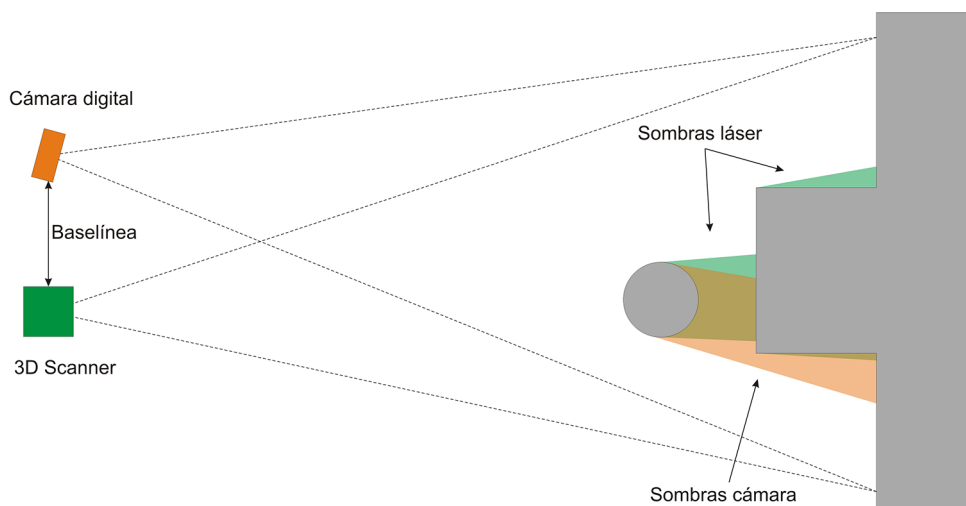
- Complejidad geométrica, relacionada directamente con la presencia de formas complejas en el objeto, así como con la presencia de partes vistas y ocultas.
- Resolución espacial o geométrica, que determina el nivel de detalle que puede ser obtenido por el sensor, ya sea definido como el tamaño del píxel en dimensiones terreno para los sensores fotográficos o como la resolución de escaneado para el láser escáner terrestre.
- Complejidad radiométrica, relacionada directamente con las propiedades espectrales de cada sensor, así como con las diferentes condiciones de iluminación de la escena y propiedades de los materiales que constituyen el objeto. En este sentido los sensores pueden caracterizarse por su resolución espectral (longitudes de onda registradas) y su resolución



radiométrica (nivel de discretización de la señal electromagnética definido por el número de *bits* con el que se almacena).

- Separación espacial y angular entre ambos sensores, la denominada *baselínea* será clave a la hora de propiciar un proceso de correspondencia más favorable o desfavorable y condicionará directamente a las condiciones geométricas y radiométricas previamente reseñadas. A priori, una *baselínea* pequeña deparará imágenes con una perspectiva similar y por lo tanto más favorables para su fusión. En cambio, una *baselínea* grande generará imágenes con grandes variaciones de perspectiva y por tanto con grandes dificultades para su puesta en correspondencia. No obstante, más que la propia *baselínea* el aspecto más crítico estará en la variación de la dirección entre el eje de la cámara y la dirección media de la nube de puntos (González-Aguilera et al., 2009). Cuando, dicha variación es elevada los procesos de fusión automática se harán realmente difíciles.

El siguiente gráfico (Figura 4.2) ilustra perfectamente los tres aspectos anteriormente reseñados:



**Figura 4.2 Factores que condicionan la toma de datos con los sensores láser y cámara**

A través de una correcta planificación de la toma de datos que tome en consideración los aspectos anteriormente reseñados se establecen unas reglas y principios básicos (Mancera-Taboada et al., 2009) establecidos de manera específica para los casos de estudio que se abordarán con este método y que se centran básicamente sobre objetos correspondientes al Patrimonio Arquitectónico y Arqueológico. Como resultado, se obtendrán los siguientes datos de entrada para el pre-procesamiento:

- La **nube de puntos**, que constituye el dato de entrada por parte del láser escáner y que presenta un carácter tridimensional con propiedades métricas y radiométricas específicas. Particularmente, las componentes cartesianas *XYZ* asociadas a cada uno de los puntos vienen acompañadas de un valor de intensidad correspondiente al espectro electromagnético en el que trabaja el láser escáner. Particularmente, la imagen derivada de la nube de puntos, imagen de rango, presenta propiedades radiométricas que

están relacionadas directamente con el espectro del infrarrojo cercano o medio o el visible, y que son el resultado de diferentes factores tales como: el material del objeto, la distancia de escaneo al objeto, el ángulo de incidencia y la propia iluminación de la escena. También, en ocasiones, este valor puede venir acompañado de un valor de color verdadero RGB asociado al punto.

- La **imagen digital**, constituye el dato de entrada por parte de la cámara digital y presenta un carácter bidimensional con propiedades geométricas y radiométricas específicas. En primer lugar, es importante que su resolución geométrica esté en consonancia con el tamaño del objeto y la resolución empleada en el escaneo, es decir, lo ideal sería que tuviésemos el mismo número de puntos en la toma láser que número de píxeles en la imagen. De esta forma, en base a la fusión de ambos sensores conseguiríamos aprovechar toda la resolución de la imagen sobre la nube de puntos y viceversa. Además, dadas las características de cobertura y campo de vista asociadas a cada sensor habría que garantizar que el objeto escaneado pudiera ser fotografiado con una única imagen. En la medida de que esto no sea posible habría que recurrir al empleo de un mosaico de imágenes, donde cada foto (tratada previamente) sería registrada de forma individual. Por otro lado, desde el punto de vista radiométrico, las imágenes procedentes de la cámara digital deberían presentar una iluminación homogénea, evitando, en la medida de lo posible, los contraluces y el contraste de luz-sombra.

#### 4.2.2. Pre-procesamiento láser

Con idea de extrapolar gran parte de los acercamientos que ya han sido aplicados con éxito en imágenes por parte de las disciplinas de la fotogrametría de rango cercano y la visión computacional, una de las primeras fases del pre-procesamiento láser conllevará el paso de la nube de puntos a la imagen de rango<sup>12</sup>.

##### Generación de la imagen de rango

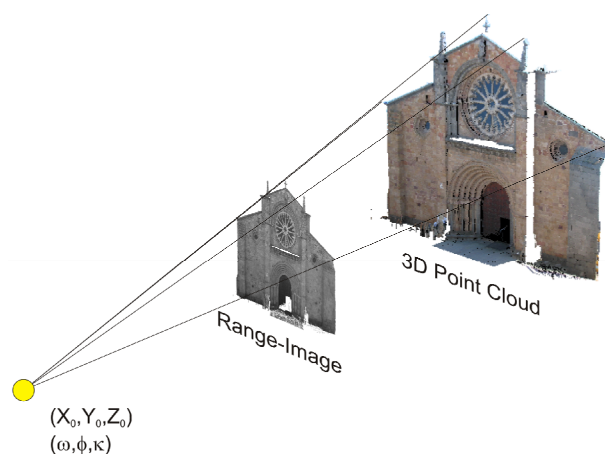
El proceso de generación de la imagen de rango consiste en utilizar la condición de colinealidad (4.1) para proyectar los puntos de la nube sobre el plano de una imagen.

$$\begin{aligned} x &= -f \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_S) + r_{12} \cdot (Y - Y_S) + r_{13} \cdot (Z - Z_S)}{r_{31} \cdot (X - X_S) + r_{32} \cdot (Y - Y_S) + r_{33} \cdot (Z - Z_S)} \\ y &= -f \cdot \frac{r_{21} \cdot (X - X_S) + r_{22} \cdot (Y - Y_S) + r_{23} \cdot (Z - Z_S)}{r_{31} \cdot (X - X_S) + r_{32} \cdot (Y - Y_S) + r_{33} \cdot (Z - Z_S)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

<sup>12</sup> La imagen de rango, es una imagen obtenida a través de la componente temática de la nube de puntos láser y que incorpora todas las propiedades métricas de ésta.

La obtención de las fotocoordenadas  $(x,y)$  requiere el conocimiento previo de los valores de los parámetros de orientación externa  $(X_S, Y_S, Z_S, \omega, \phi, \kappa)$ , que son las incógnitas que deseamos resolver con el registro de sensores. Puesto que es un problema que responde a la estructura básica de los problemas iterativos, será necesario proveer a (4.1) de aproximaciones iniciales, que conformarán la orientación externa de la cámara virtual, de forma que el proceso de registro nos depare unas correcciones tales que el resultado final sea la posición buscada.

En el proceso es necesario definir una focal para generar la imagen de rango, la cual controlará la proyección de los datos; por ello se escogerá la misma focal que en el caso de la imagen de la cámara, para maximizar así la compatibilidad.



**Figura 4.3** Generación de la imagen de rango

Asimismo, es necesario comentar que en el proceso de generación de la imagen de rango interviene un algoritmo simple de intervisibilidad (*depth correction*), ya que la probabilidad de que dos puntos o más se proyecten sobre el mismo píxel es muy elevada, y una incorrecta discriminación de partes vistas y ocultas, algoritmo Z-buffer (apartado 5.3), impediría la correcta aplicación de los procesos de correspondencia (apartado 4.4) requeridos para la fusión de ambos sensores. La instrucción de intervisibilidad en sí consiste en almacenar para cada píxel, durante el proceso de proyección, además del valor radiométrico, la distancia entre el punto proyectado de la nube y el centro de la cámara virtual (ambos en el sistema de coordenadas terreno o láser). De forma que cada vez que se asigne un punto láser sobre unas fotocoordenadas ya ocupadas, solamente se realizará la asignación si es más cercano al centro de proyección. Esta sencilla instrucción es válida en tanto la nube sobre la que se aplica carezca de ruido, en cuyo caso podrían darse fallos radiométricos proporcionales a la cantidad de ruido presente (Straßer, 1974).

### Regeneración de texturas

Es muy común que la imagen de rango presente píxeles vacíos o en blanco, debido a que por la forma del objeto la densidad de puntos no es homogénea, provocando así que el rayo perspectivo para un píxel en concreto no intersecte con ningún punto de la nube y viceversa, que no todos los puntos láser del objeto tengan asignados un píxel en la imagen.

La falta de continuidad en la textura de la imagen de rango reduce la calidad de los resultados del proceso de correspondencia, al estar estos preparados originariamente para imágenes fotográficas reales. Para evitar estos inconvenientes se reemplazará el valor blanco del hueco por otro más cercano a su valor real teórico mediante la interpolación basada en distancias (IDW - *Inverse Distance Weighted*) (Shepard, 1968). Este método aventaja al resto de interpoladores al permitir simplicidad, eficiencia y adaptabilidad para rápidos cambios en el conjunto de datos. Su expresión matemática es:

$$Z_k = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (4.2)$$

Donde  $Z_k$  es el nivel digital del píxel vacío,  $Z_i$  son los valores digitales de los píxeles vecinos,  $w$  es el factor de ponderación y  $n$  es el número de puntos que intervienen en la interpolación. Concretamente, el factor de peso se define como el inverso de la distancia al cuadrado entre el píxel  $k$  y el  $i$ -ésimo píxel vecino.

$$w_i = \frac{1}{d_{k,i}^2} \quad (4.3)$$

El ámbito de la vecindad se establece en base a un área estándar de 3x3 píxeles, aunque dicha cantidad es variable según las necesidades de cada fotografía. De esta manera se asegura una correcta interpolación de los huecos de la imagen de rango respetando sus características intrínsecas.



Figura 4.4 Antes y después de la regeneración de texturas

En (4.2) solo se considera un único canal radiométrico para los datos, ya que o bien los datos originales de la nube solo poseían un único canal (común para los datos de intensidad) o estos han sido convertidos al valor de luminancia si estaban disponibles los datos RGB de la cámara incorporada en el láser.

Conjuntamente con la creación de la imagen de rango se genera una matriz idéntica en dimensiones pero que almacenará las coordenadas terreno del punto de la nube láser que ha dotado de nivel digital a cada posición píxel. Esta matriz será necesaria en el proceso de fusión de sensores.

### 4.2.3. Pre-procesamiento imagen cámara

El objetivo de la imagen procedente de la cámara es el de proveer de información radiométrica a la nube de puntos. No obstante, antes de llegar a ese punto es necesario preprocesar la imagen obtenida en campo, para hacerla compatible con la imagen de rango en los subsiguientes procesos. Seguidamente se expondrán las diferentes etapas de preprocesado.

#### Determinación y corrección de la distorsión radial

Una de las mayores fuentes de error en la imagen es la presencia de la distorsión radial. Particularmente, en el contexto de la fusión de sensores, la importancia de la determinación y corrección de la distorsión radial radica en el hecho de que su incorrecta determinación causa un desplazamiento significativo en los bordes de la imagen, de forma que la asignación de puntos homólogos en los extremos de la imagen serán incorrectas en tanto, las coordenadas de los puntos están afectadas del error de distorsión, el cual se transmitirá en todo el proceso de fusión de sensores (Figura 4.5).

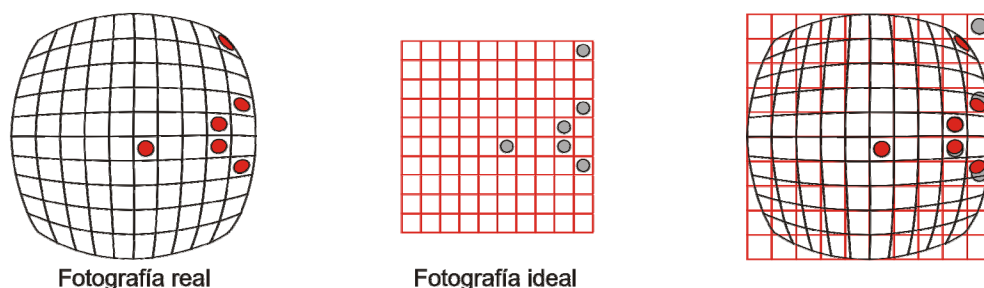


Figura 4.5 Desplazamiento debido a la distorsión radial

Nótese en la Figura 4.5, como si los componentes ópticos de la cámara estuviesen libres de defectos, la transformación entre la fotografía (2D) y el objeto (3D) sería lineal (Figura 4.5), pero las distorsiones generadas por las lentes del sensor afectan a dicha transformación, ya que no son lineales.

Por otro lado, en la determinación de la distorsión radial nos encontramos con que su modelización no es en absoluto sencilla, ya que por un lado existe una falta de notación estandarizada que facilite la interpretación de los diferentes modelos de distorsión, y por otro, la dificultad para evaluar la precisión de la técnica utilizada es elevada teniendo que recurrir a métodos empíricos de distinta índole (Sánchez et al., 2004).

En nuestro caso, la determinación de la distorsión radial se ha estimado a través del modelo de distorsión Gaussiano propuesto por Brown (Brown, 1971) y que representa el concepto de distorsión radial en bruto, sin introducir ninguna restricción que dé cuenta de la dependencia de la focal en la formulación (4.4).

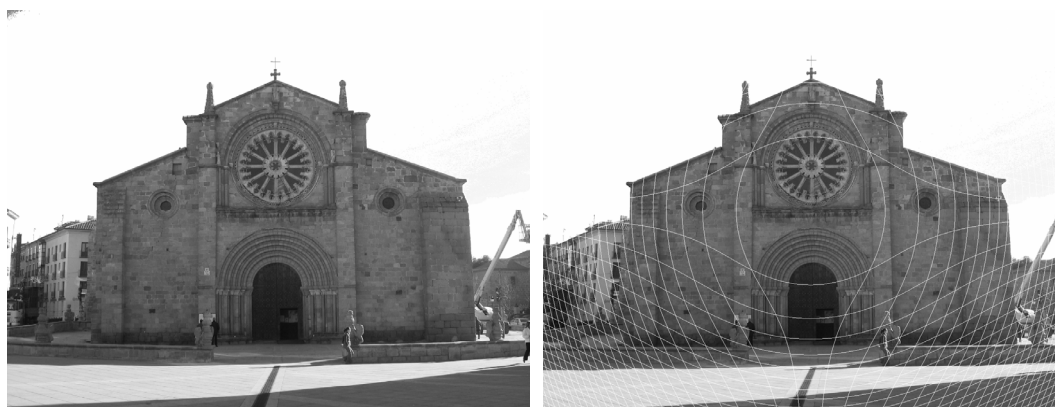
$$dr = k_1 r^3 + k_2 r^5 \quad (4.4)$$

Para la mayoría de las lentes, esta serie polinomial puede ser truncada después del segundo término sin una pérdida de precisión significativa.

La determinación de la distorsión radial y su modelo matemático ha sido tratada en el apartado 3.4 por lo que se refiere a dicho apartado para más información. Los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  del modelo Gaussiano se determinarán a través del software sv3DVision (Aguilera y Lahoz, 2006), el cual ha sido contrastado con diferentes herramientas comerciales y de código abierto (González-Aguilera et al., 2011a). La ventaja de dicho software es el empleo de diferentes restricciones geométricas tales como elementos lineales y puntos de fuga, para estimar la distorsión radial empleando una única imagen.

Finalmente, conviene también reseñar que los parámetros de distorsión requerirán de un mantenimiento periódico que se acentuará en el caso de las cámaras compactas convencionales debido a la falta de estabilidad del sistema objetivo y de la propia distancia principal o focal. Un detallado estudio de estos aspectos es el desarrollado por (Sanz, 2009) en su tesis doctoral en la que se determinan como principales causas de la inestabilidad en los parámetros de distorsión de las cámaras los siguientes: apagado / encendido, uso del zoom, enfoque y apertura del diafragma.

Una vez conocidos los parámetros de calibración de la cámara, estos han de ser aplicados sobre la imagen con el objetivo de corregirla. No obstante, la aplicación directa de la función de distorsión puede provocar huecos en la imagen final puesto que los píxeles se definen como enteros (Figura 4.6), es decir, dos píxeles adyacentes en la imagen original pueden dejar de serlo (separación mayor a un píxel) tras la corrección de la distorsión.



**Figura 4.6 Izquierda: imagen original con distorsión radial. Derecha: imagen sin distorsión radial, corregida por el método directo.**

Por ello y para evitar dichas pérdidas de información radiométrica en la imagen, que requerirían la aplicación posterior de un algoritmo de interpolación (véase IDW (4.2) o bilineal) con el consecuente aumento de tiempo de procesamiento, la distorsión se corregirá mediante el método indirecto, en el que se definirá la matriz de la imagen corregida, y para cada píxel de dicha matriz  $(x_u, y_u)$  se calculará cuál es su posición correspondiente en la imagen de entrada  $(x_d, y_d)$ .

Descomponiendo el incremento radial de la función de distorsión resulta:

$$r_u = r_d + k_1 r_d^3 + k_2 r_d^5 \quad (4.5)$$

Y puesto que serán datos conocidos la función de distorsión ( $k_1, k_2$ ) y la distancia radial sin distorsión ( $r_u$ ), la única incógnita de la ecuación será la distancia radial

distorsionada ( $r_d$ ). Para resolver (4.5) se aplicará el método numérico de Newton-Raphson (Süli, 2003) el cual establece que la solución de  $f(x)=0$  es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

para un valor inicial  $x_0$ . Asimismo, se asume implícitamente que  $f'(x_k) \neq 0$  para todo  $k \geq 0$ .

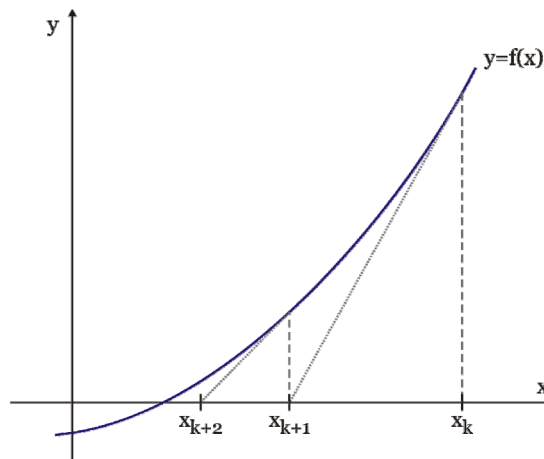
El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo para encontrar los ceros de una función real dada. El algoritmo de aplicación se obtiene mediante un desarrollo en serie de Taylor de la función  $f(x)$  en el entorno del punto  $x_k$

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + (x - x_k)^2 \cdot \frac{f''(x_k)}{2!} + \dots \quad (4.7)$$

Y despreciando los términos cuadráticos y evaluando en el entorno de  $x_{k+1}$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad (4.8)$$

Obteniéndose la fórmula de aplicación final ((4.6)). Este método se interpreta de la siguiente forma geométrica (Figura 4.7): la tangente a la curva  $y=f(x)$  en el punto  $(x_k, f(x_k))$  es la línea cuya ecuación es  $y-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)$  intersecándose con el eje  $x$  en el punto  $(x_{k+1}, 0)$ . De esta forma se comprueba que  $x_{k+1}$  está más próximo a la solución que la previa  $x_k$ .



**Figura 4.7 Método de Newton-Raphson**

Cada posición de la matriz de la imagen corregida  $(x_u, y_u)$  se convierte a unidades sensor (para poder aplicar la función de distorsión), y a partir de ellas se obtiene la distancia sin distorsión  $r_u$  y ángulo horizontal  $\alpha$  (para recuperar la posición posteriormente).

Las funciones involucradas en el proceso iterativo son:

$$\begin{aligned} f &\equiv r_d - r_u + k_1 r_d^3 + k_2 r_d^5 = 0 \\ f' &\equiv 1 + 3k_1 r_d^2 + 5k_2 r_d^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Y mediante la aplicación de (4.6) se obtiene  $r_d$ , y por ende  $\Delta r$ . Solo resta convertir la distorsión radial a unidades píxel. Las coordenadas finales en la imagen original son:

$$\begin{aligned} x_d &= x_u - \Delta r \cdot \sin \alpha \\ y_d &= y_u + \Delta r \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

Finalmente se lee la información radiométrica de la imagen original en la posición  $(x_d, y_d)$  para asignársela a la posición inicial de la imagen corregida  $(x_u, y_u)$ .

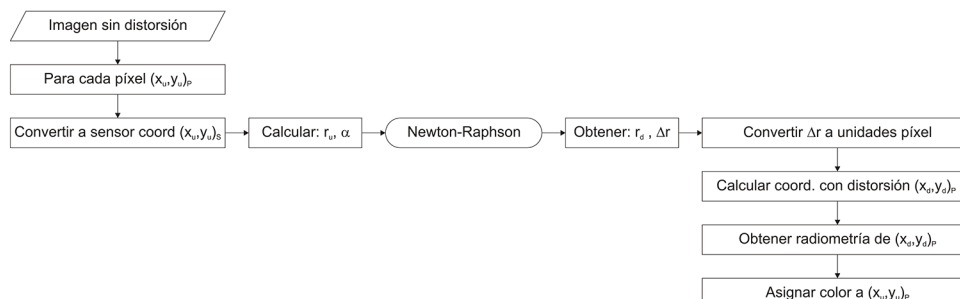


Figura 4.8 Corrección de la distorsión de forma indirecta

El método de Newton-Raphson no garantiza la convergencia global, en tanto esta depende de la proximidad del valor inicial al cero o raíz buscada. En el caso particular de su aplicación a la distorsión radial, este inconveniente no es tal puesto que los valores de  $r_u$  y  $r_d$  están próximos para cualquier punto de la imagen.

### Corrección radiométrica de las imágenes

Con la corrección de la distorsión radial se solventan gran parte de los problemas geométricos de las imágenes, aunque es recomendable también corregir aspectos radiométricos tales como:

Tratamiento del fondo de la imagen visible. Al obtener la imagen visible siempre se registra información adicional correspondiente al fondo de la escena, la cual no está relacionada con el elemento objeto de estudio. En contraposición la imagen de rango tiene como principal característica la ausencia de información de fondo (definido por el color blanco por defecto) al haber sido generada a partir únicamente de las distancias al objeto de estudio. Dicha discrepancia radiométrica afecta a la calidad de la correspondencia entre los elementos situados en los bordes de los objetos (como por ejemplo los aleros) cuya vecindad y los parámetros radiométricos asociados (media y varianza) se ven modificados por el fondo de la escena.

De todos los elementos que pueden aparecer en el fondo de una imagen tomada en exteriores (caso que se da en las fachadas de los elementos patrimoniales arquitectónicos), el que aparece prácticamente en la totalidad de las situaciones, es el cielo. Esta situación no será extrapolable al caso de elementos interiores o en aquellas situaciones en las que las condiciones de iluminación son homogéneas (días nublados) y las correcciones radiométricas por fondo no son necesarias. No obstante, en el resto de casos de atmósfera limpia, la radiometría del fondo será cercana al azul, y por consiguiente es necesaria su eliminación y/o reducción, la cual se logra debido a sus particulares cualidades radiométricas (Figura 4.9).





**Figura 4.9 Antes y después de eliminar el cielo de la imagen de alta resolución**

La forma más sencilla y automatizada es calcular el canal azul de la fotografía original, es decir, obtener una imagen cuyos niveles digitales sean los valores de la tercera componente de color RGB, y filtrarla en función del valor del píxel. La radiometría del cielo presenta los mayores valores de componente azul dentro de la imagen (próximos a  $ND=255$ ), muy alejado de los valores de azul que pueden presentar las fachadas de los edificios (normalmente su  $ND$  oscila entre 100 y 200), así que mediante una instrucción condicional, todos aquellos puntos cuyo canal azul sea mayor que una cierta tolerancia, controlable por el usuario, serán sustituidos por el color blanco. La única limitación de esta metodología serían aquellos edificios u objetos con importante componente azul, aunque esta consideración rara vez se dará para el caso de los edificios históricos.

Conversión de modelos de color: RGB  $\rightarrow$  YUV. En esta etapa se aprovecha para convertir la información radiométrica RGB a un único canal de luminancia. Para ello se emplea el espacio de color YUV el cual presenta como característica más relevante que es el espacio que más se aproxima al modelo de percepción del ojo humano; esto se consigue gracias a que dicho espacio está basado en el hecho de que el ojo es más sensible a la intensidad de la luz (luminancia) que a la información cromática. En base a esto define tres componentes: Y (componente de luminancia, también denominada I), U y V (componentes cromáticas). La expresión que relaciona a la luminancia del espacio YUV con el espacio RGB es:

$$Y \equiv I = 0,299 \cdot R + 0,587 \cdot G + 0,114 \cdot B \quad (4.11)$$

Las componentes cromáticas se omiten en la conversión de modelos de color, considerándose por defecto que  $U=0$  y  $V=0$ , para que sea una imagen en niveles de gris.

### **Redimensionamiento de las imágenes**

Una vez se han realizado todas las operaciones necesarias para adaptar los datos de entrada a fin de ser procesables por parte de los algoritmos subsiguientes, es necesario reseñar una operación común a las imágenes existentes (imagen de rango, imagen cámara) que es necesaria para lograr la compatibilidad entre ellas.

La imagen visible procedente de la cámara digital poseerá grandes dimensiones (7-10Mp), mientras que la imagen de rango vendrá caracterizada por un menor

tamaño propiciado por un número de puntos inferior al número de píxeles de la imagen visible. Es por tanto aconsejable que ambas imágenes finales tengan idénticos valores en anchura y altura, ya que en caso contrario no se podrían aplicar satisfactoriamente los algoritmos de correspondencia.

Una solución aparentemente válida en primera instancia, sería la creación de la imagen de rango en función del tamaño de la imagen visible procedente de la cámara digital. Dicha solución presenta un importante problema, ya que en el caso de la imagen de rango esto pasaría por aumentar el número de puntos de la nube, requiriendo una nueva toma de datos en campo, aumentando la resolución de captura del láser. Este planteamiento no es el elegido en este método ya que se quiere conceder cierta flexibilidad al proceso de toma de datos. Por tanto, se ha optado por redimensionar todas las imágenes intervinientes (imagen de rango e imagen cámara) de forma que se consiga un equilibrio entre el número de píxeles de la imagen con más resolución (cámara) y el número de puntos del objeto (láser). La formulación que dará cuenta de esta transformación de tamaño entre las imágenes es una transformación afín planar (4.12).

$$\mathbf{R}_{\text{img}} = \mathbf{C}_{\text{img}} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{A}$  contiene la transformación afín definida por los parámetros geométricos  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  como los factores de escala a lo largo del *eje-x* y el *eje-y* respectivamente, y con  $\theta$ ,  $\varepsilon$  como las rotaciones que expresan la dirección a lo largo de las cuales los factores de escala  $x$  e  $y$  son aplicados respectivamente. Dichos parámetros geométricos se relacionan con los parámetros matemáticos de la matriz  $\mathbf{A}$  según las ecuaciones (2.36) y (2.37).  $\mathbf{R}_{\text{img}}$  y  $\mathbf{C}_{\text{img}}$  son las abreviaciones de imagen de rango, e imagen de la cámara respectivamente.

Después del redimensionamiento de las diferentes imágenes a través de la transformación afín estaremos en condiciones de iniciar el proceso de fusión de los sensores.

### 4.3. Detección de puntos de interés

En el procesamiento de imágenes, se define como punto de interés a aquel punto de la imagen que posee una serie de propiedades que le hace destacar respecto a sus vecinos, las cuales según (Haralick, 1992) son:

- **Claridad:** el punto se puede distinguir de sus vecinos.
- **Invariancia:** independencia respecto a distorsiones geométricas y radiométricas.
- **Interpretabilidad:** los puntos tienen asociados valores que poseen significado en la interpretación de la imagen, y pueden ser utilizados para operaciones posteriores.
- **Estabilidad:** robustez frente al ruido de la imagen.
- **Unicidad:** mientras que la claridad está referida a un entorno local, la unicidad es de ámbito global. Se refiere principalmente a evitar patrones repetitivos.

Para su detección se emplean operadores bidimensionales que recorren la imagen en busca de puntos con alta frecuencia espacial. Según (Remondino, 2006) los principales requisitos que debe cumplir un detector son:

- **Precisión:** capacidad para detectar un patrón en la posición correcta.
- **Estabilidad:** detección de una característica aun cuando está afectada de cambios de escala o rotaciones.
- **Sensibilidad:** capacidad para detectar puntos en situaciones de bajo contraste.
- **Control y velocidad:** referido al número de parámetros controlables por parte del usuario, y el tiempo requerido para identificar las características.

Los primeros desarrollos en este campo estaban basados en análisis sobre la matriz hessiana<sup>13</sup> de la imagen (Moravec, 1977) y (Beudet, 1978). Desde entonces se han desarrollado múltiples detectores (Förstner y Guelch, 1987), (Harris y Stephens, 1988), (Tomasi y Kanade, 1991), (Haralick, 1992)..., los cuales han ido implementando una serie de mejoras, tales como la invarianza frente a las rotaciones y la escala.

Una cuestión relevante en el tema de detección de puntos de interés en el flujo de trabajo desarrollado es que dichos operadores solamente se aplicarán sobre la imagen de alta resolución, y no sobre la imagen de rango. Dicha metodología restringe la aplicación de la correspondencia al comparar un conjunto de puntos contra una imagen completa, operación más lenta que la comparación entre únicamente dos conjuntos de puntos. Esta decisión se debe a que la imagen de rango presenta una baja calidad radiométrica en la mayoría de los casos (excepto nubes significativamente densas). A pesar de las mejoras aplicadas en su textura

<sup>13</sup> Es la matriz cuadrada  $n \times n$  de las derivadas segundas parciales de una función  $f$  de  $n$  variables.

(apartado 4.2.2) sigue presentando numerosas imperfecciones, tales como los dientes de sierra, o bordes escalonados, que provocarían que el proceso de detección no fuese efectivo. Por ello, se hará necesario la mejora del proceso de correspondencia mediante el empleo de restricciones geométricas y estrategias robustas que se especificarán más adelante (apartado 4.6).

Para la implementación de la detección de puntos de interés se proponen tres algoritmos diferentes: *Förstner*, *Harris* y *FAST*; los cuales además han sido implementados en el soporte informático. Se consideran diferentes operadores puesto que no existe un único algoritmo que genere los resultados idóneos para cada situación, esto se debe a que cada uno utiliza criterios diferentes para evaluar si un punto es característico o no. Seguidamente se comentarán los diferentes operadores.

### 4.3.1. Operador de Förstner

El algoritmo de detección de puntos de interés (Förstner y Guelch, 1987) se basa en analizar la función de autocorrelación<sup>14</sup> y clasificar los puntos considerando aspectos tales como la variación direccional de la radiometría de la imagen. A pesar de su antigüedad, es uno de los operadores más extendidos en el campo de la fotogrametría, a la par de haber servido de base en el desarrollo de nuevos algoritmos.

Su fundamento se basa en considerar para la imagen, una ventana de búsqueda de dimensiones  $m_r \times m_c$  dentro de la imagen, la cual se supone que contiene un punto de interés de coordenadas  $p_0 = (r_0, c_0)$ . El objetivo final del detector es obtener las coordenadas estimadas de dicho punto  $\hat{p}_0 = (\hat{r}_0, \hat{c}_0)$ .

Suponiendo que el punto  $p_0$  es intersecado por un número indeterminado ( $i$ ) de bordes, los cuales se suponen independientes, el modelo lineal resultante, es:

$$l_i = \cos \varphi_i \cdot \hat{r}_0 + \text{sen} \varphi_i \cdot \hat{c}_0 + n_i \quad i = 1, \dots, m \quad (4.13)$$

Donde  $m$  es el número total de píxeles ( $m = m_r \times m_c$ ),  $l_i$  representa la distancia ortogonal de la recta al origen, y  $\varphi_i$  es el ángulo que forma la distancia  $l_i$  con el eje de abscisas. Los parámetros  $l_i$  y  $\varphi_i$  representan la ecuación polar de la recta en el plano Euclídeo. El peso de  $l_i$  se asume que es la norma del gradiente espacial (fuerza del borde del vector gradiente perpendicular al borde):

$$w_i = \|\nabla f_i\|^2 = f_r^2(r_i, c_i) + f_c^2(r_i, c_i) \quad (4.14)$$

El punto central es aquel que minimice la suma ponderada del cuadrado de las distancias  $n_i$ .

$$\Omega(r_0, c_0) = \sum_{i=1}^m n_i^2 \cdot w_i \quad (4.15)$$

---

<sup>14</sup> También conocida como matriz varianza-covarianza ponderada del gradiente (*weighted gradient covariance matrix*)

Minimizando (4.15) respecto a  $\hat{r}_0$  y  $\hat{c}_0$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\hat{r}_0, \hat{c}_0)}{\partial \hat{r}_0} &= \sum_{i=1}^m \cos \varphi_i (l_i - \cos \varphi_i \hat{r}_0 - \sin \varphi_i \hat{c}_0) w_i = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\hat{r}_0, \hat{c}_0)}{\partial \hat{c}_0} &= \sum_{i=1}^m \sin \varphi_i (l_i - \cos \varphi_i \hat{r}_0 - \sin \varphi_i \hat{c}_0) w_i = 0\end{aligned}\quad (4.16)$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones normales.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m w_i \cos^2 \varphi_i & \sum_{i=1}^m w_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ \sum_{i=1}^m w_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i & \sum_{i=1}^m w_i \sin^2 \varphi_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{r}_0 \\ \hat{c}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m l_i w_i \cos \varphi_i \\ \sum_{i=1}^m l_i w_i \sin \varphi_i \end{bmatrix}\quad (4.17)$$

Aplicando las sustituciones siguientes, y sabiendo que  $f_r$  y  $f_c$  son las derivadas parciales direccionales según filas y columnas (funciones gradiente) respectivamente:

$$\begin{aligned}l_i &= r_i \cdot \cos \varphi_i + c_i \cdot \sin \varphi_i \\ f_{r_i} &= f_r(r_i, c_i) = \|\nabla f_i\| \cdot \cos \varphi_i \\ f_{c_i} &= f_c(r_i, c_i) = \|\nabla f_i\| \cdot \sin \varphi_i\end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones final:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m f_{r_i}^2 & \sum_{i=1}^m f_{r_i} f_{c_i} \\ \sum_{i=1}^m f_{r_i} f_{c_i} & \sum_{i=1}^m f_{c_i}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{r}_0 \\ \hat{c}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (f_{r_i}^2 r_i + f_{r_i} f_{c_i} c_i) \\ \sum_{i=1}^m (f_{r_i} f_{c_i} r_i + f_{c_i}^2 c_i) \end{bmatrix}\quad (4.18)$$

Una vez estimadas las coordenadas del punto  $\hat{p}_0(\hat{r}_0, \hat{c}_0)$ , es necesario evaluar si puede ser clasificado como punto de interés. Para ello se analiza la matriz covarianza de la matriz hessiana ( $\Sigma_{pp}$ )

$$\Sigma_{pp} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{N}^{-1}\quad (4.19)$$

Donde  $\hat{\sigma}^2$  es la varianza a posteriori, y  $\mathbf{N}$  la matriz hessiana, la cual puede ser representada por los siguientes parámetros:

- **Precisión** media del punto, o peso ( $w$ ), se puede considerar como una función proporcional al contraste existente en la ventana; cuanto mayor sea, mejor definido estará el punto.

$$w = \frac{|\mathbf{N}|}{\frac{1}{2} \cdot \text{traza}(\mathbf{N})}\quad (4.20)$$

- **Dirección** del eje mayor de la elipse de confianza asociada al punto estimado.

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot N_{12}}{N_{11} - N_{22}}\right) \quad (4.21)$$

- **Forma** de la elipse de confianza, la cual puede ser obtenida a partir de la relación entre los valores propios ( $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ) de la matriz N.

$$q = 1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 = \frac{4 \cdot |N|}{\text{traza}^2(N)} \quad (4.22)$$

El algoritmo original descrito por Förstner se basa en utilizar los criterios (4.20) y (4.22) para seleccionar las ventanas óptimas. En primer lugar excluye aquellas ventanas que contengan puntos que descansen sobre bordes; dicha discriminación se logra mediante el parámetro  $q$  de circularidad, puesto que si  $q=0$  implicaría que el menor de los valores propios es cero o próximo a cero, es decir, la función de autocorrelación variaría en una única dirección.

El segundo requisito es que la elipse de confianza sea la menor de la vecindad y que además no exceda un cierto tamaño. De esta forma se garantiza una buena precisión en la determinación del punto de interés. Para ello es necesario realizar dos operaciones:

- Comprobar si la precisión media del punto  $w$  supera la tolerancia impuesta por el usuario.
- Aplicar un filtro de máxima local (*non maximum suppression*) consistente en que para una ventana de búsqueda dada, conservar el valor del píxel central de dicha ventana si es el mayor valor del conjunto ordenado de píxeles de la vecindad, en cualquier otro caso asignarle el valor cero.

$$\forall p \in \{\text{vecindad de } i\} \quad f(w) = \begin{cases} w_i, & \text{si } w_i \geq w_p \\ 0, & \text{si } w_i < w_p \end{cases} \quad (4.23)$$

Asimismo, se aplica una variación sobre el control de la precisión (4.20), ya que en vez de utilizar los valores crudos (los cuales no tienen límite superior definido), estos se normalizan dentro del rango  $[0, 1000]$  para facilitar la selección del umbral adecuado.

Mediante la metodología expuesta el resultado final es un listado de coordenadas píxel que se corresponden con las ventanas óptimas, es decir, aquellas que contienen puntos de interés bien definidos. No obstante, el centro de dichas ventanas no se tiene porque corresponder con las coordenadas del punto de interés que contiene, y por ello es necesario aplicar un último paso consistente en resolver la ecuación (4.18), obteniéndose así las coordenadas estimadas del punto de interés que son el producto final del detector.

En la figura adjunta puede verse un resumen del funcionamiento del operador de Förstner.

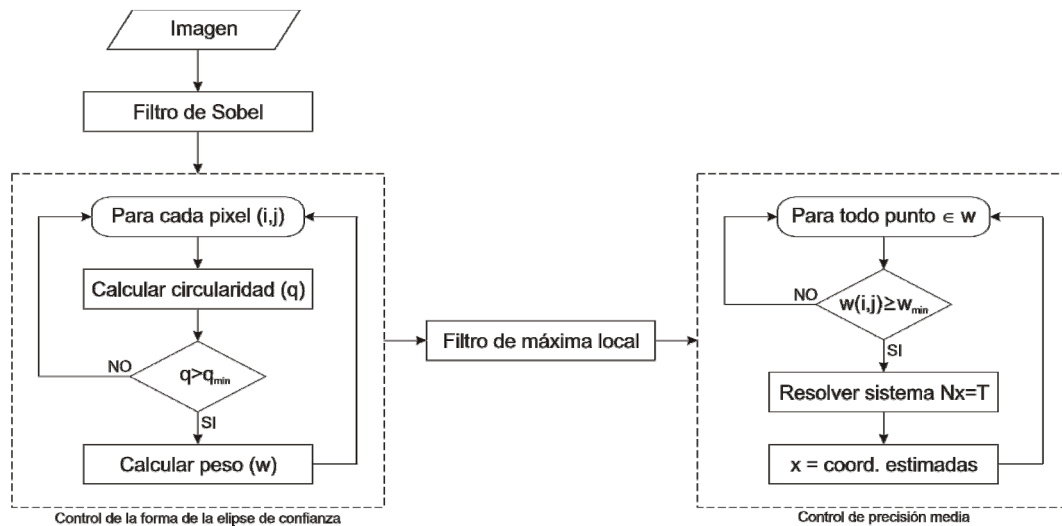


Figura 4.10 Esquema del operador de Förstner

### 4.3.2. Detector de Harris

El algoritmo de Harris (Harris y Stephen, 1988) es similar al detector de Moravec (Moravec, 1977), en tanto que ambos calculan una matriz relacionada con la función local de autocorrelación. Sobre la ventana de búsqueda se calculan los cuadrados de las derivadas de los niveles digitales de la imagen en filas y columnas, y los valores propios de dicha matriz son las curvaturas principales de la función de autocorrelación. Un punto será clasificado como punto de interés si los valores de ambas curvaturas son altos.

Este detector es de los más usados dado su alto grado de invarianza frente a cambios de escala, rotación, iluminación y ruido en la imagen.

La formulación matemática está basada en la función de autocorrelación ( $c$ ), la cual para un desplazamiento dado ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) respecto a un punto  $(x,y)$ , se define como:

$$c(x, y) = \sum_w [I(x_i, y_i) - I(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y)]^2 \quad (4.24)$$

Donde  $I$  denota la intensidad de la imagen (4.11) y  $(x_i, y_i)$  son los punto de la ventana  $\mathbf{W}$  de la función de pesos gaussianas (4.25) centrada en  $(x,y)$ .

$$W = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \quad (4.25)$$

Considerando desplazamientos pequeños y aplicando un desarrollo en serie de Taylor se obtiene:

$$c(x, y) = [\Delta x \quad \Delta y] \cdot C(x, y) \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

En donde la matriz  $C(x,y)$  de dimensiones  $2 \times 2$  almacena la estructura de la intensidad de la vecindad de ventana de búsqueda.

$$C(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_w (I_x(x_i, y_i))^2 & \sum_w I_x(x_i, y_i) \cdot I_y(x_i, y_i) \\ \sum_w I_x(x_i, y_i) \cdot I_y(x_i, y_i) & \sum_w (I_y(x_i, y_i))^2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Siendo  $I_x$  y  $I_y$  las derivadas parciales (gradiente) respecto a ambos ejes, las cuales se pueden obtener mediante operador tipo *Sobel* (5.6).

En función de los valores propios ( $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ ) de la matriz  $C(x, y)$ , se pueden clasificar los puntos en tres categorías (resumidas en la Figura 4.11):

- **Esquina:** si ambos valores propios son grandes, ya que significaría que la función de autocorrelación es pronunciada por lo que se incrementa en todas las direcciones.
- **Borde:** cuando uno de los dos valores propios es grande y el otro pequeño, lo que representa altas variaciones en una dirección, mientras que en la otra es constante.
- **Zona llana:** tanto  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son pequeños por lo que en esa zona la matriz de autocorrelación es casi constante en todas las direcciones.

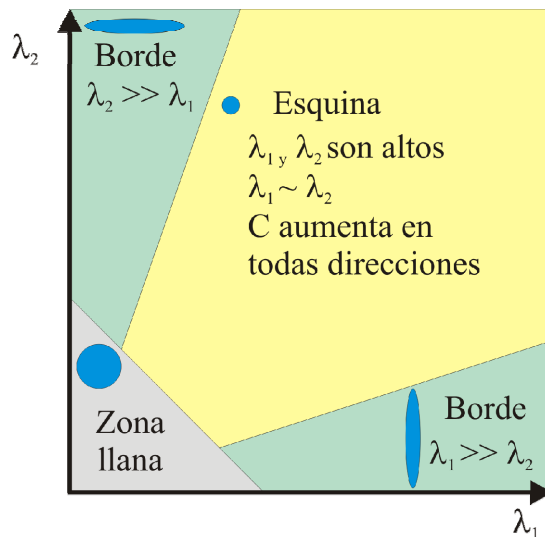


Figura 4.11 Clasificación según los valores propios

La ecuación que mide el grado de respuesta de un punto esquina ( $R$ ) buscará que ambos valores propios sean altos, lo cual se evalúa mediante la siguiente expresión:

$$R = \lambda_1 \lambda_2 - k(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \quad (4.28)$$

Siendo  $k$  un valor empírico comprendido entre 0,04 y 0,06.

Pero dado el alto coste computacional asociado a los valores propios, estos se sustituyen por sus equivalencias matriciales:

$$\begin{aligned} |C(x, y)| &= C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ \text{traza}(C(x, y)) &= C_{11} + C_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$



Resultando la ecuación (4.28) en:

$$R = |C(x, y)| - k \cdot \text{traza}(C(x, y))^2 \quad (4.29)$$

Finalmente se aplica un filtro de máxima local y se buscan aquellos puntos tales que la función  $R$  sea mayor que un umbral definido por el usuario, obteniéndose así es conjunto final de puntos característicos.

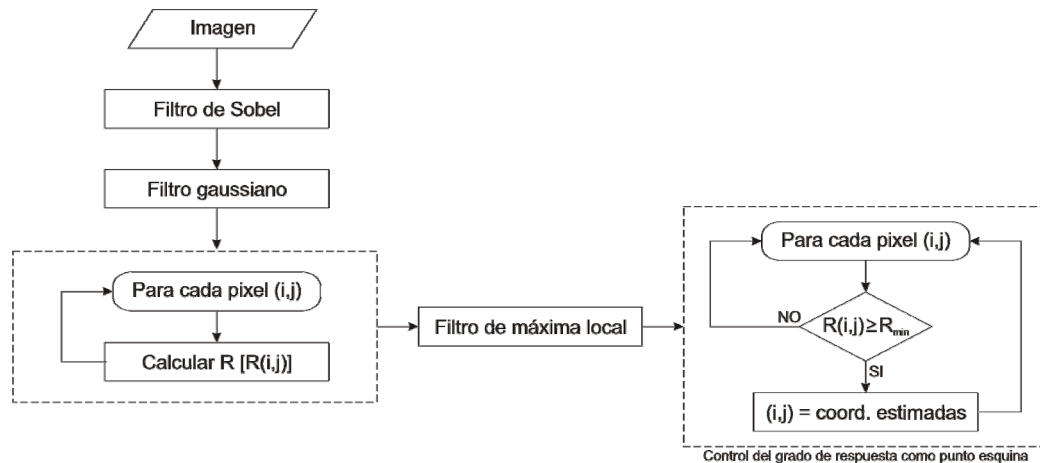


Figura 4.12 Resumen del detector de Harris

### 4.3.3. Operador FAST

El operador FAST, cuyas siglas responden al acrónimo inglés *Features from Accelerated Segment Test*, ha sido desarrollado por (Rosten, 2005) como un detector de características en el que prima la velocidad de detección, puesto que su aplicación inicial era para el seguimiento de modelos 3d en tiempo real.

Este operador se caracteriza por su sencillez de cálculo y aplicación, además de poseer altos niveles de repetibilidad (capacidad para detectar la misma característica en dos o más imágenes diferentes de la misma escena); aunque posteriormente ha sido mejorado con la implementación de algoritmos de decisión como el ID3 (*Iterative Dichotomiser 3*) para optimizar el orden en que los píxeles son analizados (Rosten, 2006). La razón de la inclusión de este detector es para proveer de un acercamiento diferente al proporcionado por los detectores de Forstner y Harris, ya que como se expondrá seguidamente, utiliza una aproximación bastante diferente a la de los operadores mencionados anteriormente.

No obstante, como todos los detectores, presenta dos debilidades significativas: depende de un valor de umbral definido previamente por el usuario y presenta problemas frente altos niveles de ruido.

Se fundamenta en analizar el círculo de Bresenham (Bresenham, 1965) de radio 3 centrado en el píxel candidato. Recordando que Bresenham es un algoritmo de representación de funciones en un entorno digital, tal que solamente emplea sumas y restas para los cálculos. En el caso del primer cuadrante de una circunferencia con sentido de dibujo horario, si el último punto dibujado tenía coordenadas  $(x,y)$ , el siguiente bien puede ser el punto este o  $E(x+1, y)$  o el punto

sureste o  $SE$  ( $x+1, y+1$ ). Para decidir cuál representar se establece la función de error  $d$  (basada en la ecuación de la circunferencia) calculada para el punto intermedio entre  $E$  y  $SE$ , de coordenadas  $(x+1, y+0,5)$

$$d = x^2 + y^2 - r^2$$

$$d(\text{punto medio}) \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{dibujar}(x+1, y) \\ \geq 0 \rightarrow \text{dibujar}(x+1, y+1) \end{cases} \quad (4.30)$$

De forma que se analizan los valores de nivel digital de 16 píxeles vecinos, según indica la Figura 4.13.

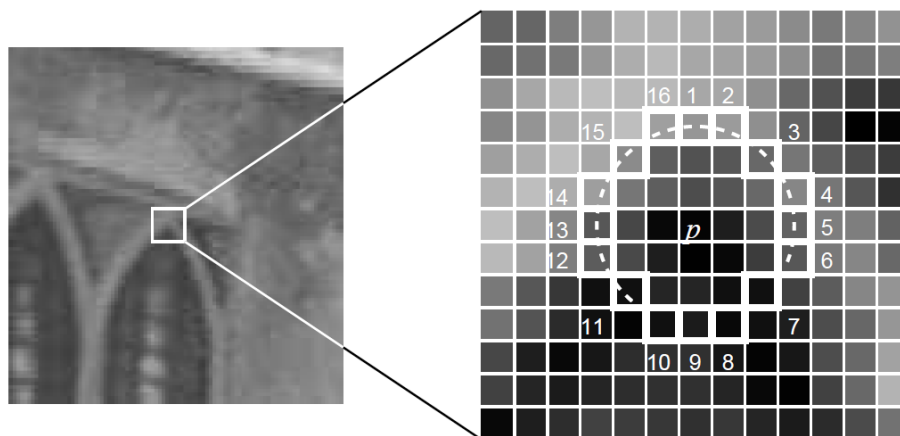


Figura 4.13 Evaluación del operador FAST (tomado de Rosten, 2006)

Para cada localización de la circunferencia  $x \in \{1..16\}$ , el píxel en dicha posición relativa respecto al centro del punto esquina candidato  $p$  (denotado por  $p \rightarrow x$ ) puede tener tres estados diferentes:

$$S_{p \rightarrow x} = \begin{cases} \text{oscuro}, & I_{p \rightarrow x} \leq I_p - t \\ \text{similar}, & I_p - t < I_{p \rightarrow x} < I_p + t \\ \text{brillante}, & I_p + t \leq I_{p \rightarrow x} \end{cases} \quad (4.31)$$

Si al menos  $n$  píxeles adyacentes cumplen la condición de ser más claros o más oscuros que el nivel digital del píxel central ( $I_p$ ) en una tolerancia  $t$  definida por el usuario, dicho punto central será clasificado por el operador como punto esquina. Este algoritmo no da falsos positivos en los puntos pertenecientes a un borde ya que no se obtendrían suficientes píxeles adyacentes para superar la tolerancia  $t$  definida.

La clasificación de los puntos según el criterio (4.31) aunque no será utilizado en el proceso de registro de sensores, serviría para en un proceso de correspondencia entre dos grupos de puntos de interés, reducir el número de operaciones al evaluarse únicamente puntos con la misma clasificación, es decir, se pueden agrupar los puntos de interés en dos grupos: ‘oscuros’ y ‘brillantes’ realizándose los procesos de correspondencia para cada grupo de forma separada.

El algoritmo tiene incorporado un control previo para aumentar la velocidad de procesamiento, eliminando aquellos puntos que no cumplan que al menos 3 de sus píxeles en las direcciones norte, sur, este y oeste (denotados por 1, 5, 9 y 13 en la

Figura 4.13) verifican la condición de no ser similares al píxel central (oscuro o brillante) según la fórmula (4.31).

Sobre el algoritmo original del operador FAST, se aplica la siguiente corrección: no recorrer todas las posiciones de la imagen de entrada ya que según su metodología se detectarían múltiples puntos de interés adyacentes entre sí (Rosten, 2006) empeorando el resultado final debido a la redundancia añadida. Por ello se evaluará una muestra discreta de la imagen según un espaciado regular en filas y columnas.

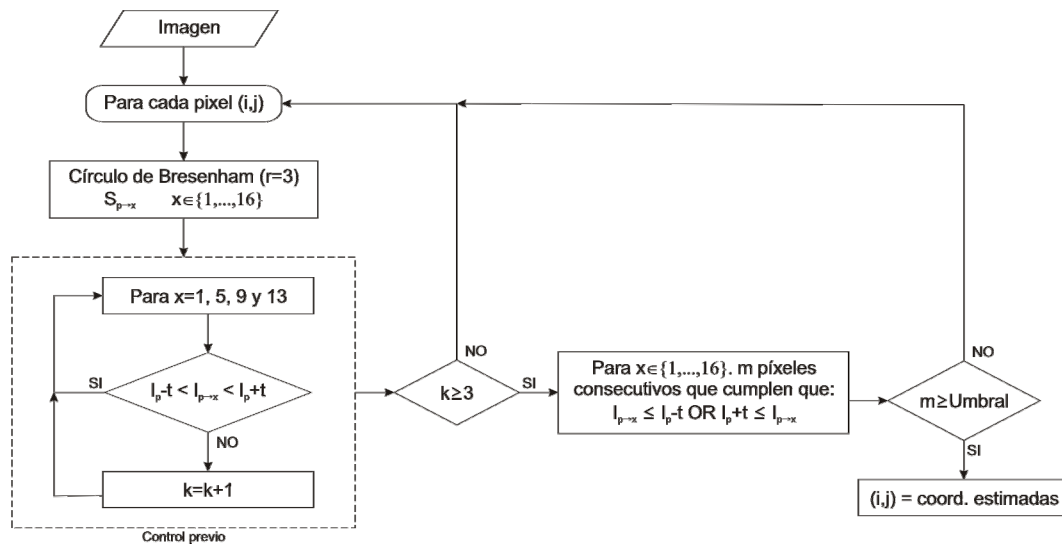


Figura 4.14 Esquema del operador FAST

## 4.4. Correspondencia

También conocido por su anglicismo *matching*, hace referencia a la búsqueda de puntos homólogos en dos o más imágenes. En nuestro caso se utilizara para relacionar los puntos extraídos de la imagen de cámara con sus homólogos en la imagen de rango.

Esta etapa es crítica, ya que condiciona la precisión final del registro. Además la textura de la imagen de rango es de baja calidad por lo que es necesario combinar diferentes procesos para obtener un resultado válido. Para ello, se ha desarrollado una correspondencia adecuada para los condicionantes mencionados, combinando múltiples algoritmos del campo de la visión computacional y de la fotogrametría en pos de conseguir una correspondencia sólida, la cual se ha denominado como *correspondencia robusta jerárquica*.

Es necesario remarcar que dicho proceso de correspondencia es completamente automático, excepto por el establecimiento de los umbrales o tolerancias los cuales dependerán en última instancia del usuario final puesto que una incorrecta definición de los umbrales depararán resultados pobres en términos de calidad.

La metodología propuesta se establece en dos fases diferenciadas:

- Obtención de una lista preliminar de pares de candidatos homólogos.
- Obtención de la lista final de pares homólogos que sean consistentes con el modelo del objeto.

En los apartados siguientes se expondrán los diferentes algoritmos utilizados y su funcionamiento conjunto.

### 4.4.1. Correspondencia basada en características

La correspondencia basada en características o FBM (*Features Based Matching*) no utiliza los niveles de gris como descriptores de la imagen, sino que emplea una descripción abstracta de la imagen basada en puntos, líneas o áreas. La ventaja radica en que dichas características se corresponden con los elementos que habrían sido seleccionados por un operador humano, por ejemplo, los bordes del objeto se corresponden con cambios radiométricos en la imagen.

Esta técnica es la combinación de dos elementos de visión computacional:

- *Detección de puntos de interés*: para identificar aquellos puntos que están asociados a áreas cuya función de autocorrelación (o matriz hessiana) presenta picos.
- *Correspondencia basada en áreas*: para establecer las relaciones entre varios conjuntos de puntos de interés, pertenecientes cada uno a distintas imágenes.

De ellos, la primera etapa, consistente en obtener las características de la imagen, en este caso puntos, ha sido tratada en el apartado 4.3.

En la siguiente etapa, se partirá del conocimiento de las ventanas asociadas a los puntos característicos y se buscará establecer sus correspondientes homólogos sobre la imagen de rango, lo cual se logra mediante el **ABM** (*Area Based Matching*) que será detallado en los apartados siguientes. Existen diferentes criterios para calcular el índice de semejanza entre el patrón y la ventana de búsqueda. Los dos más utilizados son:

- **Correlación:** se evalúa el valor de correlación normalizada para determinar los puntos homólogos.
- **Mínimos cuadrados:** se basa en usar la técnica del mismo nombre para minimizar las diferencias geométricas y radiométricas de valores de gris entre ambas imágenes.

En la metodología de correspondencia propuesta se van a integrar ambos criterios, siendo usados en aquellas fases en las que sean más adecuados y puedan complementarse, es decir, la precisión proporcionada por el método de los mínimos cuadrados es claramente superior a la proporcionada por la medida de correlación, pero a su vez a adolece de necesitar buenas aproximaciones iniciales.

Esta integración de técnicas se logra mediante la aplicación de **pirámides de imagen**, permitiendo además afinar en el establecimiento de puntos homólogos a la par que reduce el coste computacional del proceso global.

Además complementariamente con la técnica FBM, es necesario aplicar **restricciones geométricas** para acotar el tamaño y posición de la ventana de búsqueda respecto a la imagen completa.

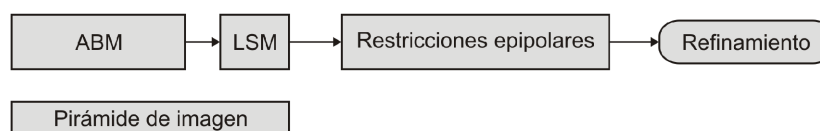


Figura 4.15 Correspondencia robusta jerárquica

#### 4.4.2. Correspondencia basada en áreas

Se basa en medir la similaridad entre un patrón predefinido (subimagen) y su correspondiente en la otra imagen, a través de su grado de correlación el cual es función de la varianza y covarianza de los niveles digitales.

El patrón es un conjunto de niveles digitales de una ventana cuadrada centrada en un punto característico, que permanecen constantes durante el proceso, y es comparado con todas aquellas ventanas que puedan formarse en el espacio de búsqueda de la imagen objetivo (Figura 4.16). Es decir, sobre la imagen objetivo se establece un espacio (o ventana) de búsqueda sobre el cual se espera que esté presente el punto homólogo. Y dentro de dicho espacio se establecerá una ventana (o máscara) de las mismas dimensiones que el patrón, que recorrerá todas las posiciones posibles dentro del espacio de búsqueda. Para cada posición se calculará el grado de correlación y se establecerá como homólogo a aquel punto de la imagen objetivo que presente el valor máximo en la función de correlación.

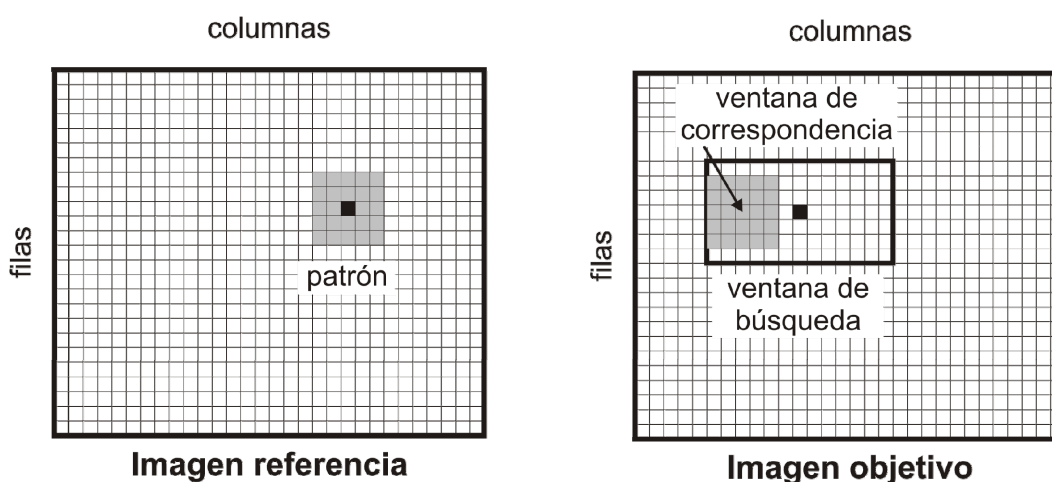


Figura 4.16 Correspondencia basada en áreas

Esta técnica funciona adecuadamente siempre que exista una regularidad geométrica entre las dos imágenes, por ello resulta sensible a (Banks et al., 1999):

- Textura pobre: cuanto menor sea el gradiente de los niveles digitales en la imagen, menor será el valor máximo de correlación, ergo no se podrá establecer una correspondencia fiable.
- Patrones repetitivos: cuando diversos objetos presentan formas radiométricas semejantes (por ejemplo, las ventanas de una fachada) se produce una ambigüedad en la determinación del homólogo correspondiente, siendo este potencialmente inválido
- Variaciones de escala: el mismo objeto a diferente escala en distintas imágenes deja de ser significativo para esta estrategia de correspondencia.
- Rotaciones: al igual que el caso anterior si un mismo objeto aparece rotado en distintas imágenes, la estrategia de correlación deja de ser significativa.
- Oclusiones: dan lugar a que porciones de una escena sólo sean visibles en una imagen.
- Reflexión especular: el algoritmo de correspondencia basado en áreas asumen que los objetos tienen un comportamiento lambertiano, es decir, reflejan la luz equitativamente en todas las direcciones. Si el objeto tiene un comportamiento especular, según el punto de vista de la imagen sus niveles digitales variarán, según sus propiedades radiométricas.

El grado de semejanza del patrón con la ventana de correspondencia se determina mediante la función de correlación cruzada. Los primeros trabajos se remontan a Scharp et al. (1965), y las primeras experiencias en este aspecto fueron realizadas por Hannah (1974) y Kreiling (1976), desde entonces ha sido una herramienta ampliamente extendida en el campo de la fotogrametría por su sencillez de cálculo, implementación y su eficacia.

La función de correlación cruzada ( $\gamma$ ) se define como:

$$\gamma = \frac{\sigma_{fg}}{\sigma_f \cdot \sigma_g} = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{f}) \cdot (g_i - \bar{g})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{f})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (g_i - \bar{g})^2}} \quad \gamma \in [-1, +1] \quad (4.32)$$

Siendo  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  los valores medios de las ventanas de la imagen de referencia y la imagen objetivo respectivamente,  $f_i$  y  $g_i$  los valores del nivel digital en la posición  $i$ -ésima de la ventana, y  $n$  el número de píxeles en la ventana de búsqueda.

El factor de correlación cruzado está definido en el intervalo  $[-1, 1]$ . Si  $\gamma=1$  significaría que para la posición dada, la ventana de búsqueda sería idéntica al patrón, caso ideal que no se da en la práctica debido a los múltiples factores que influyen en las imágenes (ruido, variaciones de textura, etc). La carencia total de similaridad viene indicada por  $\gamma=0$ , mientras que si el factor de correlación presentase el valor  $\gamma=-1$  significaría que la correlación existente es inversa.

Con la finalidad de evitar, o al menos reducir, la cantidad de correspondencias erróneas, se establece un umbral o valor mínimo que debe alcanzar el coeficiente de correlación del punto propuesto por el algoritmo, a fin de ser catalogado como emparejamiento correcto.

Asimismo, puesto que está técnica se integra en una pirámide de imagen, y que la correspondencia entre puntos variará según la resolución de cada nivel, se incluye un *umbral adaptativo* con la finalidad de tener en cuenta dicha variabilidad. Cuanto menor sea la resolución menos exigente será el valor de tolerancia (Wong y Hall, 1978).

El resultado final serían las coordenadas del punto homólogo con precisión píxel, considerando que la ventana se mueve a intervalos de un píxel. Si bien el algoritmo de correspondencia por áreas puede refinar el resultado final ajustando un polinomio (tipo parábola) o una superficie para el entorno del punto candidato, permitiendo obtener precisión subpíxel, en nuestra técnica de correspondencia desarrollada, dicho ajuste final se obvia porque como se detallará en apartados siguientes funcionará como inicializador de la aproximación inicial de la correspondencia basada en mínimos cuadrados (D'Apuzzo, 2000).

Esta técnica tiene como principales ventajas su sencillez, tanto conceptual como de implementación), rapidez computacional y que no necesita aproximaciones iniciales. No obstante adolece de importantes desventajas, tales como la debilidad frente a patrones repetitivos o ante la existencia de importantes diferencias radiométricas y/o geométricas entre ambas imágenes. En función de estas características, se ha optado por emplear la técnica de correlación para proveer de aproximaciones iniciales suficientemente buenas como para poder aplicar la técnica de mínimos cuadrados, así como para descartar emparejamientos erróneos a medida que se avanza en la pirámide de imágenes. Es decir, aquellas parejas de puntos cuyo valor de correlación sea inferior al umbral definido para el nivel de la pirámide dado quedan eliminadas del resto del proceso de correspondencia, por lo que a medida que se aumenta la resolución de la pirámide, se reducirá el número final de emparejamientos incorrectos, al haber sido filtrados estos durante la estrategia piramidal (4.4.4).

### 4.4.3. Correspondencia basada en mínimos cuadrados

La correspondencia por mínimos cuadrados también conocida como LSM (*Least Squares Matching*) fue desarrollada inicialmente por Förstner (1982), Ackermann (1984) y expandido por Grün (1985). Este método está basado en minimizar las diferencias de valores digitales entre el patrón y la ventana de correspondencia, motivo por el cual la posición y la forma de la ventana de correspondencia son parámetros que han de determinarse en el proceso de ajuste. Es decir, la forma y posición de la ventana de ajuste varían hasta que la diferencia de nivel digital entre la ventana de correspondencia (deformada) y el patrón (fijo) alcance un valor mínimo (Figura 4.17).

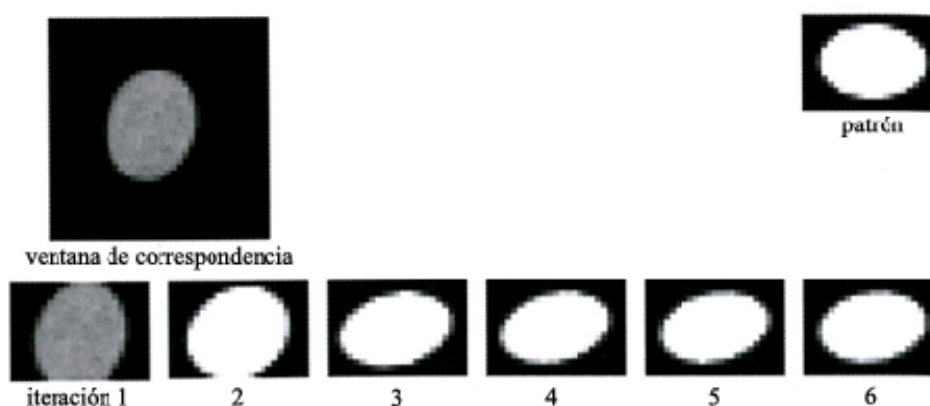


Figura 4.17 Transformación iterativa de la ventana de búsqueda (adaptado de Luhmann, 2006)

Sean dos regiones imagen, existen las funciones bidimensionales discretas  $f(x,y)$  y  $g(x,y)$  pertenecientes al patrón y a la ventana de búsqueda respectivamente. La correspondencia ideal se establecería como:

$$f(x, y) = g(x, y) \tag{4.33}$$

Pero debido al efecto aleatorio del ruido presente en ambas imágenes la ecuación anterior no es consistente, por lo tanto es necesario incluir un vector de ruido  $e(x,y)$ .

$$f(x, y) - e(x, y) = g(x, y) \tag{4.34}$$

La determinación del punto de correspondencia se logra tras minimizar las distancias entre los niveles de gris de ambas ventanas, mediante la estimación de mínimos cuadrados. La localización del punto homólogo resultará como vector desplazamiento sobre la posición inicial de  $g(x,y)$ . Además se pueden incluir parámetros adicionales en el modelo, a fin de compensar efectos sistemáticos como deformaciones de la imagen (mediante una transformación afín) o variaciones radiométricas.

Puesto que la ecuación (4.34) no es lineal, es necesario aplicar la linearización de Taylor.



$$f(x, y) - e(x, y) = g^0(x, y) + \frac{\partial g^0(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial g^0(x, y)}{\partial y} \cdot dy \quad (4.35)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p_i} \cdot dp_i \quad dy = \frac{\partial y}{\partial p_i} \cdot dp_i$$

Donde  $g^0(x, y)$  es la aproximación inicial de la ventana de búsqueda, y  $p_i$  el parámetro de transformación  $i$ -ésimo. Los parámetros que se consideran son de los siguientes modelos funcionales:

El *modelo funcional geométrico* considerado es una transformación lineal afín:

$$\begin{cases} x = a_{11} + a_{12} \cdot x_0 + a_{21} \cdot y_0 \\ y = b_{11} + b_{12} \cdot x_0 + b_{21} \cdot y_0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Donde  $x_0, y_0$  son las coordenadas de la posición inicial de  $g^0(x, y)$ .

El *modelo funcional radiométrico* considera que existe una relación lineal entre ambas ventanas mediante una variación de brillo ( $r_0$ ) e intensidad ( $r_1$ ).

$$f(x, y) + e(x, y) = g(x, y) \cdot r_1 + r_0 \quad (4.37)$$

El modelo matricial completo resultante de considerar los ocho parámetros anteriores, es:

$$[f(x, y) - g^0(x, y)] = \begin{bmatrix} g_x & g_x x_0 & g_x y_0 & g_y & g_y x_0 & g_y y_0 & g^0(x, y) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_{11} \\ da_{12} \\ da_{21} \\ db_{11} \\ db_{12} \\ db_{21} \\ r_1 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Siendo  $g_x$  y  $g_y$  las derivadas direccionales o función gradiente es filas ( $y$ ) y columnas ( $x$ ). En la estrategia de correspondencia sólo se considerarán las traslaciones conjuntamente con el modelo radiométrico, puesto que las aproximaciones iniciales necesarias para la generación de la imagen de rango, permiten obviar el resto de parámetros de la transformación afín (variaciones de escala y rotaciones) al ser estos poco significativos. El sistema final simplificado que se aplicará es:

$$[f(x, y) - g^0(x, y)] = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g^0(x, y) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_{11} \\ db_{11} \\ r_1 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

El sistema de ecuaciones de observación obtenido considerando los residuos ( $e$ ) es:

$$L - e = A \cdot x$$

Y la resolución por mínimos cuadrados sin ponderar es:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T L \quad (4.40)$$

Donde el vector  $\hat{x}$  contiene las correcciones a la posición inicial, a parte de las correcciones radiométricas, que permiten obtener las coordenadas finales del punto de interés.

Finalmente los residuos se calcularían según la fórmula siguiente:

$$v_i = \hat{g}(x, y)_i - f(x, y)_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.41)$$

Resumiendo, la correspondencia LSM es una técnica que busca contrarrestar las limitaciones geométricas y radiométricas del algoritmo de correlación cruzada y proveer emparejamientos con **precisión subpíxel**.

No obstante, la técnica presenta una importante debilidad: necesita buenas **aproximaciones iniciales** para que el modelo converja. Por ello, el LSM funcionará sinérgicamente con la estrategia de correspondencia por áreas ABM, proporcionando éste último coordenadas con precisión píxel, para que el primero refine la correspondencia final, alcanzándose precisiones inferiores al píxel

Esto se logra integrándolos en una pirámide de imagen, de forma que en el último nivel de la pirámide (resolución real) aplique el LSM y previamente en los niveles inferiores aplique la correspondencia basada en áreas, ABM.

#### 4.4.4. Estrategia piramidal

Las pirámides de imágenes son una herramienta ampliamente extendida en el campo del procesamiento de imágenes, consistente en almacenar una recopilación de imágenes con resolución decreciente, lugar de almacenar únicamente la imagen de alta resolución. Inicialmente se desarrolló como método de compresión en visión computacional (Burt y Adelson, 1983). Su implementación conllevaba un incremento del 33% del tamaño total de la imagen, permitiendo en cambio una ágil visualización a diferentes grados de zoom.

La base de la pirámide contiene la imagen original de alta resolución, mientras que según nos movemos hacia la cima nos encontraríamos con imágenes de menor resolución. Los píxeles de cada escalón se generan tomando grupos de 2x2 píxeles de la capa inferior y realizando su promedio, por ello cada nivel tiene la mitad de resolución que el anterior. Pueden generarse tantos niveles como sea necesario hasta alcanzar la cima de la pirámide, en la que, en última instancia, la imagen se reduciría a un único píxel, que representaría el nivel digital medio de toda la imagen.

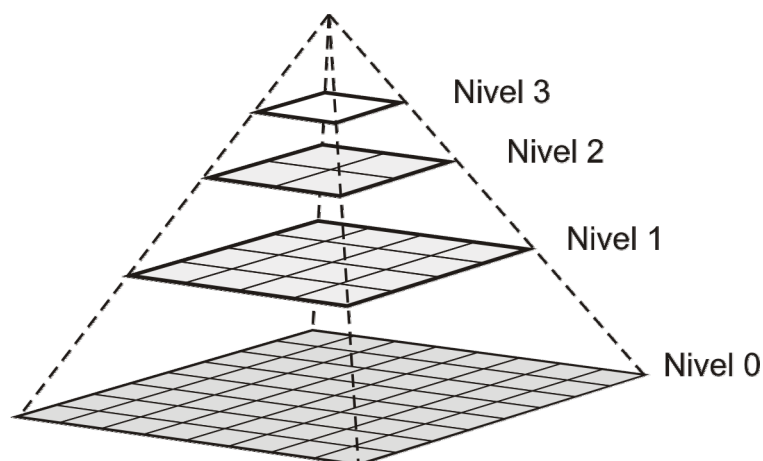


Figura 4.18 Pirámide de imagen

No obstante, la generación de los niveles de la pirámide no puede realizarse mediante un simple redimensionamiento de la imagen, ya que cuando únicamente se submuestra una imagen se produce un efecto indeseado, el *aliasing*, consistente en que ciertas curvas y líneas inclinadas presenten un efecto visual de diente de sierra o bordes dentados. Dicho efecto es causado por la información de alta frecuencia de la imagen original que persiste en la imagen submuestreada.

Una imagen raster o imagen discreta es un muestreo de una función continua (señal analógica, continua y de precisión infinita), donde se han asignado valores finitos (discretización) con el fin de poder codificarla. En la operación de submuestreo, al reducir el número de muestras (píxeles), las variaciones producidas por las componentes de la frecuencia de la señal original pueden ser demasiado bruscas como para poder ser reproducidos por las muestras finales (de número claramente inferior) por lo que se puede producir *aliasing*.

Por ello, es necesario filtrar las altas frecuencias de la imagen mediante un filtro de paso bajo como el filtro gaussiano. Dicha máscara es circular y las secciones que contienen al centro tienen la forma de la curva normal. En el caso bidimensional, la fórmula es:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \quad (4.42)$$

donde  $x, y$  son las coordenadas locales respecto al punto origen de la máscara, y  $\sigma$  es la desviación típica que determina la forma de la campana, así como el tamaño de la máscara gaussiana.

Para su aplicación práctica en imágenes digitales se genera una máscara discreta, cuyas dimensiones habituales son 5x5 píxeles (Figura 4.19), ya que proporciona un filtrado adecuado con un bajo coste computacional, aparte de que por la expresión propia de la función (4.42) esta decae muy rápidamente y no se obtienen mejoras ampliando el tamaño de la máscara.

$$\begin{bmatrix} 0.0025 & 0.0125 & 0.0200 & 0.0125 & 0.0025 \\ 0.0125 & 0.0625 & 0.1000 & 0.0625 & 0.0125 \\ 0.0200 & 0.1000 & 0.1600 & 0.1000 & 0.0200 \\ 0.0125 & 0.0625 & 0.1000 & 0.0625 & 0.0125 \\ 0.0025 & 0.0125 & 0.0200 & 0.0125 & 0.0025 \end{bmatrix}$$

Figura 4.19 Máscara gaussiana para  $\sigma = 1$

Las pirámides de imagen que incluyen operaciones conjuntas de remuestreo y filtrado, son conocidas también como *pirámides gaussianas*. Se integran en el proceso de matching robusto como parte fundamental al poder articular entre sí las técnicas de correspondencia basada en áreas y en mínimos cuadrados. En los niveles de menor resolución espacial (y detalle por tanto) se aplicará el algoritmo de la correspondencia basada en áreas, para generar aproximaciones iniciales suficientemente buenas como para poder aplicar en el último nivel de la pirámide (resolución real) la correspondencia por mínimos cuadrados LSM.

#### 4.4.5. Restricciones geométricas: epipolaridad

A pesar de la combinación de técnicas empleadas las propias diferencias intrínsecas entre ambas imágenes proporcionarán resultados que contengan errores groseros. Por ello habrá que aplicar restricciones a los algoritmos para obtener una solución óptima. Las restricciones más comunes son (Pateraki, 2000):

- *Restricciones epipolares*: dos puntos homólogos han de estar localizados sobre dos líneas epipolares respecto al punto objeto. Esta restricción depende de la geometría de la toma y no del contenido de la escena.
- *Restricción de unicidad*: la primitiva de una imagen no puede tener más de un punto homólogo en la otra imagen. Este condicionante suele tener excepciones, tales como las oclusiones, superficies transparentes o diferentes puntos que descansan sobre una línea.
- *Restricción de continuidad de la superficie*: si un segmento  $r$  se empareja con un segmento  $s$ , entonces el vecino inmediato a la derecha (o izquierda) al segmento  $r$  se deberá emparejar con el vecino más próximo a la derecha (o izquierda) a  $s$ , siempre y cuando se pueda establecer una correspondencia entre ambos.
- *Restricción de posición*: se mantienen las posiciones relativas existentes entre los puntos, es decir, si un punto  $p_1$  está a la derecha de otro punto  $q_1$  en la imagen primera, entonces en la segunda imagen  $p_2$  estará también a la derecha de  $q_2$ .
- *Restricción fotométrica*: está basado en la hipótesis lambertiana, según la cual un punto objeto reflejará la intensidad luminosa en la misma cantidad en todas direcciones. No obstante, existen muchos factores que pueden causar variaciones radiométricas entre dos imágenes con solape.

Respecto a esta enumeración es necesario reseñar que la restricción fotométrica no se considera al apoyarse sobre el comportamiento lambertiano de los objetos para dos imágenes dadas que comparten el mismo espectro. En el caso del algoritmo de registro de sensores propuesto en este capítulo, el espectro radiométrico la imagen de rango no tiene por qué ser coincidente con el de la imagen de alta resolución, sino que puede ser un subintervalo, o pertenecer a una longitud de onda diferente (por ejemplo: datos del infrarrojo cercano comparados con el canal rojo del espectro visible). Por su parte, la restricción de continuidad de superficie hace referencia al matching de líneas y no al de puntos (sección 4.3)

Del resto de restricciones geométricas, las de unicidad y posición, son para el caso considerado de registro de sensores, derivaciones lógicas de la restricción geométrica que será aplicada en este flujo de trabajo: la **restricción geométrica epipolar**, que es la más extendida en visión computacional y cuya fundamentación ya fue tratada en la sección 2.5.

La aplicación de la restricción epipolar pasa por la resolución de la ecuación de la matriz fundamental (2.63):

$$x'^T \cdot F \cdot x = 0 \quad (4.43)$$

Donde  $x$  y  $x'$  son las coordenadas imagen homogéneas de pares de puntos homólogos en dos imágenes.

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Cada pareja de puntos genera una ecuación lineal. Los coeficientes de esta ecuación se pueden escribir fácilmente en función de los valores conocidos  $x$  y  $x'$ . Concretamente, la ecuación que correspondería a un par de puntos homólogos sería:

$$x'xf_{11} + x'yf_{12} + x'f_{13} + y'xf_{21} + y'yf_{22} + y'f_{23} + xf_{31} + yf_{32} + f_{33} = 0 \quad (4.45)$$

Siendo  $\mathbf{f}$  el vector construido mediante las entradas de la matriz Fundamental  $\mathbf{F}$  ordenada por filas. Entonces (4.45) puede expresarse mediante el producto interno de ambos vectores.

$$(x'x, x'y, x', y'x, y'y, y', x, y, 1)\mathbf{f} = 0 \quad (4.46)$$

Para un conjunto de  $n$  puntos homólogos, se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0 \quad (4.47)$$

Recordando que  $\mathbf{f}$  es el vector que contiene los elementos de la matriz fundamental ordenados por filas y  $\mathbf{A}$  la matriz de diseño donde participan las coordenadas píxel de los  $n$  puntos homólogos  $(x, y)$ .

Dicho sistema es un sistema homogéneo de ecuaciones, tal que para que exista solución única, la matriz  $\mathbf{A}$  ha de tener rango 8. En el caso de que los datos de

entrada estén afectados por ruido y/o errores, las filas de la matriz de diseño ha de ser mayor a 8 y la solución puede obtenerse mediante una estimación mínimo cuadrática.

La solución mínimo cuadrática para  $\mathbf{f}$  es el vector singular correspondiente al menor valor singular de la matriz de diseño  $\mathbf{A}$ . De esta forma, el vector solución ( $\mathbf{f}$ ) minimiza la norma  $\|\mathbf{A}\mathbf{f}\|$  tal que  $\|\mathbf{f}\|=1$ . Dicha resolución es conocida por el nombre HLS (*Homogeneous Least Squares*) y se apoya en la descomposición de valores singulares (*svd*).

La descomposición *svd* es de gran importancia tanto teórica como práctica en los problemas de mínimos cuadrados, remontándose su desarrollo a más de un siglo (Beltrani, 1873). Se define que para una matriz real  $\mathbf{A}$  ( $n \times n$ ), existen las matrices:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T \quad (4.48)$$

donde  $\mathbf{D}$  es una matriz real cuadrada y diagonal ( $n \times n$ ),  $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  tal que:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \quad (4.49)$$

donde  $\sigma_i$  son los valores singulares de la matriz  $\mathbf{A}$ . Mientras que las matrices unitarias  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  tienen la forma:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \quad \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (4.50)$$

donde  $u_i$  y  $v_i$  son los vectores singulares izquierdo y derecho, respectivamente, asociados al valor propio  $\sigma_i$ . Asimismo se verifica que las matrices  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son ortogonales ( $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$ ).

$$\text{svd}(\mathbf{A}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T \quad \rightarrow \quad \mathbf{f} = \text{ultima columna}(\mathbf{V}^T) \quad (4.51)$$

O expresado distintamente, el vector  $\mathbf{v}_n$  según (4.50). Otra forma de resolución sería descomponiendo la matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , pero al ser una matriz simétrica definida positiva no se modificaría el resultado final (Lawson, 1995):

$$\text{svd}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T \quad (4.52)$$

Otra de las utilidades de la descomposición en valores propios es la obtención de la matriz *pseudoinversa*, que se denota como  $\mathbf{A}^+$ , que es la matriz inversa de la matriz  $\mathbf{A}$ , la cual o bien no es cuadrada o bien presenta un defecto de rango. De forma análoga a (4.48), la matriz pseudoinversa se define como:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{U}^T \quad (4.53)$$

donde  $\mathbf{D}^+$  es la matriz resultante de transponer  $\mathbf{D}$  e invertir todos los elementos no nulos. Es fácilmente demostrable que la pseudoinversa de una matriz invertible es su propia inversa:

$$\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^+ = \mathbf{I} \quad (4.54)$$

El algoritmo descrito es en esencia el **algoritmo de 8 puntos**, el cual fue desarrollado por Longuet-Higgins (1981) y que permitía obtener la solución mediante un sistema de ecuaciones lineales. No obstante dicha resolución, aunque sencilla y eficaz, era demasiado sensible al ruido en la determinación de los pares homólogos.

Un algoritmo mejorado fue el propuesto por Hartley (1997b) y que se basa en normalizar los datos de entrada antes de componer el sistema de ecuaciones. Concretamente se aplica una traslación y un escalado con el fin de mejorar el condicionamiento de la matriz de diseño. Dichas transformaciones son:

- Traslación de los puntos tal que su centroide coincida con el origen.
- Escalado tal que la distancia media de los puntos al origen sea  $\sqrt{2}$ .

Por lo que los datos de entrada han de ser normalizados según un factor de escala y una traslación mediante la matriz  $\mathbf{T}_{\text{norm}}$ .

$$\mathbf{x}_{\text{norm}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}_{\text{norm}}^T \quad \mathbf{T}_{\text{norm}} = \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{x} \\ 0 & 1 & -\bar{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Siendo  $k$  el factor de escala que verifica la condición impuesta para la distancia media y  $(\bar{x}, \bar{y})$  las coordenadas del centroide del conjunto de datos. Así que la matriz de diseño (4.47) se formará mediante las matrices de datos  $x_{\text{norm}}, y_{\text{norm}}$ .

Como se ha comentado en el apartado de geometría epipolar, una característica relevante de la matriz fundamental es que es singular, en concreto posee rango 2; mientras que la matriz obtenida mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (4.52) no cumplirá dicha condición, por lo que es necesario forzar dicha situación. Además la consecuencia de esta repercusión es que las líneas epipolares no se intersecten en un epipolo común.

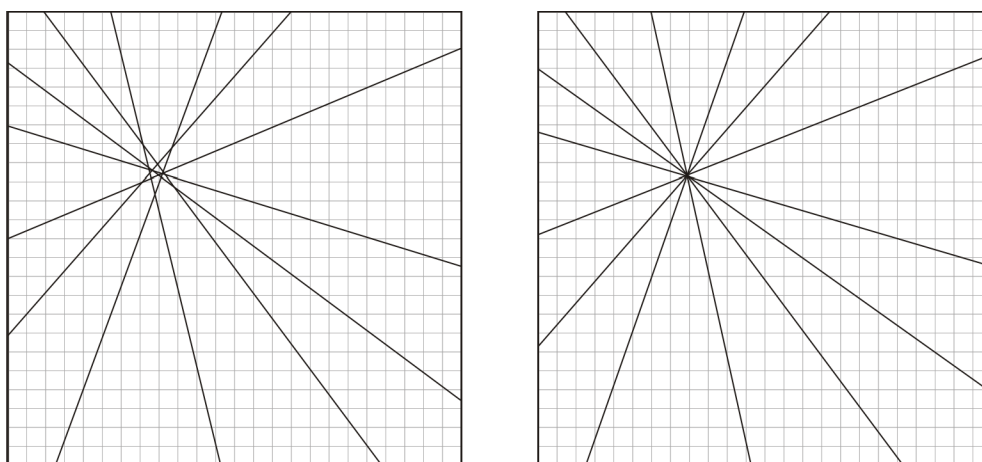


Figura 4.20 Efecto de la singularidad de la matriz fundamental

Por tanto, sea  $\hat{\mathbf{F}}$  la matriz no singular obtenida mediante la resolución HLS<sup>15</sup> y coordenadas normalizadas, esta ha de ser reemplazada por una matriz  $\mathbf{F}'$  tal que minimice la norma de Frobenius  $\|\hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F}'\|_F$  sujeta a la condición de que  $\det(\mathbf{F}') = 0$ . Recordando que la norma de Frobenius de una matriz dada,  $\mathbf{A}$ , de

<sup>15</sup> Acrónimo del inglés: *Homogeneous Least Squares* (Mínimos cuadrados homogéneos). Resolución de un sistema de ecuaciones  $Ax=0$  con más ecuaciones que incógnitas para obtener una solución distinta de la trivial ( $x=0$ ).

dimensiones  $(n \times m)$ , es la raíz cuadrada de la suma al cuadrado del módulo de todas las entradas de dicha matriz  $(a_{ij})$ .

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (4.56)$$

El método más adecuado para forzar la **singularidad** es utilizar la descomposición *svd*. Concretamente sustituyendo el menor valor propio de la matriz **D** por cero.

$$\text{svd}(\hat{F}) = U \cdot \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix} \cdot V^T \quad F' = U \cdot \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^T \quad (4.57)$$

El último paso consistiría en desnormalizar la matriz fundamental **F'**, ya que ha sido obtenida mediante coordenadas trasladadas y escaladas, y el objeto del cálculo es obtener la matriz **F** asociada al conjunto original de datos  $x_i \leftrightarrow x'_i$ ;

$$F = T_{\text{norm}}'^T \cdot F' \cdot T_{\text{norm}} \quad (4.58)$$

donde **T<sub>norm</sub>** es la matriz de normalización definida en la ecuación (4.55).

A fin de evaluar la bondad del cálculo, se han utilizado diferentes métodos de cuantificación, de los cuales se comentarán el error de Sampson (Sampson, 1982) y la distancia residual.

El error o **distancia de Sampson** permite obtener una aproximación de primer orden del error geométrico en la matriz fundamental. Esta función fue desarrollada inicialmente para el ajuste de cónicas (Sampson, 1982), aunque puede aplicarse al caso de la estimación de la matriz fundamental, simplificándose al sólo existir una ecuación por punto. El error de Sampson ( $\delta$ ) responde a la siguiente forma:

$$\delta = -J^T (JJ^T)^{-1} \varepsilon \quad (4.59)$$

donde  $\varepsilon$  es el error algebraico, y **J** la matriz jacobiana. Sea **H** una homografía y **x** y **x'** los vectores homogéneos de dos puntos correspondientes u homólogos en dos imagenes diferentes; el error algebraico se definiría como la diferencia entre **Hx** y el vector **x'** medido en la segunda imagen.

El objetivo del error de Sampson es encontrar el vector  $\delta$  tal que verifique **Jδ = -ε**, y su norma sea mínima:

$$\|\delta\|^2 = \delta^T \delta = \varepsilon^T (JJ^T)^{-1} \varepsilon = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{JJ^T} = \frac{(x_i'^T F x_i)^2}{JJ^T} \quad (4.60)$$

Nótese que según la definición del error de Sampson, en la ecuación (4.59) se hace uso de una matriz inversa lateral a derecha, tal que  $J^+ = J^T (JJ^T)^{-1}$ .

La matriz jacobiana **J** solo tendrá una fila y cuatro columnas, por lo que **JJ<sup>T</sup>** será un escalar.



$$J = \left[ \frac{\partial(\mathbf{x}_i^T \mathbf{F} \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i}, \frac{\partial(\mathbf{x}_i^T \mathbf{F} \mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i'} \right] \quad (4.61)$$

La ecuación (4.61) puede reescribirse si se tiene en cuenta la diferenciación de matrices y vectores<sup>16</sup>:

$$J = \left[ \mathbf{F}^T \mathbf{x}_i', \mathbf{F} \mathbf{x}_i \right] \quad (4.62)$$

Según la definición de matriz jacobiana y a la forma explícita de la ecuación de la matriz fundamental (4.45), resulta:

$$J J^T = (\mathbf{F} \mathbf{x}_i)_1^2 + (\mathbf{F} \mathbf{x}_i)_2^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{x}_i')_1^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{x}_i')_2^2 \quad (4.63)$$

donde la entrada  $(\mathbf{F} \mathbf{x}_i)_j^2$  representa el cuadrado de la entrada  $j$ -ésima del vector  $\mathbf{F} \mathbf{x}_i$ , siendo éste el resultado de multiplicar la matriz fundamental ( $\mathbf{F}$ ) y el vector de coordenadas ( $\mathbf{x}$ ) del punto  $i$ -ésimo. La función de coste final es:

$$\phi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{x}_i^T \mathbf{F} \mathbf{x}_i)^2}{(\mathbf{F} \mathbf{x}_i)_1^2 + (\mathbf{F} \mathbf{x}_i)_2^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{x}_i')_1^2 + (\mathbf{F}^T \mathbf{x}_i')_2^2} \quad (4.64)$$

Esta distancia representa la separación entre el punto y su línea epipolar proyectada, calculada para ambas imágenes. Esta distancia da una aproximación de primer orden de error geométrico, y su principal ventaja es que solamente intervienen en el cálculo de la función de coste los parámetros de la matriz  $\mathbf{F}$ .

Otro método de cuantificación más simple es el de la **distancia residual**, el cual se define como:

$$d_e = \frac{1}{N} \sum_i^N d(\mathbf{x}_i', \mathbf{F} \mathbf{x}_i)^2 + d(\mathbf{x}_i, \mathbf{F}^T \mathbf{x}_i')^2 \quad (4.65)$$

Donde  $d(x, l)$  es la distancia ortogonal entre un punto  $x$  y la línea epipolar  $l$ . El error final es el promedio del cuadrado de las distancias entre un punto  $i$ -ésimo y su línea epipolar, evaluado en ambas imágenes.

Ambos métodos son muy similares aunque se diferencian en que el error de Sampson se calcula para los  $n$  puntos que intervienen en el cálculo de la matriz fundamental, mientras que en el error residual participan los  $N$  puntos totales (correspondencias válidas y posibles errores groseros).

En este punto se finalizaría el apartado sobre el cálculo de la matriz fundamental si no fuese porque al estar incluida en un método automatizado, el conjunto de pares de puntos homólogos de entrada presentan un alto número de errores groseros (outliers) que reducen la precisión en la determinación de la matriz fundamental, y consecuentemente la precisión final de proceso. Para evitar este

---

<sup>16</sup> Sean los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y la matriz  $\mathbf{M}$  se verifica que:  $\frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{M} \mathbf{b}$ ;  $\frac{\partial(\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{M}^T \mathbf{a}$

efecto el cálculo de la matriz  $F$  se incluyen dentro del estimador robusto **RANSAC** - *Random sample consensus* (Fischler y Bolles, 1981), el cual está preparado para trabajar con grandes cantidades de outliers. Este método de ajuste difiere de los métodos tradicionales ya que en lugar de utilizar el conjunto de puntos disponibles e ir reduciéndolo a base de eliminar los errores groseros; parte de un pequeño subconjunto de la población inicial, que irá aumentando con los datos que lo verifican.

Este algoritmo permite que las correspondencias válidas (inliers) sean separadas de los errores groseros o falsos positivos (outliers). Se basa en, para un conjunto de puntos  $N$ , seleccionar una muestra aleatoria  $k$  mínima que permita resolver el modelo funcional; seguidamente para cada punto del conjunto inicial ( $N$ ) se evalúa el error asociado al modelo  $k$ -ésimo. Si dicho error está por debajo de un umbral definido previamente, el modelo obtendrá un voto. Se repiten las muestras aleatorias un número determinado de veces y se considerará que el modelo que mejor se adapta al conjunto  $N$  es aquel que tenga el mayor número de votos.

Respecto a la aplicación del algoritmo de RANSAC es necesario tener en cuenta el número de muestras que es necesario tomar, ya que según el caso, no será necesario tomar todas las combinaciones posibles, siendo además computacionalmente muy costoso, debido a que las combinaciones todos los elementos ( $N$ ) tomados en grupos para cumplir el número mínimo de observaciones ( $n$ ) serían:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (4.66)$$

que por ejemplo, para 300 puntos en un sistema cuyo número mínimo de muestras fuese de 8 puntos, depararía un total de 1.481<sub>2</sub>062.243,936.275 combinaciones posibles.

Por ello el número máximo de muestras  $S$  se escogerá de manera que al menos una muestra  $n$  esté libre de outliers con una probabilidad  $p$  (normalmente igual a 0,99). Definiendo  $w$  como la probabilidad de que un punto seleccionado sea un inlier, resulta que la de los outliers  $e=1-w$ . La probabilidad mínima de encontrar al menos un conjunto de observaciones libre de outliers, o errores groseros, será:

$$1 - p = (1 - w^n)^S \quad (4.67)$$

Por lo tanto, el número de muestras que habrá que tomar son:

$$S = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-e)^n)} \quad (4.68)$$

La demostración de la fórmula (4.67) se expone seguidamente (Collins, 2007):

$w$	probabilidad de que un punto sea inlier	
$w^n$	prob. de escoger una muestra de $n$ inliers	
$1 - w^n$	prob. de que la muestra tenga uno o más outliers	(4.69)
$(1 - w^n)^S$	prob. de que $S$ muestras tenga uno o más outliers	
$1 - (1 - w^n)^S$	prob. de que al menos una muestra $n$ este libre de outliers	

El método deja dos umbrales o parámetros libres que pueden ser definidos por el usuario final:

- Umbral de tolerancia: para adecuarse a cada caso particular.
- Número máximo de iteraciones: en caso de que el sistema se demorase excesivamente en el alcanzar el número máximo de muestras ( $S$ )

En el caso del cálculo de la matriz fundamental, la aplicación del método de 8 puntos normalizado conjuntamente con el estimador robusto de RANSAC puede verse resumido en la Figura 4.21, donde el criterio de parada es el número máximo de muestras ( $S$ ) recalculado en función del número de inliers ( $I_k$ ) para la  $k$ -ésima iteración, siempre y cuando este supere al número máximo de inliers acumulado hasta dicha iteración ( $I$ ).

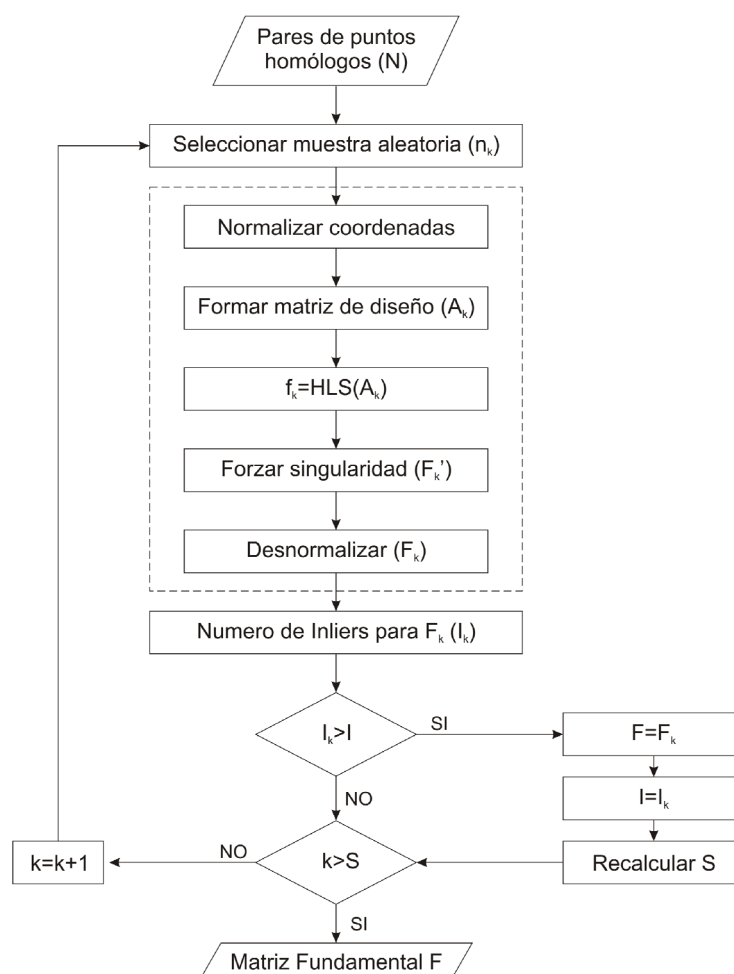


Figura 4.21 Esquema de cálculo de la matriz fundamental

La tolerancia o umbral del proceso de votación de RANSAC se establece en base a la función de coste de Sampson ( $\phi_F$ ) tomando los residuos algebraicos en unidades píxel.

## 4.5. Resección espacial

Una vez resuelta la tarea de la correspondencia se puede proceder a resolver la resección espacial o intersección inversa. Esta operación es bien conocida en la fotogrametría clásica aérea (Kraus, 1997) busca determinar la posición y orientación de la cámara respecto del objeto, a partir de las fotocoordenadas y coordenadas objeto de una serie de puntos.

El resultado de la resección espacial son los parámetros de orientación externa: posición del centro de proyección de la cámara en el sistema de coordenadas terreno u objeto ( $X_S, Y_S, Z_S$ ) y su orientación mediante las rotaciones ( $\omega, \phi, \kappa$ ).

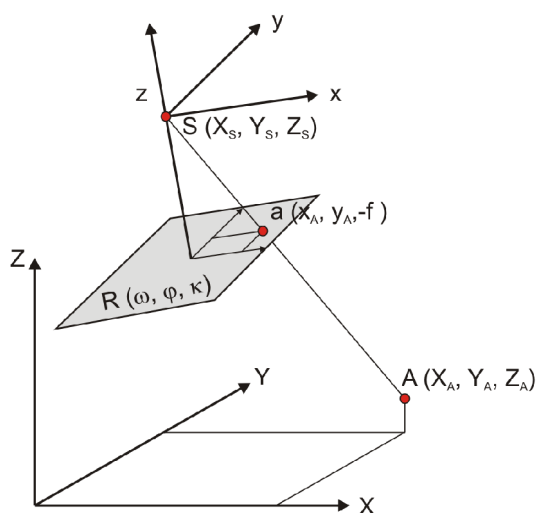


Figura 4.22 Resolución de la orientación inversa

Este algoritmo se fundamenta en la condición de colinealidad que verifica el punto de vista  $S$ , un punto en el terreno  $A$  y su correspondiente sobre el plano imagen  $a$ .

Si bien la condición de colinealidad ha sido bien conocida en el campo de las matemáticas, su incorporación a la disciplina fotogramétrica puede datarse a principios del siglo XX cuando Sebastian Finsterwalder (1862-1951) postuló las bases de la fotogrametría analítica mediante una serie de publicaciones entre 1899 y 1937 en la que trató las relaciones geométricas que gobiernan las resecciones y las intersecciones, además de las orientaciones relativa y absoluta (Ghosh, 2005).

### 4.5.1. Orientación Externa Simple (OES)

En la fotogrametría área clásica la fase de determinación de los parámetros de orientación y localización de las dos cámaras del par estéreo respecto al sistema

terreno se realizaba en dos pasos: orientación relativa (con 5 incógnitas) y orientación absoluta (7 incógnitas de un Helmert 3D). Este modus operandi era debido a la instrumentación disponible a mediados del siglo XX, restituidores analógicos y analíticos. Con la llegada de la potencia de cálculo de los ordenadores y con la abstracción de los nuevos restituidores digitales (al no ser necesario materializar físicamente la intersección de rayos) se recupera la orientación externa en un único paso, denominada así porque se determinan mediante un sistema matemático los 6 parámetros de orientación de una única imagen.

Existen dos formas de resolución según su complejidad, siendo los conocidos:

- Modelo simplificado
- Modelo riguroso

En este apartado se comenzará describiendo el modelo simple, el cuales el más extendido en el campo de la fotogrametría, y seguidamente (en la sección 4.5.2) se enlazará con el método riguroso.

Las ecuaciones subyacentes a la orientación inversa (Figura 4.22) se derivan de establecer que el vector que une a un punto imagen y el punto de vista ( $Sa$ ) y el que une su correspondiente en el terreno con el punto de vista ( $SA$ ) son coincidentes en orientación, sentido y solo difieren en un factor de proporcionalidad. Ese factor puede ser fácilmente eliminado al disponerse de tres ecuaciones para el punto en cuestión (estamos en un sistema  $\mathbb{R}^3$ ), obteniéndose las ampliamente conocidas ecuaciones de colinealidad:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} + f \cdot \begin{bmatrix} u/w \\ v/w \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R \cdot \left[ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S \right] \quad (4.70)$$

donde  $(x,y)$  son las fotocoordenadas,  $(V_x, V_y)$  son los residuos asociados a las fotocoordenadas,  $f$  la distancia principal,  $\mathbf{R}$  la matriz de rotación,  $(X,Y,Z)$  las coordenadas terreno,  $(X,Y,Z)_S$  las coordenadas de punto de vista. En (4.70) se declaran de forma implícita dos funciones diferentes  $F$  y  $G$  según sea para la componente  $x$  e  $y$  respectivamente.

$$\begin{aligned} F &\equiv w \cdot x + f \cdot u = 0 \\ G &\equiv w \cdot y + f \cdot v = 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

La ecuación (4.70) puede expresarse de forma más clásica:

$$\begin{aligned} F \equiv x &= -f \frac{r_{11}(X - X_S) + r_{12}(Y - Y_S) + r_{13}(Z - Z_S)}{r_{31}(X - X_S) + r_{32}(Y - Y_S) + r_{33}(Z - Z_S)} \\ G \equiv y &= -f \frac{r_{21}(X - X_S) + r_{22}(Y - Y_S) + r_{23}(Z - Z_S)}{r_{31}(X - X_S) + r_{32}(Y - Y_S) + r_{33}(Z - Z_S)} \end{aligned} \quad (4.72)$$

En base a dicha consideración, la resolución del sistema pasa por su linealización mediante el desarrollo en serie de Taylor, el cual establece la expresión siguiente para una función  $f(x)$  dada:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (4.73)$$

La aplicación de la linealización (4.73) de funciones  $F$  y  $G$  de colinealidad para un entorno aproximado (subíndice 0) depara la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} F &\equiv F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_0 \delta\omega + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_0 \delta\varphi + \left(\frac{\partial F}{\partial \chi}\right)_0 \delta\chi + \left(\frac{\partial F}{\partial X_s}\right)_0 \delta X_s + \left(\frac{\partial F}{\partial Y_s}\right)_0 \delta Y_s + \left(\frac{\partial F}{\partial Z_s}\right)_0 \delta Z_s \\ G &\equiv G_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial \omega}\right)_0 \delta\omega + \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)_0 \delta\varphi + \left(\frac{\partial G}{\partial \chi}\right)_0 \delta\chi + \left(\frac{\partial G}{\partial X_s}\right)_0 \delta X_s + \left(\frac{\partial G}{\partial Y_s}\right)_0 \delta Y_s + \left(\frac{\partial G}{\partial Z_s}\right)_0 \delta Z_s \end{aligned} \quad (4.74)$$

Reorganizando la expresión anterior para expresarla en forma matricial, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \omega} & \frac{\partial F}{\partial \varphi} & \frac{\partial F}{\partial \chi} & \frac{\partial F}{\partial X_s} & \frac{\partial F}{\partial Y_s} & \frac{\partial F}{\partial Z_s} \\ \frac{\partial G}{\partial \omega} & \frac{\partial G}{\partial \varphi} & \frac{\partial G}{\partial \chi} & \frac{\partial G}{\partial X_s} & \frac{\partial G}{\partial Y_s} & \frac{\partial G}{\partial Z_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\omega \\ \delta\varphi \\ \delta\chi \\ \delta X_s \\ \delta Y_s \\ \delta Z_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 \\ G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

que en su forma ecuacional (modelo funcional) vendrá dado por:

$$V + A \cdot X + L = 0 \quad (4.76)$$

donde  $A$  es la matriz de diseño o jacobiana de las funciones consideradas,  $X$  el vector de correcciones a las incógnitas,  $L$  la matriz de términos independientes compuesta por  $(F,G)_0$  y  $V$  el vector de residuos. Al ser un sistema iterativo es necesario, según los términos de la linealización de Taylor, proveer al sistema de unos valores aproximados de las incógnitas (elementos de orientación externa) suficientemente próximos a los valores válidos. Asimismo, los componentes del vector  $X$  para una iteración dada  $k$  se entienden como correcciones a los valores de la iteración anterior  $k-1$ . El sistema será iterado hasta que las correcciones aplicadas dejen de ser significativas, a partir de un umbral o tolerancia, que si bien podría ser establecido por el usuario, es más adecuado que sea un criterio tal como la precisión esperable de los parámetros.

Esta estrategia de resolución de la resección espacial, si bien es sencilla tanto en el desarrollo como en su resolución, presenta un matiz importante: carece de residuos propiamente dichos. Ya que en la linealización de la ecuación (4.70) se han omitido los residuos de las fotocoordenadas; por lo que no se podrían aplicar posteriormente estimadores robustos y/o test estadísticos. La solución consiste en considerar los **residuos ecuacionales**, que a efectos de cálculo se comportan como el vector de términos independientes (4.76). Dichos residuos representan lo que deja de cumplir la ecuación de colinealidad (4.72). En resumen, mediante esta asunción para cada punto existirán dos ecuaciones y dos valores de residuo ecuacional. En la siguiente sección (4.5.2) si se considerarán los pesos observacionales en el modelo de la orientación externa.

Una vez se haya realizado el ajuste, este puede ser verificado a través de parámetros estadísticos, siendo el más significativo la varianza a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ )

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{r} \quad (4.77)$$

donde  $r$  son los grados de libertad del ajuste. Si el ajuste no fuese satisfactorio, podría refinarse mediante la aplicación de los estimadores estadísticos y robustos (sección 4.6)

#### 4.5.2. Orientación Externa Rigurosa (OER)

El modelo simplificado visto anteriormente considera que las únicas observaciones son las fotocoordenadas de los puntos, es decir, no se han observado puntos terreno. En términos de formación del sistema matemático esta asunción implica que las coordenadas de los puntos terreno no tienen residuo asociado ( $V_X=V_Y=V_Z=0$ ), manteniéndose únicamente los residuos asociados a las fotocoordenadas.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} + f \cdot \begin{bmatrix} u'/w' \\ v'/w' \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \left[ \begin{bmatrix} X' - V_{X'} \\ Y' - V_{Y'} \\ Z' - V_{Z'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}_s \right] \quad (4.78)$$

No obstante, la precisión de los datos en ambos sistemas es diferente ya que han seguido distintos procesos, por lo cual no deberían mezclarse en el sistema de ecuaciones según expone el modelo simple de orientación externa. Para solventar este problema se utilizará el sistema mixto (Mikhail y Ackerman, 1976) que tiene en cuenta dicha discrepancia.

$$\mathbf{L} + \mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{A}\mathbf{X} = 0 \quad (4.79)$$

donde el vector  $\mathbf{L}$  contiene la función original, la matriz  $\mathbf{B}$  es la jacobiana de dicha función respecto de las observaciones (fotocoordenadas y coordenadas terreno). La matriz  $\mathbf{A}$  es la jacobiana de dicha función respecto de los parámetros incógnitas (elementos de la orientación externa). El vector  $\mathbf{V}$  es el vector de residuos de las observaciones, esto es, la corrección que hay que aplicar a cada valor observado para que este alcance su valor verdadero; y el vector  $\mathbf{X}$  es el vector de las incógnitas, que en tanto es un proceso iterativo debe interpretarse como las correcciones que hay que aplicar a cada valor aproximado de las incógnitas para que estas alcancen su valor verdadero.

A partir de las ecuaciones (4.78) y (4.79) se puede derivar el siguiente modelo funcional:

$$\begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} & \frac{\partial F}{\partial Z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} & \frac{\partial G}{\partial Z} \end{bmatrix}_0 \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial X_s} & \frac{\partial F}{\partial Y_s} & \frac{\partial F}{\partial Z_s} & \frac{\partial F}{\partial \omega} & \frac{\partial F}{\partial \varphi} & \frac{\partial F}{\partial \chi} \\ \frac{\partial G}{\partial X_s} & \frac{\partial G}{\partial Y_s} & \frac{\partial G}{\partial Z_s} & \frac{\partial G}{\partial \omega} & \frac{\partial G}{\partial \varphi} & \frac{\partial G}{\partial \chi} \end{bmatrix}_0 \cdot \begin{bmatrix} \delta X_s \\ \delta Y_s \\ \delta Z_s \\ \delta \omega \\ \delta \varphi \\ \delta \chi \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

donde  $F$  y  $G$  son las funciones ecuacionales obtenidas de (4.78) de forma análoga a la orientación externa simple (ver (4.71))

Nótese que las matrices jacobianas ( $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{A}$ ) están referidas a las aproximaciones iniciales para las variables incógnitas (denotado mediante el subíndice 0).

La imposición del criterio de minimización de mínimos cuadrados  $\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} = \text{mínimo}$ , hace que el sistema de ecuaciones normales resultante sea:

$$\mathbf{X} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} = 0 \quad \text{siendo } \mathbf{M} = [\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T] \quad (4.81)$$

La matriz jacobiana  $\mathbf{B}$  asociada a los residuos tiene por función homogeneizar o matizar la influencia de los residuos asociados a las coordenadas objeto y los asociados a las fotocoordenadas. Su expresión explícita es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} w' & 0 & x_{r_{31}} + fr_{11} & x_{r_{32}} + fr_{12} & x_{r_{33}} + fr_{13} \\ 0 & w' & y_{r_{31}} + fr_{21} & y_{r_{32}} + fr_{22} & y_{r_{33}} + fr_{23} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Siendo  $w'$  el elemento explicitado en (4.78) englobado dentro de las funciones  $F$  y  $G$  de colinealidad.

Como se aprecia, los términos de  $\mathbf{B}$  asociados a  $(x, y)$  son del orden de coordenadas terreno, mientras que los asociados a  $(X, Y, Z)$  son del orden de las fotocoordenadas o focal, por lo que al realizar el producto de  $\mathbf{M}$  se homogeneizan los valores.

El modelo estocástico de la orientación externa rigurosa se establecería a través de la matriz de pesos  $\mathbf{P}$  de dimensiones  $5n \times 5n$ , siendo  $n$  el número de puntos que interviene en el cálculo:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1/\sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_X^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_Y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_Z^2 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

donde  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$  son las desviaciones típicas asociadas a las diferentes observaciones; y  $\sigma_0$  es la desviación a priori, la cual puede hacerse coincidir con alguna de las observaciones de manera que el peso correspondiente sea la unidad, desviación a priori de peso unidad.



### 4.5.3. Transformación Lineal Directa (DLT)

La Transformación Lineal Directa (DLT - *Direct Linear Transformation*) fue desarrollada por Abdel-Aziz (1971). Este método supuso una innovación en el campo de la fotogrametría ya que fue el primero que permitió relacionar directamente las coordenadas imagen con sus coordenadas en el espacio terreno, evitando las, hasta entonces, necesarias transformaciones intermedias. Otra ventaja, fue que ya no era necesario disponer de información sobre la distancia principal y/o los errores por distorsión, que se calcularían como parámetros del ajuste, haciendo al algoritmo especialmente adecuado para las cámaras no-métricas, razón por la que es conocido como método de autocalibración.

La DLT resulta de una linealización de la condición de colinealidad (Kraus, 1997) de la forma siguiente,

$$\begin{bmatrix} x_A - x_p \\ y_A - y_p \\ -f \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} X_A - X_S \\ Y_A - Y_S \\ Z_A - Z_S \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

recordando que  $(X_S, Y_S, Z_S)$  son las coordenadas del punto de vista (o proyección) en el sistema terreno,  $(X_A, Y_A, Z_A)$  y  $(x_A, y_A)$  son las coordenadas terreno y coordenadas imagen respectivamente de un punto  $A$  identificado en ambos sistemas,  $f$  es la distancia principal,  $(x_p, y_p)$  son las coordenadas del punto principal,  $\mathbf{R}$  es la matriz de rotación y  $\lambda$  es el factor de escala.

Si desarrollamos y agrupamos términos para eliminar el factor de escala, tenemos:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{(x_p r_{31} - fr_{11})X_A + (x_p r_{32} - fr_{12})Y_A + (x_p r_{33} - fr_{13})Z_A - (x_p r_{31} - fr_{11})X_S - (x_p r_{32} - fr_{12})Y_S - (x_p r_{33} - fr_{13})Z_S}{r_{31}X_A + r_{32}Y_A + r_{33}Z_A - (r_{31}X_S + r_{32}Y_S + r_{33}Z_S)} \\ y_A &= \frac{(y_p r_{31} - fr_{21})X_A + (y_p r_{32} - fr_{22})Y_A + (y_p r_{33} - fr_{23})Z_A - (y_p r_{31} - fr_{21})X_S - (y_p r_{32} - fr_{22})Y_S - (y_p r_{33} - fr_{23})Z_S}{r_{31}X_A + r_{32}Y_A + r_{33}Z_A - (r_{31}X_S + r_{32}Y_S + r_{33}Z_S)} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Agrupando y renombrando los valores se obtiene la expresión final de la DLT:

$$x = \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \quad y = \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \quad (4.86)$$

Expresión que relaciona las coordenadas imagen  $(x, y)$  con las coordenadas objeto  $(X, Y, Z)$ , permitiendo obtener el registro de imágenes en el modelo láser. La relación entre los parámetros matemáticos  $(L_1, \dots, L_{11})$  y los parámetros geométricos, o expresado de otra forma, la relación entre el espacio de coordenadas imagen y el espacio de coordenadas objeto es:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{x_p r_{31} - \hat{f}r_{11}}{D} \\
 L_2 &= \frac{x_p r_{32} - \hat{f}r_{12}}{D} \\
 L_3 &= \frac{x_p r_{33} - \hat{f}r_{13}}{D} \\
 L_4 &= \frac{(\hat{f}r_{11} - x_p r_{31})X_S + (\hat{f}r_{12} - x_p r_{32})Y_S + (\hat{f}r_{13} - x_p r_{33})Z_S}{D} \\
 L_5 &= \frac{y_p r_{31} - \hat{f}r_{21}}{D} \\
 L_6 &= \frac{y_p r_{32} - \hat{f}r_{22}}{D} \\
 L_7 &= \frac{y_p r_{33} - \hat{f}r_{23}}{D} \\
 L_8 &= \frac{(\hat{f}r_{21} - y_p r_{31})X_S + (\hat{f}r_{22} - y_p r_{32})Y_S + (\hat{f}r_{23} - y_p r_{33})Z_S}{D} \\
 L_9 &= \frac{r_{31}}{D} \\
 L_{10} &= \frac{r_{32}}{D} \\
 L_{11} &= \frac{r_{33}}{D}
 \end{aligned}
 \tag{4.87}$$

siendo  $D = -(r_{31}X_S + r_{32}Y_S + r_{33}Z_S)$

Y la relación inversa:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ -1 \end{bmatrix} \\
x_p &= \frac{L_1 L_9 + L_2 L_{10} + L_3 L_{11}}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2} \\
y_p &= \frac{L_5 L_9 + L_6 L_{10} + L_7 L_{11}}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2} \\
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} &= \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_p L_9 - L_1}{f} & \frac{x_p L_{10} - L_2}{f} & \frac{x_p L_{11} - L_3}{f} \\ \frac{y_p L_9 - L_5}{f} & \frac{y_p L_{10} - L_6}{f} & \frac{y_p L_{11} - L_7}{f} \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix} \\
\text{siendo } D^2 &= \frac{1}{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

La resolución de la **resección espacial** con el algoritmo DLT pasa por re-exresar la ecuación (4.86) en términos de las fotocoordenadas:

$$\begin{aligned}
x &= L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - L_9 x X - L_{10} x Y - L_{11} x Z \\
y &= L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - L_9 y X - L_{10} y Y - L_{11} y Z
\end{aligned} \tag{4.89}$$

que expresándose en forma matricial en términos de una ajuste mínimo cuadrático resulta:

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & xX & xY & xZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 & yX & yY & yZ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \\ L_7 \\ L_8 \\ L_9 \\ L_{10} \\ L_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

donde  $V_x, V_y$  son los residuos según las componentes  $x$  e  $y$  respectivamente.

En el proceso de la DLT se emplean una serie de variables implícitas ( $L_i$ ) que como se ha reflejado anteriormente, permite la resolución lineal del problema de colinealidad y una vez determinados dichos valores es posible resolver problemas de fotogrametría como la resección. No obstante, en este proceso siempre están presentes las variables matemáticas (linealizadas) y en ningún momento aparecen

los **parámetros geométricos**, tanto internos (focal, punto principal) como externos (posición y orientación). Seguidamente se expondrán las ecuaciones que relacionan los parámetros geométricos con los matemáticos, que si bien son lineales, no son directas.

Primeramente, los elementos de la matriz de rotación pueden recuperarse a partir de (4.87)

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{-D(L_1 - x_p L_9)}{f} & r_{12} &= \frac{-D(L_2 - x_p L_{10})}{f} & r_{13} &= \frac{-D(L_3 - x_p L_{11})}{f} \\ r_{21} &= \frac{-D(L_5 - y_p L_9)}{f} & r_{22} &= \frac{-D(L_6 - y_p L_{10})}{f} & r_{23} &= \frac{-D(L_7 - y_p L_{11})}{f} \\ r_{31} &= L_9 D & r_{32} &= L_{10} D & r_{33} &= L_{11} D \end{aligned} \quad (4.91)$$

Una vez conocidos los elementos de la matriz de rotación y su relación con los parámetros lineales de la DLT pueden explicitarse los valores de las rotaciones:

$$\begin{aligned} \omega &= \arctan\left(\frac{L_{10}}{L_{11}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{L_9}{\sqrt{L_{10}^2 + L_{11}^2}}\right) \\ \chi &= \arctan\left(\frac{f(L_5 - y_p L_9)}{f(x_p L_9 - L_1)}\right) \end{aligned} \quad (4.92)$$

A partir de (4.87) se pueden establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_1 X_S + L_2 Y_S + L_3 Z_S &= -L_4 \\ L_5 X_S + L_6 Y_S + L_8 Z_S &= -L_8 \\ L_9 X_S + L_{10} Y_S + L_{11} Z_S &= -1 \end{aligned} \quad (4.93)$$

que expresadas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_5 & L_6 & L_7 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -L_4 \\ -L_8 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

resultando fácilmente calculables las coordenadas del punto de vista.

Para obtener el punto principal y la longitud focal es necesario hacer uso de la propiedad de ortogonalidad de la matriz de rotación ( $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ ) que se puede expresar según la función delta de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 r_{ik} \cdot r_{jk} &= \delta_{ij} \\ \sum_{k=1}^3 r_{ki} \cdot r_{kj} &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = j) \\ 0 & \text{si } (i \neq j) \end{cases} \quad (4.95)$$

resultando el siguiente juego de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 & \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2}} \\
r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} = 0 & \rightarrow x_p = t^2 (L_1L_9 + L_2L_{10} + L_3L_{11}) \\
r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33} = 0 & \rightarrow y_p = t^2 (L_5L_9 + L_6L_{10} + L_7L_{11}) \\
r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 = 1 & \rightarrow f = \sqrt{t^2 (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) - x_p} \\
r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 = 1 & \rightarrow f = \sqrt{t^2 (L_5^2 + L_6^2 + L_7^2) - y_p}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Nótese que la longitud focal se puede obtener por dos caminos diferentes, permitiendo su comprobación.

Este método se diferencia respecto a la orientación externa (secciones 4.5.1 y 4.5.2) en:

- El DLT es un método lineal, al contrario que la externa que requiere un proceso iterativo.
- El número mínimo de puntos para resolver la DLT son 6 puntos (2 ecuaciones por punto) para 11 incógnitas matemáticas, mientras que en la orientación externa para resolver los 6 parámetros geométricos son necesarios 3 puntos.

#### 4.5.4. Procrustes Ortogonal Ponderado (POP)

Los ajustes tradicionales de mínimos cuadrados en el caso de tres o más dimensiones necesitan de procesos previos de linealización, aproximación de los valores iniciales de las incógnitas para resolver un modelo funcional no lineal (Akca, 2003). La teoría subyacente en el análisis de Procrustes es la de un conjunto de herramientas matemáticas que permiten resolver transformaciones de similitud entre matrices de coordenadas modelo de puntos con el máximo acuerdo. De esta forma se evitan la definición y solución de los sistemas de ecuaciones normales, ni es necesario contar con información previa sobre los diferentes objetos que participan en el ajuste. Esta aproximación permite calcular los parámetros del ajuste de una forma directa y eficiente basándose únicamente en un conjunto de pares de coordenadas de puntos homólogos (Beinat y Crosilla, 2001).

El método fue propuesto inicialmente por (Schöenemann, 1966) quien lo denominó como *Procrustes Ortogonal*. Inicialmente fue desarrollado en el campo de la psicología cuantitativa donde se buscaba obtener la solución mínimo cuadrática del problema en el que una matriz dada **A** se transformase en otra dada **B** mediante la matriz ortogonal de transformación **T** minimizando la suma de los cuadrados de los componentes de la matriz de residuos  $E=AT-B$ .

A raíz de dicho método inicial éste fue generalizado por (Schöenemann y Carroll, 1970) para el caso en el que la transformación entre las matrices **A** y **B** mediaba una rotación, traslación y factor de escala desconocidos. Este método particular es conocido como *Procrustes Ortogonal Extendido*.

Posteriores desarrollos permitieron resolver el problema cuando estaban involucradas más de dos matrices (Gower, 1975) (Ten Berge, 1977). El modelo de Procrustes fue generalizado un paso más mediante la inclusión del modelo estocástico, permitiendo la diferente ponderación de los elementos según las columnas (Lissitz et al., 1976) o las filas (Koschat y Swayne, 1991), pasándose a denominar como *Procrustes Ortogonal Ponderado*. Este último es el que nos interesa, ya que ha sido utilizado en el campo de la geomática para dos tipos de aplicaciones muy concretas, a saber: ajuste fotogramétrico por bloques independientes (Beinat y Crosilla, 2002) y registro de nubes de puntos láser (Crosilla y Beinat, 2002).

A título de curiosidad la denominación de este método matemático proviene de la mitología griega donde Procrustes (del griego antiguo *Prokroústês*) era un ladrón que aparecía en el mito de Teseo. Era conocido como “*el que estira,*” ya que ofrecía alojamiento a los viajeros ofreciéndoles una cama que se ajustaría perfectamente al huésped. Este proceso lo lograba cortando los miembros que sobresalían de la cama en el caso de los altos, o estirándolos hasta ocupar todo el espacio, en el caso de los más bajos (Akca, 2003). Por ello, no es de extrañar que al proceso lineal para revolver una transformación euclídea tridimensional (o Helmert 3D) se le denomine de esta manera.

Antes de poder establecer la solución al POP, es necesario establecer la teoría en la que se asienta, concretamente el problema del *Procrustes Ortogonal Extendido*, cuyo modelo funcional, para  $p$  puntos correspondientes a espacio un  $k$ -dimensional, es:

$$E = cAT + jt^T - B \quad (4.97)$$

Donde  $\mathbf{j}^T = [1, 1, \dots, 1]$  es un vector unidad,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son las matrices de dimensión  $(p, k)$  que contiene los puntos homólogos,  $\mathbf{T}$   $(k, k)$  es la matriz de rotación ortogonal,  $\mathbf{t}$   $(k, 1)$  el vector de traslación,  $c$  el factor de escala y  $\mathbf{E}$  la matriz de residuos. Mediante la ecuación (4.97) los puntos contenidos en la matriz  $\mathbf{A}$  son transformados al sistema de coordenados definido por los puntos de la matriz  $\mathbf{B}$  mediante un ajuste óptimo.

El método POP permite la resolución de una transformación de similaridad entre dos matrices con diferentes modelos de ponderación. Esto se logra mediante el establecimiento de las siguientes condiciones (Goodall, 1991):

$$\text{tr} \left\{ (cAT + jt^T - B)^T W_p (cAT + jt^T - B) W_k \right\} = \min \quad (4.98)$$

$$T^T T = T T^T = I \quad (4.99)$$

Siendo (4.99) la condición de ortogonalidad. Las matrices  $\mathbf{W}_p$   $(p,p)$  y  $\mathbf{W}_k$   $(k,k)$  son las matrices de ponderación de los componentes  $p$  y  $k$  respectivamente.

Si bien la ecuación (4.98) establece dos ponderaciones diferentes, en el proceso de resección espacial fotogramétrico no se establece ningún peso en función de la componente dimensional, por lo que se considera que  $\mathbf{W}_k = 1$ .

La matriz  $\mathbf{W}_p$  puede descomponerse en dos matrices triangulares, superior e inferior, mediante la descomposición de Cholesky<sup>17</sup>:

$$\mathbf{W}_p = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \quad (4.100)$$

Sustituyendo y recomponiendo (4.98) obtenemos:

$$\text{tr} \left\{ \left( \mathbf{cQAT} + \mathbf{Qjt}^T - \mathbf{QB} \right)^T \left( \mathbf{cQAT} + \mathbf{Qjt}^T - \mathbf{QB} \right) \right\} = \min \quad (4.101)$$

Aplicando la sustitución de los términos  $\mathbf{A}_w = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_w = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}$  y  $\mathbf{j}_w = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}$  resulta:

$$\text{tr} \left\{ \left( \mathbf{cA}_w \mathbf{T} + \mathbf{j}_w \mathbf{t}^T - \mathbf{B}_w \right)^T \left( \mathbf{cA}_w \mathbf{T} + \mathbf{j}_w \mathbf{t}^T - \mathbf{B}_w \right) \right\} = \min \quad (4.102)$$

Expresión que resulta idéntica al modelo de *Procrustes Ortogonal Extendido*, siendo el proceso de resolución idéntico a partir de este punto. Según Schöenemann y Carroll (1970) aplicando la descomposición SVD al producto de matrices obtenemos:

$$\text{svd} \left[ \mathbf{A}_w^T \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{j}_w \mathbf{j}_w^T}{\mathbf{j}_w^T \mathbf{j}_w} \right) \mathbf{B}_w \right] = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{W}^T \quad (4.103)$$

donde  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  son las matrices ortonormales de los vectores propios (*eigenvectors*) y  $\mathbf{D}$  es la matriz diagonal de los valores propios (*eigenvalues*). Según Schöenemann y Carroll (1970) los  $k$ -parámetros desconocidos se obtienen según las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{V} \mathbf{W}^T \\ \mathbf{c} &= \frac{\text{tr} \left[ \mathbf{T}^T \mathbf{A}_w^T \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{j}_w \mathbf{j}_w^T}{\mathbf{j}_w^T \mathbf{j}_w} \right) \mathbf{B}_w \right]}{\text{tr} \left[ \mathbf{A}_w^T \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{j}_w \mathbf{j}_w^T}{\mathbf{j}_w^T \mathbf{j}_w} \right) \mathbf{A}_w \right]} \\ \mathbf{t} &= \left( \mathbf{B}_w - \mathbf{c} \mathbf{A}_w \mathbf{T} \right)^T \frac{\mathbf{j}_w}{\mathbf{j}_w^T \mathbf{j}_w} \end{aligned} \quad (4.104)$$

El POP es un algoritmo de análisis muy potente ya que permite resolver, en su forma generalizada, los parámetros de transformación entre dos o más matrices de puntos definidos en espacios  $k$ -dimensionales. Además la linealidad del modelo permite obviar el paso de obtener aproximaciones iniciales, tal y como es el caso de los mínimos cuadrados.

Sus puntos débiles son el proceso computacional asociado a la resolución del algoritmo SVD, y el hecho de que carece de criterios de fiabilidad interna para detectar y localizar errores groseros. En el caso de los MMCC, están disponibles

<sup>17</sup> Commandant Benoît, Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un Systeme d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues - Application de la méthode à la résolution d'un système défini d'équations linéaires (Procédé du Commandant Cholesky), Bull. Géod. 2 (1924) pp.67-77.

múltiples herramientas para esta tarea, tales como los métodos robustos y los estimadores estadísticos.

## 4.6. Estimadores estadísticos y robustos

Tradicionalmente se define como error grosero u *outlier* a la observación afectada por un error que se aparta de la distribución normal que siguen los errores. En topografía clásica estos errores son eliminados previamente al ajuste mediante el análisis del conjunto de datos de campo, los cuales deben ser redundantes; por ejemplo, se rechazarán aquellas observaciones que se alejen más de tres veces la desviación típica del instrumento respecto a la media del conjunto.

Dichos errores no son siempre sencillos de localizar ya que durante el ajuste se reparte su influencia conjuntamente con el resto de puntos. Además, el algoritmo de ajuste de mínimos cuadrados no es adecuado para detectarlos, ya que se fundamenta en repartir la influencia de los errores entre todas las observaciones, por lo que es necesario aplicar tests estadísticos posteriores tales como el test de Baarda (Baarda, 1968), de Pope (Pope, 1976) o de bondad del ajuste. No obstante, dichos tests están afectados por una serie de limitaciones, de entre las cuales, las más directamente relacionadas con el presente flujo de trabajo son:

- Si el conjunto de datos está sesgado, es decir los errores no siguen mayoritariamente la distribución normal, dará lugar a la presencia de una importante proporción de outliers, por lo que la aplicación de estos tests estadísticos perderá su relevancia.
- Del actual conjunto de tests estadísticos disponibles para la detección de outliers, solamente se pueden aplicar detectores del estilo Pope, en el cual no es requisito necesario conocer la varianza a priori de las observaciones. Esta causa se debe a que en la aproximación seleccionada no es posible ponderar de forma fiable la precisión asociada a cada observación, invalidando el cálculo de dicho parámetro. Esta situación es habitual en campos como la fotogrametría donde no siempre se puede disponer del conocimiento de la desviación a priori.
- En el caso de trabajar bajo una geometría desfavorable dichos tests pueden fallar ya que el propio proceso de MMCC enmascara el error debido a dicha configuración geométrica, agravados por el hecho de que los estimadores estadísticos no pueden eliminar más de una observación por iteración.

Sin embargo, la ventaja de aplicar estos tests es la automatización del proceso de control del ajuste, eliminando así la intervención del operador humano, tarea que ralentizaría la eficacia del proceso, al ser función de la experiencia de dicho operador y no podrá ser controlada mediante una serie de parámetros dados

Antes de comenzar la descripción y comentario de los estimadores estadísticos y robustos, se expondrán de forma somera algunos conceptos generales estadísticos, a los cuales se harán referencia posteriormente.



El **contraste de hipótesis** (test de hipótesis o prueba de significación) es una técnica de inferencia estadística cuyo objetivo es determinar si el comportamiento de una muestra de población es concordante con la distribución estadística de dicha población.

Por ello, se define como **hipótesis estadística** a la proposición acerca de la distribución de probabilidad de una o más variables aleatorias, para las cuales se asume que un existe ejemplo aleatorio.

El establecimiento del test de hipótesis requiere el establecimiento de dos hipótesis complementarias denominadas; **hipótesis nula** ( $H_0$ ) e **hipótesis alternativa** ( $H_a$ ), las cuales determinarán la validez o no de las observaciones que van a ser contrastadas; siendo por definición excluyentes. Por ejemplo, en la Figura 4.23, se describe el contraste de hipótesis entre la  $H_0$  que establece que los residuos ( $v$ ) se distribuyen según una distribución normal de media 0, mientras que la  $H_a$  considera que la media de la distribución es un valor ( $x$ ) distinto de cero.

La hipótesis nula se establece de forma que se supondrá siempre válida a no ser que los datos indiquen lo contrario, es decir, mediante la prueba de significación no se puede probar la validez de  $H_0$ , sino su falsedad.

Al realizar un contraste de hipótesis se puede cometer uno de los dos errores siguientes (Tabla 4.1):

- **Error tipo I** ( $\alpha$ ): probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta. También es conocido como falso positivo, porque implica la asunción de una diferencia entre hipótesis cuando esta no existe en la realidad.
- **Error tipo II** ( $\beta$ ): probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando es falsa. Otra denominación común es la de falso negativo, ya que induciría a pensar que no existe diferencia entre ambas cuando si la hay en la realidad.

	$H_0$ verdadera	$H_0$ falsa
Aceptar $H_0$	Correcto	Error Tipo II
Rechazar $H_0$	Error Tipo I	Correcto

Tabla 4.1 Situaciones existentes en el contraste de hipótesis

A partir de los conceptos anteriores se derivan otros más relevantes y determinantes a la hora de planificar el contraste de hipótesis (Figura 4.23):

**Nivel de significación** ( $\alpha$ ): es la probabilidad de cometer un error tipo I. Delimita el área de rechazo, en la cual no se verifica  $H_0$ , acotada por los valores críticos  $\pm t$ .

**Nivel de confianza** ( $1-\alpha$ ): es el valor complementario al nivel de significación, es decir, es la probabilidad de que el intervalo de confianza calculado contenga al valor verdadero del parámetro. Define la conocida como región de aceptación de la hipótesis nula ( $H_0$ ).

**Potencia del test** ( $1-\beta$ ): Se define como el complementario del error tipo II, es decir, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , de forma correcta, cuando esta es falsa, o complementariamente, la capacidad de detectar que la

hipótesis alternativa es verdadera. La potencia de un test aumenta ( $\beta$  disminuye) al incrementarse el tamaño de la muestra.

En el diseño de un contraste de hipótesis, la situación ideal sería la de minimizar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . No obstante, para un tamaño de muestra dado, la disminución del error de tipo I conduce al aumento de la probabilidad de cometer un error tipo II, por lo que la única solución sería aumentar el tamaño de muestra, situación que puede no ser posible dadas la características de cada estudio en particular.

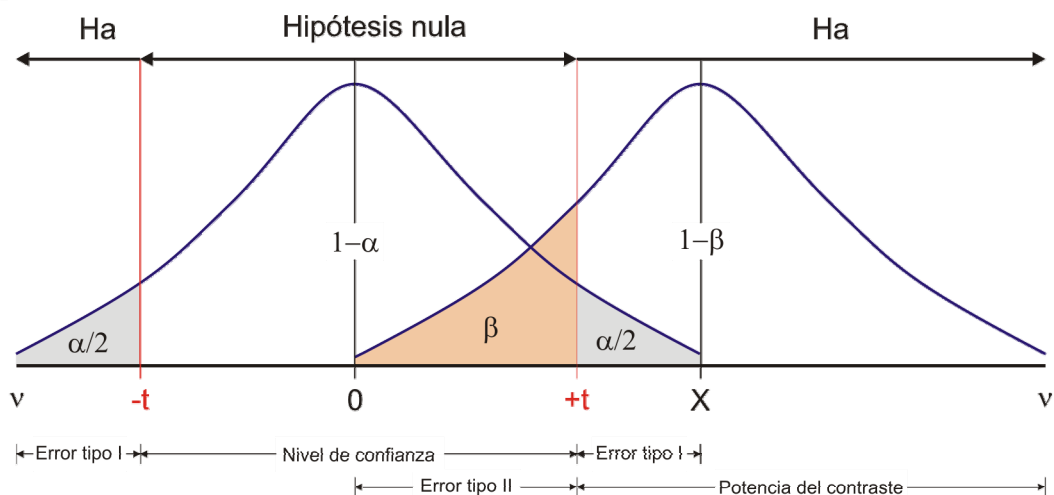


Figura 4.23 Contraste de hipótesis

### Test de bondad del ajuste

También conocido como el test de la Chi-cuadrado, o test global del modelo, permite establecer una comparación entre la varianza a priori ( $\sigma_0^2$ ) y a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ) del ajuste. Se establece como hipótesis nula que ambas varianzas son compatibles.

$$H_0 : E \left\{ \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \right\} = 1 \quad (4.105)$$

O expresado de otra manera más explícita:

$$\begin{aligned} H_0 : \hat{\sigma}_0^2 &= \sigma_0^2 \\ H_a : \hat{\sigma}_0^2 &> \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

El estadístico ( $T$ ) usado para evaluar la hipótesis nula es:

$$T = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{r,\alpha}^2 \quad (4.107)$$

Donde  $\chi$  representa la distribución chi-cuadrado,  $\alpha$  el nivel de significación, y  $r$  los grados de libertad del ajuste. Dicho estadístico sigue una distribución chi-cuadrado, que nos permite valorar la bondad del ajuste entre 0 y  $\chi^2$  para un nivel de confianza de  $1-\alpha$  (Figura 4.24). Nótese que se evalúa una única cola porque la

hipótesis alternativa indica que la varianza a posteriori sea superior a la a priori, en caso de haberse evaluado que la varianza fuese distinta, el test debería ser de dos colas.

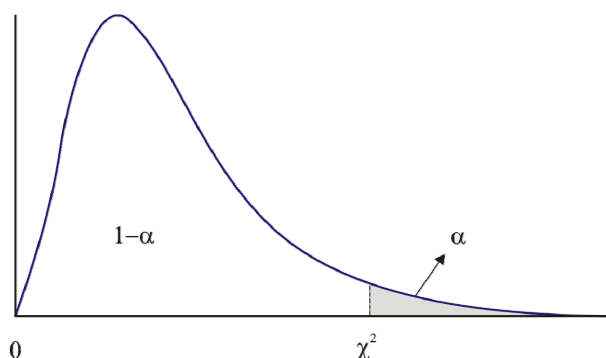


Figura 4.24 Gráfico de la distribución de Chi-cuadrado

Según (4.106) y (4.107) se acepta la  $H_0$  si se verifica que:

$$H_0 : \frac{\Gamma \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi_{r,\alpha}^2 \quad (4.108)$$

Este test sirve para indicar si existen posibles errores en el proceso de ajuste (siempre y cuando sea conocida  $\sigma_0$ ), pero no es válido para indicar cuál de las observaciones es un error grosero, por ello es necesario aplicar otros métodos específicos, tal y como el test de Baarda y/o Pope seguidamente comentados.

### Test de Baarda

El test estadístico de Baarda (Baarda, 1968), considera que no es conocida la varianza teórica, por lo que se utilizará en su lugar la varianza a priori ( $\sigma_0^2$ ), además de conocerse los errores de las observaciones.

El test se basa en que los residuos están distribuidos normalmente ( $H_0$ ), definiendo como estadístico del test a los residuos tipificados<sup>18</sup> ( $z_i$ ), según la ecuación:

$$z_i = \frac{(Pv)_i}{\sigma_0 \sqrt{(PQ_{vv}P)_{ii}}} \quad (4.109)$$

donde  $\mathbf{P}$  representa la matriz de pesos,  $v_i$  el residuo ecuacional  $i$ -ésimo, y  $\mathbf{Q}_{vv}$  la matriz cofactor de los residuos, que se obtiene a partir de la aplicación de la ley de propagación de varianzas-covarianzas sobre la expresión de los residuos:

<sup>18</sup> También denominados como residuos normalizados

$$\begin{aligned}
 V &= AX - L = -L + AN^{-1}A^T P L = \overbrace{(-I + AN^{-1}A^T P)}^J \cdot L \\
 Q_{VV} &= J \cdot Q_{LL} \cdot J^T = J \cdot P^{-1} \cdot J^T \\
 Q_{VV} &= (-P^{-1} + AN^{-1}A^T) \cdot (-I + PAN^{-1}A^T) \quad (4.110) \\
 Q_{VV} &= P^{-1} - 2AN^{-1}A^T + AN^{-1}A^T \\
 Q_{VV} &= P^{-1} - AN^{-1}A^T
 \end{aligned}$$

La ecuación (4.109) es la expresión rigurosa de los residuos tipificados (Gökalp et al., 2008), siendo la más extendida en la literatura el modelo simple que considera observaciones equiponderadas ( $\mathbf{P}=\mathbf{I}$ ).

$$z_i = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{(Q_{VV})_{ii}}} \quad (4.111)$$

Dicho estadístico es comparado con el valor crítico del test a fin de contrastar la hipótesis nula ( $H_0$ ), estando definido por:

$$T_b \sim N_{\alpha/2} = \sqrt{F_{1,\infty,\alpha}} = \sqrt{\chi^2_{1,\infty,\alpha}} \quad (4.112)$$

Donde  $\alpha$  es el nivel de significación,  $N$  representa la distribución normal,  $F$  la distribución Fischer-Snedecor y  $\chi^2$  la tabla Chi-cuadrado.

Se verifica la  $H_0$  si se cumple que:

$$|z_i| < N_{\alpha/2} \quad (4.113)$$

El valor crítico de Baarda ( $T_b$ ) tiene en cuenta tanto el nivel de significación como la potencia del test. Por ello es muy común que se utilicen determinadas combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  en la mayoría de los tests, siendo por ejemplo la más extendida la de  $\alpha=0,1\%$  y  $\beta=20\%$ , dando lugar a una cota de cierre de 3,291.

Si se rechaza la  $H_0$  se supone que existe un error grosero entre el conjunto de observaciones. Por ello la metodología a seguir es excluir del ajuste al punto con mayor residuo tipificado y repetir el test de Baarda para comprobar si existen más errores groseros. En los métodos de resección espacial de la sección 4.5, los puntos del ajuste contribuyen con dos ecuaciones, (con la excepción del método de Procrustes), con lo cual el test de Baarda determinará la ecuación con el mayor residuo tipificado, por lo que en vez de eliminar solamente dicha ecuación se prescindirá del punto que la generó. La aplicación iterativa de esta técnica se denomina **data snopping** y permite detectar múltiples outliers y excluirlos del ajuste.

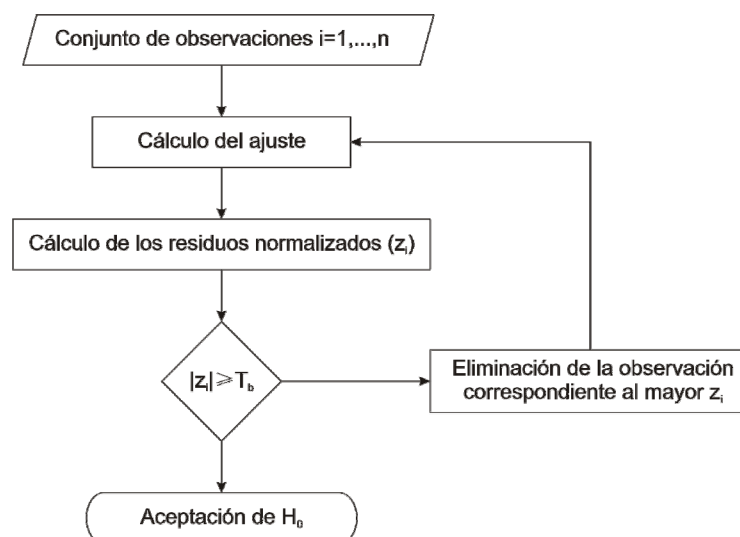


Figura 4.25 Esquema de detección de errores groseros

En la implementación práctica el test de Baarda se aplica conjuntamente con el test de bondad del ajuste, ya que si bien este último permite detectar errores en el proceso general de cálculo, no serviría para detectar errores groseros en las observaciones, los cuales podrían estar disimulados, por ejemplo, por un bajo peso relativo (Rodríguez, 2002).

### Test de Pope

El test de Pope (Pope, 1976) se emplea cuando la varianza a priori ( $\sigma_0^2$ ) no es conocida o no es posible determinarla, utilizándose en su lugar la varianza a posteriori, la cual se obtiene según:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad (4.114)$$

Este estimador estadístico es muy común en el campo de la fotogrametría, donde es habitual que el dato de varianza a priori sea desconocido.

Se establece como hipótesis nula ( $H_0$ ) que todos los residuos ecuacionales ( $v_i$ ) siguen una distribución normal  $N(0, \sigma)$  tal que su varianza es la varianza de los residuos estandarizados.

$$\sigma \equiv \sigma_{\hat{v}_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}} \quad (4.115)$$

Donde  $q_{vivi}$  es el elemento  $i$ -ésimo de la diagonal principal de la matriz cofactor de los residuos ( $Q_{vv}$ ). O expresado de otra forma, la varianza de la distribución normal vendrá dada por los elementos de la diagonal principal de la matriz varianza-covarianza de los residuos ( $\Sigma_{vv}$ ), ya que su relación es:

$$\Sigma_{vv} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{vv} \quad (4.116)$$

Por contra, la hipótesis alternativa ( $H_a$ ) establece que en el conjunto de observaciones existe un error grosero, el cual debe eliminarse. Por ello, se

establece como estadístico el residuo estandarizado ( $w_i$ ) definido rigurosamente como:

$$w_i = \frac{(Pv)_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{(PQ_{vv}P)_{ii}}} \quad (4.117)$$

O más comúnmente conocido por su expresión simplificada:

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (4.118)$$

Nótese que en este test se emplean residuos estandarizados ( $w_i$ ), a diferencia del test de Baarda en el cual se utilizaban los tipificados ( $z_i$ ), siendo la única diferencia entre ambos el empleo de la varianza a posteriori y a priori, respectivamente.

Puesto que se emplea la varianza a posteriori en el cálculo de los residuos estandarizados, estos no estarán distribuidos normalmente (4.112) sino que seguirán una distribución Tau.

El valor crítico de la distribución Tau puede calcularse a partir de las tablas de la distribución t-Student (Heck, 1981) según:

$$\tau_{r,\alpha_0/2} = \sqrt{\frac{r \cdot (t_{r-1,\alpha_0/2})^2}{r-1 + (t_{r-1,\alpha_0/2})^2}} \quad (4.119)$$

donde  $r$  son los grados de libertad del ajuste, y  $\alpha_0$  el nivel de significación para una observación individual resultante de corregir el valor de entrada ( $\alpha$ ) por el número de contrastes a realizar, tantos como número de observaciones ( $n$ ) (Pope, 1976).

$$\alpha_0 = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}} \approx \frac{\alpha}{n} \quad (4.120)$$

Nótese, que en (4.119) se consulta el valor crítico de la distribución para la mitad del nivel de significación, ya que el test es de dos colas (Figura 4.26).

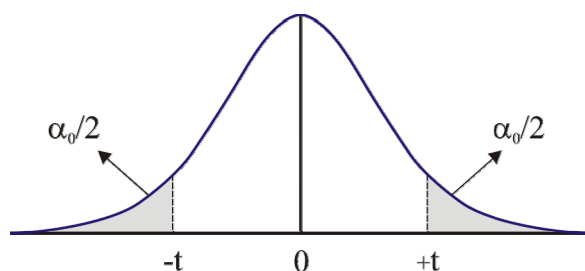


Figura 4.26 Área de rechazo para la distribución t de Student

Por lo que se rechazará la hipótesis nula  $H_0$  si se verifica que:

$$|w_i| \geq \tau_{r,\alpha_0/2} \quad (4.121)$$

Si se verifica la hipótesis alternativa, el residuo  $w_i$  se considerará como un error grosero y por lo tanto se excluye del ajuste. Se repite el proceso, eliminando puntos hasta que se verifique la  $H_0$ , de forma análoga a la técnica de *data snopping*.

### Estimadores robustos

Una alternativa a los test estadísticos mencionados en el apartado anterior, es modificar la técnica de mínimos cuadrados para que pueda realizarse un ajuste sin que los eventuales errores groseros presentes influyan en el resultado de los parámetros finales.

La esencia de los estimadores estadísticos consiste en eliminar los errores groseros del ajuste, no obstante dicho principio puede no ser el más adecuado, postulándose que primeramente dichos errores deben ser corregidos y en caso de no poderse, han de ser subponderados y nunca eliminados del conjunto de datos, siendo en este ámbito donde se inscriben los estimadores robustos.

Se define **estimador robusto** al método de estimación que siempre proporciona los valores óptimos, independientemente de la distribución que según sus errores, es decir, no están influidos por los errores de mayor magnitud. La característica común de estos estimadores es que minimizan una función distinta al sumatorio del cuadrado de los residuos propio de los mínimos cuadrados.

$$\sum \rho(v_i) = \min \quad (4.122)$$

Los estimadores que verifican (4.122) se denominan estimadores **tipo M** (o de máxima verosimilitud), que fueron descritos por (Huber, 1964) en base a las descripciones formales de (Kendall, 1948) y sirvieron de base al desarrollado de múltiples tipos de estimadores.

Otros tipos de estimadores robustos existentes son (Bhar, 2008):

- **Tipo W:** Son la alternativa a los de tipo M, donde cada estimador-w tiene su función de pesos característica que representa la importancia de cada muestra en su contribución a la estimación del parámetro. Este tipo de estimadores y los de tipo M, desde un punto de vista teórico, son idénticos en cuanto resuelven el mismo problema de minimización (Hampel et al., 1986). En la práctica pueden considerarse diferentes en tanto emplean métodos de computación distintos.
- **Tipo L:** Estimador de combinación lineal de estadísticos de orden. Algunos ejemplos de este tipo son: la mediana, trimedia, mediana de Gastwirth, etc.
- **Tipo R:** Basados en los test de rangos de las observaciones, buscan minimizar una suma que está presente en un rango ponderado.

Dada una muestra aleatoria de datos  $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  que sigue una distribución  $F$  tal que  $F_n$  sea su distribución empírica,  $G$  el modelo matemático que representa a la distribución  $F$ ; el estimador  $\hat{\theta}_n = T(F_n)$  será robusto (Hampel, 1971) si verifica que:

$$\begin{aligned} & \{ \pi(F, G) < \delta \Rightarrow \pi(L_F(T_n), L_G(T_n)) < \varepsilon \} \\ & \forall \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (4.123)$$

Donde  $\pi$  es la distancia de Prokhorov<sup>19</sup>,  $L$  es la distribución del estimador, y  $T$  una secuencia de estimadores que incluye las empíricas y la propia  $F$ ,  $\varepsilon$  y  $\delta$  son dos variables dadas, tal que su única condiciones es que sean positivas.

La construcción de un estimador tipo M se realiza según los siguientes pasos (Domingo, 2000):

1. Definición de la **función objetivo**  $\rho$  (4.122) cuyo objetivo es minimizar el efecto de los errores groseros sobre el resultado final de los parámetros estimados, mediante una función de los residuos.

La función  $\rho$  debe definirse de forma que cumpla las siguientes condiciones (4.124): sea simétrica, definida positiva con un único mínimo en cero, y única, es decir, convexa de la variable a determinar.

$$\begin{aligned} \rho(x) & \geq 0 \\ \rho(0) & = 0 \\ \rho(x) & = \rho(-x) \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} & \geq 0 \end{aligned} \quad (4.124)$$

2. Obtención de la **función de influencia**  $\Psi$  la cual se define como:

$$\Psi(x) = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x} \quad (4.125)$$

La función de influencia mide la influencia de un dato u observación en el valor del parámetro a estimar. En el caso del ajuste mínimo cuadrático, la función objetivo y de influencia son, respectivamente:

$$\rho(x) = \frac{x^2}{2} \quad \Psi(x) = x \quad (4.126)$$

Es decir,  $\Psi$  aumenta linealmente, razón por la cual el ajuste de mínimos cuadrados no es un método robusto, ya que va en contra de la definición de robustez, la cual indica que la influencia de cualquier observación no debe producir un desplazamiento significativo en el valor del parámetro a estimar; además de no estar acotada.

El estimador tipo M basado en la función  $\rho$  es aquel que verifica que la solución del sistema de ecuaciones (4.127) es el vector  $x=(x_1, \dots, x_m)^T$  de parámetros a estimar.

$$\sum_i \Psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (4.127)$$

<sup>19</sup> También conocida como métrica de Lévy-Prokhorov, es la medida cuantitativa de cuan alejadas se encuentran las distribuciones de dos elementos aleatorios pertenecientes a  $R^n$ .



3. Definición de la **función de pesos**  $p$ :

$$p(x) = \frac{\Psi(x)}{x} \quad (4.128)$$

Sustituyendo (4.128) en la ecuación (4.127) se obtiene la expresión:

$$\sum_i p(v_i) v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad j=1, \dots, m \quad (4.129)$$

La cual posee la misma estructura que el sistema de ecuaciones resultante de desarrollar el ajuste de mínimos cuadrados reponderados.

$$\sum_i p(v_i^{(k-1)}) v_i^2 = \min \quad (4.130)$$

donde  $k$  indica la iteración, ya que el peso de cada observación ha de ser recalculado en cada iteración.

Resumiendo, el algoritmo general de los estimadores robustos tipo M es:

$$\sum_{i=1}^n p(v_i^{(k-1)}) v_i^2 \quad (4.131)$$

De entre todos los estimadores existentes, se destacarán seguidamente los más relevantes:

### Mínima suma

El método de la mínima suma, norma  $L_1$  (o *least absolute deviations* en inglés) es el más antiguo de todos los estimadores robustos. El método fue presentado<sup>20</sup> casi 50 años antes que el método de mínimos cuadrados, en 1757 por Roger Joseph Boscovich (1711-1787). Dicha técnica sería reformulada en términos algebraicos por Laplace 36 años después<sup>21</sup> (1793), aunque no sería hasta 1887 cuando Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) presentase el algoritmo general tal y como se conoce<sup>22/23</sup>. Su objetivo es hacer mínima la suma de los valores absolutos de los residuos.

$$\sum_i |v_i| = \min \quad (4.132)$$

A pesar de la sencillez de la expresión (4.132) en comparación con el método clásico de mínimos cuadrados, proporciona mejores resultados que éste en la localización de las observaciones erróneas.

Sin embargo la norma  $L_1$  es inestable dando lugar a múltiples soluciones, o indeterminación en la solución, en casos de geometrías desfavorables. La causa es

<sup>20</sup> “*De litteraria expeditione per pontificiam ditionem, et synopsis amplioris operis, ac habentur plura ejus ex exemplaria etiam sensorum impressa*”

<sup>21</sup> “*Sur quelques points du system du monde*”.

<sup>22</sup> “*On observations relating to several quantities*”.

<sup>23</sup> “*A new method of reducing observations relating to several quantities*”.

que la función no es estrictamente convexa debido a su gradiente o pendiente indefinida en 0.

Para solventar dicha deficiencia, se desarrollaron funciones de pesos alternativas (4.133) que pudiesen detectar eficazmente los errores groseros.

$$p(v_i) = \frac{1}{|v_i + \varepsilon|} \quad (4.133)$$

Siendo  $\varepsilon$  una constante pequeña dependiente del error.

Asimismo, la función de la mínima suma puede ser modificada de la forma:

$$p(v_i) = \frac{1}{|v_i|} \quad (4.134)$$

Esta función de pesos sería una combinación del método de la mínima suma con el estimador de Huber, eliminando la dependencia de fijar la constante arbitraria por parte del usuario (Domingo, 2000).

### Huber

Este estimador robusto fue desarrollado por (Huber, 1964) conjuntamente con la teoría de la estimación robusta de un parámetro de tendencia central o posición central o puntual de una distribución normal “contaminada” y presenta tres métodos para construir estimadores robustos.

El estimador de Huber consiste en minimizar la función de residuos  $\Omega(v)$  de Huber, que actuará como función objetivo:

$$\Omega(v) = \begin{cases} v^2/2 & \text{para } |v| \leq k\sigma \\ \frac{k\sigma}{2}(2|v| - k\sigma) & \text{para } |v| > k\sigma \end{cases} \quad (4.135)$$

donde  $k$  es una constante que admite valores entre 2 ó 3. El valor más recomendado es el de 3, ya que  $k\sigma$  representa la tolerancia de la medición, y  $\sigma$  la desviación estándar de las observaciones. Todo ello enmarcado en un proceso iterativo.

La variable  $k\sigma$  es conocida también como constante de ajuste (*tuning constant*), tal que valores pequeños de la variable hacen al estimador más resistente ante los errores groseros, pero a cambio lo hace menos eficiente cuando todos los errores siguen una distribución normal.

La función de pesos que utiliza el estimador de Huber es:

$$p(v) = \begin{cases} 1 & \text{para } |v|/\sigma \leq a \\ \frac{a}{|v|/\sigma} & \text{para } |v|/\sigma > a \end{cases} \quad (4.136)$$

siendo  $\sigma$  la desviación estándar a priori o estimada de las observaciones, y  $a$  una constante a fijar por parte del usuario, cuyo valor para una eficiencia asintótica del 95% es de  $a=1,2107$  para distribuciones normales (Holland y Welsch, 1977).

Siendo la eficiencia asintótica el parámetro que mide cuan cerca está el valor ajustado (calculado por métodos robustos) del óptimo.

El único inconveniente de este estimador es que puede presentar algunas dificultades debido a la falta de estabilidad en los valores del gradiente de la función objetivo ( $\rho$ ) por la discontinuidad de su derivada segunda.

$$\frac{d^2\rho(x)}{dx^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq k\sigma \\ 0 & \text{si } |x| \geq k\sigma \end{cases} \quad (4.137)$$

Donde  $k$  y  $\sigma$  son los mismos escalares que intervienen en la ecuación (4.135).

### Estimador danés

El estimador robusto danés desarrollado por (Krarup et al., 1980) fue diseñado específicamente para la detección de errores groseros en los ajustes mínimo cuadráticos de las redes geodésicas por el Instituto Geodésico de Dinamarca.

Se apoya en el ajuste por mínimos cuadrados, recalculando los pesos de cada ecuación, tras la primera iteración, según la siguiente función:

$$p(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{para } |v_i| \leq 2\sigma \\ ke^{-cv_i^2} & \text{para } |v_i| > 2\sigma \end{cases} \quad (4.138)$$

donde  $k$  y  $c$  son valores constantes a determinar de forma empírica,  $\sigma$  es la desviación estándar de las observaciones. Con la nueva reponderación se repite el ajuste por mínimos cuadrados, operación que se repite iterativamente hasta que se logra la convergencia. Según su definición, al final del proceso las observaciones afectadas de errores groseros deberían tener asociados pesos próximos a cero.

Una de las ventajas de este método frente a otros estimadores robustos es su capacidad de detección de errores y la rapidez de cálculo (rápida convergencia). Además en el caso de no existir errores groseros en el conjunto de datos, el estimador no afecta el resultado final de los parámetros estimados.

No obstante, uno de los principales inconvenientes de este método es que como se aprecia en (4.138) no existe un método general, ya que es dependiente de la determinación de los parámetros empíricos en cada caso en particular. Por ello se escoge como estimador más eficaz al denominado estimador danés modificado (Domingo, 2000):

$$p(v_i) = e^{-|v_i|^2} \quad (4.139)$$

Esta alternativa, ponderará exponencialmente los residuos de forma que los posibles errores groseros se subponderaran, mientras que a las observaciones válidas se les asignarán pesos altos.

### Geman-McClure

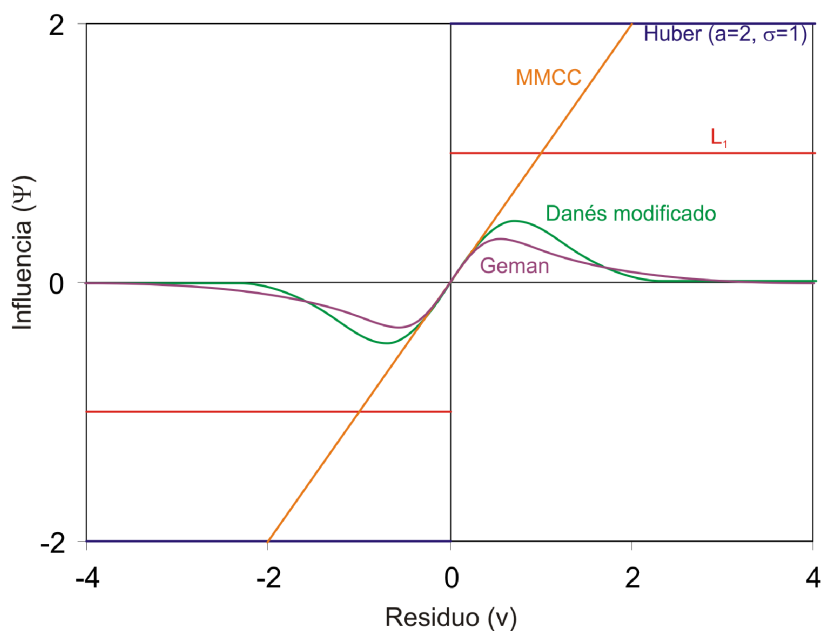
El estimador robusto de Geman-McClure (Geman et al., 1992) define la siguiente función de pesos

$$p(v_i) = \frac{1}{(1 + v_i^2)^2} \quad (4.140)$$

Su uso se ha restringido mayoritariamente a aplicaciones de reconocimiento de imágenes, ya que se ha demostrado que es superior a las funciones convexas en los problemas de clasificación de imágenes.

La comparación entre los cuatro estimadores robustos mencionados anteriormente y el método convencional de mínimos cuadrados se puede ver en la Figura 4.27 y Figura 4.28, donde se aprecian gráficamente las diferencias entre los métodos, según sus funciones de influencia y pesos respectivamente.

En el caso de las funciones de influencia (Figura 4.27), se aprecia como el ajuste convencional (MMCC) presenta una pendiente elevada y constante, razón por la que no se puede considerar como un método robusto. Respecto a los estimadores desarrollados, se aprecia la división en dos grupos, según su continuidad: Huber y la norma  $L_1$  tienen una discontinuidad (concretamente para el valor residual cero) que debe ser prevista en su implementación práctica; al contrario que el estimador danés modificado y el de Geman, los cuales son continuos y generan, como se expondrá a continuación, unas funciones de pesos particulares.



**Figura 4.27 Funciones de influencia de estimadores tipo M**

En la siguiente figura se aprecia la falta de robustez del ajuste convencional (MMCC), y como se podrían dividir los estimadores en dos grupos, según solamente subponderan los mayores residuos (danés y Geman) o en el caso de los residuos más pequeños los sobreponderan por encima del valor unidad (norma  $L_1$  y Huber). Dicha división no es arbitraria ya que en el segundo caso, si no existiesen errores groseros, los parámetros estimados no coincidirían con los estimados por mínimos cuadrados, debido a la función asintótica.

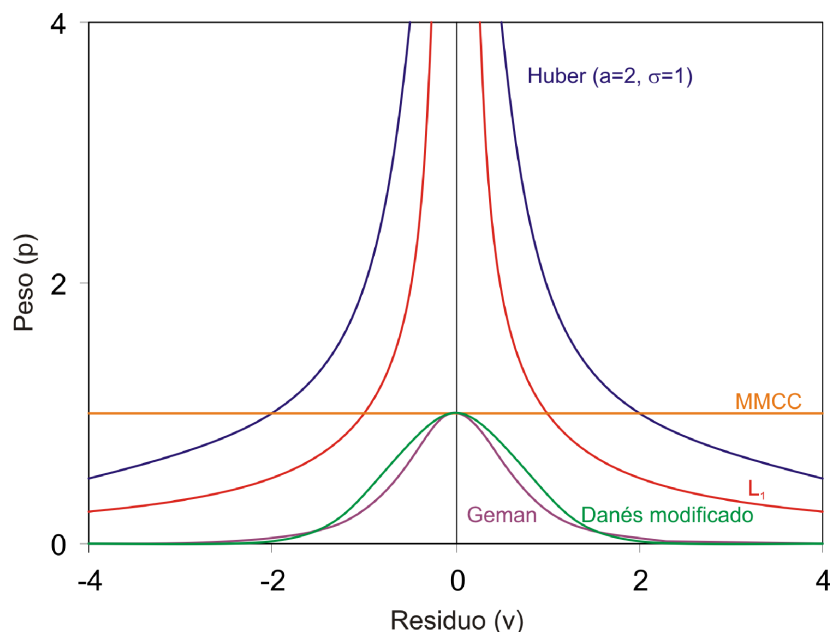


Figura 4.28 Funciones de peso de estimadores tipo M

A parte de los estimadores tipo M desarrollados anteriormente ( $L_1$ , Huber, Danés y Geman) existen multitud de métodos, de los cuales se listan los más conocidos (Domingo, 2000) de forma resumida en la Tabla 4.2 anexa.

Estimador	Función objetivo	Función influencia	Función pesos
Norma $L_2$ (Mínimos cuadrados)	$\rho(x) = \frac{x^2}{2}$	$\Psi(x) = x$	$p(x) = 1$
Norma $L_1$ (Valor absoluto)	$\rho(x) =  x $	$\Psi(x) = \text{sgn}(x)$	$p(x) = \frac{1}{ x }$
Norma $L_1$ - $L_2$	$\rho(x) = 2(\sqrt{1+x^2/2} - 1)$	$\Psi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2/2}}$	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2/2}}$
Norma $L_p$ (Mínima potencia)	$\rho(x) = \frac{ x ^p}{p}$	$\Psi(x) = \text{sgn}(x) x ^{p-1}$	$p(x) =  x ^{p-2}$
Fair	$\rho(x) = c^2 \left[ \frac{ x }{c} - \log \left( 1 + \frac{ x }{c} \right) \right]$	$\Psi(x) = \frac{x}{1+ x /c}$	$p(x) = \frac{1}{1+ x /c}$
Huber	$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si }  x  \leq k \\ k( x  - k/2) & \text{si }  x  > k \end{cases}$	$\Psi(x) = \begin{cases} x & \text{si }  x  \leq k \\ k \text{sgn}(x) & \text{si }  x  > k \end{cases}$	$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si }  x  \leq k \\ k/ x  & \text{si }  x  > k \end{cases}$
Cauchy	$\rho(x) = \frac{c^2}{2} \log \left[ 1 + \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right]$	$\Psi(x) = \frac{x}{1+(x/c)^2}$	$p(x) = \frac{1}{1+(x/c)^2}$
Geman-McClure	$\rho(x) = \frac{x^2/2}{1+x^2}$	$\Psi(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$	$p(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$
Welsh	$\rho(x) = \frac{c^2}{2} \left[ 1 - e^{-(x/c)^2} \right]$	$\Psi(x) = x e^{-(x/c)^2}$	$p(x) = e^{-(x/c)^2}$

Tukey	$\rho(x) = \begin{cases} \frac{c^2}{6} [1 - (1 - (x/c)^2)^3] & \text{si }  x  \leq c \\ c^2/6 & \text{si }  x  > c \end{cases}$	$\Psi(x) = \begin{cases} x(1 - (x/c)^2)^2 & \text{si }  x  \leq c \\ 0 & \text{si }  x  > c \end{cases}$	$p(x) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right)^2 & \text{si }  x  \leq c \\ 0 & \text{si }  x  > c \end{cases}$
Danés	$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si }  x  \leq 2\sigma \\ \frac{1}{2c}(1 - e^{-cx^2}) & \text{si }  x  > 2\sigma \end{cases}$	$\Psi(x) = \begin{cases} x & \text{si }  x  \leq 2\sigma \\ xe^{-cx^2} & \text{si }  x  > 2\sigma \end{cases}$	$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si }  x  \leq 2\sigma \\ e^{-cx^2} & \text{si }  x  > 2\sigma \end{cases}$

Tabla 4.2 Resumen de estimadores tipo M

En la figura siguiente se presenta un esquema resumen de la metodología de trabajo con estimadores robustos. El criterio de convergencia del ajuste iterativo válido sería el análisis de la variación de la varianza a posteriori, ya que cuando esta sea mínima o no supere un determinado umbral, se aceptarán los parámetros estimados y se detendrán las iteraciones. Nótese que la verificación del resultado puede ser mediante un test de bondad del ajuste, y si este no es satisfactorio se cambiaría el estimador por otro, ya que como se expuso anteriormente, no existe un único estimador robusto que se adapte a todos casos.

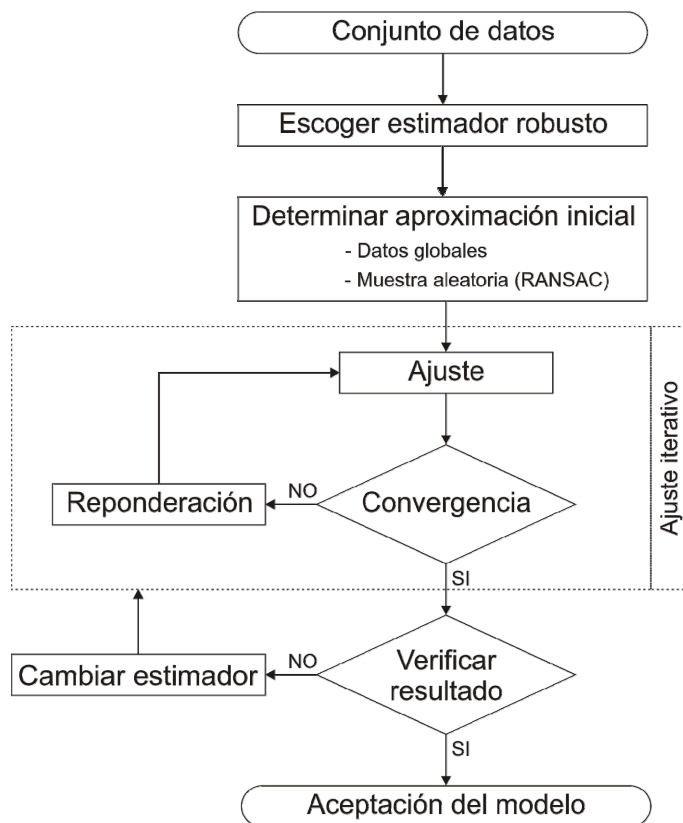


Figura 4.29 Resumen de la metodología de ajuste con estimadores robustos

# Capítulo 5

## Modelización híbrida

En este capítulo se presenta una estrategia de modelización híbrida articulada en sus dos vertientes: geométrica y radiométrica y sustentada en el registro robusto desarrollado para los sensores láser escáner y cámara digital. Más concretamente, se plantea un doble reto: por un lado y desde el punto de vista geométrico, avanzar en el paso de la nube de puntos a un modelo vectorial CAD, y por otro y desde el punto de vista radiométrico, solucionar el mapeo de texturas de alta resolución provenientes de cámaras digitales (ajenas al equipo) sobre la nube de puntos.

### 5.1. Imagen sólida verdadera

Una imagen de rango procedente del láser escáner puede considerarse como la proyección central del objeto escaneado, por lo que conocidos los parámetros de orientación internas y externas de dicho punto de proyección es posible asignar a cada píxel de la imagen su rayo perspectivo particular. No obstante y como es bien conocido en fotogrametría, el conocimiento de un rayo perspectivo no habilita la posibilidad de obtener la posición 3D del punto del objeto asociado a dicho píxel, ya que existe una indeterminación en profundidad.

Sin embargo, la integración del láser escáner terrestre con las imágenes digitales provenientes de una cámara darán lugar a la posibilidad de asociar información geométrica a cada píxel de una imagen. Como resultado, la tradicional información radiométrica RGB de una imagen registrada al modelo tridimensional adquirido mediante un láser escáner terrestre da lugar a un nuevo concepto: la imagen sólida (Bornaz y Dequal, 2003a).

La imagen sólida, que tiene un carácter híbrido resultante del registro de ambos sensores, depara las siguientes ventajas:

- La posición espacial de nubes de puntos de la superficie del objeto en su propio sistema de referencia.
- La posibilidad de realizar análisis dimensionales en forma de: coordenadas, distancias, superficies y volúmenes, a partir de los datos de la imagen.

- Obtener gran cantidad de información de una forma rápida y sencilla, usando las imágenes de alta resolución con cualquier visor fotográfico disponible en el mercado.
- La posibilidad de clasificar cualitativamente información en cuanto al material y el acabado en función de los niveles de intensidad de respuesta a la radiación láser.

La definición original de imagen sólida consiste en asignar a cada píxel el valor de distancia entre el punto de vista (o de proyección) y el punto del objeto. Si a la dirección de un vector en el espacio (ángulo acimutal y cenital), obtenida a través de los valores de resección espacial, se le añade el valor de distancia o separación mencionado anteriormente, se obtiene un sistema de coordenadas esférico o polar tridimensional. Mediante dicha parametrización es sencillo reconstruir la posición espacial (coordenadas cartesianas  $X, Y, Z$ ) de cada punto de la imagen.

Al fin y al cabo, la idea es almacenar información adicional en la matriz RGB que define la imagen digital proveniente de la cámara, matriz tridimensional de tantas filas y columnas como la imagen representadas por 3 capas para almacenar las diferentes componentes de color. Según la idea de Bornaz y Dequal (2003a) dicha matriz tendría un cuarto nivel con el valor de distancia,  $d$ , (Figura 5.1)

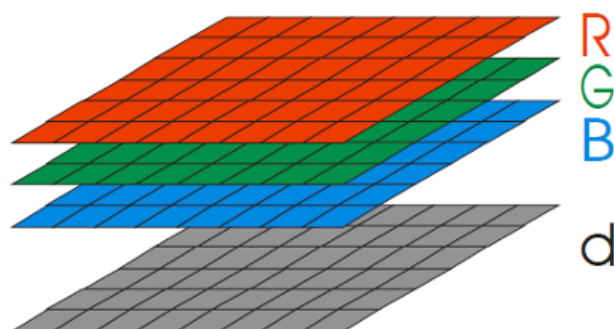


Figura 5.1 Estructura clásica de la imagen sólida (tomado de Bornaz y Dequal, 2003a)

Desde el punto de vista de la implementación informática hay que valorar que las capas de la matriz para el color RGB se definirán con una resolución radiométrica de 8 bits: 256 valores posibles para cada componente; pero la componente de distancia necesitará reservar más espacio en memoria, dado que se podrían registrar largas distancias, o longitudes como varios decimales. Bornaz y Dequal (2003b) proponen usar variables enteras (2 bytes para píxel codificado) para almacenar distancias máximas de 327,27 metros o números reales “single” (4 bytes por píxel) pudiéndose almacenar distancias de hasta 9999,99 m. La solución propuesta por Bornaz y Dequal no tiene encuentra la adaptación al número de decimales de cada caso y a la variabilidad del origen en los sistemas de referencia, como por ejemplo el sistema de coordenadas UTM con valores de millones para  $X$  e  $Y$ . Las variables single permiten  $\pm 2.147_1483.648$  valores diferentes por lo que habrá que tener dicha contingencia en cuenta a la hora de definir la imagen sólida. Por ejemplo, no sería posible almacenar una coordenada  $Y$  para España con resolución milimétrica, ya que se requerirían 10 dígitos, o lo que es lo mismo,  $10^{10}$  valores, que exceden la capacidad de la variable de 4 bytes *single*.



Una posible alternativa pasaría por emplear variables de mayor capacidad, como las de doble precisión (*double*) de 8 bytes, eliminando el problema de los dígitos de resolución, pero incrementándose excesivamente el tamaño final del archivo en un factor 3,67. Por ejemplo, si una matriz de 4000x3000 elementos se codifican con 3 bytes (típico del RGB) daría un tamaño final de 34,33 Mb; mientras que si a dicha matriz se le añaden 8 bytes para codificar la distancia el tamaño final alcanzaría valores de 125,89 Mb.

Por otro lado, la utilización de la distancia como elemento de información geométrica es incompleta en tanto que para reconstruir la posición espacial de los puntos del objeto con precisión es necesario conocer los parámetros de orientación externa con semejante precisión, ya que hay que aplicar las conocidas ecuaciones de colinealidad. En este sentido, se propone almacenar como información geométrica asociada a cada punto directamente sus coordenadas tridimensionales obtenidas mediante el sistema láser escáner, dando lugar a la que se ha denominado como Imagen Sólida Verdadera o *True Solid Image (TSI)*. De esta manera se aumenta la precisión implícita de la imagen sólida, en tanto ya podemos conocer y disponer directamente de las coordenadas tridimensionales (en un sistema dado) con la misma precisión que la proporcionada por el láser escáner terrestre. Esta aseveración no es incompatible con el proceso de interpolación (Figura 5.4) ya que el sistema de codificación permite discriminar entre puntos originales e interpolados.

De esta forma en vez de añadir un nuevo elemento en la matriz  $f \times r \times 3$  de la imagen, se propone añadir 3 imágenes (matrices  $f \times r \times 3$ ) adjuntas a la imagen RGB de alta resolución que almacenarían la geometría en coordenadas cartesianas (X,Y,Z) del objeto. Aparentemente, de esta manera se incrementa el espacio necesario para codificar la información geométrica, ya que para cada pixel le corresponderías 12 bytes de información: 3 bytes para los componentes RGB de color, y 3 bytes para cada una de las componentes de su posición (X,Y,Z).

La ventaja de almacenar una coordenada mediante 3 bytes de información es que es transmutable como un color, es decir, una imagen normal y corriente. Y toda imagen es susceptible de ser comprimida mediante algoritmos informáticos ampliamente conocidos: GIF, JPEG, RLE, etc... para más información consultar a (Jackson y Hannah, 1993). De esta manera se reduce el tamaño necesario para representar esta "imagen", obteniéndose una codificación óptima. En definitiva, el tamaño efectivo se reduce a la par que se almacena más información.

Dado de que se dispone de 3 bytes de información, el número máximo de valores almacenables sería de  $256^3 = 16.777.216$ , aunque en la codificación propuesta se aprovecharían los valores de la siguiente manera:

$$\text{Valor} = R \cdot 256^2 + G \cdot 256 + B \quad (5.1)$$

Donde  $R$ ,  $G$ ,  $B$  serían los componentes homólogos a una estructuración de una imagen de color. Las variables  $G$  y  $B$  almacenarían 256 valores posibles dentro del intervalo  $[0, 255]$ , de forma análoga a una imagen convencional. Mientras que la componente  $R$  almacenará solamente la mitad de posiciones (128) para poder codificar valores tanto negativos como positivos:  $R \in [0, 127]$  para positivos y  $[128-255]$  para los negativos. La elección de cuál de los dos grupos almacenará cada tipo de signo es arbitraria. Esto hace que en la práctica la componente  $R$

actué, para las coordenadas  $X$  e  $Y$ , como si solamente pudiese tomar 128 valores diferentes.

El resultado de la codificación de cada una de las componentes individuales de la posición espacial de un punto en concreto, puede asemejarse a una codificación RGB de color. En la Tabla 5.1 se lista un ejemplo de correspondencia entre juegos de codificación dados y su correspondencia en coordenadas. Obviamente, la resolución es adaptable, y como se mencionó anteriormente, los valores están expresados en milímetros. El resultado de la codificación sería del estilo:

Codificación	Valor
000.000.255	255
000.001.000	256
000.001.001	257
000.255.255	65535
001.000.000	65536
001.000.001	65537
127.255.255	8454143

**Tabla 5.1** Ejemplo de codificación de las coordenadas  $X$  e  $Y$  para la imagen sólida verdadera

De esta manera se aprovecha el máximo de posibilidades de la codificación; concretamente se obtiene un intervalo de 16.908.286 valores.

La codificación expresada en la Tabla 5.1 es la que se usará para las coordenadas  $X$  e  $Y$  de los puntos del objeto. Mediante esta metodología, si se desean expresar valores con resolución milimétrica, el intervalo de definición existiría para el rango  $\pm 8.454,143$  metros. Lo cual implica una cobertura superficial de 28.589 hectáreas, que realizando una comparación es superior al tamaño del término municipal de Ávila (231,9 km<sup>2</sup>).

No obstante y como se ha indicado, la codificación antes mencionada no se aplica a las coordenadas  $Z$  por la sencilla razón de que existe un serio desaprovechamiento de información. Esto resulta sencillo de apreciar en tanto se llegarían a almacenar altitudes hasta 8,4 kilómetros con resolución milimétrica. Es decir, con la mitad de información se codificarían casi cualquier altitud de la superficie terrestre con una resolución propia de la topografía o los equipos láser escáner terrestre.

Por ello se excluirá el dígito correspondiente a las centenas, dando lugar así a 100 posiciones, que permitirán almacenar 50 valores diferentes según sean positivos o negativos. Aplicando la fórmula (5.1) para un coeficiente  $R$  tal que sólo pueda tomar 50 valores diferentes, el intervalo final para la coordenada  $Z$  sería de  $\pm 3.342,080$  metros; los coeficientes  $G$  y  $B$  almacenan (al igual que para las coordenadas  $X$  e  $Y$ ) 256 valores posibles.

La posición excluida se reutilizará para almacenar la tipología del punto, es decir, si es un punto original procedente de datos de campo mediante instrumental topográfico o fotogramétrico; o si ha sido obtenido mediante procesos de interpolación con el único objeto de dar continuidad espacial al conjunto de datos.

Finalmente, y para poder codificar sistemas de coordenadas donde se trabaje con una elevada cantidad de dígitos, la TSI llevará adjunta (o incorporada como cabecera) las coordenadas del centroide de la zona de trabajo. Mediante esta sencilla traslación de tres parámetros se consigue mantener toda la definición

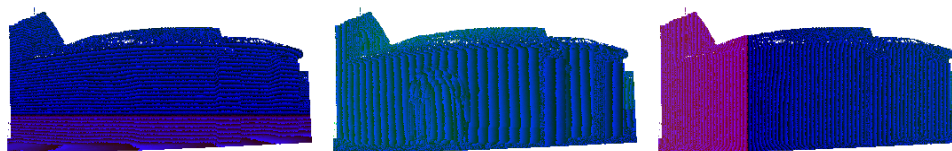
necesaria en cada caso particular. Similar a la transformación propia de la geodesia de Badekas-Molodensky (Welsch y Oswald, 1984):

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+d\lambda & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 1+d\lambda & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1+d\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - X_C \\ Y - Y_C \\ Z - Z_C \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde la variación de escala ( $d\lambda$ ) y las rotaciones ( $\varepsilon_X$ ,  $\varepsilon_Y$ ,  $\varepsilon_Z$ ) respecto a las coordenadas del centroide ( $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $Z_C$ ) no son consideradas. De esta manera, mediante las coordenadas del centroide se puede realizar la conversión entre las coordenadas locales ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) y las geo-referenciadas correctas ( $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ).

$$X_C = \frac{\sum_{i=0}^n X_n}{n}; \quad Y_C = \frac{\sum_{i=0}^n Y_n}{n}; \quad Z_C = \frac{\sum_{i=0}^n Z_n}{n} \quad (5.3)$$

Asimismo el vector de traslación ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ) de la ecuación (5.2) no ha lugar, porque sería redundante con el vector de posición del propio centroide (5.3).



**Figura 5.2 Información de coordenadas X, Y, Z codificadas y expresadas visualmente (de izquierda a derecha respectivamente)**

La información de la posición espacial de los objetos escaneados se obtiene mediante una nube de puntos láser con alta densidad de captura. Adicionalmente se puede disponer de una imagen cámara, que normalmente será una imagen de alta resolución para documentar la radiometría del espectro visible mediante los canales RGB. La puesta en común de ambos conjuntos de información, obviando la fase anteriormente vista de codificación eficaz de la información, pasa por una fase de proyección similar a la vista en la sección 4.2.2 donde se empleaba la condición de colinealidad.

Una TSI no tiene por qué estar limitada a dotar de información geométrica a la imagen resultante de una proyección central, si no que se puede crear empleando cualquier otro tipo de proyección. La alternativa más plausible a una imagen sólida con proyección central, sería la generada con una proyección ortográfica, ortofoto láser.

Otro aspecto que ha de considerarse durante el proceso de proyección para generar la imagen sólida es que, para una misma posición de la matriz de la imagen sólida, puede ser asignada a varios puntos del objeto, en tanto que las filas y columnas que definen los píxeles de la imagen sólida son números enteros. En este punto se hace indispensable una correcta gestión de las partes vistas y ocultas para asignar la posición espacial final. Una primera posición o aproximación podría ser promediar la posición espacial de todos los puntos para obtener el que a priori sería el valor más probable. Esta solución aunque sencilla incurre en el error de distorsionar la información precisa obtenida en campo con un láser escáner terrestre al aplicarle la corrección del promedio. La solución propuesta consiste en

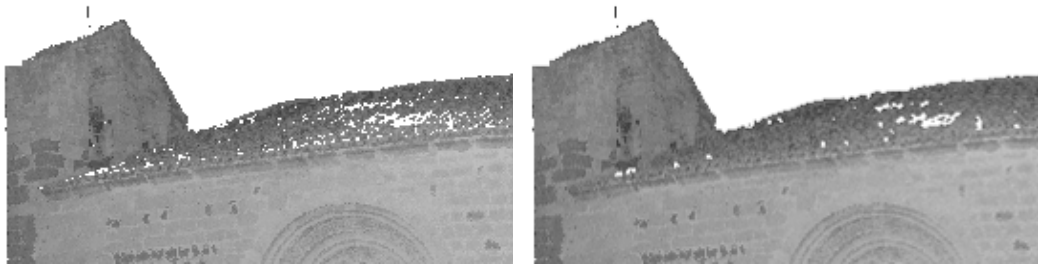
que para la asignación de cada píxel, cada punto en el espacio entra en un proceso de calificación, donde el criterio de selección es la distancia más próxima al centro de proyección o plano imagen (según el tipo de proyección), evitándose así la influencia de posiciones más alejadas, caso típico de los bordes, en donde se visualizaría una superficie (más cercana) y por la condición de colinealidad una superficie más alejada competiría por la misma posición píxel en la imagen sólida. Este planteamiento se fundamenta en que los datos procedentes del sistema láser escáner terrestre han sido correctamente depurados para eliminar cualquier ruido ajeno a los elementos objeto de estudio de la escena documentada. Mediante esta limpieza del ruido se evita que puntos erróneos situados entre los objetos de estudio y el sistema de captura láser sean seleccionados como los puntos de información geométrica a asignar a un determinado elemento de la matriz de la TSI.

Debido a que la densidad de los píxeles de las imágenes digitales son normalmente superiores a las obtenidas mediante un sistema láser escáner terrestre, cuando se determina la matriz de información geométrica, no todas las posiciones son dotadas de información. Esto implica que la TSI, si se visualiza como si fuese una imagen, presentaría huecos de forma similar al caso visto en el apartado 4.2.2; aunque en dicho caso al trabajar con conversiones 2D de la nube de puntos láser, la regeneración de texturas se solventaba fácilmente con el algoritmo IDW (4.2).

En el párrafo anterior se ha hecho mención al concepto de “matriz de información geométrica”, en tanto que esta problemática está presente tanto en la imagen sólida convencional en el caso de la distancia (Bornaz y Dequal, 2003a), como en la TSI en el caso de las coordenadas tridimensionales.

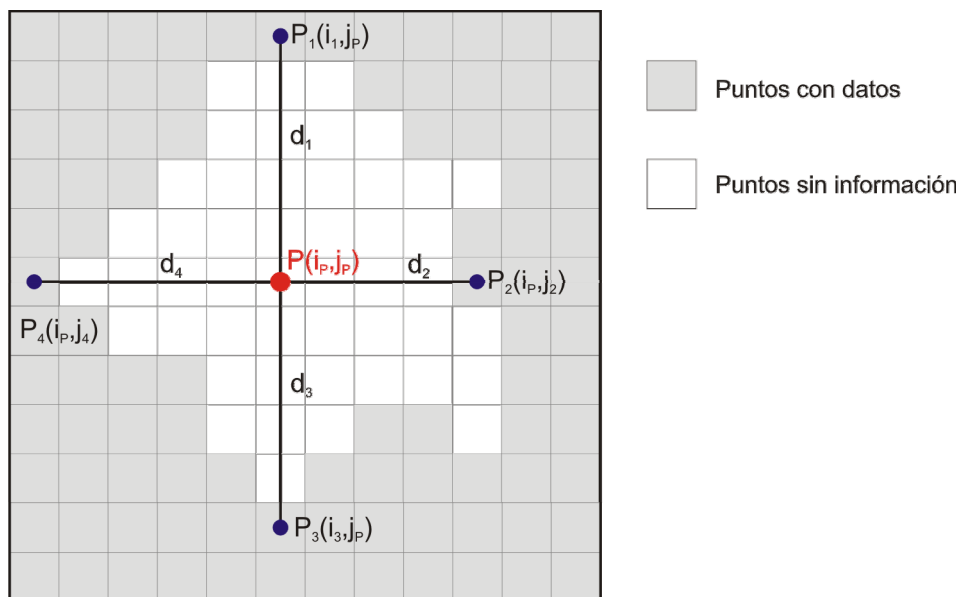
Bornaz y Dequal (2003a) para completar la matriz de datos de distancia integran los valores ausentes mediante un proceso de interpolación, que en su caso consiste en el algoritmo IDW.

En la TSI propuesta en esta Tesis Doctoral, se hará uso del mismo algoritmo de interpolación pero aplicado al conjunto de coordenadas 3D. Puesto que realizar interpolaciones sobre conjuntos de datos espaciales puede ser delicado en tanto existen geometría complejas que no se pueden prever mediante únicamente el análisis de una pequeña vecindad, (por ejemplo, los bordes o cambios de profundidad entre dos superficies pueden dar lugar a huecos ya que no se han dado puntos en la zona perpendicular a ellas). Por ello, y para evitar la problemática expuesta, el algoritmo de interpolación IDW solamente se aplicará sobre vecindades 3x3 elementos (tres filas y columnas) en la capa de la matriz geométrica correspondiente ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), y siempre y cuando al menos un determinado porcentaje de elementos de dicha vecindad posean coordenadas 3D (por defecto se indica un 75%).



**Figura 5.3** Capa de información de intensidad original (izquierda) y resultante de interpolar mediante el IDW (derecha)

No obstante, mediante dicha metodología solamente se completan algunos puntos, debido a las restricciones anteriormente expuestas. Sin embargo, pueden existir huecos de mayores dimensiones en donde no es viable la interpolación IDW ya que se generaría información con mucha probabilidad de ser errónea. Para solventar esta deficiencia se interpolará mediante un método adaptado de la técnica de inundación (Heckbert, 1993). El procedimiento consiste en primer lugar en identificar aquellas zonas de las capas de la matriz geométrica donde existen polígonos cerrados carentes de información. Seguidamente se realizará una interpolación IDW restringida entre los elementos más cercanos según filas y columnas al punto a interpolar, ponderándose según la distancia entre los puntos conocidos y el número de incógnitas.



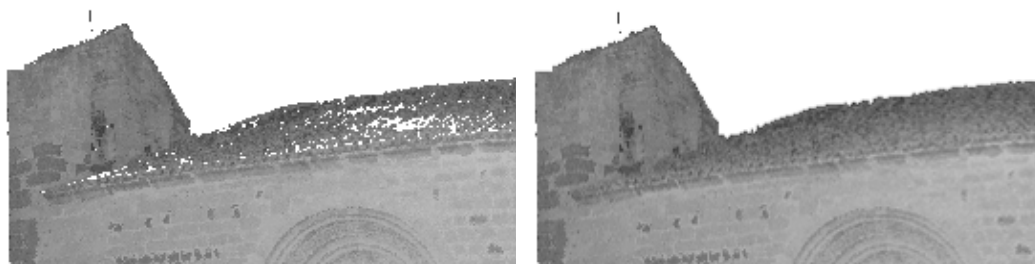
**Figura 5.4** Esquema de interpolación por inundación

Siguiendo la ecuación (4.2), la resolución de la metodología expuesta y recogida en la Figura 5.4 se puede resumir en la ecuación siguiente:

$$X_p = \frac{(X_{P_1} \cdot d_1) + (X_{P_2} \cdot d_2) + (X_{P_3} \cdot d_3) + (X_{P_4} \cdot d_4)}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \quad (5.4)$$

donde,  $X_{P_i}$  se refiere a los valores de los puntos conocidos en base a los cuales se realiza la interpolación estando  $i$  definido entre 1 y 4. Y  $d_i$  son las distancias, entre los puntos  $X_{P_i}$  y el punto incógnita  $X_p$ .

Dentro del mismo hueco o polígono todos los elementos se interpolan a la vez, es decir, nunca se interpolan puntos en base a otros puntos anteriormente interpolados. Si bien este método no es el más adecuado porque nunca se reconstruirá correctamente la geometría real del objeto, permite obtener una matriz de datos continua y de transiciones suaves en las zonas problemáticas (huecos) Figura 5.5.



**Figura 5.5** Capa de información de intensidad original (izquierda) y resultante de interpolar mediante las técnicas IDW e inundación (derecha)

Como se comentó anteriormente, se reserva parte de la información destinada a codificar la coordenada Z para recoger si el punto es interpolado o no. Esto es necesario para poder restringir la extracción de la información geométrica recogida en la TSI a los datos de campo originales, para en el momento de realizar su análisis no se tengan en cuenta datos procedentes de procesos de interpolación, y por lo tanto afectados por los errores de interpolación anteriormente expuestos.

Aunque se ha obviado anteriormente, para una correcta generación de una TSI es necesario que la imagen proveniente de la cámara o la imagen de alta resolución RGB estén corregidas de distorsión (capítulo 3.4), para que la correspondencia entre los píxeles de la imagen y los puntos del terreno sean consistentes con la realidad, o expresado de otra manera, sean las correctas. Asimismo, el sistema láser terrestre debe funcionar correctamente, en el sentido de que si tiene presencia de errores instrumentales o sistemáticos se producirá una degradación de la precisión de la imagen sólida. Este último factor se puede solventar mediante un proceso de auto calibración como el expuesto en el capítulo 3.3.

Cuando el elemento objeto de estudio de una imagen sólida es una zona plana orientada de tal manera que es paralela al plano imagen (o paralela con respecto al plano focal si se realiza la analogía de una cámara digital) estaríamos ante el caso similar al de una ortofotografía. Esto es así en tanto la imagen sólida no tiene por qué responder a un proceso de proyección central, aunque se pueden crear imágenes sólidas que verifiquen esta condición. Una ortofotografía u ortoimagen sería equivalente en la práctica a una imagen sólida convencional, ya que sólo se pueden medir invariantes espaciales (ángulos, distancias, áreas,...) y no se dispone de la totalidad de las componentes de las coordenadas de los puntos del objeto en el sistema de coordenadas terreno, al ser el resultado de un proyección sobre un plano dado. Nótese que el hecho de dotar de coordenadas terreno las esquinas de una ortofotografía no es ni un requisito propio de la creación de ortoimágenes ni permite la completa reconstrucción espacial de los puntos del objeto (la tercera coordenada no estaría definida). En este aspecto es necesario resaltar que una TSI es un tipo de producto derivado que sobrepasa y mejora las limitaciones implícitas de otros productos ampliamente extendidos, como la

ortofotografía, u otros aparecidos al amparo de las nuevas tecnologías (sistemas láser escáner terrestres) como la imagen sólida convencional.

## 5.2. Modelado híbrido. Geometría

La reconstrucción de superficies precisas a partir de nubes de puntos desorganizadas (sin topología) derivadas de un láser escáner terrestre o de un proceso de restitución fotogramétrico es un problema muy complejo, que no está completamente resuelto, y que es a la vez problemático en el caso de disponer de datos incompletos, escasos o con presencia de ruido (Remondino, 2003). Los modelos poligonales generados deben de poder satisfacer las elevadas demandas de visualización y modelado requeridos en distintos campos de aplicación como las aplicaciones de realidad virtual, videojuegos, películas, etc... El objetivo siempre es encontrar la forma de generar un modelo informático idealizado que mejor se adapte a la realidad del objeto. La vía más usual para proveer de un descripción óptima de la superficie en cuestión y permitir a la vez mediciones precisas son los modelos poligonales. Mientras que el campo centrado en la generación de los modelos digitales del terreno se disponen de soluciones eficientes para la modelización, principalmente por la tradición existente; el correcto modelado de superficies libres o cerradas es un tema de reciente importancia, y que está sujeto a investigación.

El propósito de esta línea de desarrollo es tratar de sacar partido al registro de ambos sensores en base a las características intrínsecas propias de cada sensor y de sus datos. De esta manera se consigue avanzar en uno de los retos más importantes en estos momentos dentro de la Comunidad Científica Internacional, conseguir mejorar y completar la geometría deparada por un láser escáner terrestre y tratar de minimizar el salto existente entre el paso de la nube de puntos a un modelo CAD.

Actualmente existen soluciones software que permiten la modelización de una nube de puntos mediante una malla de triángulos (TIN), tanto de código abierto como *MeshLab*, o comerciales como *Trimble RealWorks*<sup>®</sup>, o *Innovmetric Polyworks*<sup>®</sup>, entre muchos otros. Dichos programas generan una reconstrucción exhaustiva en base a una malla triangular entre todos los puntos de la nube láser considerada como input. Si bien dicha malla podría parecer una solución válida al problema de modelización y conversión entre una nube de puntos a un sistema CAD, la realidad es bien distinta por varias razones:

- La generación del mallado requiere de un proceso computacionalmente exigente, que se incrementa sobremanera al aumentar el número de puntos del input. Respecto a este punto no es solución la reducción de la cantidad de puntos de entrada, porque al proceder la nube de una captura con un equipo láser escáner terrestre, su densidad no es uniforme y ni los bordes y aristas están perfectamente definidos, ergo una simplificación (aleatoria o basada en criterios espaciales) implicaría una degradación de la calidad del modelado final.
- Los modelos de mallas triangulares son elementos de difícil visualización ya que exigen mucha memoria al ordenador para dicha labor, sobre todo si

tienen mucha definición (elevado número de triángulos). La única solución a esta salvedad sería la utilización de procesos de simplificación de mallas, los cuales, dado que se aplican de forma automatizada sobre el conjunto en función de unos umbrales dados, o bien generan simplificaciones insuficientes o bien simplifican en exceso el modelo. El proceso ideal requeriría de la intervención de un operador humano experto que sobre-densificase las zonas curvas y generalizase las áreas planas.

- Como se ha comentado anteriormente, un problema de las nubes de puntos procedentes de los láser escáner terrestres es la pobreza en la definición de los bordes, carencia causada por el propio sistema de captura. Este problema se traslada directamente al proceso de generación de mallas triangulares, dando lugar a bordes romos. Y dicha problemática se pone aún más de manifiesto cuando se dispone de nubes de puntos láser poco densas, haciendo que la definición de las aristas sea aún más imprecisa.

En base a lo anteriormente mencionado, la solución de mallas triangulares no es un camino viable para la modelización de las nubes de puntos láser, siendo necesario otro tipo de acercamiento, como el propuesto dentro de esta línea de trabajo en favor de la automatización del procesado de datos láser.

Para aquellas aplicaciones de modelización, como la reconstrucción de edificios, donde el objeto puede ser descrito de forma general mediante un conjunto de líneas rectas, la tecnología del láser escáner terrestre llega a proporcionar una solución final, siempre y cuando, previamente se proceda a la extracción de los planos de las fachadas y se obtenga su intersección matemática.

El proceso de modelización de superficies basado únicamente en un conjunto de puntos proporcionados por un láser escáner, no puede proveer una precisa extracción de la superficie, ya que la información en forma de aristas no son proporcionadas por el láser escáner. A veces, se puede disponer de información adicional sobre la superficie objetivo (por ejemplo, las líneas de rotura) y la superficie resultante tiene más posibilidades de ser topológicamente correcta y converger con la superficie original. En este sentido, un sistema láser escáner “ideal” debería proporcionar de forma automática escaneos de mayor densidad en las áreas de detalle y datos con menor resolución en las zonas sin elementos de interés. Pero normalmente, los puntos medidos están desorganizados, inconexos (sin topología) y contienen ruido.

La aproximación presentada en esta sección no busca extraer directamente la información tridimensional a partir de la imagen de alta resolución, lo que se persigue es que las características lineales 2D detectadas en la imagen cámara puedan convertirse en entidades geométricas 3D a partir del registro e hibridación proporcionada por el láser escáner terrestre.

Para ello, se propone un proceso robusto y jerárquico de vectorización automática aplicado sobre la imagen sólida verdadera resultante del registro de ambos sensores.

El origen de esta idea y por ende del procedimiento, emana de la analogía existente con los procesos de restitución de pares estereoscópicos realizados durante la época de la fotogrametría analítica, en donde el operador realizaba un



recorrido del modelo del par con la marca flotante para restituir los elementos relevantes o de interés. En este caso se buscará la aplicación de los procesos de restitución, pero solamente aplicados a una imagen individual. Este planteamiento, que rompe los principios más clásicos de fotogrametría, sólo es posible si se aplica sobre una imagen sólida verdadera, ya que a dicha imagen a parte de la información radiométrica procedente de la imagen de alta resolución le corresponderá la capa métrica, coordenadas tridimensionales, procedentes del láser escáner terrestre.

El detector de bordes de Canny (Canny, 1986) es un algoritmo idóneo para la detección de bordes ya que mantiene tres criterios trascendentes para cualquier detector de bordes (Aguilera, 2005):

- **Precisión** en la localización del contorno, garantizando la mayor proximidad de los bordes detectados a los bordes verdaderos.
- **Fiabilidad** en la detección de los puntos de contorno, minimizando la probabilidad de detección de falsos bordes causados por el ruido, así como también la pérdida de bordes reales.
- **Unicidad** en la obtención de un único borde para el contorno, garantizando bordes con una achura máxima de un píxel.

Estos criterios coinciden con las condiciones propuestas por el mismo Canny (1986) para el funcionamiento ideal de un detector de bordes, y que impuso para la creación del operador o detector conocido por su nombre:

- **Bajo porcentaje de error:** es importante que todos los bordes presentes en una imagen sean detectados y a la vez evitar respuestas espurias. Este objetivo se ve dificultado por los propios errores inducidos por el algoritmo de detección de bordes.
- **Localización:** este segundo criterio establece que los puntos pertenecientes a los bordes estén correctamente localizados. Es decir, la distancia entre los puntos marcados por el detector y el “centro” del borde verdadero ha de ser mínima.
- **Unicidad local:** coincidente con la anteriormente mencionada. Su importancia radica en que las dos condiciones anteriores no eran suficientes como para eliminar por completo la posibilidad de respuesta múltiple de un borde.

El operador de Canny es el resultado de la resolución de un problema de optimización con restricciones (las cuales son las listadas anteriormente) en base a la sensibilidad, localización y unicidad local. El método puede verse como un filtrado de suavizado llevado a cabo con una combinación de funciones exponenciales, seguido de operaciones derivativas (Juneja y Sandhu, 2009).

El detector de Canny primero suaviza la imagen de entrada para eliminar el ruido, luego calcula el gradiente de la imagen para resaltar las regiones con derivadas espaciales elevadas. El algoritmo recorrerá entonces dichas regiones y eliminará todos los píxeles que no estén en el máximo (*non maximun suppression*). El vector gradiente será reducido mediante histéresis; proceso el cual recorrerá los píxeles restantes, estableciendo mediante dos umbrales prefijados si pertenecen a un borde o no.

El resultado del proceso será una imagen binaria, en la que aparecerán en negro los píxeles correspondientes a los bordes y en blanco el resto de píxeles. Y como se ha mencionado anteriormente, el usuario participa en el proceso debiendo introducir tres parámetros básicos: una desviación estándar y dos valores umbral.

A continuación se pasan a describir cada una de las fases que intervienen en la aplicación del filtro de Canny (Aguilera, 2005):

**Fase 1: Suavizado de la imagen.** En primer lugar, es necesario filtrar cualquier ruido presente en la imagen original de entrada antes de proceder a cualquier intento de detección de bordes. La imagen original es suavizada mediante una función gaussiana (5.5) de anchura especificada por el usuario. La desviación estándar considerada como parámetro de entrada en el filtro de Canny definirá el tamaño o anchura de la máscara gaussiana.

$$\begin{aligned} \text{Gaussiana 1D} \equiv G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \\ \text{Gaussiana 2D} \equiv G(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

La máscara resultante es de menores dimensiones que la imagen analizada, por lo que se realiza un proceso de convolución para recorrer todas las posiciones, salvo los píxeles que delimitan la imagen, ya que en esas posiciones no es posible la aplicación de los filtros (al carecer de valores para su cálculo). Cuanto más elevado sea el parámetro,  $\sigma$ , de desviación estándar, menor será la sensibilidad del detector al ruido. Asimismo, el error de localización de los bordes detectados aumentará ligeramente según se incremente  $\sigma$ .

**Fase 2: Realce de la imagen.** La imagen suavizada en la primera fase es convolucionada mediante un operador gradiente en las direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$  (5.6), de forma que obtengamos una imagen con los cambios de intensidad detectados sobre la que calcular las componentes del borde relativas a la fuerza y orientación de la normal al borde. La fuerza del borde o magnitud del gradiente,  $|G|$ , nos proporcionará una medida del contraste local de la imagen, mientras que la orientación del borde,  $\theta$ , nos identificará la dirección perpendicular al borde en forma de vector unitario.

El operador gradiente empleado es el filtro de Sobel (Sobel y Feldman, 1968) el cual es un operador gradiente muy utilizado en la visión computacional. Se fundamenta en establecer si un píxel es borde si existe una discontinuidad en la función intensidad de la imagen, o expresado en otros términos, si la derivada de los valores de intensidad de la imagen es un máximo.

$$G_x = \begin{bmatrix} +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad G_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -2 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Este operador provee las siguiente ventajas:

- Buena respuesta en bordes horizontales y verticales.
- Diversidad de tamaños en las máscaras.

- Poco sensible al ruido.

Mientras que sus contrapartidas son:

- Mala respuesta en bordes diagonales.
- Lentitud de cálculo.
- No da información acerca de la orientación del borde.
- Anchura del borde de varios píxeles.

Las matrices del filtro (5.6) o *kernels* están diseñadas para responder de forma óptima a la estructura de la rejilla de píxeles, es decir, las direcciones perpendiculares de  $X$  e  $Y$ . La combinación de ambas derivadas direccionales o componentes del gradiente permiten obtener la magnitud absoluta del gradiente para un píxel dado.

$$|G| = |G_x| + |G_y|$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{G_y}{G_x}\right) \quad (5.7)$$

La magnitud del gradiente puede calcularse según la fórmula de la ecuación (5.7), la cual es una expresión aproximada comúnmente utilizada por su rapidez computacional, en lugar de la estrictamente correcta:

$$|G| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad (5.8)$$

**Fase 3: Orientación del borde.** Una vez es conocida la dirección del borde, el siguiente paso es relacionarla con la dirección que puede ser rastreada sobre la imagen. Puesto que estamos trabajando con una cuadrícula (del sistema píxel) sólo existirán cuatro direcciones posibles: horizontal ( $0^\circ$ ), diagonal positiva ( $45^\circ$ ), vertical ( $90^\circ$ ) y la diagonal negativa ( $135^\circ$ ). Para un valor dado de orientación del borde, este se aproximará a la orientación más cercana, de las ocho posibles (son ocho sentidos para cuatro direcciones).

**Fase 4: Eliminación de los no máximos.** Sobre la imagen realizada con los cambios de intensidad de la fase 2 se analiza la fuerza de los bordes, siguiendo la orientación del borde obtenida de la fase 3. Si la fuerza del borde es menor que al menos uno de los dos vecinos a lo largo de esa dirección, dicho punto es excluido como punto perteneciente al borde. El resultado es una imagen con los bordes adelgazados como consecuencia de la supresión (*non maximum suppression*).

**Fase 5: Umbralizado de bordes.** La asignación del umbral es quizás la fase más delicada del filtro de Canny, ya que busca evitar la posible presencia de bordes ruidosos, eliminando los bordes “débiles”. La mayoría de los detectores de bordes emplean un único umbral, dando lugar al fraccionamiento de las líneas cuando los valores fluctúan alrededor del valor umbral. Por ejemplo, si se aplicase un único umbral ( $U$ ) sobre la imagen, y existiese un borde con una fuerza media igual a  $U$ , entonces debido al ruido, habría casos donde el borde caería por debajo del umbral. Como resultado, el borde quedaría representado como una línea discontinua. Para evitarlo, el proceso umbralización de bordes del detector de Canny emplea dos umbrales, denominados umbral superior ( $U_s$ ) y umbral inferior ( $U_l$ ). Este proceso es conocido como histéresis y su funcionamiento se basa en que

si para un píxel dado su valor permanece por encima del  $U_S$ , este será aceptado inmediatamente como borde. Asimismo, cualquier píxel que esté en la vecindad directa de otro catalogado como borde, también será aceptado si presenta un valor superior a  $U_I$ . Finalmente, los píxeles con valores inferior a  $U_I$  son directamente descartados del proceso. El proceso de histéresis también puede entenderse como el seguimiento de un borde en donde es necesario que exista un gradiente  $U_S$  inicial y el proceso no se detiene hasta encontrar un gradiente menor que  $U_I$  (Juneja y Sandhu, 2009).

Los principales inconvenientes del detector de Canny son que la inclusión de varios parámetros ajustables por el usuario final puede afectar al tiempo de computación y la efectividad del algoritmo; y que es ineficaz en la detección de bordes ramificados (Ding y Goshtasby, 2001).

Los bordes resultantes del procesamiento con el filtro de Canny no son entidades lineales per se, por lo que no son directamente utilizables en un proceso de modelización geométrica, siendo por ello necesario la implementación de un proceso de **segmentación** para obtener las características geométricas más relevantes del objeto. Implementar una segmentación de calidad demandará de forma implícita extraer como extremos del segmento aquellos puntos que mejor definen la línea que se ajusta al borde. Para ello, el proceso de segmentación implementado presenta una estructura multifase, mediante el encadenado de una serie de operaciones con el objetivo de obtener un conjunto de segmentos (1D) definidos por sus coordenadas extremas. El tiempo de procesamiento de la fase de segmentación dependerá linealmente del número de píxeles detectados como bordes por el filtro de Canny, siendo de especial relevancia, en términos de velocidad computacional como eficiencia final de la segmentación, la elección de los tres parámetros configurables por parte del usuario final.

El proceso de segmentación propuesto es el recogido por Aguilera (2005) del cual se pasa a continuación a describir su funcionamiento:

**Fase 1: Clusterización.** La fase de segmentación comienza con un barrido de la imagen de bordes en sentido lexicográfico (de arriba abajo y de izquierda a derecha), en busca de píxeles candidatos de ser etiquetados como píxeles pertenecientes a un mismo grupo o clúster. El fundamento consiste en etiquetar cada píxel de borde en grupos que soporten segmentos basándose en la similitud de las orientaciones del gradiente, este paso guarda cierta semejanza con el método de Burns (Burns, 1986). Según esta metodología, cada píxel de borde será analizado con respecto a su vecindad inmediata: ocho píxeles vecinos en cada una de las direcciones posibles resultantes del gradiente. Aquel conjunto de píxeles que mantengan una orientación similar serán etiquetados como pertenecientes a un mismo borde, obteniendo una primera agrupación de los bordes en función de su gradiente.

**Fase 2 Filtrado.** Seguidamente es necesario depurar y adaptar la segmentación resultante de la fase anterior de etiquetado, dicha operación se realizará mediante un filtrado según el parámetro de *mínima longitud de un borde*. Para ello, se calcula la longitud de los bordes previamente etiquetados y se compara con la tolerancia en longitud prefijada. Si dicha longitud es igual o superior a la tolerancia fijada por el usuario, el borde será transformado en segmento, el cual tendrá como extremos las coordenadas del centro del píxel correspondientes al

inicio y fin del borde (Figura 5.6). Por el contrario, si la longitud es inferior a la tolerancia fijada, el borde será eliminado, no generando el correspondiente segmento. Este umbral resulta muy importante en el resultado final, ya que condicionará el resultado final de la segmentación, y por tanto la modelización híbrida final.

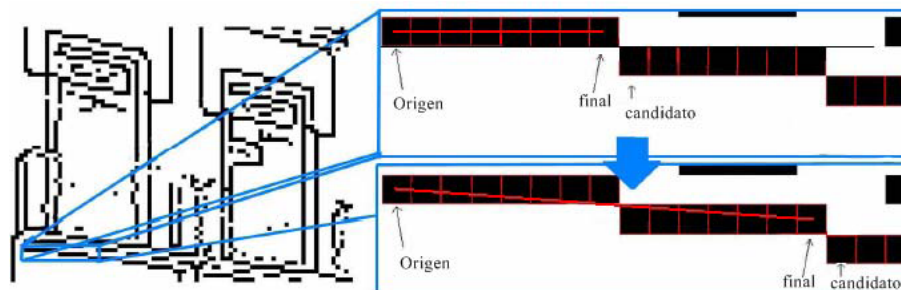


Figura 5.6 Segmentación de bordes (tomado de Aguilera, 2005)

Si bien el algoritmo de segmentación de bordes propuesto por Aguilera (2005) estaba inicialmente enfocado a la detección y extracción de líneas perspectivas correspondientes a características regulares de edificios arquitectónicos, en el ámbito del proceso de modelización híbrida geométrica cumple su labor, tanto en términos de eficacia como los velocidad computacional, quedando abierto a la incorporación otros algoritmos con el fin de mejorar la fiabilidad de la detección, amén de otras técnicas robustas apoyadas en restricciones geométricas que permitan garantizar la validez o no de los segmentos.

Durante el proceso de extracción se excluyen los puntos definitorios de bordes que poseen el código de interpolación (ver sección 5.1). Así se evita proveer de datos que no son los originales de campo al modelo CAD final. Aunque dicha opción es controlable por el usuario final, también se excluyen aquellos bordes en los que algún punto extremo carece de información geométrica; por ejemplo, elementos del fondo del objeto de estudio que si bien son registrados por la imagen de alta resolución estos no han sido documentados por el láser escáner terrestre; esa aproximación tiene por objeto trabajar con los modelos 3D para la extracción de superficies y otros elementos geométricos en objetos complejos (múltiples escaneos). Aquí se va a trabajar de modo inverso, los datos geométricos dotan de información geométrica a la imagen de alta resolución o imagen cámara, la imagen sólida vista en la sección anterior.

La metodología de modelización híbrida propuesta tiene el potencial suficiente como para poder inferir la geometría, topología y las características correctas en base a la fusión o registro de dos sensores. En este sentido, las características extraídas de la imagen de alta resolución pueden proveer de restricciones geométricas (por ejemplo, líneas de rotura) para modelizar el objeto. En la Figura 5.7 se resume el flujo de trabajo expuesto anteriormente.

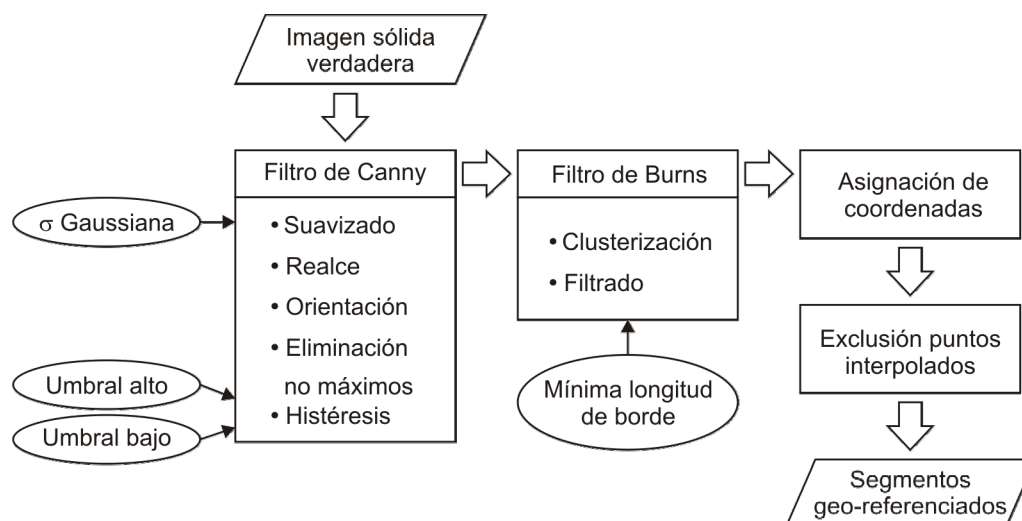


Figura 5.7 Esquema general del proceso de modelización híbrida para la extracción de la geometría

Finalmente, los segmentos lineales georeferenciados con convertidos al formato DXF. El formato DXF es un formato ascii, que se ha convertido de facto en un estándar de intercambio de información lineal (representación de dibujos) ya que está ampliamente extendido entre los usuarios de los sistemas CAD basados en PC (Meeran y Pratt, 1993).

Para la exportación de los resultados en formato de intercambio DXF, se hace uso de líneas de comando personalizadas para dicho fin, en lugar de hacer uso de librerías comerciales preexistentes. En base a sus especificaciones es sencillo implementar archivos para elementos del tipo: puntuales y lineales, ya sean segmentos o polilíneas (Autodesk, 2011).

### 5.3. Modelado híbrido. Radiometría

El objetivo del modelado híbrido es conseguir una sinergia entre sensores para obtener un producto final que combine las ventajas de cada uno de ellos. En la sección anterior se expuso una línea de desarrollo enfocada únicamente en el aspecto geométrico, pero dicha línea quedaría inconclusa si no se considerase el aspecto radiométrico, el cual hereda planteamientos propios del análisis de imagen.

Dentro del enfoque radiométrico hay que abordar aspectos tales como la proyección de texturas, particularizando según la caracterización del objeto a texturizar y con todas las consideración oportunas, y otros aspectos más enfocados a la explotación de la información cualitativa contenida en las diferentes capas radiométricas de información. Este último aspecto es muy relevante porque se puede combinar con la información métrica procedente de la modelación geométrica híbrida, obteniéndose así la sinergia buscada.

La proyección de texturas puede realizarse de dos formas diferentes, según como se considera el objeto a texturizar:

- Sobre *puntos discretos*: donde el elemento de trabajo es la nube de puntos, asignándose el color de forma puntual a los puntos que componen dicha nube. Este método tiene como ventaja la sencillez, tanto conceptual como de aplicación, pero como contrapartida, el producto final adolece de falta de calidad desde el punto de vista radiométrico.
- Sobre *mallas de triángulos*: donde la proyección de la textura se realiza sobre las caras de los triángulos, ganándose foto-realismo en el producto final, mediante un procedimiento computacionalmente costoso y más complejo que el basado en puntos.

Cuando se trabaja con la nube de puntos y una vez determinada la orientación externa de la imagen, que busca ser mapeada sobre dicha nube, es necesario considerar dos etapas diferenciadas: *proyección* y *reproyección*. La etapa de proyección se refiere al proceso consistente en dotar de componentes de color (procedentes de la imagen de alta resolución) sobre los puntos discretos (de la nube) para mejorar la apariencia del modelo. Mientras que la *reproyección* se puede entender como el paso que permite generar ortoimágenes, imágenes sólidas..., a partir de la radiometría codificada de forma discreta sobre la nube láser.

Para la proyección o mapeo de texturas sobre la nube de puntos existen dos posibles casuísticas, opuestas, en relación con las densidades de puntos y píxeles. El caso más común es aquel en el se disponen de mayor número de píxeles en la imagen de alta resolución en relación con la densidad de puntos de la nube láser. El proceso de mapeo se basa en establecer para cada punto tridimensional el rayo perspectivo existente con el punto de vista o de proyección referente a la imagen cámara. Para dicho rayo perspectivo, que se establece mediante la condición de colinealidad (sección 4.2.2), es necesario calcular su intersección con el plano imagen de la fotografía de alta resolución, resultando como producto un par de fotocoordenadas. Dicho juego sirve para buscar la radiometría que debe ser asignada al punto 3D.

La elección del color a partir de un par de fotocoordenadas que no coinciden con valores enteros (caso que haría trivial la selección del color RGB), requerirá de la aplicación de alguna técnica de remuestreo. Las técnicas de remuestreo más extendidas en el campo de la visión computacional y procesamiento digital de imágenes son: vecino más próximo, interpolación bilineal y bicúbica (Jung y Hwang, 2004). El funcionamiento general de las técnicas de remuestreo ya ha sido comentado previamente (sección 4.2.2), pero a modo de comparación rápida entre sus posibilidades y fundamento, en la Figura 5.8 se recoge su aplicación sobre un caso simple unidimensional (en esos casos las denominaciones correctas son las de lineal y cúbica, refiriéndose el prefijo bi- al caso bidimensional de las imágenes).

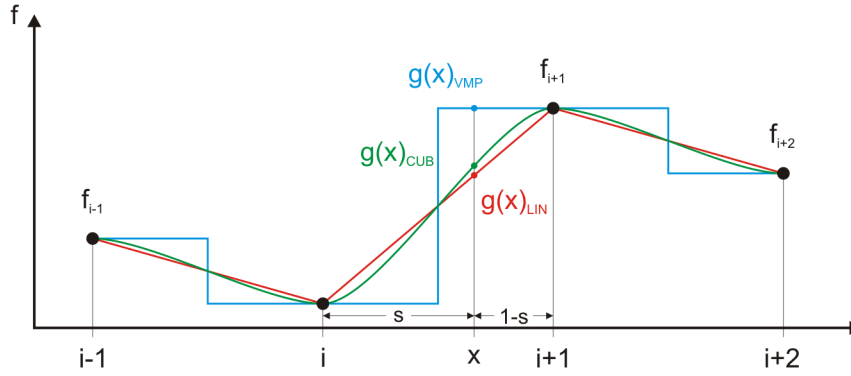


Figura 5.8 Comparación de diferentes técnicas de remuestreo

Como se aprecia en la Figura 5.8, dado un conjunto discreto de puntos equiespaciados (caso de imágenes ráster) con un valor determinado,  $f(i)$ , obtenido a partir del muestreo de una señal continua o analógica, las diferentes técnicas de remuestreo o interpolación, para un punto incógnita ( $x$ ) separado una distancia  $s$  del punto dato anterior, depararan resultados diferentes según la técnica utilizada. El avance desde el caso unidimensional al caso bidimensional es análogo, cambiando únicamente la complejidad de las ecuaciones que intervienen.

La ecuación que describe la función de interpolación bilineal (Jung y Hwang, 2004) para un punto  $(x, y)$  que no coincide con la malla de puntos discreta  $(x_i, y_j)$  de una imagen de dimensiones  $m \times n$ ; tal que  $i \in [0, m]$  y  $j \in [0, n]$ .

$$G_{bil}(x, y) = (1-t)((1-s)f_{i,j} + sf_{i+1,j}) + t((1-s)f_{i,j+1} + sf_{i+1,j+1}) \quad (5.9)$$

$$s = x - x_i \quad t = y - y_j$$

En el caso de la interpolación bicúbica, la ecuación general puede expresarse según (Keys, 1981) como:

$$G_{bic}(x, y) = \sum_{n=-1}^2 \sum_{m=-1}^2 f_{i+m, j+n} P_{m+1}(s) P_{n+1}(t) \quad (5.10)$$

donde,

$$P_0(u) = \frac{-u^3 + 2u^2 - u}{2} \quad P_1(u) = \frac{-3u^3 - 5u^2 + 2}{2} \quad (5.11)$$

$$P_2(u) = \frac{-3u^3 + 4u^2 + u}{2} \quad P_3(u) = \frac{u^3 - u^2}{2}$$

Finalmente se concluye con la expresión matemática de la técnica del vecino más cercano, que es la más sencilla tanto conceptualmente como matemáticamente:



$$G_{\text{vmc}}(x, y) = \begin{cases} f_{i,j} & \text{si } \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_j - y)^2} \rightarrow 0 \\ f_{i+1,j} & \text{si } \sqrt{(x_{i+1} - x)^2 + (y_j - y)^2} \rightarrow 0 \\ f_{i,j+1} & \text{si } \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_{j+1} - y)^2} \rightarrow 0 \\ f_{i+1,j+1} & \text{si } \sqrt{(x_{i+1} - x)^2 + (y_{j+1} - y)^2} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

En el caso de los sensores de menor resolución espacial (cámara térmica, láser escáner terrestre), el problema de la interpolación no es trivial, porque a un mismo píxel le corresponderán varios puntos 3D. Obviamente, la nube de puntos texturizada será de baja calidad, porque la radiometría de entrada ya era de baja calidad. En este sentido con relación a la metodología de proyección de texturas, siempre es más rápido e idóneo recorrer los puntos tridimensionales y buscar su correspondencia en la imagen, ya que realizarlo de forma directa y buscar la proyección en el espacio objeto de cada píxel individual, generaría problemas de búsqueda de la vecindad en un espacio objeto tridimensional y en especial con objetos complejos.

Para la reproyección de texturas a partir de un conjunto discreto de puntos dotados de radiometría de alta calidad existen dos aproximaciones (Gross y Pfister, 2007): la técnica *sencilla* y la técnica del *texture splatting*. La reproyección sencilla o directa se basa únicamente en que cada punto 3D del conjunto de datos es proyectado según la condición de colinealidad sobre el plano imagen; caracterizado por un punto de vista predefinido y definido por sus parámetros de orientación externa (posición espacial y angular) y su orientación interna (al menos la focal y la posición del punto principal)

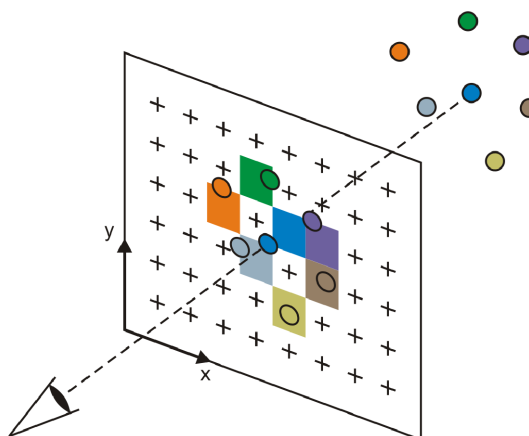


Figura 5.9 Proyección directa de la textura (adaptado de Gross y Pfister, 2007)

Esta técnica da lugar en la mayoría de los casos a huecos en la imagen proyectada final, debido a que la densidad de puntos 3D sea probablemente insuficiente para generar una textura continua. Por otra parte, si la densidad de la nube de puntos es superior a la requerida para formar la imagen proyectada final, esto dará lugar a que varios puntos compitan por dotar de color a un mismo píxel siendo necesario establecer un criterio de selección. En ambos casos, es necesario aplicar alguna de

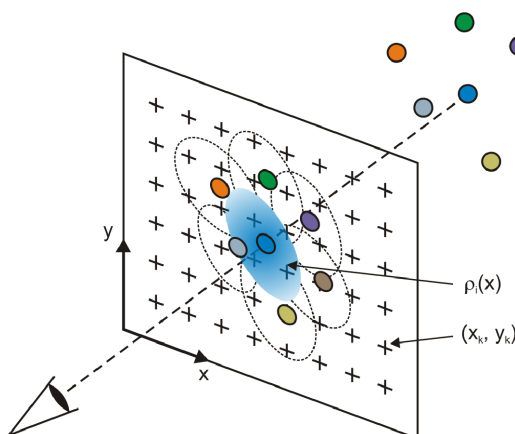
las técnicas de remuestreo (5.9) (5.10) (5.12) para realizar la interpolación, valorándose para cada caso el compromiso entre velocidad computacional y calidad del resultado final.

En el caso de sensores especiales, de menor resolución (por ejemplo, cámaras térmicas) puede llegar a darse el caso opuesto al descrito anteriormente, donde la densidad de píxeles es inferior a la densidad de puntos en el espacio objeto, esto da lugar a la situación donde varios puntos “compiten” por dotar de color a un mismo píxel. En este tipo de situaciones es necesario aplicar un criterio unificado de selección, siendo los posibles:

- *Media*: se promedian los niveles digitales de la radiometría de los diferentes puntos, lo cual tiende a atenuar el color. No es la elección idónea, porque obvia cambios radiométricos en el objeto, como son los bordes o texturas complejas.
- *Ponderación*: en función de la distancia espacial. Es similar al anterior, donde se busca mejorar la adaptación al objeto, aunque comparten la misma problemática.
- *Selección del más cercano*: el concepto es el mismo que en el caso del remuestreo basado en el vecino más cercano, con la salvedad de que se aplica con los valores de distancia (en el sistema de referencia objeto) entre cada punto tridimensional y el punto de vista. Este criterio lleva implícito un principio de intervisibilidad, porque se basa en considerar que el punto más cercano es el primero que se visualiza y por tanto el primero que debería de dotar de color al píxel. La esencia es similar al algoritmo de gestión de partes vistas y ocultas: Z-buffer (Catmull, 1974).

Una alternativa a la proyección directa de la textura es la técnica de *texture splatting* (Zwicker et al., 2001) consistente en un algoritmo simple y eficiente para el renderizado de imágenes de alta resolución sobre superficies definidas como conjuntos discretos de puntos.

La idea básica subyacente al *splatting* se ilustra en la Figura 5.10 busca resolver los problemas del mapeo directo (Figura 5.9) mediante la distribución del color de cada punto proyectado entre los píxeles vecinos. A cada punto se le asocia una función de huella superficial  $\rho_i(x)$  que pondera la contribución de color a los píxeles vecinos. Esta función superficial o *footprint* suele ser generalmente suave y decae rápidamente al aumentar la distancia desde el centro y tiene carácter local como representan las elipses indicadas en la Figura 5.10.



**Figura 5.10** Proyección textura mediante el texture splatting (adaptado de Gross y Pfister, 2007)

Esta parametrización adoptada es válida para las imágenes en escala de gris, ya que se representa un valor escalar; en el caso de las imágenes RGB simplemente se utilizarían canales independientes (tantos como componentes).

Una imagen renderizada mediante el algoritmo *splatting* a partir de una superficie compuesta por puntos discretos puede ser representada según (Gross y Pfister, 2007) como:

$$\phi(x, y) = \sum_i c_i \rho_i(x, y) \quad (5.13)$$

La función imagen  $\Phi(x, y)$  de las coordenadas imagen 2D  $(x, y)$  equivale al sumatorio que se aplica sobre todos los puntos  $(p_i)$  de la superficie,  $\rho_i$  son funciones superficiales individuales, y  $c_i$  son los niveles digitales (valores de nivel de gris) asociados a cada punto. No obstante la ecuación (5.13) no permite reproducir superficies con valores constantes ( $c_i=c$ ) ya que daría lugar a artefactos visibles. Por ello, la formulación básica del splatting se amplía mediante su normalización:

$$\phi(x, y) = \frac{\sum_i c_i \rho_i(x, y)}{\sum_i \rho_i(x, y)} \quad (5.14)$$

que permite que las superficies constantes sean reproducidas de forma exacta con independencia de la función superficial.

Su implementación requiere de un algoritmo de doble pasada, donde en primer lugar se recorren todos los puntos y se calcula sus funciones superficiales ( $\rho_i$ ) y los valores de gris ( $c_i$ ). Las funciones superficiales son evaluadas para cada píxel (o rasterizadas) y sus contribuciones se acumulan en un buffer, para cada píxel  $(x, y)$ , mediante la suma ponderada de las contribuciones  $c(x, y)$  y la suma de los pesos  $w(x, y)$ , cuyas respectivas ecuaciones son:

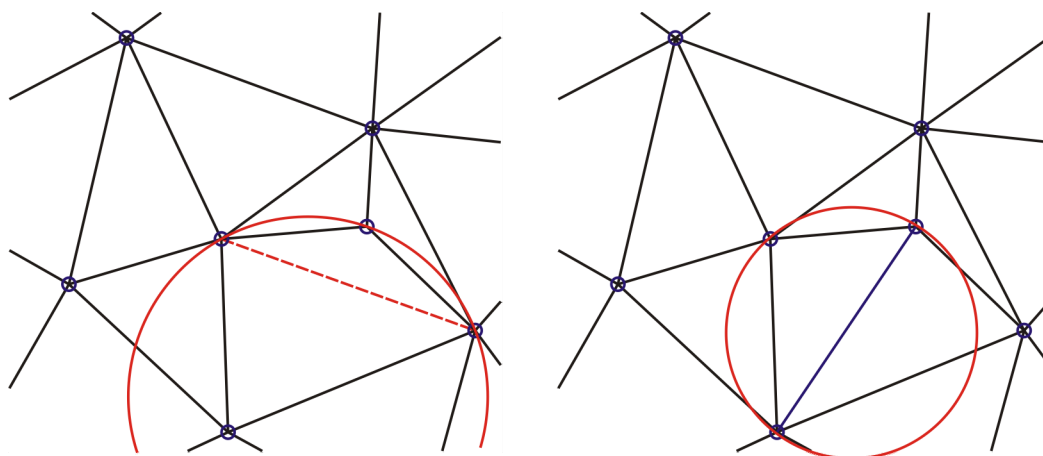
$$\begin{aligned} c(x, y) &= \sum_i c_i \rho_i(x, y) \\ w(x, y) &= \sum_i \rho_i(x, y) \end{aligned} \quad (5.15)$$

En la segunda pasada se vuelven a recorrer todos los puntos para normalizar los valores del nivel digital almacenados mediante la suma de los pesos, finalizándose así el proceso.

Como se comentó previamente, la proyección de texturas puede realizarse según dos vías: sobre la nube de puntos o sobre una malla de triángulos. En este segundo caso es necesario tratar dos aspectos diferentes: generación de la malla de triángulos irregulares (*TIN*) y el mapeo de las texturas.

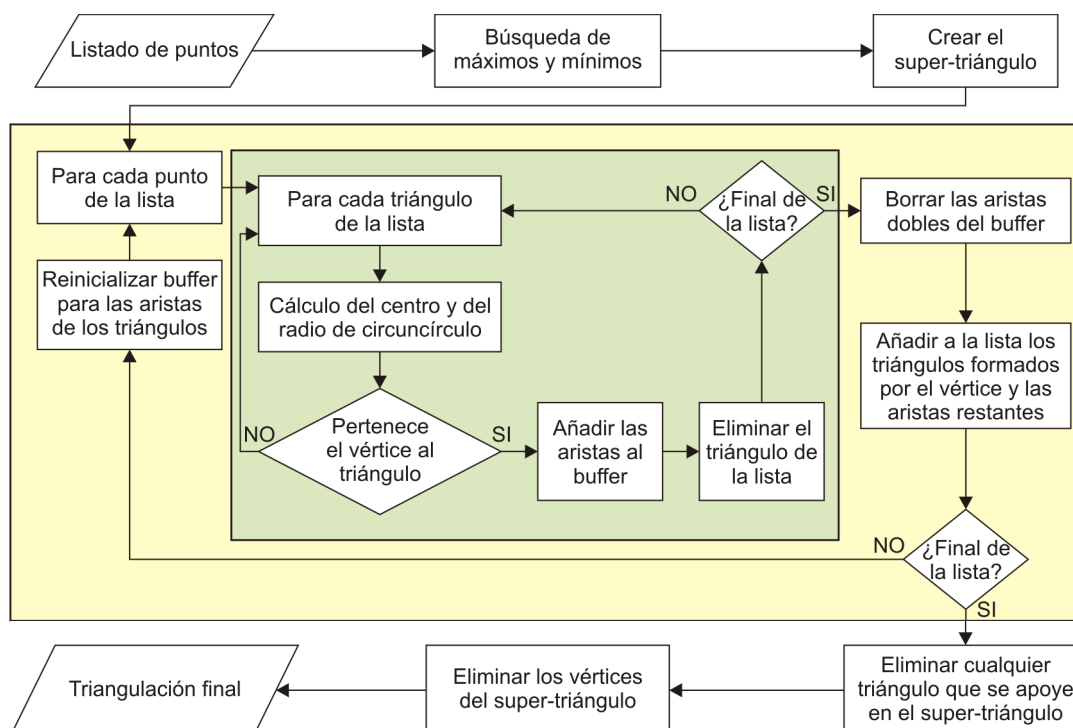
La fase de triangulación se apoya en el método de Delaunay (1934), fundamentado en el denominado método incremental o método del supertriángulo, en el que se partirá de un triángulo ficticio lo suficientemente grande como para englobar a toda la nube de puntos que se desea triangular (Mcglone et al., 2004). A continuación se comienza a triangular los puntos de la nube desde el primero hasta el último, tomando el triángulo ficticio como parte de la triangulación ya realizada. Una vez realizada toda la triangulación tan sólo resta descartar todas las aristas que contengan en algún extremo a alguno de los puntos del triángulo ficticio inicial.

El criterio de Delaunay para la legalización de aristas consiste en que el circuncírculo definido por los tres puntos de un triángulo no contenga ningún otro punto, a excepción de dichos tres que pertenecerán a su perímetro (Figura 5.11 izquierda), o expresado de otra manera, el área interior del circuncírculo debe estar vacía (los puntos usados para su generación verificarán la ecuación para el borde, pero nunca para el área interior). Si se incumple dicho criterio se procede a la eliminación de dicha arista, y se comprueba si la otra arista posible verifica dicha condición antes de aceptarla (Figura 5.11 derecha).



**Figura 5.11 Rechazo de una arista ilegal (izquierda) y arista aceptada (derecha)**

Como se mencionó anteriormente el algoritmo de Delaunay se apoya en el método incremental, el cual para un conjunto dado de puntos, se basa en ir añadiendo puntos a una triangulación y legalizar las aristas hasta recorrer todos los puntos. En la Figura 5.12 se describe más detalladamente los pasos necesarios para aplicar la técnica incremental sobre una triangulación de Delaunay.



**Figura 5.12** Esquema de funcionamiento de la triangulación incremental de Delaunay

Para el mapeo de la textura fotográfica con carácter métrico sobre los vértices del modelo digital de elevaciones (*MDE*) se emplea el método de los puntos de anclaje o Anchor Points (Kraus, 1993). Este método consta de tres partes:

**Fase 1: Cálculo de coordenadas.** En primer lugar las fotocoordenadas de todos los vértices del *MDE* son calculadas a través de los parámetros de orientación externa e interna de la cámara y la ecuación de la condición de colinealidad.

**Fase 2: Correspondencia.** Seguidamente, se establece la correspondencia entre cada una de las caras del *MDE* y cada una de las caras de la imagen.

**Fase 3: Mapeo de textura.** Finalmente, se calcula y se lleva a cabo una proyección de la textura fotográfica entre cada cara de la imagen y su homóloga en el *MDE*. Esta transformación se obtiene poniendo en relación las coordenadas imagen de los vértices de cada cara con las correspondientes coordenadas en el *MDE*, de forma que cada cara recibe un modelo de transformación específico. En el caso de triángulos el modelo geométrico que permite establecer esta operación es la transformación afín (seis parámetros independientes), que relaciona las coordenadas imagen ( $x, y$ ) y las coordenadas en el sistema terreno ( $X, Y$ ) de los puntos de anclaje.

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2X + a_3Y \\ y &= a_4 + a_5X + a_6Y \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde  $a_i$  son los parámetros de la transformación afín, que ya fueron tratados en la sección 2.3.

Dados los tres puntos de anclaje del triángulo, la representación gráfica de la transformación resulta según se aprecia en la figura siguiente, donde los puntos de anclaje están denotados por  $P_i$ , para  $i=1,2,3$ .

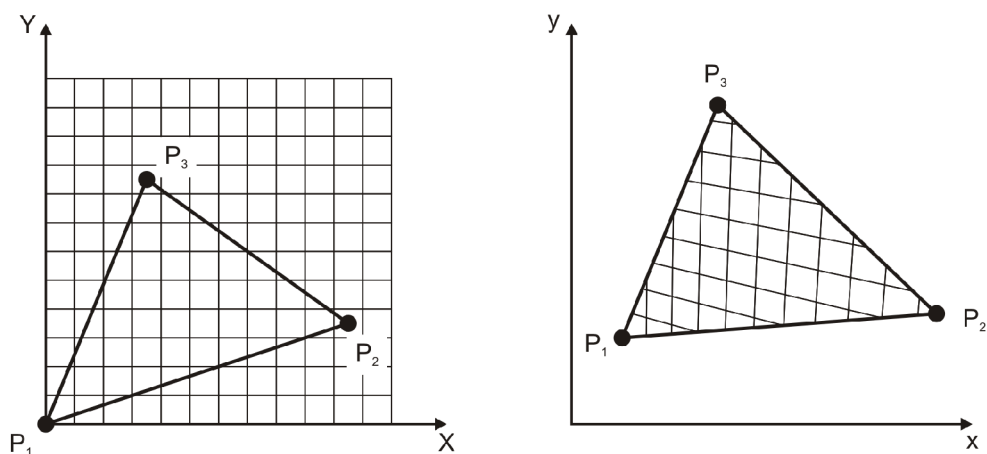


Figura 5.13 Transformación afín sobre una malla triangular con tres puntos de anclaje (adaptado de Kraus, 1993)

El cálculo de los coeficientes  $a_i$  se puede realizar mediante la inversión del sistema matricial derivado de la ecuación (5.16), resultando:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{X_2 Y_3 - X_3 Y_2} \begin{bmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & 0 & 0 \\ Y_2 - Y_3 & Y_3 & -Y_2 \\ X_3 - X_2 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{X_2 Y_3 - X_3 Y_2} \begin{bmatrix} X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & 0 & 0 \\ Y_2 - Y_3 & Y_3 & -Y_2 \\ X_3 - X_2 & -X_3 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

En el caso de caras cuadradas suele emplearse un modelo bilineal (ocho parámetros independientes).

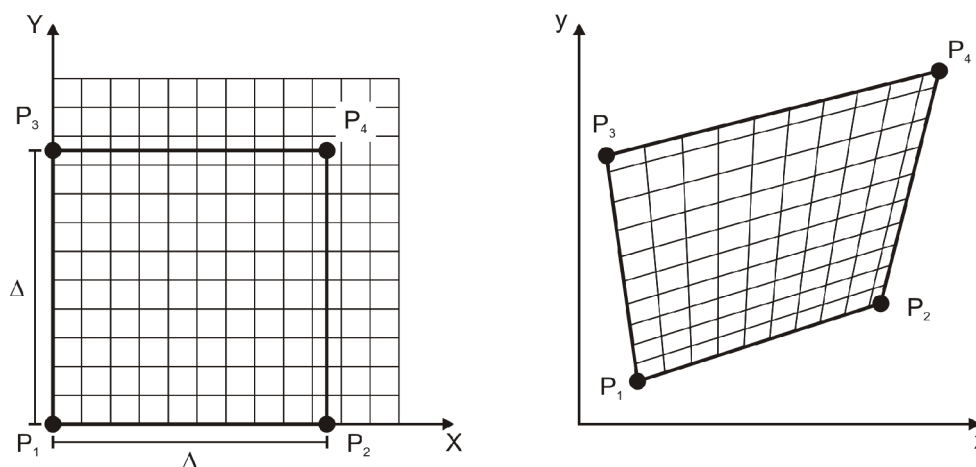
$$\begin{aligned} x &= a_{01} + a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}XY \\ y &= a_{02} + a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}XY \end{aligned} \quad (5.18)$$

Al igual que con el caso de la transformación afín, los coeficientes se pueden calcular mediante la inversión de sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 1/\Delta & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 0 & 1/\Delta & 0 \\ 1/\Delta^2 & -1/\Delta^2 & -1/\Delta^2 & 1/\Delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 1/\Delta & 0 & 0 \\ -1/\Delta & 0 & 1/\Delta & 0 \\ 1/\Delta^2 & -1/\Delta^2 & -1/\Delta^2 & 1/\Delta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

donde  $\Delta$  es el tamaño del lado de los cuadrados que conforman la tesela, o paso de malla. La representación gráfica de la transformación recogida en la ecuación (5.18) puede verse en la Figura 5.14:



**Figura 5.14** Transformación bilineal de una malla cuadrada con cuatro puntos de anclaje (adaptado de Kraus, 1993)

Los procesos de mapeo o proyección de texturas, ya sean basados en nubes de puntos o mallas de triángulos, como se expuso anteriormente, requieren de una eficaz gestión de las partes vistas y ocultas al proyectar mediante la condición de colinealidad un punto tridimensional sobre un plano imagen de una cámara cuya posición espacial y angular (orientación externa) y características intrínsecas (orientación interna) son conocidas. No obstante, la aplicación ciega de dicha reproyección puede llevar a que, en elementos complejos, se proyecten puntos tridimensionales sobre un plano imagen determinado para los cuales no hay línea de intervisibilidad directa.

La técnica Z-buffer se aplica para resolver los problemas de visibilidad, tanto para las técnicas de proyección directa de texturas, como para el algoritmo de *texture splatting* al resolver los problemas de visibilidad. El algoritmo de Z-buffer fue propuesto por Catmull (1974), aunque en dicha década su fundamentación, basado en la creación de un array de datos tan grande como las dimensiones de la imagen, llevaron a desechar el algoritmo como irrealizable (Sutherland et al., 1974). Actualmente, los avances en la velocidad de procesamiento de los equipos informáticos han permitido volver a considerarlo. El algoritmo Z-buffer determina, para un conjunto de datos (ya sean mallas de triángulos o puntos discretos), que puntos están más cerca del centro de proyección de la cámara, de forma que en cada píxel del plano imagen solamente se muestren dichos puntos, obviando los que carecen de línea de intervisibilidad directa.

La implementación del algoritmo se basa en recorrer todos los puntos del espacio objeto, y al determinar su coordenadas imagen mediante la intersección del rayo perspectivo (condición de colinealidad) sobre el plano imagen, almacenar para dicho píxel la profundidad o alejamiento del punto 3D usado para la proyección. Cuando durante el proceso otro punto 3D trate de dotar de coordenadas, se compara el valor del alejamiento del punto actual con el valor almacenado en el buffer para el píxel en cuestión. Si el valor a cuestionar es superior al almacenado

se considera que dicho punto 3D pertenece a una superficie más alejada y por ende está oculto para la posición actual de la cámara, no siendo representado en la imagen final. Si por el contrario, la distancia fuese inferior, el nuevo píxel se sobrescribe sobre el anterior y se almacena el nuevo valor de alejamiento para continuar con el proceso hasta que se recorran todos los puntos (Figura 5.15).

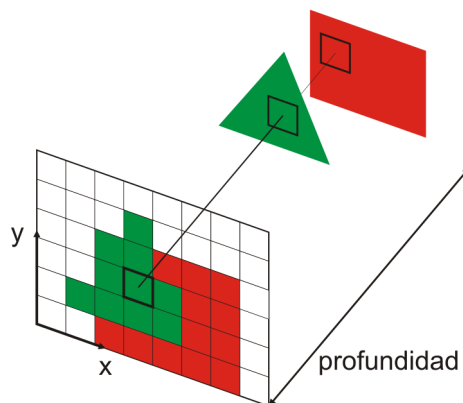


Figura 5.15 Algoritmo de Z-buffer

La desventaja básica del Z-buffer es su coste computacional, tanto en el aspecto de tiempo como de consumo de memoria, ya que requiere recorrer todos los elementos que componen el objeto tridimensional; siendo superior cuando el objeto está modelizado mediante mallas triangulares.

La aplicación de algoritmos de clasificación no supervisada es de especial interés porque permite dotar a la información métrica (obtenida de la modelización híbrida de la geometría) de información de carácter cualitativo, permitiendo ampliar el abanico de posibles análisis sobre el mismo conjunto de datos iniciales: nube de puntos láser terrestres e imágenes digitales.

Los procesos de clasificación no supervisadas son procedimientos altamente automatizados, los cuales se enmarcan de forma idónea como método de explotación de la información cualitativa de la modelización híbrida encuadrado dentro de la automatización del procesamiento de datos láser escáner. Este método divide de forma automática un conjunto de valores cúmulos o *clusters* según procedimientos estadísticos, sin necesidad de un conocimiento previo sobre las características de dicho conjunto de valores.

Según (Han y Kamber, 2001) los métodos de clustering pueden ser clasificados en las siguientes categorías:

- *Métodos basados en particiones*: donde dado un conjunto de datos, son clasificados en  $k$  conjuntos, tal que se verifique que cada conjunto contiene al menos un objeto y que cada objeto solamente pertenece a un cluster. Este tipo de método también es conocido como clustering exclusivo. Estos algoritmos fueron los primeros en ser desarrollados, siendo en más conocido el *k-medias* (Steinhaus, 1956).
- *Métodos jerárquicos*: los cuales crean una descomposición jerárquica de una colección dada de datos, que puede ser aglomerativa (formando

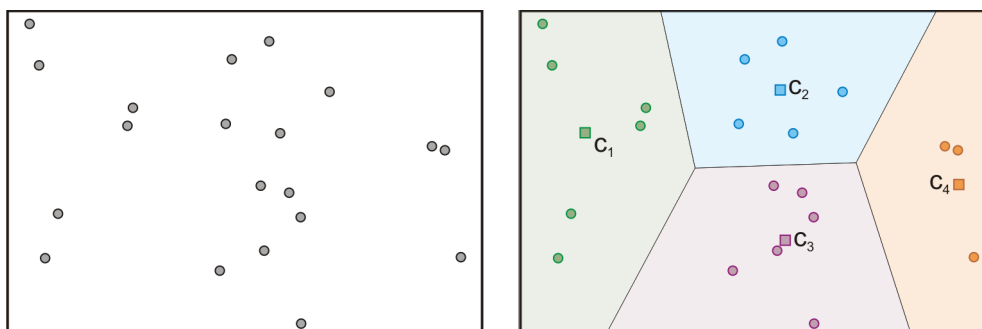


grupos separados para cada objeto) o divisiva (inicialmente todos los objetos pertenecen al mismo conjunto). Esta metodología fue originariamente propuesta por Johnson (1967).

- *Métodos basados en la densidad*: a diferencia de otros métodos que agrupan en función de la distancia entre los elementos, los basados en la densidad establecen que en el espacio de datos, las regiones de alta densidad (clases) están separadas por regiones de baja densidad de datos (ruido). El algoritmo *dbscan* (Esther et al., 1996) pertenece a este grupo.
- *Métodos basados en rejillas*: basados en discretizar en el espacio un número finito de celdas, sobre las cuales se realizan las operaciones. Estos métodos tienen como ventaja la rapidez de procesamiento, la cual solamente depende del número de celdas en cada dimensión para el conjunto de datos inicial. Un ejemplo de esta metodología es el algoritmo *sting* (Wang et al., 1997).
- *Métodos basados en modelos*: los cuales consisten en utilizar ciertos modelos matemáticos para las clases y así optimizar el resultado final. Las clases son modeladas mediante distribuciones paramétricas como las de Gauss (continuas) o las de Poisson (discreta) para reflejar su distribución espacial. Un ejemplo de este tipo de métodos es el algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) propuesto por Dempster et al., (1977).

De todas las metodologías propuestas anteriormente, el algoritmo de clasificación seleccionado como implementación de la clasificación no supervisada es el algoritmo de *k-medias* el cual fue propuesto originalmente por Steinhaus (1956), aunque fue Macqueen (1967) quien acuñó el término *k-means* y presentó un método muy similar donde también representan los clusters por su centroide o centro de gravedad y se analiza cada elemento de forma individual para su asignación a la clase más próxima.

La idea subyacente al algoritmo *k-medias* es proveer de una clasificación de un conjunto de datos empleando su propia información, mediante los análisis y comparaciones entre sus valores numéricos (Figura 5.16). Además, el algoritmo proporciona una ordenación automática sin clasificación pre-existente; esta característica hace que sea enmarcado como un algoritmo de análisis de datos (*data mining*). En el algoritmo *k-medias*, el usuario final puede especificar una serie de parámetros, siendo el más relevante el número de clusters, amén de otros tales como el número máximo de iteraciones o el umbral del criterio de parada del proceso iterativo. El proceso consiste primeramente en definir *k* centroides, uno por cada clase (pudiendo elegirse de forma aleatoria); seguidamente cada punto o píxel perteneciente al conjunto inicial es asignado al centroide más cercano. Tras ser todos los puntos analizados se recalculan los centroides de los clusters, resultando un nuevo juego de *k* centroides con el cual se repite el procedimiento anterior. Este proceso continua hasta que el cambio en la localización de los centroides sea nula o inferior al umbral predefinido por el usuario final.



**Figura 5.16** Conjunto de datos inicial (izquierda) y resultado de la clasificación k-medias con 4 clases (derecha)

Sea un conjunto de  $n$  puntos  $x_i$   $d$ -dimensionales, los cuales se buscan agrupar en  $k$  clases. El k-medias busca minimizar el cuadrado de los errores entre el centroide del clúster ( $c_k$ ) y los puntos pertenecientes a dicho clúster. La función objetivo a minimizar es:

$$I = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \|x_i^j - c_j\|^2 \quad (5.20)$$

donde  $\|x_i^j - c_j\|^2$  es la medida de la distancia entre un punto  $x_i^j$  y el centro de la clase  $c_j$ , que además es el indicador de las distancias entre los  $n$  puntos y sus respectivos centros de las clases.

La minimización de la función objetivo (5.20) es un problema computacionalmente complejo, ya que el algoritmo es ávido en dichos términos y solamente converge en un mínimo local.

En este capítulo se ha desarrollado una discusión sobre los elementos de modelización a partir de los datos procedentes del láser escáner terrestre, los cuales se apoyan en la imagen sólida verdadera, dadas sus características intrínsecas y la relación entre las diferentes capas de información para caracterizar al objeto. No obstante, es interesante realizar una puntualización sobre la metodología de modelado del objeto según las dos técnicas contrapuestas expuestas en el capítulo: triangulación y vectorización.

Los métodos de triangulación (por ejemplo, Delaunay) son exhaustivos en tanto recorren todos los elementos de una nube de puntos para generar una aproximación a la superficie real. Cuanto mayor es la densidad de los puntos, mejor es la adaptación de la malla a la morfología del objeto, pero en contrapartida, dicha caracterización es pesada (en términos de manejo informático) y puede contener información no útil para determinadas aplicaciones (niveles de detalles superiores a los necesarios para el trabajo).

Por el contrario, si se realiza una vectorización automática (visto en la sección 5.2), la modelización final sólo contendrá las aristas que se correspondan con los elementos más relevantes del objeto: bordes definitorios (intersecciones de elementos geométricos) que actúan como líneas de rotura en la morfología del objeto; y bordes radiométricos que tienen su correspondencia en su geometría. Por ello, el resultado es una malla optimizada para el objeto, siempre en base a los

criterios de densidad y sensibilidad de los algoritmos de vectorización. Las aristas incorporadas, son básicamente las líneas relevantes del objeto, por lo que la modelización final es óptima, ligera y más manejable.

Pero no sólo la vectorización implica una mejora con respecto a los aspectos geométricos, sino que al reducirse el número de superficies que idealizan el objeto, los procesos de proyección de texturas se agilizan, al aplicarse sobre planos de mayores dimensiones. En definitiva, el potencial de la vectorización automática implica mejoras en los aspectos geométricos y radiométricos de la modelización de datos procedentes del láser escáner terrestre, que se traducen en mayores grados de automatización en su procesamiento y obtención de productos finales.



## Capítulo 6

### Resultados experimentales

En tanto el proceso de registro de sensores requiere que los instrumentos participantes estén en su funcionamiento óptimo, es necesario calibrarlos, a través de procesos no exentos de dificultades y que requieren de un estudio pormenorizado, siendo por ello objeto de dos de las secciones del capítulo de resultados experimentales:

- **(I) Calibración geométrica del equipo láser escáner terrestre:** proceso no estandarizado y por tanto sujeto a investigación. Cuando el objetivo es automatizar el procesamiento de datos procedentes de una nueva tecnología como es el láser escáner terrestre, es aún más crítico determinar si dicho instrumento está calibrado y por tanto preparado para la realización de la tarea en cuestión.
- **(II) Determinación de la distorsión radial de las cámaras digitales:** La distorsión radial es un parámetro bastante conocido y estudiado dentro de la rama de la fotogrametría, pero sin embargo continua siendo objeto de investigación, principalmente para adecuarlo a los objetivos actuales que buscan que este procedimiento sea de bajo coste y realizable por cualquier usuario, independientemente de su formación específica. Por ello, aprovechando el proceso inevitable de determinación de la distorsión radial, se analizarán diferentes herramientas fotogramétricas comerciales y open-source para establecer una comparativa entre ellas y su idoneidad.

Una vez los sensores están dispuestos y preparados para la captura de información, es momento de testear en campo el proceso propuesto de registro de sensores, sobre diferentes casuísticas, a saber:

- **(III) Caso visible desfavorable:** El método de registro requiere para su funcionamiento óptimo que las texturas radiométricas del elemento objeto de estudio sean ricas en detalles característicos y que la base línea existente entre los sensores sea la menor posible. Mediante este caso de estudio se pretende exprimir al algoritmo de fusión para ver sus posibilidades en casos extremos. Concretamente, se utilizarán los datos un elemento arqueológico representativo de la cueva de Llonín en Asturias, el cual presenta una reducida textura radiométrica, escasas dimensiones y base línea desconocida.
- **(IV) Caso visible favorable:** Consistente en un elemento arquitectónico patrimonial, el cual tiene una morfología y textura adecuadas para el

algoritmo desarrollado. El objetivo es ver el rendimiento del método propuesto en condiciones favorables a priori. Para esta labor el elemento objeto de estudio será la Ermita de San Segundo en Ávila.

- **(V) Caso térmico:** Con este caso experimental se busca comprobar la extensión del modelo de registro, desarrollado inicialmente para longitud de onda del espectro óptico, a zonas del infrarrojo térmico donde el comportamiento radiométrico de los objetos es muy diferente. De esta forma se puede comprobar su funcionalidad y permitir establecer puntos de referencia para desarrollos futuros. El caso de estudio será un edificio del campus de la Universidad de Vigo.

## 6.1. Calibración geométrica de láser escáneres terrestres

Al igual que en cualquier disciplina en la cual intermedia un instrumento de medida, es requisito indispensable determinar si este cumple con su cometido correctamente. Este proceso, en el cual se determinan los errores instrumentales del equipo, no suele presentar dificultades en tanto para cada instrumento existen una serie de procedimientos reglados para realizar dicha tarea.

En el campo de la topografía el proceso de calibración instrumental alcanza una importancia capital, ya que se le puede considerar como uno de los fundamentos básicos de este campo. Por ello todos los instrumentos topográficos deben ser sometidos a múltiples test para garantizar su precisión, y por extensión la del trabajo en el cual intervienen.

No obstante, con la llegada del láser escáner terrestre aparece una problemática única dentro del espectro de instrumental topográfico, la carencia de un proceso de calibración.

Hasta este momento, las nuevas tecnologías que aparecían en la topografía (distanciómetros o GNSS) llevaban asociado una teoría de funcionamiento que permitía establecer un proceso de calibración completo (véase la distanciometría) (ISO 17123-4, 2001) o permitir evaluar la precisión de las medidas (por ejemplo, el GNSS están los componentes DOP<sup>24</sup>). Pero el láser escáner terrestre es una tecnología que se distribuye como una “caja negra”, donde no es posible identificar sus componentes internos y sus relaciones; existe una importante diversidad de modelos constructivos donde cada fabricante ha resuelto el mismo problema de forma diferente; y no hay forma de validar los datos sin recurrir a un segundo instrumento.

En este sentido, es muy importante avanzar en el proceso de calibración de los láseres escáner terrestres, para poder llegar a determinar los parámetros instrumentales (los cuales podrán ser generales o específicos para cada modelo) y establecer un procedimiento de calibración.

---

<sup>24</sup> Acrónimo del inglés: *Dilution of precision*. Es un parámetro que estudia la influencia de la geometría de los satélites sobre la precisión final de las medidas.

Con este fin, el modelo funcional y estocástico propuesto en la sección 3.2 es materializado en campo y aplicado a dos equipos diferentes: Trimble GX (S/N: 50106C076) y Riegl LMS-Z390i (S/N: 9995834). Seguidamente se expondrá todo el proceso de calibración, a saber:

- Diseño del campo de calibración
- Trabajo de campo
- Determinación de la precisión instrumental.
- Aplicación de la auto-calibración.
- Análisis de sistematismos previos.
- Análisis de los resultados.

### 6.1.1. Diseño y señalización del campo de calibración

El campo de calibración ha sido diseñado en laboratorio y consiste en una red de tarjetas de puntería homogéneamente distribuidas usando diferentes alturas y profundidades. No obstante, para asegurar la mayor durabilidad de dichas señales ninguna de ellas fue dispuesta en el suelo.

Puesto que el instrumental láser de cada fabricante usa un tipo particular de elemento de puntería, el cual es detectado automáticamente por su software correspondiente asegurando así la mayor precisión en la extracción del centro, se han empleado dos conjuntos diferentes de tarjetas de puntería.

En el caso del láser Trimble se emplearon 20 tarjetas autoadhesivas de 15x15cm. Y para el Riegl 20 tarjetas circulares retroreflectivas con un diámetro de 5cm. (Ver Figura 6.1)

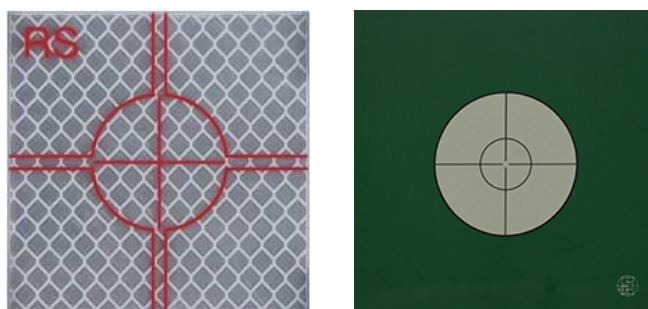


Figura 6.1 Tarjetas de puntería Riegl (izquierda) y Trimble (derecha).

Ambos escáneres son estacionados y nivelados sobre una superficie estable en el centro del laboratorio para garantizar la repetibilidad y evitar errores por inestabilidad del trípode.

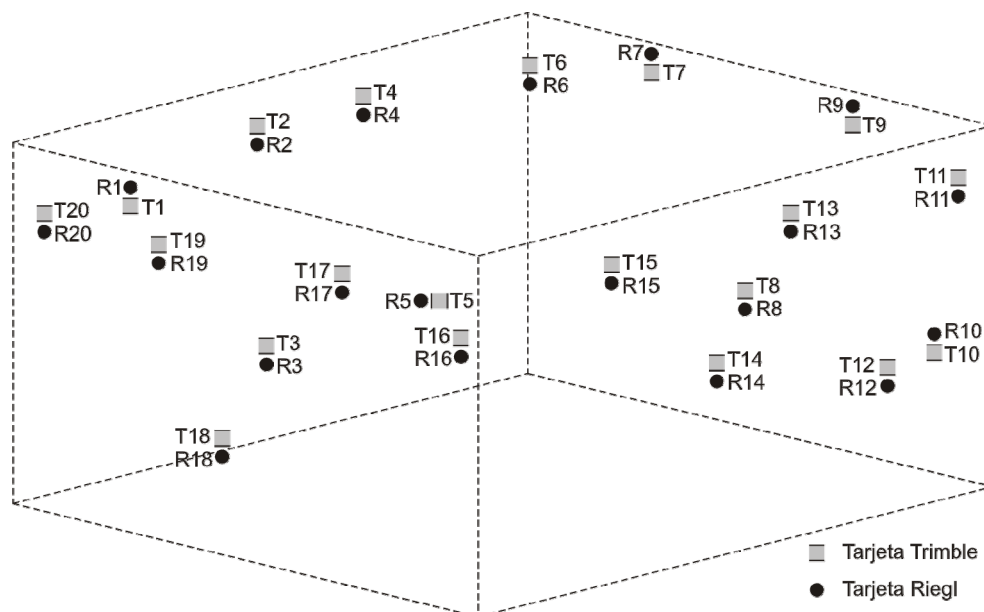


Figura 6.2 Esquema del campo de calibración

### 6.1.2. Trabajo de campo

Una vez diseñado y señalado el campo de calibración, se procede a la captura de datos considerando dos tipos de mediciones:

- Escaneo de las tarjetas de puntería usando la máxima resolución de los láser escáner terrestres empleados (2-3mm) y extracción automática del centro usando el software proporcionado por el fabricante
- Levantamiento topográfico singular de las tarjetas que conforman la red de puntos de control mediante un sistema topográfico de alta precisión (Leica TCA 2003). Se trata de que la propia topografía pueda establecer en base a la medición precisa y fiable de puntos singulares un sistema de referencia (datum) que actúe como verdad terreno al cual se podrá referir y comparar el resto de mediciones láser. Las mediciones se llevan a cabo según el método de reiteración y aplicando a todas las observaciones la Regla de Bessel (Ghilani y Wolf, 2006)

Las tablas siguientes ilustran las especificaciones técnicas de los equipos empleados en el proceso de calibración, tanto láser escáner terrestres como equipamiento topográfico.


	Longitud de onda	534 nm (Verde)
	Sistema de deflección	Espejo plano oscilante
	Campo de visión (FOV)	360°H x 60°V
	Desviación estándar	1,4mm para $D \leq 50m$
	Rango de medidas	2-350m
	Precisión angular	Acimutal: 12'' Cenital: 14''
	Divergencia láser	3mm a 50m
	Velocidad de escaneo	5000 puntos/segundo

Tabla 6.1 Especificaciones técnicas del láser Trimble GX




	Longitud de onda	1500 nm (NIR)
	Sistema de deflexión	Espejo poligonal rotatorio
	Campo de visión (FOV)	360°H x 80°V
	Desviación estándar	6mm para D≤50m
	Rango de medidas	1,5-400m
	Precisión angular	Acimutal: 3,6'' Cenital: 3,6''
	Divergencia láser	0,3 mrad
	Velocidad de escaneo	11000 puntos/segundo

Tabla 6.2 Especificaciones técnicas del láser Riegl LMS-Z390i

Estos láser escáneres de tiempo de vuelo han sido escogidos en base a sus diferentes características tanto en longitud de onda de medida, precisión, mecanismo de deflexión además de otra serie de características menores: velocidad de escaneo, rango...


	Magnificación	30X
	Desv. Estándar angular	0,5''
	Sensibilidad nivel electrónico	20'' / 2 mm
	Compensador de doble eje	Si (Rango: 4' Precisión:0,3'')
	Precisión en distancias	1mm + 1ppm
	Alcance	2500 m

Tabla 6.3 Especificaciones técnicas. Leica TCA2003

El equipamiento topográfico de alta precisión escogido para establecer el control de precisión de los láseres escáneres terrestres y comparar ambos instrumentos mediante un marco de referencia externo. Previamente al proceso de calibración la estación total fue sometida a un chequeo métrico para su verificación.

Los **observables** que constituyen nuestros datos de entrada son:

- Observables láser de las tarjetas: Coordenadas polares (distancia geométrica;  $\rho$ , ángulo horizontal;  $\varphi$  y ángulo cenital;  $\theta$ ) y cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) en milímetros correspondientes al centro geométrico de cada una de las tarjetas que conforman la red de calibración. Asimismo, se dispone de la nube de puntos en coordenadas cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) correspondiente a la superficie planar de cada tarjeta, la cual podría ser utilizada como elemento de comparación al tratar de ajustar por un procedimiento alternativo (modelización y ajuste de primitivas) las coordenadas de su centro. Esto sería de utilidad para tratar de emplear ambos conjuntos de dianas indiferentemente por parte de los dos sistemas láser, así como de realizar comparativas entre los centros proporcionados automáticamente por los sistemas láser y los ajustados por las primitivas. No obstante, dicho procedimiento diverge de los objetivos buscados en este capítulo.
- Observables láser del objeto: Nube de puntos en coordenadas cartesianas ( $X, Y, Z$ ) correspondiente al objeto y en un sistema local de referencia definido por el propio estacionamiento del sistema láser.
- Observables topográficos de las tarjetas: Coordenadas polares ( $\rho, \varphi, \theta$ ) sus correspondientes cartesianas ( $X, Y, Z$ ) en milímetros correspondientes al centro geométrico de cada una de las tarjetas que conforman la red de

calibración. Estos observables constituyen el sistema de referencia o datum del objeto y serán considerados como verdad terreno.

Tanto los equipos láser como los topográficos tienen en común la utilización de un mismo sistema de medición basado en coordenadas polares, es decir la medición de ángulos y distancias. Considerando que gran parte de los sistemas láser arrojan como dato de salida la popular nube de puntos cartesiana (X,Y,Z), la relación entre ambos tipos de coordenadas (polares y cartesianas) quedará establecida según:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \varphi &= \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \\ \theta &= \arctg\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

siendo  $\rho$  la distancia medida por el láser,  $\varphi$  la dirección horizontal y  $\theta$  el ángulo vertical.

Seguidamente se listan los observables láser:

Tarjeta	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Distancia(mm)	V (°)	Hz (°)
R1	2211	-4148	1581	4959	71,403	298,058
R2	-20	-3628	1527	3937	67,170	269,678
R3	14	-3618	-200	3624	93,160	270,217
R4	-2151	-4223	1594	5000	71,405	243,013
R5	-5764	-3808	1489	7067	77,837	213,448
R8	-5939	886	0	6004	90,000	171,516
R9	-5979	3193	1834	7022	74,864	151,899
R10	-5991	4379	-27	7421	90,207	143,837
R11	-5153	5552	1401	7703	79,521	132,869
R12	-3760	5230	-176	6444	91,563	125,717
R13	-800	5608	1459	5850	75,562	98,119
R14	-53	5140	0098	5142	88,910	90,588
R15	1932	5651	1552	6171	75,433	71,124
R16	4009	5302	1296	6773	78,965	52,903
R17	4277	2495	1466	5163	73,508	30,256
R18	4302	974	0	4411	90,006	12,758
Sistema láser Riegl LMS-Z390i: (0,0,0) Orientación arbitraria						

**Tabla 6.4 Observables láser Riegl LMS-Z390i**

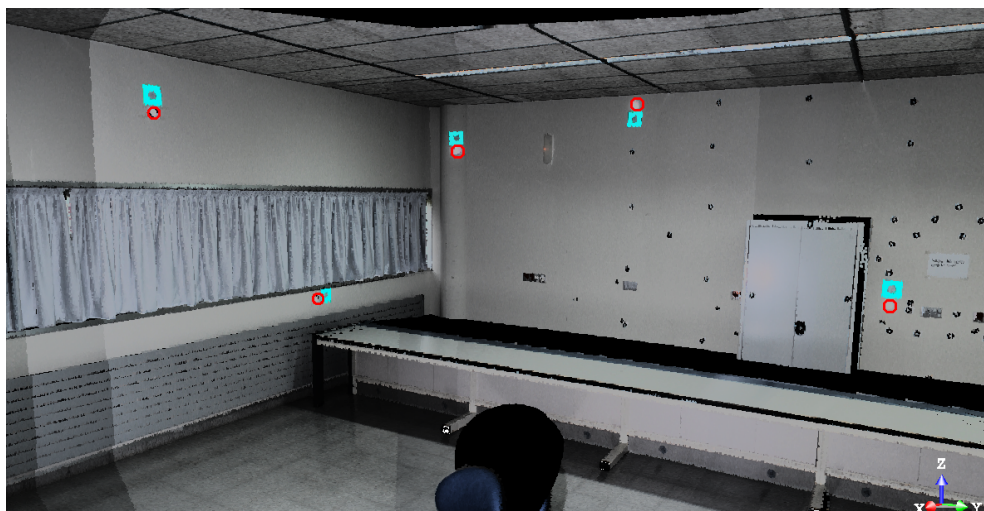


Figura 6.3 Distribución de las dianas escaneadas (círculos rojos) con el láser Riel LMS-Z390i.

Tarjeta	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	Distancia(mm)	V (°)	Hz (°)
T1	3930,97	-2602,10	1614,36	4982,9	123,50251	18,90367
T2	1722,94	-3208,73	1890,57	4103,5	151,76625	27,43365
T3	1740,19	-3185,54	132,84	3632,3	151,35320	2,09588
T4	137,68	-4750,46	1923,47	5126,9	178,33989	22,03475
T5	-1469,29	-5648,86	82,40	5837,4	194,57979	0,80881
T6	-3242,86	-6112,88	1852,06	7163,3	207,94578	14,98384
T7	-4430,94	-4231,41	2004,45	6446,4	226,31953	18,11599
T8	-5655,78	-2056,10	385,56	6030,3	250,02179	3,66585
T9	-6772,60	-68,57	1989,41	7059,1	269,41992	16,36904
T10	-7361,59	977,21	94,71	7426,8	277,56149	0,73069
T11	-7168,03	2412,73	1818,55	7778,8	288,60303	13,51996
T12	-5814,19	2790,92	220,06	6453,1	295,64188	1,95425
T13	-3377,82	4539,02	1856,97	5954,9	323,34434	18,17012
T14	-2511,61	4488,97	473,76	5165,6	330,77268	5,26224
T15	-999,54	5876,29	1957,87	6274,0	350,34655	18,18346
T16	998,62	6549,41	1665,36	6831,2	8,66939	14,11016
T17	2569,45	4231,47	1831,34	5278,4	31,26713	20,30098
T18	3316,85	2910,21	344,52	4426,0	48,73623	4,46442
T19	4211,98	1326,23	1840,56	4784,1	72,52230	22,62678
T20	5369,05	-1202,36	1685,68	5754,5	102,62272	17,03370
Sistema láser Trimble GX: (0,0,0)						
Orientación arbitraria						

Tabla 6.5 Observables láser Trimble GX

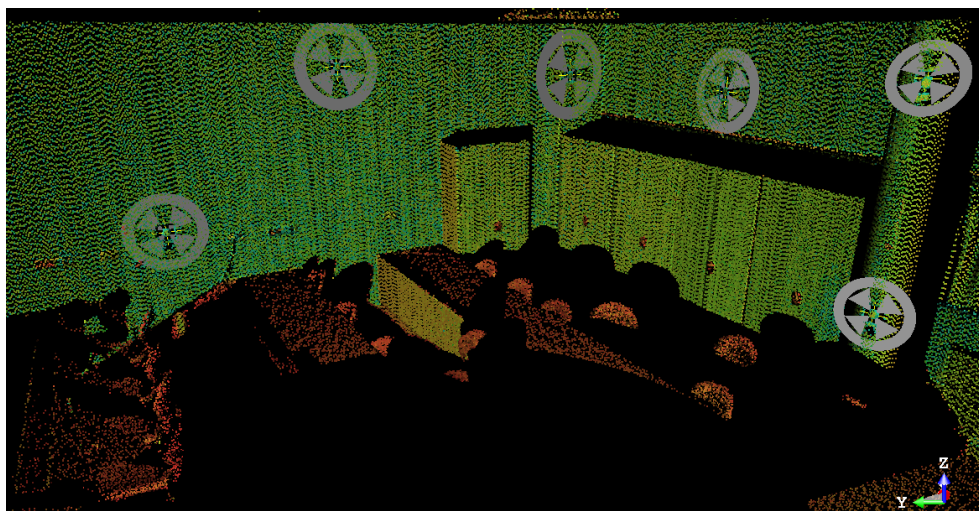


Figura 6.4 Distribución de las dianas escaneadas con el láser Trimble GX

Por su parte los resultados de la medición topográfica de alta precisión son los siguientes:

Dianas tipo Trimble			
Tarj	Dist (mm)	Hz (°)	V(°)
T1	5067,74	0,00000	21,41091
T2	4207,77	28,36462	29,95469
T3	3650,50	27,89153	5,78571
T4	5222,72	54,86289	24,41774
T5	5849,57	71,09975	3,11631
T6	7229,87	84,45412	16,76968
T7	6524,97	102,82084	20,06848
T8	6052,74	126,53112	5,87928
T9	7123,73	145,95823	17,93782
T10	7437,30	154,06951	2,53539
T11	7841,27	165,09150	15,17806
T12	6469,71	172,13607	4,03281
T13	6036,29	199,84305	20,27769
T14	5194,64	207,27212	7,84460
T15	6354,32	226,84060	20,13145
T16	6898,63	245,13917	15,99552
T17	5368,73	267,73296	22,64417
T18	4454,44	285,20050	7,48157
T19	4885,33	308,98764	25,16020
T20	5833,55	339,08722	19,23683
Estación Topográfica Coordenadas: (0,0,0) Orientación arbitraria			

Dianas tipo Riegl			
Tarj	Dist (mm)	Hz (°)	V(°)
R1	5119,80	359,9878	22,9943
R2	4140,25	28,3986	28,2239
R3	3639,53	27,8702	3,6075
R4	5167,29	54,8421	23,0961
R7	6570,08	102,7976	21,1822
R8	6036,05	126,3900	4,5040
R9	7165,37	145,9512	18,9255
R10	7443,71	154,0144	3,5970
R11	7804,43	165,00910	14,0903
R12	6449,62	172,17555	2,7906
R13	5989,21	199,7913	18,9505
R14	5179,39	207,2769	6,3739
R15	6301,97	226,82003	18,7721
R16	6857,76	245,1126	14,8192
R17	5305,03	267,7760	21,1487
R18	4437,92	285,1880	5,6640
Estación Topográfica Coordenadas: (0,0,0) Orientación arbitraria			

Tabla 6.6 Observables polares topografía alta precisión Leica TCA2003.

Láser Trimble GX200			
Tarj	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
T1	0	4718	1850
T2	1732	3208	2101
T3	1699	3210	368
T4	3889	2737	2159
T5	5526	1892	318
T6	6890	669	2086
T7	5976	-1360	2239

Láser Riegl LMS-Z390i			
Tarj	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
R1	-1	4713	2000
R2	1735	3209	1958
R3	1698	3211	229
R4	3886	2737	2027
R7	5974	-1357	2374
R8	4844	-3570	474
R9	3795	-5616	2324

T8	4838	-3584	620
T9	3794	-5616	2194
T10	3249	-6682	329
T11	1947	-7313	2053
T12	883	-6393	455
T13	-1922	-5326	2092
T14	-2358	-4574	709
T15	-4352	-4081	2187
T16	-6017	-2788	1901
T17	-4951	-196	2067
T18	-4262	1158	580
T19	-3437	2782	2077
T20	-1966	5145	1922
Estación Topográfica Coordenadas: (0,0,0) Orientación arbitraria			

R10	3255	-6678	467
R11	1958	-7312	1900
R12	877	-6382	314
R13	-1918	-5330	1945
R14	-2359	-4575	575
R15	-4351	-4083	2028
R16	-6014	-2790	1754
R17	-4944	-192	1914
R18	-4262	1157	438
Estación Topográfica Coordenadas: (0,0,0) Orientación arbitraria			

**Tabla 6.7 Observables cartesianos topografía alta precisión Leica TCA2003.**

Entre los juegos de coordenadas tridimensionales láser y topográficas se resuelve una transformación de sólido rígido para geo-referenciar los observables láser con respecto al mismo sistema coordenado que la topografía de alta precisión. De esta forma se facilita el posterior análisis de los resultados de la auto-calibración. Los nuevos juegos de coordenadas son:

Láser Trimble GX200			
Tarj	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
T1	4716,377	-1,154	1850,269
T2	3209,137	1724,683	2126,520
T3	3210,961	1695,874	367,647
T4	2738,088	3886,730	2159,461
T5	1893,812	5524,071	317,144
T6	670,088	6890,869	2087,839
T7	-1360,532	5977,318	2240,014
T8	-3583,895	4838,974	619,723
T9	-5613,845	3797,511	2224,295
T10	-6682,697	3250,378	328,197
T11	-7314,404	1945,643	2053,019
T12	-6393,499	882,308	453,575
T13	-5326,541	-1922,138	2091,584
T14	-4575,970	-2358,811	707,562
T15	-4080,902	-4351,654	2192,625
T16	-2785,496	-6017,037	1900,037
T17	-194,464	-4950,752	2066,522
T18	1159,197	-4261,140	578,949
T19	2780,833	-3434,046	2076,216
T20	5143,044	-1963,433	1921,617
Desplazamientos(mm) T <sub>X</sub> : -0,752 T <sub>Y</sub> : -0,639 T <sub>Z</sub> : 234,214 Ángulos (deg) $\omega$ : 0,0087 $\varphi$ : -0,0025 $\kappa$ : 137,2296 e.m.c: 2.597 mm			

Láser Riegl LMS-Z390i			
Tarj	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
R1	4713,210	-3,420	1999,280
R2	3207,237	1725,182	1956,090
R3	3202,774	1691,208	227,881
R4	2734,674	3888,055	2027,266
R7	-1354,955	5978,038	2375,788
R8	-3568,459	4842,439	474,734
R9	-5614,443	3795,418	2323,254
R10	-6681,015	3250,841	467,828
R11	-7315,591	1959,427	1900,508
R12	-6388,438	879,580	315,705
R13	-5324,001	-1915,216	1943,493
R14	-4569,179	-2355,602	576,281
R15	-4080,618	-4350,700	2027,151
R16	-2800,089	-6023,184	1761,655
R17	-191,774	-4944,219	1914,807
R18	1154,776	-4252,593	439,068
Desplazamientos (mm) T <sub>X</sub> : 7,311 T <sub>Y</sub> : -0,955 T <sub>Z</sub> : 448,704 Ángulos (deg) $\omega$ : -0,4259 $\varphi$ : -0,0285 $\kappa$ : 168,9592 e.m.c: 2.593 mm			

**Tabla 6.8 Coordenadas Transformadas en (mm). Datum Topográfico (Verdad Terreno).**

En el caso del Riegl, las tarjetas R5, R6, R19 y R20 han sido omitidas del listado en tablas anteriores debido a problemas del campo de calibración (estabilidad temporal)

### 6.1.3. Precisiones a priori de los equipos láser y topográficos

Para poder evaluar la calidad del proceso de calibración es necesario estimar la precisión a priori de los equipos utilizados en dicha tarea.

Las precisiones a priori se determinarán para los observables de los equipos (ángulos y distancia) y se convertirán a componentes tridimensionales usando una distancia de referencia de 10m (aproximación al rango de distancias usadas en el campo de calibración).

Las componentes de error instrumental a priori para el sistema láser Trimble GX según los datos del fabricante (Tabla 6.1) son:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho} &= 1,4\text{mm} \\ \sigma_{\phi} &= 0,68\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m} \\ \sigma_{\theta} &= 0,58\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m} \\ \gamma &= 0,06\text{mrad} = 0,6\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m} \rightarrow \sigma_{\text{beam}} = 0,15\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m}\end{aligned}\tag{6.2}$$

Recordando que  $\gamma$  es la divergencia del haz láser, la cual se permite obtener la Incertidumbre asociada al spot laser según la ecuación (3.25). Y según las fórmulas descritas en la sección 3.2.2 la desviación a priori resultante es:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\rho}^2 + (\sigma_{\phi}^2 + \sigma_{\text{beam}}^2) + (\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\text{beam}}^2)} = 1.67\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m}\tag{6.3}$$

En el caso del sistema láser Riegl LMS-Z390i (Tabla 6.2) son:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho} &= 6\text{mm} \\ \sigma_{\phi} &= 0,48\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m} \\ \sigma_{\theta} &= 0,48\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m} \\ \gamma &= 0,3\text{mrad} = 3\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m} \rightarrow \sigma_{\text{beam}} = 0,75\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m}\end{aligned}\tag{6.4}$$

Resultando finalmente:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\rho}^2 + (\sigma_{\phi}^2 + \sigma_{\text{beam}}^2) + (\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\text{beam}}^2)} = 6.13\text{mm} \quad \text{para } \rho = 10\text{m}\tag{6.5}$$

En el caso de la estación total es necesario recurrir a las fórmulas de errores angulares de la topografía clásica:

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi} &= \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_P^2 + \sigma_V^2 + \sigma_D^2} \\ \sigma_{\theta} &= \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_P^2 + \sigma_V^2}\end{aligned}\tag{6.6}$$

Donde  $\sigma_L$  es el error de lectura,  $\sigma_P$  es el error de puntería,  $\sigma_V$  es el error de verticalidad y  $\sigma_D$  es el error de dirección. Dadas las condiciones del trabajo de campo es necesario establecer una serie de particularidades para las diferentes componentes de (6.6).

- Error de verticalidad: dado que el equipo dispone de compensador de doble eje, este error se asume que es cero para ambas componentes angulares (IGN, 2008).
- Error de dirección: puesto que no es requisito indispensable el estacionamiento en el mismo punto exactamente (puesto que se resuelve una transformación de sólido-rígido) este error no entra a formar parte del cálculo. La componente de error de señal que participa en el error de dirección tampoco se considera al realizarse las punterías al centro del señal o tarjeta de puntería.
- Error de lectura: Es un concepto procedente de los teodolitos y la apreciación sobre limbos graduados, por lo que existen discrepancias sobre su determinación en el caso de estaciones totales. Una consideración muy extendida es la de asimilarlo a la apreciación del display de la estación, si bien no tiene por qué haber concordancia entre dicha apreciación y el error de la lectura del limbo electrónico. En este caso se empleará como error de lectura el proporcionado por el fabricante como error angular según la norma ISO 17123 (o DIN 18723).
- Error de puntería: Se aplicará la fórmula clásica (6.7) en función de los aumentos ( $A$ ) del equipo, tipo de óptica y método de puntería.

$$\sigma_p = \frac{10''}{A} \cdot \left( 1 + \frac{4 \cdot A}{100} \right) \quad (6.7)$$

Asimismo, al emplear el método de Bessel y observaciones repetidas ( $n$ ), las desviaciones asociadas a lectura y puntería, tanto para ángulos acimutales como cenitales, disminuyen a razón de:

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = \sqrt{\left( \frac{\sigma_L}{\sqrt{2n}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_p}{\sqrt{2n}} \right)^2} \quad (6.8)$$

Respecto a las distancias, la fórmula empleada es la clásica que combina una parte fija ( $a$ ) y otra proporcional a la distancia ( $k$ ) expresada normalmente en partes por millón (ppm).

$$\sigma_p = a + k \cdot D \quad (6.9)$$

Por lo tanto, según los datos del fabricante (Tabla 6.3) los errores de los observables para  $n=2$  serán:

$$\sigma_\phi = \sigma_\theta = \sqrt{\left( \frac{0,73''}{\sqrt{4}} \right)^2 + \left( \frac{0,5''}{\sqrt{4}} \right)^2} = 0,44'' = 0,02\text{mm para } \rho = 10\text{m} \quad (6.10)$$

$$\sigma_p = \frac{1\text{mm}}{\sqrt{4}} = 0,5\text{mm}$$

Haciendo la composición cuadrática de los componentes (6.10) se puede obtener la desviación en coordenadas tridimensionales para la distancia de referencia ( $\rho=10\text{m}$ ):

$$\sigma = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_\phi^2 + \sigma_\theta^2} = 0,5\text{mm para } \rho = 10\text{m} \quad (6.11)$$

Equipo	$\sigma$
Trimble	1,67 mm
Riegl	6,13 mm
Leica TCA2003	0,5 mm

Tabla 6.9 Resumen de precisiones (para  $\rho=10m$ )

Como se aprecia en la tabla resumen (Tabla 6.9) la estación total de alta precisión cumple con el objetivo buscado que es establecer un marco de referencia de mayor precisión que el láser escáner terrestre para la realización de las operaciones de autocalibración.

#### 6.1.4. Aplicación de la auto-calibración

El modelo de autocalibración aplicado sobre los observables de entrada es el expuesto en la sección 3.3.1, compuesto por 14 parámetros, apoyado por el test estadístico de errores groseros de Pope. Asimismo se emplean los datos de desviación a priori listados en la Tabla 6.9.

En el caso del sistema láser Trimble, dada la baja desviación de los datos no se considera necesario aplicar complementariamente un estimador robusto. Respecto a los errores groseros, cuatro puntos son identificados como tales por el test de Pope con una significación del 5% en iteraciones sucesivas, siendo estos: T9, T2, T15 y T1.

Para el sistema láser Riegl, el cual presenta una mayor incertidumbre asociada, además de problemas externos en los observables de campo, el estimador robusto para la detección de errores groseros no devuelve ningún positivo. Esto es debido, como se comentará más adelante, a los números de redundancia de las ecuaciones del ajuste, las cuales presentan altas discrepancias. Una inspección de los observables muestra la presencia de errores groseros (outliers) que no han sido correctamente identificados por el algoritmo. Es por ello por lo que a fin de obtener datos finales significativos, se procede a eliminar manualmente las observaciones asociadas a las tarjetas R16, R12, R2 y R3.

#### 6.1.5. Análisis de posibles sistematismos previos

Inicialmente y previo al proceso de análisis de los resultados de la auto calibración realizada, se establece un análisis estadístico basado en los diferentes errores de los observables que no hayan sido desechados como errores groseros. Este análisis se basa en el cálculo de los errores correspondientes a las distancias y ángulos, usando el datum topográfico como verdad terreno. La Tabla 6.10 ilustra los resultados más relevantes.

	Trimble GX			Riegl LMS-Z390i		
	$\epsilon_{min}$	$\epsilon_{max}$	$\sigma$	$\epsilon_{min}$	$\epsilon_{max}$	$\sigma$
D (mm)	0,3	3,1	<b>1,5</b>	0,1	9,5	<b>4,2</b>
Hz (")	1,9	182,5	<b>69,8</b>	9,9	140,5	<b>75,9</b>
V (")	6,5	68,0	<b>30,8</b>	4,6	94,0	<b>36,6</b>
T (mm)	0,7	3,3	<b>0,8</b>	0,9	9,7	<b>2,6</b>

Tabla 6.10 Análisis de la exactitud de los observables láser antes de la calibración.



En la Tabla 6.10 se muestra claramente que el sistema láser Trimble es más preciso que el Riegl en todos los observables, especialmente en distancimetría. Este comportamiento era evidentemente esperable según los cálculos de las desviaciones a priori de ambos instrumentos (ver Tabla 6.9).

Asimismo, el escaneo de tarjetas de puntería es más preciso en el caso del Trimble que alcanza valores submilimétricos, coincidentes con las especificaciones proporcionadas por el fabricante.

Con el objeto de reforzar el estudio de sistematismos, a partir de los datos de campo se derivan una serie de gráficos de análisis. El primer grupo de gráficos son histogramas de frecuencia, tanto de los diferentes observables de campo como de las componentes de las coordenadas 3D. El segundo tipo serán gráficos bivariantes de los datos de campo para analizar las posibles correlaciones y sistematismos en los datos.

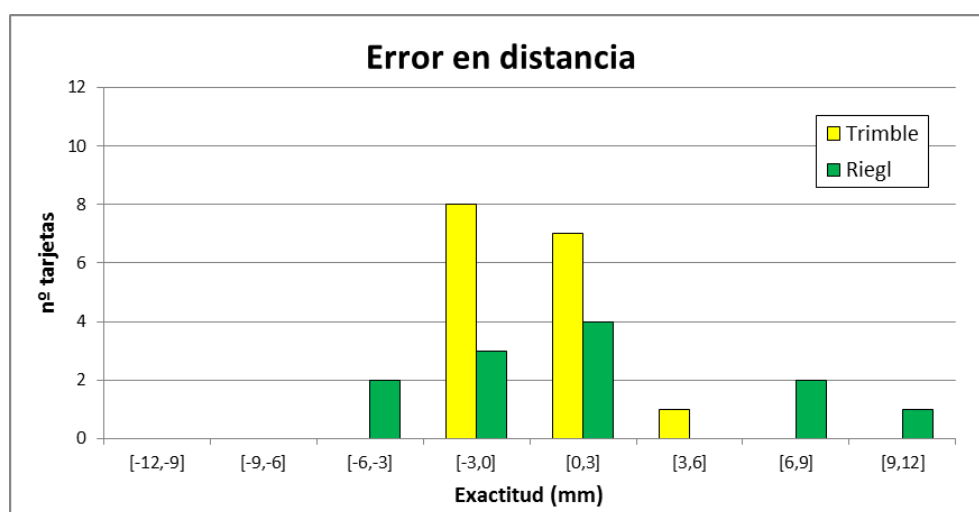


Figura 6.5 Histograma de frecuencia de los errores en distancia láser.

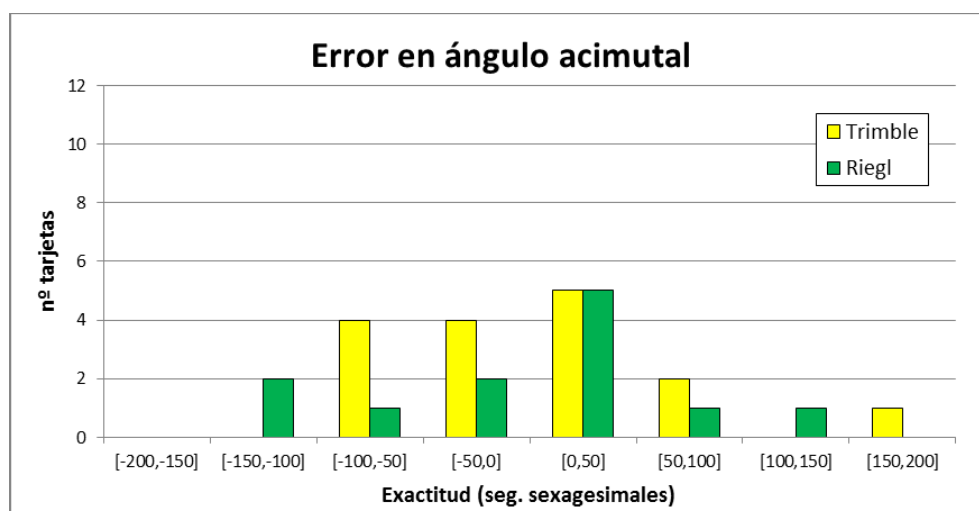


Figura 6.6 Histograma de frecuencia de los errores láser en acimut.

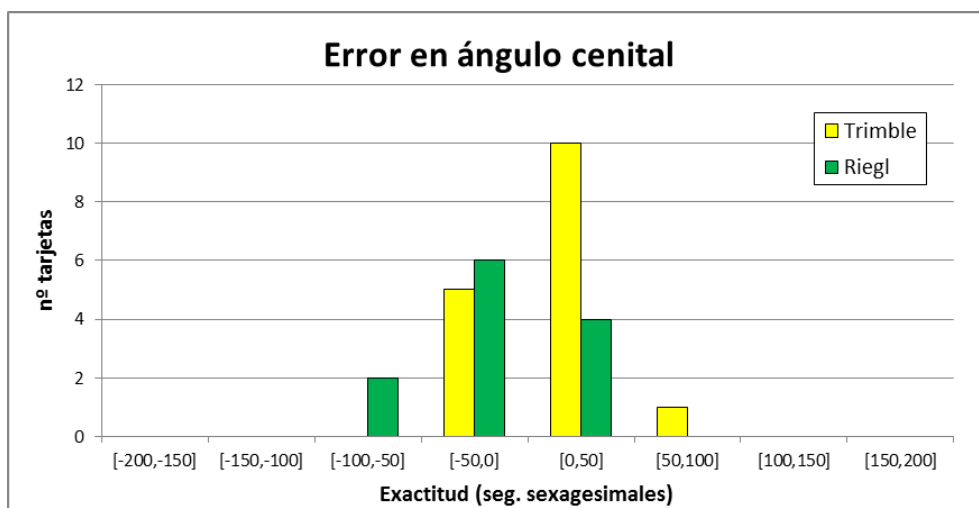


Figura 6.7 Histograma de frecuencia de los errores láser en ángulo cenital.

Respecto a las figuras anteriores se puede apreciar que los errores están distribuidos normalmente, aunque es necesario establecer una serie de consideraciones:

- El láser Trimble GX presenta un conjunto de errores con baja dispersión (menos desviación) y centrados en el valor de media cero para todos los observables. Sin embargo, los errores correspondientes al ángulo acimutal son superiores a los cenitales en más del doble, indicando la existencia de un posible sistematismo.
- El láser terrestre Riegl LMS-Z390i por su parte presenta un conjunto de errores con mayor dispersión en todos los observables, aunque sin grandes sesgos apreciables en su media, siendo las distancias la que se encuentra dentro de las especificaciones previas del fabricante. Respecto a los valores angulares existe una diferencia significativa entre los cenitales y acimutales, siendo estos últimos superiores en un factor dos.
- Según las distribuciones de las observaciones particulares en relación con los valores promedio del observable correspondiente, parece que no se verifica una distribución normal debido seguramente a la presencia de errores groseros. Por ello es necesario aplicar técnicas de estimación robustas, así como estimadores estadísticos para detectar y rechazar dichas observaciones.

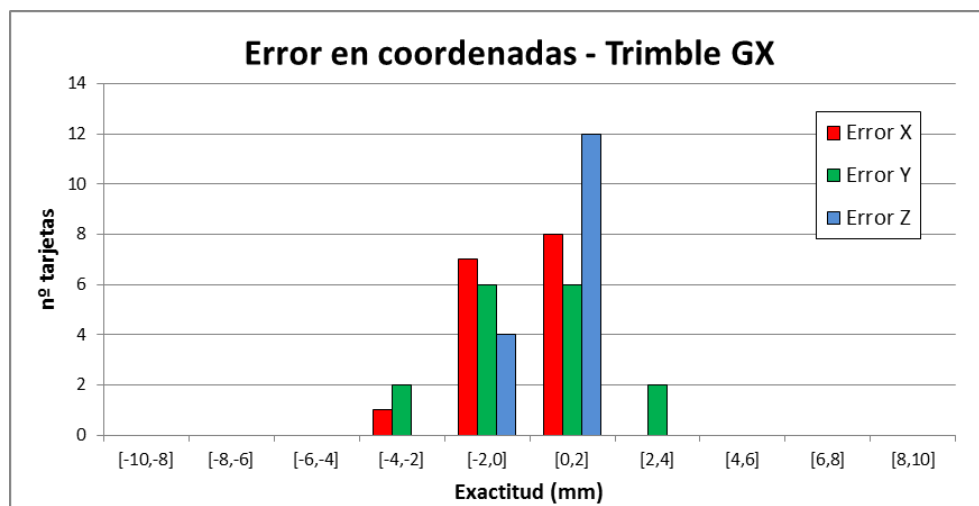


Figura 6.8 Histograma de frecuencia de los errores según los componentes de las coordenadas tridimensionales para el sistema láser Trimble GX.

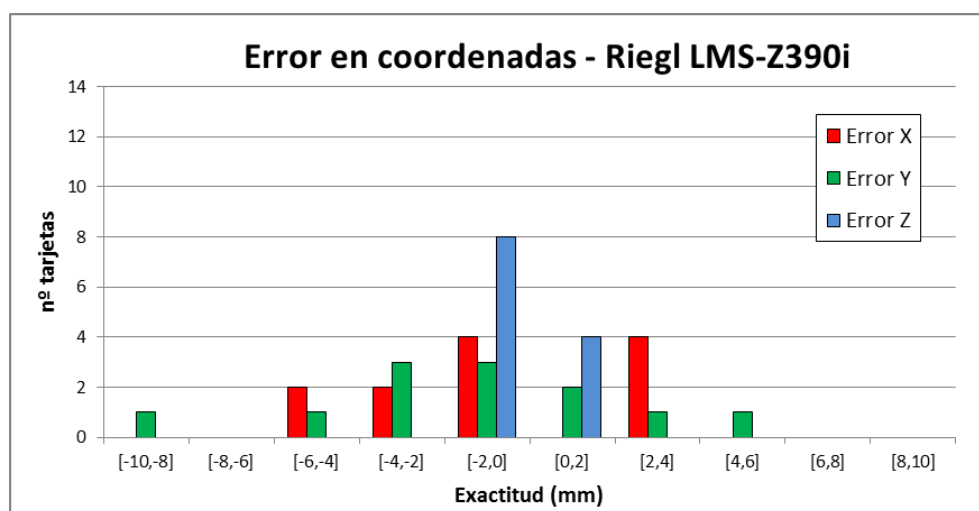


Figura 6.9 Histograma de frecuencia de los errores según los componentes de las coordenadas tridimensionales para el sistema láser Riegl

En las dos figuras anteriores se aprecia como en ambos equipos la componente  $Z$  es inferior a las componentes planimétricas en un factor variable entre 2 y 3 veces. La distribución de los errores parece que sigue una distribución normal, o gaussiana, de media cero. Respecto a la desviación de los errores, el láser terrestre Riegl presenta mayor dispersión en coordenadas, debido tanto a la posible presencia de observaciones groseras, a la precisión intrínseca del instrumento, como al método de extracción del centro de las tarjetas de puntería.

El error de las componentes planimétricas ( $X$  e  $Y$ ) está derivado de los errores en la determinación de los ángulos horizontales, tal y como se estableció a tenor de la Figura 6.6. Una de las posibles causas de esta componente de error podría ser el hecho de que los ángulos acimutales se miden con la ayuda de un servomotor dispuesto en la plataforma rotatoria, por lo que podría existir una inercia mayor que en el caso de las unidades de deflexión de los ángulos cenitales.

El contenido de la Figura 6.8 y la Figura 6.9 puede resumirse en la tabla siguiente:

	Trimble GX			Riegl LMS-Z390i		
	$\epsilon_{\min}$	$\epsilon_{\max}$	$\sigma$	$\epsilon_{\min}$	$\epsilon_{\max}$	$\sigma$
X (mm)	0,1	2,5	1,4	0,2	6,0	3,2
Y (mm)	0,0	3,1	1,7	0,2	9,4	3,5
Z (mm)	0,0	1,8	0,9	0,3	1,8	1,0

Tabla 6.11 Análisis de la exactitud de los componentes de las coordenadas cartesianas antes de la calibración.

Seguidamente se presentan los gráficos bivariantes más relevantes para su análisis, donde se compara el observable con su error asociado, además de presentar el valor de regresión para ese conjunto de datos en particular.

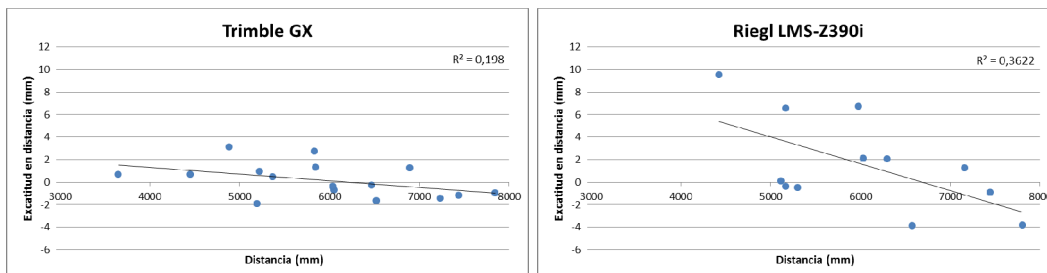


Figura 6.10 Gráficos bivariantes según la distancia láser y su error asociado.

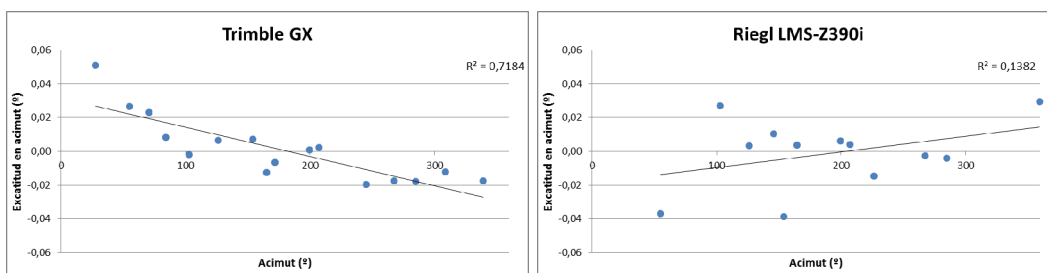


Figura 6.11 Gráficos bivariantes según el ángulo acimutal y su error asociado.

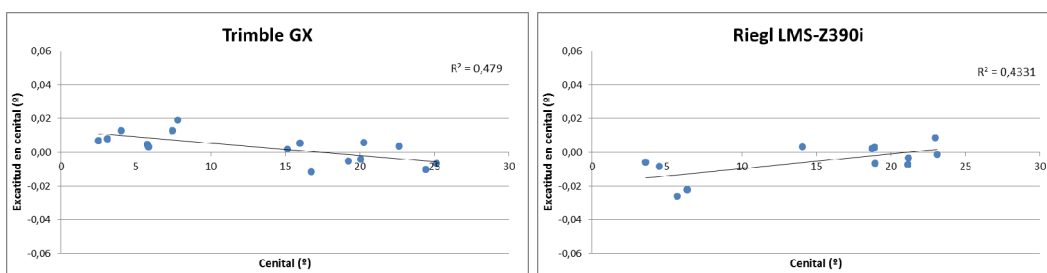


Figura 6.12 Gráficos bivariantes para el error cenital y el valor angular correspondiente.

A destacar la Figura 6.11 donde se representa la correlación existente entre el error acimutal y el valor angular asociado, para ambos equipos. En el caso de ambos equipos el error varía linealmente (decrecientemente en el caso del Trimble, y de forma creciente para el equipo Riegl) hasta anularse ( $\epsilon=0$ ) a la mitad del recorrido del limbo ( $\varphi=180^\circ$ ) y luego continuar con la tendencia. Este comportamiento puede explicarse mediante las suposiciones establecidas anteriormente sobre el comportamiento de los ángulos acimutales.

En la medida de distancias (Figura 6.10) ambos equipos presentan una tendencia de error decreciente, siendo la del Riegl bastante más acusada que la del Trimble,

hasta llegar al intervalo de 6-7 metros donde se anula, y comienza a incrementarse para distancias superiores.

Finalmente, en los ángulos cenitales (Figura 6.12) se reproduce la misma tendencia que en los ángulos acimutales; fuerte sistematismo creciente el caso de Riegl y menguante para el Trimble. Aunque la carencia de ángulos de elevación negativos impide realizar una hipótesis completa de comportamiento como en el caso acimutal.

El análisis del resto de gráficos bivariantes para los observables de campo no proporciona ningún resultado relevante,

La Tabla 6.12 resume los coeficientes de correlación de los gráficos bivariable anteriores, conjuntamente con los propios para las componentes de error expresadas en coordenadas cartesianas tridimensionales. Recordando que el coeficiente de correlación ( $C$ ) es el cuadrado del valor de regresión ( $R$ ) tenemos que:

Variabes	Trimble	Riegl
$\varepsilon_D - D$	-0,4439	-0,5993
$\varepsilon_\phi - \phi$	-0,8475	0,3720
$\varepsilon_\tau - \tau$	-0,6916	0,6588
$\varepsilon_X - X$	-0,2790	0,1869
$\varepsilon_Y - Y$	0,2157	0,3000
$\varepsilon_Z - Z$	-0,5670	0,4446

Tabla 6.12 Resumen de datos de correlación.

### 6.1.6. Análisis de los resultados de auto-calibración.

Los resultados principales del proceso de auto-calibración (Tabla 6.13) se obtienen a partir de la matriz de las incógnitas (valor del parámetro) y la matriz cofactor de las incógnitas (desviación típica asociada), la cual está subdividida en dos bloques claramente diferenciados: el conjunto de parámetros externos correspondientes a los parámetros de geo-referenciación (traslación y ángulos) y los parámetros internos con los resultados de la auto-calibración propiamente dichos.

Los parámetros y sus desviaciones típicas asociadas para los datos de orientación externa mostrados en la Tabla 6.13, están referidos a su vez a la referenciación previa de sólido rígido especificados en la Tabla 6.8, por ello las componentes de geo-referenciación son próximas a cero.

	Trimble		Riegl	
	valor	desviación	valor	desviación
<b>Traslación (mm)</b>				
$\Delta X$	1,1294	0,40462	-4,3469	1,13949
$\Delta Y$	-0,1366	0,27183	-1,1044	0,78564
$\Delta Z$	1,3774	1,30869	-3,996	4,02672
<b>Rotación (°)</b>				
$\alpha_1$	0,00688	0,00344	0,00286	0,00917
$\alpha_2$	-0,00286	0,00458	-0,00859	0,01375
$\alpha_3$	0,56895	0,33174	-0,24351	1,20378

Calibración				
$m$	0,999861	0,000267	0,995723	0,000829
$k_0$ (mm)	-0,83061	1,52548	-26,78917	4,49651
$c$ (°)	-0,62452	0,3369	2,33366	1,22498
$i$ (°)	0,14954	0,07678	-0,57811	0,26929
$\theta_0$ (°)	0,00115	0,01547	-0,02063	0,0487
$\delta\theta_0$ (°)	0,03896	0,02005	-0,03896	0,04698
$\varphi_0$ (°)	0,00115	0,00229	-1,96754	0,00688
$\delta\varphi_0$ (°)	0,01432	0,00229	-0,02349	0,00573

**Tabla 6.13 Parámetros externos e internos resultantes del modelo de auto-calibración propuesto**

Algunos de los valores de geo-referenciación mostrados en la Tabla 6.13 pueden considerarse elevados (por ejemplo: traslación  $X$  para el Riegl), pero son valores que se fundamentan en la referenciación de sólido-rígido realizada inicialmente con todos los puntos disponibles (errores groseros incluidos). Para un análisis más claro, véase la Tabla 6.14 donde se explicita la combinación de ambos conjuntos de valores.

	Trimble	Riegl
$\Delta X$ (mm)	0,38	3,0
$\Delta Y$ (mm)	-0,8	-2,1
$\Delta Z$ (mm)	235,6	444,7
$\alpha_1$ (°)	0,0156	-0,4230
$\alpha_2$ (°)	-0,0054	-0,0371
$\alpha_3$ (°)	137,7986	168,7157

**Tabla 6.14 Parámetros externos globales**

Se puede apreciar como el sistema láser Trimble incorpora un compensador de doble eje, en tanto los ángulos en el plano acimutal son  $\alpha_1$ : 56'' y  $\alpha_2$ : 19'' con una desviación vertical de 57''. Sin embargo para el sistema láser Riegl los valores angulares son  $\alpha_1$ : 25' y  $\alpha_2$ : 2' con una desviación vertical de 25'.

Concretamente, para el sistema láser Trimble GX puede analizarse la efectividad de nivelación mediante la ecuación (6.12), donde intervienen las diferencias entre coordenadas láser según el eje  $Z$  ( $Z_L$ ), las topográficas ( $Z_T$ ) y el número de puntos de control ( $n$ ).

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z_L - Z_T)^2}{n-1}} = 0,9 \text{ mm} \quad (6.12)$$

Nótese que esta ecuación mide la efectividad del compensador mediante los ángulos de inclinación y no la precisión de nivelación, ya que cualquier error accidental en las coordenadas del eje  $Z$  causado por falta de nivel sería absorbido por los ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  en la transformación.

Para el ajuste realizado por el modelo de auto-calibración propuesto hay que realizar el test de bondad del ajuste o test de la Chi cuadrado, el cual permite analizar si las desviaciones a priori y a posteriori de un conjunto de datos son significativos y por consiguiente establecer si en el ajuste persisten errores groseros de algún tipo. La información referente a este estimador estadístico está recogida en la sección 4.6 de la memoria.

En la Tabla 6.15 se muestran los resultados de dicho test, en el cual para una significación del 5%, ambos estadísticos son menores al valor crítico obtenido de la distribución Chi-cuadrado,  $\chi^2$ . En el caso del sistema láser Riegl, el estadístico presenta un valor muy bajo debido a la manifiesta mejora de la desviación típica a posteriori, en comparación a la establecida a priori en función de los datos del instrumental.

	Desviación a priori	Desviación a posteriori	Estadístico	Valor crítico ( $\alpha=0,05\%$ )
Trimble	1,67	1,157	7,2	25
Riegl	6,13	1,707	0,85	19,68

Tabla 6.15 Test de bondad del ajuste, Chi-cuadrado

Todo proceso de ajuste (resumido en la Tabla 6.13) requiere de un análisis más detallado a pesar del estudio de los valores de exactitud y precisión. Uno de estos análisis es el estudio de la matriz cofactor de las incógnitas ajustadas, concretamente mediante su valor de correlación (directamente relacionado con dicha matriz). En la Tabla 6.16 se listan los valores de correlación entre los diferentes parámetros del ajuste de calibración para el sistema láser Trimble GX.

	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$k_0$	$c$	$i$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$m$	$\delta\theta$	$\delta\varphi_0$
$\Delta X$	-	-17,2	-32,9	20,0	41,2	3,1	52,2	-4,6	3,6	-34,4	11,4	60,4	19,5	68,6
$\Delta Y$	-17,2	-	23,9	-37,7	-19,3	-16,8	-21,2	16,6	-11,9	25,8	12,5	-26,7	-16,2	-9,2
$\Delta Z$	-32,9	23,9	-	-38,9	-57,4	-3,5	-2,2	3,8	-3,3	93,9	-3,9	-22,7	-39,9	-13,0
$\alpha_1$	20,0	-37,7	-38,9	-	31,3	-2,9	10,1	2,7	-3,7	-46,7	2,1	18,4	38,0	11,1
$\alpha_2$	41,2	-19,3	-57,4	31,3	-	7,3	14,3	-7,5	7,9	-68,6	1,0	26,4	52,6	8,2
$\alpha_3$	3,1	-16,8	-3,5	-2,9	7,3	-	3,6	-100	97,2	-3,6	-3,6	4,4	1,8	-4,2
$k_0$	52,2	-21,2	-2,2	10,1	14,3	3,6	-	-4,3	2,3	-4,6	17,2	96,8	5,4	39,6
$c$	-4,6	16,6	3,8	2,7	-7,5	-100	-4,3	-	-97,4	3,9	3,3	-5,2	-1,9	2,3
$i$	3,6	-11,9	-3,3	-3,7	7,9	97,2	2,3	-97,4	-	-3,5	-8,7	3,0	2,0	-8,0
$\theta_0$	-34,4	25,8	93,9	-46,7	-68,6	-3,6	-4,6	3,9	-3,5	-	-3,1	-23,9	-65,8	-11,6
$\varphi_0$	11,4	12,5	-3,9	2,1	1,0	-3,6	17,2	3,3	-8,7	-3,1	-	18,3	0,4	24,5
$m$	60,4	-26,7	-22,7	18,4	26,4	4,4	96,8	-5,2	3,0	-23,9	18,3	-	13,7	43,4
$\delta\theta$	19,5	-16,2	-39,9	38,0	52,6	1,8	5,4	-1,9	2,0	-65,8	0,4	13,7	-	3,3
$\delta\varphi_0$	68,6	-9,2	-13,0	11,1	8,2	-4,2	39,6	2,3	-8,0	-11,6	24,5	43,4	3,3	-

Tabla 6.16 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el Trimble GX con todos los sistematismos

Queda de manifiesto la presencia de sistematismos redundantes, como pueden ser las variables  $c$  e  $i$ , con un muy alto valor de correlación. Estas variables podrían unificarse en tanto en ambos interviene las mismas variables (3.6). Otra correlación entre variables es la referida a los términos de distancia ( $m$  y  $k_0$ ), hecho el cual podría manifestar un sesgo en el ajuste, principalmente debido a las dimensiones del campo de calibración. Sobre la validez de estos parámetros versará la subsección 6.1.7 donde además se analizará su significatividad.

Otro análisis derivado de un ajuste mínimo cuadrático son los denominados números de redundancia, los cuales se obtienen a partir de la matriz cofactor de los residuos. Estos valores nos permiten visualizar el grado de contribución de cada ecuación al ajuste final, recordando que cada observación a una tarjeta da

lugar a tres ecuaciones. En la Figura 6.13 se puede comprobar como salvo para la tarjeta T20, el resto de observaciones contribuyen de una manera más o menos similar al ajuste.

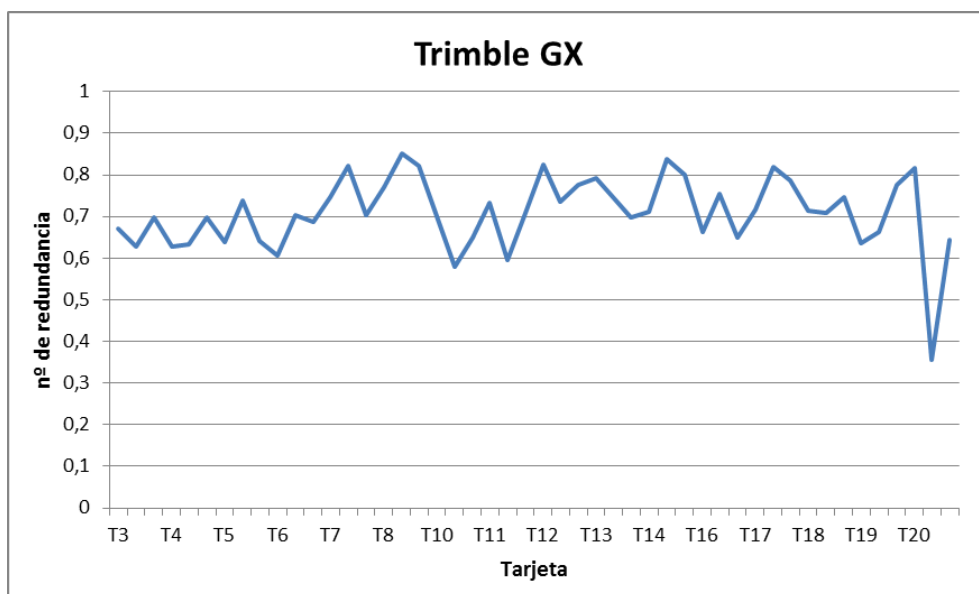


Figura 6.13 Números de redundancia para el ajuste con todos los sistematismos del Trimble GX

La alternativa al ajuste con todos los parámetros sistemáticos, es realizar el ajuste solamente con los sistematismos estadísticamente significativos. Sobre la comprobación de cuál de los dos acercamientos es el válido versará la subsección 6.1.7. En este punto se realizará el contraste de variación de valores de correlación de las incógnitas. En la Tabla 6.17 se listan los dos parámetros significativos conjuntamente con los parámetros propios del ajuste de sólido-rígido. El grado de correlación entre los sistematismos y la variable de transformación son ineludibles, en tanto dicha transformación es necesaria para llevar a coincidir los sistemas láser y topográfico.

	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\delta\theta$	$\delta\varphi_0$
$\Delta X$	-	5,0	6,8	1,2	23,6	-62,0	3,1	62,7
$\Delta Y$	5,0	-	-3,6	-30,8	1,2	-11,8	-1,6	4,7
$\Delta Z$	6,8	-3,6	-	16,1	27,2	0,1	81,5	-0,3
$\alpha_1$	1,2	-30,8	16,1	-	-2,2	-2,1	10,5	3,1
$\alpha_2$	23,6	1,2	27,2	-2,2	-	2,4	12,1	-3,3
$\alpha_3$	-62,0	-11,8	0,1	-2,1	2,4	-	-0,1	-94,2
$\delta\theta_0$	3,1	-1,6	81,5	10,5	12,1	-0,1	-	0,0
$\delta\varphi_0$	62,7	4,7	-0,3	3,1	-3,3	-94,2	0,0	-

Tabla 6.17 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el láser Trimble GX empleando solamente los sistematismos significativos

Como se mencionó anteriormente la mejora o empeoramiento de la exactitud y precisión se verá en la siguiente sección, pero a priori se comprueba la mejora de los números de redundancia, al estar estos más homogéneamente distribuidos, con la salvedad de la observación de la tarjeta T20; mientras que la mejora, en



términos de aumento del valor de la redundancia individual de las ecuaciones, respondería a la reducción del número de incógnitas.

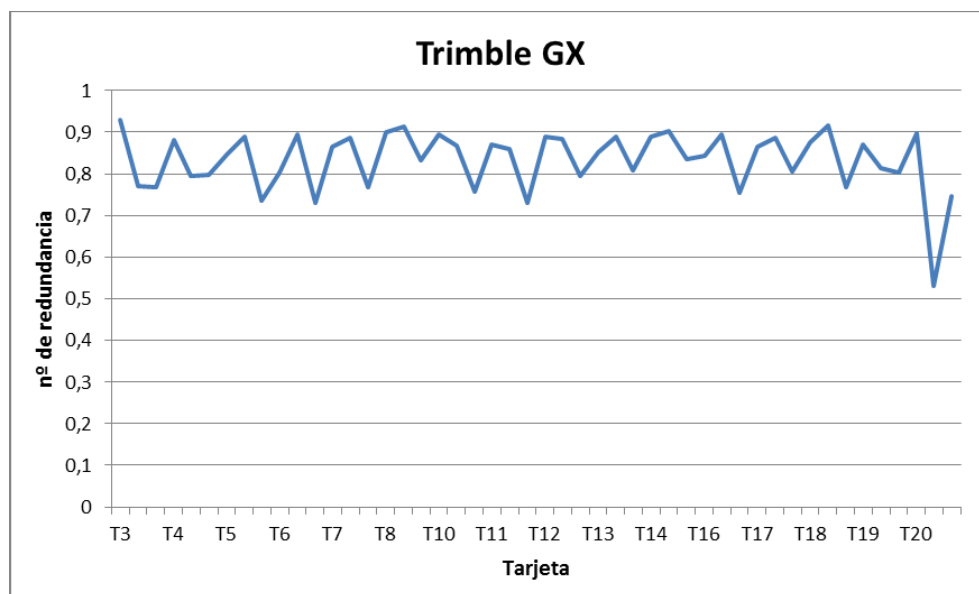


Figura 6.14 Números de redundancia para el ajuste con los sistematismos significativos del ajuste del Trimble GX

En el caso del sistema láser Riegl, las correlaciones observadas entre variables para los parámetros mencionados con el sistema láser Trimble se siguen manifestando. Aparte de los valores individuales, la Tabla 6.18 presenta grandes similitudes con la Tabla 6.16, indicándose así la consistencia en las interrelaciones entre los parámetros del ajuste.

	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$k_0$	$c$	$i$	$\theta_0$	$\varphi_0$	$m$	$\delta\theta$	$\delta\varphi_0$
$\Delta X$	-	-17,9	-57,0	35,1	64,4	37,0	60,0	-37,9	35,9	-59,1	48,2	73,2	37,0	68,4
$\Delta Y$	-17,9	-	8,9	-32,0	-12,6	-43,9	-38,2	43,3	-39,6	11,4	11,2	-37,0	-11,8	6,6
$\Delta Z$	-57,0	8,9	-	-53,0	-72,7	-13,3	-19,4	13,7	-12,8	95,7	-41,1	-42,9	-47,3	-32,6
$\alpha_1$	35,1	-32,0	-53,0	-	38,7	7,4	23,2	-7,6	5,8	-53,3	24,6	34,6	28,5	20,8
$\alpha_2$	64,4	-12,6	-72,7	38,7	-	18,1	31,2	-18,4	17,7	-82,4	37,6	48,1	61,1	29,2
$\alpha_3$	37,0	-43,9	-13,3	7,4	18,1	-	39,1	-100	98,9	-14,1	23,9	40,5	10,2	18,4
$k_0$	60,0	-38,2	-19,4	23,2	31,2	39,1	-	-39,4	36,8	-22,3	42,3	96,2	17,2	39,4
$c$	-37,9	43,3	13,7	-7,6	-18,4	-100	-39,4	-	-99,0	14,5	-24,4	-41,0	-10,4	-19,9
$i$	35,9	-39,6	-12,8	5,8	17,7	98,9	36,8	-99,0	-	-13,6	22,9	38,3	9,9	18,1
$\theta_0$	-59,1	11,4	95,7	-53,3	-82,4	-14,1	-22,3	14,5	-13,6	-	-40,0	-44,7	-68,2	-31,1
$\varphi_0$	48,2	11,2	-41,1	24,6	37,6	23,9	42,3	-24,4	22,9	-40,0	-	50,9	19,3	42,9
$m$	73,2	-37,0	-42,9	34,6	48,1	40,5	96,2	-41,0	38,3	-44,7	50,9	-	28,2	47,3
$\delta\theta_0$	37,0	-11,8	-47,3	28,5	61,1	10,2	17,2	-10,4	9,9	-68,2	19,3	28,2	-	15,1
$\delta\varphi_0$	68,4	6,6	-32,6	20,8	29,2	18,4	39,4	-19,9	18,1	-31,1	42,9	47,3	15,1	-

Tabla 6.18 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el láser Riegl con todos los sistematismos

Con respecto a los números de redundancia, se aprecia en la Figura 6.15 como el ajuste no es suficientemente estable, dadas las elevadas discrepancias entre las ecuaciones para dicho indicador. Este desequilibrio entre el grado de contribución

de las diferentes ecuaciones en el ajuste es la causa por la que el estimador robusto para la detección de errores groseros no funciona correctamente, y es necesaria la eliminación manual de los outliers.

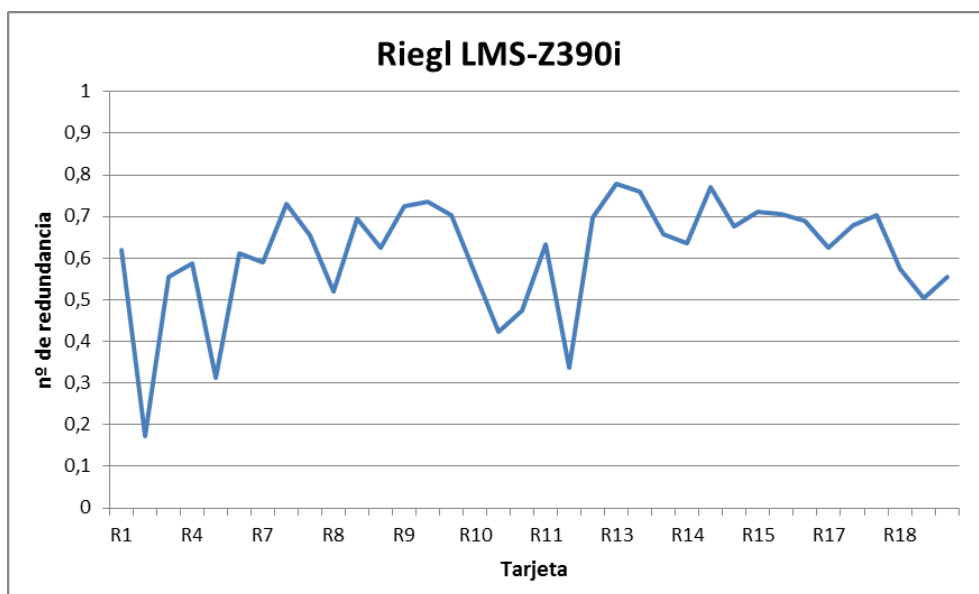


Figura 6.15 Números de redundancia para el ajuste con todos los sistematismos del láser Riegl

A fin de comprobar si hay diferencias entre la matriz cofactor de los residuos con el empleo del conjunto de sistematismos propuestos y la matriz cofactor de los residuos resultante de aplicar los sistematismos estadísticamente significativos, se analizan los valores de correlación con este segundo caso. En la Tabla 6.19 se puede ver que con la salvedad de las variables  $m$  y  $k_0$ , para el resto se reducen ostensiblemente los valores de correlación. Estos dos últimos se mantienen a pesar de dicha situación, porque proporcionan una mejora de la exactitud de la calibración.

	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$k_0$	$i$	$m$	$\delta\theta$	$\delta\varphi_0$
$\Delta X$	-	-7,0	1,3	4,4	32,1	-47,2	48,4	-9,3	54,5	-3,0	61,0
$\Delta Y$	-7,0	-	-4,4	-37,1	-3,3	-36,0	-38,2	29,5	-37,9	-2,4	11,3
$\Delta Z$	1,3	-4,4	-	-8,1	38,7	6,9	11,4	0,7	3,5	84,9	-7,2
$\alpha_1$	4,4	-37,1	-8,1	-	-11,4	3,0	14,1	-10,7	14,9	-12,4	4,1
$\alpha_2$	32,1	-3,3	38,7	-11,4	-	-2,0	19,4	1,8	18,3	12,7	2,7
$\alpha_3$	-47,2	-36,0	6,9	3,0	-2,0	-	-8,6	-45,2	-12,2	5,4	-80,9
$k_0$	48,4	-38,2	11,4	14,1	19,4	-8,6	-	-14,4	98,6	7,3	23,4
$i$	-9,3	29,5	0,7	-10,7	1,8	-45,2	-14,4	-	-15,0	0,2	-8,6
$m$	54,5	-37,9	3,5	14,9	18,3	-12,2	98,6	-15,0	-	0,3	27,8
$\delta\theta$	-3,0	-2,4	84,9	-12,4	12,7	5,4	7,3	0,2	0,3	-	-5,4
$\delta\varphi_0$	61,0	11,3	-7,2	4,1	2,7	-80,9	23,4	-8,6	27,8	-5,4	-

Tabla 6.19 Matriz de correlación (%) de las incógnitas para el láser Riegl usando solamente los sistematismos significativos

Dados los problemas del estimador robusto para detectar los errores groseros en el caso de ajuste con todos los sistematismos propuestos, para esta variante (sólo

sistematismos significativos) se apoya además en el estimador robusto de Huber. En la Figura 6.16 se aprecia, en contraste con la Figura 6.15, un comportamiento más homogéneo de los números de redundancia, así como las tarjetas R10 y R11 que dejan de presentar picos en la gráfica.

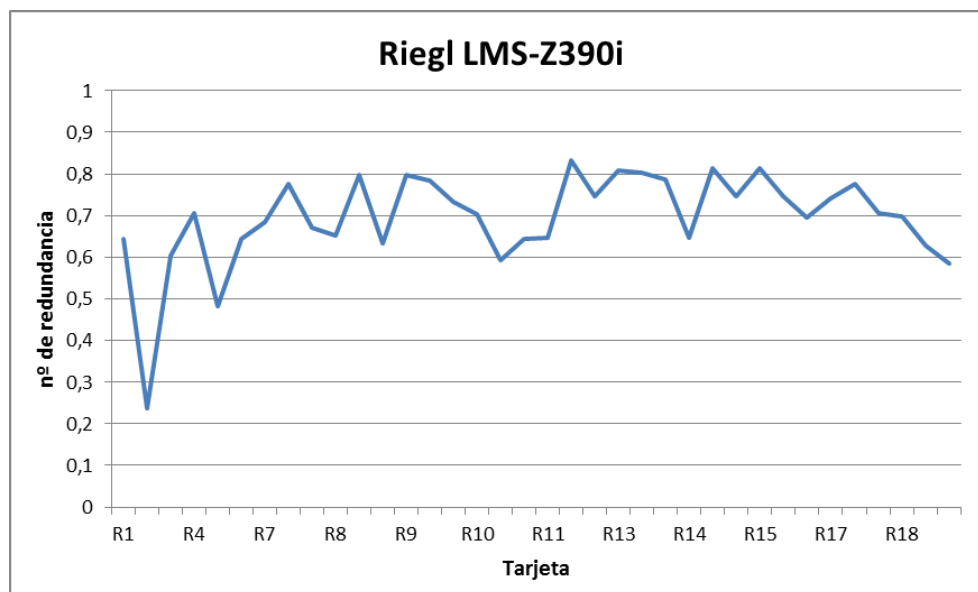


Figura 6.16 Números de redundancia para el ajuste con los sistematismos significativos del ajuste del láser Riegl

Con el modelo matemático de auto-calibración calculado, se corrigen los observables láser y se vuelve a realizar el análisis estadístico llevado a cabo para los sistematismos previos. En primer lugar, se generan los datos de exactitud de los observables calibrados (Tabla 6.20), donde se incluye una nueva columna de datos: el porcentaje de mejora tras la auto-calibración.

	Trimble GX				Riegl LMS-Z390i			
	$\epsilon_{\min}$	$\epsilon_{\max}$	$\sigma$	%	$\epsilon_{\min}$	$\epsilon_{\max}$	$\sigma$	%
D (mm)	0,0	1,7	<b>1,0</b>	32	0,1	4,3	<b>2,1</b>	49
Hz (")	0,7	88,4	<b>34,8</b>	50	3,0	121,4	<b>60,2</b>	21
V (")	0,1	17,7	<b>10,4</b>	66	0,9	25,4	<b>14,2</b>	61
T (mm)	0,2	2,3	<b>0,6</b>	19	0,7	4,5	<b>1,3</b>	31

Tabla 6.20 Análisis de la exactitud de los observables láser calibrados y porcentaje de mejora

En la comparación entre la Tabla 6.10 y la Tabla 6.20 se puede apreciar como hay una mejora en los parámetros de exactitud, siendo esta más acusada en el caso del Riegl donde se pasa de un error en tarjeta de 2,5mm a 1,2mm, mientras que para el Trimble la mejora es más discreta (0,2mm). Se aprecia como los observables individuales también mejoran, siendo el más elevado (en términos absolutos) el correspondiente al ángulo acimutal del Trimble con 36'', y la menor mejora la protagonizó el ángulo acimutal del Riegl con 16''. En términos relativos la mejor mejora se centra en los ángulos cenitales de ambos equipos, con cantidades superiores al 60% de mejora.

Los datos de la Tabla 6.20 pueden expresarse mediante los histogramas de error de las figuras siguientes:

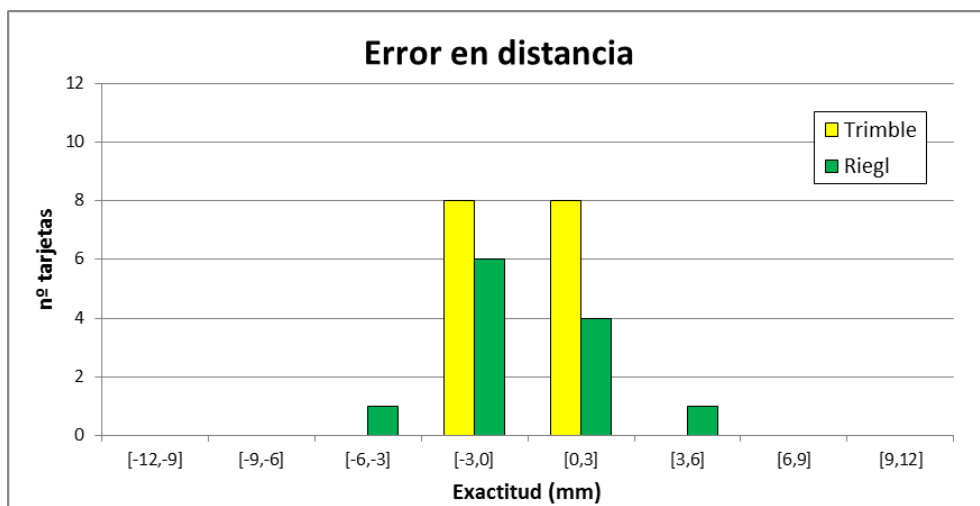


Figura 6.17 Histograma de frecuencia de los errores en distancia láser después de la calibración

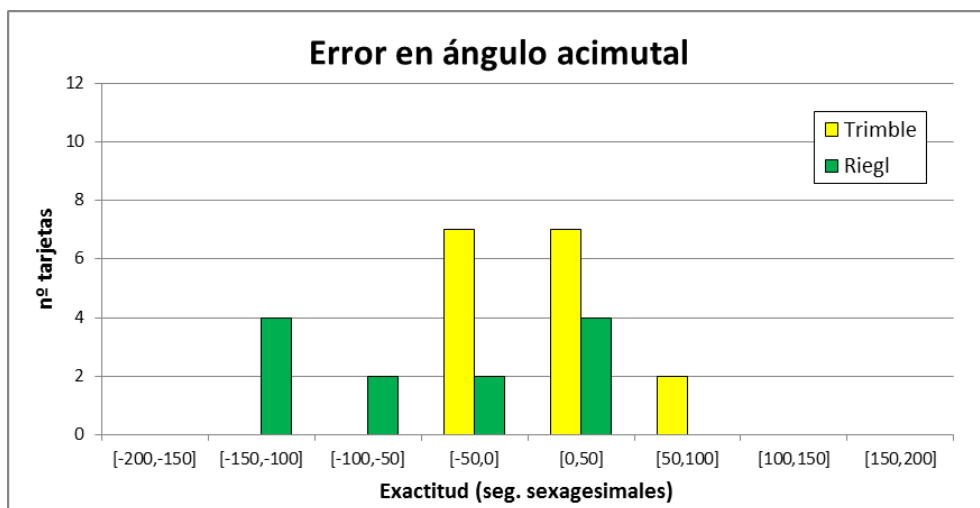


Figura 6.18 Histograma de frecuencia de los errores en ángulo acimutal después de la calibración

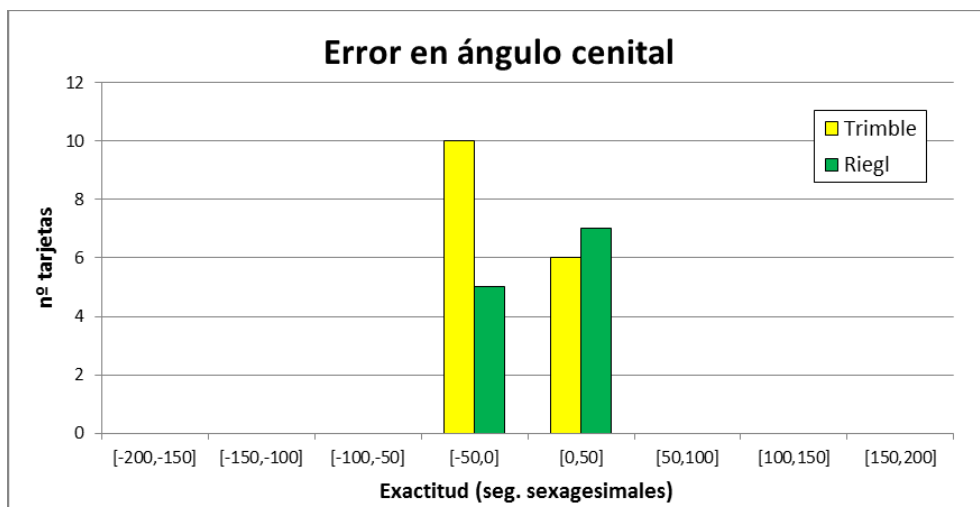


Figura 6.19 Histograma de frecuencia de los errores en ángulo cenital después de la calibración

Se aprecia como en el caso de los observables de distancia y ángulo cenital se ha conseguido que la distribución de los errores sea lo más cercana posible a una distribución normal, o gaussiana, con media cero. No obstante, en el caso de los ángulos acimutales del láser Riegl aparece un comportamiento diferente donde se aprecia un ligero sesgo de la distribución, la cual difiere de la distribución normal. Este comportamiento diferente está asociado al hecho de que dicho observable en cuestión haya sido el que menor tasa de mejora haya tenido, en comparación con el resto.

Las mejoras de los observables también pueden apreciarse en las componentes de las coordenadas cartesianas derivadas, tal y como muestra la tabla siguiente.

	Trimble GX				Riegl LMS-Z390i			
	$\epsilon_{\min}$	$\epsilon_{\max}$	$\sigma$	%	$\epsilon_{\min}$	$\epsilon_{\max}$	$\sigma$	%
X (mm)	0,0	1,8	<b>0,9</b>	36	0,2	2,8	<b>1,5</b>	53
Y (mm)	0,1	1,6	<b>0,9</b>	44	0,0	4,4	<b>2,4</b>	31
Z (mm)	0,0	0,8	<b>0,3</b>	60	0,1	1,6	<b>0,9</b>	15

Tabla 6.21 Análisis de la exactitud de los componentes de las coordenadas cartesianas según los parámetros de calibración obtenidos

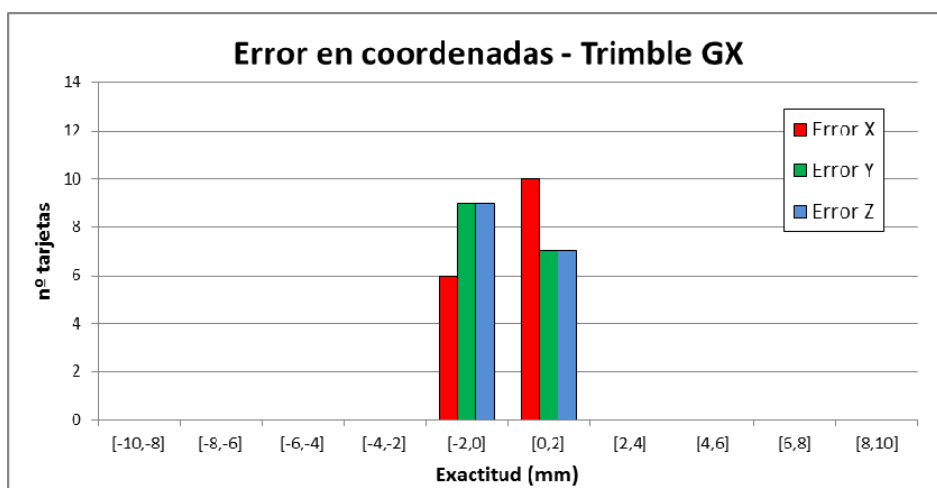


Figura 6.20 Histograma de frecuencia de los errores en coordenadas después de la calibración

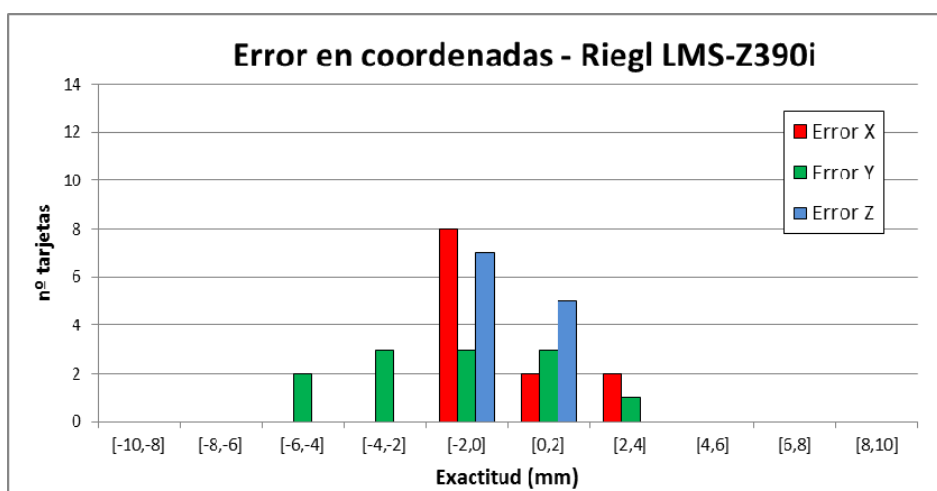


Figura 6.21 Histograma de frecuencia de los errores en coordenadas después de la calibración

Igual que en caso anterior, se disponen los gráficos bivariantes de los observables para comprobar si persiste algún tipo de sistematismo en el conjunto de datos. Como se aprecia en las figuras anexas el comportamiento de los observables ha cambiado en comparación con los gráficos previos a la auto-calibración. En todos los casos (observables y equipos) la magnitud de los errores ha disminuido a la par que se elimina la presencia de sistematismo en los observables. De hecho, el factor de correlación ( $C$ ) (Tabla 6.22) es claramente inferior a los obtenidos previamente al ajuste (Tabla 6.12)

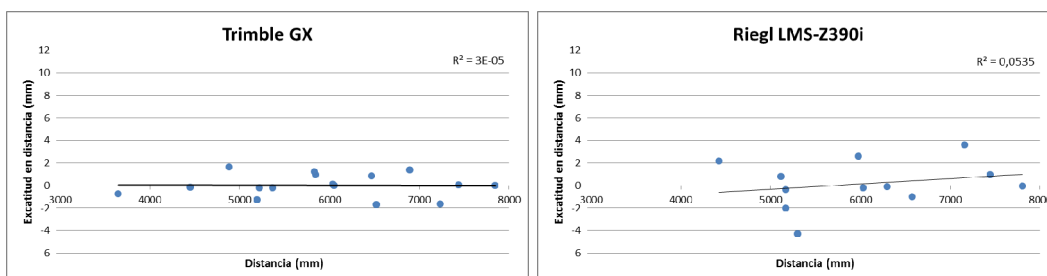


Figura 6.22 Gráficos bivariantes según la distancia láser calibrada y su error asociado

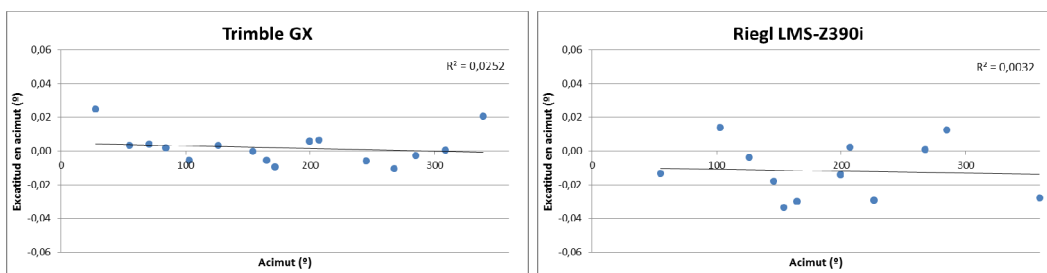


Figura 6.23 Gráficos bivariantes según el ángulo acimutal calibrado y su error asociado

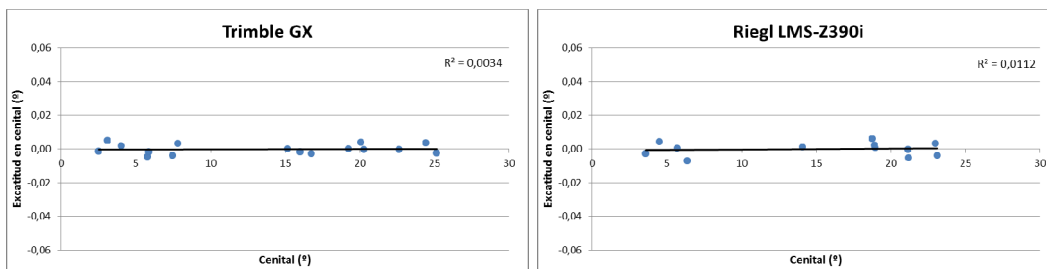


Figura 6.24 Gráficos bivariantes según el ángulo cenital calibrado y su error asociado

Variables	Trimble	Riegl
$\varepsilon_D - D$	-0,0049	0,2332
$\varepsilon_\varphi - \varphi$	-0,1587	-0,0564
$\varepsilon_\tau - \tau$	0,0580	0,1063
$\varepsilon_X - X$	-0,0839	-0,2300
$\varepsilon_Y - Y$	0,0781	0,0518
$\varepsilon_Z - Z$	-0,0212	-0,1179

Tabla 6.22 Resumen de los datos de correlación ( $C$ ) para los observables calibrados

Una última comprobación de la calidad de los parámetros ajustados es el análisis de invariantes espaciales donde se evalúa la calidad de las distancias y ángulos extraídos a partir de la nube de puntos en un análisis dimensional de invariantes y comparados posteriormente con la verdad terreno procedente de la topografía.

En el análisis dimensional de invariantes se tiene en cuenta tanto las tarjetas contenidas en el mismo plano (favorables) como las pertenecientes a planos diferentes (desfavorables). De ahí provienen los elevados valores del error máximo, más llamativo en el caso angular donde no se impuso restricción alguna en la forma del triángulo en el proceso combinatorio (ya sean ángulos muy agudos u obtusos).

	Trimble GX			Riegl LMS-Z390i		
	$\varepsilon_{\min}$	$\varepsilon_{\max}$	$\sigma$	$\varepsilon_{\min}$	$\varepsilon_{\max}$	$\sigma$
Distancia (mm)	0,0	2,9	<b>0,5</b>	0,8	4,6	<b>0,9</b>
Angular (")	1,3	207,9	<b>41,5</b>	9,4	498,3	<b>98,2</b>

**Tabla 6.23** Análisis de invariantes dimensionales para los observables calibrados

Para el caso de distancias se obtiene una desviación global promedio inferior al milímetro para ambos equipos, lo que mejora los datos del fabricante. La desviación global obtenida para los invariantes angulares difiere bastante de la proporcionada por el fabricante, aunque en el caso angular, la forma de los triángulos condiciona el cómputo en mayor medida que para el caso de las distancias. El número de triángulos empleados en el cálculo de los invariantes espaciales para el sistema láser Trimble han sido los 560 triángulos posibles para un conjunto de 16 puntos, mientras que en el caso del láser Riegl participaron en el cálculo final 214 de los 220 triángulos posibles.

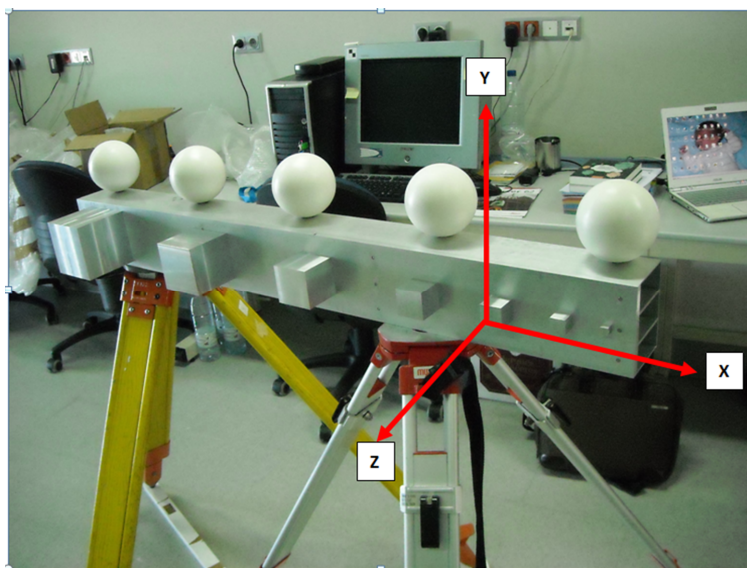
### 6.1.7. Control externo

Los datos resultantes de la calibración láser depararon interesantes resultados, aparte claro está de los propios valores de los parámetros sistemáticos, siendo el más relevante la significación estadística de estos. Este concepto viene a responder la pregunta: ¿debe o no debe considerarse como representativo un parámetro resultante de un ajuste? La respuesta dependerá tanto del valor del parámetro como de su desviación típica asociada. El objeto del control externo que se expondrá en este capítulo servirá para confirmar si los parámetros sistemáticos no significativos (según sus valores de dispersión) son o no relevantes para el ajuste global. Asimismo, otro interesante resultante del proceso de calibración anteriormente mencionado son los valores asociados a los parámetros relacionados con el distanciómetro (factor de escala y offset), los cuales se buscará contrastar y validar.

Con el fin de poder chequear la metodología de calibración expuesta se realizará un contraste metrológico mediante un patrón de calibración diseñado específicamente.

Para estos análisis se compararán nubes de puntos láser sin corregir, corregidas con todos los sistematismos del modelo propuesto y corregidas solamente con los parámetros sistemáticos significativos. Este análisis sólo se llevará a cabo con el láser escáner terrestre Trimble GX, mientras que para el equipo Riegl se realizarán los análisis correspondientes a la nube de puntos láser sin calibrar para validar el estado del láser escáner terrestre Riegl LMS-Z390i.

Para la calibración metrológica se empleará un patrón de bajo coste (Figura 6.25) con trazabilidad hasta la referencia nacional de longitud.



**Figura 6.25 Patrón de calibración**

El patrón, válido tanto para el láser escáner como para fotogrametría, consiste en una viga de aluminio con cinco esferas de poliacetal<sup>25</sup> ensambladas en posiciones equidistantes y siete cubos de diferentes dimensiones mecanizados con un sistema preciso CNC (control numérico por computadora). La masa del patrón es reducida (16,4 Kg) lo que permite su portabilidad. El patrón se apoya en dos trípodes dispuestos en los puntos de Airy<sup>26</sup> para evitar deformaciones por flexión. Los datos referentes a la calibración del patrón están recogidos en la Tabla 6.24. Todas las mediciones fueron realizadas por el Centro Tecnológico AIMEN (Vigo, España) de acuerdo con la norma ISO 17025:2005 acreditado por la ENAC (Entidad Nacional de Acreditación).

Instrumento:	Máquina de medición por coordenadas
Modelo:	EUROC-APEX 12010
Organismo:	AIMEN (esferas) y TF1 (cubos)
Fabricante:	Mitutoyo
Fecha:	25 – Agosto- 2010
Temperatura (°C):	20 ± 2
HR (%):	50 ± 10

**Tabla 6.24 Ficha del patrón de calibración del láser escáner**

Las esferas presentan un diámetro nominal de 100 milímetros. Se emplean esferas en vez de tarjetas bidimensionales porque presentan una geometría más favorable para transferir la trazabilidad desde tecnologías más exactas, como las máquinas de medida por coordenadas. Estas máquinas realizan medidas geométricas de la

<sup>25</sup> Material plástico caracterizado por su rigidez, resistencia a la fatiga, a la fluencia, a la abrasión y baja absorción de humedad (Vincent et al., 2006). También se le conoce por su nombre comercial: Delrin®.

<sup>26</sup> Para minimizar los errores de medición en un elemento dispuesto horizontalmente con dos puntos de apoyo, dichos puntos de apoyo deben estar separados  $\approx 5/9$  la longitud del elemento.



superficie de las esferas mediante una *touch probe* o palpador para obtener su centro. La precisión obtenida por estos sistemas es de 10  $\mu\text{m}$  para longitudes de 1 metro, si se emplean procedimientos estrictos de medida (entorno controlado, sobreabundancia de datos,...). Las coordenadas del centro de las esferas han sido obtenidas mediante un ajuste por mínimos cuadrados de 9 puntos en la superficie (Tabla 6.25). Las distancias referidas en dicha tabla están especificadas con respecto a la primera esfera (n°1).

	Centro (m)			Radio (m)	Distancia (m)	Precisión (m)
	Xo	Yo	Zo			
<b>Esfera 1</b>	0,000000	0,000000	0,000000	0,049982	0,000000	0,000084
<b>Esfera 2</b>	0,250200	0,000223	-0,000068	0,049979	0,250200	0,000076
<b>Esfera 3</b>	0,500143	0,000125	-0,000031	0,049984	0,500143	0,000142
<b>Esfera 4</b>	0,750270	0,000154	-0,000080	0,049978	0,750270	0,000076
<b>Esfera 5</b>	1,000395	0,000035	0,000060	0,049996	1,000395	0,000060

**Tabla 6.25** Coordenadas de los centros de las esferas y radio

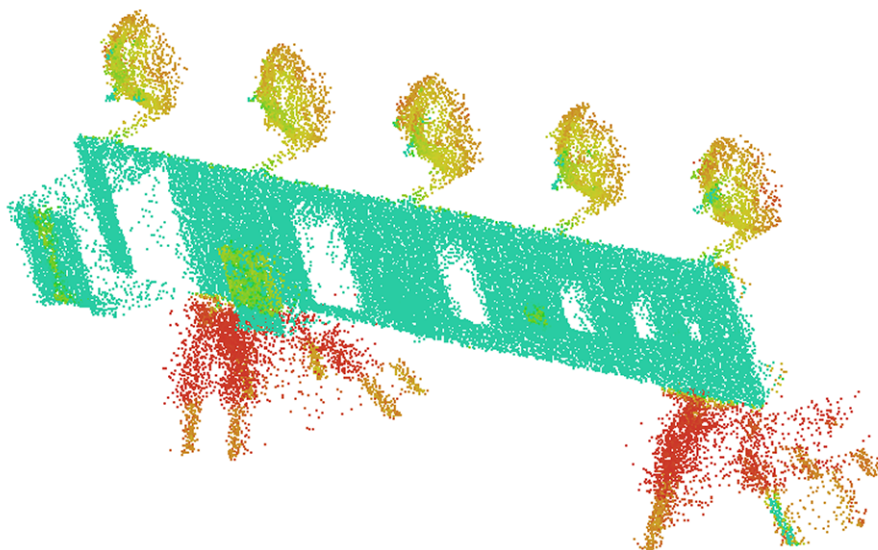
Los tamaños nominales de los cubos (expresados según la longitud del lado) son 100mm, 80mm, 60mm, 40mm, 30mm, 20mm y 10mm. Sus dimensiones fueron medidas en base a 10 puntos tomados con un pie de rey o calibre (Tabla 6.26).

	$d_x$ (m)	$d_y$ (m)	$d_z$ (m)	Precisión lado (m)
<b>Cubo 1</b>	0,10003	0,10007	0,10002	0,00002
<b>Cubo 2</b>	0,08000	0,08005	0,07998	0,00002
<b>Cubo 3</b>	0,06002	0,06001	0,05998	0,00002
<b>Cubo 4</b>	0,03998	0,04003	0,04004	0,00002
<b>Cubo 5</b>	0,03005	0,03000	0,03001	0,00002
<b>Cubo 6</b>	0,02002	0,01997	0,02001	0,00002
<b>Cubo 7</b>	0,01003	0,01001	0,00999	0,00002

**Tabla 6.26** Dimensiones de los cubos del patrón

Donde  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$  son la dimensión del lateral del cubo en la dirección  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente.

Los invariantes espaciales dados por las esferas y cubos, los cuales han sido obtenidas mediante un proceso metrológico de muy alta precisión actuarán como verdad terreno. Se emplean, por ejemplo, distancias entre esferas y no las coordenadas de sus centros, para desligar los análisis del marco de referencia elegido en cada caso. Para los cubos se usará su profundidad o longitud del lado según la normal a la viga de calibración, por similares razones.



**Figura 6.26 Vista isométrica del patrón metrológico (Trimble GX a 60 metros)**

Para obtener el invariante espacial de distancia entre esferas, es necesario extraer las coordenadas del centro de las esferas recogidas en la nube de puntos. Para que el análisis sea riguroso se extraerán los centros de las esferas mediante un ajuste de MMCC apoyado en el estimador robusto de RANSAC (Fischler y Bolles, 1981) para la ecuación de una esfera de radio conocido. Recordemos que el radio de la esfera es un dato conocido de la calibración metrológica. La ecuación de una esfera es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (6.13)$$

Como el modelo es no lineal, es necesario realizar un ajuste iterativo, al que se le proveerán de aproximaciones iniciales de  $(x_0, y_0, z_0)$ .

La matriz de diseño (**A**) y de términos independientes (**L**) utilizadas es:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 \cdot (x_i - x_0) & -2 \cdot (y_i - y_0) & -2 \cdot (z_i - z_0) \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 - r_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

En el proceso de RANSAC, el criterio de votación de los inliers<sup>27</sup> es la distancia punto-esfera, dada por la fórmula:

$$d_{p-e} = \sqrt{(x_p - (x_0)_i)^2 + (y_p - (y_0)_i)^2 + (z_p - (z_0)_i)^2} - r_0 \quad (6.15)$$

Donde  $(x_p, y_p, z_p)$  son las coordenadas de un punto de la población. Recordar que el radio de la esfera es constante para cada juego  $i$ -ésimo de parámetros de la esfera.

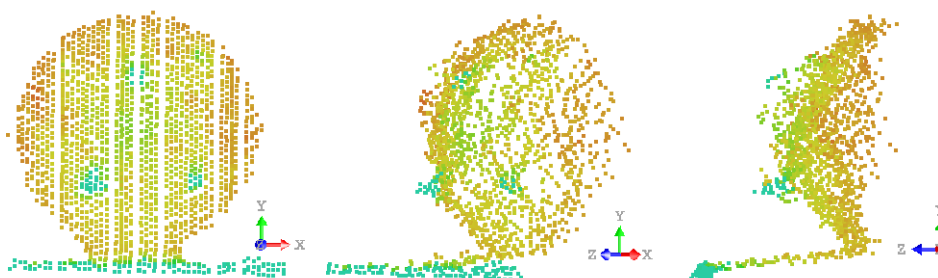
Los parámetros de control de RANSAC serán fijos para todos los casos de estudio, a saber:

<sup>27</sup> Elementos que verifican una determinada condición. En el caso de la estimación de RANSAC son puntos localizados dentro de un umbral pre-establecido.

- Número máximo iteraciones = 5000
- Umbral inliers (distancia ortogonal) =  $\pm 2$  mm
- Tamaño de las muestras en cada iteración = 10 puntos

Una vez el sistema de votación de RANSAC devuelve el juego de coordenadas que ha sido verificado por el mayor número de inliers, se usará ese subconjunto de inliers para recalcular mediante MMCC las coordenadas finales del centro de la esfera, usando el sistema de ecuaciones de (6.14).

La necesidad de emplear RANSAC radica en que las esferas están provistas de una serie de marcas en su superficie, tanto para ser empleadas en procesos fotogramétricos, como para servir de referencia de las máquinas CNC. Dichas marcas o señales de puntería, son altamente reflectantes dando lugar a retornos erróneos, es decir, ruido. Este ruido tiene la forma de picos que sobresalen sobre la superficie ideal de la esfera (Figura 6.27), por lo que un ajuste solitario de mínimos cuadrados se vería sesgado por dichos errores groseros.



**Figura 6.27** Diferentes vistas de la nube de puntos correspondiente a una esfera (Trimble GX a 60 metros)

Las nubes de puntos láser se han capturado a la mayor resolución posible (ver Tabla 6.27) con cada equipo y según los parámetros disponibles con el software de captura: angular para el Riegl y espacial para el Trimble.

Modelo	D (m)	Resolución escaneo	Nº ptos
Trimble GX	30	2mm a 30 m	55052
	60	2mm a 60 m	48644
	120	3mm a 120m	33965
Riegl LMS-Z390i	30	0,002° = 1mm a 30m	251011
	60	0,002° = 2mm a 60m	80675

**Tabla 6.27** Parámetros de escaneos láser para ambos equipos

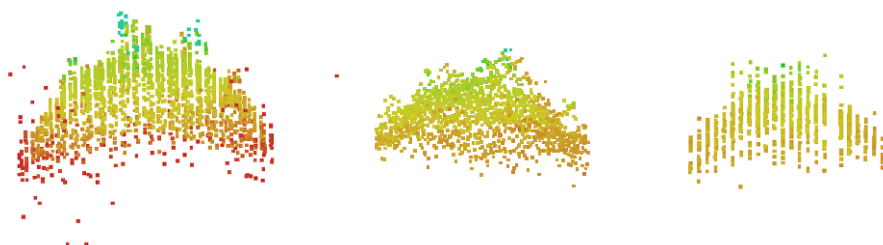
Para evaluar tanto la exactitud del láser escáner terrestre, como la validez de los parámetros de calibración obtenidos anteriormente, se realizarán tres ajustes diferentes:

- Nube de puntos láser original.
- Nube original corregida con todos los parámetros de calibración.
- Nube original corregida solamente con los parámetros estadísticamente significativos.

Los resultados del ajuste mínimos cuadrados apoyados en el estimador robusto de RANSAC, de los cuales se realizaron 11 cálculos diferentes, se listan en el apéndice A. La razón de emplear varias repeticiones del algoritmo, es que al ser el

estimador de RANSAC un sistema basado en aleatoriedad, el resultado final dependerá de la semilla inicial y los subconjuntos elegidos.

Desde la Tabla A.1 hasta la Tabla A.9 se listan las coordenadas de las esferas extraídas para el láser escáner terrestre Trimble GX. En la Tabla A.10 y Tabla A.11 se listan las correspondientes al láser escáner terrestre Riegl, sólo para la nube original sin corregir.



**Figura 6.28** Vista cenital de la esfera n°2 del sistema Trimble GX para 30m (izquierda), 60m (centro) y 120m (derecha)

A partir de las coordenadas extraídas de las esferas se puede calcular sencillamente la distancia. Considerando que para caso se han obtenido, mediante un ajuste basado en técnica aleatoria, 11 juegos de posiciones 3D, se calcularán las distancias entre todas las esferas, obteniéndose 121 distancias posibles. Para los casos anteriormente reseñados, se listan los errores entre la distancia calculada y la nominal (calibrada por metrología) desde la Tabla A.12 a la Tabla A.20 para el Trimble GX y en la Tabla A.21 y la Tabla A.22 para el Riegl LMS-Z390i a distancias de 30 y 60 m respectivamente.

A partir de los datos metrológicos de fabricación de las esferas (Tabla 6.25) se obtienen fácilmente los invariantes de distancia entre ellas (Tabla 6.28) que serán utilizados en el proceso de análisis.

	$D_{1-2}$	$D_{2-3}$	$D_{3-4}$	$D_{4-5}$
Distancia calibrada	250,200	249,943	250,127	250,125

**Tabla 6.28** Invariantes espaciales calibrados por métodos metrológicos

A partir de los errores de las 121 combinaciones de distancia entre esferas se puede caracterizar dicha muestra mediante los indicadores estadísticos de media y desviación típica, así como el rango de valores extremos.



**Figura 6.29** Los sistemas láser Trimble y Rieg objeto de estudio dispuestos para la toma de datos

Para una distancia de 30 metros, la distribución de los errores del láser escáner terrestre Trimble GX son inferiores a 1mm para cualquiera de los cuatro invariantes. En la Figura 6.30 se aprecia como los histogramas del error en distancia están distribuidos de forma diferente según esté corregida la nube de puntos o no. Concretamente para el invariante espacial  $D(1-2)$ , la nube original presenta una distribución de doble pico en un rango de 0,5mm, mientras que al corregir con todos los parámetros significativos los errores disminuyen y se agrupan entorno a un máximo, aunque no está claramente definido. No obstante, cuando se utilizan todos los parámetros estadísticos se aprecia como la distribución de los errores se aproxima más a una distribución normal, o gaussiana. Para el invariante  $D(2-3)$  se obtiene una mejor distribución en el caso de los parámetros significativos, aunque con todos los sistematismos se produce una mejora respecto al caso original. Para el invariante  $D(3-4)$  la mejora en la exactitud de los datos se consigue solamente cuando se corrige la nube de puntos con todos los sistematismos. Finalmente en el último invariante,  $D(4-5)$ , no se consigue mejorar los datos iniciales con ninguna de las dos correcciones, esto es debido a que al corregir la nube de puntos aparece una distribución con dos máximos locales diferenciados. La causa de las distribuciones bimodales es la alta presencia de outliers/ruido en la nube de puntos, lo que provoca sesgos en el ajuste.

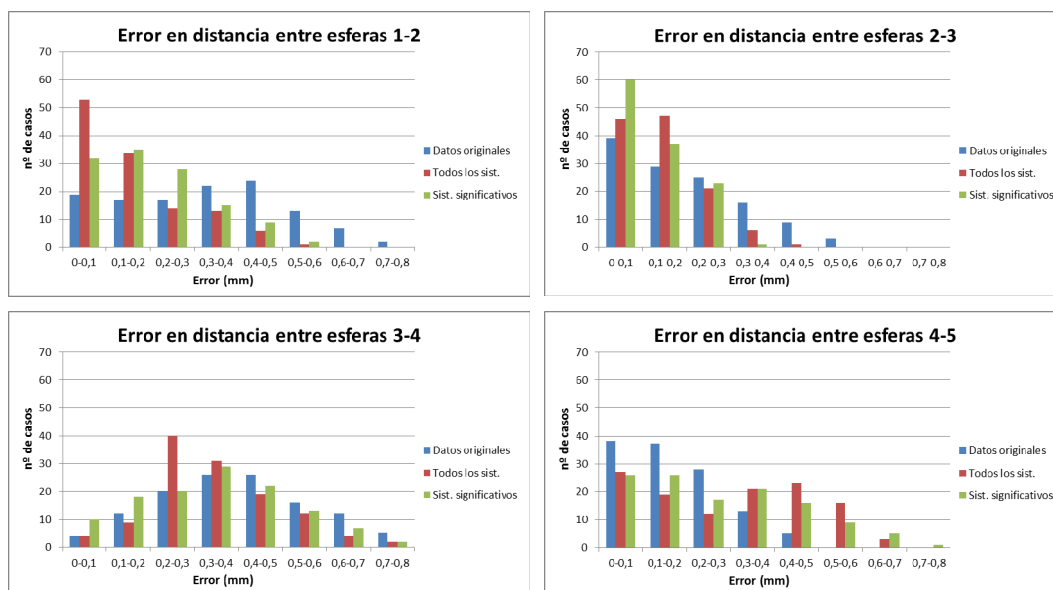


Figura 6.30 Histogramas del error en distancia ( $D=30m$ ) para el láser Trimble GX

Los datos expresados gráficamente en la figura anterior pueden resumirse mediante los indicadores estadísticos de la Tabla 6.29. En dicha tabla se puede apreciar como los datos corregidos mejoran con respecto a la nube original en tres de los cuatro casos. La mejora se produce en el caso del valor medio del error, en su dispersión (desviación típica) y en su valor máximo.

Es necesario recordar que las esferas están provistas de una serie de marcas de puntería, que permiten que el patrón pueda ser empleado tanto en topografía clásica como fotogrametría, las cuales dan lugar a picos en la respuesta radiométrica, y por consiguiente generando fuentes adicionales de error en la nube de puntos (ruido).

		$\epsilon D_{1-2}$	$\epsilon D_{2-3}$	$\epsilon D_{3-4}$	$\epsilon D_{4-5}$
Nube original	Media	0,326	0,195	0,397	0,171
	Desviación	0,186	0,140	0,169	0,116
	Máximo	0,758	0,575	0,776	0,491
	Mínimo	0,004	0,000	0,032	0,002
Nube corregida con todos los sistematismos	Media	0,154	0,138	0,343	0,289
	Desviación	0,128	0,090	0,143	0,185
	Máximo	0,516	0,428	0,716	0,636
	Mínimo	0,004	0,000	0,003	0,003
Nube corregida sólo con los sistematismos significativos	Media	0,194	0,121	0,345	0,270
	Desviación	0,133	0,081	0,169	0,182
	Máximo	0,530	0,320	0,733	0,729
	Mínimo	0,002	0,005	0,006	0,002

Tabla 6.29 Resumen de errores en distancia ( $D=30m$ ) entre esferas para el láser Trimble GX

Al ampliar la distancia entre el láser escáner terrestre y el patrón de calibración hasta los 60 metros, se aprecia como salvo para un caso del invariante  $D(1-2)$  los errores se mantienen por debajo de 1 milímetro. En el caso de dicho invariante los tres casos de estudio presentan un sesgo significativo, que desplaza el valor

promedio de la distribución de error hasta los 2mm. En el invariante  $D(2-3)$  los datos extraídos de la nube original presentan un histograma sin máximo bien definido, siendo básicamente una meseta durante la mayor parte del intervalo (hasta los 0,8mm). La aplicación de los sistematismos más significativos no llega a modificar la distribución de los errores sensiblemente. No obstante, en el caso de aplicar la corrección con todos los sistematismos se aprecia como los errores tienden a agruparse más cerca del cero. Esta mejora en los histogramas también se da en los otros invariantes,  $D(3-4)$  y  $D(4-5)$ , aunque no llegan a ser tan pronunciados comparados con la distancia de 30 metros.

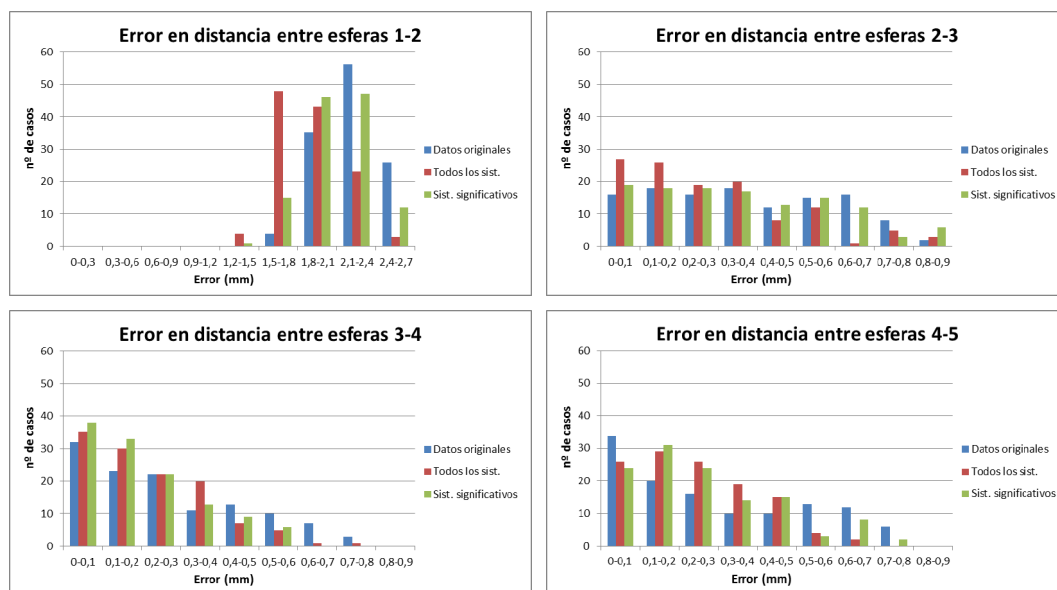


Figura 6.31 Histogramas del error en distancia  $D=60m$  para el láser Trimble GX

Siguiendo un análisis análogo al caso anterior ( $D=30m$ ), los datos recogidos gráficamente en la Figura 6.31 se detallarán en la tabla siguiente (Tabla 6.30) mediante sus indicadores estadísticos. Primeramente se observa como en todos los casos la aplicación de sistematismos (en sus dos variantes aquí consideradas) reduce el valor del error de la nube original, mejoras que rondan el 20%. Los valores de dispersión de los errores también mejoran, aunque no tan claramente como con la media, llegando a presentar un ligero empeoramiento en el caso el primer invariante considerado,  $D(1-2)$ , aunque cabe recordar que dicho caso presentaba un comportamiento diferente del resto de invariantes.

Sobre la consideración sobre si es más adecuado corregir la nube de puntos láser con todos los sistematismos o solamente con los más significativos, según los datos de la Tabla 6.30, para el caso concreto de 60 metros de alejamiento, se puede comprobar como de forma general, la corrección con todos los parámetros sistemáticos produce mejores resultados, o a están a la par.

		$\epsilon_{D_{1-2}}$	$\epsilon_{D_{2-3}}$	$\epsilon_{D_{3-4}}$	$\epsilon_{D_{4-5}}$
Nube original	Media	2,206	0,380	0,268	0,298
	Desviación	0,215	0,226	0,202	0,234
	Máximo	2,565	0,840	0,798	0,788
	Mínimo	1,709	0,007	0,002	0,000
Nube corregida con	Media	1,876	0,280	0,208	0,237

todos los sistematismos	Desviación	0,247	0,211	0,153	0,152
	Máximo	2,532	0,895	0,718	0,608
	Mínimo	1,399	0,002	0,005	0,002
Nube corregida sólo con los sistematismos significativos	Media	2,080	0,355	0,198	0,261
	Desviación	0,247	0,231	0,151	0,186
	Máximo	2,599	0,875	0,586	0,767
	Mínimo	1,470	0,003	0,001	0,001

Tabla 6.30 Resumen de errores en distancia ( $D=60m$ ) entre esferas para el láser Trimble GX

Finalizando el análisis en distancia correspondiente al sistema láser Trimble, consideraremos una separación de 120 metros con respecto a la viga de calibración. Este caso particular tiene por objeto determinar hasta que distancia pierden validez los parámetros sistemáticos obtenidos en las secciones anteriores. Esto es muy relevante en tanto el campo indoor de calibración era de dimensiones reducidas (10 metros) en comparación con los alcances máximos del láser.

Una inspección de la Figura 6.32 pone de manifiesto, en primer lugar, la degradación de la exactitud con la distancia, ya que los valores de error alcanzan valores medios de 2-3mm con picos de hasta 5mm. En segundo lugar, se aprecia que ninguna de las dos soluciones propuestas de sistematismos (todos o sólo los significativos) no destacan con respecto a los valores de error procedentes de la nube de puntos láser original.

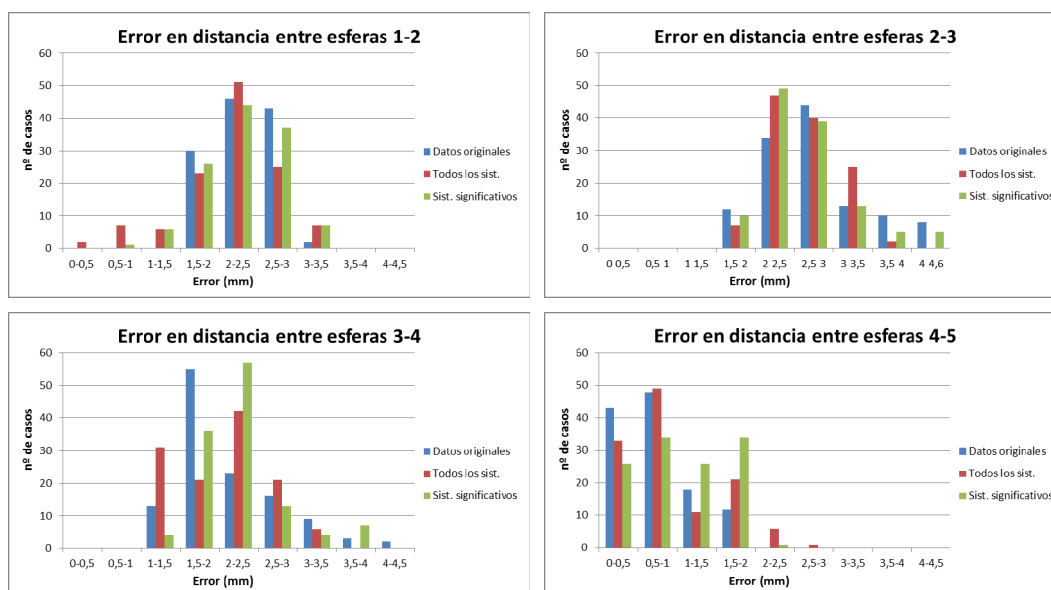


Figura 6.32 Histogramas del error en distancia ( $D=120m$ ) para el láser Trimble GX

Salvo para el invariante de distancia  $D(4-5)$  en los tres restantes la solución con todos los sistematismos reduce el valor medio del error. Aquí hay que destacar que para este invariante en concreto, el valor promedio del error es sensiblemente menor al del resto en al menos un milímetro. Con respecto a la dispersión de los errores no hay claridad sobre cuál de los tres casos produce los mejores resultados; factor que para distancias más cortas sí daba lugar a manifiestas diferencias. Y finalmente con respecto a los valores máximos, si bien tampoco hay un caso claramente mejor que el resto, se puede comprobar que la nube de



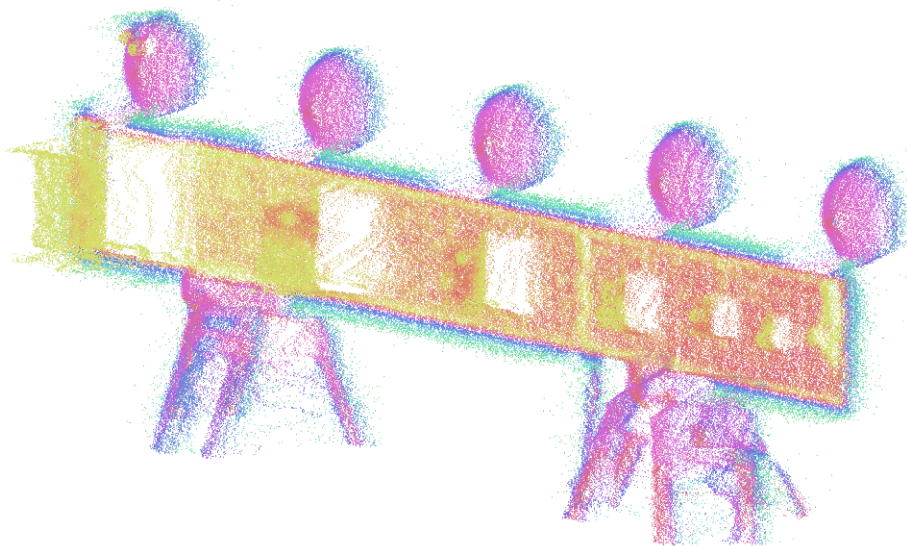
puntos corregida sólo con los parámetros significativos en ninguno de los cuatro casos logra una mayor reducción del error máximo.

		$\epsilon D_{1,2}$	$\epsilon D_{2,3}$	$\epsilon D_{3,4}$	$\epsilon D_{4,5}$
Nube original	Media	2,322	2,765	2,099	0,738
	Desviación	0,372	0,645	0,652	0,481
	Máximo	3,115	4,557	4,121	1,987
	Mínimo	1,620	1,875	1,313	0,016
Nube corregida con todos los sistematismos	Media	2,167	2,625	2,056	0,901
	Desviación	0,613	0,434	0,562	0,622
	Máximo	3,281	3,806	3,337	2,570
	Mínimo	0,264	1,712	1,017	0,036
Nube corregida sólo con los sistematismos significativos	Media	2,265	2,657	2,252	1,047
	Desviación	0,456	0,555	0,558	0,558
	Máximo	3,308	4,509	3,927	2,019
	Mínimo	0,990	1,646	1,299	0,012

**Tabla 6.31 Resumen de errores en distancia (D=120m) entre esferas para el láser Trimble GX**

En el caso del láser escáner terrestre Riegl LMS-Z390i, se aplicará un análisis similar al realizado para el láser Trimble GX pero centrado exclusivamente en la nube de puntos láser original. Otra peculiaridad es que solamente se dispone de escaneos a dos distancias: 30 y 60 metros, aunque son suficientes para realizar el contraste de datos con las especificaciones del fabricante.

Incluso antes de comenzar el análisis de los invariantes, un rápida inspección de la nube de puntos (Figura 6.33) pone de manifiesto la peor calidad a priori del ajuste, al tener la nube de puntos una muy elevada presencia de ruido. En este caso la combinación de segmentación manual y ajuste basado en un estimador robusto minimizará la influencia del ruido en los resultados finales.



**Figura 6.33 Vista isométrica de la nube de puntos laser del Riegl LMS-Z390i a 30 metros**

En primer lugar, para un alejamiento de 30 metros se aprecia una distribución de los errores, entre la distancia calibrada y la obtenida de la nube láser, próxima a una gaussiana con la salvedad de que el invariante  $D(2-3)$  presenta un sesgo apreciable en su valor medio. Para este rango de distancias relativamente pequeñas, el error se tiende a contener por debajo del milímetro.

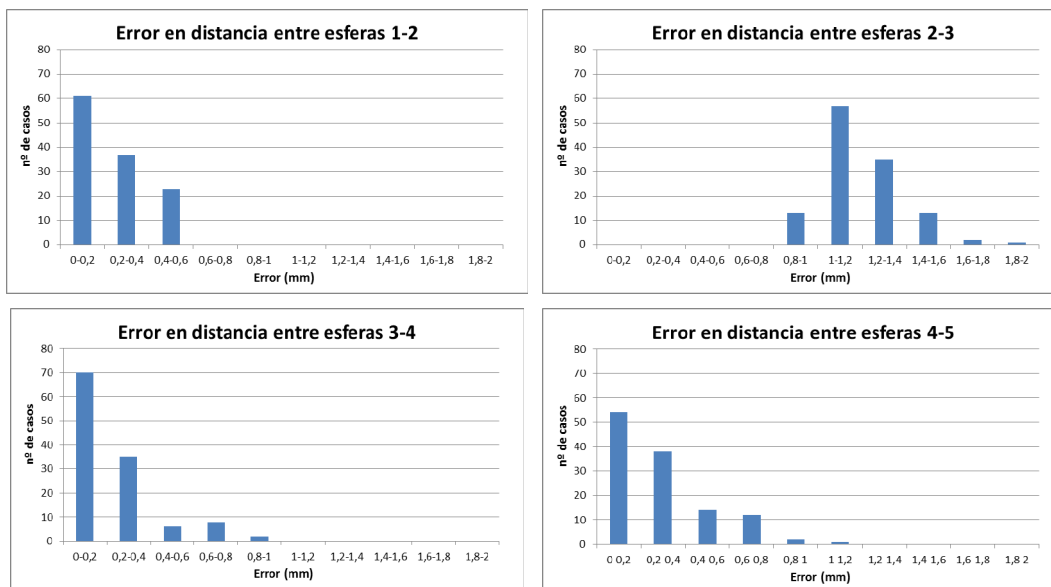


Figura 6.34 Histogramas del error en distancia (D=30m) para el láser Riegl

La representación numérica de la figura anterior en la Tabla 6.32 depara una alta exactitud para el TLS Riegl LMS-z390i a corta distancia. Además, si para el invariante  $D(2-3)$  sustrajésemos de los parámetros estadísticas el sesgo presente, su valor promedio y error máximo estarían en concordancia con el resto de invariantes. Esta aseveración se puede apreciar en el valor de dispersión de los errores (desviación típica) el cual es muy similar al del resto.

		$\epsilon D_{1-2}$	$\epsilon D_{2-3}$	$\epsilon D_{3-4}$	$\epsilon D_{4-5}$
Nube original	Media	0,216	1,197	0,222	0,279
	Desviación	0,163	0,182	0,197	0,220
	Máximo	0,562	1,805	0,841	1,026
	Mínimo	0,002	0,906	0,006	0,001

Tabla 6.32 Resumen de errores en distancia (D=30m) entre esferas para el láser Riegl

Al doblar la separación del láser terrestre con la viga de calibración se aprecia cómo se mantiene la distribución gaussiana de los errores (Figura 6.35). Igual que en el caso anterior, un invariante espacial, concretamente el  $D(4-5)$ , presenta un comportamiento anómalo ya que el valor medio de su error es de varios milímetros inferior al del resto.

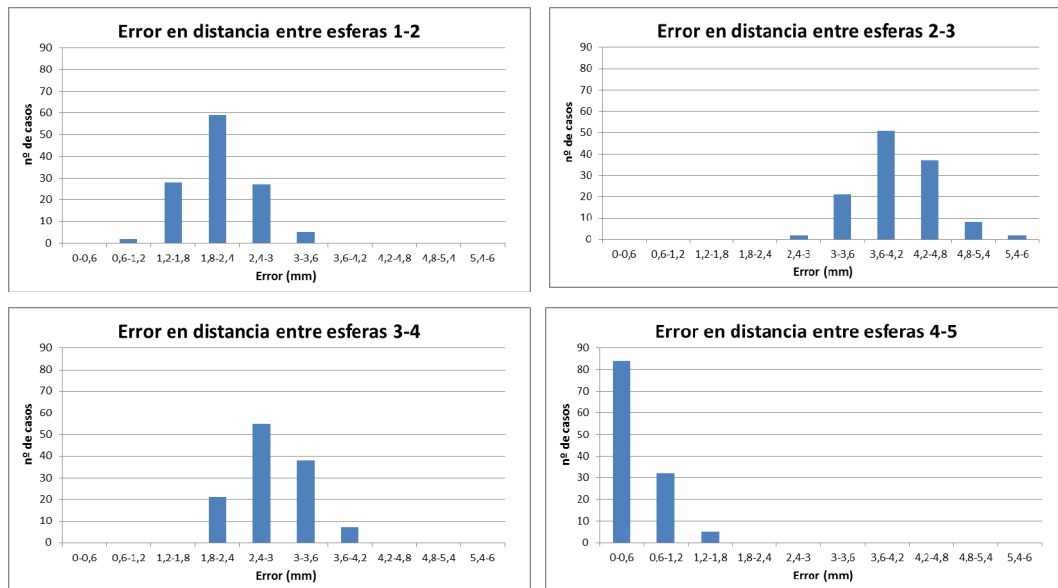


Figura 6.35 Histogramas del error en distancia (D=60m) para el láser Riegl

Este análisis al igual que el anterior sólo se realiza sobre la nube puntos láser original por lo que, aparte de la forma de la distribución, un análisis más exhaustivo ha de realizarse sobre los parámetros estadísticos de dichos histogramas (Tabla 6.33). Para 60 metros se comienza a apreciar una manifiesta degradación de la exactitud por parte del láser Riegl LMS-Z390i sobre todo si se compara con su homólogo Trimble GX (Tabla 6.30). Este empeoramiento de la exactitud es manifiesto en todos los parámetros estadísticos expuestos en la tabla siguiente: media, desviación típica y valor máximo del error. Incluso los valores mínimos se alejan sensiblemente del valor cero, al contrario que con el láser Trimble GX.

Otra prueba de la degradación de la exactitud son las elevadas variaciones del promedio del error entre los diferentes invariantes de distancia considerados. Esto tiene lugar debido a que al tener peor exactitud el láser, la nube de puntos resultante está peor definida, ergo la extracción de entidades geométricas se verá afectada, trasmitiéndose dicha degradación a los invariantes espaciales, los cuales son los elementos objeto de estudio.

		$\epsilon_{D_{1-2}}$	$\epsilon_{D_{2-3}}$	$\epsilon_{D_{3-4}}$	$\epsilon_{D_{4-5}}$
Nube original	Media	2,113	4,082	2,848	0,433
	Desviación	0,479	0,541	0,471	0,333
	Máximo	3,400	5,512	4,133	1,334
	Mínimo	1,033	2,861	1,819	0,012

Tabla 6.33 Resumen de errores en distancia (D=60m) entre esferas para el láser Riegl LMS-Z390i

Mediante las fórmulas de la desviación típica a priori según la ecuación (3.24) y los datos del fabricante (Tabla 6.1 y Tabla 6.2) se puede obtener el error total ( $e_T$ ) de cada láser escáner terrestre para diferentes distancias

Distancia	$e_T$	
	Trimble GX	Riegl LMS-Z390i
10 m	1,69 mm	6,13 mm
30 m	3,16 mm	6,83 mm
50 m	4,93 mm	8,10 mm
60 m	5,90 mm	9,72 mm
100 m	9,79 mm	16,21 mm
120 m	11,73 mm	19,45 mm

Tabla 6.34 Desviaciones a priori ( $e_T$ ) de los sistemas láser considerados para diferentes distancias

Antes de proceder a un análisis más detallado de todos los casos considerados anteriormente, se analizará previamente la exactitud en los invariantes de distancias entre esferas para los cinco casos de distancias y equipos (Figura 6.36). Asimismo, se podrá comparar el láser Riegl LMS-Z390i con el láser Trimble GX, ya que del primero sólo se disponen de datos sin corrección.

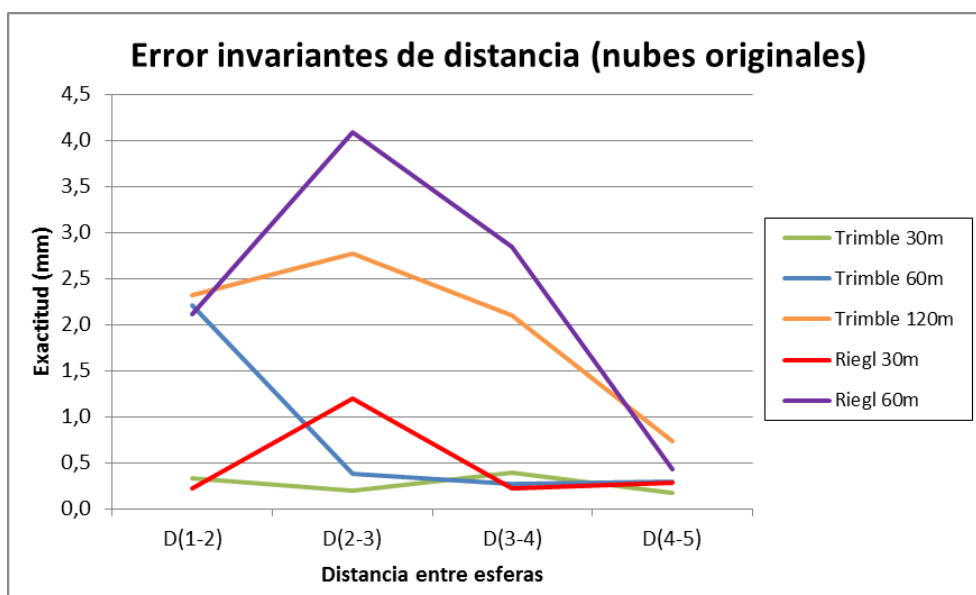
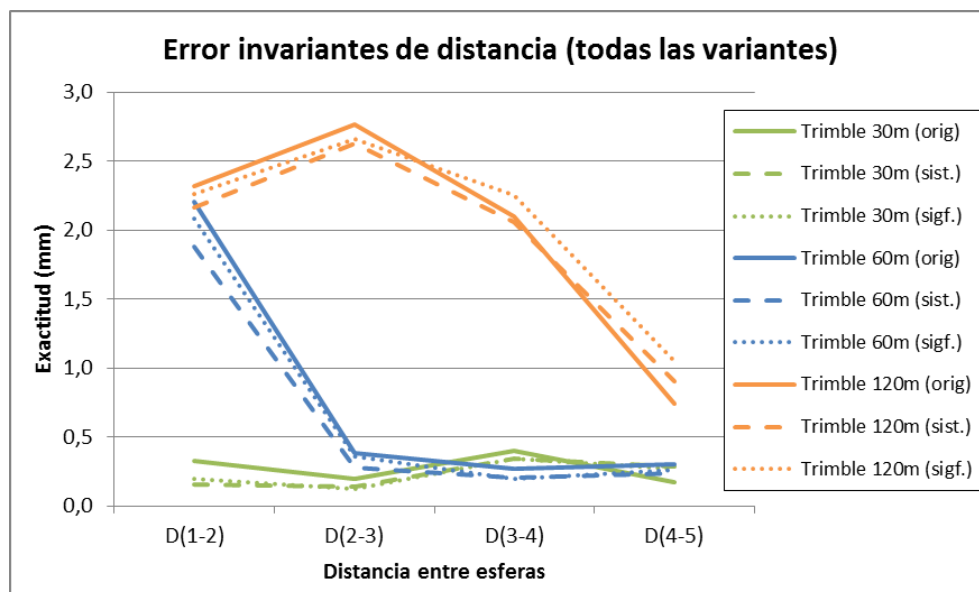


Figura 6.36 Exactitud en la determinación de los invariantes en distancia de las nubes originales

A 30 metros la nube original de Trimble presenta un grado de exactitud (inferior a 0,5mm) mucho mejor que la precisión del fabricante (3,16mm). Este grado de exactitud se mantiene cercano al obtenido con la nube a 60 metros, salvo por del invariante  $D(1-2)$  que presenta un grado discordante con el resto. Al aumentar el alejamiento hasta los 120 metros se aprecia un empeoramiento de la exactitud en todos los invariantes, rondando el valor medio de los 2 milímetros.

Con respecto al láser Riegl, a pesar del ruido presente en la nube, los valores de exactitud se posicionan próximos a los del Trimble para la misma distancia. No obstante, al doblar la distancia (60m) los errores se disparan superando incluso a los de Trimble para la máxima distancia considerada (120m). Mediante esta figura se puede comprobar la rápida degradación de la exactitud del láser Riegl LMS-Z390i, principalmente causada por la amplia divergencia del distanciómetro y su baja precisión a priori.

Ya con los dos casos de sistematismos incluidos se obtiene la Figura 6.37, donde se representan los resultados correspondientes a corregir la nube con todos los sistematismos (línea discontinua) y los propios tras corregir utilizando únicamente los parámetros significativos (línea punteada).

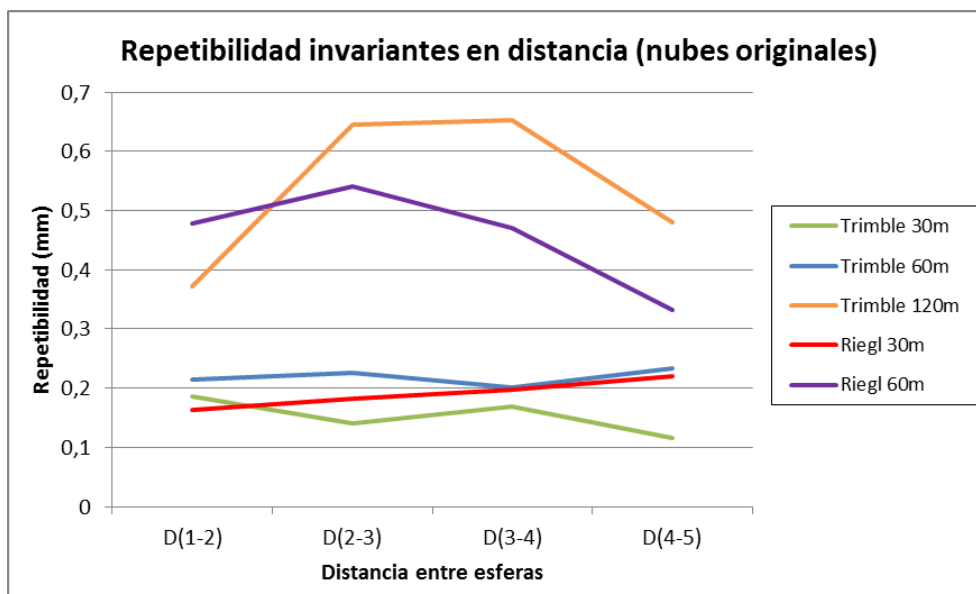


**Figura 6.37 Exactitud en la determinación de los invariantes en distancia. Todas las variantes**

Con una visión global de los valores de exactitud para los casos de corrección de sistematismos, se puede apreciar como las correcciones de sistematismo mejoran los valores de exactitud de la nube original, manteniendo la tendencia general. Asimismo se comprueba gráficamente como las nubes corregidas con todos los sistematismos obtienen mejores resultados, hecho comprobado con los valores numéricos recogidos en las tablas anteriores.

Pasando al caso de la repetibilidad<sup>28</sup>, y siguiendo el análisis anterior se comenzará con los datos correspondientes únicamente a las nubes de puntos láser originales.

<sup>28</sup> Consultar la introducción del Capítulo 3 para información sobre los términos metrología.



**Figura 6.38** Repetibilidad en la determinación de los invariantes en distancia de las nubes de puntos originales

En la Figura 6.38 se viene a presentar la dispersión, desviación típica o repetibilidad en la determinación de los invariante espaciales en distancia analizados. No confundir con la desviación asociada al ajuste de las esferas el cual vendrá determinado (en cota máxima) por el umbral del proceso de RANSAC, y que rondaba de forma general el milímetro. Como se ha expuesto se representa la dispersión asociada a la distribución de combinación de distancias obtenidas (121 muestras), razón por la cual los valores presentan una magnitud bastante reducida.

Al igual que en la Figura 6.36 los invariantes asociados al láser Trimble GX n las distancia de 30 y 60 metros, así como el láser Riegl LMS-Z390i a 30 metros, presentan un comportamiento similar en la repetibilidad. No obstante, la repetibilidad del láser Riegl a 60 metros es ligeramente menor que la correspondiente al láser Trimble a 120 metros, siendo ambas del orden de dos a tres veces peor que el resto de los casos.

En los casos particulares de sistematismos considerados se certifica en la Figura 6.39 que según los parámetros de repetibilidad para el láser Trimble GX a 30 y 60 metros, las correcciones con todos los sistematismos mejoran los valores correspondientes a las nubes sin corregir, salvo en un único invariante. A 120 metros con el láser Trimble GX no se aprecia con claridad cuál de los tres ajustes genera el mejor resultado, aunque al aplicarse los sistematismos significativos dan lugar a unos valores de repetibilidad bastante más estables.

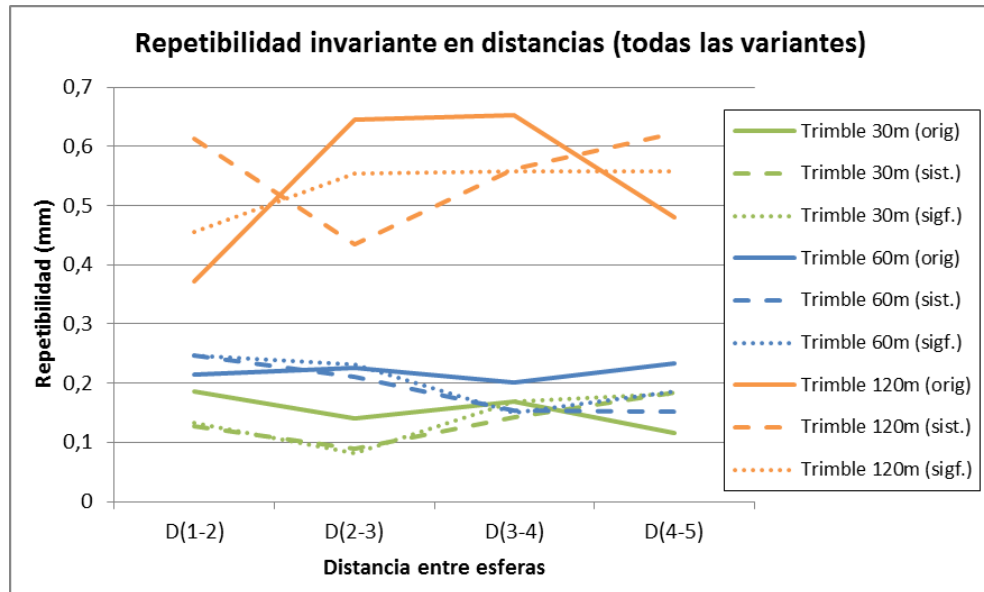


Figura 6.39 Repetibilidad en la determinación de los invariantes (todas las variantes)

Como se comentó al principio de la sección, además de los invariantes de distancia entre esferas, para contrastar la exactitud del láser escáner terrestre se hará uso de una serie de  **cubos**  dispuestos en el patrón de calibración. En el caso de una figura geométrica simple, como es un cubo, su invariante no será la separación entre ellos dada la dificultad para obtener su centroide; si no que será la longitud de sus lados.

Aparentemente, y dado que los escaneo están confrontados con las caras de los cubos, podría parecer que el método más adecuado para obtener la longitud del lado de cubo sería medir el ancho y alto de su cara frontal. Este acercamiento no es válido en tanto que debido a la divergencia del haz láser, los saltos geométricos de profundidad entre el frontal del cubo y el soporte de calibración dan lugar a puntos intermedios. Estos son causados por la doble señal de retorno láser al impactar el área del spot láser sobre dos superficies con diferente profundidad. En la Figura 6.40 se puede apreciar esta falta de definición de los bordes.

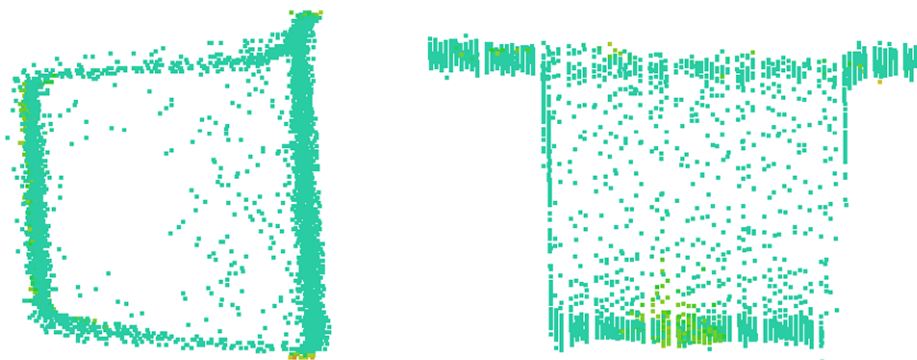


Figura 6.40 Vista lateral (izquierda) y superior (derecha) del cubo de 100mm del patrón de calibración

Así que puesto que la indefinición de los bordes de la cara frontal de los cubos no permite una extracción adecuada de sus dimensiones mediante las herramientas de

medición tridimensional se aplicará otro acercamiento. Concretamente, se analizará la profundidad del cubo, es decir, la separación entre el soporte de aluminio del patrón y la cara frontal del cubo. De esta forma se obtiene el parámetro básico del cubo, longitud del lado.

Para obtener este invariante, se procederá a segmentar las zonas de interés: soporte de aluminio y caras frontales de los cubos para su posterior análisis. Primeramente se ajustará un plano al soporte, el cual dado su extensión (1,2 m x 0,12 m) permitirá disponer de suficientes puntos como para realizar un ajuste con garantías. En (6.16) se pueden ver las ecuaciones de los dos planos (frontal del cubo y del soporte), y la determinación de la distancia entre ellos. Obviamente el proceso de determinación del plano será un problema sobredeterminado, por lo tanto se aplicará un ajuste mínimo cuadrático.

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &\equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \Pi_2 &\equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

$$d_{\Pi_1-\Pi_2} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Si se diese el caso de que ambos planos no fuesen rigurosamente paralelos, factor ineludible por el propio método de captura, se evaluará la distancia como la longitud desde el centroide del plano del cubo hasta el plano del soporte de aluminio, medida según el vector normal de este último.

Los valores de referencia o valores calibrados de los cubos considerados se obtienen a partir de los datos de calibración del patrón (Tabla 6.26):

Cubo 1	Cubo 2	Cubo 3	Cubo 4	Cubo 5	Cubo 6	Cubo 7
100,02 mm	79,98 mm	59,98 mm	40,04 mm	30,01 mm	20,01 mm	9,99 mm

Tabla 6.35 Distancias calibradas de la longitud de los cubos

De forma adicional, y para tener elementos extra de comprobación, se definirá un sistema local de coordenadas de origen arbitrario, pero con su eje Z coincidente con la normal al plano de la viga anteriormente definido. De esta manera cuando se ajusten los planos individuales de los cubos se podrá comprobar fácilmente si estos son paralelos o no a la base. El ángulo ( $\alpha$ ) entre dos vectores unitarios correspondientes a ambos planos ( $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ) se puede obtener con la sencilla fórmula:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}\right) \quad (6.17)$$

Igual que en el caso de las esferas, se procederá a analizar primeramente los datos correspondientes al láser escáner Trimble GX y seguidamente los del láser escáner Riegl LMS-Z390i. En ambos casos se procederá a contrastar los datos desde la distancia más reducida (30 metros) hasta la mayor disponible en cada caso.

En la Tabla 6.36 se muestran primeramente el valor de la dispersión o desviación típica ( $\sigma$ ) del ajuste del plano del soporte, así como el número de puntos utilizados en el ajuste del plano. En el resto de la tabla se listan los mismos parámetros correspondientes para las caras frontales de los siete cubos del patrón, junto con el



vector normal de dicho plano y el valor de profundidad o longitud del lado según el eje Z.

	$\sigma$	Nº ptos	Vector normal (respecto al plano local del soporte)			Ángulo(°)	$d_z(\text{mm})$
<b>Plano soporte</b>	2,57 mm	23022	-	-	-	-	-
<b>Cubo 1</b>	4,87 mm	1444	0,0376	-0,0035	0,9993	2,1641	<b>102,49</b>
<b>Cubo 2</b>	3,03 mm	835	0,0200	-0,0562	0,9982	3,4199	<b>79,12</b>
<b>Cubo 3</b>	1,45 mm	741	0,0279	0,0100	0,9996	1,6983	<b>58,78</b>
<b>Cubo 4</b>	2,27 mm	149	0,0306	-0,1142	0,9930	6,7898	<b>40,72</b>
<b>Cubo 5</b>	1,49 mm	164	-0,0217	-0,0115	0,9997	1,4073	<b>28,81</b>
<b>Cubo 6</b>	2,80 mm	60	0,0305	0,0390	0,9988	2,8378	<b>21,33</b>
<b>Cubo 7</b>	3,66 mm	31	0,0104	0,2079	0,9781	12,0145	<b>9,72</b>

**Tabla 6.36** Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Trimble GX para una distancia de 30m

Los discrepantes valores de los cubos 1, 2 y 4 se deben a que la superficie de la cara frontal no es continua, es decir, presenta un hueco rodeado de puntos clasificables como ruido (Figura 6.41). Esta discontinuidad se debe a la combinación de varios factores: alta reflectividad del material de fabricación de los cubos; reducida separación entre el láser y el objeto (30 metros); láser dispuesto perpendicularmente con el objeto, y a factores ambientales (rayos solares en dicha zona).



**Figura 6.41** Vista de perfil de un cubo "roto" por la alta reflectividad (nº2 de 80mm) con el láser Trimble GX a 30 metros

En estos casos, es necesaria una segmentación manual de mayor detalle, a fin de evitar que los puntos ruidosos entren en el ajuste del plano. A pesar de ello los planos resultantes presentan un ajuste ligeramente peor a la del resto de cubos no afectados.

Aparte de ajustar el plano sobre la superficie correspondiente para obtener la longitud del lado (invariante objeto de estudio), también se puede comprobar el grado de ajuste de dicho plano en función de su vector normal. Si el ángulo entre dicho vector y la normal al plano del soporte, es distinto de  $0^\circ$  se incumpliría un parámetro del propio soporte: ortogonalidad entre los cubos y el soporte de aluminio. La razón de la discrepancia se debe a razones similares a las que

producen la indefinición de los cubos: el ruido de la nube de puntos por la precisión implícita del sistema de medida. Además, al reducir el tamaño del cubo, la preponderancia del ruido con respecto a su profundidad dificulta la definición de la propia cara frontal. De ahí que al reducirse el tamaño del cubo el valor del ángulo entre la normal del plano ajustado y su dirección ideal tienda a aumentar. No obstante, en la Tabla 6.36 se aprecia un comportamiento anómalo del cubo nº4 (40mm) cuyo ángulo es claramente superior al de sus adyacentes; siendo la causa la mencionada anteriormente en la Figura 6.41: el frontal presenta un hueco y en su alrededor los puntos divergen, pero al tener una superficie menor a la de los otros dos afectados (cubos nº1 y nº2) restan pocos puntos que no hayan sido afectados por dicho efecto.

Para la nube de puntos obtenida con el láser Trimble GX a una distancia de 60 metros, el plano correspondiente al soporte se puede obtener con buena precisión, ya que se disponen más de 23000 puntos tras segmentar la zona en cuestión. En este caso los planos ajustados si presentan un mayor grado de paralelismo, desbordándose sólo para los cubos de menores dimensiones (20 y 10mm). La mayor discrepancia con respecto a los valores calibrados se corresponde al cubo más pequeño, hecho que es esperado a priori en el análisis.

	$\sigma$	Nº ptos	Vector normal (respecto al plano local del soporte)			Ángulo(°)	d <sub>z</sub> (mm)
<b>Plano soporte</b>	1,79 mm	23725	-	-	-	-	-
<b>Cubo 1</b>	1,60 mm	2037	0,0074	-0,0091	0,9999	0,6721	<b>100,59</b>
<b>Cubo 2</b>	1,88 mm	1329	0,0113	-0,0212	0,9997	1,3766	<b>79,79</b>
<b>Cubo 3</b>	2,45 mm	688	-0,0094	-0,0319	0,9994	1,9059	<b>58,73</b>
<b>Cubo 4</b>	1,60 mm	232	-0,0004	-0,0540	0,9985	3,0957	<b>39,44</b>
<b>Cubo 5</b>	3,29 mm	180	0,0144	0,0236	0,9996	1,5842	<b>27,55</b>
<b>Cubo 6</b>	1,63 mm	51	0,1008	-0,0665	0,9927	6,9358	<b>18,08</b>
<b>Cubo 7</b>	0,61 mm	6	-0,0551	0,5701	0,8197	34,9435	<b>7,69</b>

**Tabla 6.37** Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Trimble GX a una distancia de 60m

Al doblar la distancia hasta los 120 metros disminuye la densidad de puntos disponibles para realizar el ajuste (Tabla 6.38). Además para estos rangos la degradación de la precisión hace que el ruido sea preponderante, dificultando la definición del propio plano. Este factor puede verse reflejado en la falta de paralelismo entre planos, la cual es claramente superior, llegándose a valores superiores a los 15°. La degradación del ajuste se manifiesta tanto en la exactitud de la longitud de los cubos, como en la precisión del plano de ajuste mediante mínimos cuadrados.

	$\sigma$	Nº ptos	Vector normal (respecto al plano local del soporte)			Ángulo(°)	d <sub>z</sub> (mm)
<b>Plano soporte</b>	1,72 mm	17377	-	-	-	-	-
<b>Cubo 1</b>	3,20 mm	1142	0,0189	-0,0463	0,9987	2,8666	<b>98,52</b>
<b>Cubo 2</b>	4,06 mm	891	0,0015	-0,1448	0,9895	8,3258	<b>75,77</b>
<b>Cubo 3</b>	3,26 mm	237	-0,0021	-0,0810	0,9967	4,6477	<b>56,33</b>
<b>Cubo 4</b>	4,20 mm	127	-0,0188	-0,3105	0,9504	18,1234	<b>33,42</b>

<b>Cubo 5</b>	2,74 mm	79	-0,1045	-0,0440	0,9936	6,5102	<b>25,18</b>
<b>Cubo 6</b>	1,94 mm	36	-0,0091	-0,0798	0,9968	4,6067	<b>9,10</b>
<b>Cubo 7</b>	-	-	-	-	-	-	-

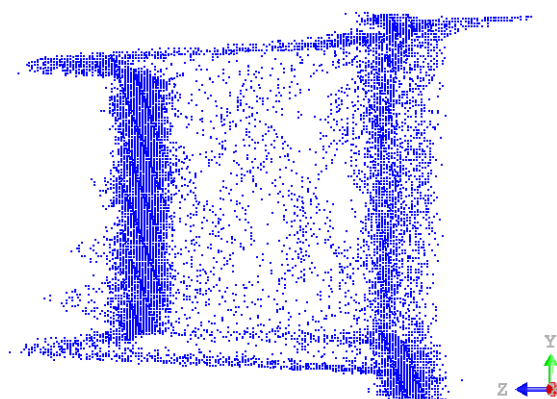
**Tabla 6.38** Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Trimble GX a una distancia de 120m

Al analizar los parámetros resultantes del ajuste de los cubos del láser Riegl (Tabla 6.39), llama la atención en primer lugar los altos valores de desviación típica en el ajuste de los planos en la nube de puntos láser, máxime si se compara con los correspondiente al láser Trimble GX, lo cual indica una pobre definición de los cubos.

	$\sigma$	Nº ptos	Vector normal (respecto al plano local del soporte)			Ángulo(°)	$d_z(\text{mm})$
<b>Plano soporte</b>	3,63 mm	90600	-	-	-	-	-
<b>Cubo 1</b>	4,03 mm	8883	-0,0163	-0,0029	0,9999	0,9486	<b>100,25</b>
<b>Cubo 2</b>	4,13 mm	6186	0,0262	0,0903	0,9956	5,3950	<b>81,45</b>
<b>Cubo 3</b>	3,97 mm	3482	-0,0291	0,0329	0,9990	2,5175	<b>60,53</b>
<b>Cubo 4</b>	4,20 mm	1635	0,0732	0,1270	0,9892	8,4291	<b>43,20</b>
<b>Cubo 5</b>	3,54 mm	720	0,2502	-0,1209	0,9606	16,1339	<b>30,79</b>
<b>Cubo 6</b>	3,84 mm	534	-0,0510	0,1682	0,9844	10,1233	<b>23,54</b>
<b>Cubo 7</b>	2,48 mm	203	0,0293	0,0000	0,9996	1,6790	<b>10,17</b>

**Tabla 6.39** Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Riegl a una distancia de 30m

La nube de puntos resultante del láser Riegl tiene una alta presencia de ruido, (como se vio anteriormente en la Figura 6.33), lo cual afecta negativamente a la definición de la cara frontal de los cubos. A diferencia del láser Trimble el cual presentaba huecos en dicha cara, el láser Riegl presenta picos en los extremos (Figura 6.42). Estos picos se deben a la divergencia del láser, dando lugar a retornos distintos según la diferencia de profundidad, entrando además en juego la alta reflectividad de los cubos del patrón.



**Figura 6.42** Perfil del cubo n°1(100mm) del escaneo del láser Riegl a 30 metros

En estos casos, la segmentación manual se presenta más complicada si se busca excluir el ruido sin reducir significativamente el área de la cara frontal. Además, en la Figura 6.42 se aprecia ruido de morfología similar en otras partes del patrón.

Al aumentar la distancia de análisis hasta los 60 metros, el láser Riegl sufre un empeoramiento ya que, entre otros factores, la densidad de escaneo se reduce a la cuarta parte (Tabla 6.27). De forma que al reducir el número de puntos disponibles, y aumentar el ruido con el incremento de distancia se aprecian las causas de los bajos valores de exactitud de la tabla siguiente.

	$\sigma$	Nº ptos	Vector normal (respecto al plano local del soporte)			Ángulo(°)	d <sub>z</sub> (mm)
<b>Plano soporte</b>	4,27 mm	25607	-	-	-	-	-
<b>Cubo 1</b>	6,67 mm	2535	0,0381	0,0114	0,9992	2,2792	<b>100,89</b>
<b>Cubo 2</b>	8,37 mm	1887	0,0321	0,0837	0,9960	5,1430	<b>76,54</b>
<b>Cubo 3</b>	4,72 mm	1222	-0,0326	0,0120	0,9994	1,9908	<b>58,97</b>
<b>Cubo 4</b>	4,82 mm	494	-0,0771	-0,0962	0,9924	7,0814	<b>36,17</b>
<b>Cubo 5</b>	4,34 mm	441	0,0301	0,0013	0,9995	1,7266	<b>31,58</b>
<b>Cubo 6</b>	1,62 mm	36	-0,1684	0,0898	0,9816	11,0024	<b>15,76</b>
<b>Cubo 7</b>	-	-	-	-	-	-	-

**Tabla 6.40** Parámetros de ajuste de los planos de los cubos para el láser Riegl a una distancia 60m

Con los datos de exactitud de las tablas anteriormente detalladas y con las longitudes de los cubos calibradas (Tabla 6.35) es sencillo conformar la tabla siguiente donde se representa la exactitud de los lados de los cubos. Nótese, que en tanto lo que se busca es analizar la magnitud del error y no su sentido, todos los valores son expresados en términos de valor absoluto.

	Cubo1	Cubo2	Cubo3	Cubo4	Cubo5	Cubo6	Cubo7
<b>Trimble 30</b>	2,47	0,86	1,20	0,68	1,20	1,32	0,27
<b>Trimble 60</b>	0,41	0,58	0,96	0,24	2,74	1,56	3,53
<b>Trimble 120</b>	1,50	4,21	3,65	6,62	4,83	10,91	-
<b>Riegl 30</b>	0,23	1,47	0,55	3,16	0,78	3,53	0,18
<b>Riegl 60</b>	0,87	3,44	1,01	3,87	1,57	4,25	-

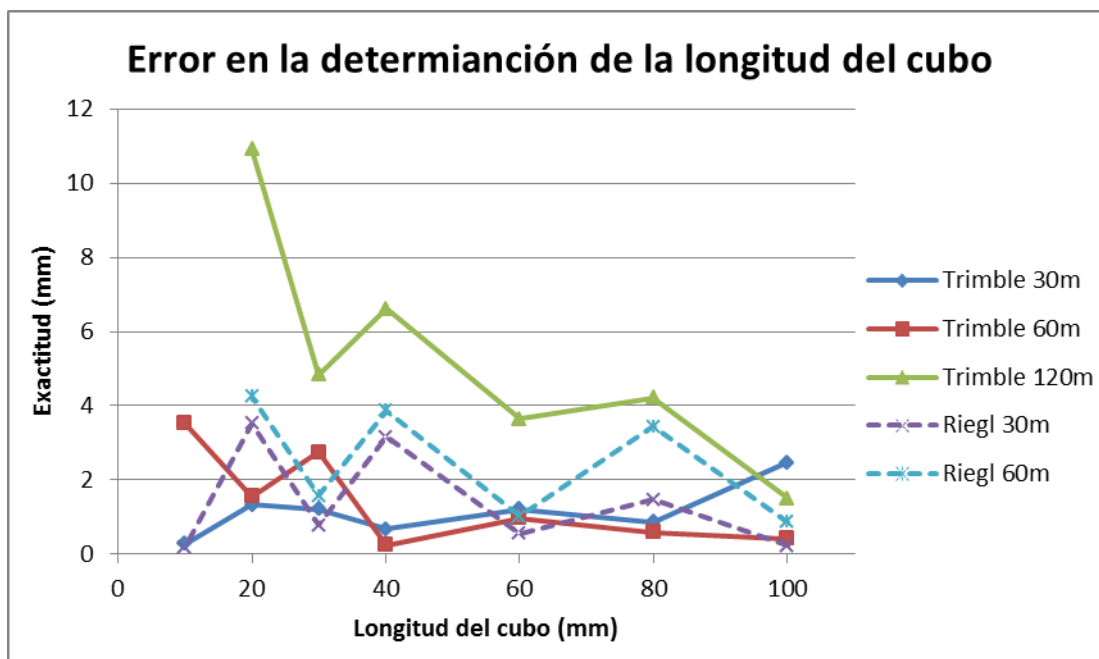
**Tabla 6.41** Errores de la profundidad de los cubos (mm)

La tabla anterior expresa la exactitud en términos absolutos lo cual puede sesgar posteriores análisis, por lo que es necesario analizar la exactitud en términos relativos ya que existe a priori una relación directa entre las dimensiones del cubo y su exactitud, puesto que cuanto más reducido es más ruido está presente en la nube. Por ello en la Tabla 6.42 se representan los valores de error en la longitud de cada cubo (Tabla 6.41) con respecto a la longitud del cubo a determinar.

	Cubo1	Cubo2	Cubo3	Cubo4	Cubo5	Cubo6	Cubo7
<b>Trimble 30</b>	2,47%	1,08%	2,00%	1,70%	4,00%	6,60%	2,70%
<b>Trimble 60</b>	0,41%	0,73%	1,60%	0,60%	9,13%	7,80%	35,34%
<b>Trimble 120</b>	1,50%	5,26%	6,09%	16,53%	16,09%	54,52%	-
<b>Riegl 30</b>	0,23%	1,84%	0,92%	7,89%	2,60%	17,64%	1,80%
<b>Riegl 60</b>	0,87%	4,30%	1,68%	9,67%	5,23%	21,24%	-

**Tabla 6.42** Exactitud en la determinación de la longitud del cubo expresado por el error (porcentual)

No obstante, el mejor análisis para este conjunto de datos es el derivado de su representación gráfica, ya que hay que comparar las diferentes distancias para el mismo equipo, y los equipos disponibles para el mismo alejamiento (Figura 6.43). Con este objeto, seguidamente se presentan los gráficos correspondientes.



**Figura 6.43** Error en la determinación de la longitud del cubo con respecto al tamaño del cubo

Los datos del láser Trimble GX a 30 y 60 metros son similares para los cubos de mayores dimensiones. Recordar que a 30 metros ciertos cubos presentaban ruido debido a la alta reflectancia, empeorando así la exactitud. Al disminuir el tamaño del cubo se ve como empeora la determinación de su longitud con la distancia (60 metros vs. 30 metros). En el Figura 6.43 se aprecia para el láser Trimble a 120m una clara correlación entre el tamaño del cubo y la exactitud en la determinación de su profundidad. Asimismo, la exactitud llega a cotas similares a la precisión especificada por el fabricante: 11,7mm (ver Tabla 6.34).

El láser Riegl LMS-Z390i no presenta una tendencia clara, principalmente dada la presencia de ruido en sus nubes, dando a los resultados un comportamiento más aleatorio. Además, se aprecia una correlación entre los datos de ambas distancias disponibles (30 y 60 metros), lo cual puede deberse a la preponderancia del ruido en la nube de puntos láser en el proceso de ajuste.

Hacer mención que en la Figura 6.43 dos de las cinco series de datos no están completas, en tanto no fue posible determinar el plano de la cara frontal del cubo de menores dimensiones (10mm).

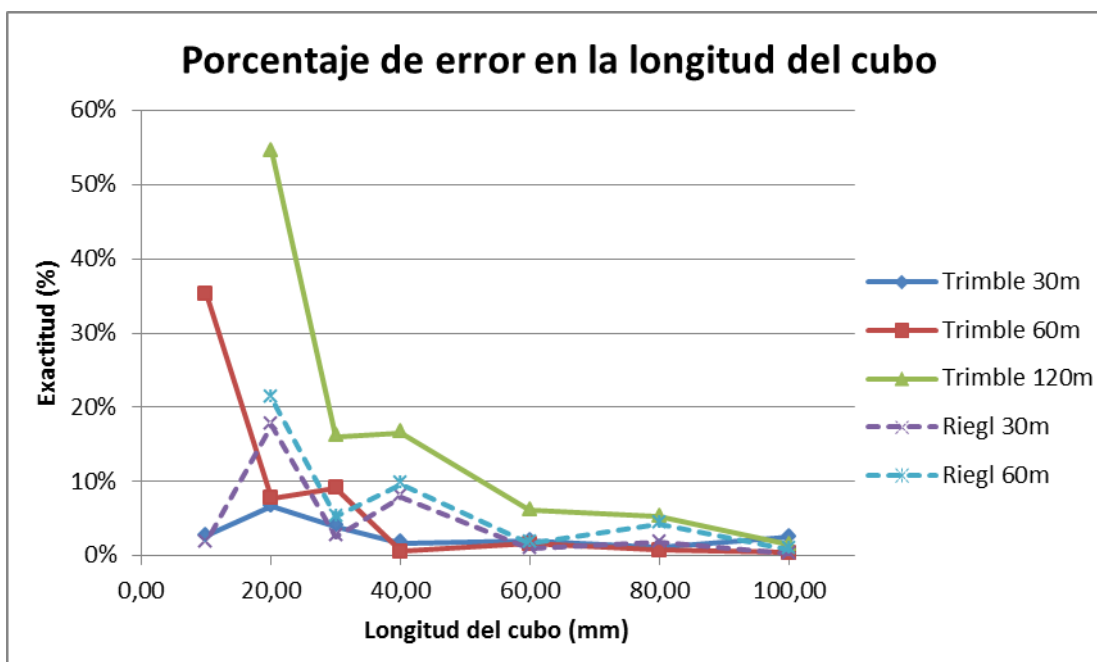


Figura 6.44 Porcentaje de error en la determinación de la longitud del cubo con respecto a su tamaño

En la Figura 6.44 se pueden ver los datos de la Tabla 6.42 que expresan el grado de inexactitud en términos porcentuales, y se puede apreciar como cuando mayor sea el cubo a analizar, menor es la ambigüedad (en términos relativos) asociada a la determinación de su profundidad.

La Figura 6.45 representa la desviación estándar del ajuste de los planos mediante mínimos cuadrados con respecto a la dimensión del cubo en cuestión. Para esta figura se produce la paradoja de que cuanto menor es el cubo analizado, y por tanto más afectado por el ruido del escaneo, mejor es su valor de repetibilidad. Esto se explica por el hecho de que en los cubos más pequeños el número de puntos disponibles para calcular el ajuste es muy reducido, por lo que el valor de la desviación típica asociada al ajuste solamente se obtendrá a partir de ese reducido juego de puntos.

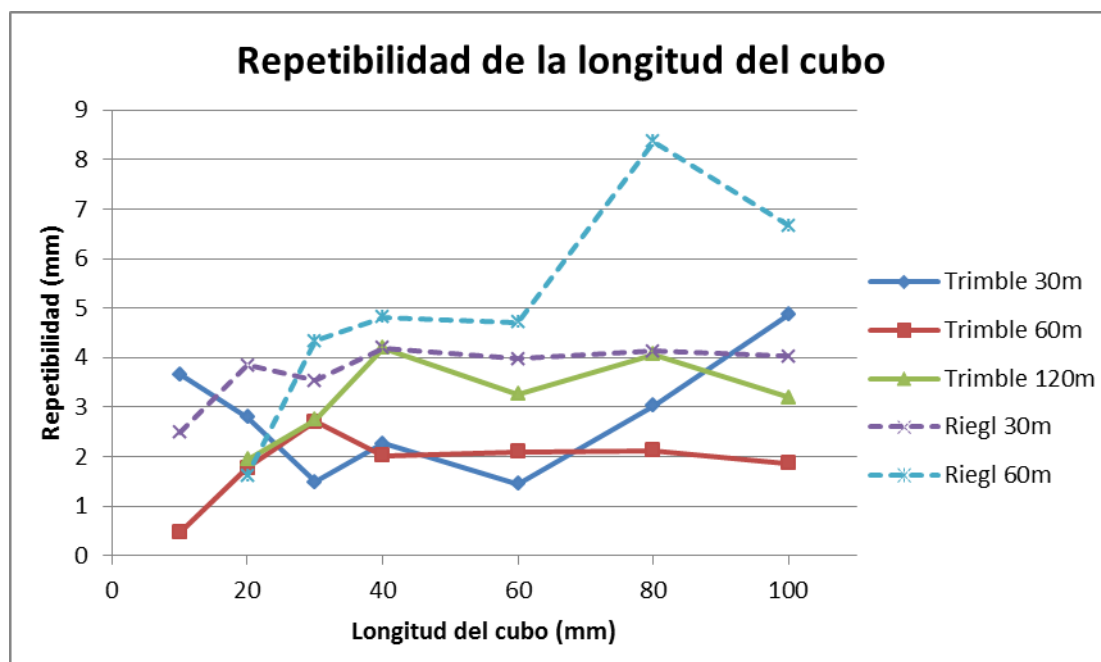


Figura 6.45 Valores de repetibilidad en función de las dimensiones de los cubos

Analizando ya cada caso en particular el láser Trimble GX para  $D=30\text{m}$  presenta una gráfica contraria a lo inicialmente esperado en este tipo de análisis. No obstante, hay que recordar que los cubos n°1, 2 y 4 estaban caracterizados una seria presencia de ruido, causando peores valores de repetibilidad que para otras distancias. El Trimble a 60 metros presenta una repetibilidad muy estable para la mayoría de los cubos. Además este valor de precisión presenta valores del orden de 2mm, cuando la precisión según las especificaciones del fabricante se aproxima a los 6mm (Tabla 6.34). Al aumentar la distancia de análisis hasta los 120 metros se aprecia como empeora la precisión, pero se sigue manteniendo relativamente estable en el intervalo de los 3-4mm. En cualquier caso estos valores son significativamente mejores que los especificados por el fabricante para este rango de distancias (11,73mm a 120m).

Con respecto al láser Riegl el valor de precisión es muy reducido, sobre todo si se compara con el láser Trimble, ya que los valores del Riegl a 30 metros son del orden de los del láser Trimble GX a 120 metros. Pero aun a pesar de estos datos, el valor medio de precisión de 4mm sigue siendo inferior a lo esperado a priori para dicho equipo a 30 metros (6,83mm). También se aprecia una estabilidad en los valores de repetibilidad, los cuales se pueden deber más al rango de actuación del ruido que a las dimensiones de los cubos en cuestión. Finalmente, para el láser Riegl a 60 metros los valores empeoran manifiestamente hasta alcanzar cotas próximas al valor fijado por el fabricante de 9,7mm (Tabla 6.34). Para este rango de distancia el ruido y la degradación de la precisión es demasiado elevada como para deparar un ajuste suficientemente preciso.

## 6.2. Determinación de la distorsión radial con una única imagen

Con el objeto de determinar la precisión, limitaciones y ventajas de la estimación de la distorsión radial mediante la aproximación de una única imagen y a fin de evaluar cuantitativamente dicho acercamiento en esta sección, se emplearán tres subtipos de estudio, según el número de puntos de fuga presentes en la imagen (de uno a tres).

La evaluación y comparación de dicho acercamiento se realizará mediante el contraste de diferentes herramientas, ya sean comerciales o de código abierto, basadas en el ajuste conjunto de múltiples imágenes. Además, en cada caso se utilizará una cámara digital diferente, para mostrar la flexibilidad del acercamiento a partir de una única imagen mediante el software sv3Dvision. Las herramientas software usadas para la comparativa permiten realizar una calibración completa, pero esta sección se centrará únicamente en el valor de la distorsión radial.

Aunque todos los programas utilizan el modelo Gaussiano (3.51) (sección 3.4.2) de la distorsión radial como modelo de referencia, las diferentes estimaciones de la distorsión radial serán normalizadas según el modelo balanceado (3.52), para la misma distancia radial ( $r_0$ ), con el objetivo de poder comparar los resultados.

Software	Tipo	Cámaras	Tipo
Photomodeler®	Comercial	Nikon D70	Réflex
ImageMaster®	Comercial		Canon IXUS 110
Bouguet – Matlab®	Open source	Canon EOS 500D	Réflex
Fauccal – Matlab®	Open source		

**Tabla 6.43 Software y cámaras evaluadas para estimar la distorsión radial**

Las siguientes subsecciones se estructurarán según la tipología de caso elegido para el software sv3Dvision, es decir, para cada una de las cámaras testeadas (Tabla 6.43) se evaluará dicho programa con un tipo de perspectiva diferente, de esta forma con las tres cámaras se recogerán los tres casos perspectivos diferentes (según el número de puntos de fuga presentes). Para cada uno de dichos casos, se validará el resultado del software basado en una única imagen mediante el ajuste en laboratorio del resto de programas.

Mediante esta estructura se persigue validar la herramienta sv3Dvision en diferentes situaciones para comprobar su adaptabilidad a los casos de fusión de sensores, permitiendo obtener imágenes libres de distorsión radial sin necesidad de realizar la calibración en el laboratorio.



### 6.2.1. Imagen con un punto de fuga

El primer caso de estudio para la estimación de la distorsión radial, es también el más desfavorable, al presentar un único punto de fuga, como se expondrá seguidamente.

Para la toma de datos se emplea la cámara digital réflex Canon EOS 500D (Tabla 6.44) equipada con el objetivo que viene de serie con ella, un objetivo normal con zoom (Tabla 6.45).

<b>Canon EOS 500D</b>	
	
Tipo de cámara	Cámara réflex de lentes intercambiables
Tipo de sensor	APS-C CMOS (1,6x FOV crop) (15,5 millones de píxeles totales)
Píxeles efectivos	4752 x 3168 (15,1 millones)
Tamaño del sensor	22,3 x 14,9 mm
Densidad de píxeles	4,5 MP/cm <sup>2</sup>
Sensibilidad	100 – 3200 (equivalente ISO)
Velocidad de disparo	30 - 1/4000 segundos
Formatos de archivo	NEF (14-bit compressed RAW) JPEG (EXIF 2.21)

**Tabla 6.44** Especificaciones técnicas de la cámara Canon 500D (imágenes tomadas de [shop.usa.canon.com](http://shop.usa.canon.com))

Dado que el objetivo es de tipo zoom (longitud focal variable), para el proceso de calibración se trabajará con la menor distancia focal posible, ya que permite la mayor cobertura fotográfica y es más fácil ajustar la posición del anillo que con otras longitudes focales intermedias.

Objetivo Canon EF-S 18-55mm f/3,5-5,6 IS	
	
Longitud Focal	18-55 mm (equivalente 29-88 mm en 35 mm)
Máxima Apertura	f/3,5-5,6
Mínima apertura	f/22-38
Construcción	11 elementos / 9 grupos. 1 lente esférica <sup>29</sup>
Ángulo de visión	74,3°-27,8°
Distancia mínima de enfoque:	0,28 m

**Tabla 6.45** Objetivo empleado conjuntamente con la Canon 500D (imagen tomada de [shop.usa.canon.com](http://shop.usa.canon.com))

Como ya se comentó previamente, el programa sv3Dvision se caracteriza por determinar los componentes de la distorsión radial a partir de una única fotografía. La imagen utilizada es la imagen oblicua de la Figura 6.46, la cual representa un edificio moderno con la presencia de elementos lineales, además de un único punto de fuga correspondiente a la dirección vertical (eje Z).



**Figura 6.46** Imagen con un único punto de fuga. Edificio de IberCaja en Ávila capturado con la Canon EOS 500D – 18mm

Se puede apreciar en la escena, aparte del edificio objeto de estudio, otro edificio en la parte derecha, el cual proveerá datos erróneos en forma de otro punto de

<sup>29</sup> Lente con radio de curvatura variable en contraposición a las lentes esféricas de radio de curvatura constante. Tiene por objeto reducir la aberración esférica, consistente en que rayos paralelos enfoquen en puntos distintos según incidan en el centro o en los extremos de la lente.

fuga (Figura 6.47). Esta información se eliminará mediante los estimadores robustos incorporados en el programa sv3Dvision.



**Figura 6.47** Mini-segmentos extraídos de la imagen mediante el software sv3Dvision

La extracción de los elementos lineales (mini-segmentos y punto de fuga) se fundamenta en los algoritmos de Canny y Burns (vistos en la sección 3.4.3). Como resultado (Figura 6.47) se detectaron 1890 bordes usando una máscara gaussiana de 5x5 píxeles, desviación estándar de 1 píxel y umbrales superior e inferior de 200 y 10 unidades respectivamente.

De todos los bordes detectados se extrajeron 365 mini-segmentos de los cuales 150 fueron clasificados por el programa como pertenecientes a la dirección del punto de fuga en Z. El modelo de funcionamiento expuesto en la sección 3.4.3 utilizará los 365 mini-segmentos para calcular la distorsión radial de la imagen.

	PF <sub>x</sub>		PF <sub>y</sub>		PF <sub>z</sub>	
	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$
x (mm)	$\infty$	-	$\infty$	-	10,712	0,009
y (mm)	$\infty$	-	$\infty$	-	-57,431	0,007

**Tabla 6.46** Datos de los puntos de fuga – Canon 500D y 18mm de focal

Las coordenadas en el plano imagen de los puntos de fuga, son parte del output del sistema sv3dvision, que en este caso en particular están restringidas al único presente en la imagen (Tabla 6.46). Los resultados en la determinación de la distorsión radial mediante dicho programa se presentan en la Tabla 6.47.

	$f_g$ (mm)	$K_1$	$\sigma(K_1)$	$K_2$	$\sigma(K_2)$
<b>Sv3Dvision</b>	19,047	$4,890 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-5}$	$-1,119 \times 10^{-6}$	$3,2 \times 10^{-7}$

**Tabla 6.47** Resultados distorsión radial mediante sv3dvision

La segunda etapa en la comprobación es obtener los valores que servirán para la comparación, es decir, los correspondientes a la calibración en laboratorio con las diferentes herramientas software mencionadas previamente (Tabla 6.43).

Primeramente se comenzará con las herramientas libres de código abierto, Faucal y Bouquet, las cuales además comparten patrón de calibración. El proceso de

calibración con Faucal está altamente automatizado en el aspecto de detección y correspondencia de los puntos de interés de la malla. Esto puede considerarse como una ventaja, pero restringe la intervención del usuario en dicha etapa pudiendo generar un problema. Un ejemplo sería cuando las fotos de entrada de la calibración son muy oblicuas, dificultando así la identificación de los puntos de interés; el programa no habilita la intervención de usuario para corregir los posibles errores de identificación, sino que finaliza el proceso y lanza un escueto mensaje de error que obliga al usuario a deducir que imagen o imágenes son las problemáticas para excluir y volver a repetir el proceso.

El protocolo de toma de imágenes para la calibración con Faucal se estableció en nueve imágenes convergentes con el centro del patrón, dispuestas como una matriz 3x3. Los resultados del proceso se listan en la Tabla 6.48.

		Valor	$\sigma$
<b>Número de observaciones</b>		1958	
<b>Incógnitas</b>		63	
<b>Grados de libertad</b>		1895	
<b>Puntos de enlace</b>		142	
<b>Focal</b>	$f_x$	3928,595 pix	0,793 pix
	$f_y$	3928,436 pix	0,771 pix
<b>Punto principal</b>	$x_p$	-0,833 pix	0,860 pix
	$y_p$	20,718 pix	0,695 pix
<b>'Skewness'</b>	$sk$	-0,000106	0,000034
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$-1,115 \times 10^{-8}$	$4,19 \times 10^{-11}$
	$k_2$	$6,357 \times 10^{-16}$	$9,43 \times 10^{-18}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$2,991 \times 10^{-7}$	$1,29 \times 10^{-8}$
	$p_2$	$7,201 \times 10^{-8}$	$1,10 \times 10^{-8}$
		<b>0,387 pix</b>	

Tabla 6.48 Resultados de la calibración con Faucal

El parámetro skewness ( $sk$ ) representa la falta de ortogonalidad entre los ejes, aunque no está dado en términos angulares, sino en forma de coeficiente para su incorporación directa a la ecuación del modelo de la condición de colinealidad (3.73) implementada por Faucal. La distancia principal o focal ( $f$ ) está expresada según los ejes coordenados  $X$  e  $Y$ , por lo que será necesario determinar el valor más probable de la focal como promedio de dichos valores.

Un indicador general del ajuste es el término  $\sigma$  ó de precisión proporcionado por el propio programa. Es interesante destacar que su valor está expresado en unidades píxel, ergo el ajuste realizado tiene precisión subpíxel.

El otro software libre utilizado es Bouguet, que al igual que Faucal, funciona bajo la plataforma Matlab®. A diferencia del anterior, este programa permite mayor interacción al usuario, aunque en otros aspectos tiene baja automatización. Respecto a esto último, llama la atención la necesidad de que para cada imagen tomada el usuario marque los límites del patrón de calibración, y si la imagen tiene bastante perspectiva le indique el número de tesela que conforman el patrón

según los ejes  $X$  e  $Y$ . El programa una vez tiene identificados los límites del patrón realiza la búsqueda del punto de interés (intersección de dos teselas negras) en las ubicaciones probables, es decir, el proceso no es exhaustivo.

Una vez identificadas las características, existe la opción de refinarlas, indicando una ventana de búsqueda en el entorno próximo del valor actual del punto de interés. Además, si se ha realiza una primera etapa de calibración, los parámetros de distorsión se tienen en cuenta en el refinamiento de los puntos característicos.

		Valor	$3\sigma$
<b>Focal</b>	$f_x$	3932,0294 pix	4,08578 pix
	$f_y$	3931,7856 pix	3,98029 pix
<b>Punto principal</b>	$x_p$	2370,7607 pix	4,41122 pix
	$y_p$	1569,6983 pix	3,52657 pix
<b>Distorsión</b>	$kc_1$	-0,16549	0,00309
	$kc_2$	0,13794	0,00897
	$kc_3$	0,00008	0,00022
	$kc_4$	0,00111	0,00027
	$kc_5$	0,00000	0,00000
<b>Error imagen</b>	$3\sigma_x$	0,87273 pix	
	$3\sigma_y$	0,79863 pix	
	$3\sigma$	<b>1,18299 pix</b>	

Tabla 6.49 Resultados tras realizar la calibración con el programa Bouguet

Nótese que los resultados del proceso de calibración con Bouguet dan los valores de precisión de los parámetros para un nivel de confianza del 99,73%, en comparación de los propiamente correspondientes a  $\sigma$  que serán del 68,27%. Teniendo en cuenta este factor, la precisión final del ajuste también alcanza el rango subpíxel.

Además de los valores finales de la calibración, el software Bouguet proporciona información complementaria sobre el ajuste final, siendo la más interesante la relativa al gráfico del error de reproyección (Figura 6.48), la cual no sólo sirve para chequear el valor promedio del ajuste, sino que muestra el grado de dispersión de los puntos intervinientes en el ajuste. En el caso de la calibración correspondiente a la cámara Canon EOS 500D, se aprecia un distribución agrupada de errores, en torno al valor cero.

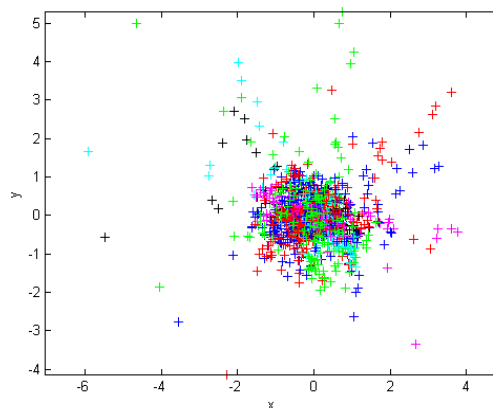


Figura 6.48 Error de reproyección de los puntos de la calibración con Bouguet

No obstante, y gracias a la propia estructuración del código y a que es abierto, se puede consultar los valores de los residuos y reinterpretarlos de forma diferente a la proporcionada por el programa (Figura 6.48). Concretamente, se genera un histograma de la componente cuadrática del error de reproyección en ambos ejes.

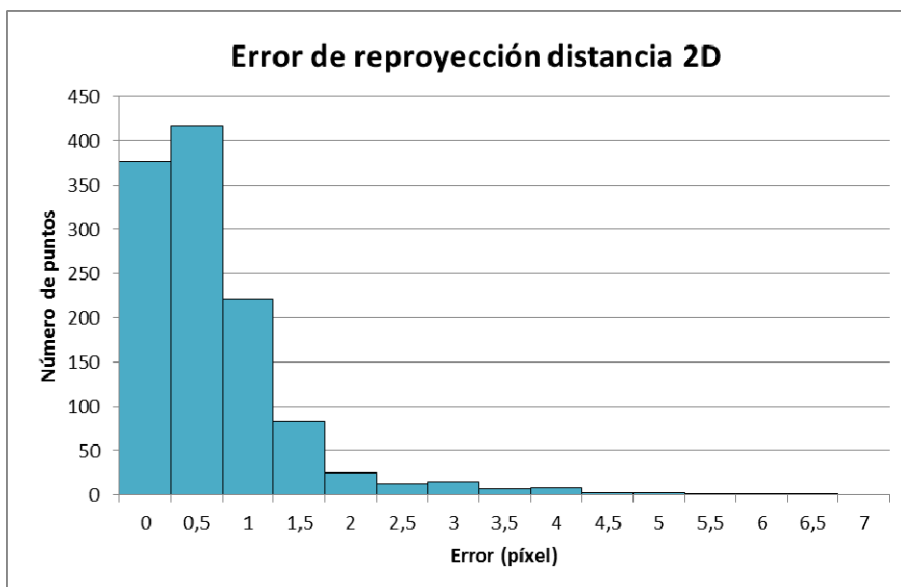


Figura 6.49 Histograma del error 2D de reproyección

En Figura 6.49 se aprecian los valores de precisión listados en la Tabla 6.49, donde tres veces la precisión del ajuste es cercana al píxel unidad.

La calibración con el programa comercial Photomodeler® tiene un protocolo más cerrado, ya que restringe el número de tomas al intervalo de 6 – 12 fotografías capturadas en posiciones predefinidas. También el proceso de detección de puntos de interés es cerrado, en tanto y si el programa no puede identificar las cuatro marcas de control, desecha la fotografía del proceso.

Como indicador de la idoneidad de la calibración, el programa requiere al usuario que en las imágenes el patrón cubra más del 80% de la superficie capturada. En la Tabla 6.50 se listan los resultados de la calibración de la cámara tratada en esta sub-sección.

	Valor	$\sigma$
Imágenes usadas	11/12	
Superficie	78 %	
Error medio cuadrático (pix)	<b>0,261</b>	
Residuo máximo (pix)	0,576	
<b>Focal</b>	$f$	18,68958 mm
<b>Punto principal</b>	$x_p$	11,22123 mm
	$y_p$	7,45537 mm
<b>Ancho sensor</b>	$F_w$	22,60333 mm
<b>Alto sensor</b>	$F_h$	5,9 x10 <sup>-4</sup> mm
		-

<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$5,183 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-6}$
	$k_2$	$-1,113 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-8}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$-1,772 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{-6}$
	$p_2$	$8,263 \times 10^{-6}$	$1,4 \times 10^{-6}$

Tabla 6.50 Resultados finales de la calibración con Photomodeler®

A parte de la comprobación de que el proceso tenga precisión subpíxel, es también indicador útil el valor máximo de los residuos, ya que indica si en algún momento se rebasa el límite de un píxel en el ajuste.

Por último, se obtienen los valores de referencia de distorsión con el software comercial ImageMaster®. Este programa, al igual que el comercial anterior, tiene una metodología de toma fotográfica cerrada, consistente en tomar 5 imágenes de un patrón específico, según una serie de posiciones predefinidas. El procesamiento está completamente automatizado y el usuario no interviene en ninguna de las fases.

		<i>Valor</i>	$\sigma$
<b>Residuos imagen (pix)</b>		<b>0,126</b>	
<b>Residuos de las coordenadas 3D (mm)</b>	$X$	0,1691	
	$Y$	0,4213	
	$Z$	0,8521	
	3D	<b>0,4808</b>	
<b>Focal</b>	$f$	18,05455 mm	
<b>Punto principal</b>	$x_p$	10,92145 mm	
	$y_p$	7,36399 mm	
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$5,810 \times 10^{-4}$	$8,9 \times 10^{-7}$
	$k_2$	$-1,497 \times 10^{-6}$	$6,2 \times 10^{-9}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$1,402 \times 10^{-5}$	$4,7 \times 10^{-6}$
	$p_2$	$4,512 \times 10^{-5}$	$3,3 \times 10^{-6}$

Tabla 6.51 Resultados de la calibración de la Canon 500D con ImageMaster®

En la Tabla 6.51 se listan dos valores diferentes indicadores de la precisión de la calibración: uno de ellos, al igual que en el resto de software, es la desviación de los residuos en coordenadas imagen; la otra variable, es la precisión en las coordenadas terreno, según las componentes de los tres ejes del sistema y su composición tridimensional. Estos últimos valores se pueden obtener ya que las dimensiones de la plantilla son conocidas por parte del programa (según el tamaño estandarizado de la hoja impresa).

Los diferentes valores de distorsión radial obtenidos están expresados según los modelos propios de cada programa (como se comentó en la sección 3.4.4) por lo que es necesario convertirlos a un sistema común, que en este caso será el modelo Gaussiano (3.59).

El análisis entre los diferentes valores de la distorsión radial se realizará mediante la comparativa con los valores invertidos de la distorsión radial (González-

Aguilera et al., 2011a), ya que los valores deparados por los programas comerciales se basan en aplicar los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  sobre la distancia ideal,  $r$ . Al ser este modelo teórico, presenta dificultades para trabajar directamente debido a que los valores ideales de  $r$  no son accesibles, mientras que los valores reales,  $r'$ , se puede obtener directamente de la imagen original. Para ello se realizará una inversión mediante un ajuste mínimo cuadrático (González-Aguilera et al., 2011a) para obtener los coeficientes  $K'_1$  y  $K'_2$  con un error medio cuadrático del ajuste de 0,001mm, que expresado porcentualmente es inferior al 0,02% del tamaño estándar de un sensor de cámara compacta (CCD del tipo 1/2,3’’).

Los datos finales invertidos de la distorsión radial, para los programas comerciales y libres existentes, se resumen en la Tabla 6.52, conjuntamente con la precisión de los parámetros.

	$f_g$ (mm)	$K'_1$	$\sigma(K'_1)$	$K'_2$	$\sigma(K'_2)$
<b>Fauccal</b>	18,436	$-5,509 \times 10^{-4}$	$2,0 \times 10^{-6}$	$1,430 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-8}$
<b>Bouguet</b>	18,452	$-5,261 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-6}$	$1,266 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^{-8}$
<b>Photomodeler®</b>	18,690	$4,755 \times 10^{-4}$	$8,2 \times 10^{-7}$	$-1,096 \times 10^{-6}$	$3,6 \times 10^{-9}$
<b>ImageMaster®</b>	18,040	$5,253 \times 10^{-4}$	$8,9 \times 10^{-7}$	$-1,317 \times 10^{-6}$	$6,2 \times 10^{-9}$

Tabla 6.52 Resumen de los datos de distorsión radial mediante las herramientas existentes

Los resultados de distorsión radial proporcionados por sv3Dvision se incorporan directamente en la Tabla 6.53, invertidos para poder trabajar directamente sobre las distancias radiales observadas, y poder realizar así la comparación con los valores resultantes por el resto de herramientas.

	$f_g$ (mm)	$K'_1$	$\sigma(K'_1)$	$K'_2$	$\sigma(K'_2)$
<b>Sv3Dvision</b>	19,047	$4,502 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^{-5}$	$-1,034 \times 10^{-6}$	$3,2 \times 10^{-7}$
<b>Fauccal</b>	18,436	$-5,509 \times 10^{-4}$	$2,0 \times 10^{-6}$	$1,430 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-8}$
<b>Bouguet</b>	18,452	$-5,261 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-6}$	$1,266 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^{-8}$
<b>Photomodeler®</b>	18,690	$4,755 \times 10^{-4}$	$8,2 \times 10^{-7}$	$-1,096 \times 10^{-6}$	$3,6 \times 10^{-9}$
<b>ImageMaster®</b>	18,040	$5,253 \times 10^{-4}$	$8,9 \times 10^{-7}$	$-1,317 \times 10^{-6}$	$6,2 \times 10^{-9}$

Tabla 6.53 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados

A la vista de los resultados de la Tabla 6.53, llama la atención los valores de precisión asociada a los parámetros, ya que los resultados de sv3Dvision tienen peor precisión que los proporcionados por el resto de calibraciones multi-imagen; hecho obvio por otra parte, ya que el programa sv3Dvision utiliza una única imagen.

Como se vio en la sección 3.4.2 existen dos modelos para expresar los valores de distorsión, empleándose hasta ahora para la comparación el modelo Gaussiano. No obstante, para realizar la comparación gráfica, se empleará el modelo balanceado (Tabla 6.54), ya que al anularse para el valor de distancia radial  $r_0$ , permite una inspección visual más sencilla, además de un criterio más universal de comparación.

	$f_b$ (mm)	$a_0$	$a_1$	$a_2$
<b>Sv3Dvision</b>	19,6235	0,02938	$-4,370 \times 10^{-4}$	$1,004 \times 10^{-6}$
<b>Fauccal</b>	19,1026	0,03490	$-5,317 \times 10^{-4}$	$1,380 \times 10^{-6}$
<b>Bouguet</b>	19,1007	0,03396	$-5,082 \times 10^{-4}$	$1,223 \times 10^{-6}$
<b>Photomodeler®</b>	19,2951	-0,03100	$4,608 \times 10^{-4}$	$-1,062 \times 10^{-6}$
<b>ImageMaster®</b>	18,6667	-0,03357	$5,077 \times 10^{-4}$	$-1,273 \times 10^{-6}$

Tabla 6.54 Modelo de distorsión radial balanceada (con distancia radial  $r_0=8,94$ mm)



Para la representación gráfica de los valores de la Tabla 6.54 se ponen en común los signos de los parámetros, porque algunos métodos de cálculo proporcionan la solución reflejada o simétrica, en vez de la buscada.

En la gráfica de comparación de distorsión (Figura 6.50) se aprecia como las curvas de distorsión son muy similares, siendo la máxima separación para el valor máximo positivo de 0,017mm y para el valor mínimo de 0,024mm.

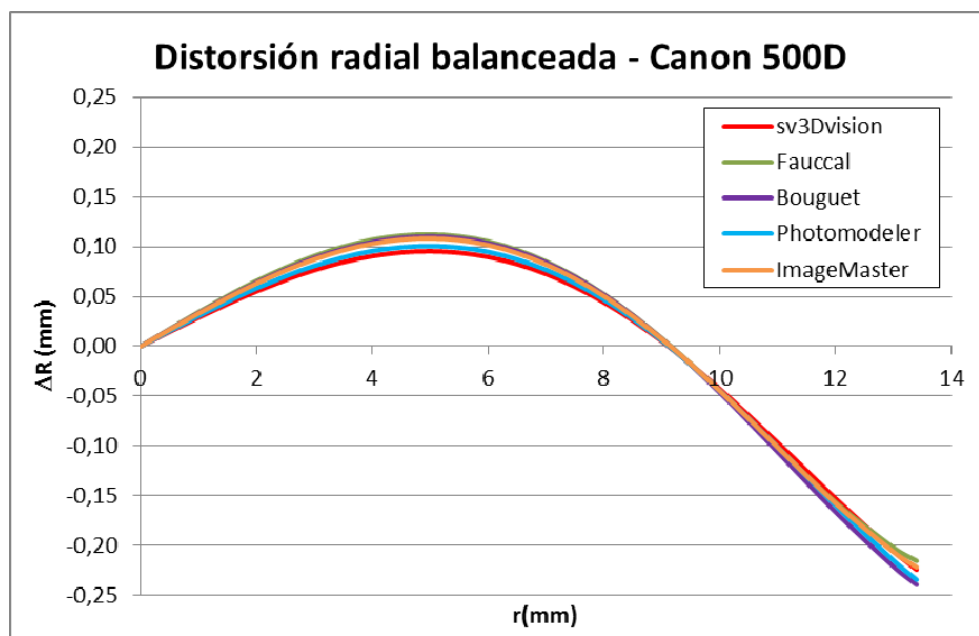


Figura 6.50 Comparativa de curvas de distorsión radial

Finalmente, se lista en la Tabla 6.55 la desviación estándar a posteriori para los diferentes acercamientos considerados. El hecho de que tanto las herramientas comerciales como de carácter libre hayan deparado ajustes con precisión subpíxel en comparación con la precisión del ajuste resultante de sv3Dvision, es indicativo de que dichos resultados son válidos para realizar el contraste de datos.

	$\sigma$ (píxel)
<b>Sv3Dvision</b>	1,0
<b>Fauccal</b>	0,4
<b>Bouguet</b>	0,4
<b>Photomodeler®</b>	0,2
<b>ImageMaster®</b>	0,1

Tabla 6.55 Desviación típica a posteriori del ajuste (en píxeles)

Los resultados tanto de la Figura 6.50 como la Tabla 6.55 indican que a pesar de utilizar una única imagen con un sólo punto de fuga, el programa sv3Dvision alcanza resultados comparables con las herramientas de calibración a partir de múltiples imágenes con una precisión píxel. Asimismo, se comprueba como la máxima discrepancia entre el perfil de distorsión proporcionado por el sv3Dvision y el resto es de 4 píxeles en los bordes del sensor.

### 6.2.2. Dos puntos de fuga

Para evaluar si los resultados de la sección 6.2.1 vienen condicionados por la geometría, en este apartado se calibrará una imagen con dos puntos de fuga, empleando otra cámara digital diferente (más antigua) pero también de tipo réflex. La cámara en cuestión es la Nikon D70, lanzada al mercado en el año 2004, y que en comparación con la del anterior apartado, que apareció en 2009, tiene unas especificaciones técnicas inferiores (Tabla 6.56).

<b>Nikon D70</b>	
	
Tipo de cámara	Cámara réflex de lentes intercambiables
Tipo de sensor	CCD (1,5x FOV crop) (6,24 millones de píxeles totales)
Píxeles efectivos	3008 x 2000 (6,01 millones)
Tamaño del sensor	23,7 x 15,6 mm
Densidad de píxeles	1,6 MP/cm <sup>2</sup>
Sensibilidad	200 – 1600 (equivalente ISO)
Velocidad de disparo	30 - 1/8000 segundos
Formatos de archivo	NEF (12-bit compressed RAW) JPEG (EXIF 2.21)

**Tabla 6.56** Especificaciones técnicas de la cámara réflex Nikon D70 (imágenes tomadas de [www.nikonusa.com](http://www.nikonusa.com))

El objetivo utilizado con la cámara réflex es el propio del kit y de la propia casa de la cámara. Al igual que con la cámara del apartado 6.2.2 se empleará la menor distancia focal posible del rango disponible por el objetivo.

<b>Objetivo Nikkor 28-80 mm f/3,3-5,6 G AF</b>	
	
Longitud Focal	28-80 mm (equivalente 43-122 mm en 35 mm)
Máxima Apertura	f/3,3-5,6
Mínima apertura	f/22-38
Construcción	6 elementos / 6 grupos. 1 lente esférica
Ángulo de visión	53°-20°
Distancia mínima de enfoque	0,35 m

**Tabla 6.57** Objetivo empleado con la cámara Nikon D70 (imagen tomada de [www.letsgodigital.org](http://www.letsgodigital.org))

Siguiendo con la estructura del apartado anterior se comienza con la evaluación del programa sv3Dvision, que como se comentó anteriormente, se utilizará una imagen oblicua (Figura 6.51) como dos puntos de fuga (ejes  $X$  y  $Z$ ). Al igual que en la subsección anterior, la escena se corresponde con un edificio de líneas modernas, donde la obtención de elementos lineales es bastante asequible.



Figura 6.51 Imagen oblicua con dos puntos de fuga correspondiente al edificio Moneo (Ávila)

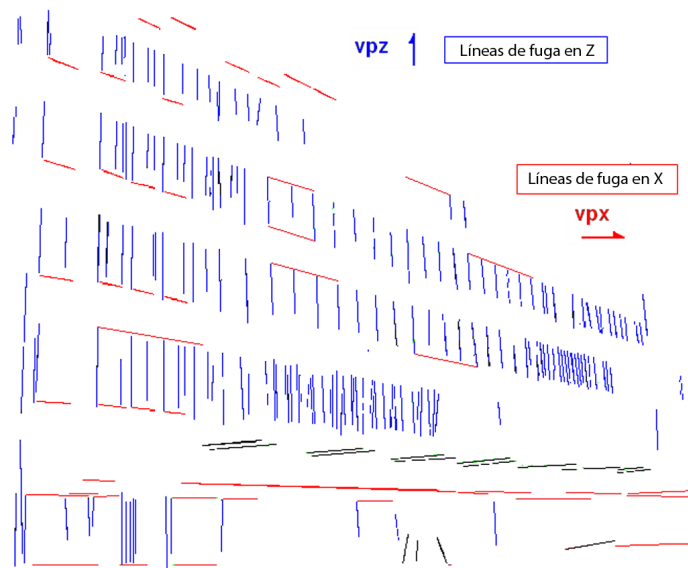


Figura 6.52 Mini-segmentos extraídos automáticamente, coloreados según el eje: X (rojo) y Z (azul)

La extracción de los elementos lineales por parte de sv3Dvision (Figura 6.52) deparó 2243 bordes usando una máscara gaussiana de  $5 \times 5$  píxeles, desviación estándar de 1 píxel y umbrales superior e inferior de 100 y 75 unidades respectivamente. De los bordes detectados, el programa extrajo 299 mini-segmentos, de los cuales 36 se clasificaron como pertenecientes a la dirección del punto de fuga en  $x$ , y 67 según la dirección del punto de fuga en  $z$ . El programa

excluyó 196 segmentos (outliers) por no coincidir con las direcciones de fuga en  $x$  y  $z$ . Seguidamente en la Tabla 6.58 se resumen los datos de los puntos de fuga deparados por el sv3Dvision.

	PF <sub>x</sub>		PF <sub>y</sub>		PF <sub>z</sub>	
	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$
$x$ (mm)	35,19	0,011	$\infty$	-	8,945	0,004
$y$ (mm)	13,85	0,013	$\infty$	-	-122,239	0,006

Tabla 6.58 Datos de los puntos de fuga – Nikon D70 y 28mm de focal

Los datos finales de distorsión se listan en la tabla siguiente:

	$f_g$ (mm)	$K_1$	$\sigma(K_1)$	$K_2$	$\sigma(K_2)$
<b>Sv3Dvision</b>	28,914	$2,354 \times 10^{-4}$	$3,1 \times 10^{-5}$	$-9,910 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-8}$

Tabla 6.59 Resultados determinación distorsión radial mediante sv3Dvision

Siguiendo con la estructura del apartado anterior se continua el análisis de la herramientas existentes con la herramienta Faucal. El protocolo usado para la toma de datos también es la misma: nueve imágenes convergentes dispuestas según una matriz 3x3. Los resultados (Tabla 6.60) correspondientes tienen asociadas una precisión subpíxel.

	Valor	$\sigma$	
<b>Número de observaciones</b>	1828		
<b>Incógnitas</b>	63		
<b>Grados de libertad</b>	1765		
<b>Puntos de enlace</b>	135		
<b>Focal</b>	$f_x$	3579,157 pix	1,462 pix
	$f_y$	3598,727 pix	1,456 pix
<b>Punto principal</b>	$x_p$	-0,657 pix	1,081 pix
	$y_p$	-8,734 pix	0,819 pix
<b>'Skewness'</b>	$sk$	-0,000327	0,000033
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$-9,814 \times 10^{-9}$	$1,12 \times 10^{-10}$
	$k_2$	$2,548 \times 10^{-16}$	$6,21 \times 10^{-17}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$-7,044 \times 10^{-8}$	$1,90 \times 10^{-8}$
	$p_2$	$-1,787 \times 10^{-7}$	$1,55 \times 10^{-8}$
	$\sigma$	<b>0,244</b>	

Tabla 6.60 Resultados finales de la calibración geométrica con Faucal

Los resultados proporcionados por el software Bouguet también tienen precisión subpíxel para un intervalo de confianza del 99,73%.

	Valor	$3\sigma$	
<b>Focal</b>	$f_x$	3603,6114 pix	8,49453 pix
	$f_y$	3605,1073 pix	8,44610 pix
<b>Punto principal</b>	$x_p$	1505,5878 pix	5,63211 pix
	$y_p$	1013,1440 pix	4,69572 pix
<b>Distorsión</b>	$kc_1$	-0,11311	0,00729
	$kc_2$	-0,02334	0,04420

	$kc_3$	0,00096	0,00032
	$kc_4$	-0,00029	0,00038
	$kc_5$	0,00000	0,00000
<b>Error (imagen)</b>	$3\sigma_x$	0,58285 pix	
	$3\sigma_y$	0,57929 pix	
	$3\sigma$	<b>0,82176 pix</b>	

Tabla 6.61 Resultados completos de la calibración completa con Bouguet

La ventaja del software libre Bouguet es poder disponer de toda la información bruta resultante del ajuste, en concreto de los errores de reproyección en el plano imagen con los puntos empleados en el ajuste.

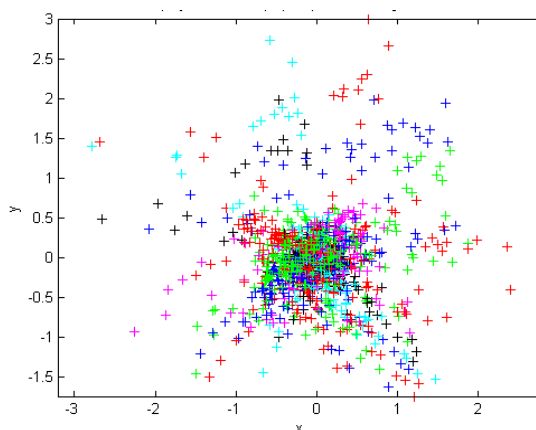


Figura 6.53 Error de reproyección de los puntos mediante la calibración con Bouguet

Se aprecia en la figura anterior como los errores están distribuidos en torno al valor cero, tanto para los ejes  $x$  e  $y$ .

Al igual que en el caso anterior, los datos “crudos” de la Figura 6.53 se disponen según un histograma de error, donde se aprecia la distribución normal o gaussiana de los errores.

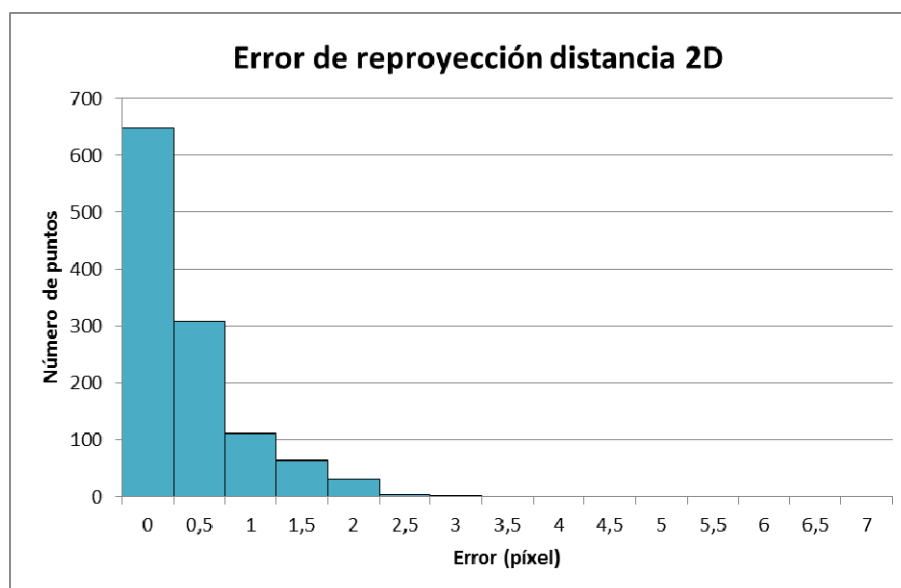


Figura 6.54 Histograma del error 2D de reproyección

La calibración realizada con la herramienta comercial Photomodeler® verifica los parámetros internos de calidad del programa: superficie de cobertura del patrón en la imagen, totalidad de fotos utilizadas y residuo máximo de magnitud inferior al píxel.

		Valor	$\sigma$
Imágenes usadas		12/12	
Superficie		90 %	
Error medio cuadrático (pix)		<b>0,108</b>	
Residuo máximo (pix)		0,497	
<b>Focal</b>	$f$	28,6695 mm	0,002 mm
<b>Punto principal</b>	$x_p$	12,1219 mm	0,003 mm
	$y_p$	7,9281 mm	0,003 mm
<b>Ancho sensor</b>	$Fw$	24,0078 mm	$7,3 \times 10^{-4}$ mm
<b>Alto sensor</b>	$Fh$	15,9574 mm	-
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$1,687 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-7}$
	$k_2$	$-8,512 \times 10^{-8}$	$2,8 \times 10^{-9}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$7,546 \times 10^{-6}$	$8,6 \times 10^{-7}$
	$p_2$	$-1,943 \times 10^{-5}$	$9,1 \times 10^{-7}$

Tabla 6.62 Resumen de la calibración completa con Photomodeler®

Y finalmente respecto al programa ImageMaster®, el error medio cuadrático de los residuos imagen (en unidades píxel) alcanza valores muy buenos, de décimas de píxel, aunque si se analizan las componentes en coordenadas terreno u objeto, se aprecia una significativa discrepancia según el eje, ya que la componente  $x$  es siete veces menor que la correspondiente al eje  $z$ . Aunque este comportamiento también se manifestó para la cámara Canon EOS 500D, y posiblemente venga causado por el protocolo de toma de imágenes y sean necesarias más fotografías para mejorar la determinación de dicha componente.

		Valor	$\sigma$
<b>Residuos imagen (pix)</b>		<b>0,081</b>	
<b>Residuos de las coordenadas 3D (mm)</b>	$X$	0,1583	
	$Y$	0,4466	
	$Z$	1,0804	
	3D	<b>0,5618</b>	
<b>Focal</b>	$f$	27,95735 mm	
<b>Punto principal</b>	$x_p$	11,93237 mm	
	$y_p$	7,92376 mm	
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$1,812 \times 10^{-4}$	$7,7 \times 10^{-7}$
	$k_2$	$-8,885 \times 10^{-8}$	$3,1 \times 10^{-9}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$1,867 \times 10^{-5}$	$2,3 \times 10^{-6}$
	$p_2$	$1,066 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-6}$

Tabla 6.63 Resultados de la calibración con ImageMaster®

Los datos finales de distorsión radial invertidos de las herramientas existentes expuestas se listan en la Tabla 6.65.

	$f_g$	$K'_1$	$\sigma(K'_1)$	$K'_2$	$\sigma(K'_2)$
<b>Fauccal</b>	28,277	$-1,589 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-6}$	$2,830 \times 10^{-9}$	$1,6 \times 10^{-10}$
<b>Bouguet</b>	28,399	$-1,405 \times 10^{-4}$	$3,0 \times 10^{-6}$	$-2,054 \times 10^{-8}$	$2,3 \times 10^{-10}$
<b>Photomodeler®</b>	28,670	$1,662 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-7}$	$-1,308 \times 10^{-7}$	$2,8 \times 10^{-9}$
<b>ImageMaster®</b>	27,957	$1,783 \times 10^{-4}$	$7,7 \times 10^{-7}$	$-1,416 \times 10^{-7}$	$3,1 \times 10^{-9}$

**Tabla 6.64 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados**

Los datos resultantes de la determinación de la distorsión radial con sv3Dvision se listan en la Tabla 6.65, conjuntamente con los obtenidos con las herramientas libres y comerciales.

	$f_g$ (mm)	$K'_1$	$\sigma(K'_1)$	$K'_2$	$\sigma(K'_2)$
<b>Sv3Dvision</b>	28,914	$2,306 \times 10^{-4}$	$3,1 \times 10^{-5}$	$-1,872 \times 10^{-7}$	$4,5 \times 10^{-8}$
<b>Fauccal</b>	28,277	$-1,589 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-6}$	$2,830 \times 10^{-9}$	$1,6 \times 10^{-10}$
<b>Bouguet</b>	28,399	$-1,405 \times 10^{-4}$	$3,0 \times 10^{-6}$	$-2,054 \times 10^{-8}$	$2,3 \times 10^{-10}$
<b>Photomodeler®</b>	28,670	$1,662 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-7}$	$-1,308 \times 10^{-7}$	$2,8 \times 10^{-9}$
<b>ImageMaster®</b>	27,957	$1,783 \times 10^{-4}$	$7,7 \times 10^{-7}$	$-1,416 \times 10^{-7}$	$3,1 \times 10^{-9}$

**Tabla 6.65 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados**

A la vista de los resultados de la Tabla 6.65, se puede apreciar una ligera discrepancia entre los valores obtenidos con una única imagen con respecto a las calibraciones en laboratorio. También se reproduce como en el caso anterior, la peor precisión asociada a la determinación de la distorsión radial con una sola imagen, algo totalmente esperable.

Los valores de distorsión expresados según el modelo balanceado para la comparación gráfica se muestran en la tabla siguiente.

	$f_b$ (mm)	$a_0$	$a_1$	$a_2$
<b>Sv3Dvision</b>	29,477	0,01913	$-2,262 \times 10^{-4}$	$1,836 \times 10^{-7}$
<b>Fauccal</b>	28,667	0,01399	$-1,567 \times 10^{-4}$	$2,790 \times 10^{-9}$
<b>Bouguet</b>	28,768	0,01240	$-1,388 \times 10^{-4}$	$-2,028 \times 10^{-8}$
<b>Photomodeler®</b>	29,071	-0,01382	$1,639 \times 10^{-4}$	$-1,290 \times 10^{-7}$
<b>ImageMaster®</b>	28,377	-0,01482	$1,757 \times 10^{-4}$	$-1,395 \times 10^{-7}$

**Tabla 6.66 Modelo de distorsión radial balanceada (con distancia radial  $r_0=9,458$ mm)**

La máxima discrepancia entre modelos (sv3Dvision y el resto) es de 0,022mm para el valor máximo positivo de la distorsión radial, y de 0,071mm para el valor mínimo de distorsión, que se da en los bordes del sensor.

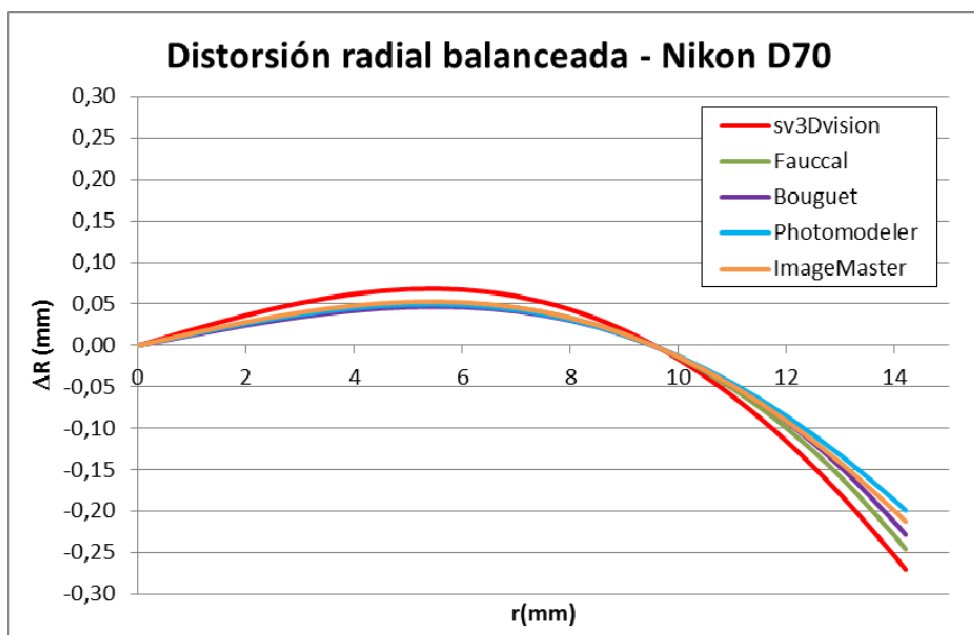


Figura 6.55 Curvas de distorsión radial

El perfil obtenido con sv3Dvision es el que depara mayor distorsión radial, mientras que con los programas comerciales y de código abierto la máxima discrepancia alcanza los 10 píxeles en los bordes del sensor.

	$\sigma$ (píxel)
<b>Sv3Dvision</b>	1,1
<b>Fauccal</b>	0,2
<b>Bouguet</b>	0,3
<b>Photomodeler®</b>	0,1
<b>ImageMaster®</b>	0,1

Tabla 6.67 Desviación típica a posteriori del ajuste (en píxeles)

Los valores de desviación del ajuste para las herramientas tanto de código abierto como comerciales tienen valores subpíxel muy bajos, mientras que con sv3Dvision se mantiene la precisión cercana al píxel. Esto viene a confirmar que a pesar de la mejora de la geometría (de un a dos puntos de fuga) se sigue sin bajar del nivel del píxel.

Comparando la Tabla 6.67 con la Tabla 6.55 se aprecia como los valores de desviación típica a posteriori se mantienen en rangos parecidos para ambas cámaras digitales réflex.



### 6.2.3. Tres puntos de fuga

Para finalizar la evaluación del sistema de determinación de la distorsión radial a partir de una única imagen se evaluará, a diferencia de los casos anteriores, con una cámara digital compacta. También para completar el análisis con sv3Dvision, se estudiará la precisión de la distorsión cuando en la imagen están presentes los tres puntos de fuga (ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ ).

La cámara utilizada (Tabla 6.68) tiene un sensor de menores dimensiones que los de las cámaras de lentes intercambiables, por lo que la densidad de píxeles por  $\text{cm}^2$  del sensor es muy elevada. También es necesario reseñar que la calidad de la óptica del objetivo es peor que en una cámara réflex, y por lo tanto se presupone que la estabilidad de los resultados podría resentirse, es decir, peores precisiones asociadas.

<b>Canon IXUS 110 IS / POWERSHOT SD960 IS</b>	
	
Tipo de cámara	Cámara digital compacta
Tipo de sensor	CCD (12,4 millones de píxeles totales)
Píxeles efectivos	4000 x 3000 (12,1 millones)
Tamaño del sensor	6,18 x 4,55 mm
Densidad de píxeles	43 MP/ $\text{cm}^2$
Sensibilidad	80 – 1600 (equivalente ISO)
Velocidad de disparo	15 - 1/1600 segundos
Formatos de archivo	JPEG
Focal	5,0mm – 20,0mm 28mm - 112mm (equivalente 35mm)
Apertura	2,8 – 5,8 (lentes esféricas)

**Tabla 6.68** Especificaciones técnicas de la cámara digital compacta IXUS 110 (imagen adaptada de [www.dpreview.com](http://www.dpreview.com))

Para la evaluación del programa sv3dvision para un caso correspondiente a esta sección se emplea una fotografía del Palacio de Congresos de Ávila (Figura 6.56) la cual presenta múltiples y significativos elementos lineales, además de los 3 puntos de fuga, este subcaso de estudio constituye un caso desfavorable en tanto que la determinación del punto de fuga según la dirección  $z$  es complicada, ya que dicho punto se localiza muy lejos del centro de la imagen, dando así lugar a un caso mal condicionado para dicha incógnita. Además, la utilización de una cámara digital compacta degrada los resultados debido a la inevitable presencia del autoenfoco y por lo tanto la variación de los parámetros de distorsión radial.



Figura 6.56 Imagen con tres puntos de fuga correspondiente al Palacio de Congresos de Ávila

El proceso de extracción automática de elementos lineales, basado en los algoritmos de Canny y Burns depara 2683 bordes. En la siguiente etapa de segmentación solamente se obtienen 205 mini-segmentos (Figura 6.57), de los cuales 46 pertenecen a la dirección del punto de fuga en  $x$  (codificados en rojo), 75 correspondientes al punto de fuga según el eje  $y$  (color verde) y 61 fueron clasificados por pertenecientes al punto de fuga según la dirección  $z$  (presentados en color azul).

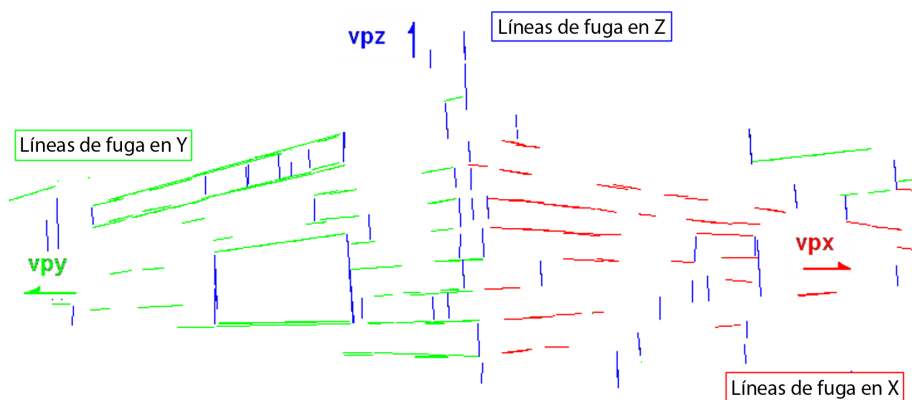


Figura 6.57 Mini-segmentos automáticamente extraídos mediante sv3Dvision

El programa sv3Dvision también devuelve, como output del cálculo, los valores de las coordenadas de los puntos de fuga (Tabla 6.69), expresados en las coordenadas del plano imagen.

	PF <sub>X</sub>		PF <sub>Y</sub>		PF <sub>Z</sub>	
	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$
$x$ (mm)	7,766	0,001	-2,271	0,002	5,893	0,004
$y$ (mm)	2,163	0,003	2,635	0,002	63,656	0,003

Tabla 6.69 Datos de los puntos de fuga – Canon IXUS 110

Los resultados en la determinación de la distorsión radial mediante dicho programa se presentan en la Tabla 6.70.

	$f_g$ (mm)	$K_1$	$\sigma(K_1)$	$K_2$	$\sigma(K_2)$
<b>Sv3Dvision</b>	5,156	$4,253 \times 10^{-3}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$-1,479 \times 10^{-5}$	$6,2 \times 10^{-6}$

Tabla 6.70 Resultados determinación de la distorsión radial mediante sv3dvision

Para contrastar los datos de distorsión radial del programa sv3Dvision se utilizarán las mismas herramientas de código abierto y comercial que en las secciones anteriores. Primeramente se comenzará con el software Fauccal, el cual depara una calibración de precisión subpíxel, a pesar de haberse usado una cámara compacta.

		Valor	$\sigma$
<b>Número de observaciones</b>		2170	
<b>Incógnitas</b>		63	
<b>Grados de libertad</b>		2107	
<b>Puntos de enlace</b>		149	
<b>Focal</b>	$f_x$	3283,392 pix	0,827 pix
	$f_y$	3279,918 pix	0,772 pix
<b>Punto principal</b>	$x_p$	-2,469 pix	1,139 pix
	$y_p$	18,914 pix	0,942 pix
<b>'Skewness'</b>	$sk$	0,000149	0,000067
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$-8,117 \times 10^{-9}$	$6,56 \times 10^{-11}$
	$k_2$	$4,358 \times 10^{-16}$	$1,32 \times 10^{-17}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$5,041 \times 10^{-8}$	$2,98 \times 10^{-8}$
	$p_2$	$2,182 \times 10^{-7}$	$2,41 \times 10^{-8}$
		<b>0,726</b>	

Tabla 6.71 Calibración mediante Fauccal para la cámara compacta IXUS 110

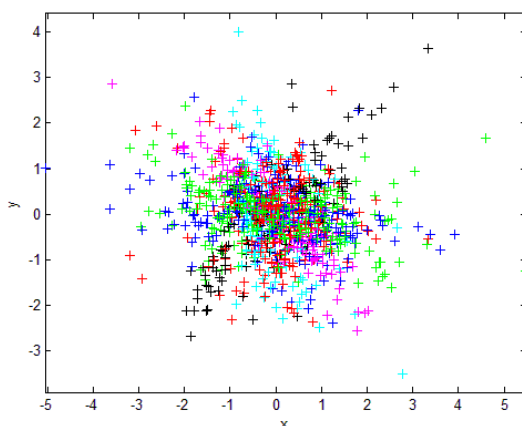
Los datos de la calibración resultantes de aplicar el programa Bouguet se ilustra en la Tabla 6.72. Se aplica el mismo protocolo de toma de datos: nueve fotografías convergente sobre el patrón "chessboard".

		Valor	$3\sigma$
<b>Focal</b>	$f_x$	3281,4913 pix	3,26552 pix
	$f_y$	3277,4901 pix	3,08968 pix
<b>Punto principal</b>	$x_p$	2000,3989 pix	4,34212 pix
	$y_p$	1479,4703 pix	3,70361 pix
<b>Distorsión</b>	$kc_1$	-0,08587	0,00286
	$kc_2$	0,05007	0,00615
	$kc_3$	-0,00085	0,00032
	$kc_4$	0,00060	0,00038
	$kc_5$	0,00000	0,00000
<b>Error (imagen)</b>	$3\sigma_x$	1,08136 pix	
	$3\sigma_y$	0,87476 pix	
	$3\sigma$	<b>1,39088</b> pix	

**Tabla 6.72 Resultados de la calibración con Bouguet**

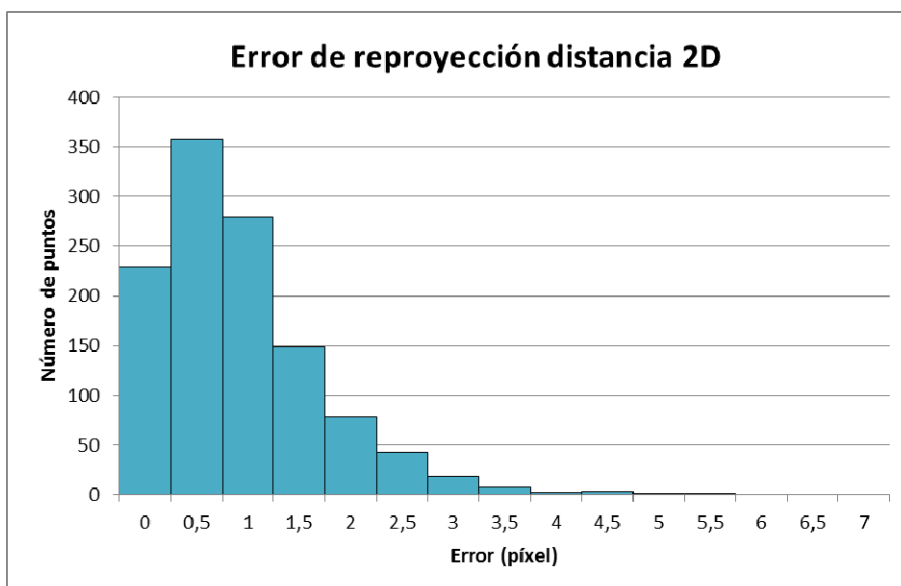
Reseñar que el error total para un nivel de confianza del 99,73% rebasa el umbral de un píxel, dejando de ser un ajuste con precisión subpíxel, causado porque la cámara es una compacta.

El error en coordenadas imagen del proceso de reproyección (Figura 6.58) presenta una distribución centrada en el  $(0,0)$ , aunque el grado de dispersión es elevado, también recogido en Tabla 6.72.



**Figura 6.58 Error de reproyección de la calibración con Bouguet**

No obstante, si los errores de reproyección según los ejes de cada punto se componen cuadráticamente para obtener el error bidimensional y se listan según un histograma (Figura 6.59), se puede apreciar como la distribución está sesgada respecto al valor central, aunque la morfología de la distribución se aproxima a una gaussiana o normal.



**Figura 6.59 Histograma del error 2D de reproyección**

Por su parte el programa comercial Photomodeler® ofrece los siguientes resultados (Tabla 6.73),

		Valor	$\sigma$
Imágenes usadas		12/12	
Superficie		52 %	
Error medio cuadrático		<b>0,343</b>	
Residuo máximo		1,739	
<b>Focal</b>	$f$	5,106337 mm	0,001 mm
<b>Punto principal</b>	$x_p$	3,120653 mm	0,001 mm
	$y_p$	2,278599 mm	0,001 mm
<b>Ancho sensor</b>	$Fw$	6,199472 mm	$4,1 \times 10^{-4}$ mm
<b>Alto sensor</b>	$Fh$	4,648200 mm	-
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$3,496 \times 10^{-3}$	$4,8 \times 10^{-5}$
	$k_2$	$-1,264 \times 10^{-4}$	$7,7 \times 10^{-6}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$-2,724 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-5}$
	$p_2$	$-2,917 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-5}$

Tabla 6.73 Calibración completa de la cámara compacta Canon IXUS 100 con Photomodeler®

Finalmente, se obtienen los resultados derivados de la calibración con el programa comercial ImageMaster® (Tabla 6.74),

		Valor	$\sigma$
<b>Residuos imagen (pix)</b>		<b>0,266</b>	
<b>Residuos de las coordenadas 3D (mm)</b>	X	0,1726	
	Y	0,3965	
	Z	1,4303	
	3D	<b>0,6671</b>	
<b>Focal</b>	$f$	5,03726 mm	
<b>Punto principal</b>	$x_p$	3,090616 mm	
	$y_p$	2,243863 mm	
<b>Distorsión radial</b>	$k_1$	$3,696 \times 10^{-3}$	$3,2 \times 10^{-5}$
	$k_2$	$-1,612 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-6}$
<b>Distorsión tangencial</b>	$p_1$	$-4,095 \times 10^{-5}$	$6,3 \times 10^{-6}$
	$p_2$	$-4,038 \times 10^{-5}$	$6,5 \times 10^{-6}$

Tabla 6.74 Calibración completa de la cámara compacta Canon IXUS 100 con el programa ImageMaster®

En la Tabla 6.75 se resumen los coeficientes de la distorsión radial obtenidos por las cuatro herramientas utilizadas, estando dichos valores ya invertidos para su posterior comparación a partir de las coordenadas observadas sobre la imagen original o distorsionada.

	$f_g$ (mm)	$K'_1$	$\sigma(K'_1)$	$K'_2$	$\sigma(K'_2)$
<b>Fauccal</b>	5,054	$-3,521 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-5}$	$7,283 \times 10^{-5}$	$2,3 \times 10^{-6}$
<b>Bouguet</b>	5,050	$-3,461 \times 10^{-3}$	$3,7 \times 10^{-5}$	$7,272 \times 10^{-5}$	$3,1 \times 10^{-6}$
<b>Photomodeler®</b>	5,106	$3,425 \times 10^{-3}$	$4,8 \times 10^{-5}$	$-3,453 \times 10^{-5}$	$7,7 \times 10^{-6}$
<b>ImageMaster®</b>	5,037	$3,609 \times 10^{-3}$	$3,2 \times 10^{-5}$	$-3,899 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-6}$

**Tabla 6.75 Resumen de los valores de distorsión radial para las herramientas empleadas**

Los valores de distorsión obtenidos mediante una única imagen se recogen con el resto de valores resultantes de las herramientas usadas para la evaluación (Tabla 6.76).

	$f_g$ (mm)	$K'_1$	$\sigma(K'_1)$	$K'_2$	$\sigma(K'_2)$
<b>Sv3Dvision</b>	5,156	$4,148 \times 10^{-3}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$-4,568 \times 10^{-5}$	$6,2 \times 10^{-6}$
<b>Fauccal</b>	5,054	$-3,521 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-5}$	$7,283 \times 10^{-5}$	$2,3 \times 10^{-6}$
<b>Bouguet</b>	5,050	$-3,461 \times 10^{-3}$	$3,7 \times 10^{-5}$	$7,272 \times 10^{-5}$	$3,1 \times 10^{-6}$
<b>Photomodeler®</b>	5,106	$3,425 \times 10^{-3}$	$4,8 \times 10^{-5}$	$-3,453 \times 10^{-5}$	$7,7 \times 10^{-6}$
<b>ImageMaster®</b>	5,037	$3,609 \times 10^{-3}$	$3,2 \times 10^{-5}$	$-3,899 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-6}$

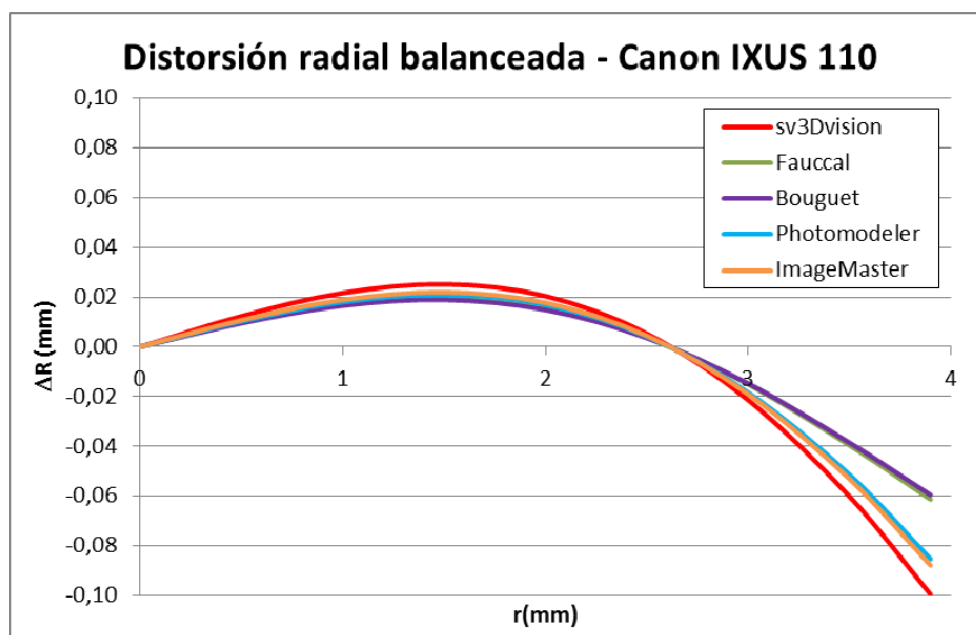
**Tabla 6.76 Resumen de los valores de distorsión radial (e incertidumbre) para los métodos contrastados**

Respecto a las incertidumbres asociadas a los parámetros de la distorsión radial según el modelo gaussiano, el parámetro  $K'_1$  sigue teniendo peor precisión que el resto de herramientas, pero respecto al parámetro  $K'_2$  se observa como para los cinco test, las precisiones son similares, dentro del mismo orden de magnitud. La Tabla 6.77 recoge los mismos valores, pero expresados según el modelo balanceado para su posterior representación gráfica.

	$f_b$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
<b>Sv3Dvision</b>	5,291	-0,02563	$4,042 \times 10^{-3}$	$-4,468 \times 10^{-5}$
<b>Fauccal</b>	5,153	0,02025	$-3,450 \times 10^{-3}$	$7,136 \times 10^{-5}$
<b>Bouguet</b>	5,147	0,01985	$-3,392 \times 10^{-3}$	$7,128 \times 10^{-5}$
<b>Photomodeler®</b>	5,217	-0,02131	$3,352 \times 10^{-3}$	$-3,379 \times 10^{-5}$
<b>ImageMaster®</b>	5,152	-0,02234	$3,528 \times 10^{-3}$	$-3,812 \times 10^{-5}$

**Tabla 6.77 Modelo de distorsión radial balanceada (con distancia radial  $r_0=2,583$ mm)**

Para las diferentes curvas de distorsión (Figura 6.60) la máxima diferencia para los valores positivos alcanza los 0,006mm, mientras que en los bordes del sensor, donde se alcanzan los mínimos valores de distorsión, la diferencia es de 0,040mm.



**Figura 6.60 Comparativa de curvas de distorsión radial**

Aunque no se aprecia en la Figura 6.60, las curvas de distorsión radial obtenidas mediante los programas Faucal y Bouguet son casi coincidentes, mientras que las obtenidas con los programas comerciales siguen una tendencia similar entre sí. La razón por la que Faucal y Bouguet son tan similares podría deberse a que ambos comparten el mismo patrón de calibración. No obstante, dicha razón no es aplicable al software comercial, ya que tienen sus propias mallas de calibración.

Con esta cámara se obtienen las mayores discrepancias entre los valores de distorsión radial, hecho causado porque la cámara empleada es de tipo compacta. Concretamente el mayor valor de discrepancia se alcanza con la curva resultante de Bouguet, alcanzando los 25 píxeles de diferencia en los bordes del sensor.

	$\sigma$ (píxel)
<b>Sv3Dvision</b>	1,3
<b>Faucal</b>	0,7
<b>Bouguet</b>	0,4
<b>Photomodeler®</b>	0,3
<b>ImageMaster®</b>	0,3

**Tabla 6.78** Desviación típica a posteriori del ajuste (en píxeles)

Respecto a los valores de precisión de los ajustes (Tabla 6.78), a pesar de emplearse una cámara compacta, sv3Dvision sigue manteniéndose en torno al nivel píxel. El resto de herramientas a pesar de dicha contingencia consiguieron mantener la precisión subpíxel, aunque dichas cantidades se han elevado en comparación con las obtenidas para una réflex.

### 6.3. Registro de sensores: caso visible desfavorable

El proceso de registro de sensores se apoya en técnica de análisis de imagen en donde los resultados son muy dependientes del tipo de imagen analizada. Por ello y para probar el potencial del proceso de fusión de sensores propuesto para la automatización del procesamiento láser, se analizará un caso desfavorable, como es el arte rupestre del interior de una cueva paleolítica, donde se conjugan texturas radiométricas exiguas con pocos elementos singulares y las reducidas dimensiones de la escena donde la resolución geométrica queda menguada. Este caso de estudio busca demostrar que la aproximación jerárquica propuesta es capaz de proveer resultados incluso en las condiciones antes mencionadas.

#### 6.3.1. La cueva de Llonín

Conocida como Cueva del Quesu, es un yacimiento prehistórico con importantes pinturas y grabados. Situada en el pueblo del concejo de Peñamellera Alta, en las inmediaciones del paraje de La Molinuca se trata de una gran oquedad emplazada en la margen izquierda del río Cares en la vertiente Sur de la Sierra del Cuera. El 7 de julio de 2008 fue declarada Patrimonio de la Humanidad por la UNESCO. Su hallazgo se remonta a 1957 pero no se conoció hasta el mismo comienzo de la década de los setenta, tras el abandono de la gruta para usos queseros.

El yacimiento arqueológico excavado entre 1987 y 1997 arrojó materiales que constatan una ocupación de la cueva que abarca desde el Paleolítico Medio hasta la Edad del Bronce, incluyendo del Paleolítico Superior los siguientes períodos: Gravetiense final, Solutrense superior, Magdaleniense arcaico, Magdaleniense medio, Magdaleniense superior y Aziliense (10.000 - 8.000 a.C). Llonín alberga un denso repertorio de imágenes tanto de pintura como de grabado, superando con creces la centena, lo que la convierte en una de las estaciones asturianas con mayor número de representaciones artísticas que se nos ofrecen distribuidas en varios lugares de la galería y especialmente en la gran sala. Los investigadores han organizado el repertorio en 6 paneles (Barroso y del Río, 2008), destacando el Panel Principal (Figura 6.61) el cual contiene la mayor parte de las representaciones parietales muchas de ellas superpuestas: Cérvidos, bóvidos, cápridos, caballos, figuras antropomorfas,...






**Figura 6.61 Levantamiento del sector central del Panel Principal según Magín Berenguer (tomado de Barroso y del Río, 2008)**

El arte de Llonín abarca una amplia cronología que va desde el Gravetiense final hasta el Magdalenense superior y en él han sido diferenciadas 5 fases: A destacar la denominada Fase I, la más antigua, que abarca el Gravetiense (30.000 - 22.000 a.C) e inicios del Solutrense (22.000 - 15.000 a.C), en la que el color más empleado para pintar las figuras es el rojo que oscila entre el tono teja y el bermellón. A esta fase pertenecen diferentes signos: desde trazos lineales, manchas dispersas de color, alineaciones horizontales de bastoncillos y puntuaciones, destacando especialmente un gran motivo meandriforme/serpentiforme ubicado en el centro del Panel Principal (Barroso y del Río, 2008), el cual será el objeto de estudio de este capítulo.

Por último, un aspecto clave a destacar a favor de la puesta en valor de este vestigio de arte paleolítico es que en la actualidad su acceso está totalmente prohibido al público, por lo que cobra una especial importancia su documentación, reconstrucción y posterior difusión.

### 6.3.2. Problema y objetivo

El signo serpentiforme de la cueva de Llonín (Asturias) representa un reto especial en la fusión de los sensores láser escáner y cámara digital, presentado un doble reto: geométrico, al ser aplicado sobre una superficie irregular con presencia de formas cóncavas y convexas; y radiométrico, al trabajar con condiciones de iluminación complicadas propias de lugares subterráneos (Figura 6.63) junto con el propio estado de las pinturas rupestres.

	Longitud de onda	534 nm (Verde)
	Sistema de deflección	Espejo plano oscilante
	Campo de visión (FOV)	360°H x 60°V
	Desviación estándar	1,4mm para D≤50m
	Rango de medidas	2-350m
	Precisión angular	Acimutal: 12'' Cenital: 14''
	Divergencia láser	3mm a 50m
	Velocidad de escaneo	5000 puntos/segundo

**Figura 6.62 Especificaciones técnicas láser escáner terrestre Trimble GX**

El espacio de trabajo se centra en una de las partes más emblemáticas del panel rupestre de la Cueva de Llonín, el signo serpentiforme. Para la documentación métrica del panel principal se emplea un láser escáner de tiempo de vuelo, Trimble GX (Tabla 6.1) derivándose una nube de puntos de alta densidad (153.889 puntos con una resolución de 5 mm) que incorpora las coordenadas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) y un valor de intensidad ( $I$ ) correspondiente al espectro visible, más concretamente a los 534nm del canal verde.

La pintura es de reducidas dimensiones de 30 x 50 centímetros, y aunque se recogió información del entorno próximo, la zona de actuación es de aproximadamente  $1\text{m}^2$ , razón por la cual la cantidad total de puntos 3D es tan reducida.



**Figura 6.63 Estacionamiento dentro de la cueva de Llonín**

La parte correspondiente a la información radiométrica ha sido proporcionada por el Dr. D. Pedro Saura. El hecho de utilizar dicha imagen es validar el uso de la línea de trabajo desarrollada, no sólo con cámaras compacta, sino con equipamiento fotográfico profesional como es en este caso y se ha realizado desde una posición y de forma asíncrona.

Asimismo en vez de trabajar con la imagen final (archivo TIFF de más de 20 megapíxeles de resolución) la cual presenta un sobrexceso de información radiométrica en comparación con la densidad de puntos y tamaño del objeto, se trabajará con una versión (Figura 6.64) de tamaño más acorde con las dimensiones del objeto.



**Figura 6.64 Pintura Rupestre de la Cueva de Llonín (Asturias, España). Signo Serpentiforme**  
© Pedro Saura

El objetivo es obtener un mapa de textura tridimensional en base a la fusión de ambos sensores. De esta forma conseguiremos representar con una gran exactitud el panel rupestre de la Cueva de Llonín lo que a su vez contribuirá a su preservación y mantenimiento.

### 6.3.3. Metodología y resultados

La nube de puntos láser será preprocesada para obtener la imagen de rango mediante la aplicación de la condición de colinealidad, mientras que la imagen procedente de la cámara será tratada para hacer ambas fuentes de información más compatibles.

En base a la calibración realizada del láser escáner Trimble GX, la nube de puntos se calibra con los datos de los sistematismos obtenidos en Tabla 6.13. En base al análisis metrológico se aplicarán todos los parámetros y no sólo los estadísticamente significativos. También, la distancia de trabajo es reducida (rango inferior a los 30 metros) por lo que se garantiza aún más la validez de dichos parámetros ya que para el campo de calibración de dimensiones similares ( $\approx 10\text{m}$ ) se demostró mediante el control externo que sigue siendo válida.

La toma de datos presentó una serie de dificultades inherentes a las condiciones de temperatura y humedad propias de un entorno subterráneo; como son la presencia de filtraciones de agua que limitaban las opciones de estacionamiento del equipo, la alta humedad ambiental y el contraste térmico de temperatura entre el exterior y el interior de la cueva. Los parámetros atmosféricos fueron

considerados mediante los modelos matemáticos incorporados por el software de captura (PointScape®) a partir de su medición dentro de la cueva. Como se aprecia en la Figura 6.63 fue necesario disponer de una rótula fotográfica para poder posicionar el láser terrestre en la posición idónea, lo más perpendicular al panel principal.

Los parámetros iniciales de orientación externa para la generación de la imagen de rango son:

Rotaciones (grados centesimales)			Traslación (mm)		
$\omega$	$\varphi$	$\kappa$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$
100	32	0	0	23000	-6500

Tabla 6.79 Aproximaciones iniciales para la generación de la imagen de rango

Dichos parámetros se alejan del (0,0,0) porque la nube en concreto para la documentación del panel principal está englobada en un proyecto de mayores dimensiones consistente en la documentación de toda la cueva.

La imagen de alta resolución ya está corregida de distorsión por el empleo de una óptica especial (*Hasselblad Digital Lens Correction - DAC*). Dado que es una foto interior no da lugar a eliminación del cielo mediante el canal azul, ni tampoco es necesaria la aplicación de alguna otra corrección. Únicamente será transformada a valores de luminancia.

La imagen de rango se genera con los parámetros de la Tabla 6.79 con unas dimensiones de 909 x 1000 píxeles. La imagen de rango se mejoró mediante el proceso de regeneración de puntos que se aplicó mediante una interpolación ponderada inversa a la distancia, según los siguientes parámetros: una máscara vecindad de 3x3 píxeles y una vecindad mínima del 75%, dando lugar a la recuperación de 6480 puntos. Este paso permite mejorar la calidad de la imagen procedente del láser la cual presenta huecos y una resolución siempre inferior a la imagen procedente de la cámara.

No obstante, es necesario aplicar la técnica de inundación sobre la imagen de rango, la cual presenta una baja resolución, siendo este paso necesario para hacer ambas imágenes compatibles y mantener una continuidad de la textura (Figura 6.65 derecha). Este paso involucra una inevitable pérdida de calidad, asumible ya que la alternativa sería que la textura presentase discontinuidades.

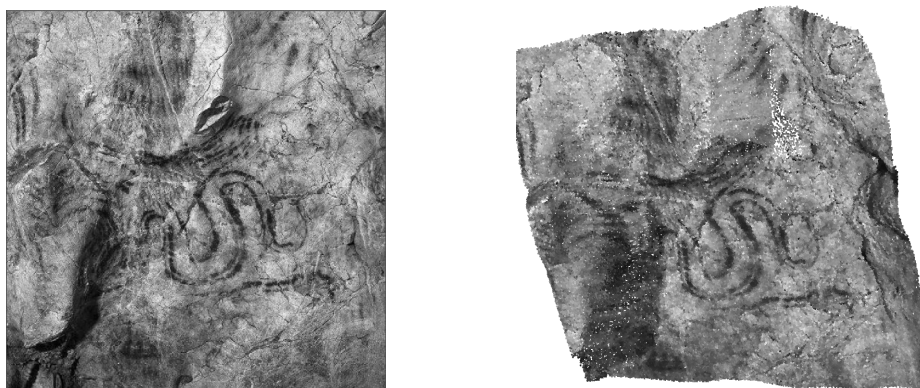
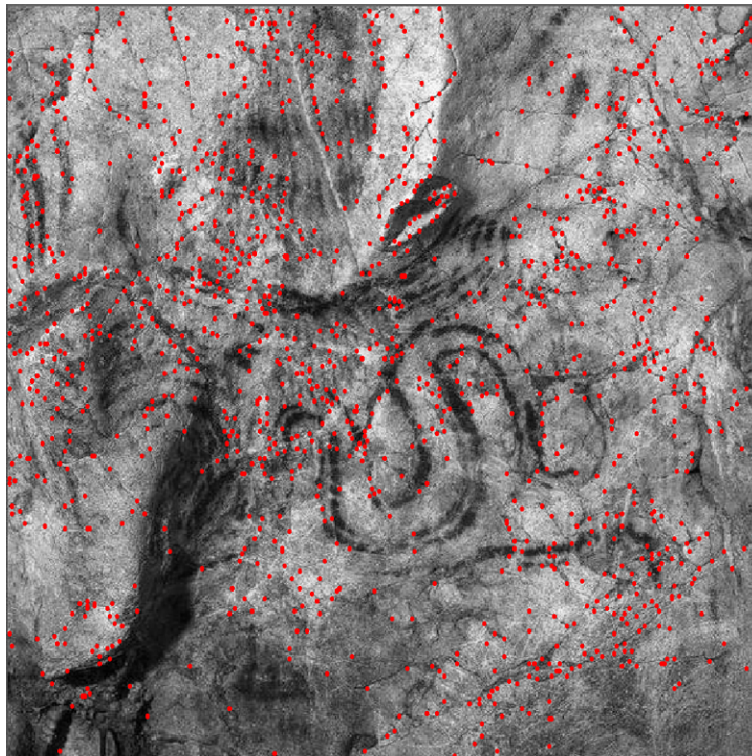


Figura 6.65 Datos de entrada. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner.

El siguiente paso es aplicar el proceso de extracción de puntos de interés, mediante el operador de Harris (sección 4.3.2), el cual emplea como criterios de funcionamiento el valor de desviación típica ( $\sigma$ ) de la máscara de convolución Gaussiana en 2 unidades, y un valor de umbral para evaluar el punto esquina es de 20 unidades. Se obtiene un total de 1461 puntos de interés (Figura 6.66).

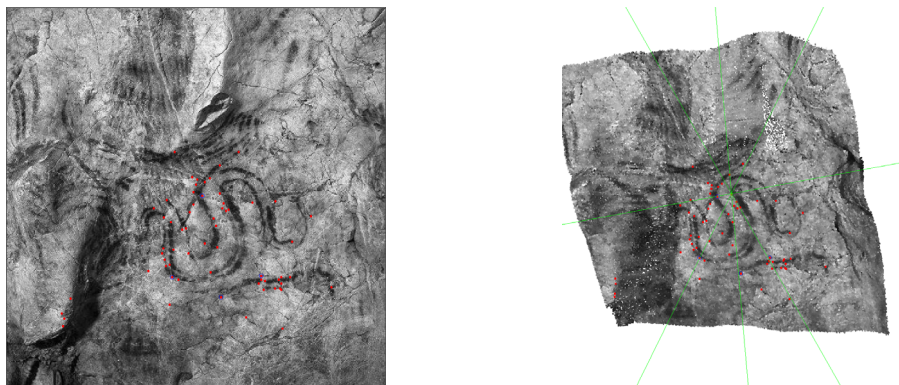


**Figura 6.66 Puntos de interés obtenidos mediante el detector de Harris**

A continuación se implementa el proceso de correspondencia robusta jerárquico, donde los umbrales de trabajo serán: máscara o ventana de búsqueda de 15 x 15 píxeles en una pirámide de imágenes de 4 niveles, en cuyo nivel inferior (de menor resolución) se establece un porcentaje mínimo de coeficiente de correlación del 80%. Nótese que se aplica un umbral alto para evitar malos emparejamientos que puedan distorsionar el cálculo de la matriz fundamental en la siguiente subetapa. Debido a estos restrictivos parámetros y al ser el caso de estudio desfavorable (textura propicia para la incertidumbre), solamente se obtienen 14 pares de puntos homólogos. La cantidad si bien es escasa (de 1461 candidatos se pasa a 14) los umbrales indicados permiten establecer con garantías una correspondencia consistente con la realidad.

Mediante la primera aproximación de puntos homólogos se determinan la matriz fundamental que permitirá establecer las restricciones epipolares sobre ambas imágenes. Su determinación viene dada por el algoritmo de Longuet-Higgins el cual se aplica dentro de un proceso de votación basado en RANSAC. Para dicho estimador se establece un criterio de votación de 2,5 píxeles para determinar si los puntos son considerados válidos. Dado el reducido número de puntos participantes, no será necesario alcanzar el número máximo de iteraciones. La matriz resultante queda determinada con un error residual de 9,91 píxeles.

Determinadas e introducidas en el proceso de correspondencia las nuevas restricciones (como un buffer alrededor de la línea epipolar teórica), puede recalcularse el proceso jerárquico robusto, al cual se le rebaja el umbral de correlación hasta el 60%. Finalmente se obtienen 63 pares de puntos homólogos como output final de este proceso (Figura 6.67).



**Figura 6.67 Correspondencia de puntos basada en restricciones epipolares. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner**

El último paso del proceso de registro de sensores es obtener los parámetros de orientación externa de la cámara con respecto al sistema de coordenadas establecido por el láser escáner terrestre. Para ello, se emplea un procedimiento iterativo basado en la intersección inversa (propia de la fotogrametría) combinado con tests estadísticos, como el detector de Pope (algoritmo convencional iterativo).

La resección espacial requiere de disponer de dos juegos de datos correspondientes, uno de ellos en coordenadas bidimensionales y el otro asociado a un sistema tridimensional. Puesto que de la etapa de correspondencia jerárquica robusta resultan dos juegos de coordenadas bidimensionales, es necesario convertir un juego. Durante la fase de creación de la imagen de rango (del 3D al 2D) se creó una matriz de datos que relaciona a cada píxel (2D) con el punto de la nube láser (3D) que le dotó de coordenadas mediante la condición de colinealidad. En esta fase se recurre a dicha matriz para revertir el proceso y obtener coordenadas 3D a partir de la imagen de rango. Concretamente, de los 63 puntos emparejados resulta que solamente 13 poseen correspondencia real con la superficie del objeto. Recordar que la densidad de escaneo era baja, y que fueron necesarios varios “artificios” para garantizar una textura continua. Esta operación caracteriza también la dificultad del caso de estudio, pues al llegar a la fase final únicamente se dispone de un mínima información común a ambos sensores.

El proceso de intersección inversa se integra dentro del estimador robusto de RANSAC, de forma análoga a la empleada durante la determinación de la matriz fundamental. Para ello, se define el umbral mínimo para el criterio de votación en 1 metro, mientras que el número máximo de iteraciones no es relevante por el escaso número de puntos participantes. El proceso de resección espacial está apoyado por el test estadístico de Pope que se inicializa con un nivel de significación del 5% ( $\alpha=0,05$ ). Aunque durante su aplicación sobre la solución más votada según RANSAC, y por ello la que más probablemente sea correcta, el detector no llega a eliminar ningún punto al estar todos dentro de los valores

establecidos por dicho umbral. El resultado final de la resección queda determinado con los 13 puntos que poseían correspondencia directa con el terreno.

El resultado de la operación es la posición y orientación de la cámara con respecto al equipo láser (Tabla 6.80) y varios índices de calidad para dar idea de la precisión alcanzada durante el proceso de fusión de ambos sensores.

Parámetro	Valor	Desviación
$X_0$	962,9 mm	73 mm
$Y_0$	23665,1 mm	32 mm
$Z_0$	-7921,1 mm	99 mm
$\omega$	122,3227 <sup>g</sup>	1,7539 <sup>g</sup>
$\varphi$	20,6434 <sup>g</sup>	1,2198 <sup>g</sup>
$\kappa$	16,9354 <sup>g</sup>	0,9104 <sup>g</sup>

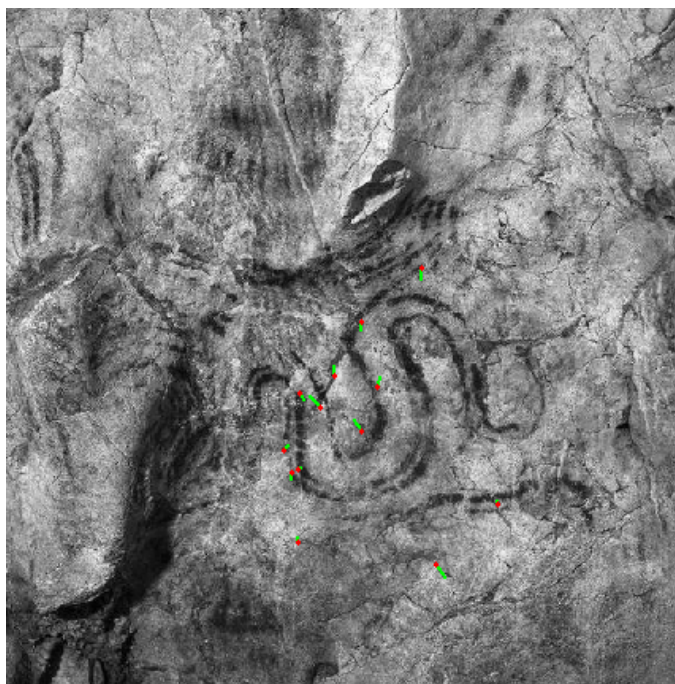
**Tabla 6.80 Resultados resección espacial**

En la tabla anterior se aprecia como dentro de los parámetros de traslación, el que presenta peor ajuste es asociado a la coordenada Z o altura, puesto que al estar trabajando con un elemento de dimensiones muy reducidas, existe una carencia de puntos que refuercen la determinación de dicha posición. Con respecto a los ángulos de la orientación externa, el que peor está determinado es el asociado al giro  $\omega$  que según la disposición del sistema de ejes se corresponde con el cabeceo de la cámara.

Rotaciones (grados centesimales)			Traslación (m)			Índices de calidad	
$\omega$	$\varphi$	$\kappa$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	$\sigma_{X_0Y_0Z_0}$ (mm)	$\sigma_{0,xy}$ (pix)
122,3227	20,6434	16,9354	0,963	23,665	-7,921	124	2,5

**Tabla 6.81 Parámetros e índices de calidad para resolver la resección espacial robusta entre la cámara digital y el láser escáner**

De los índices de calidad (Tabla 6.81), el asociado al sistema de coordenadas bidimensional de la imagen, y determinado en coordenadas píxel, es un indicador alternativo de la bondad del ajuste de la resección espacial, en tanto las coordenadas tridimensionales de los puntos de la superficie del objeto son re proyectadas mediante la condición de colinealidad sobre el plano imagen donde se puede calcular la distancia euclídea entre dichas posiciones y las correspondientes usadas en el cálculo de la intersección espacial. Este análisis permite obtener un conjunto de vectores de error que pueden ser expresados gráficamente, según se aprecia en la Figura 6.68.



**Figura 6.68** Error de reproyección en píxeles con un factor de aumento (x5) sobre la imagen de alta resolución

La información reflejada en la figura anterior (error de reproyección) es parametrizable mediante los indicadores estadísticos del conjunto de vectores de error; el valor medio del conjunto  $\sigma_{\theta,xy}=2,5$  píxeles y la desviación típica de dicho conjunto de datos que alcanza valores de 1,3 píxeles. También es relevante para el análisis los valores extremos de dicho conjunto de vectores de error, siendo el valor máximo de 4,8 píxeles, mientras que el límite inferior alcanza la cifra de 0,7 píxeles. La significatividad de estos datos estadísticos, es que a pesar de trabajar con un caso claramente desfavorable para el registro de sensores, el error es del orden de pocos píxeles, lo cual indica el potencial del acercamiento de automatización de procesado de datos procedentes de un láser escáner terrestre.

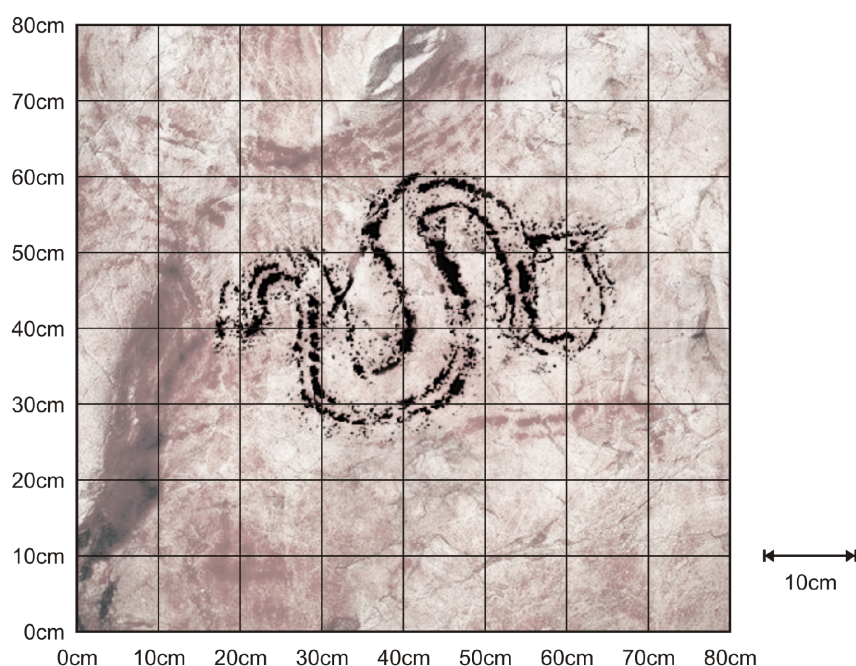


**Figura 6.69** Mapa de textura resultante de la fusión de ambos sensores



Finalmente, una vez que los parámetros de resección espacial han sido obtenidos, se deriva un mapa de texturas (Figura 6.69) permitiendo integrar bajo un mismo producto las propiedades radiométricas de la cámara de alta resolución y las propiedades métricas del láser escáner.

Otra de las posibilidades que depara el modelo ya registrado, es su vectorización para la extracción de las formas. No obstante, y como se aprecia en el producto resultante (Figura 6.70), dicha operación es inasumible de forma totalmente precisa, ya que la pintura parietal está compuesta por trazos de anchura variable, además de presentar manchas, ya sea por restos de otras pinturas o por el propio material rocoso, que impiden dicha idealización.



**Figura 6.70** Vectorización del serpentiforme

No obstante, el resultado combina un realce de la información radiométrica para deparar las líneas definidas de la mejor posible, a la par, que la información geométrica asociada a la imagen permite dotarla de escala, elemento de gran utilidad en cualquier caso, y más para los arqueólogos en estos casos particulares.

Finalmente, el potencial del caso de estudio aquí propuesto no finalizaría en la generación de modelo 3D foto-realísticos o imágenes sólidas, sino que si se emplease un láser escáner terrestre, tal que trabajase en una longitud de onda fuera del campo del visible (por ejemplo, el infrarrojo cercano) que podrían analizar dichos productos finales en busca de pinturas no visibles y proceder a su extracción, no sólo en forma relativa (morfología) y sino con su geometría.

## 6.4. Registro de sensores: caso visible favorable

En este apartado se testeará el procedimiento de registro de sensores con un caso arquitectónico donde el elemento objeto de estudio proveerá de una situación favorable para la metodología propuesta. Se buscará testear la máxima precisión obtenible en el proceso de registro de sensores.

### 6.4.1. Ermita de San Segundo

La ermita de San Segundo es una iglesia románica que se encuentra ubicada en la ribera del río Adaja, en su margen derecha, en el exterior occidental del recinto amurallado. Su construcción debió transcurrir entre 1130 y 1160, conservándose tan solo de esta etapa inicial la cabecera, la portada meridional y los muros que conforman su estructura, realizados con material granítico, denominado “piedra caleña” (Ayuntamiento de Ávila, 2010).

La ermita de San Segundo del Río o de Adaja, extramuros de la ciudad de Ávila, fue declarada monumento histórico-artístico, por Real Orden de 23 de junio de 1923<sup>30</sup>.

Se remonta al Siglo XI y carece de importancia hasta que en 1519, al reparar el muro que separaba el ábside sur del central apareció una serie de restos arqueológicos del Siglo XIV y XV. Aunque la tradición abulense la hace remontar hasta finales del Siglo I, considerándola sede y sepulcro del apóstol San Segundo.

El pequeño edificio, levantado en sillares de arenisca y zócalo de granito, se compone de planta de tres naves, fruto de una reforma del Siglo XVI puesto que originariamente disponía de una sola nave, y tres ábsides desiguales en la cabecera (visto en iglesias francesas), el espacio se cierra con una cubierta de artesanado mudéjar añadida durante el Siglo XVI que descansa sobre arcos de medio punto y columnas dóricas que separan, así mismo, las diferentes naves.

El aspecto actual del templo, es consecuencia de una serie de reformas acometidas en el Siglo XVI y en adelante, marcadas por el cambio de fábrica en granito gris.

La fachada sur (objeto de estudio), es, junto con la cabecera el único resto románico que ha llegado a la actualidad. El muro, compuesto por piedra arenisca lisa, se abre mediante una portada en arco de medio punto con cinco arquivoltas, las impares con decoración de rosetas y las pares con simple baquetón, y jambas de fuste liso y capiteles zoomorfos y vegetales como única puerta de acceso al interior del templo.

---

<sup>30</sup> Gaceta de Madrid, número 178 (pp.1193-1194) publicado el 27 de Junio de 1923.

### 6.4.2. Problema y objetivo

La fachada principal de la ermita de San Segundo presenta una morfología favorable para el proceso de fusión de sensores, ya que es similar a un plano y presenta un gran número de elementos singulares. Los sensores empleados para este caso de estudio son: un láser escáner terrestre de diferencia de fase, Faro Photon 80 (Tabla 6.82) y una cámara réflex de lentes intercambiables, Nikon D200 (Tabla 6.83).


	Principio de medida	Diferencia de fase
	Longitud de onda	785 nm (NIR)
	Sistema de deflección	Espejo rotatorio
	Campo de visión (FOV)	360°H x 320°V
	Desviación estándar	2mm para D=25m
	Rango de medidas	0,60-76m
	Resolución angular	Acimutal: 33'' Cenital: 33''
	Divergencia láser	0,16mrad
	Velocidad de escaneo	120000 puntos/segundo

Tabla 6.82 Especificación técnicas. Faro Photon 80

Este sistema láser es diferente al testeado en el apartado anterior, en el fundamento de medida: diferencia de fase versus tiempo de vuelo, y por tanto en las características técnicas de la captura; básicamente resolución y radiometría. Asimismo tendrá otras diferencias, principalmente respecto a la calibración geométrica, que serán particularizadas en el apartado 6.4.3.

Nikon D200	
	
Tipo de cámara	Cámara réflex de lentes intercambiables
Tipo de sensor	CCD (DX format) (1,5x FOV crop) (10,92 millones de píxeles totales)
Píxeles efectivos	3872 x 2592 (10,2 millones)
Tamaño del sensor	23,6 x 15,8 mm
Densidad de píxeles	2,73 MP/cm <sup>2</sup>
Sensibilidad	100 – 1600 (equivalente ISO)
Velocidad de disparo	30 - 1/8000 segundos
Formatos de archivo	NEF (12-bit RAW) JPEG (EXIF 2.2)

Tabla 6.83 Especificación técnicas. Cámara réflex Nikon D200

La cámara se emplea conjuntamente con un objetivo normal con la menor distancia focal posible, para conseguir el mayor campo de visión posible.

<b>Objetivo Nikkor AFS DX 18-70 f/3,5-4,5G</b>	
	
Longitud Focal	18-70 mm (equivalente 27-105 mm en 35 mm)
Máxima Apertura	f/3,3-4,5
Mínima apertura	f/22-36
Construcción	15 elementos / 13 grupos. 3 lentes de cristal ED (Extra baja Dispersión), 1 lente asférica.
Ángulo de visión	76°-22,5°
Distancia mínima de enfoque	0,38 m

**Tabla 6.84 Especificaciones técnicas. Objetivo Nikkor 18-70mm**

Los datos de entrada adquiridos por dichos sensores (Tabla 6.82 y el conjunto mostrado en la Tabla 6.83 y la Tabla 6.84) son: una nube de puntos de alta densidad: 1317335 puntos adquiridos con una resolución de 6mm a una distancia de 10 metros respecto del objeto. Dicha nube está expresada en coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) y tienen como componente radiométrica un valor de intensidad correspondiente a la parte del infrarrojo cercano del espectro electromagnético (concretamente 785nm). La radiometría original fue capturada con 11 bits aunque durante el proceso de exportación al formato universal ASCII dicha radiometría quedó codificada en 8 bits (256 valores posibles)

La imagen proveniente de la cámara tiene de dimensiones 3872 x 2592 píxeles y es tomada desde una posición cercana al centro de proyección del láser escáner terrestre, con el fin de minimizar las oclusiones cuando se realizar el mapeado de la textura fotográfica de alta resolución.

### 6.4.3. Metodología y resultados.

La nube de puntos láser es preprocesada para obtener la imagen de rango mediante el proceso de proyección basado en la ecuación de colinealidad (sección 4.2.2).

En este caso de estudio particular la nube de puntos “bruta” no puede ser calibrada, ya que los parámetros de calibración desarrollados en el capítulo 3.3 se corresponden con modelos específicos de láser escáner terrestre de tiempo de vuelo, y el empleado en este caso (Tabla 6.82) es de diferencia de fase. Como ya se vio en el capítulo correspondiente, este tipo de equipos tiene una tipología de errores sistemáticos diferente, por lo cual el modelo funcional y estocástico desarrollado en esta Tesis Doctoral no es aplicable. La razón por la que se ha empleado este equipo es que trabaja en una parte de espectro electromagnético diferente a la del equipo láser Trimble GX (Tabla 6.1).

La nube de puntos láser es segmentada para eliminar los elementos extraños en la escena con respecto al elemento objeto de estudio. También se limpia el ruido de la nube mediante el programa de tratamiento de datos proporcionado por el fabricante del equipo (FARO Scene<sup>®</sup>). Concretamente se elimina el ruido generado por un escaneo al aire libre debido a la luz ambiental muy intensa. La nube de puntos exportada presenta una estructura de datos del tipo *XYZIII*, donde *I* es el valor de intensidad, el cual se repite tres veces de forma redundante con el único objetivo de ser más fácilmente admitida por programas de procesamiento.

Para la generación de la imagen de rango se emplean las siguientes aproximaciones iniciales:

Rotaciones (grados centesimales)			Traslación (mm)		
$\omega$	$\varphi$	$\kappa$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$
100	15	0	0	0	1000

Tabla 6.85 Aproximaciones iniciales para la generación de la imagen de rango

Por su parte la imagen proveniente de la cámara de alta resolución es preprocesada para hacer que ambas fuentes de datos sean más compatibles.

La imagen de rango se genera con los parámetros de orientación externa de la Tabla 6.85 y con unas dimensiones de 1000 x 1494 píxeles. La razón de dicho tamaño, es en primer lugar respetar la relación existente entre los lados de la imagen de alta resolución (Tabla 6.83) y segundo establecer que el lado menor sea de 1000 píxeles (criterio por defecto) para mantener un compromiso entre la continuidad de la textura radiométrica y la resolución de la imagen de rango.

De forma más específica, durante la generación de la imagen de rango fue necesario aplicar el proceso de regeneración de puntos, es decir, la interpolación de puntos o píxeles vacíos (sin información) para mejorar la calidad de la textura radiométrica, la cual es normalmente inferior a la proporcionada por un cámara digital compacta. El proceso de regeneración se llevó a cabo para una vecindad de 3x3 píxeles y donde se restringió el algoritmo de interpolación (basado en la distancia ponderada) a la aplicación únicamente en los casos donde el 75% de la vecindad dispusiera de información original (no interpolada). Mediante estos parámetros se recuperaron (o regeneraron) 6719 puntos de una imagen de rango de dimensiones 1000 x 1494 píxeles.

Por su parte, la imagen proveniente de la cámara o imagen de alta resolución capturada con la cámara Nikon D200 (Tabla 6.83) es corregida de los efectos de la distorsión radial. Dichos parámetros se han determinado mediante el programa sv3Dvision (testado en la sección 6.2) utilizando una imagen con tres puntos de fuga (Tabla 6.86) y se pueden ver listados en la Tabla 6.87.

	PF <sub>x</sub>		PF <sub>y</sub>		PF <sub>z</sub>	
	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$
<i>x</i> (mm)	30,51	0,002	-0,103	0,01	10,955	0,001
<i>y</i> (mm)	12,303	0,003	10,411	0,01	-140,826	0,001

Tabla 6.86 Datos de los puntos de fuga - Nikon D200 y 18mm de m de focal

$f_g$	$K_1$	$\sigma(K_1)$	$K_2$	$\sigma(K_2)$
18,141	$-5,671 \times 10^{-4}$	$1,9 \times 10^{-6}$	$1,458 \times 10^{-6}$	$1,8 \times 10^{-8}$

Tabla 6.87 Parámetros de la distorsión radial para la cámara Nikon D200 y 18mm de distancia focal

Dado que los valores radiométricos de la imagen de rango se corresponden con el infrarrojo cercano, la imagen de alta resolución no se transformará a valores de gris (para realizar el proceso de registro) mediante la conversión a luminancia, sino que se empleará el canal rojo de la imagen RGB, ya que es el más cercano a dicha longitud de onda (Figura 6.71).



**Figura 6.71 Datos de entrada. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner**

Con respecto al resto de posibilidades de procesamiento de la imagen procedente de la cámara (corrección de brillo / contraste; eliminación del cielo) no son necesario aplicarlos porque los valores radiométricos tienen un grado de similitud aceptable (inspección ocular) y en el canal rojo de la imagen no aparecen restos de la radiometría del cielo, al haber sido el día de toma despejado (si hubiese sido gris aparecerían componentes distintas al canal azul).

El siguiente paso es aplicar el proceso de extracción de puntos de interés, mediante el operador de Förstner (sección 4.3.1), el cual emplea como criterios de selección la precisión y el valor de circularidad de los puntos candidatos. Concretamente se estableció un peso o precisión mínima ( $w$ ) de 10 unidades y un valor de circularidad ( $q$ ) de 0,80, obteniéndose un total de 2677 puntos de interés (Figura 6.72).



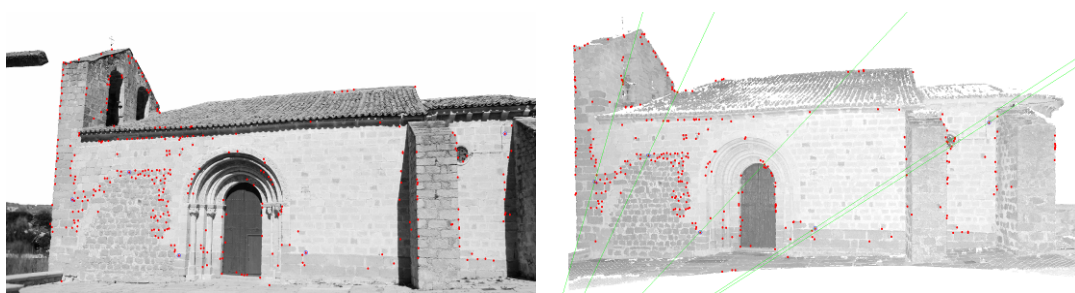
**Figura 6.72 Puntos de interés obtenidos mediante el detector de Förstner sobre la imagen de alta resolución**

Seguidamente se lleva a cabo el proceso de correspondencia robusto basado en una aproximación jerárquica con los parámetros siguientes: umbral de correlación cruzada. 0,70; dimensiones de la ventana de búsqueda: 15x15 píxeles y pirámide de imagen en 4 etapas. Como resultado se obtienen, del conjunto inicial de 2677

puntos candidatos, 230 posibles correspondencias de puntos. Este bajo porcentaje es debido a las diferencias de textura entre ambas imágenes, además de que el valor del umbral ha de ser alto para asegurar que dichos resultados sean de la calidad necesaria para la siguiente etapa del proceso de correspondencia propuesto.

Una vez obtenida la primera aproximación de puntos homólogos, se procede a calcular las restricciones epipolares mediante la determinación de la matriz Fundamental. Para ello se establece en el algoritmo de Longuet-Higgins dentro del proceso de votación de RANSAC, un umbral o tolerancia máxima de 2,5 píxeles para determinar los inliers (puntos válidos). Puesto que el número de outliers (puntos no válidos) en el conjunto de datos es más elevado que las estimaciones estándar de RANSAC, el proceso finaliza automáticamente al alcanzar un límite prefijado de iteraciones, concretamente 1500. Como resultado, un subconjunto de 67 puntos, con respecto a los 230 evaluados, son clasificados como inliers y serán utilizados para determinar la matriz Fundamental. Dicha matriz se determina con un error residual de 1,70 píxeles.

Con estas nuevas restricciones incorporadas al proceso de correspondencia, puede recalcularse el proceso jerárquico robusto con unos parámetros un poco más exigentes: umbral de la correlación cruzada: 0,60 y buffer (o umbral) epipolar de 10 píxeles. Como resultado, 317 puntos son emparejados con sus homólogos.



**Figura 6.73** Correspondencia de puntos basada en restricciones epipolares. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner.

El último paso del proceso de registro de sensores es obtener los parámetros de orientación externa de la cámara con respecto al sistema de coordenadas establecido por el láser escáner terrestre. Para ello se emplea un procedimiento iterativo basado en la intersección inversa (propia de la fotogrametría) combinado con test estadísticos, como el detector de errores groseros de Pope.

Primeramente hay que asignar coordenadas terreno a los puntos homólogos resultantes de la subfase anterior mediante una matriz creada durante la fase de generación de la imagen de rango, la cual almacena dicha correspondencia entre coordenadas píxeles y coordenadas terreno. Como resultado se obtiene que sólo 298 tienen correspondencia con puntos existentes en la nube láser.

En este proceso iterativo robusto el test estadístico de Pope se inicializa con un nivel de significación del 5% ( $\alpha=0,05$ ) siendo el valor crítico para la detección de errores groseros de  $\tau=1,657$ . Como resultado, 18 puntos son eliminados del cálculo por ser considerados outliers. Como la estimación de la orientación externa está incluida en un proceso de votación mediante RANSAC es necesario definir los umbrales: número máximo de iteraciones en caso de que el proceso no

finalice automáticamente, que en este caso se estableció como 1000; y el umbral para el criterio de votación, que para este caso particular se fijó en 0,75 metros.

El resultado de proceso robusto es la posición y orientación de la cámara con respecto al equipo láser (Tabla 6.89) y varios índices de calidad para dar idea de la precisión alcanzada durante el proceso de fusión de ambos sensores.

Parámetro	Valor	Desviación
$X_0$	252,0 mm	9 mm
$Y_0$	1615,4 mm	4 mm
$Z_0$	182,0 mm	19mm
$\omega$	107,6058 <sup>g</sup>	0,0783 <sup>g</sup>
$\varphi$	11,3030 <sup>g</sup>	0,0331 <sup>g</sup>
$\kappa$	2,5285 <sup>g</sup>	0,0306 <sup>g</sup>

Tabla 6.88 Resultados del proceso de resección espacial robusto

En la Tabla 6.88 se aprecia como la mayor debilidad de ajuste responde a la altura o coordenada Z y al ángulo  $\omega$  que tiene que ver con el balanceo del punto de vista. La causa de esta discrepancia podría deberse a que la distribución de los puntos es predominante en anchura, más que en altura sobre la superficie del objeto (Figura 6.73).

Rotaciones (grados centesimales)			Traslación (m)			Índices de calidad	
$\omega$	$\varphi$	$\kappa$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	$\sigma_{X_0Y_0Z_0}$ (mm)	$\sigma_{0,xy}$ (pix)
107,6058	11,3030	2,5285	0,252	1,615	0,182	21,4	0,66

Tabla 6.89 Parámetros e índices de calidad para resolver la resección espacial robusta entre la cámara digital y el láser escáner

El parámetro de calidad píxel se obtiene mediante el proceso de reproyección de los puntos homólogos con correspondencia sobre el modelo láser, con los parámetros de resección obtenidos (Tabla 6.88). El resultado del proceso de reproyección se puede expresar gráficamente mediante la Figura 6.74, en donde se representan los vectores de errores, normalmente magnificados para apreciarlos más fácilmente.



Figura 6.74 Error de reproyección en píxeles con un factor de aumento (x10) sobre la imagen de alta resolución

Los datos estadísticos representativos de la figura anterior son el valor medio de los vectores de error ( $\sigma_{0,xy}=0,66$  píxeles) y la desviación típica de dicho conjunto de datos alcanza valores de 0,35 píxeles. También resulta significativo para



analizar dicho error estudiar los valores extremos del error, que en este caso están localizados en el intervalo entre 0,04 y 1,66 píxeles.

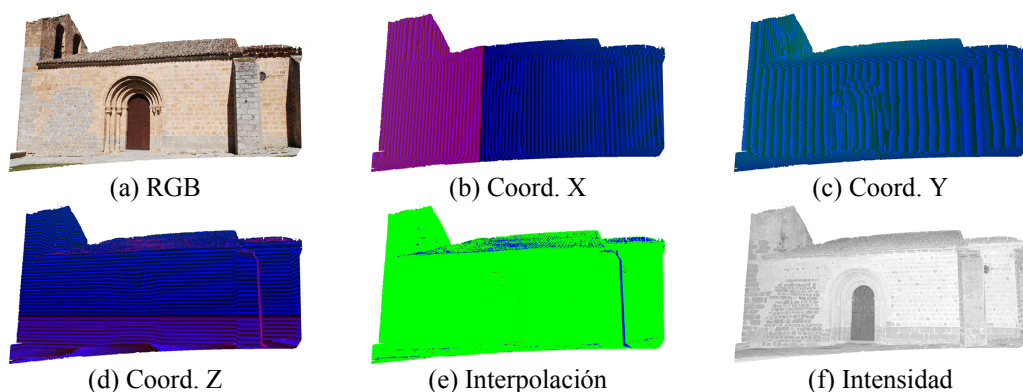
Finalmente, cuando los parámetros de la resección espacial ya han sido determinados, puede obtenerse un mapeo de texturas (Figura 6.75). Esto permite integrar en el mismo producto las propiedades radiométricas de la imagen proveniente de la cámara de alta resolución y las propiedades métricas del láser escáner terrestre. Al archivo original de estructura *XYZIII* se le añade la información de color, mientras que se elimina la información de intensidad redundante, siendo la estructura final del archivo ASCII: *XYZIRGB*.



**Figura 6.75** Mapa de textura resultante de la fusión de ambos sensores.

Finalmente, sobre este caso particular de registro de sensores se aplicará la generación de una imagen sólida y su explotación geométrica.

La escena representada en la nube de puntos de puntos (ermita) está contenida en un prisma rectangular de 21m según eje *X*, 18m según eje *Y* y 14m según el eje *Z*. Dimensiones las cuales permiten emplear el procedimiento de codificación expuesto en la sección 5.1 directamente sin necesidad de emplear un archivo adicional de traslación, ya que se trabaja en coordenadas locales. Recordemos que el sistema de coordenadas establecido para el estudio de la Ermita de San Segundo es de carácter local.



**Figura 6.76** Diferentes capas de la imagen sólida

En la Figura 6.76 están representadas las diferentes capas de la imagen sólida, a saber: la capa correspondiente al color RGB procedente de la imagen de alta resolución (a); las codificaciones correspondientes a las diferentes componentes de las coordenadas tridimensionales (b) (c) (d); la capa de interpolación (e) que se

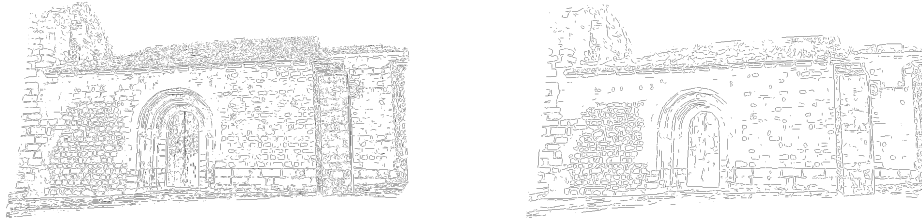
analizará a continuación y la capa correspondiente a los datos de intensidad del infrarrojo cercano procedentes del láser escáner terrestre (f).

En la imagen Figura 6.76e está representada la tipología de los puntos, es decir, si son interpolados u originales. El color verde hace referencia a que son puntos originales, cuyas coordenadas han sido obtenidas directamente a partir de la nube de puntos láser. Los puntos en color rojo representa los puntos interpolados mediante el método de la distancia ponderada y los de color azul mediante el método particular de inundación implementado (5.1). Concretamente en este caso de estudio se recuperaron 2961 puntos mediante el método de interpolación IDW con una vecindad de 3x3 píxeles y un 75% existencia de información. Esto último se puede expresar como que al menos un porcentaje dado de los puntos de la vecindad considerada poseen información geométrica, que en este caso es  $0,75 \cdot 8 = 6$  puntos como mínimo. Por su parte el método de inundación permitió calcular las coordenadas tridimensionales de 16.908 puntos, estando definidos los parámetros de interpolación con un umbral en función de la máxima distancia del punto incógnita a los puntos dato. Dicho umbral se expresa en función de las dimensiones de la imagen, expresado en términos porcentuales, que para este caso se estableció en 30%.

En Figura 6.76d se pueden apreciar cambios de color en las zonas correspondientes a los puntos codificados como interpolados. Esto es debido a que dicha característica (dato real de campo, o dato calculado) se almacenaba en parte de un *byte* de los tres destinada a guardar la coordenada según el eje Z. Concretamente se utiliza la posición correspondiente a las centenas del componente rojo (en una tripleta RGB estándar) para codificar este atributo, cuyo utilidad radica en que a la hora de realizar medidas, poder discriminar si se están usando datos de campo (precisos) o datos interpolados para mantener la continuidad de la información, y por ende, de menor precisión.

La explotación de la información geométrica contenida en la imagen sólida se hace a través de un proceso de vectorización automática. Dichos bordes pueden extraerse a partir de la información radiométrica de la capa RGB o de la correspondiente a la intensidad. Los cálculos siguientes están referidos a capa de intensidad.

La extracción y segmentación de los bordes de la TSI dependerá, a parte de las propias condiciones de la toma (oblicuidad, distancia, textura, etc...), de los parámetros del detector de Canny, recordando que son los umbrales superior ( $U_S$ ) e inferior ( $U_I$ ) de la histéresis y el parámetro de desviación de la máscara gaussiana ( $\sigma$ ). En la Figura 6.77 se puede ver dichas diferencias, donde vectorización representada en la imagen izquierda fue generada con los parámetros  $\sigma=1$ ,  $U_S=30$  y  $U_I=20$ ; mientras que en la imagen derecha el parámetro  $\sigma$  de la máscara gaussiana es de 2 unidades, y a pesar de una pequeña variación de los umbrales ( $U_S=20$  y  $U_I=10$ ) el número de segmentos extraídos se reduce ya que el filtro gaussiano atenúa, si no elimina, las altas frecuencias en la capa radiométrica original.



**Figura 6.77 Bordes extraídos a partir de la imagen sólida con diferentes parámetros**

Con la variación de los parámetros se busca explotar la información referente a las características mejor definidas de la Ermita, las cuales son los restos románicos del muro meridional: piedra caleña.

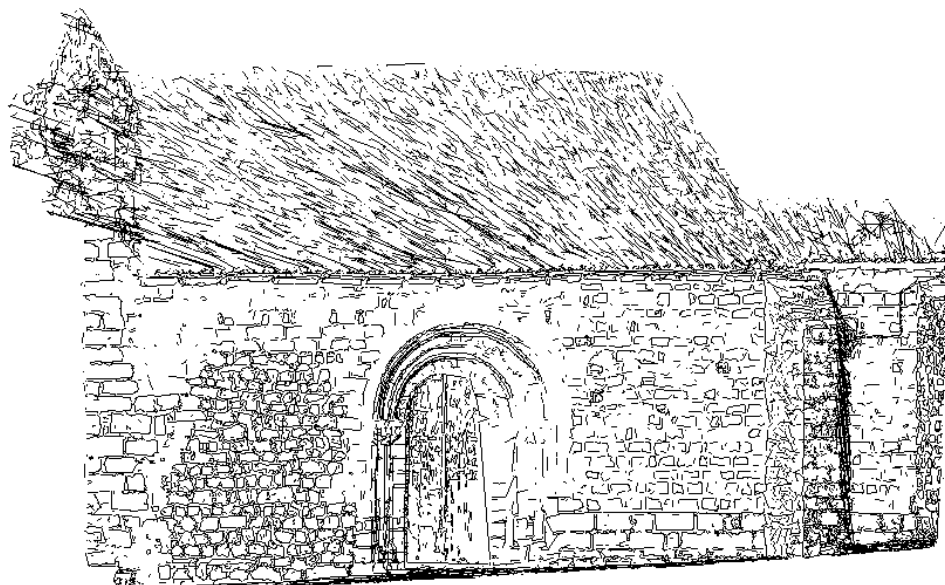
En la Figura 6.77 se puede apreciar como el proceso no es del todo robusto, ya que se obtienen bordes respuesta en zonas geoméricamente débiles, como es toda el área del tejado donde da ya propia morfología de las tejas y el ángulo de incidencia con respecto al haz perspectivo con origen en el punto de vista, da lugar a lugar a segmentos no representativos en la geometría real del objeto.



**Figura 6.78 Superposición de los bordes (en azul) extraídos de la imagen sólida sobre la capa RGB**

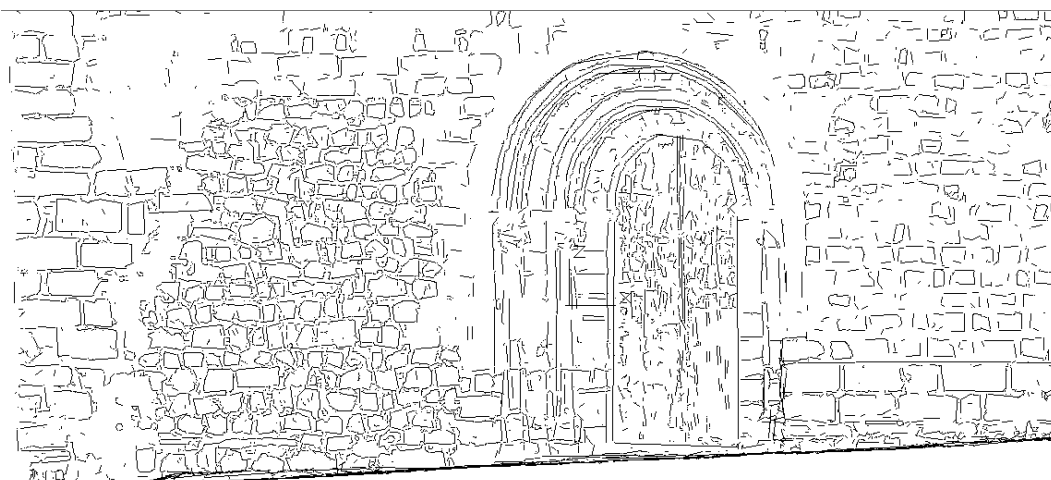
Como se comentó en la sección 5.1, el mayor potencial de la imagen sólida es que cualquier elemento bidimensional representado, analizado o extraído sobre ella es poseedor de información referente a su posición tridimensional en un sistema de coordenadas particular.

Los bordes extraídos de la imagen sólida verdadera pueden representarse sobre cualquiera de la capas radiométricas (Figura 6.78) como un proceso clásico de análisis de imagen. No obstante, dichos elementos lineales pueden ser exportados a un entorno de trabajo tridimensional CAD para su inspección y/o análisis. Para ello se eligió el programa Autocad<sup>®</sup>, donde los elementos lineales se exportan utilizando los formatos de clases definidos por el formato de intercambio DXF (*Drawing Exchange Format*).



**Figura 6.79** Elementos lineales de la imagen sólida representados en un entorno 3D para la segmentación  $\sigma=1$

Se puede apreciar en la Figura 6.79 y en la Figura 6.80 la posición tridimensional de los bordes. Son más llamativos los elementos lineales del tejado y del contrafuerte en la zona oriental por su distribución tan irregular, la cual es debida, en el caso del tejado, a la presencia de un patrón repetitivo de elementos muy pequeños como son las tejas, además dicha cubierta está recogida de forma muy oblicua en la foto de alta resolución. Con respecto al contrafuerte, las largas líneas oblicuas son debidas a la oclusión presente en la imagen proveniente de la cámara y a que al aplicar en el detector de Canny se especificó un umbral muy exigente para extraer los perímetros de los bordes de los ladrillos.



**Figura 6.80** Detalle de los elementos lineales de la fachada románica, representados en un entorno 3D

Sobre la extracción de los arcos y demás elementos curvos se aprecia la dificultad para automatizar su extracción, siendo la zona más llamativa la correspondiente a las arquivoltas de la puerta.

Por contrapartida, si se compara con la representación para la vectorización con una máscara gaussiana más intensa (Figura 6.81), se representan menos siluetas de los ladrillos y se reducen la densidad de los segmentos, disminuyendo el grado de detalle de la representación, aspecto el cual no tiene porque ser desechado, si el objetivo es buscar la representación más ligera posible.



**Figura 6.81** Detalle de los elementos lineales de la fachada románica para Canny con  $\sigma=2$

## 6.5. Registro de sensores: caso térmico

El siguiente caso de estudio ha sido aplicado sobre un edificio arquitectónico (CACTI - Centro de Apoyo Científico y Tecnológico a la Investigación) de estructura moderna ubicado en el Campus Universitario de Vigo (España), y representa un interés especial en la fusión de los sensores láser escáner y cámara térmica, especialmente a la hora de analizar el edificio desde el punto de vista de su eficiencia energética.

La termografía se fundamenta en analizar el calor emitido por la superficie de un determinado objeto. Esta radiación se emite en un determinado rango del espectro electromagnético, correspondiente al infrarrojo de onda larga (7 – 14  $\mu\text{m}$ ). No obstante, no es posible obtener la temperatura absoluta de un objeto ya que requeriría del conocimiento de las variables tales como: emisividad, temperatura ambiente, distancia,... entre otros factores, por lo que las técnicas convencionales de termografía se basan en analizar la radiación recogida por el sensor de forma relativa.

La inspección térmica de las fachadas de los edificios consiste en determinar la variación relativa de temperatura entre las superficies de elementos que deberían tener el mismo comportamiento, al menos desde el punto de vista teórico ya que compartirían el mismo material de construcción. La ventaja más clara y obvia de la termografía es que es una técnica que no requiere de ningún contacto físico con la superficie de estudio (salvo que se busque obtener la temperatura absoluta, donde sería necesario aplicar pintura óptica negra o cinta aislante negra), como sería el caso de emplear termómetros convencionales, por lo que es una técnica más eficaz en términos de captura de datos en campo, garantizando una alta productividad. Las termogramas resultantes permiten realizar un estudio de la eficiencia energética de los edificios a través del análisis de sus fachadas exteriores.

Con respecto a la fundamentación física asociada a las cámaras térmicas, recordar que para un objeto dado, la radiación que puede ser captada por cualquier sensor está compuesta por tres componentes, a saber (Salinero, 2008):

- Reflectividad: relación entre el flujo incidente y el que refleja una superficie.
- Emisividad: relación entre la emitancia de una superficie, y la que ofrecería un emisor perfecto, denominado cuerpo negro, a la misma temperatura.
- Trasmisividad: relación entre el flujo incidente y el transmitido por una superficie.

Estas tres componentes están relacionadas según la siguiente ecuación:

$$\tau + \varepsilon + \rho = 1 \quad (6.18)$$

Según la ecuación (6.18) existe un balance entre las variables de emisividad, trasmisividad y reflectividad, por lo que la variación de cualquier parámetro conlleva la variación del resto.

Los valores de transmisividad en el infrarrojo térmico ( $\tau$ ) para la mayoría de los objetos sólidos son prácticamente nulas (Salinero, 2008), por lo que las componentes de radiación que registraría una cámara térmica serían las resultantes de la propia radiación emitida por el objeto ( $\varepsilon$ ), o la procedente de otro cuerpo y que es reflejada sobre él ( $\rho$ ).

En el caso del análisis térmico de los edificios, los mayores niveles de pérdidas energéticas se producen en las fachadas y las cubiertas, por eso los análisis se enfocan a las fachadas, por su facilidad de captura (en comparación con las cubiertas) y porque revisten, en general, un gran porcentaje de la superficie de los edificios. A partir del estudio de la distribución de la temperatura superficial se pueden detectar las denominadas irregularidades térmicas, que suelen deberse a defectos de aislamiento del edificio.

Por todo ello, la aplicación de los sensores térmicos en la línea de trabajo desarrollada en esta Tesis Doctoral tiene especial relevancia en la sociedad actual dado su rol en el ahorro y eficiencia energética.

### 6.5.1. Problema y objetivo

El problema básico se centra en resolver las dificultades radiométricas debidas a la diferencia espectral propia de cada sensor. El objetivo es doble: por un lado tratar de resolver el registro de dos imágenes completamente diferentes: la imagen de rango procedente del láser y la imagen térmica procedente de la cámara; y por otro tratar de demostrar la capacidad de la fusión de sensores para la generación de productos híbridos derivados tales como: modelos 3D y ortofotos termográficas.

Se hace uso del láser escáner terrestre de diferencia de fase Faro Photon 80 (Tabla 6.82) y la cámara termográfica FLIR SC640 (Tabla 6.90)


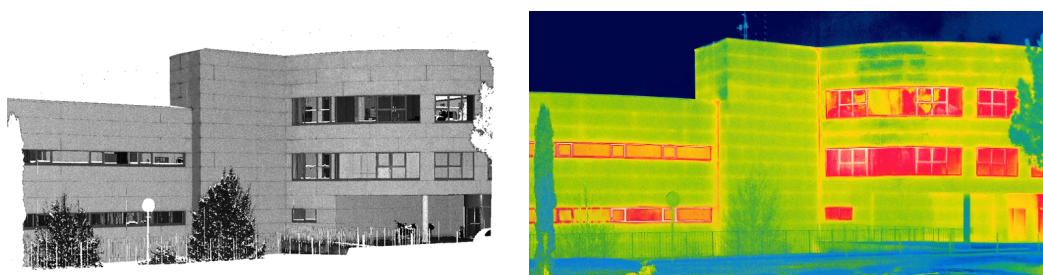
	Rango de medida termográfico	-40°C a +1500°C
	Resolución espacial	0,65 mrad (1cm a 30m)
	Rango espectral	7,5 – 13 $\mu$ m
	Campo de visión (FOV)	24°H x 18°V
	Rango de enfoque	50cm - $\infty$
	Resolución de la imagen	640 x 480 píxeles
	Resolución radiométrica	14 bit

Tabla 6.90 Cámara termográfica FLIR SC640

El espacio de trabajo se centra sobre la fachada de un edificio moderno de hormigón recubierto por paneles y ubicado en el Campus de la Universidad de Vigo. Particularmente, la densidad de la nube de puntos procedente del láser escáner es alta (sobre 2,8 millones de puntos con una resolución en el objeto de 10mm), la cual permite obtener una imagen de rango con la suficiente resolución (1333x600 píxeles) para aplicar con garantías un proceso de extracción de características. Sin embargo, en el caso de la imagen térmica sucede lo contrario, la resolución de la imagen es baja (640x480 píxeles) y el tamaño del píxel en el

objeto, considerando las especificaciones técnicas y una distancia de toma de 20 metros, es de 5 cm. La siguiente figura (Figura 6.82) muestra los datos de entrada en el proceso desarrollado.



**Figura 6.82** Datos de entrada: (Izquierda) Imagen de rango (GSD 1 cm) obtenida a partir del láser Faro Photon. (Derecha) Imagen termográfica (GSD 5 cm) adquirida con la cámara térmica SC640 FLIR.

Considerando que el tamaño del píxel de la imagen térmica es aproximadamente de  $25\text{cm}^2$ ; esta resolución es baja en comparación con otros sensores terrestres usados en el campo de la ingeniería y la arquitectura, como por ejemplo las cámaras digitales o los láser escáner terrestres (Figura 6.83).



**Figura 6.83** Imagen obtenida con cámara digital

### 6.5.2. Metodología y resultados

En relación a la metodología desarrollada, el proceso ha sido dividido en cuatro partes: i) pre-procesamiento de la imagen de rango y térmica; ii) extracción de características y correspondencia; iii) registro de las imágenes y iv) obtención de productos híbridos derivados.

Para la generación de la imagen de rango se emplean las siguientes aproximaciones iniciales:

Rotaciones (grados centesimales)			Traslación (m)		
$\omega$	$\varphi$	$\kappa$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$
101	183	0	0	0	2

**Tabla 6.91** Aproximaciones iniciales para la generación de la imagen de rango

La imagen de rango se convierte a niveles de gris mediante la conversión de paleta del color del software propietario asociado a la cámara térmica *FLIR ThermaCam Reporter 8.2*<sup>®</sup>. Este paso es necesario porque la conversión por



defecto (4.11) depara resultados diferentes, al trabajar el sensor en otro rango del espectro electromagnético.

La imagen de rango es mejorada mediante un remuestreo basado en un interpolador ponderado IDW aplicado sobre áreas de 3x3 píxeles y 75% de vecinos válidos. Mediante este procedimiento se recuperan 1432 puntos de la imagen de rango.

Con respecto a los parámetros de la distorsión radial de las lentes, la posibilidad de emplear en el flujo de trabajo imágenes libres de distorsión es un aspecto crucial para obtener productos híbridos multi-sensor precisos y fidedignos. Este hecho requiere un conocimiento o determinación de los parámetros internos de la cámara empleada. Como se comentó en su momento, las cámaras térmicas presentan elevados niveles de distorsión por lo que para su cálculo se emplea el programa sv3Dvision, que permite crear una imagen intermedia minimizando la distorsión.

	<b>PF<sub>x</sub></b>		<b>PF<sub>y</sub></b>		<b>PF<sub>z</sub></b>	
	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$	valor	$\sigma_{PFZ}$
x (pixel)	3119,722	0,324	-229,648	0,081	249,703	0,672
y (pixel)	214,79	0,324	174,656	0,081	15264,608	0,672

**Tabla 6.92 Datos de los puntos de fuga - FLIR SC640**

Los datos recogidos en la Tabla 6.92 son los valores geométricos y de precisión de los puntos de fuga obtenidos mediante el acercamiento recogido por el sv3Dvision (3.4.3), el cual se fundamenta en la estimación automática a partir de una serie de minisegmentos, agrupados según su pertenencia a uno de las tres posibles direcciones de fuga. En la Figura 6.84 se pueden ver los mini-segmentos previamente a ser agrupados según la dirección de fuga.



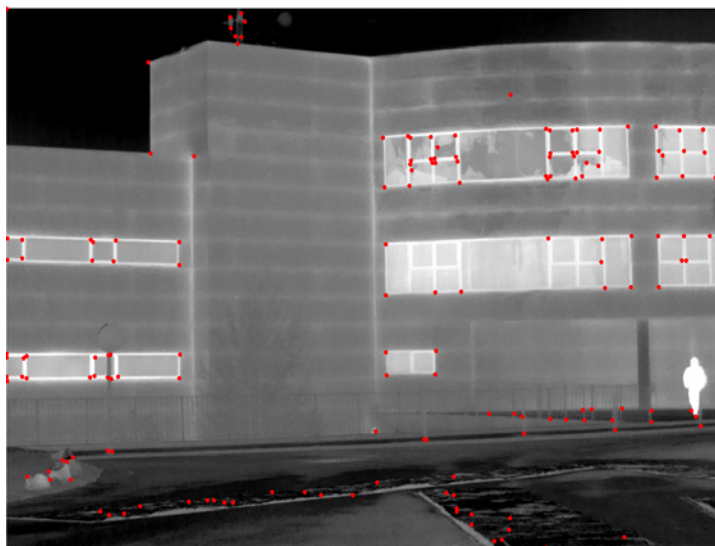
**Figura 6.84 Mini-segmentos obtenidos con el sv3Dvision**

A partir de dichos mini-segmentos, y según la metodología expuesta en la sección correspondiente, se calculan los parámetros de distorsión radial según el modelo gaussiano (3.51), siendo los resultados los recogidos en la Tabla 6.93:

$f_g$	$K_1$	$\sigma(K_1)$	$K_2$	$\sigma(K_2)$
7,971	$-8,676 \times 10^{-5}$	$4,9 \times 10^{-5}$	$2,327 \times 10^{-6}$	$2,6 \times 10^{-7}$

**Tabla 6.93** Parámetros de la distorsión radial para la cámara FLIR SC640

Una vez realizadas las operaciones de pre-procesado de los datos de entrada, es necesario proseguir con la extracción de los puntos de interés, proceso para el cual se empleará el operador de Förstner, especificándose como parámetros un umbral ( $w$ ) de 10 unidades y un valor de circularidad ( $q$ ) mínimo del 90%. Tras su aplicación resultan 172 puntos (Figura 6.85).



**Figura 6.85** Puntos de interés obtenidos mediante el detector de Förstner

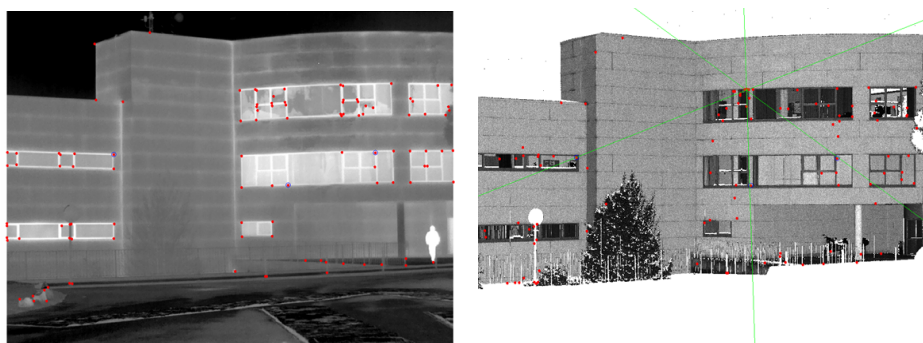
Una vez establecido el conjunto de puntos de interés, para los cuales se presume que tienen un elevado grado de representatividad para la imagen térmica expresado en niveles de gris, se busca establecer sus pares homólogos sobre la imagen de rango procedente de la captura del láser escáner terrestre. Para este proceso se establecerá una correspondencia jerárquica de solamente dos niveles de la pirámide de imágenes (4.4.4), ya que el número de puntos a procesar es reducido y las radiometrías son radicalmente diferentes evitando así que el matching por áreas elimine falsos positivos (error tipo II). También, debido a esta casuística se establece un umbral mínimo para el coeficiente de correlación cruzada del 70% para el último nivel de la pirámide. Por su parte, el tamaño de la ventana de búsqueda se establece en un tamaño de 15x15 píxeles.

Un proceso ideal requeriría de mayores valores de los umbrales, así como mayores escalones de la imagen, pero este caso de estudio excepcional requiere de las adaptaciones previamente mencionadas. El resultado de esta primera fase son 63 pares de puntos homólogos, número elevado para los puntos de entrada pero comprensible por los umbrales laxos.

Los pares de puntos homólogos obtenidos en primera instancia permiten resolver la matriz fundamental que relaciona a las dos imágenes que representan la misma escena. Para su determinación se emplea el algoritmo de Longuet-Higgins enmarcado en el sistema robusto de RANSAC. Este estimador robusto requiere de la especificación de un umbral para el proceso de votación, que para este caso es de 2,5 píxeles. Como resultado, tras un número máximo de 1000 iteraciones

(alcanzándose el valor máximo dadas las dificultades inherentes para el proceso, con un elevadísimo porcentaje de errores groseros), la matriz se resuelve con 16 pares de puntos homólogos con un error residual de 18,99 píxeles.

Una vez determinada la matriz fundamental es posible establecer las restricciones epipolares sobre el proceso de correspondencia, el cual se procede a recalcular. Concretamente, y para asegurar obtener el mayor número posible de puntos, en previsión de que el porcentaje de errores groseros sea elevado, se rebajará el umbral de correlación hasta el 40%, con una ventana de búsqueda de 7x7 píxeles y un buffer epipolar (espacio alrededor de la línea epipolar teórica) de 5 píxeles. Asimismo, la búsqueda no se realiza a lo largo de toda la línea epipolar sobre la imagen de rango, ya que al ser la orientación aproximada (Tabla 6.91) suficientemente buena, se puede para reducir la longitud de búsqueda. Finalmente, se obtienen 108 pares de puntos homólogos como resultado final de esta etapa, según se puede apreciar en la Figura 6.86.



**Figura 6.86** Correspondencia de puntos basada en restricciones epipolares. Izquierda: Imagen procedente de la cámara. Derecha: Imagen de rango procedente del láser escáner

Es importante reseñar como de los 108 pares de puntos homólogos solamente 85 puntos tienen correspondencia con los puntos de la nube láser en el sistema de coordenadas terreno.

Posteriormente, considerando los problemas derivados del proceso de correspondencia (presencia de errores groseros) se aplica un proceso de resección espacial apoyado por el test estadístico de Pope. Más concretamente, después de aplicar el test de Pope al 95% de nivel de significación de la distribución T-Student, solamente 5 puntos son considerados para el registro de la cámara térmica con respecto al láser escáner. Dada la dificultad de poner en común diferentes texturas radiométricas mediante métodos basados en áreas, es necesario aplicar el proceso de resección espacial apoyado en el método de RANSAC con un umbral de 0,75 metros y un elevado número de iteraciones. La siguiente tabla (Tabla 6.95) ilustra los resultados obtenidos en la resección de la cámara.

Parámetro	Valor	Desviación
$X_0$	-415 mm	599 mm
$Y_0$	-1087 mm	118 mm
$Z_0$	839 mm	451 mm
$\omega$	99,7481 <sup>g</sup>	0,5679 <sup>g</sup>
$\varphi$	181,3294 <sup>g</sup>	0,7111 <sup>g</sup>
$\kappa$	-0,3339 <sup>g</sup>	0,2222 <sup>g</sup>

**Tabla 6.94** Resultados del proceso de resección espacial robusto

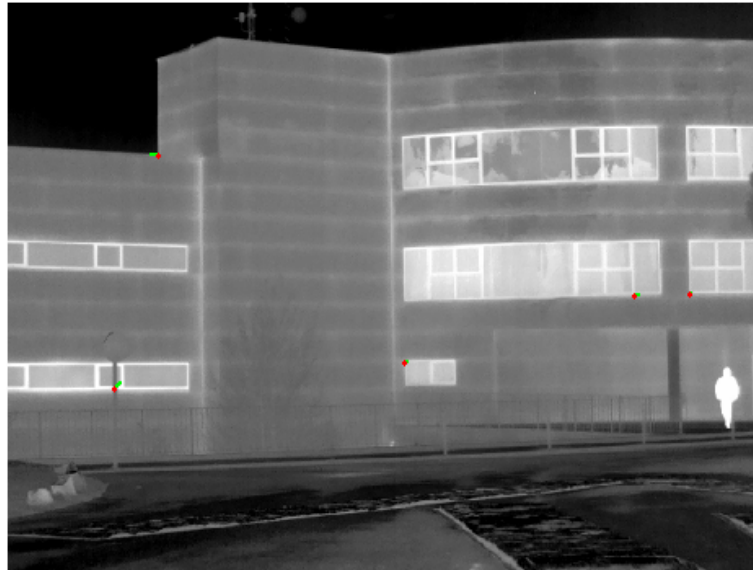
El reducido número de puntos se debe principalmente a la dificultad de poner en concordancia, de forma automática, datos procedentes de dos sensores tan diferentes como son el láser escáner terrestre (infrarrojo cercano) y la cámara térmica (infrarrojo de onda larga). Al igual que en los otros casos de estudio los valores asociados a la coordenadas  $Y$  (en relación a las traslaciones) y el giro  $\kappa$  (en comparación a las orientaciones) son los que menor error asociado tienen, aspecto que puede relacionarse (al menos en el segundo caso) con el giro propio de la cámara, que es el giro que mejor definido queda al establecerse los puntos de la resección espacial en todo el área (de forma teórica) del plano imagen, mientras que el resto de giros requieren de una mejor distribución para la optimización de su precisión.

Rotaciones (grados centesimales)			Traslación (m)			Índices de calidad	
$\omega$	$\varphi$	$\kappa$	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	$\sigma_{X_0Y_0Z_0}$ (m)	$\sigma_{\theta,xy}$ (pix)
99,7481	181,3294	-0,3339	-0,415	-1,087	0,839	0,76	0,7

**Tabla 6.95 Parámetros e índices de calidad resultantes del proceso de resección espacial robusto apoyado por el test de Pope.**

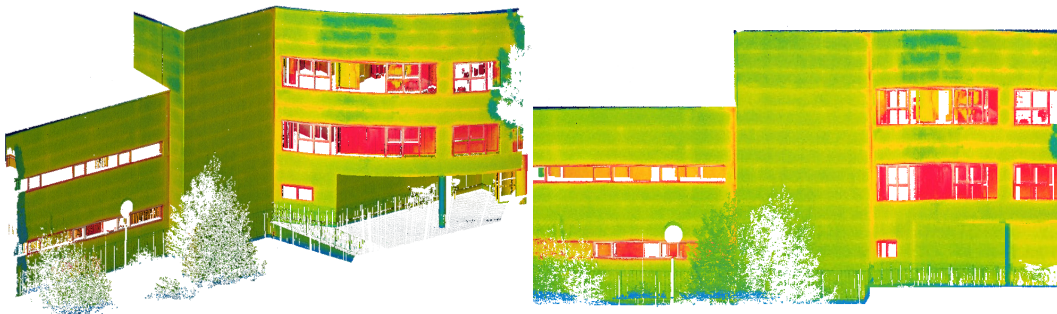
Como se aprecia en el índice de calidad (Tabla 6.95) referido al plano imagen, o error de reproyección, se ha alcanzado un precisión subpíxel, valor muy bueno si se compara con la baja resolución inicial de la imagen térmica (640x480). Por ello, y aunque los valores de precisión asociados al origen del puntos de vista pueden parecer elevados, el valor de  $\sigma_{\theta,xy}$  indica que se ha apurado al máximo las posibilidad de la imagen térmica. En la Figura 6.87 se reflejan los datos referidos anteriormente, donde se representan los vectores de error (en color verde) para los puntos que intervinieron en la resolución de la resección espacial. Más concretamente, los parámetros del error de reproyección se pueden resumir en los indicadores estadísticos de la media, desviación y valores extremos. Para este caso, el valor medio del conjunto ( $\sigma_{\theta,xy}$ ) es de 0,7 píxeles, mientras que la desviación típica asociada es de 0,5 píxeles lo que indica el bajo grado de dispersión de los puntos, factor altamente relacionado con la precisión de la propia orientación externa. Con respecto a los valores extremos, el valor máximo se corresponde con 1,3 píxeles, mientras que el límite inferior alcanza la cifra de 0,1 píxeles (valor prácticamente despreciable y aproximable a cero en la práctica).

Como se ha mencionmado anteriormente, las reducidas cifras de error unidas a la altísima dificultad inherente al caso de estudio propuesto en esta sección, ponen de manifiesto que la línea de trabajo de automatización de datos láser escáner basada en la hibridación de sensores es capaz de manejarse incluso en las situaciones más desfavorables como es la actual: sensores que trabajan en diferentes zonas del espectro visible.



**Figura 6.87** Error de reproyección en píxeles con un factor de aumento (x10) sobre la imagen térmica

Finalmente, una vez que ambos sensores han sido fusionados correctamente, son generados los siguientes productos termográficos híbridos: un modelo térmico tridimensional y su correspondiente ortofoto (Figura 6.88). Los productos derivados del modelo 3D y la ortofoto pueden ser vistos como productos híbridos que ponen en conjunto las propiedades cualitativas de la imagen térmica con las propiedades cuantitativas (métricas) del modelo láser. De hecho, la ortofoto puede ser explotada como una matriz donde las coordenadas píxel fila y columna están relacionadas con la posición planimétrica del objeto mientras que el valor del píxel representa la temperatura.



**Figura 6.88** Productos híbridos resultantes de la fusión de sensores: modelo 3D térmico (Izquierda) ortofoto térmica (GSD 5 cm) (Derecha).

En base a las ortofotos creadas, se generan isotermas con tres grados de separación para zonificarlas según sus áreas de temperatura (Figura 6.89). El área de las superficies con diferente temperatura puede ser cuantificada a partir del número de píxeles de cada isoterma y del GSD de ortotermograma.

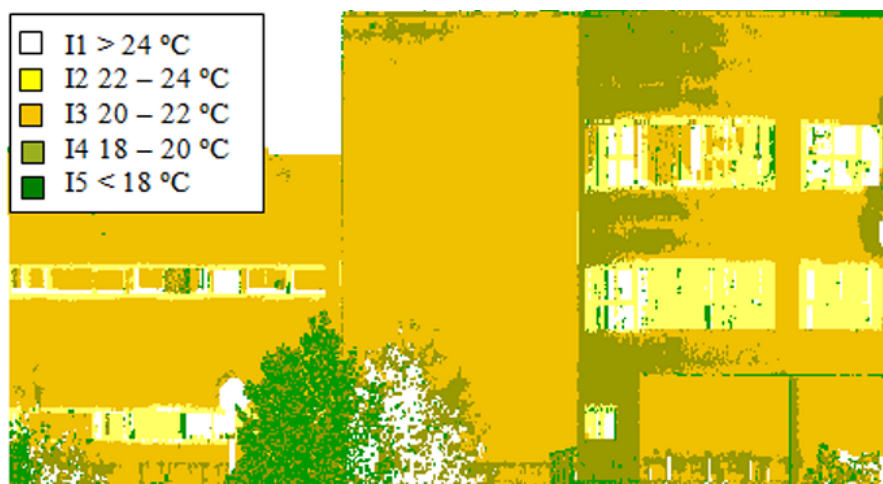


Figura 6.89 Análisis térmico: isotermas

La comparación de las pérdidas caloríficas se realizaron, considerando en primer lugar, las temperaturas medias de las isotermas con sus superficies correspondientes y seguidamente la temperatura media para toda la superficie entre dos isotermas, para así cuantificar el grado de significación en la comparación de las isotermas por separado.

Puesto que este último aspecto de la sección excede el ámbito de esta Tesis Doctoral solamente se mencionará la formulación y metodología empleada.

El cálculo de la pérdida térmica se lleva a cabo mediante un análisis dimensional aproximado y la ecuación del flujo de calor (6.19). El número de Nusselt<sup>31</sup> fue estimado teniendo en cuenta la convección natural y el flujo laminar a través de la aproximación propuesta por (Incropera et al., 2011) o muros verticales y valores de Rayleigh  $<10^9$ .

$$Q = \sum_i U_i \cdot A_i \cdot (1-b) \cdot (T_{ext} - T_{int}) \quad (6.19)$$

donde  $Q(W)$  es la pérdida de calor por transmisión,  $U_i (W/m^2K)$  es el coeficiente de transmitancia térmica de la superficie  $i$ ,  $A_i (m^2)$  es el área de la superficie  $i$ ,  $b$  es el factor de temperatura de los elementos de construcción de oficina,  $T_{ext} (°C)$  es la temperatura exterior, mientras  $T_{int} (°C)$  es la temperatura del interior del edificio. El factor de temperatura,  $b$ , permite tener en consideración que la temperatura de la superficie exterior de los elementos de la construcción puede ser diferente de la temperatura externa. El factor de la temperatura para los elementos de la construcción frente a la del aire exterior es consecuentemente igual a cero (Wittchen y Aggerholm, 2000).

Los resultados del análisis se muestran en la Tabla 6.96, donde se obtiene una diferencia cercana al 25% entre el cálculo de las pérdidas térmicas en base a la superficie de las isotermas y el cálculo para toda las superficie.

<sup>31</sup> El número de Nusselt ( $Nu$ ) representa el cociente entre el coeficiente de transmisión del calor en la superficie y la conducción interna de fluido por unidad de longitud  $k/L$ . (García, 1996)

---

	<b>Isoterma 3</b>	<b>Isoterma 4</b>	<b>Superficie completa</b>
A (m <sup>2</sup> )	71,5468	17,9684	89,5152
Temperatura media (K)	294,15	292,15	293,15
Coeficiente de transmitancia térmica (W/m <sup>2</sup> K)	1,779	1,356	1,953
Pérdida de calor por transmisividad	381,940	1,947	288,172

**Tabla 6.96 Estimación de la pérdida de calor en la fachada del edificio. Comparativa entre las isotermas por separado y conjuntamente**





## Capítulo 7

### Conclusiones y perspectivas futuras

Mediante la nueva aproximación de integración expuesta en esta Tesis Doctoral, se resuelve de forma eficiente el problema central del registro de sensores, utilizando para este fin esquemas de procesado de datos robustos y fiables. En concreto, la Tesis Doctoral desarrollada en el marco de la automatización del procesamiento de datos procedentes del láser escáner terrestre conlleva las siguientes aportaciones:

- Calibración geométrica de dos láseres escáner terrestres de tiempo de vuelo.
- Verificar la automatización en la estimación de la distorsión radial a partir de una imagen.
- Registro de sensores mediante la integración de procesos estadísticos y robustos.
- Imagen sólida verdadera fruto del registro de ambos sensores.
- Modelización híbrida en sus vertientes geométrica y radiométrica.

Si bien el núcleo principal de esta Tesis Doctoral es el proceso de fusión de sensores como medio de explotación automatizada de la información contenida en la nubes de puntos láser, ya sea a través de las imágenes sólidas, mediante un proceso de restitución tridimensional o solamente mediante el estudio del modelo tridimensional fotorealístico resultante; no hay que olvidar la necesidad de adecuación de los inputs de entrada al proceso.

#### 7.1. Síntesis de las contribuciones

Seguidamente se resumirán las aportaciones realizadas en cada uno de los aspectos mencionados previamente. Para seguir el mismo orden que el expuesto en el índice se abordará el capítulo correspondiente a la **calibración geométrica de los láser escáner terrestres** de tiempo de vuelo, en donde los errores instrumentales correspondientes a este tipo de aparatos fueron tratados en las secciones 3.1, 3.2 y 3.3. El aspecto innovador de esta aportación radica en la carencia de un estándar de calibración para estos equipos, en un momento en el cual se están implantando no sólo en el campo de la topografía o la fotogrametría,

sino que están también presentes en otras ingenierías o campos tales como la ciencia forense o el sector de la animación por ordenador; conjuntamente con el desarrollado de la herramienta software “*TLSCalib*” como plataforma de testeo del modelo implementado.

La importancia de que las nubes de puntos estén corregidas de sistematismos es un aspecto incuestionable, en tanto que los procesos expuestos de fusión de sensores no contemplan dichas peculiaridades en los datos. Es por tanto un aspecto que al igual que con otros instrumentos topográficos y/o fotogramétricos debe ser siempre considerado.

La sección 6.1 pone en contraste los aspectos teóricos desarrollados en esta Tesis Doctoral frente a los datos empíricos de los casos de campo. Mediante el campo de calibración propuesto e implementado se ha podido modelar los errores sistemáticos presentes en los tres componentes principales del láser escáner terrestre: distanciómetro, sistema de deflexión y plataforma rotatoria. Estos errores son difíciles de estimar y modelar en tanto el láser escáner terrestre es un sistema muy complejo que incluye múltiples componentes ópticos y electrónicos, participando cada uno de ellos con su propia componente de error. Una buena comprensión de estos errores requiere de un buen conocimiento del diseño del sistema del láser escáner, aspecto el cual no suele ser accesible para los usuarios en tanto está protegido por los fabricantes. Todos estos factores hacen extremadamente difícil el poder desarrollar un procedimiento estándar para la calibración de los sistemas láser escáner que permita identificar y corregir los posibles errores sistemáticos que presenta el equipo. No hay que olvidar, que la determinación y corrección de los sistematismos del equipo láser escáner terrestre, permiten que las medidas que se realicen sean más precisas y fiables, permitiendo el uso del láser escáner en casos donde se requiera una alta precisión (monitorización de estructuras y/o determinación de deformaciones).

En la primera parte de la sección 6.1 se han determinado los errores sistemáticos de dos láser escáner terrestres de tiempo de vuelo: Trimble GX y Riegl LMS-Z390i; evaluándose la exactitud, precisión y repetibilidad de sus observables.

La aproximación de autocalibración expuesta asegura la fiabilidad porque ha sido reforzada con un proceso iterativo mínimo cuadrático que incorpora estimadores robustos y tests estadísticos. El modelo estocástico considerado ha sido apoyado por múltiples gráficos bivariantes entre los errores de los observables del láser escáner terrestre y dichos observables, lo cual permite identificar posibles tendencias sistemáticas.

El modelo propuesto permite mejoras del 50%, 66% y 32% en términos de exactitud en los observables de los ángulos acimutales, cenitales y distancias, respectivamente para el láser Trimble GX. En el caso del láser Riegl LMS-Z390i analizado, las mejoras son del 21%, 61% y 49% respectivamente. Por ello la consideración de los parámetros sistemáticos logra que las componentes de las coordenadas cartesianas sufran una mejora de entre 36% a 60% y entre el 15% y el 53% para los láser escáner terrestre Trimble GX y Riegl LMS-Z390i respectivamente.

En la segunda parte de la sección 6.1 se contrastan los resultados obtenidos con el campo de calibración y los modelos funcional y estocásticos expuestos. Para dicha

labor se emplea un artefacto metrológico de bajo coste, el cual posee trazabilidad hacia el metro nacional. Alternativamente al hecho de utilizarse como chequeo, se puede valorar su utilización como método alternativo para chequear la fiabilidad de los TLS en las medidas de características geométricas y/o modelado de elementos patrimoniales (por ejemplo; fachadas)

El control externo permite el análisis de la exactitud y precisión de los TLS. La metodología utilizada para evaluar la exactitud se basa en los invariantes espaciales de distancia entre centros de esferas. Dichos centroides se obtienen empleando el estimador Robusto de RANSAC apoyado en un ajuste mínimo cuadrático. Para estudiar exhaustivamente dichos valores de exactitud, se aplican múltiples ajustes para las superficies de las esferas, que luego se combinan para obtener no sólo el valor de exactitud, sino también distribuciones, en forma de histogramas, de dichos errores para su comparación.

Además el artefacto de calibración dispone de una serie de cubos de diferentes dimensiones que permiten evaluar la exactitud del distanciómetro, la resolución del láser escáner terrestre, la influencia del ruido en las tomas, la relación existente con la resolución de escaneo, así como la aparición de errores groseros en la toma de datos bajo determinadas condiciones de escaneo. Más específicamente, se constató como los valores de repetibilidad del láser Trimble GX a 60 metros son mejores que a una distancia menor (30 metros) debido a las condiciones reseñadas.

Los resultados de este control metrológico externo han permitido contrastar la validez de los parámetros de calibración previamente obtenidos, así como la validez en distancia de los sistematismos, los cuales fueron obtenidos en un campo interior de pequeñas dimensiones. Otra conclusión reseñable obtenida del análisis del patrón metrológico, fue la evaluación de la validez de que parámetros sistemáticos son los que realmente deben utilizarse para calibrar el TLS.

Sobre el aspecto de la **determinación de la distorsión radial** siempre es adecuado y recomendado disponer de los datos de calibración en laboratorio de las cámaras fotográficas empleadas, aunque no siempre van a estar disponibles. Por ello, en esta Tesis Doctoral se analizan y testean diferentes soluciones para tratar de abordar dicha problemática.

Como se vio en el Capítulo 4 y más concretamente en las secciones 4.2.3 y 3.4, la imagen digital o imagen cámara debe ser lo más compatible posible con la imagen de rango para permitir una adecuada fusión o registro de los sensores. Es necesario recordar que la imagen de rango, al ser una imagen sintética generada a partir de los datos de la nube de puntos láser carece de influencia alguna de distorsión, ya sea radial o tangencial, por lo que la imagen debería carecer o minimizar dicha influencia.

Ante la posibilidad de no disponer de los datos de calibración del conjunto de cámara y objetivo, la opción de determinar la componente de la distorsión radial a partir de la imagen usada, u otra del mismo conjunto pero con la misma configuración de distancia focal y enfoque, cobra una importancia vital en el proceso. Además puesto que la distorsión radial tiene siempre mayor predominancia que la componente tangencial, una imagen aun solamente

corregida de distorsión radial da lugar a una sustancial mejora en el proceso de registro de sensores.

El programa sv3Dvision, como se ha visto en la sección 6.2, permite obtener valores de distorsión radial consistentes con otras herramientas (comerciales y de código abierto), estando las máximas discrepancias localizadas en los bordes del sensor. Asimismo, la precisión del ajuste basado en una sola imagen alcanza precisiones cercanas al píxel (entre 1,0 y 1,3 para los casos evaluados).

Gracias a los tests realizados en la sección 6.2 se encuentra la solución para hacer más compatible la imagen cámara, siempre y cuando no estén disponibles los datos de calibración completa para la cámara, objetivo y configuración empleada.

En conclusión, la herramienta sv3Dvision se posiciona como una solución de media precisión en el campo de la calibración geométrica de cámaras fotográficas, pero con la destacada ventaja de que puede resolverla a partir de una sola imagen.

El proceso de **registro de sensores** establece el flujo de trabajo desarrollado para conseguir la integración automática de los sensores considerados: láser escáner terrestre y cámara digital. Como parte del núcleo principal de la Tesis Doctoral recoge la mayor parte de la metodología desarrollada:

- Pre-procesamiento de los datos.
- Detección robusta de características.
- Procesos de correspondencia jerárquica.
- Resección espacial robusta y estadística de la cámara con respecto al láser.

Son de especial interés los procesos robustos y estadísticos que toman parte en la mayoría de los acercamientos desarrollados aportando precisión y fiabilidad al registro.

Las tareas de preprocesamiento son las operaciones previas necesarias para poder comenzar la aplicación del propio proceso de registro. Aunque dichas operaciones, enfocadas a garantizar la compatibilidad de los inputs, están basadas en algoritmos conocidos en la Comunidad Científica: condición colinealidad, Newton-Raphson, interpoladores basados en la distancia, ... etc; el aspecto más destacado de este apartado radica en la denominada imagen de rango (*range-image*), que permite convertir la información tridimensional contenida en la nube de puntos láser en información bidimensional apta para la aplicabilidad de técnica propias del campo de la fotogrametría y la visión computacional. El concepto de la imagen de rango es ampliamente conocido, mayormente en el empleo de mapas de profundidad, pero en esta Tesis Doctoral se convierte dicho concepto en medio de puesta en común de los datos proporcionados por el láser escáner terrestre con las imágenes procedentes de las cámaras. No hay que olvidar que el flujo de trabajo expuesto está enmarcado bajo un contexto bidimensional, donde existen desarrollos en diferentes campos (fotogrametría digital, visión computacional,...) que pueden ser puestos en común para explotar su sinergia.

Dentro del propio proceso de fusión de sensores convergen técnicas de análisis de imagen, como las propias de la etapa de detección y extracción de características, donde son empleados diferentes algoritmos de probada solvencia. No obstante, esta fase es la antesala de una parte fundamental del desarrollo: el proceso de correspondencia jerárquica robusta. En esta fase se ponen en común los datos 2d de la imagen cámara y la información 3d de la nube de puntos mediante una combinación innovadora de técnicas y algoritmos de varios campos, dando lugar a un acercamiento jerárquico que realiza el registro de sensores.

Como se ha comentado a lo largo de esta tesis Doctoral, las técnicas clásicas de correspondencia son de aplicación en la visión computacional, de igual manera que las restricciones epipolares lo son en el campo de la fotogrametría, y los estimadores robustos lo son en el ajuste de observaciones. La originalidad de este apartado procede de la adecuada mezcla de algoritmos buscando la ventaja inherente a cada uno de ellos para lograr un resultado de calidad. Por ello, la correspondencia ABM se refuerza con el empleo de umbrales adaptativos al integrarse en una pirámide de imagen, la cual agiliza las operaciones. Las correspondencias más precisas se logran mediante la técnica LSM la cual solventa sus deficiencias de aproximaciones iniciales mediante la anteriormente mencionada ABM. El refinamiento del matching para aumentar la calidad del resultado se obtiene aplicando la teoría de la geometría proyectiva bidimensional, es decir, la geometría epipolar, la cual se refuerza a su vez con el estimador de RANSAC de naturaleza no determinista.

Como se puede apreciar, la línea de trabajo propuesta para el registro de sensores hace uso de herramientas ya conocidas y de utilidad probada, pero que no habían sido combinadas anteriormente de dicha manera, y sobre todo de manera innovadora para conseguir la fusión de dos sensores tan diferentes como son el láser escáner terrestre y la cámara digital.

Una vez puestos en común ambos sensores, en base a los puntos de interés característicos de la imagen procedente de la cámara, el proceso de registro continua para tratar de resolver la posición angular y espacial de la cámara con respecto al centro de proyección del láser escáner terrestre. Para ello, es necesario realizar la operación de resección espacial o intersección inversa, herramienta muy conocida dentro del campo de la fotogrametría aérea clásica. No obstante, dicha operación no se reduce a la aplicación de un algoritmo conocido, sino que, siguiendo la estela de combinación de técnicas multidisciplinarias, se refuerza con una serie de estimadores robustos y estadísticos, para reforzar los resultados del registro, los cuales dada la disparidad de elementos puestos en común está plagada de errores groseros que dificultarán sobre manera el proceso.

Finalmente, mediante un proceso de reproyección basado en la condición de colinealidad, particularizado para tener en cuenta las oclusiones y sombras de la nube de puntos, se obtiene un modelo 3D fotorealístico de alta resolución a la par de otra serie de productos derivados.

En resumen, los puntos más relevantes del proceso de registro de sensores se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

- Proceso de correspondencia jerárquico y robusto que combina múltiples técnicas científicas ampliamente probadas en el campo de la fotogrametría digital y la visión computacional. Dichos acercamientos han sido exitosamente combinados e implementados para poder ser aplicados a casos de estudio reales.
- Desarrollo de una aproximación simple y eficiente para resolver el problema del registro de sensores, mediante la sinergia de múltiples técnicas como la condición de colinealidad, los estimadores robustos y los test estadísticos.
- Concretamente, el proceso de registro aquí presentado permite las siguientes mejoras en comparación con otros acercamientos existentes (ya comentadas en la introducción):
  - Reducción al mínimo de la interacción del usuario. En algunos casos particulares puede decirse que la intervención es nula, mientras que en el resto se limita a un mero proceso de supervisión y afinamiento de los algoritmos (definición de umbrales).
  - Eliminación de restricciones tales como la disposición estereoscópica y/o unión física entre los sensores
  - Eliminada la necesidad de emplear tarjetas de puntería especiales o restricciones geométricas (puntos de fuga).
- En resumen, la herramienta software desarrollada “*USALing*” permite generar mapeados de texturas de alta resolución mediante una aproximación sencilla y flexible.

A pesar del aspecto original e innovador del proceso de registro de sensores como medio para la automatización del procesamiento de datos TLS, dicho flujo de trabajo quedaría truncado si no se testease mediante una serie de casos de estudio experimentales, los cuales han sido recogidos en las secciones 6.3, 6.4 y 6.5.

El primer test consiste en probar la metodología expuesta para un caso desfavorable, donde se aplica a las pinturas rupestres de la Cueva de Llonín, Patrimonio de la Humanidad, concretamente a la pintura del serpentiforme. Se trata de un caso desfavorable porque el elemento objeto de estudio tiene reducidas dimensiones, ha sido documentado con baja densidad de puntos y su textura radiometría carece de elementos significativos (es muy uniforme). A pesar de todas estas dificultades ambos sensores son registrados con precisiones de 124mm en el posicionamiento espacial y un error de reproyección de 2,5 píxeles, y todo a pesar de haber llegado a la fase final de resección espacial con un número reducido de puntos libres por la influencia de los errores groseros. Al estar registrados ambos sensores se permite la posibilidad de vectorizar la forma del pictograma para extraer su silueta, que aun estando indefinida (trazos gruesos, presencia de manchas rocosas,...), permite obtener información geométrica 3D al haberse generado la correspondiente imagen sólida verdadera.

Una vez tratado el caso desfavorable, se cambia a un caso idóneo desde el punto de vista teórico: La fachada del Siglo XII de la Ermita de San Segundo

monumento histórico-artístico (sección 6.4). Se trata de un caso favorable porque dicha fachada tiene una textura radiométrica contrastada para la extracción de puntos de interés, ergo servirá de campo de prueba para valorar el potencial del proceso de registro de sensores. Otro aspecto a valorar es que la correspondiente captura láser se realizó con una densidad media-alta. Como resultado, las diferentes fases del proceso de registro funcionan de forma óptima para deparar una resección final cuyas índices de calidad, error en posicionamiento de 21mm y de reproyección de 0,66 píxeles, son indicativos del grado de precisión alcanzable. Una vez registrados los sensores se puede generar la imagen sólida verdadera correspondiente y a partir de ella extraer los segmentos que conforman la geometría de la fachada, o lo que es lo mismo su vectorización tridimensional.

En la sección 6.5 se busca explotar las posibilidades de la automatización del procesamiento de los datos láser escáner terrestre conjuntamente con un sensor completamente diferente a los tratados anteriormente: la cámara termográfica.

Como era de preveer, la fusión de dos sensores tan distintos, su registro o puesta en común es claramente un objetivo de difícil consecución, ya que el mismo objeto registrado por ambos sensores tiene un comportamiento diferente según la zona del espectro electromagnético considerado.

El esquema de trabajo propuesto consigue deparar una fusión aceptable, a pesar del altísimo porcentaje de errores groseros presentes en las diferentes fases del proceso. Estos resultados entran dentro de un nivel tolerable (error de posicionamiento de 0,76 m) debido a la baja resolución de la imagen lo cual se confirma fácilmente vía el error de reproyección de 0,7 píxeles. No obstante y a la vista de los resultados, se demuestra que la integración de estos dos diferentes tipos de sensores tiene la capacidad de deparar interesantes productos híbridos derivados, tales como:

- **Imágenes multiespectrales:** en tanto se puede fusionar la imagen óptica, la térmica y la intensidad procedente del láser
- **Ortofotografías térmicas:** para evaluaciones de eficiencia energética, pérdidas energéticas, ahorro,... aspectos de alta relevancia en nuestra sociedad actual.

Como se comentó anteriormente, el proceso de registro de sensores no se limita a la mera determinación de los parámetros de orientación externa de un sensor con respecto al otro, sino que permite la explotación de la información de ambos sensores de forma sinérgica mediante unos productos derivados, de los cuales el más destacable es la imagen sólida verdadera (TSI), que supone una innovación con respecto a la propuesta original y que a partir de ella es posible articular los procesos de modelización híbrida, tanto geométrica (sección 5.2) como radiométrica (sección 5.3).

Las imágenes sólidas verdaderas (TSI) abren un nuevo camino hacia un conjunto de nuevos productos en el campo de la arquitectura y las aplicaciones topográficas. Una imagen sólida verdadera posibilita:

- Determinar en tiempo real la posición de cualquier punto en un sistema de referencia 3D usando solamente el ordenador.

- Llevar a cabo medidas 3D precisas (líneas, áreas, volúmenes, ángulos,...) mediante la selección de los puntos sobre la imagen sin necesidad de estereoscopia.
- Integrar información radiométrica adicional (diferentes imágenes multiespectrales).
- Derivar análisis cualitativos y cuantitativos de forma conjunta e integrada.

El proceso de automatización en el procesamiento de los datos láser escáner estaría inconcluso si solamente se considerase el registro de sensores y el producto derivado: la TSI. En este sentido, es necesario considerar el aspecto de explotación de la información contenida en ella, proceso el cual se denomina **modelización híbrida**. Dicha modelización tiene dos vertientes: geométrica y radiométrica, entendiéndose la primera como el paso de la nube de puntos a superficies o entidades CAD. Este concepto es relevante porque las nubes de puntos laser son difíciles de modelar debido a la imprecisión en la definición de sus aristas, sobre todo cuando las nubes son poco densas y sin olvidar que la conversión a un modelo de superficie mediante mallas con estructura TIN conlleva un altísimo coste computacional.

La **modelización híbrida geométrica** se articula en dos fases automáticas: la primera es la detección de los bordes de la TSI mediante el operador de Canny, y la segunda, la segmentación en base a un algoritmo muy similar al de Burns, obteniéndose segmentos lineales cuyos nodos final e inicial poseen directamente sus coordenadas tridimensionales en el sistema coordenado objeto. El resultado de la vectorización es un conjunto de segmentos que caracterizan al objeto, pero de una forma más ligera y singularizada si se compara con las mallas de triángulos irregulares. Por supuesto existe la posibilidad de interacción por parte del usuario final a la hora de dibujar de forma interactiva sobre la TSI (en 2D) de forma que las polilíneas generadas queden automáticamente geo-referenciadas.

Con respecto a la **modelización híbrida radiométrica**, es necesario considerar los aspectos de proyección de texturas a dos niveles: sobre las mallas de triángulos y/o sobre las nubes de puntos y, en consecuencia, el problema de reproyección asociado; sin olvidar en ambos casos la gestión de partes vistas y ocultas mediante el algoritmo Z-buffer.

Finalmente, y no menos importante, conviene reseñar que a partir de las capas de información recogidas en la TSI se pueden aplicar técnicas de clasificación automática no supervisada, con el fin de obtener una clasificación del conjunto de datos que permitan realizar análisis cualitativos. De entre estas técnicas de análisis de datos (*data mining*) se ha aplicado el algoritmo k-medias (ver sección 5.3) el cual en conjunción con la TSI permitiría realizar clasificaciones relevantes, dadas las diferentes capas de información radiométrica (visible, infrarrojo cercano, térmico,...). Dichos análisis se pueden aplicar a campos tales como la identificación y catalogación de patologías en las fachadas de edificios y elementos patrimoniales, o el hallazgo de información no visible para el ojo humano, como serían pinturas rupestres en cuevas prehistóricas. A esta información de carácter cualitativo habría que sumar como valor añadido el valor cuantitativo a extraer directamente a partir de los perímetros de las clases



obtenidas las cuales podrían trasladadas a un modelo CAD para posteriores análisis.

## 7.2. Perspectivas futuras

En esta Tesis Doctoral se han tratado una amplia variedad de aspectos todos ellos relacionados con la automatización del procesamiento de datos láser. Este amplio campo de trabajo ha servido para obtener una idea más global sobre las disciplinas, no solo propias del láser escáner terrestre sino anexas a él, dado su carácter multidisciplinar. Fruto de este análisis general es posible prever unas líneas de trabajo futuras que estén basadas en la ampliación de lo aquí expuesto, y que permiten seguir avanzando en esta tecnología cambiante y en constante evolución.

En este sentido, y en relación con los aspectos tratados, se pueden destacar como ideas futuras las siguientes:

- En el contexto de la **calibración geométrica del láser escáner terrestre**, los procesos de autocalibración propuestos permiten una mejora y retroalimentación continua basada en el análisis y testeado de los resultados y equipos analizados. Dentro de este apartado se plantea como futuribles la consideración de nuevas fuentes de error que puedan afectar a las medidas láser tales como: las propiedades del material escaneado, las condiciones ambientales del entorno de escaneo (humedad, temperatura, incidencia de luz solar). Asimismo, la metodología del control externo (sección 6.1.7) y el patrón metrológico de bajo coste utilizado permitiría realizar estudios sobre la posible deriva (drift) de los láser escáner terrestres, así como evaluar las condiciones metrológicas de dichos sistemas durante su vida útil.
- Respecto a la **determinación de la distorsión radial** si bien el programa sv3Dvision se ha demostrado como una aplicación de precisión media para la determinación de la distorsión radial mediante una única imagen, se hace necesario avanzar hacia una calibración completa de la imagen, que permita conocer más parámetros internos de la cámara y que por consiguiente la precisión del registro también mejore.
- Una importante área de investigación para el futuro es la mejora del proceso de **extracción de características** (sección 4.3), mediante acercamientos tales como el SIFT (Scale-invariant feature transform), que puede transformar las imágenes cámara y de rango en una colección de vectores de características locales, cada uno de los cuales es invariante a las traslaciones, rotaciones, escalados, y parcialmente invariantes a los cambios de iluminación y afinidades o proyectividades (homologías). Esto permitiría que cualquier cambio en la perspectiva o rotación entre ambas imágenes no afecte al proceso de extracción de características.
- Con respecto al esquema general de trabajo del **registro de sensores**, en aras a aumentar su eficiencia sería interesante mejorar los algoritmos (de todas las fases involucradas) para poder trabajar con imágenes de peor

resolución, recordando que el proceso de extracción de características está ligada a la buena calidad de las imágenes. También se plantea como una idea futura eliminar cualquier interacción del usuario en el proceso, ya sea durante la indicación de la aproximación inicial de la orientación externa de la cámara, como en la indicación de los umbrales de trabajo de los diferentes algoritmos. Aunque dicho planteamiento es el que más complicaciones presenta de cara al futuro al requerir que los algoritmos puedan comportarse de forma adaptativa, para no sólo proveer de resultados válidos durante el proceso, sino que estos sean de calidad. Finalmente, se podría plantear la adición de una aproximación para manejar los problemas de las oclusiones durante el proceso de registro, ya que las aplicaciones del Patrimonio Arquitectónico son bastante comunes debido a la propia morfología de las construcciones.

- En el contexto de la **imagen sólida**, la idea es ampliar los métodos de proyección expuestos, central basada en la colinealidad y ortográfica, al siguiente paso que sería un panorama sólido, es decir, una imagen sólida verdadera en proyección equirectangular que permitiría dotar de información geométrica a las imágenes panorámicas. Este tipo de imágenes están resurgiendo en la actualidad debido a la tendencia de documentación mediante visitas virtuales.
- En el contexto de la **modelización híbrida**, el proceso tiene el potencial necesario para generar mayor cantidad de datos. El proceso es susceptible de mejorar el proceso de segmentación para evitar que una misma línea resulte partida en varios segmentos. También se pronostica como paso necesario generar la topología de las líneas extraídas, es decir, que dos líneas conectadas en la realidad en el modelo CAD resultante sigan conectadas. Con respecto a los nuevos elementos geométricos que podrían ser extraídos estarían los elementos curvos como arcos de circunferencias o elipses, e incluso la extracción de elementos planos mediante un ajuste mínimo cuadrático de una zona marcada por el usuario.

# Bibliografía

- ABDELHAFIZ, A., ZIMMERMANN, N., ESSER, G. & MAYER, I., 2009. *Generating a Photo Realistic Virtual Model for the large Domitilla-Catacomb in Rome*. Proceedings of 9th Conference on Optical 3-D Measurement Techniques, Vienna, Austria.
- ABDEL-AZIZ, Y. & KARARA, H., 1971. *Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry*, Symposium on Close-Range Photogrammetry, American Society of Photogrammetry, pp. 420-475.
- ACKERMANN, F., 1984. *Digital image correlation- performance and potential application in photogrammetry*. Photogrammetric Record 11: (64) 429-439.
- ACKERMANN, F., 1999. *Airborne laser scanning-present status and future expectations*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.54(2), pp.64-67.
- AGUILERA, D. G., 2005. *Reconstrucción 3D a partir de una sola vista*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.
- AGUILERA, D., LAHOZ, J. & FINAT, J., 2005. *A new method for vanishing points detection in 3d reconstruction from a single view*. Proceedings of 3D-ARCH 2005, Mestre, Italy.
- AGUILERA, D. & LAHOZ, J., 2006. *sv3DVision: didactical photogrammetric software for single image-based modeling*. Proceedings of ISPRS Commission VI Symposium, Tokyo, Japan.
- AGUILERA, D., LAHOZ, J., FINAT, J., MARTÍNEZ, J., FERNÁNDEZ, J. & SAN JOSÉ, J., 2006. *Terrestrial Laser Scanning and Low-cost Aerial Photogrammetry in the Archaeological Modeling of a Jewish Tanneries*. Proceedings of V Symposium 'Image Engineering and Vision Metrology', Dresden, Germany.
- AKCA, M., 2003. *Generalized procrustes analysis and its applications in photogrammetry*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland.
- AKCA, D., 2007. *Least Squares 3D Surface Matching*. PhD Thesis, Institute of Geodesy and Photogrammetry, Zürich.
- ALBERTZ, J. & KREILING, W., 1989. *Photogrammetric Guide*. Wichmann, p. 292.
- ALLEN, P.K., TROCCOLI, A., SMITH, B., MURRAY, S., STAMOS, I. & LEORDEANU, M., 2003. *New Methods for Digital Modeling of Historic Sites*. IEEE Computer Graphics and Applications Vol.23(6), pp.32-41.
- AL-MANASIR, K. & FRASER, C.S., 2006. *Registration of terrestrial laser scanner data using imagery*. The Photogrammetric Record Vol.21(115), pp.255-268.
- ALSHAWABKEH, Y. & HAALA, N., 2005. *Automatic multi-image photo texturing of complex 3D scenes*. Proceedings of XXth International CIPA Symposium, Torino, Italy.
- ALSHAWABKEH, Y., 2006. *Integration of Laser Scanning and Photogrammetry for Heritage Documentation Integration*. PhD Thesis Universität Stuttgart, p. 98.
- AMANN, M.-C., BOSCH, T., LESCURE, M., MYLLYLÄ, R. & RIOUX, M., 2001. *Laser ranging: a critical review of usual techniques for distance measurement*. Optical Engineering Vol.40(1), pp.10-19.
- ARTESE, G., ACHILLI, V., SALEMI, G. & TRECROCI, A., 2004. *Automatic Orientation and merging of laser scanner acquisitions through volumetric targets: procedure description and test results*. Proceedings of XXth ISPRS Congress, Istanbul, Turkey, pp. 210–215.
- ASCHOFF, T., THIES, M. & SPIECKER, H., 2004. *Describing forest stands using terrestrial laser-scanning*. Proceedings of XXth ISPRS Congress: Geo-Imagery Bridging Continents, Istanbul, Turkey, pp. 237-241.
- ATKINSON, K., 1996. *Close Range Photogrammetry and Machine Vision*, Whittles Publishing Caithness, Scotland.

- AUTODESK, 2011. DXF Specifications. [http://images.autodesk.com/adsk/files/autocad\\_2012\\_pdf\\_dxf-reference\\_enu.pdf](http://images.autodesk.com/adsk/files/autocad_2012_pdf_dxf-reference_enu.pdf) (12/07/2011)
- AYUNTAMIENTO DE ÁVILA, 2010, *Plan de protección, conservación y catalogación ante emergencias del conjunto histórico de Ávila. Plan de protección ermita de San Segundo.*
- BAE, K.-H. & LICHTI, D., 2004. *Automated registration of unorganised point clouds from terrestrial laser scanners.* International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. XXXV, Part B5, Proceedings of the ISPRS working group V/2, Istanbul, pp. 222–227.
- BAE, K.-H. & LICHTI, D.D., 2007. *On site self-calibration using planar features for terrestrial laser scanners.* Proceedings of ISPRS Workshop on Laser Scanning 2007 and SilviLaser 2007, Espoo, Finland, September, pp. 14-19.
- BAARDA, W., 1968. *A Testing procedure for use in Geodetic Networks.* Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy Vol.2(5), pp.97.
- BALZANI, M., PELLEGRINELLI, A., PERFETTI, N., RUSSO, P. & UCCELLI, F., 2001. *A terrestrial 3D laser scanner: accuracy test.* Proceedings of 18th International Symposium CIPA, Potsdam, Germany, pp. 445-453.
- BALLETTI, C., GUERRA, F., VERNIER, P. & STUDNICKA, N., 2004. *Practical comparative evaluation of an integrated hybrid sensor based on Photogrammetry and Laser Scanning for Architectural Representation.* Proceedings of XXth ISPRS Congress, Istanbul, Turkey.
- BANKS, J., BENNAMOUN, M. & CORKE, P., 1999. *Fast and Robust Stereo Matching Algorithms for Mining Automation.* Digital Signal Processing Vol.9(3), pp.137-148.
- BARROSO, O. & DEL RÍO BERGUÑO, F., 2008. *Arte Rupestre La Prehistoria Ilustrada en las Cuevas del Oriente de Asturias.* Consorcio Para el Desarrollo Rural del Oriente de Asturias
- BARTOLI, A. & STURM, P., 2004. *The 3D Line Motion Matrix and Alignment of Line Reconstructions.* International Journal of Computer Vision Vol.57(3) pp.159-178.
- BEAUDET, P. R., 1978. *Rotationally invariant image operators.* Proceedings Int. Joint Conf. Pattern Recognition, Kyoto, Japan, pp. 579-583.
- BECKER, S. & BOVE, V., 1995. *Semiautomatic 3D-model extraction from uncalibrated 2D-camera views.* Proceedings of SPIE Visual Data Exploration and Analysis II, San Jose, California, pp. 447-461.
- BEINAT, A. & CROSILLA, F., 2001. *Generalised Procrustes analysis for size and shape 3-D object reconstructions,* Proceedings of Optical 3-D Measurements Techniques V, Vienna, pp. 345-353.
- BEINAT, A. & CROSILLA, F., 2002. *A generalized factored stochastic model for the optimal global registration of LIDAR range images,* Proceedings of Photogrammetric Computer Vision Symposium (PCV02), Graz, Austria.
- BELTRAMI, E. 1873. *Sulle funzioni bilineari,* Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Università 11, pp.98-106.
- BERALDIN, J., 2004. *Integration of laser scanning and close-range photogrammetry the last decade and beyond.* Proceedings of XXth International ISPRS Congress, Istanbul, Turkey.
- BERNARDINI, F., MARTIN, I.M. & RUSHMEIER, H., 2001. *High-Quality Texture Reconstruction from Multiple Scans.* IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics Vol.7(4), 318-332.
- BESL, P. & MCKAY, N., 1992. *A method for registration of 3-D shapes.* IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence Vol.14(2), pp. 239-256.
- BHAR, L.M., 2008. *Robust Regression.* In: Advances in data analysis techniques, New Delhi.
- BIRCHFIELD, S., 1998. An introduction to projective geometry (for computer vision), Trabajo sin publicar, Stanford University.

- BLAIS, F., 2004. *Review of 20 years of range sensor development*, Journal of Electronic Imaging Vol.13(1), pp.231-240.
- BOEHLER, W. & MARBS A., 2003. *Investigating laser scanner accuracy*. Proceeding of 19th CIPA Symposium, Antalya, Turkey, pp. 696-702
- BONNEVAL, H., 1972. *Enregistrement photographique desgerbes perspectives*. Eyrolles Paris-France.
- BORNAZ, L. & DEQUAL, S., 2003a. *The solid image: a new concept and its applications*. Proceedings of ISPRS WG V/4 Workshop "Vision Techniques for Digital Architectural and Archaeological Archives", Ancona, Italy.
- BORNAZ, L. & DEQUAL, S., 2003b. *A new concept: the solid image*. Proceedings of XIX CIPA International Symposium, Antalya, Turkey.
- BORNAZ, L. & RINAUDO, F., 2004. *Terrestrial laser scanner data processing*. Proceedings of XXth ISPRS Congress, Istanbul, Turkey.
- BOUGUET J.-Y., 2004. *Camera Calibration Toolbox for Matlab*, Intel Corp. Disponible en: [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/).
- BOURKE, P., 1989. *An Algorithm for Interpolating Irregularly-Spaced Data with Applications in Terrain Modelling*. Proceedings of Pan Pacific Computer Conference, Beijing, China.
- BRÄUER-BURCHARDT, C. & VOSS, K., 2000. *Robust vanishing point determination in noisy images*. Proceedings of 15th International Conference on Pattern Recognition, Barcelona, pp. 559-562.
- BRESENHAM, J. E., 1965 *Algorithm for computer control of a digital plotter*, IBM Systems Journal, Vol. 4, No.1, pp. 25–30.
- BROWN, D. C., 1971. *Close Range Camera Calibration*. Photogrammetric Engineering.
- BUEHLER, C., BOSSE, M., MCMILLAN, L. & COHEN, M., 2001. *Unstructured lumigraph rendering*. Proceedings of SIGGRAPH 2001, Los Angeles, pp. 425-432.
- BURNS, J.B., HANSON, A.R. & RISEMAN, E.M., 1986. *Extracting Straight Lines*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Vol.8(4), pp.425-455.
- BRUNNSTRÖM, K. & STODDART, A.J., 1996. *Genetic algorithms for free-form surface matching*. Proceedings of 3th International Conference on Pattern Recognition, 1996, Vienna , Austria, pp. 689-693.
- BURNSIDE, C. D., 1985. *Mapping from Aerial Photography*. 2nd Ed, Collins.
- BURT, P. J. & Y ADELSON, E. H., 1983. *The laplacian pyramid as a compact image code*. IEEE Transactions on Communications. Vol. COM-3, No. 4.
- CANNY, J., 1986. *A Computational Approach to Edge Detection*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Vol.8(6), pp.679-698.
- CARR, J., BEATSON, R., CHERRIE, J., MITCHELL, T., FRIGHT, W., MCCALLUM, B. & EVANS, T., 2001. *Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions*. Proceedings of 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, Los Angeles, pp. 67-76.
- CATMULL, E., 1974. *A subdivision algorithm for computer display of curved surfaces*, PhD Thesis, Department of Computer Science, University of Utah.
- CHEN, C.-S., HUNG, Y.-P. & CHENG, J.-B., 1998. *A fast automatic method for registration of partially-overlapping range images*. Proceedings of Sixth International Conference on Computer Vision, Bombay , India pp. 242-248.
- CHEN, Y. & MEDIONI, G., 1992. *Object modelling by registration of multiple range images*. Image and Vision Computing Vol.10(3), pp.145-155.

- CHEOK, G., 2003. *Proceedings of the LADAR Calibration Facility Workshop: June 12-13, 2003*. US Dept. of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology.
- CHEOK, G., 2005. *Proceedings of the 2nd NIST LADAR Performance Evaluation Workshop: March 15-16, 2005*. US Dept. of Commerce, National Institute of Standards and Technology.
- CHOW, C.K., TSUI, H.T. & LEE, T., 2004. *Surface registration using a dynamic genetic algorithm*, Pattern Recognition Vol.37(1), pp.105-117.
- CHUA, C.S. & JARVIS, R., 1997. *Point Signatures: A New Representation for 3D Object Recognition*. International Journal of Computer Vision Vol.25(1), pp.63-85.
- CHUECA, M., HERRÁEZ, J. & BERNÉ, J., 1996. *Tratado de Topografía. Teoría de errores e instrumentación*. Thompson Paraninfo, Madrid.
- CHUNG, D.H., YUN, I.D. & LEE, S.U., 1998. *Registration of multiple-range views using the reverse-calibration technique*, Pattern Recognition Vol.31(4), pp.457-464.
- CIDDOR, P., 1996. *Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared*. Applied Optics, Vol.35(9), pp. 1566-1573.
- CIDDOR, P. & HILL, R., 1999. *Refractive index of air. 2. Group index*, Applied Optics Vol.38(9), pp. 1663-1667.
- CIGNONI, P., ROCCHINI, C. & SCOPIGNO, R., 1998. *Metro: Measuring Error on Simplified Surfaces*, Computer Graphics Forum Vol.17(2), pp.167-174.
- CIPOLLA, R., DRUMMOND, T. & ROBERTSON, D., 1999. *Camera calibration from vanishing points in images of architectural scenes*. Proceedings of British Machine Vision Conference, Nottingham, UK, pp. 382-391.
- CLARKE, T., FRYER, J., 1998. *The development of camera calibration methods and models*. The Photogrammetric Record 16, 51-66.
- CLARKSON, K. & SHOR, P., 1989. *Applications of random sampling in computational geometry, II*, Discrete and Computational Geometry Vol.4(1), pp.387-421.
- COLLINS, R., 2007. *Lectures Notes of CSE486 Computer Vision I*. Computer Science & Engineering Department. The Pennsylvania State University.
- CONRADY, A.E., 1919. *Decentering Lens Systems*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, U.K., Vol. 79.
- CRAMER, M., 2004. *Performance of medium format digital aerial sensor systems*. Proceedings of XXth ISPRS Congress, Istanbul, Turkey.
- CRAMER, M., 2005. *EuroSDR: Digital Camera Calibration and Validation*. GeoInformatics Vol.2(8), pp.16-19.
- CRIMINISI, A., REID, I. & ZISSERMAN, A., 1999. *Single View Metrology*. Proceedings of 7th International Conference on Computer Vision, Kerkyra, Greece, pp. 434-442.
- CROSILLA, F. & BEINAT, A., 2002. *Use of generalised Procrustes analysis for the photogrammetric block adjustment by independent models*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.56(3), pp.195-209.
- CURLESS, B. & LEVOY, M., 1996. *A volumetric method for building complex models from range images*. Proceedings of SIGGRAPH' 96, New Orleans, Louisiana, pp. 303-312.
- DANA, K., VAN GINNEKEN, B., NAYAR, S. & KOENDERINK, J., 1999. *Reflectance and texture of real-world surfaces*. ACM Transactions on Graphics (TOG) Vol.18(1), pp.1-34.
- DEBEVEC, P., 1996. *Modeling and rendering architecture from photographs*. PhD Thesis University of California, Berkeley.
- DEBEVEC, P., YU, Y. & BORSHUKOV, G., 1998. *Efficient view-dependent image-based rendering with projective texture-mapping*. Proceedings of Eurographics Workshop, Vienna, Austria, pp. 105-116.

- DELAUNAY, B., 1934. *Sur la sphere vide*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk 7, 793-800.
- DEMPSTER, A.P., LAIRD, N.M. & RUBIN, D.B., 1977. *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) Vol.39, pp.1-38.
- DERPANIS, K. G., 2004. *The Harris corner detector*. Technical Report on Centre for Vision Research, York University.
- DEUMLICH, F., 1982. *Surveying instruments*, Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- DEVERNAY, F. & FAUGERAS, O., 2001. *Straight lines have to be straight*. Machine Vision and Applications Vol.13(1), pp.14-24.
- DIAS, P., SEQUEIRA, V., VAZ, F. & GONCALVES, J.G.M., 2003. *Registration and Fusion of Intensity and Range Data for 3D Modelling of Real World Scenes*, Proceedings of Fourth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM '03), Banff, Canada, pp. 418-425.
- DING, L., & A. GOSHTASBY, 2001. *On the Canny edge detector*, Pattern Recognition, Vol.34(3), pp.721-725.
- DOMINGO, A., 2000. *Investigación sobre los Métodos de Estimación Robusta aplicados a la resolución de los problemas fundamentales de la Fotogrametría*. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Santander.
- DORNINGER, P., NOTHEGGER, C., PFEIFER, N. & MOLNÁR, G., 2008. *On-the-job detection and correction of systematic cyclic distance measurement errors of terrestrial laser scanners*. Journal of Applied Geodesy Vol.2(4), pp. 191-204.
- DOUSKOS V., GRAMMATIKOPOULOS L., KALISPERAKIS I., KARRAS G. & PETSAS E., 2009. *FAUCCAL: an open source toolbox for fully automatic camera calibration*. XXII CIPA Symposium on Digital Documentation, Interpretation & Presentation of Cultural Heritage, Kyoto, 11-15 October 2009.
- DRAP, P., GRUSSENMEYER, P., CURTINOT, P., SEINTURIER, J. & GAILLARD, G., 2004. *Presentation of the web based ARPENTEUR tools: towards a Photogrammetry based Heritage Information System*. Proceedings of XXth Congress of ISPRS, Istanbul, Turkey.
- D'APUZZO, N., 2000. *Motion capture by least squares matching tracking algorithm*, Proceedings of AVATARS'2000, Lausanne, Switzerland.
- EL-HAKIM, S., 2000. *A practical approach to creating precise and detailed 3D models from single and multiple views*. Proceedings of XIX ISPRS Congress, Amsterdam, Holland.
- EL-HAKIM, S., BERARDIN, J., PICARD, M. & VETTORE, A., 2003. *Effective 3d modeling of heritage sites*. Proceedings of 4th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, Banff, Canada, pp. 302-309.
- ELSTROM, M., 1998. *A stereo-based technique for the registration of color and ladar images*. Master's Thesis, University of Tennessee, Knoxville, Knoxville.
- ESTHER, M., KRIEGEL, H.P., SANDER, J. & XU, X., 1996. *A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise*, Proceedings of 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96), Portland: AAAI Press, Portland, Oregon, pp. 226-231.
- FAUGERAS, O., 1993. *Three-dimensional computer vision: a geometric viewpoint*, MIT Press, Cambridge, MA.
- FELDMAR, J. & AYACHE, N., 1996. *Rigid, affine and locally affine registration of free-form surfaces*. International Journal of Computer Vision Vol.18(2), pp.99-119.
- FISCHLER, M. A., & R. C. BOLLES., 1981. *Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography*. Communications of the ACM, 24(6): 381-395.

- FITZGIBBON, A., CROSS, G. & ZISSERMAN, A., 1998. *Automatic 3D Model Construction for Turn-Table Sequences*. Proceedings of European Workshop on 3D Structure from Multiple Images of Large-Scale Environments Freiburg, Germany, pp. 155-170.
- FÖRSTNER, W., 1982. *On the Geometric Precision of digital Correlation*. International archives of Photogrammetry, Vol. 24 , Helsinki, pp. 176 – 189.
- FÖRSTNER, W. & GUELCH, E., 1987. *A fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and center of circular features*. ISPRS Conference on Fast Processing of Photogrammetric Data, Interlaken, Switzerland, pp. 281-305
- FRYER, J., 1996. *Camera Calibration*. In ‘Close-range Photogrammetry and Machine Vision’, Atkinson (Ed.), Whittles Publishing, UK, pp.156-179.
- GABOR, D., 1946. *Theory of communication*. Journal of Institute for Electrical Engineering Vol.93, pp.429-457.
- GARCÍA, C.N.M., 1996. *Transmisión de calor, prácticas de laboratorio*, Universidad de Murcia.
- GEMAN, S., MCCLURE, D.E. & GEMAN, D., 1992. *A nonlinear filter for film restoration and other problems in image processing*. CVGIP: Graphical Models and Image Processing Vol.54(4), pp.281-289.
- GHILANI, C.D. & WOLF, P.R., 2006. *Elementary surveying: an introduction to geomatics*, Prentice Hall.
- GHOSH, S. K., 1979. *Analytical Photogrammetry*. Pergamon Press, USA.
- GHOSH, S., 2005. *Fundamentals of Computational Photogrammetry*, Concept Publishing Company.
- GIELSDORF, F., RIETDORF, A. & GRUENDIG, L., 2004. *A concept for the calibration of terrestrial laser scanners*. Proceedings of FIG Working Week, Athens, Greece.
- GODIN, G., LAURENDEAU, D. & BERGEVIN, R., 2001. *A method for the registration of attributed range images*. Proceedings of Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, Quebec City, Canada pp. 179-186.
- GODIN, G., RIOUX, M., BERARDIN, J.-A., LEVOY, M., COURNOYER, L., BLAIS, F., 2001. *An assessment of laser range measurement on marble surfaces*. Proceeding of 5th Conference on Optical 3D Measurement Techniques, Vienna, Austria, pp. 49–56.
- GÖKALP, E., GÜNGÖR, O. & BOZ, Y., 2008. *Evaluation of Different Outlier Detection Methods for GPS Networks*, Sensors Vol.8(1), pp.7344-7358.
- GONZALEZ-AGUILERA, D. & GOMEZ-LAHOZ, J., 2008. *From 2D TO 3D Through Modelling Based On A Single Image*, The Photogrammetric Record Vol.23(122), pp.208-227.
- GONZÁLEZ-AGUILERA, D., GÓMEZ-LAHOZ, J. & SÁNCHEZ, J., 2008. *A new approach for structural monitoring of large dams with a three-dimensional laser scanner*. Sensors Vol.8(9), pp.5866-5883.
- GONZÁLEZ-AGUILERA, D., RODRÍGUEZ-GONZÁLVEZ, P. & GÓMEZ-LAHOZ, J., 2009. *An automatic procedure for co-registration of terrestrial laser scanners and digital cameras*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.64(3), pp.308-316.
- GONZÁLEZ-AGUILERA, D., GÓMEZ-LAHOZ, J. & RODRÍGUEZ-GONZÁLVEZ, P., 2011a. *An automatic approach for radial lens distortion correction from a single image*, IEEE Sensors Journal. Vol.11(4), pp.956-965.
- GONZÁLEZ-AGUILERA, D., MUÑOZ-NIETO, Á., RODRÍGUEZ-GONZÁLVEZ, P. & MENÉNDEZ, M., 2011b. *Turning New tools for rock art modelling: automated sensor integration in Pindal Cave*, Journal of Archaeological Science Vol.38(1), pp.120-128.
- GOODALL, C., 1991. *Procrustes methods in the statistical analysis of shape*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) Vol.53(2), pp. 285-339.



- GORDON S.J. & LICHTI, D.D., 2004. *Terrestrial laser scanners with a narrow field of view: the effect on 3D resection solutions*, Survey Review Vol.37 (292), pp. 448-468.
- GORDON, S. J., 2005. *Structural Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanners*. PhD thesis, Department of Spatial Sciences, Curtin University of Technology, Australia.
- GOTTWALD, R., 2008. *Field procedures for testing Terrestrial Laser Scanners (TLS) - A contribution to a future ISO standard*. Proceedings of FIG Working Week, Stockholm, Sweden.
- GOWER, J., 1975. *Generalized procrustes analysis*, Psychometrika Vol.40(1), pp.33-51.
- GRANTHAM, J., STARGARDT, C., DUNGEY, C. & MEIDUNAS, E., 1997. *Laser radar in adverse weather*. Proceedings of SPIE Conference on Laser Radar Technology and Applications II, Vol.3065, pp. 84-93.
- GROSS, M. & PFISTER, H., 2007. *Point-Based Graphics*, Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- GRUEN, A. & BEYER, H., 2001. *System calibration through self-calibration*. Chapter 7 of Calibration and Orientation of Cameras in Computer Vision, Springer, Berlin, pp. 163-194.
- HAMPEL, F.R., 1971. *A general qualitative definition of robustness*. The Annals of Mathematical Statistics 42(6), pp.1887-1896.
- HAMPEL, F.R., RONCHETTI, E., ROUSSEEUW, P. & STAHEL, W., 1986. *Robust statistics: the approach based on influence functions*. John Wiley & Sons, New York.
- HAN, J. & KAMBER, M., 2006. *Data mining: concepts and techniques*, Morgan Kaufmann.
- HAN, S. & MEDIONI, G., 1996. *Triangular NURBS Surface Modeling of Scattered Data*. Proceedings of 7th IEEE Visualization, San Francisco, California, pp. 295-302.
- HANNAH, M., 1974. *Computer matching of areas in stereo images*, PhD thesis, Department of computer Science, Stanford University.
- HARALICK, R.M. & SHAPIRO, L.G., 1992. *Computer and Robot Vision*. Addison-Wesley, 630 pp.
- HARRIS, C. & STEPHENS, M. J., 1988. *A combined corner and edge detector*. Proc. of Alvey Vision Conference. pp. 147-151
- HARTLEY, R.I., 1992. *Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras*, 2nd European Conference on Computer Vision, Springer, Santa Margherita Ligure, Italy, pp. 579-587.
- HARTLEY, R.I., 1997a. *Kruppa's equations derived from the fundamental matrix*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19(2), pp.133-135.
- HARTLEY, R.I., 1997b. *In defence of the 8-point algorithm*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19(6), pp.580-593.
- HARTLEY, R.I. & ZISSERMAN, A., 2000. *Multiple view geometry in computer vision*, Cambridge University. Press. Cambridge, 624 pages.
- HARVEY, B.R., 2004. *Registration and Transformation of Multiple Site Terrestrial Laser Scanning*. Geomatics Research Australasia Vol.80, pp. 33-50.
- HEBERT, M. & KROTKOV, E., 1992. *3D measurements from imaging laser radars: how good are they?*, Image and Vision Computing Vol.10(3), pp.170-178.
- HECK, B., 1981. *Der Einfluß einzelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreißern in den Beobachtungen (Examining the effects of observations to the adjustment results and analysis of outliers)*. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten Vol.88, pp.17-34.
- HECKBERT, P., 1993. *A Seed Fill Algorithm*, *Graphics Gems I*, edited by Andrew S. Glassner, pp. 275-277 and 721-722 (Academic Press).
- HECKBERT, P., 1994. *Graphics gems IV*, Morgan Kaufmann.

- HERTER, T. & LOTT, K., 1993. *Algorithms for decomposing 3-D orthogonal matrices into primitive rotations*. Computers & Graphics Vol.17(5), pp.517-527.
- HEUVEL, F.A., 1998. *3D reconstruction from a single image using geometric constraints*. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.53(6), pp.354-368.
- HEUVEL, F.A., 1999. *Estimation of interior orientation parameters from constraints on line measurements in a single image*. Proceedings of Photogrammetric Measurement, Object Modeling and Documentation in Architecture and Industry, Thessaloniki, Greece, pp. 81–88.
- HOLLAND, P.W. & WELSCH, R.E., 1977. *Robust regression using iteratively reweighted least-squares*. Communications in Statistics - Theory and Methods Vol.6(9), pp.813 - 827.
- HORN, B.K.P., 1990. *Recovering baseline and orientation from essential matrix*. Journal of the Optical Society of America, pp. 1-10.
- HOVANESSIAN, S., 1988. *Introduction to sensor systems*, Artech House, Norwood, MA, USA.
- HUBER, P.J., 1964. *Robust estimation of a location parameter*. The Annals of Mathematical Statistics Vol.35(1), pp.73-101.
- IGN, 2008. *Temario básico y bibliografía recomendada para la preparación de la Oposición al Cuerpo de Ingenieros Geógrafos – Grupo A.3 Topografía y Cartografía*. Instituto Geográfico Nacional, Ministerio de Fomento.
- IKEUCHI, K., NAKAZAWA, A., HASEGAWA, K. & OHISHI, T., 2003. *The great buddha project: modeling cultural heritage for VR systems through observation*. Proceedings of International Symposium on Mixed and Augmented Reality, pp. 7-16.
- INCROPERA, F.P., DEWITT, D.P., BERGMAN, T.L. & LAVINE, A.S., 2011. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons.
- INGENSAND, H., RYF, A. & SCHULZ T., 2003. *Performances and experiences in terrestrial laserscanning*. Proceeding of 6th Conference on Optical 3D Measurement Techniques, Zürich.
- INTERNATIONAL STANDARD ISO 17123, 2001. *Optics and optical instruments - Field procedures for testing geodetic and surveying instruments - Part 4: Electro-optical distance meters (EDM instruments)*, International Standard for Standardization, Geneva.
- JACKSON, D. J. & HANNAH, S. J. 1993. *Comparative analysis of image compression techniques*. Twenty-Fifth Southeastern Symposium on System Theory.
- JARC, A., PERŠ, J., ROGELJ, P., PERŠE, M. & KOVACIC, S., 2007. *Texture features for affine registration of thermal (FLIR) and visible images*. Proceedings of Computer Vision Winter Workshop, Citeseer, St. Lambrecht, Austria.
- JOHANSSON, M., 2003. *Explorations into the behaviour of three different high-resolution ground-based laser scanners in the built environment*. Proceedings of 6th CIPA International Workshop, Corfu, Greece.
- JOHNSON, S., 1967. Hierarchical clustering schemes, Psychometrika Vol.32, pp.241-254.
- JOHNSON, A.E. & HEBERT, M., 1999. *Using spin images for efficient object recognition in cluttered 3D scenes*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Vol.21(5), pp.433-449.
- JUNEJA, M. & SANDHU, P. S., 2009. *Performance Evaluation of Edge Detection Techniques for Images in Spatial Domain*, International Journal of Computer Theory and Engineering, Vol.1(5), pp.614-621.
- JUNG, H., HWANG, L., 2004. *Adaptive image interpolation based on local gradient features*, Signal Processing Letters, IEEE Vol.11, pp.359-362.
- KARNER, K.F., MAYER, H. & GERVAUTZ, M., 1996. *An Image based Measurement System for Anisotropic Reflection*. Computer Graphics Forum Vol.15(3), 119-128.
- KENDALL, M.G., 1948. *Rank correlation methods*, London.

- KENNIE, T. & PETRIE, G., 1990. *Engineering surveying technology*, Blackie, Glasgow and London.
- KERN, F., 2001. *Supplementing laserscanner geometric data with photogrammetric images for modeling*. Proceedings of XVIII International CIPA Symposium, Potsdam, Germany, pp. 454-461.
- KEYS, R., 1981. *Cubic convolution interpolation for digital image processing*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing Vol.29, pp.1153-1160.
- KILPELÄ, A., 2004. *Pulsed time-of-flight laser range finder techniques for fast, high precision measurement applications*, PhD Thesis, University of Oulu, Oulu, Finland.
- KOSCHAT, M. & SWAYNE, D., 1991. *A weighted procrustes criterion*, Psychometrika Vol.56(2), pp.229-239.
- KOSKINEN, M., KOSTAMOVAARA, J., MYLLYLAE, R., 1992. *Comparison of continuous-wave and pulsed time-of-flight laser range-finding techniques*. Proceedings of SPIE, pp. 296-305.
- KRARUP, T., JUHL, J. & KUBIK, K., 1980. *Götterdammerung over least squares adjustment*. Proceedings of XIV Congress of International Society of Photogrammetry, Hamburg, pp.369-378.
- KRAUS, K., 1993. *Advanced Methods and Applications Vol.2. Fundamentals and Standard Processes Vol.1*. Institute for Photogrammetry Vienna University of Technology. Ferd. Dummler Verlag. Bonn.
- KRAUS, K., 1997. *Photogrammetry*. Ümmler, Bonn.
- KREILING, W., 1976. *Automatische Erstellung von Hohenmodellen und Orthophotos durch digitale korrelation*, PhD thesis, Institut fuer Photogrammetrie. Universitaet Karlsruhe.
- KRISHNAMURTHY, V. & LEVOY, M., 1996. *Fitting smooth surfaces to dense polygon meshes*. Proceedings of SIGGRAPH' 96, New Orleans, Louisiana, pp. 313-324.
- KRZYSZEK, P., 2003. *Filtering of laser scanning data in forest areas using finite elements*. Proceedings of ISPRS Workshop 3D reconstruction from airborne laserscanner and InSAR data, Dresden, Germany.
- KURAZUME, R., NISHINO, K., ZHANG, Z. & IKEUCHI, K., 2002. *Simultaneous 2D images and 3D geometric model registration for texture mapping utilizing reflectance attribute*. Proceeding of 5th Asian Conference on Computer Vision, Melbourne, Australia, pp. 99–106.
- LAHOZ, J. G., 2002. *Apuntes de 3º Ciclo: Fotogrametría y Patrimonio*. Departamento de Ingeniería Cartográfica y del Terreno. Universidad de Salamanca.
- LAHOZ, J. G., 2011. *Apuntes asignatura Cámaras*. Master en Geotecnologías Cartográficas en Ingeniería y Arquitectura” Universidad de Salamanca.
- LANG, F. & FÖRSTNER, W., 1996. *3D-city modeling with a digital one-eye stereo system*. Proceedings of XVIIIth ISPRS Congress, Vienna, pp. 415-420.
- LANGE, R., 2000. *3D time-of-flight distance measurement with custom solid-state image sensors in CMOS/CCD-technology*, PhD thesis, University of Siegen, Siegen, Germany.
- LAWS, K., 1980. *Rapid texture identification*. Proceedings of SPIE Image Processing for Missile Guidance, pp. 376-380.
- LAWSON, C.L. & HANSON, R.J., 1995. *Solving least squares problems*. Classics in applied mathematics, vol 15. Philadelphia, Pa: SIAM.
- LENSCH, H.P.A., HEIDRICH, W. & SEIDEL, H.-P., 2001. *A Silhouette-Based Algorithm for Texture Registration and Stitching*, Graphical Models Vol.63(4), pp.245-262.
- LENSCH, H., KAUTZ, J., GOESELE, M., HEIDRICH, W. & SEIDEL, H., 2003. *Image-based reconstruction of spatial appearance and geometric detail*. ACM Transactions on Graphics (TOG) Vol.22(2), pp.234-257.

- LEVOY, M., PULLI, K., CURLESS, B., RUSINKIEWICZ, S., KOLLER, D., PEREIRA, L., GINTON, M., ANDERSON, S., DAVIS, J., GINSBERG, J., 2000. *The digital michelangelo project: 3D scanning of large statues*. Proceedings of Siggraph 2000 Computer Graphics, pp. 131–144.
- LI, C., CHEN, L., WANG, Y. & ZHENG, S., 2008. *On effects of weights in spatial interpolation*. Proceedings of the 8th International Symposium on Spatial Accuracy Assessment in Natural Resources and Environmental Sciences. Shanghai, pp. 78-84.
- LICHTI, D., GORDON, S., 2004. *Error propagation in directly georeferenced Terrestrial Laser Scanner point clouds for cultural heritage recording*. Proceedings of FIG Working Week, Athens, Greece.
- LICHTI, D. & FRANKE, J., 2005. *Self-calibration of the iQsun 880 laser scanner*. Proceedings of Optical 3D Measurement Techniques VII, Vienna, Austria, pp. 112-121.
- LICHTI, D.D. & LICHT, M.G., 2006. *Experiences with terrestrial laser scanner modelling and accuracy assessment*. In International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences 36 (Part 5), pp. 155-160.
- LICHTI, D.D., 2007. *Error modelling, calibration and analysis of an AM-CW terrestrial laser scanner system*. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.61(5), pp.307-324.
- LICHTI, D.D., 2010. *A review of geometric models and self-calibration methods for terrestrial laser scanners*. Boletim de Ciências Geodésicas Vol.16(1), pp.3-19.
- LIEBOWITZ, D., CRIMINISI, A. & ZISSERMAN, A., 1999. *Creating architectural models from images*. Proceedings of Eurographics '99, Milan, Italy, pp. 39-50.
- LIGHT, D. L., 1992. *The new camera calibration system at the U.S. Geological Survey*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 58(2):185–188, February 1992.
- LINGUA, A. & RINAUDO, F., 2002. *The statue of Ramsete II - Integration of digital photogrammetry and laser scanning technique for 3d modelling*, Proceedings of 18th International Symposium CIPA, Potsdam, Germany, pp. 206-211.
- LISSITZ, R., SCHÖNEMANN, P. & LINGOES, J., 1976. *A solution to the weighted procrustes problem in which the transformation is in agreement with the loss function*, Psychometrika Vol.41(4), pp.547-550.
- LONGUET-HIGGINS, H. C., 1981. *A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections*. Nature, 293. pp: 133-135.
- LUHMANN, T., ROBSON, S., KYLE, S. & HARLEY, I., 2006. *Close Range Photogrammetry: Principles, Methods and Applications*. Whittles, Scotland, 510 pages.
- MÄÄTTÄ, K., KOSTAMOVAARA, J. & MYLLYLÄ, R., 1993. *Profiling of hot surfaces by pulsed time-of-flight laser range finder techniques*, Applied Optics Vol.32(27), pp.5334-5347.
- MACQUEEN, J., 1967. *Some methods for classification and analysis of multivariate observations*, Proceedings of Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, CA, USA, pp. 281-297.
- MCGLONE, C. MIKHAIL, E. M. & BETHEL, J., 2004. *Manual of photogrammetry*. Fifth Edition: Bethesda, Maryland, American Society for Photogrammetry and Remote Sensing, 1151 p.
- MANCERA-TABOADA, J., RODRÍGUEZ-GONZÁLVEZ, P. & GONZÁLEZ-AGUILERA, D., 2009. *Turning point clouds into 3d models: The aqueduct of Segovia*, Workshop on Geographical Analysis, Urban Modeling, Spatial statistics. IEEE, Yongin (Korea).
- MASUDA, T., 2001. *Generation of Geometric Model by Registration and Integration of Multiple Range Images*. Proceedings of Third International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, Quebec City, Canada pp. 254-261.

- MCALLISTER, D., NYLAND, L., POPESCU, V., LASTRA, A. & MCCUE, C., 1999. *Real-time rendering of real-world environments*. Proceedings of 10th Eurographics Workshop on Rendering, Granada, Spain, pp. 145-160.
- MECHELKE, K., KERSTEN, T.P. & LINDSTAEDT, M., 2007. *Comparative investigations into the accuracy behaviour of the new generation of Terrestrial Laser Scanning Systems*. Proceedings of Optical 3-D Measurement Techniques VIII, Zurich, pp. 319-327.
- MEERAN, S., & M. J. PRATT, 1993, *Automated feature recognition from 2D drawings*, Computer-Aided Design, Vol.25(1), pp.7-17.
- MIKHAIL, E.M. & ACKERMAN, F., 1976. *Observations and least squares*. New York. University Press of America.
- MIKHAIL, E. M., BETHEL, J. S. & MCGLONE, J. D., 2001. *Introduction to Modern Photogrammetry*. John Wiley, New York.
- MILLS, J., BARBER, D., 2003. *An Addendum to the Metric Survey Specifications for English Heritage - The collection and archiving of point cloud data obtained by terrestrial laser scanning or other methods*, Newcastle, U.K.
- MITKA, B. & RZONCA, A., 2009. *Integration of photogrammetric and 3D laser scanning data as a flexible and effective approach for heritage documentation*. Proceedings of 3D Virtual Reconstruction and Visualization of Complex Architectures, Trento, Italy.
- MOFFIT, F. H. & MIKHAIL, E. M., 1980. *Photogrammetry*. Harper & Row, NY-USA.
- MOLNÁR, G., PFEIFER, N., RESSL, C., DORNINGER, P. & NOTHEGGER, C., 2009. On-the-job Range Calibration of Terrestrial Laser Scanners with Piecewise Linear Functions. *Photogrammetrie - Fernerkundung - Geoinformation* Vol.2009(1), pp.9-21.
- MORAVEC, H. P., 1977. Towards Automatic Visual Obstacle Avoidance. Proceedings 5th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 584.
- NEITZEL, F., 2006. *Bestimmung von Ziel-und Kippachsenfehler polarer Messsysteme aus Minimalkonfigurationen und überbestimmten Konfigurationen*. ZfV Vol.131(3), pp. 132-140.
- NEUGEBAUER, P.J. & KLEIN, K., 1999. *Texturing 3D Models of Real World Objects from Multiple Unregistered Photographic Views*. Computer Graphics Forum Vol.18(3), 245-256.
- OREN, M. & NAYAR, S., 1994. *Generalization of Lambert's reflectance model*. Proceedings of SIGGRAPH '94, Orlando, Florida, pp. 239-246.
- OSADA, R., FUNKHOUSER, T., CHAZELLE, B. & DOBKIN, D., 2002. *Shape distributions*, ACM Transactions on Graphics (TOG) Vol.21(4), pp.807-832.
- PATERAKI, M. 2000. *Image matching methods*. Internal report IGP.
- PARIAN, J.A. & GRUEN, A., 2005. *Integrated laser scanner and intensity image calibration and accuracy assessment*. Proceedings of ISPRS Workshop Laser Scanning, Enschede, Netherlands, pp. 18-23.
- PARIAN, J.A., 2007. *Sensor modeling, calibration and point positioning with terrestrial panoramic cameras*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich.
- PARODI, P. & PICCIOLI, G., 1996. *3D shape reconstruction by using vanishing points*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on Vol.18(2), pp.211-217.
- POLLEFEYS, M., 1999. *Self Calibration and metric 3D reconstruction from uncalibrated image sequences*. PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven.
- POLLEFEYS, M., KOCH, R., VERGAUWEN, M. & VAN GOOL, L., 2000. *Automated reconstruction of 3D scenes from sequences of images*. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.55(4), pp.251-267.
- POLLEFEYS, M., 2004. *Visual 3D Modeling from Images*. Tutorial Notes University of North Carolina – Chapel Hill, USA.

- POPE, A. J. 1976. *The statistics of residuals and the detection of outliers*. NOAA Technical Report NOS 65 NGS 1, National Ocean Service, National Geodetic Survey, US Department of Commerce. Rockville, MD, Washington, 133pp.
- POTTMANN, H., LEOPOLDSEDER, S., WALLNER, J. & PETERNELL, M., 2002. *Recognition and reconstruction of special surfaces from point clouds*. Proceedings of PCV02, Graz, Austria pp. 271-276.
- PRICE, J.R. & GEE, T.F., 2005. *Face recognition using direct, weighted linear discriminant analysis and modular subspaces*, Pattern Recognition Vol.38(2), pp.209-219.
- PRICE, W. & UREN, J., 1989. *Laser surveying*, VNR International, London.
- QUAN, L. & LAN, Z., 1999. *Linear N-point camera pose determination*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Vol.21(8), pp.774-780.
- RABBANI, T., HEUVEL, F. & VOSSERMANN, G., 2006. *Segmentation of point clouds using smoothness constraint*. Proceedings of ISPRS Commission V Symposium, Dresden, pp. 248-253.
- READY, J., 1978. *Industrial applications of lasers*, Academic Press, New York.
- REMONDINO, F., 2003. *From point cloud to surface: the modeling and visualization problem*. Proceedings of International Workshop on Visualization and Animation of Reality-Based 3D Models, Tarasp-Vulpera, Switzerland
- REMONDINO, F. & FRASER, C., 2006. *Digital camera calibration methods: considerations and comparisons*. International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Vol.36(B5), Dresden.
- REMONDINO, F., 2006. *Detectors and descriptors for photogrammetric applications*. International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. V. XXXVI. P. 49–54. Bonn.
- RIETDORF, A., 2005. *Automatisierte Auswertung und Kalibrierung von scannenden Messsystemen mit tachymetrischem Messprinzip*, PhD Thesis, Technische Universität Berlin.
- RESHETYUK, Y., 2009. *Self-calibration and direct georeferencing in terrestrial laser scanning*. PhD thesis, KTH - Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- ROCCHINI, C., CIGNONI, P., MONTANI, C. & SCOPIGNO, R., 1999. *Multiple textures stitching and blending on 3D objects*. Proceedings of 10th Eurographics Workshop on Rendering, Granada, Spain, pp. 127–138.
- ROCCHINI, C., CIGNONI, P., MONTANI, C. & SCOPIGNO, R., 2002. *Acquiring, stitching and blending diffuse appearance attributes on 3D models*. The Visual Computer Vol.18(3), 186-204.
- RODRÍGUEZ, J., 2002. *Ajuste de observaciones: el método de los mínimos cuadrados con aplicaciones a la topografía*. Edicions UPC.
- ROSTEN, E. & DRUMMOND, T., 2005. *Fusing points and lines for high performance tracking*. International Conference on Computer Vision pp. 1508-1515.
- ROSTEN, E. & DRUMMOND, T., 2006. *Machine learning for high-speed corner detection*. European Conference on Computer Vision pp. 430-443.
- ROUSSEAU, F., FABLET, R. & BARILLOT, C., 2000. *Density based registration of 3D ultrasound images using texture information*, Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis Vol.0 (0), pp.1-7.
- RUPPERT, J., 1993. *A new and simple algorithm for quality 2-dimensional mesh generation*. Proceedings of 4th ACM-SIAM Symposium Discrete Algorithms, Austin, Texas, pp. 83-92.
- RÜTHER, H., MTAŁO, G., MNGUMI, E. & ALTAN, M., 2003. *3D Modelling of Heritage Sites in Africa. A Case Study in the World Heritage Site of Kilwa Kisiwani, Tanzania*. Proceedings of XIXth International CIPA Symposium, Antalya, Turkey, pp. 175-180.

- SALINERO, C., 2008. *Teledetección ambiental: La observación de la Tierra desde el espacio*, 3 ed., Ariel ciencia.
- SALVI, J., MATABOSCH, C., FOFI, D. & FOREST, J., 2007. *A review of recent range image registration methods with accuracy evaluation*. Image and Vision Computing Vol.25(5), pp.578-596.
- SÁNCHEZ, N., ARIAS, B., AGUILERA, D. & LAHOZ, J., 2004. *Análisis aplicado de métodos de calibración de cámaras para usos fotogramétricos*. TopCart 2004, pp. 113-114.
- SANZ, E., 2009. *Control de la deformación en sólidos mediante técnicas de fotogrametría de objeto cercano: aplicación a un problema de diseño estructural*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.
- SANZ-ABLANEDO, E., RODRÍGUEZ-PÉREZ, J., ARIAS-SÁNCHEZ, P. & ARMESTO, J., 2009. *Metric Potential of a 3D Measurement System Based on Digital Compact Cameras*. Sensors Vol.9(6), pp.4178-4194.
- SAMPSON, P.D., 1982. *Fitting conic sections to 'very scattered' data: An iterative refinement of the bookstein algorithm*, CGIP(18), No. 1, pp. 97-108.
- SATO, Y., WHEELER, M. & IKEUCHI, K., 1997. Object shape and reflectance modeling from observation. Proceedings of SIGGRAPH '97, Los Angeles, pp. 379-387.
- SCHERER, M., 2004. *Intelligent Tacheometry with Integrated Image Processing Instead of 3D Laser Scanning?*. Proceedings of INGENO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying, Bratislava, Slovakia.
- SCHÖNEMANN, P., 1966. *A generalized solution of the orthogonal procrustes problem*, Psychometrika Vol.31(1), pp.1-10.
- SCHÖNEMANN, P. & CARROLL, R., 1970. *Fitting one matrix to another under choice of a central dilation and a rigid motion*, Psychometrika Vol.35(2), pp.245-255.
- SCHULZ, T., & INGENSAND, H., 2004. *Terrestrial laser scanning-investigations and applications for high precision scanning*. Proceedings of FIG Working Week, Athens.
- SCHULZ, T., 2007. *Calibration of a terrestrial laser scanner for engineering geodesy*. PhD thesis, Institute of Geodesy and Photogrammetry, ETH, Zürich.
- SEIDEL, R., 1991. *A simple and fast incremental randomized algorithm for computing trapezoidal decompositions and for triangulating polygons*. Computational Geometry Vol.1(1), pp.51-64.
- SHARP, J., CHRISTENSEN, R., GILMAN, W. & SCHULMAN, F., 1965. *Automatic map compilation using digital techniques*. Photogrammetric engineering Vol.31(2), pp.223-239.
- SHEPARD, D., 1968. *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data*. Proceedings of the 1968 ACM National Conference pp. 517-524.
- SHEWCHUK, J.R., 2002. *Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation*. Computational Geometry Vol.22(1-3), pp.21-74.
- SHOJI, K. & YANO, M., 1998. *An algorithm for affine transformation of three-dimensional objects registered with run format*. Systems and Computers in Japan Vol.29(3), pp.18-27.
- SLAMA, C., THEURER, C., HENRIKSEN, S., 1980. *Manual of photogrammetry*, 4th ed., American Society of Photogrammetry, Falls Church, Virginia, USA.
- SOBEL, I. & FELDMAN, G. 1968. *A 3x3 isotropic gradient operator for image processing*. Presentation for Stanford Artificial Project.
- STAIGER, R., 2005. The Geometrical Quality of Terrestrial Laser Scanner (TLS). Proceedings of FIG Working Week 2005 and GSDI-8, pp.16-21. El Cairo.
- STAMOS, I. & ALLEN, P., 2001. *Automatic registration of 2-D with 3-D imagery in urban environments*. Proceedings of 8th IEEE International Conference on Computer Vision, Vancouver, Canada pp. 731-736.

- STAMOS, I. & LEORDEANU, M., 2003. *Automated Feature-Based Range Registration of Urban Scenes of Large Scale*. Proceedings of Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Madison, Wisconsin pp. 555-561.
- STEINHAUS, H., 1956. *Sur la division des corp materiels en parties*, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Vol.1, pp.801-804.
- STRABER, W., 1974. *Schnelle Kurven-und Flaechendarstellung auf graphischen Sichtgeraeten*, PhD thesis, TU Berlin.
- STURM, P. & MAYBANK, S., 1999. *A method for interactive 3d reconstruction of piecewise planar objects from single images*. Proceedigns of British Machine Vision Conference, Nottingham, UK, pp. 265–274.
- SÜLI, E. & MAYERS, D., 2003. *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-00794-1.
- SUTHERLAND, I.E., SPROULL, R.F. & SCHUMACKER, R.A., 1974. *A Characterization of Ten Hidden-Surface Algorithms*, ACM Computing Surveys Vol.6, pp.1-55.
- TAIT, M., FOX, R., TESKEY, W., 2004. *A Comparison and full error budget analysis for close range Photogrammetry and 3D terrestrial laser scanning with rigorous ground control in an industrial setting*. Proceedings of INGEO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying, Bratislava, Slovakia.
- TAREL, J., CIVI, H. & COOPER, D., 1998. *Pose estimation of free-form 3D objects without point matching using algebraic surface models*. Proceedings of IEEE Workshop on Model-Based 3D, Mumbai, India, pp. 13–21.
- TEN BERGE, J., 1977. *Orthogonal procrustes rotation for two or more matrices*, Psychometrika Vol.42(2), pp.267-276.
- THORMÄHLEN, T., BROZIO, H. & WASSERMANN, I., 2003. *Robust line-based calibration of lens distortion from a single view*. Proceedings of Mirage 2003, Rocquencourt, France, pp. 105-112.
- TOMASI, C. & KANADE, T., 1991. *Detection and Tracking of Point Features*. Carnegie Mellon University Technical Report CMU-CS-91-132.
- UTRIAINEN, T., 2010. *Least squares rigid body fitting of point-sets with unknown correspondences*. PhD Thesis, University of Gothenburg, Department of Computer Science and Engineering.
- VIM, 2008. *The International Vocabulary of Metrology, Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM)*. JCGM 200:2008
- VINCENT, M.C., ÁLVAREZ, B., ZARAGOZÁ, J.L., 2006. *Principales polimeros comerciales*. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- VON HANSEN, W., MICHAELSEN, E. & THONNESSEN, U., 2006. *Cluster Analysis and Priority Sorting in Huge Point Clouds for Building Reconstruction*. Proceedings of 18th International Conference on Pattern Recognition, Hong Kong, pp. 23-26.
- VOSELMAN, G., GORTE, B., SITHOLE, G. & RABBANI, T., 2004. *Recognising structure in laser scanner point clouds*. Proceedings of ISPRS working group VIII/2. 'Laser-Scanners for Forest and Landscape Assessment', Freiburg, Germany, pp. 33-38.
- WANG, L., KANG, S., SZELISKI, R. & SHUM, H., 2001. *Optimal texture map reconstruction from multiple views*. Proceedings of Computer Vision & Pattern Recognition, Kauai, USA, pp. 347-354.
- WANG, W., YANG, J. & MUNTZ, R., 1997. *STING: A statistical information grid approach to spatial data mining*, Proceedings of 23rd Conference on VLDB, Athens, Greece, pp. 186-195.
- WATSON, D.F., 1981. *Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes*, The Computer Journal Vol.24(2), pp.167-172.



- WEHR, A., LOHR, U., 1999. *Airborne laser scanning--an introduction and overview*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing Vol.54(2-3), pp.68-82.
- WELSCH, W.M. & OSWALD, W., 1984. *Kombinierte Ausgleichung von Doppler-Satellitennetzen und Terrestrischen Netzen*. Proceedings of the Geodetic Seminar, Hochschule der Bundeswehr, Heft 15 pp.155-191, München.
- WITTCHEN, K.B. & AGGERHOLM, S., 2000. *Calculation of building heating demand in EPIQR*, Energy and Buildings Vol.31, pp.137-141.
- WOLF, P. R. & DEWITT, B. A., 2000. *Elements of photogrammetry*. McGraw – Hill.
- WONG, R.Y. & HALL, E.L., 1978. *Sequential Hierarchical Scene Matching*, IEEE Transactions on Computers C-27(4), pp.359-366.
- XU, H. & CHI, X., 1993. *Calibration and parameter identification for laser scanning sensor*. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation I, Atlanta, USA, pp. 665-670.
- YASTIKLI, N., 2007. *Documentation of cultural heritage using digital photogrammetry and laser scanning*, Journal of Cultural Heritage 8(4),pp. 423-427.
- ZHANG, Z., 1994. *Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces*. International Journal of Computer Vision Vol.13(2), pp.119-152.
- ZIEMANN, H., 1986. *Thoughts on a standard algorithm for camera calibration*. Proceedings of International Symposium on Progress in Imaging Sensors, Stuttgart, pp. 41-48.
- ZWICKER, M., PFISTER, H., VAN BAAR, J. & GROSS, M., 2001. *Surface splatting*, Proceedings of SIGGRAPH, ACM, pp. 371-378.



## Apéndice A. Resultados calibración

Se listan los parámetros de la esfera; coordenadas tridimensionales del centroide y su radio ( $X, Y, Z, R$ ), el número de puntos aceptados (inliers) y el número de puntos que entraron en el ajuste (procedentes de la segmentación de la nube de puntos láser); asimismo se lista la desviación estándar de los residuos del ajuste o distancia ortogonal entre cada punto aceptado por el estimador robusto (inlier) y el centro de la esfera (ídem para el conjunto global de puntos) expresados en las mismas unidades que los parámetros calculados. Para cada caso de ajuste se han realizado múltiples repeticiones del ajuste basado en el método de estimación robusto de RANSAC y mínimos cuadrados (sección 6.1.7).

En las tablas siguientes se listan los datos de ajuste para el láser escáner Trimble GX a una distancia dada de 30 metros. Primeramente para la nube de puntos láser original.

Repetición nº 1					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-25317,06	-25191,91	-25065,743	-24940,669	-24813,699
<b>Y (mm)</b>	15429,013	15646,033	15861,434	16078,833	16294,319
<b>Z (mm)</b>	-252,761	-255,169	-256,577	-260,32	-262,04
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	1200	1370	1325	1396	1334
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{\text{inliers}}</math></b>	1,08	1,015	1,079	1,088	1,066
<b><math>\sigma_{\text{totales}}</math></b>	3,589	3,713	3,806	3,724	3,846
Repetición nº 2					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-25316,796	-25192,013	-25065,709	-24940,837	-24813,971
<b>Y (mm)</b>	15428,86	15645,987	15861,662	16078,768	16294,053
<b>Z (mm)</b>	-252,404	-255,118	-256,901	-259,839	-261,983
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	1201	1376	1323	1377	1337
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{\text{inliers}}</math></b>	1,077	1,022	1,07	1,08	1,061
<b><math>\sigma_{\text{totales}}</math></b>	3,576	3,716	3,819	3,736	3,855
Repetición nº 3					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-25316,966	-25191,785	-25065,725	-24940,857	-24814,276
<b>Y (mm)</b>	15428,889	15646,127	15861,586	16078,648	16294,337
<b>Z (mm)</b>	-252,092	-254,817	-256,629	-260,144	-262,046
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	1199	1361	1327	1385	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084

$\sigma_{inliers}$	1,066	1,008	1,074	1,078	1,049
$\sigma_{totales}$	3,595	3,723	3,81	3,732	3,875
<b>Repetición n° 4</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25317,147	-25191,809	-25065,756	-24940,426	-24813,927
<b>Y (mm)</b>	15428,755	15645,787	15861,634	16078,589	16294,164
<b>Z (mm)</b>	-252,621	-254,847	-256,642	-260,553	-262,461
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1211	1377	1331	1383	1333
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,086	1,026	1,076	1,082	1,061
$\sigma_{totales}$	3,585	3,714	3,813	3,719	3,863
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25317,027	-25191,664	-25065,632	-24940,731	-24813,885
<b>Y (mm)</b>	15428,893	15645,835	15861,789	16078,599	16294,114
<b>Z (mm)</b>	-251,677	-255,166	-256,821	-260,308	-261,928
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1204	1371	1322	1391	1328
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,083	1,026	1,073	1,081	1,054
$\sigma_{totales}$	3,623	3,703	3,818	3,727	3,85
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25316,944	-25192,127	-25065,662	-24940,595	-24813,774
<b>Y (mm)</b>	15428,79	15645,71	15861,455	16078,567	16294,185
<b>Z (mm)</b>	-252,277	-255,093	-256,639	-259,93	-261,993
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1207	1372	1340	1383	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,074	1,032	1,094	1,08	1,061
$\sigma_{totales}$	3,584	3,718	3,803	3,726	3,846
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25317,001	-25191,951	-25065,632	-24940,815	-24813,852
<b>Y (mm)</b>	15428,761	15645,921	15861,635	16078,743	16294,413
<b>Z (mm)</b>	-252,379	-255,074	-256,468	-260,179	-262,131
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1210	1376	1325	1389	1336
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,078	1,02	1,075	1,081	1,06
$\sigma_{totales}$	3,582	3,714	3,806	3,73	3,856
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>

<b>X (mm)</b>	-25316,938	-25191,835	-25065,938	-24940,843	-24814,226
<b>Y (mm)</b>	15428,784	15645,902	15861,472	16078,574	16294,214
<b>Z (mm)</b>	-252,366	-255,097	-256,584	-260,223	-262,342
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1206	1382	1318	1382	1336
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,074	1,027	1,069	1,075	1,053
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,58	3,71	3,818	3,732	3,876
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25317,059	-25192,08	-25065,525	-24940,482	-24814,327
<b>Y (mm)</b>	15428,687	15645,533	15861,599	16078,679	16294,206
<b>Z (mm)</b>	-252,363	-254,965	-256,721	-260,038	-262,164
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1209	1371	1327	1380	1338
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,076	1,043	1,085	1,076	1,056
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,584	3,719	3,803	3,72	3,878
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25316,726	-25191,778	-25065,698	-24940,612	-24814,074
<b>Y (mm)</b>	15428,899	15645,974	15861,802	16078,501	16294,407
<b>Z (mm)</b>	-252,558	-255,118	-256,79	-260,148	-262,202
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1205	1370	1326	1389	1329
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,091	1,015	1,073	1,082	1,046
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,572	3,709	3,82	3,723	3,868
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25317,05	-25192,024	-25065,611	-24940,731	-24814,192
<b>Y (mm)</b>	15428,772	15645,597	15861,359	16078,818	16294,047
<b>Z (mm)</b>	-252,531	-254,962	-256,696	-260,092	-262,275
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1204	1381	1323	1390	1328
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,074	1,045	1,088	1,083	1,048
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,582	3,717	3,8	3,727	3,872

Tabla A.1 Nube láser original sin calibrar para Trimble GX D=30m

A continuación se listan los resultados tras corregir la nube de puntos con todos los parámetros sistemáticos de calibración:

Repetición n° 1					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>

<b>X (mm)</b>	-25165,199	-25037,937	-24910,043	-24782,714	-24654,207
<b>Y (mm)</b>	15669,303	15884,586	16099,364	16315,187	16529,291
<b>Z (mm)</b>	-253,186	-255,322	-257,357	-260,516	-262,318
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1194	1380	1322	1393	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,078	1,045	1,066	1,081	1,051
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,593	3,708	3,833	3,723	3,867
<b>Repetición n° 2</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,232	-25038,115	-24910,097	-24782,485	-24653,75
<b>Y (mm)</b>	15668,964	15884,84	16099,264	16314,997	16529,374
<b>Z (mm)</b>	-252,717	-255,172	-257,328	-260,805	-262,63
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1202	1375	1322	1382	1325
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,072	1,023	1,071	1,078	1,057
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,59	3,722	3,833	3,716	3,849
<b>Repetición n° 3</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,075	-25038,188	-24909,65	-24782,454	-24653,904
<b>Y (mm)</b>	15669,273	15884,882	16099,301	16315,052	16529,428
<b>Z (mm)</b>	-252,513	-255,289	-257,033	-260,785	-262,397
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1200	1373	1327	1384	1334
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,075	1,02	1,08	1,08	1,057
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,601	3,721	3,804	3,714	3,854
<b>Repetición n° 4</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,325	-25037,963	-24909,938	-24782,824	-24654,275
<b>Y (mm)</b>	15669,044	15884,697	16099,354	16315,233	16529,301
<b>Z (mm)</b>	-252,933	-255,259	-257,106	-260,5	-262,417
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1209	1386	1329	1395	1337
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,088	1,04	1,071	1,085	1,054
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,592	3,712	3,82	3,727	3,872
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,073	-25037,897	-24910,043	-24782,603	-24654,211
<b>Y (mm)</b>	15669,196	15884,653	16099,584	16315,227	16529,171
<b>Z (mm)</b>	-252,921	-255,54	-257,361	-260,798	-262,343
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996

<b>N° inliers</b>	1206	1376	1326	1389	1336
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,083	1,037	1,068	1,08	1,058
$\sigma_{totales}$	3,585	3,702	3,841	3,72	3,867
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,096	-25037,964	-24909,81	-24782,87	-24654,244
<b>Y (mm)</b>	15669,112	15884,883	16099,489	16315,126	16529,318
<b>Z (mm)</b>	-252,94	-255,508	-257,139	-260,493	-262,461
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1211	1382	1325	1394	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,087	1,026	1,068	1,084	1,048
$\sigma_{totales}$	3,583	3,707	3,82	3,729	3,871
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,097	-25038,214	-24909,511	-24782,612	-24653,875
<b>Y (mm)</b>	15669,193	15884,953	16099,295	16315,206	16529,43
<b>Z (mm)</b>	-252,928	-255,323	-256,929	-260,664	-262,39
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1205	1369	1318	1392	1335
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,082	1,015	1,081	1,081	1,059
$\sigma_{totales}$	3,586	3,721	3,796	3,719	3,852
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,004	-25038,123	-24909,901	-24782,829	-24653,734
<b>Y (mm)</b>	15669,24	15884,777	16099,533	16315,193	16529,471
<b>Z (mm)</b>	-252,708	-255,157	-257,02	-260,537	-262,637
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1196	1379	1327	1399	1335
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,072	1,031	1,069	1,087	1,067
$\sigma_{totales}$	3,589	3,722	3,823	3,727	3,851
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,146	-25037,894	-24909,845	-24782,473	-24654,005
<b>Y (mm)</b>	15668,829	15884,778	16099,452	16315,173	16529,231
<b>Z (mm)</b>	-253,457	-255,015	-257,2	-260,597	-262,569
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1194	1375	1332	1390	1337
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,082	1,029	1,073	1,084	1,06
$\sigma_{totales}$	3,579	3,721	3,822	3,715	3,858

<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,214	-25037,981	-24910,062	-24782,712	-24653,825
<b>Y (mm)</b>	15669,178	15884,745	16099,592	16315,129	16529,468
<b>Z (mm)</b>	-252,657	-255,029	-256,945	-260,554	-262,812
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1206	1378	1319	1387	1336
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,08	1,032	1,062	1,075	1,064
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,598	3,723	3,832	3,722	3,859
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25165,193	-25038,097	-24909,752	-24782,75	-24654,176
<b>Y (mm)</b>	15669,449	15884,627	16099,59	16315,348	16529,224
<b>Z (mm)</b>	-253,129	-255,31	-257,274	-260,905	-262,58
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1196	1386	1321	1385	1340
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,083	1,047	1,07	1,08	1,059
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,6	3,715	3,826	3,726	3,868

Tabla A.2 Nube láser corregida con todos los parámetros sistemáticos, para Trimble D=30m

Seguidamente se muestra la tabla con los resultados de la nube de puntos corregida solamente con los parámetros sistemáticos significativos:

<b>Repetición n° 1</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25338,153	-25213,285	-25087,497	-24962,718	-24836,396
<b>Y (mm)</b>	15394,383	15611,314	15827,226	16044,05	16260,034
<b>Z (mm)</b>	-252,586	-254,758	-256,484	-260,145	-261,811
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1197	1384	1332	1386	1331
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,079	1,031	1,078	1,09	1,051
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,593	3,714	3,815	3,728	3,859
<b>Repetición n° 2</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25338,134	-25213,181	-25087,411	-24962,659	-24836,723
<b>Y (mm)</b>	15394,203	15611,35	15827,028	16044,219	16260,224
<b>Z (mm)</b>	-252,196	-254,758	-256,416	-259,977	-262,094
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1203	1381	1332	1382	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,073	1,028	1,089	1,077	1,051
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,59	3,712	3,804	3,723	3,883



Repetición n° 3					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
X (mm)	-25338,197	-25213,193	-25087,468	-24962,37	-24836,27
Y (mm)	15394,059	15611,349	15827,356	16044,448	16260,205
Z (mm)	-252,233	-254,954	-256,703	-260,015	-262,092
R (mm)	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
N° inliers	1206	1372	1322	1376	1334
Ptos totales	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,076	1,019	1,069	1,083	1,058
$\sigma_{totales}$	3,588	3,707	3,824	3,715	3,86
Repetición n° 4					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
X (mm)	-25338,154	-25213,33	-25087,518	-24962,47	-24836,721
Y (mm)	15394,252	15611,336	15827,245	16044,265	16259,996
Z (mm)	-252,255	-254,991	-256,477	-260,386	-262,2
R (mm)	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
N° inliers	1209	1375	1330	1372	1331
Ptos totales	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,082	1,022	1,075	1,074	1,051
$\sigma_{totales}$	3,592	3,711	3,817	3,72	3,884
Repetición n° 5					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
X (mm)	-25337,822	-25213,339	-25087,401	-24962,851	-24836,423
Y (mm)	15394,226	15611,472	15827,388	16044,494	16259,864
Z (mm)	-252,503	-255,007	-256,567	-260,384	-261,833
R (mm)	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
N° inliers	1199	1375	1324	1385	1338
Ptos totales	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,088	1,02	1,075	1,079	1,062
$\sigma_{totales}$	3,572	3,713	3,819	3,732	3,859
Repetición n° 6					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
X (mm)	-25338,071	-25213,423	-25087,549	-24962,842	-24836,734
Y (mm)	15394,342	15611,238	15827,078	16044,392	16259,938
Z (mm)	-251,976	-254,923	-256,627	-260,085	-261,886
R (mm)	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
N° inliers	1203	1379	1328	1395	1337
Ptos totales	1967	2143	2150	2146	2084
$\sigma_{inliers}$	1,075	1,032	1,081	1,084	1,056
$\sigma_{totales}$	3,6	3,714	3,817	3,729	3,878
Repetición n° 7					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
X (mm)	-25337,916	-25213,278	-25087,35	-24962,564	-24836,12
Y (mm)	15394,507	15611,173	15827,061	16044,423	16260,12

<b>Z (mm)</b>	-252,213	-254,681	-256,302	-260,262	-262,125
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1199	1386	1328	1386	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,084	1,041	1,086	1,082	1,064
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,594	3,715	3,801	3,721	3,852
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25338,236	-25213,354	-25087,533	-24962,813	-24836,325
<b>Y (mm)</b>	15394,125	15611,403	15827,387	16044,338	16260,152
<b>Z (mm)</b>	-252,46	-254,889	-256,068	-260,082	-262,236
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1211	1379	1319	1392	1339
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,088	1,022	1,071	1,082	1,063
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,589	3,714	3,821	3,728	3,865
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25338,109	-25213,371	-25087,373	-24962,66	-24836,718
<b>Y (mm)</b>	15394,209	15611,187	15827,102	16044,332	16259,87
<b>Z (mm)</b>	-251,587	-254,71	-256,496	-259,792	-261,785
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1200	1380	1333	1386	1333
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,076	1,034	1,089	1,082	1,055
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,618	3,717	3,806	3,725	3,876
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25338,037	-25213,055	-25087,41	-24962,955	-24836,54
<b>Y (mm)</b>	15394,449	15611,153	15827,05	16044,341	16259,826
<b>Z (mm)</b>	-252,515	-254,481	-256,515	-259,904	-261,765
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1202	1367	1336	1383	1329
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,086	1,035	1,093	1,078	1,053
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,591	3,716	3,806	3,735	3,865
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-25337,984	-25213,314	-25087,277	-24962,813	-24836,207
<b>Y (mm)</b>	15394,257	15611,321	15827,123	16044,6	16259,95
<b>Z (mm)</b>	-251,855	-254,596	-256,434	-260,087	-262,046
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	1201	1375	1326	1386	1332
<b>Ptos totales</b>	1967	2143	2150	2146	2084

$\sigma_{\text{inliers}}$	1,071	1,023	1,086	1,081	1,062
$\sigma_{\text{totales}}$	3,598	3,721	3,801	3,728	3,851

Tabla A.3 Nube láser corregida con los sistematismos significativos, para Trimble D=30m

Siguiendo la estructura expuesta anteriormente, en las próximas tres tablas se listarán los resultados de la extracción de centros de las esferas para la nube de puntos del escaneo láser con el láser terrestre Trimble GX para una distancia dada de 60 metros. Recordar que el radio no entraba en el ajuste como incógnita al ser un dato obtenido de la construcción del patrón metrológico. Primeramente se exponen los resultados de la extracción a partir de la nube de puntos láser original.

Repetición nº 1					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-50491,979	-50352,193	-50212,134	-50074,343	-49933,879
<b>Y (mm)</b>	31929,469	32139,87	32346,388	32554,927	32762,113
<b>Z (mm)</b>	-406,623	-406,601	-402,99	-402,516	-399,414
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	834	881	852	902	856
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,116	1,098	1,1	1,122	1,113
$\sigma_{\text{totales}}$	3,741	3,741	4,43	3,975	4,122
Repetición nº 2					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-50491,889	-50352,156	-50212,616	-50074,369	-49933,444
<b>Y (mm)</b>	31929,55	32139,812	32346,214	32555,194	32762,296
<b>Z (mm)</b>	-406,76	-406,55	-402,759	-402,088	-399,064
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	835	882	852	895	857
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,116	1,1	1,115	1,107	1,118
$\sigma_{\text{totales}}$	3,733	3,74	4,444	3,989	4,111
Repetición nº 3					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-50491,904	-50352,147	-50212,416	-50074,255	-49933,3
<b>Y (mm)</b>	31929,42	32139,71	32346,885	32554,726	32762,051
<b>Z (mm)</b>	-406,87	-406,55	-403,564	-402,19	-399,409
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	835	880	852	895	859
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,113	1,098	1,091	1,117	1,127
$\sigma_{\text{totales}}$	3,728	3,738	4,457	3,983	4,1
Repetición nº 4					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-50491,898	-50352,663	-50212,022	-50074,434	-49933,895
<b>Y (mm)</b>	31929,334	32139,614	32346,445	32554,804	32761,719

<b>Z (mm)</b>	-407,123	-406,307	-402,936	-402,561	-399,45
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	836	877	851	899	858
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,114	1,094	1,102	1,119	1,116
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,721	3,754	4,432	3,98	4,12
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50491,863	-50352,083	-50212,117	-50074,178	-49933,86
<b>Y (mm)</b>	31929,438	32139,847	32346,318	32555,027	32761,766
<b>Z (mm)</b>	-407,166	-406,483	-403,063	-402,487	-399,538
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	834	878	853	900	864
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,112	1,098	1,102	1,122	1,127
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,72	3,742	4,424	3,968	4,119
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50491,915	-50352,128	-50212,425	-50074,277	-49933,993
<b>Y (mm)</b>	31929,528	32139,74	32346,278	32554,886	32761,917
<b>Z (mm)</b>	-406,616	-406,449	-403,534	-402,536	-399,266
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	837	878	853	905	859
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,121	1,098	1,09	1,13	1,12
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,74	3,74	4,425	3,972	4,124
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50491,942	-50352,418	-50212,309	-50074,45	-49933,449
<b>Y (mm)</b>	31929,302	32139,625	32346,058	32554,844	32762,335
<b>Z (mm)</b>	-407,05	-406,633	-403,207	-402,527	-399,212
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	834	880	851	898	860
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,111	1,092	1,103	1,116	1,123
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,724	3,74	4,415	3,981	4,112
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50491,957	-50352,536	-50212,416	-50074,398	-49933,875
<b>Y (mm)</b>	31929,377	32139,587	32346,226	32555,64	32761,853
<b>Z (mm)</b>	-406,963	-406,613	-403,585	-402,733	-399,564
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	833	881	852	898	868
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681

$\sigma_{\text{inliers}}$	1,109	1,093	1,093	1,117	1,133
$\sigma_{\text{totales}}$	3,728	3,743	4,422	3,976	4,121
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50492,023	-50352,201	-50212,384	-50074,451	-49933,873
<b>Y (mm)</b>	31929,467	32139,748	32346,419	32555,586	32761,753
<b>Z (mm)</b>	-406,71	-406,33	-402,936	-402,779	-399,439
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	838	881	851	895	863
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,12	1,102	1,099	1,113	1,123
$\sigma_{\text{totales}}$	3,74	3,745	4,439	3,977	4,118
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50491,784	-50352,129	-50212,407	-50074,166	-49933,929
<b>Y (mm)</b>	31929,547	32139,766	32346,321	32554,94	32761,767
<b>Z (mm)</b>	-406,792	-406,596	-403,755	-402,694	-399,639
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	835	882	851	899	861
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,115	1,101	1,09	1,128	1,127
$\sigma_{\text{totales}}$	3,728	3,738	4,427	3,964	4,124
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50492,041	-50352,602	-50212,269	-50074,147	-49933,867
<b>Y (mm)</b>	31929,48	32139,515	32346,223	32555,354	32761,76
<b>Z (mm)</b>	-406,666	-406,361	-403,497	-402,244	-399,506
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	834	880	857	893	864
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,116	1,096	1,105	1,106	1,126
$\sigma_{\text{totales}}$	3,743	3,75	4,418	3,976	4,119

Tabla A.4 Coordenadas de las esferas para la nube láser original del Trimble GX con D=60m

La tabla siguiente se corresponde con los resultados de extracción de centros de esferas, para una distancia de 60 metros, sobre la nube de puntos láser corregidas con todos los parámetros sistemáticos.

<b>Repetición n° 1</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,486	-50035,876	-49893,857	-49753,991	-49611,246
<b>Y (mm)</b>	32407,533	32616,351	32821,518	33028,945	33234,673
<b>Z (mm)</b>	-407,823	-407,512	-403,843	-403,373	-400,168
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	833	879	850	904	860

<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,11	1,09	1,1	1,124	1,124
$\sigma_{totales}$	3,727	3,735	4,425	3,969	4,108
<b>Repetición n° 2</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,334	-50036,187	-49893,852	-49753,863	-49611,695
<b>Y (mm)</b>	32407,746	32616,068	32821,848	33028,877	33234,229
<b>Z (mm)</b>	-407,694	-407,243	-404,11	-403,114	-400,422
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	831	879	848	896	866
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,11	1,097	1,089	1,115	1,13
$\sigma_{totales}$	3,728	3,747	4,436	3,972	4,12
<b>Repetición n° 3</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,439	-50036,184	-49894,047	-49753,932	-49611,736
<b>Y (mm)</b>	32407,622	32616,139	32821,743	33028,744	33234,534
<b>Z (mm)</b>	-407,855	-407,264	-403,742	-403,259	-400,143
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	835	884	851	902	857
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,112	1,101	1,1	1,127	1,115
$\sigma_{totales}$	3,726	3,747	4,444	3,97	4,122
<b>Repetición n° 4</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,424	-50036,083	-49894,292	-49753,981	-49611,786
<b>Y (mm)</b>	32407,689	32616,226	32821,852	33028,848	33234,18
<b>Z (mm)</b>	-407,768	-407,329	-404,166	-403,511	-400,5
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	831	880	853	902	857
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,108	1,091	1,088	1,126	1,122
$\sigma_{totales}$	3,729	3,742	4,446	3,966	4,125
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,669	-50036,08	-49894,116	-49754,067	-49611,763
<b>Y (mm)</b>	32407,553	32616,304	32821,535	33028,93	33234,35
<b>Z (mm)</b>	-407,574	-408,067	-404,464	-403,537	-400,253
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	831	878	853	902	865
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,11	1,09	1,094	1,121	1,127
$\sigma_{totales}$	3,744	3,739	4,424	3,969	4,122
<b>Repetición n° 6</b>					

	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,344	-50036,087	-49894,277	-49753,932	-49611,445
<b>Y (mm)</b>	32407,797	32616,249	32822,071	33029,07	33234,204
<b>Z (mm)</b>	-407,654	-407,277	-404,337	-403,121	-400,014
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	830	877	849	899	858
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,11	1,087	1,083	1,115	1,115
$\sigma_{\text{totales}}$	3,731	3,744	4,456	3,975	4,106
<b>Repetición nº 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,489	-50036,185	-49894,089	-49753,872	-49611,504
<b>Y (mm)</b>	32407,772	32616,22	32821,512	33028,674	33234,163
<b>Z (mm)</b>	-407,77	-407,394	-404,479	-403,129	-400,165
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	835	880	850	898	856
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,116	1,09	1,093	1,123	1,112
$\sigma_{\text{totales}}$	3,733	3,744	4,423	3,972	4,108
<b>Repetición nº 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,387	-50035,953	-49894,291	-49753,824	-49611,219
<b>Y (mm)</b>	32407,701	32616,263	32822,183	33028,702	33234,709
<b>Z (mm)</b>	-407,577	-407,686	-404,289	-403,016	-399,958
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	835	877	849	893	861
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,117	1,087	1,088	1,117	1,125
$\sigma_{\text{totales}}$	3,734	3,734	4,463	3,974	4,109
<b>Repetición nº 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,49	-50035,991	-49894,015	-49753,858	-49611,788
<b>Y (mm)</b>	32407,541	32616,48	32822,243	33028,992	33234,507
<b>Z (mm)</b>	-408,165	-407,21	-404,463	-403,435	-400,202
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	829	879	850	900	858
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,107	1,091	1,091	1,122	1,118
$\sigma_{\text{totales}}$	3,723	3,746	4,461	3,963	4,124
<b>Repetición nº 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,39	-50035,785	-49893,965	-49753,995	-49611,624
<b>Y (mm)</b>	32407,672	32616,519	32821,828	33029,172	33234,512
<b>Z (mm)</b>	-407,628	-407,058	-403,77	-403,164	-399,766

<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	837	878	853	900	855
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,118	1,1	1,103	1,113	1,116
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,731	3,749	4,445	3,976	4,12
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50177,38	-50035,73	-49893,921	-49754,163	-49611,747
<b>Y (mm)</b>	32407,551	32616,663	32821,364	33028,75	33234,406
<b>Z (mm)</b>	-408,087	-407,491	-403,939	-403,372	-400,188
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	833	879	850	898	859
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,111	1,095	1,105	1,116	1,118
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,718	3,741	4,417	3,978	4,121

Tabla A.5 Coordenadas de las esferas para la nube de puntos láser corregida con todos los sistematismos para Trimble GX y D=60m

Seguidamente se muestran los resultados de la nube de puntos láser procedente del láser terrestre Trimble GX corregida sólo con los parámetros sistemáticos significativos.

<b>Repetición n° 1</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,763	-50396,471	-50256,526	-50118,91	-49978,913
<b>Y (mm)</b>	31860,172	32070,592	32277,184	32485,911	32693,247
<b>Z (mm)</b>	-406,346	-406,176	-402,732	-401,858	-399,22
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	832	880	854	896	856
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,114	1,093	1,109	1,119	1,113
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,743	3,745	4,421	3,981	4,121
<b>Repetición n° 2</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,647	-50396,201	-50256,823	-50118,968	-49978,748
<b>Y (mm)</b>	31860,155	32070,677	32277,247	32486,035	32693,45
<b>Z (mm)</b>	-406,615	-406,023	-403,318	-402,322	-398,97
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	835	880	854	904	859
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,113	1,104	1,095	1,131	1,117
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	3,729	3,747	4,425	3,969	4,117
<b>Repetición n° 3</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,591	-50396,495	-50256,421	-50118,946	-49978,367



<b>Y (mm)</b>	31860,38	32070,54	32277,49	32486,535	32693,609
<b>Z (mm)</b>	-406,481	-406,207	-403,026	-402,186	-398,832
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	836	881	849	893	856
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,121	1,094	1,096	1,107	1,121
$\sigma_{totales}$	3,735	3,744	4,429	3,973	4,111
<b>Repetición n° 4</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,8	-50396,343	-50256,653	-50118,989	-49978,472
<b>Y (mm)</b>	31860,064	32070,624	32277,036	32486,123	32693,409
<b>Z (mm)</b>	-406,37	-406,219	-402,919	-402,344	-398,933
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	831	881	852	898	858
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,111	1,098	1,108	1,119	1,119
$\sigma_{totales}$	3,743	3,742	4,414	3,969	4,107
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,655	-50396,609	-50256,743	-50119,042	-49978,894
<b>Y (mm)</b>	31860,134	32070,304	32277,101	32486,039	32692,962
<b>Z (mm)</b>	-406,709	-406,147	-403,217	-402,245	-399,184
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	836	879	849	905	860
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,114	1,093	1,097	1,128	1,119
$\sigma_{totales}$	3,726	3,746	4,417	3,974	4,118
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,72	-50396,736	-50256,45	-50119,041	-49979,061
<b>Y (mm)</b>	31860,241	32070,278	32277,597	32486,052	32693,032
<b>Z (mm)</b>	-406,586	-406,232	-403,488	-402,337	-399,244
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	836	885	854	902	858
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,117	1,102	1,105	1,125	1,122
$\sigma_{totales}$	3,734	3,748	4,435	3,972	4,127
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,673	-50396,523	-50256,687	-50118,86	-49978,814
<b>Y (mm)</b>	31860,132	32070,416	32277,541	32486,124	32693,138
<b>Z (mm)</b>	-406,713	-406,133	-403,533	-402,326	-399,481
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	836	881	852	899	854

<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,114	1,096	1,093	1,125	1,118
$\sigma_{totales}$	3,727	3,745	4,438	3,964	4,121
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,753	-50396,234	-50256,802	-50119,011	-49979,042
<b>Y (mm)</b>	31860,067	32070,478	32277,337	32486,28	32692,995
<b>Z (mm)</b>	-406,76	-406,397	-403,3	-402,213	-399,056
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	834	877	849	899	859
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,112	1,094	1,083	1,116	1,12
$\sigma_{totales}$	3,729	3,734	4,429	3,973	4,124
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,869	-50396,248	-50256,992	-50119,016	-49978,725
<b>Y (mm)</b>	31860,043	32070,787	32277,56	32486,202	32693,211
<b>Z (mm)</b>	-406,361	-406	-402,974	-402,205	-399,077
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	830	881	851	899	857
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,111	1,105	1,087	1,117	1,113
$\sigma_{totales}$	3,747	3,751	4,447	3,973	4,112
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,628	-50396,541	-50256,523	-50119,023	-49978,907
<b>Y (mm)</b>	31860,275	32070,637	32277,276	32485,966	32693,12
<b>Z (mm)</b>	-406,626	-406,218	-402,777	-402,485	-399,399
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	834	883	849	900	858
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,113	1,097	1,098	1,131	1,122
$\sigma_{totales}$	3,73	3,746	4,424	3,97	4,123
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-50535,85	-50396,636	-50256,823	-50119,133	-49978,893
<b>Y (mm)</b>	31860,071	32070,341	32277,163	32485,956	32692,955
<b>Z (mm)</b>	-406,451	-406,106	-403,286	-402,269	-399,167
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	829	880	851	903	859
<b>Ptos totales</b>	1584	1600	1654	1637	1681
$\sigma_{inliers}$	1,107	1,094	1,094	1,125	1,117
$\sigma_{totales}$	3,742	3,748	4,422	3,978	4,118

**Tabla A.6 Coordenadas de las esferas para la nube de puntos láser corregida solo con los sistematismos significativos para Trimble GX y D=60m**

Se finaliza la presentación de los datos de extracción de centros de esferas mediante el ajuste mínimo cuadrático apoyado en el estimador robusto de RANSAC, con las tres tablas correspondientes a un escaneo láser con el Trimble GX a una distancia de 120 metros con respecto al patrón de calibración, donde están dispuestas las cinco esferas. Siguiendo la estructura anteriormente presentada, se comenzará con los datos resultantes de la nube de puntos original.

Repetición n° 1					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-71272,63	-71082,679	-70893,011	-70703,725	-70514,1
<b>Y (mm)</b>	79818,02	79983,463	80143,135	80309,834	80471,562
<b>Z (mm)</b>	-386,086	-385,225	-380,753	-379,987	-375,094
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	431	376	374	351	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,182	1,172	1,198	1,165	1,161
$\sigma_{totales}$	4,592	4,123	4,813	5,204	4,787
Repetición n° 2					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-71272,708	-71082,111	-70893,037	-70704,135	-70514,55
<b>Y (mm)</b>	79818,04	79984,116	80143,271	80309,608	80472,36
<b>Z (mm)</b>	-385,961	-384,444	-380,797	-379,731	-374,556
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	434	380	375	356	344
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,194	1,197	1,195	1,191	1,166
$\sigma_{totales}$	4,603	4,166	4,812	5,228	4,833
Repetición n° 3					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-71272,548	-71082,133	-70893,015	-70704,232	-70513,541
<b>Y (mm)</b>	79817,797	79983,922	80143,294	80309,747	80472,035
<b>Z (mm)</b>	-386,894	-385	-380,809	-379,621	-375,252
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	426	379	373	355	341
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,162	1,187	1,189	1,193	1,147
$\sigma_{totales}$	4,538	4,139	4,811	5,243	4,787
Repetición n° 4					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-71272,701	-71082,031	-70894,063	-70704,095	-70514,713
<b>Y (mm)</b>	79818,054	79983,906	80144,355	80309,636	80471,765
<b>Z (mm)</b>	-386,484	-385,175	-378,041	-379,87	-375,409
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996

<b>N° inliers</b>	429	377	380	358	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,182	1,182	1,152	1,197	1,159
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,563	4,135	5,157	5,215	4,791
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,957	-71082,258	-70894,552	-70704,573	-70515,031
<b>Y (mm)</b>	79817,756	79983,819	80143,084	80309,756	80471,855
<b>Z (mm)</b>	-386,342	-385,033	-379,404	-379,297	-375,146
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	378	372	357	347
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,185	1,183	1,171	1,202	1,185
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,577	4,134	4,996	5,284	4,81
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,84	-71081,88	-70893,079	-70704,261	-70514,877
<b>Y (mm)</b>	79817,937	79984,059	80143,151	80309,633	80471,966
<b>Z (mm)</b>	-386,189	-385,251	-380,733	-379,875	-374,708
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	378	376	356	341
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,185	1,187	1,202	1,198	1,169
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,585	4,142	4,816	5,218	4,826
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,481	-71082,602	-70893,14	-70703,411	-70515,114
<b>Y (mm)</b>	79817,969	79983,497	80143,194	80309,964	80471,622
<b>Z (mm)</b>	-385,762	-385,462	-380,376	-380,114	-375,249
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	428	377	371	355	347
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,165	1,174	1,195	1,172	1,191
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,619	4,12	4,847	5,195	4,808
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,732	-71082,586	-70894,089	-70704,189	-70514,919
<b>Y (mm)</b>	79817,821	79983,495	80144,439	80309,75	80471,665
<b>Z (mm)</b>	-385,579	-385,43	-378,003	-379,499	-375,557
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	431	377	375	360	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,178	1,174	1,134	1,205	1,159
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,637	4,12	5,164	5,254	4,792

<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,936	-71082,527	-70894,9	-70704,337	-70514,718
<b>Y (mm)</b>	79817,866	79983,729	80142,836	80309,805	80471,642
<b>Z (mm)</b>	-386,061	-385,22	-378,727	-379,27	-375,357
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	378	371	358	341
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,188	1,178	1,181	1,202	1,156
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,597	4,128	5,102	5,282	4,792
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,679	-71082,082	-70893,184	-70704,218	-70514,479
<b>Y (mm)</b>	79817,965	79984,038	80143,068	80309,491	80472,363
<b>Z (mm)</b>	-385,776	-385,123	-380,758	-379,899	-374,783
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	431	377	373	354	346
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,182	1,182	1,193	1,188	1,167
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,618	4,141	4,816	5,213	4,82
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71272,4	-71082,668	-70893,275	-70703,224	-70513,734
<b>Y (mm)</b>	79817,82	79984,003	80142,809	80309,871	80471,874
<b>Z (mm)</b>	-387,254	-385,172	-380,691	-380,11	-375,062
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	427	376	374	354	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,161	1,176	1,204	1,168	1,155
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,52	4,138	4,823	5,193	4,79

Tabla A.7 Coordenadas de las esferas para la nube láser original del Trimble GX y D=120m

En la siguiente tabla se muestran los resultados finales para la nube a 120 metros de distancia corregida, con todos los parámetros sistemáticos.

<b>Repetición n° 1</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-70500,828	-70310,498	-70120,214	-69928,139	-69736,853
<b>Y (mm)</b>	80481,844	80645,076	80803,901	80967,368	81127,368
<b>Z (mm)</b>	-388,189	-386,945	-380,011	-381,937	-377,528
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	428	379	371	355	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,17	1,188	1,123	1,171	1,149
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,594	4,138	5,14	5,195	4,767

Repetición n° 2					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-70501,87	-70310,478	-70119,39	-69928,201	-69736,993
<b>Y (mm)</b>	80480,871	80645,066	80802,422	80967,064	81127,42
<b>Z (mm)</b>	-387,557	-386,967	-382,592	-381,764	-376,99
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	430	378	373	355	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,175	1,184	1,192	1,169	1,152
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,62	4,137	4,815	5,202	4,786
Repetición n° 3					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-70501,906	-70310,321	-70120,783	-69929,132	-69736,86
<b>Y (mm)</b>	80480,836	80644,584	80803,018	80966,87	81127,755
<b>Z (mm)</b>	-387,464	-387,328	-380,2	-381,485	-377,154
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	434	377	371	354	341
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,185	1,175	1,133	1,191	1,139
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,629	4,118	5,12	5,238	4,79
Repetición n° 4					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-70501,663	-70309,97	-70120,553	-69929,3	-69738,365
<b>Y (mm)</b>	80480,75	80645,069	80803,227	80967,155	81127,427
<b>Z (mm)</b>	-389,18	-386,776	-380,05	-381,012	-376,902
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	426	377	372	356	345
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,16	1,182	1,135	1,197	1,182
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,513	4,139	5,134	5,294	4,813
Repetición n° 5					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-70501,336	-70310,465	-70120,419	-69928,095	-69738,765
<b>Y (mm)</b>	80481,008	80645,128	80803,672	80967,159	81127,079
<b>Z (mm)</b>	-388,943	-386,834	-379,988	-381,97	-376,769
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	430	377	376	354	344
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,163	1,183	1,135	1,169	1,22
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,525	4,141	5,143	5,186	4,833
Repetición n° 6					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-70501,994	-70310,359	-70120,423	-69928,876	-69736,283
<b>Y (mm)</b>	80480,866	80644,487	80803,53	80967,253	81127,676

<b>Z (mm)</b>	-387,403	-387,137	-380,033	-381,353	-376,084
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	377	375	357	341
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,176	1,177	1,136	1,196	1,173
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,636	4,118	5,135	5,251	4,846
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-70502,229	-70309,985	-70120,288	-69929,313	-69738,201
<b>Y (mm)</b>	80480,763	80645,15	80803,237	80967,144	81127,554
<b>Z (mm)</b>	-388,074	-386,725	-380,42	-381,043	-376,785
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	428	378	373	356	342
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,186	1,184	1,148	1,197	1,163
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,582	4,144	5,076	5,291	4,814
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-70501,982	-70309,622	-70119,395	-69928,131	-69738,147
<b>Y (mm)</b>	80480,956	80645,284	80802,437	80967,339	81127,502
<b>Z (mm)</b>	-387,672	-386,765	-382,516	-381,662	-377,139
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	378	372	353	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,183	1,186	1,192	1,163	1,157
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,61	4,152	4,821	5,219	4,798
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-70502,129	-70310,229	-70120,233	-69927,887	-69737
<b>Y (mm)</b>	80480,712	80645	80803,796	80967,43	81127,463
<b>Z (mm)</b>	-388,1	-386,811	-379,894	-382,111	-376,803
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	378	376	355	340
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,183	1,182	1,14	1,172	1,142
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,579	4,137	5,155	5,184	4,795
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-70502,184	-70309,776	-70120,41	-69927,943	-69738,074
<b>Y (mm)</b>	80480,45	80644,905	80803,71	80967,321	81127,33
<b>Z (mm)</b>	-388,211	-386,961	-379,922	-381,966	-377,076
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	432	378	373	355	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913

$\sigma_{inliers}$	1,188	1,185	1,125	1,17	1,161
$\sigma_{totales}$	4,575	4,13	5,153	5,192	4,797
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-70501,991	-70309,573	-70119,426	-69929,171	-69737,26
<b>Y (mm)</b>	80480,585	80645,159	80802,429	80967,131	81127,698
<b>Z (mm)</b>	-387,589	-387,191	-382,623	-381,115	-377,328
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	377	370	357	342
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,17	1,185	1,182	1,199	1,138
$\sigma_{totales}$	4,62	4,139	4,814	5,279	4,783

Tabla A.8 Coordenadas de las esferas para la nube de puntos láser corregida con todos los sistematismos para Trimble GX y D=120m

Se finaliza el listado de los centroides de esferas (coordenadas tridimensionales) extraídos en el proceso de ajuste, para la nube de puntos correspondiente al láser escáner terrestre Trimble GX con el mayor alejamiento (120 metros) considerado en los casos experimentales de la sección 6.1.7. Dicha nube de puntos tridimensional está únicamente corregida con los parámetros sistemáticos significativos obtenidos en la sección 6.1.6.

<b>Repetición n° 1</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,612	-71198,306	-71009,757	-70819,425	-70630,604
<b>Y (mm)</b>	79715,033	79881,184	80042,066	80207,669	80370,351
<b>Z (mm)</b>	-386,264	-384,804	-377,879	-379,9	-375,233
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	377	372	354	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,167	1,181	1,126	1,17	1,141
$\sigma_{totales}$	4,558	4,14	5,142	5,191	4,791
<b>Repetición n° 2</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,869	-71198,314	-71008,856	-70820,137	-70631,286
<b>Y (mm)</b>	79714,909	79881,139	80040,639	80207,406	80369,798
<b>Z (mm)</b>	-385,426	-384,874	-380,492	-379,283	-374,696
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	431	377	376	354	342
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,179	1,18	1,199	1,184	1,168
$\sigma_{totales}$	4,624	4,137	4,813	5,246	4,814
<b>Repetición n° 3</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,205	-71197,586	-71010,081	-70819,415	-70631,014
<b>Y (mm)</b>	79715,103	79881,18	80041,79	80207,655	80369,966



<b>Z (mm)</b>	-386,804	-384,785	-377,597	-379,622	-374,688
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	428	380	374	356	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,156	1,19	1,129	1,173	1,163
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,531	4,139	5,186	5,215	4,81
<b>Repetición n° 4</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,894	-71197,515	-71009,965	-70820,366	-70630,713
<b>Y (mm)</b>	79714,898	79881,216	80041,774	80207,495	80370,226
<b>Z (mm)</b>	-385,622	-384,825	-377,723	-379,047	-374,086
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	380	375	359	342
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,176	1,191	1,134	1,204	1,161
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,607	4,141	5,165	5,276	4,841
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,87	-71198,307	-71009,774	-70819,377	-70631,293
<b>Y (mm)</b>	79714,792	79881,395	80041,729	80207,408	80369,852
<b>Z (mm)</b>	-385,455	-384,488	-377,61	-379,795	-374,783
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	433	376	372	353	344
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,181	1,182	1,137	1,165	1,171
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,621	4,155	5,178	5,192	4,811
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,878	-71197,788	-71009,926	-70819,434	-70631,495
<b>Y (mm)</b>	79714,976	79881,304	80041,812	80207,68	80369,631
<b>Z (mm)</b>	-385,509	-384,219	-378,043	-379,975	-374,718
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	377	375	353	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,177	1,187	1,131	1,168	1,186
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	4,616	4,162	5,118	5,185	4,819
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71387,965	-71198,196	-71009,862	-70819,444	-70631,395
<b>Y (mm)</b>	79714,945	79880,539	80041,825	80207,452	80369,673
<b>Z (mm)</b>	-385,974	-385,032	-377,937	-380,476	-374,886
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	428	376	378	353	346
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913

$\sigma_{inliers}$	1,179	1,173	1,144	1,181	1,183
$\sigma_{totales}$	4,579	4,119	5,132	5,141	4,809
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71388,001	-71198,084	-71008,842	-70820,356	-70630,838
<b>Y (mm)</b>	79714,83	79881,046	80040,677	80207,417	80370,296
<b>Z (mm)</b>	-385,506	-384,819	-380,545	-379,109	-374,576
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	429	377	373	358	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,179	1,175	1,188	1,201	1,156
$\sigma_{totales}$	4,618	4,134	4,809	5,268	4,817
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71388,111	-71198,307	-71010,442	-70819,542	-70630,537
<b>Y (mm)</b>	79714,497	79881,254	80040,237	80207,567	80370,065
<b>Z (mm)</b>	-385,39	-384,442	-378,831	-379,44	-375,032
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	430	377	371	354	346
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,175	1,183	1,183	1,167	1,159
$\sigma_{totales}$	4,633	4,153	5,041	5,229	4,791
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71388,216	-71197,556	-71009,842	-70819,351	-70629,742
<b>Y (mm)</b>	79714,441	79881,257	80041,893	80207,647	80370,113
<b>Z (mm)</b>	-385,765	-384,749	-377,695	-379,996	-374,413
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	430	380	372	356	341
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,181	1,19	1,127	1,177	1,151
$\sigma_{totales}$	4,603	4,144	5,168	5,183	4,818
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-71388,135	-71197,343	-71009,967	-70820,295	-70631,444
<b>Y (mm)</b>	79715,045	79881,273	80041,663	80207,704	80369,898
<b>Z (mm)</b>	-385,85	-384,839	-377,879	-378,171	-374,482
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	428	378	373	355	343
<b>Ptos totales</b>	988	898	950	984	913
$\sigma_{inliers}$	1,188	1,188	1,13	1,197	1,185
$\sigma_{totales}$	4,59	4,145	5,141	5,38	4,829

Tabla A.9 Coordenadas de las esferas para la nube de puntos láser corregida sólo con los sistematismos significativos para Trimble GX y D=120m

Como se menciona la sección 6.1.7 los datos de calibración correspondientes al equipo Riegl no son válidos, ya que el equipo fue mandado a calibrar a raíz de los resultados obtenidos. Por ello sólo se disponen de las coordenadas de los centros de las esferas extraídas a partir de la nube original, datos que se listan en la tabla siguiente:

Repetición nº 1					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-29583,675	-29607,643	-29629,408	-29652,445	-29674,31
<b>Y (mm)</b>	-2198,147	-1948,821	-1698,541	-1449,297	-1200,243
<b>Z (mm)</b>	16,441	15,57	14,434	14,374	14,408
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	4184	4835	4876	4937	4760
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,12	1,139	1,127	1,117	1,121
$\sigma_{\text{totales}}$	6,507	3,928	4,075	4,012	4,279
Repetición nº 2					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-29584,505	-29607,931	-29629,649	-29652,412	-29674,375
<b>Y (mm)</b>	-2197,681	-1948,562	-1698,64	-1448,727	-1200,179
<b>Z (mm)</b>	17,036	15,619	14,779	13,698	14,173
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	4187	4839	4875	4937	4761
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,116	1,134	1,126	1,13	1,115
$\sigma_{\text{totales}}$	6,461	3,885	4,083	3,944	4,244
Repetición nº 3					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-29583,716	-29607,872	-29629,268	-29652,512	-29674,392
<b>Y (mm)</b>	-2197,851	-1948,825	-1698,23	-1449,311	-1200,167
<b>Z (mm)</b>	16,627	15,59	14,474	14,159	14,408
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	4185	4849	4876	4929	4756
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,115	1,137	1,133	1,119	1,118
$\sigma_{\text{totales}}$	6,493	3,909	4,088	3,985	4,27
Repetición nº 4					
	Esfera1	Esfera2	Esfera3	Esfera4	Esfera5
<b>X (mm)</b>	-29583,98	-29607,756	-29629,651	-29652,012	-29674,412
<b>Y (mm)</b>	-2197,71	-1948,617	-1698,547	-1449,069	-1200,352
<b>Z (mm)</b>	16,226	15,431	14,875	13,722	13,698
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	4192	4843	4881	4932	4750
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,112	1,137	1,128	1,122	1,117

$\sigma_{\text{totales}}$	6,49	3,889	4,09	3,985	4,201
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29583,768	-29608,154	-29629,32	-29651,969	-29674,414
<b>Y (mm)</b>	-2198,081	-1948,708	-1698,518	-1449,149	-1199,644
<b>Z (mm)</b>	16,952	15,87	14,493	14,064	13,603
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4196	4836	4883	4937	4746
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,123	1,134	1,13	1,119	1,114
$\sigma_{\text{totales}}$	6,494	3,901	4,086	4,018	4,173
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29584,104	-29607,745	-29629,309	-29652,475	-29674,485
<b>Y (mm)</b>	-2197,953	-1948,84	-1698,519	-1449,713	-1200,608
<b>Z (mm)</b>	16,891	15,513	14,53	13,978	14,059
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4196	4849	4874	4943	4759
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,114	1,139	1,128	1,126	1,122
$\sigma_{\text{totales}}$	6,479	3,915	4,089	3,994	4,245
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29584,205	-29607,481	-29629,394	-29652,515	-29674,373
<b>Y (mm)</b>	-2197,642	-1948,544	-1698,443	-1449,643	-1200,241
<b>Z (mm)</b>	16,986	15,609	14,495	13,975	14,112
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4194	4836	4890	4941	4753
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,113	1,142	1,13	1,126	1,114
$\sigma_{\text{totales}}$	6,469	3,924	4,079	3,985	4,239
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29583,652	-29607,771	-29629,407	-29652,563	-29674,339
<b>Y (mm)</b>	-2197,962	-1948,662	-1698,487	-1449,494	-1200,236
<b>Z (mm)</b>	16,185	15,345	14,432	14,021	14,271
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4187	4848	4879	4944	4762
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,12	1,137	1,127	1,127	1,118
$\sigma_{\text{totales}}$	6,509	3,885	4,074	3,977	4,26
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29584,144	-29607,91	-29629,443	-29652,456	-29674,627

<b>Y (mm)</b>	-2197,699	-1949,068	-1698,587	-1449,541	-1199,904
<b>Z (mm)</b>	16,942	15,49	14,569	13,933	14,008
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4183	4829	4886	4927	4754
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{inliers}$	1,109	1,133	1,129	1,121	1,114
$\sigma_{totales}$	6,472	3,92	4,082	3,981	4,198
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29583,946	-29607,614	-29629,387	-29652,634	-29674,302
<b>Y (mm)</b>	-2197,76	-1948,566	-1698,634	-1449,545	-1200,138
<b>Z (mm)</b>	16,259	15,578	14,795	14,008	13,75
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4197	4837	4872	4929	4749
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{inliers}$	1,114	1,138	1,129	1,126	1,113
$\sigma_{totales}$	6,491	3,911	4,106	3,972	4,205
<b>Repetición n° 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-29583,717	-29607,759	-29629,338	-29652,643	-29674,218
<b>Y (mm)</b>	-2198,141	-1948,618	-1698,433	-1449,505	-1200,177
<b>Z (mm)</b>	16,754	15,359	14,563	13,978	13,942
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	4190	4853	4895	4936	4760
<b>Ptos totales</b>	10295	10012	9945	9916	9854
$\sigma_{inliers}$	1,121	1,139	1,133	1,128	1,115
$\sigma_{totales}$	6,5	3,884	4,088	3,967	4,231

Tabla A.10 Coordenadas de las esferas para la nube original para el TLS Riegl y D=30m

Siguiendo la equivalencia llevada a cabo con el Trimble GX, en las próximas tablas se muestran los resultados para la nube original del láser escáner terrestre Riegl a una distancia de 60 metros con respecto al patrón de calibración donde están ubicadas las diferentes esferas.

<b>Repetición n° 1</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59815,385	-59830,141	-59849,172	-59865,311	-59880,258
<b>Y (mm)</b>	-3853,604	-3606,264	-3353,833	-3107,197	-2856,214
<b>Z (mm)</b>	-72,162	-78,6	-75,422	-75,019	-73,675
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	645	710	894	922	958
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{inliers}$	1,12	1,136	1,13	1,139	1,124
$\sigma_{totales}$	8,593	7,07	6,495	6,394	6,244
<b>Repetición n° 2</b>					

	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,534	-59830,725	-59849,395	-59864,605	-59880,492
<b>Y (mm)</b>	-3854,481	-3606,05	-3352,696	-3106,21	-2856,29
<b>Z (mm)</b>	-73,16	-77,265	-73,209	-75,644	-73,411
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	645	707	886	925	970
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,17	1,125	1,127	1,13	1,14
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	8,518	7,051	6,719	6,447	6,215
<b>Repetición n° 3</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,294	-59829,648	-59848,957	-59865,032	-59880,608
<b>Y (mm)</b>	-3854,259	-3605,851	-3353,404	-3106,053	-2856,206
<b>Z (mm)</b>	-72,933	-79,392	-75,554	-75,32	-73,847
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	646	703	888	929	959
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,154	1,141	1,121	1,126	1,131
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	8,537	7,104	6,549	6,381	6,207
<b>Repetición n° 4</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,42	-59829,582	-59849,343	-59864,746	-59880,311
<b>Y (mm)</b>	-3853,852	-3606,757	-3353,052	-3106,329	-2856,756
<b>Z (mm)</b>	-72,41	-78,726	-73,179	-75,159	-74,114
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	644	708	889	937	961
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,134	1,132	1,136	1,134	1,118
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	8,578	7,151	6,681	6,418	6,253
<b>Repetición n° 5</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,695	-59829,564	-59849,283	-59865,101	-59879,565
<b>Y (mm)</b>	-3853,967	-3606,055	-3353,414	-3106,448	-2857,57
<b>Z (mm)</b>	-71,922	-79,219	-75,723	-75,773	-74,366
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	646	705	896	924	963
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
<b><math>\sigma_{inliers}</math></b>	1,143	1,141	1,142	1,128	1,134
<b><math>\sigma_{totales}</math></b>	8,63	7,118	6,521	6,4	6,391
<b>Repetición n° 6</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,133	-59830,034	-59849,272	-59864,803	-59880,274
<b>Y (mm)</b>	-3854,305	-3606,429	-3352,835	-3106,631	-2856,477
<b>Z (mm)</b>	-72,171	-78,263	-75,024	-74,749	-73,441

<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	639	712	886	919	962
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{inliers}$	1,137	1,133	1,105	1,116	1,124
$\sigma_{totales}$	8,617	7,094	6,604	6,415	6,241
<b>Repetición n° 7</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,883	-59830,685	-59849,155	-59864,916	-59879,977
<b>Y (mm)</b>	-3854,072	-3606,631	-3353,501	-3106,602	-2856,821
<b>Z (mm)</b>	-72,292	-78,205	-75,701	-75,111	-74,191
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	660	712	895	933	961
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{inliers}$	1,167	1,154	1,135	1,128	1,115
$\sigma_{totales}$	8,588	7,047	6,522	6,407	6,298
<b>Repetición n° 8</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59815,099	-59829,95	-59849,066	-59865,175	-59880,308
<b>Y (mm)</b>	-3853,891	-3606,546	-3353,472	-3106,258	-2856,706
<b>Z (mm)</b>	-73,413	-79,781	-75,421	-74,84	-73,972
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	639	714	895	920	968
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{inliers}$	1,154	1,156	1,124	1,113	1,125
$\sigma_{totales}$	8,47	7,105	6,536	6,36	6,249
<b>Repetición n° 9</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,311	-59830,317	-59849,183	-59864,963	-59879,843
<b>Y (mm)</b>	-3854,051	-3606,431	-3353,032	-3106,473	-2857,436
<b>Z (mm)</b>	-73,399	-78,053	-75,757	-74,692	-74,178
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	648	714	892	921	957
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{inliers}$	1,162	1,137	1,138	1,115	1,115
$\sigma_{totales}$	8,489	7,073	6,57	6,389	6,341
<b>Repetición n° 10</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59815,214	-59829,702	-59849,322	-59864,891	-59880,103
<b>Y (mm)</b>	-3853,825	-3606,684	-3353,196	-3106,342	-2856,636
<b>Z (mm)</b>	-72,595	-78,532	-73,492	-74,735	-74,107
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>N° inliers</b>	661	719	884	929	960
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{inliers}$	1,166	1,145	1,12	1,125	1,114

$\sigma_{\text{totales}}$	8,549	7,136	6,641	6,393	6,275
<b>Repetición nº 11</b>					
	<b>Esfera1</b>	<b>Esfera2</b>	<b>Esfera3</b>	<b>Esfera4</b>	<b>Esfera5</b>
<b>X (mm)</b>	-59814,674	-59830,009	-59849,125	-59864,88	-59879,833
<b>Y (mm)</b>	-3853,642	-3607,341	-3352,657	-3106,022	-2856,987
<b>Z (mm)</b>	-72,851	-79,309	-74,461	-75,247	-74,17
<b>R (mm)</b>	49,982	49,979	49,984	49,978	49,996
<b>Nº inliers</b>	661	709	886	933	962
<b>Ptos totales</b>	2422	2346	2439	2553	2527
$\sigma_{\text{inliers}}$	1,164	1,134	1,097	1,13	1,116
$\sigma_{\text{totales}}$	8,527	7,147	6,659	6,396	6,32

Tabla A.11 Coordenadas de las esferas para la nube original del Riegl LMS Z390i y D=60m

En las tablas anteriores se han listado los resultados de las coordenadas de centros de esferas, concretamente 11 juegos de coordenadas para cada caso de estudio (uno por cada repetición). En las próximas tablas se expondrán los errores de distancia entre los centros de las esferas todas las combinaciones posibles (121). La medida verdadera de cada distancia será la procedente del certificado de calibración de las esferas. En la tabla siguiente se listan todos los errores posibles para las 4 distancias posibles entre las esferas, obtenidas a partir de la nube de puntos láser original del láser Trimble GX a 30 metros de distancia.

<b>Error en distancia entre esfera nº1 y esfera nº2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,331	0,240	0,472	0,166	0,283	0,058	0,213	0,255	0,189	0,346	0,105
2	0,336	0,244	0,476	0,170	0,287	0,053	0,217	0,259	0,184	0,350	0,101
3	0,399	0,307	0,539	0,233	0,351	0,010	0,280	0,322	0,121	0,413	0,038
4	0,600	0,508	0,740	0,434	0,551	0,211	0,481	0,523	0,080	0,614	0,163
5	0,432	0,340	0,571	0,265	0,383	0,042	0,313	0,355	0,089	0,446	0,006
6	0,472	0,380	0,612	0,306	0,423	0,083	0,353	0,395	0,049	0,486	0,035
7	0,524	0,432	0,664	0,358	0,475	0,135	0,406	0,447	0,004	0,538	0,087
8	0,473	0,381	0,613	0,307	0,424	0,084	0,354	0,396	0,047	0,487	0,036
9	0,617	0,526	0,758	0,451	0,569	0,228	0,499	0,541	0,097	0,632	0,181
10	0,266	0,174	0,406	0,100	0,217	0,123	0,147	0,189	0,255	0,280	0,171
11	0,537	0,446	0,678	0,372	0,489	0,148	0,419	0,461	0,017	0,552	0,101
<b>Error en distancia entre esfera nº2 y esfera nº3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,308	0,092	0,167	0,141	0,056	0,248	0,079	0,373	0,054	0,034	0,305
2	0,216	0,000	0,075	0,049	0,148	0,156	0,013	0,281	0,038	0,126	0,213
3	0,450	0,233	0,309	0,283	0,086	0,390	0,221	0,515	0,196	0,108	0,447
4	0,144	0,072	0,004	0,022	0,220	0,085	0,084	0,210	0,109	0,198	0,142
5	0,261	0,045	0,120	0,095	0,103	0,202	0,032	0,326	0,008	0,081	0,259
6	0,081	0,297	0,222	0,247	0,445	0,140	0,310	0,015	0,334	0,423	0,084
7	0,190	0,026	0,049	0,023	0,174	0,130	0,039	0,256	0,064	0,152	0,187
8	0,232	0,016	0,092	0,066	0,132	0,173	0,003	0,298	0,021	0,110	0,230



9	0,211	0,427	0,351	0,377	0,575	0,270	0,440	0,145	0,464	0,553	0,214
10	0,323	0,107	0,183	0,157	0,041	0,264	0,094	0,389	0,070	0,018	0,321
11	0,127	0,344	0,268	0,294	0,491	0,187	0,356	0,062	0,381	0,469	0,130
Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,711	0,564	0,455	0,625	0,477	0,512	0,558	0,399	0,667	0,450	0,664
2	0,492	0,346	0,236	0,405	0,258	0,294	0,339	0,180	0,448	0,231	0,445
3	0,570	0,423	0,313	0,483	0,336	0,371	0,417	0,257	0,526	0,308	0,523
4	0,543	0,397	0,287	0,457	0,310	0,345	0,391	0,231	0,499	0,282	0,496
5	0,345	0,198	0,088	0,258	0,111	0,146	0,192	0,032	0,301	0,083	0,298
6	0,652	0,505	0,395	0,565	0,418	0,453	0,499	0,339	0,608	0,390	0,605
7	0,483	0,336	0,227	0,397	0,249	0,284	0,330	0,171	0,439	0,222	0,436
8	0,776	0,629	0,519	0,689	0,542	0,577	0,623	0,463	0,732	0,514	0,728
9	0,457	0,311	0,201	0,371	0,224	0,259	0,305	0,145	0,413	0,196	0,410
10	0,367	0,220	0,110	0,280	0,133	0,168	0,214	0,054	0,323	0,105	0,320
11	0,709	0,562	0,452	0,622	0,475	0,510	0,556	0,396	0,665	0,447	0,662
Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,008	0,376	0,285	0,254	0,280	0,162	0,004	0,363	0,423	0,121	0,491
2	0,137	0,231	0,140	0,108	0,135	0,017	0,141	0,218	0,278	0,024	0,345
3	0,248	0,119	0,029	0,002	0,024	0,094	0,252	0,107	0,167	0,135	0,234
4	0,078	0,290	0,198	0,169	0,194	0,076	0,082	0,277	0,337	0,035	0,405
5	0,225	0,142	0,051	0,021	0,046	0,071	0,229	0,130	0,189	0,112	0,257
6	0,187	0,181	0,090	0,058	0,085	0,033	0,191	0,168	0,227	0,074	0,295
7	0,145	0,223	0,132	0,101	0,127	0,009	0,149	0,211	0,270	0,032	0,338
8	0,304	0,063	0,027	0,058	0,032	0,150	0,308	0,051	0,111	0,191	0,178
9	0,032	0,336	0,244	0,213	0,240	0,122	0,036	0,323	0,382	0,081	0,450
10	0,251	0,117	0,026	0,005	0,021	0,097	0,255	0,104	0,164	0,138	0,232
11	0,038	0,330	0,239	0,207	0,234	0,116	0,042	0,317	0,377	0,075	0,444

Tabla A.12 Errores en distancia para la nube de puntos original del láser Trimble para D=30

En la siguiente tabla se presentan los errores de distancia para la nube procedente del Trimble GX corregida con todos los parámetros sistemáticos.

Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,106	0,021	0,021	0,024	0,026	0,137	0,069	0,038	0,079	0,006	0,152
2	0,207	0,334	0,334	0,289	0,287	0,451	0,382	0,275	0,391	0,319	0,161
3	0,137	0,010	0,010	0,055	0,056	0,107	0,039	0,069	0,047	0,025	0,183
4	0,183	0,310	0,310	0,265	0,263	0,427	0,358	0,252	0,368	0,295	0,137
5	0,076	0,051	0,051	0,006	0,004	0,168	0,100	0,007	0,109	0,036	0,122
6	0,008	0,135	0,135	0,090	0,088	0,252	0,184	0,077	0,193	0,120	0,038
7	0,061	0,066	0,066	0,021	0,019	0,183	0,115	0,007	0,123	0,051	0,107
8	0,147	0,020	0,019	0,065	0,066	0,098	0,029	0,078	0,038	0,035	0,193
9	0,273	0,400	0,400	0,355	0,353	0,516	0,449	0,342	0,458	0,385	0,227

<b>10</b>	0,014	0,141	0,141	0,096	0,095	0,258	0,190	0,082	0,198	0,126	0,032
<b>11</b>	0,234	0,108	0,107	0,153	0,154	0,009	0,059	0,166	0,050	0,122	0,281
<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	0,038	0,075	0,183	0,082	0,227	0,263	0,249	0,254	0,214	0,221	0,381
<b>2</b>	0,087	0,201	0,058	0,044	0,102	0,138	0,123	0,128	0,088	0,095	0,255
<b>3</b>	0,087	0,201	0,058	0,044	0,102	0,138	0,124	0,128	0,089	0,096	0,256
<b>4</b>	0,043	0,157	0,102	0,000	0,146	0,182	0,167	0,172	0,132	0,140	0,299
<b>5</b>	0,041	0,155	0,104	0,002	0,148	0,184	0,169	0,174	0,134	0,142	0,301
<b>6</b>	0,204	0,318	0,059	0,161	0,015	0,021	0,006	0,011	0,029	0,021	0,138
<b>7</b>	0,135	0,249	0,010	0,092	0,054	0,090	0,076	0,080	0,041	0,048	0,208
<b>8</b>	0,029	0,143	0,116	0,014	0,160	0,196	0,181	0,186	0,147	0,154	0,313
<b>9</b>	0,146	0,260	0,001	0,103	0,043	0,079	0,064	0,069	0,030	0,037	0,196
<b>10</b>	0,073	0,187	0,071	0,030	0,116	0,152	0,137	0,142	0,102	0,109	0,269
<b>11</b>	0,085	0,029	0,230	0,128	0,274	0,310	0,296	0,300	0,261	0,268	0,428
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	0,477	0,433	0,496	0,460	0,571	0,345	0,547	0,424	0,588	0,428	0,602
<b>2</b>	0,591	0,547	0,610	0,574	0,685	0,459	0,661	0,538	0,702	0,542	0,716
<b>3</b>	0,336	0,293	0,355	0,320	0,431	0,204	0,406	0,283	0,447	0,287	0,462
<b>4</b>	0,435	0,392	0,455	0,419	0,530	0,303	0,506	0,382	0,547	0,387	0,561
<b>5</b>	0,287	0,244	0,307	0,271	0,382	0,155	0,357	0,234	0,399	0,239	0,413
<b>6</b>	0,254	0,210	0,273	0,237	0,348	0,122	0,324	0,201	0,365	0,205	0,380
<b>7</b>	0,272	0,229	0,292	0,256	0,367	0,140	0,342	0,219	0,383	0,224	0,399
<b>8</b>	0,263	0,221	0,283	0,247	0,358	0,131	0,334	0,211	0,375	0,215	0,390
<b>9</b>	0,302	0,259	0,322	0,286	0,397	0,170	0,373	0,249	0,414	0,254	0,428
<b>10</b>	0,296	0,253	0,316	0,279	0,391	0,163	0,366	0,243	0,407	0,247	0,422
<b>11</b>	0,135	0,092	0,155	0,119	0,230	0,003	0,205	0,082	0,247	0,087	0,261
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>1</b>	0,410	0,100	0,135	0,435	0,514	0,404	0,119	0,009	0,355	0,057	0,449
<b>2</b>	0,366	0,058	0,092	0,392	0,471	0,361	0,076	0,034	0,312	0,015	0,406
<b>3</b>	0,429	0,121	0,155	0,455	0,534	0,424	0,139	0,029	0,375	0,077	0,469
<b>4</b>	0,392	0,083	0,118	0,418	0,497	0,387	0,101	0,008	0,338	0,040	0,432
<b>5</b>	0,503	0,194	0,229	0,529	0,608	0,498	0,212	0,103	0,449	0,151	0,543
<b>6</b>	0,277	0,032	0,003	0,302	0,381	0,272	0,014	0,124	0,222	0,076	0,316
<b>7</b>	0,479	0,171	0,205	0,505	0,584	0,474	0,189	0,079	0,425	0,127	0,519
<b>8</b>	0,356	0,046	0,081	0,381	0,460	0,350	0,065	0,045	0,301	0,003	0,395
<b>9</b>	0,522	0,213	0,248	0,548	0,627	0,517	0,232	0,122	0,468	0,170	0,562
<b>10</b>	0,361	0,052	0,087	0,387	0,466	0,356	0,070	0,039	0,307	0,009	0,401
<b>11</b>	0,531	0,223	0,257	0,557	0,636	0,527	0,241	0,131	0,477	0,180	0,571

**Tabla A.13 Errores en distancia para la nube procedente del Trimble corregida con todos los parámetros sistemáticos, siendo D=30**

Seguidamente se presentan los errores en distancia de la nube corregida solamente con los parámetros sistemáticos significativos, para el láser Trimble GX a una distancia dada de 30 metros.

<b>Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,345	0,340	0,261	0,374	0,129	0,142	0,306	0,108	0,234	0,252	0,345
2	0,500	0,496	0,416	0,530	0,284	0,298	0,462	0,264	0,390	0,407	0,500
3	0,311	0,307	0,227	0,341	0,095	0,109	0,273	0,075	0,201	0,218	0,311
4	0,166	0,161	0,082	0,196	0,050	0,036	0,127	0,070	0,056	0,073	0,166
5	0,195	0,190	0,111	0,225	0,021	0,008	0,156	0,042	0,084	0,102	0,195
6	0,028	0,033	0,112	0,002	0,244	0,230	0,067	0,264	0,138	0,121	0,028
7	0,460	0,456	0,376	0,490	0,244	0,258	0,421	0,224	0,350	0,368	0,460
8	0,334	0,330	0,251	0,364	0,118	0,131	0,295	0,097	0,223	0,240	0,334
9	0,080	0,075	0,004	0,109	0,136	0,123	0,041	0,157	0,030	0,013	0,080
10	0,227	0,222	0,143	0,257	0,011	0,024	0,188	0,010	0,116	0,133	0,227
11	0,345	0,340	0,261	0,374	0,129	0,142	0,306	0,108	0,234	0,252	0,345
<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,056	0,184	0,073	0,050	0,133	0,209	0,125	0,063	0,100	0,164	0,034
2	0,139	0,267	0,011	0,133	0,050	0,292	0,209	0,021	0,184	0,247	0,118
3	0,134	0,262	0,005	0,128	0,055	0,287	0,203	0,015	0,178	0,242	0,112
4	0,054	0,182	0,075	0,048	0,135	0,207	0,123	0,065	0,098	0,162	0,032
5	0,167	0,295	0,038	0,161	0,022	0,320	0,236	0,048	0,211	0,275	0,145
6	0,078	0,050	0,207	0,084	0,267	0,075	0,009	0,197	0,034	0,030	0,100
7	0,063	0,065	0,192	0,069	0,252	0,090	0,007	0,182	0,018	0,045	0,085
8	0,099	0,227	0,030	0,093	0,090	0,252	0,168	0,020	0,143	0,207	0,077
9	0,098	0,031	0,226	0,103	0,287	0,055	0,028	0,216	0,053	0,010	0,119
10	0,030	0,159	0,099	0,024	0,159	0,183	0,100	0,088	0,075	0,138	0,009
11	0,046	0,174	0,083	0,040	0,143	0,199	0,116	0,072	0,091	0,154	0,025
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,065	0,238	0,581	0,378	0,387	0,298	0,466	0,266	0,333	0,195	0,493
2	0,194	0,368	0,711	0,508	0,517	0,428	0,596	0,396	0,463	0,325	0,623
3	0,066	0,108	0,451	0,248	0,256	0,168	0,336	0,136	0,203	0,065	0,363
4	0,059	0,232	0,575	0,372	0,381	0,293	0,461	0,260	0,327	0,190	0,487
5	0,125	0,049	0,392	0,189	0,197	0,109	0,277	0,077	0,144	0,006	0,304
6	0,217	0,390	0,733	0,530	0,539	0,451	0,619	0,418	0,485	0,348	0,646
7	0,137	0,311	0,654	0,451	0,460	0,371	0,539	0,339	0,405	0,268	0,566
8	0,050	0,123	0,466	0,264	0,272	0,183	0,351	0,151	0,217	0,080	0,378
9	0,110	0,284	0,627	0,424	0,433	0,344	0,512	0,312	0,379	0,241	0,539
10	0,173	0,347	0,690	0,487	0,496	0,407	0,575	0,375	0,442	0,304	0,602
11	0,045	0,219	0,562	0,359	0,368	0,279	0,447	0,247	0,313	0,176	0,474
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											

Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,093	0,094	0,306	0,101	0,067	0,160	0,309	0,234	0,211	0,159	0,118
2	0,081	0,080	0,132	0,275	0,242	0,334	0,135	0,060	0,386	0,334	0,056
3	0,425	0,424	0,212	0,619	0,585	0,678	0,209	0,284	0,729	0,678	0,400
4	0,219	0,218	0,006	0,413	0,379	0,472	0,004	0,079	0,523	0,472	0,195
5	0,224	0,224	0,011	0,419	0,384	0,477	0,008	0,084	0,529	0,477	0,199
6	0,139	0,138	0,074	0,333	0,299	0,392	0,077	0,002	0,443	0,391	0,114
7	0,307	0,306	0,094	0,501	0,468	0,560	0,091	0,167	0,612	0,560	0,283
8	0,107	0,106	0,106	0,301	0,267	0,360	0,109	0,034	0,411	0,360	0,082
9	0,177	0,175	0,037	0,370	0,337	0,430	0,040	0,035	0,481	0,430	0,152
10	0,036	0,035	0,177	0,230	0,197	0,290	0,180	0,105	0,341	0,289	0,011
11	0,333	0,332	0,120	0,527	0,493	0,586	0,117	0,192	0,637	0,586	0,308

**Tabla A.14 Errores en distancia para la nube procedente del Trimble corregida sólo con los sistematismos significativos para D=30**

En las próximas tablas se presentan los errores para las nubes de puntos del Trimble GX a 60 metros de distancia. Primeramente se listan los errores correspondientes a la nube original.

<b>Error en distancia entre esfera nº1 y esfera nº2 (mm)</b>											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2,404	2,376	2,296	1,931	2,446	2,332	2,075	1,978	2,298	2,353	1,882
2	2,287	2,259	2,179	1,814	2,328	2,214	1,958	1,861	2,181	2,235	1,765
3	2,403	2,375	2,295	1,931	2,445	2,331	2,075	1,978	2,298	2,352	1,882
4	2,472	2,444	2,364	2,000	2,514	2,400	2,143	2,046	2,367	2,421	1,951
5	2,366	2,338	2,258	1,894	2,408	2,294	2,037	1,941	2,261	2,315	1,845
6	2,319	2,291	2,211	1,846	2,361	2,247	1,991	1,894	2,213	2,268	1,797
7	2,523	2,495	2,415	2,050	2,565	2,451	2,194	2,097	2,417	2,472	2,001
8	2,468	2,441	2,361	1,996	2,510	2,396	2,140	2,043	2,363	2,417	1,947
9	2,430	2,402	2,322	1,957	2,472	2,358	2,101	2,004	2,324	2,379	1,908
10	2,231	2,203	2,123	1,758	2,273	2,159	1,902	1,806	2,125	2,180	1,709
11	2,429	2,401	2,321	1,956	2,471	2,357	2,100	2,003	2,323	2,378	1,907
<b>Error en distancia entre esfera nº2 y esfera nº3 (mm)</b>											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,385	0,796	0,139	0,274	0,434	0,646	0,759	0,685	0,499	0,603	0,604
2	0,358	0,769	0,112	0,248	0,408	0,620	0,733	0,658	0,472	0,577	0,577
3	0,279	0,690	0,033	0,168	0,328	0,540	0,653	0,579	0,393	0,497	0,498
4	0,087	0,325	0,333	0,198	0,038	0,174	0,287	0,213	0,027	0,131	0,132
5	0,429	0,840	0,183	0,318	0,479	0,690	0,803	0,729	0,543	0,647	0,648
6	0,316	0,727	0,069	0,205	0,365	0,577	0,690	0,616	0,430	0,534	0,535
7	0,055	0,466	0,190	0,056	0,105	0,317	0,430	0,356	0,169	0,274	0,275
8	0,042	0,369	0,288	0,153	0,007	0,220	0,332	0,258	0,072	0,177	0,177
9	0,283	0,694	0,036	0,172	0,332	0,544	0,657	0,583	0,397	0,501	0,502
10	0,335	0,745	0,089	0,224	0,384	0,596	0,709	0,635	0,448	0,553	0,554
11	0,135	0,276	0,381	0,246	0,086	0,126	0,239	0,164	0,021	0,083	0,083

Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,177	0,033	0,295	0,330	0,002	0,175	0,305	0,388	0,314	0,069	0,288
2	0,234	0,443	0,116	0,081	0,408	0,236	0,106	0,798	0,724	0,342	0,699
3	0,434	0,223	0,551	0,587	0,259	0,431	0,562	0,129	0,055	0,326	0,032
4	0,286	0,077	0,405	0,439	0,112	0,284	0,414	0,279	0,204	0,178	0,179
5	0,128	0,082	0,246	0,281	0,047	0,125	0,256	0,437	0,363	0,020	0,337
6	0,077	0,288	0,040	0,076	0,252	0,079	0,051	0,641	0,567	0,185	0,543
7	0,195	0,406	0,077	0,043	0,370	0,198	0,067	0,760	0,686	0,304	0,661
8	0,116	0,326	0,002	0,037	0,290	0,118	0,013	0,680	0,605	0,224	0,581
9	0,065	0,145	0,183	0,218	0,110	0,063	0,193	0,499	0,425	0,044	0,400
10	0,032	0,243	0,085	0,121	0,207	0,034	0,096	0,596	0,521	0,140	0,498
11	0,037	0,247	0,081	0,116	0,211	0,039	0,092	0,601	0,527	0,145	0,502
Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,206	0,607	0,481	0,129	0,072	0,018	0,634	0,008	0,088	0,111	0,080
2	0,005	0,395	0,270	0,340	0,282	0,229	0,423	0,219	0,300	0,321	0,291
3	0,320	0,719	0,593	0,016	0,042	0,095	0,747	0,105	0,025	0,003	0,033
4	0,360	0,760	0,634	0,024	0,082	0,136	0,788	0,145	0,065	0,043	0,073
5	0,031	0,431	0,305	0,305	0,247	0,194	0,458	0,184	0,264	0,286	0,256
6	0,204	0,604	0,478	0,132	0,074	0,021	0,631	0,011	0,091	0,114	0,083
7	0,335	0,736	0,610	0,000	0,057	0,111	0,763	0,121	0,040	0,018	0,049
8	0,350	0,051	0,075	0,685	0,627	0,574	0,079	0,564	0,644	0,667	0,636
9	0,275	0,126	0,001	0,610	0,552	0,499	0,154	0,489	0,569	0,592	0,561
10	0,099	0,499	0,372	0,237	0,180	0,126	0,526	0,116	0,196	0,219	0,188
11	0,260	0,140	0,014	0,596	0,538	0,485	0,167	0,475	0,555	0,577	0,547

Tabla A.15 Errores en distancia para la nube de puntos original del láser Trimble para D=60

En la tabla siguiente aparecen los errores en distancia entre esferas para la nube corregida con todos los parámetros sistemáticos. El equipo utilizado es el Trimble GX a una distancia de 60 metros de distancia.

Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)											
Caso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2,106	1,698	1,758	1,887	1,953	1,904	1,825	1,990	2,149	2,297	2,446
2	1,844	1,436	1,496	1,625	1,691	1,642	1,563	1,728	1,887	2,035	2,185
3	2,006	1,598	1,658	1,787	1,853	1,804	1,725	1,890	2,049	2,197	2,346
4	1,942	1,534	1,594	1,723	1,789	1,740	1,661	1,826	1,985	2,133	2,282
5	2,192	1,784	1,844	1,973	2,039	1,989	1,910	2,076	2,235	2,383	2,532
6	1,808	1,399	1,460	1,588	1,655	1,605	1,526	1,692	1,850	1,999	2,148
7	1,910	1,502	1,562	1,691	1,757	1,707	1,628	1,794	1,953	2,101	2,250
8	1,911	1,503	1,563	1,692	1,758	1,709	1,630	1,795	1,954	2,102	2,252
9	2,102	1,695	1,755	1,883	1,948	1,900	1,821	1,986	2,146	2,294	2,443
10	1,937	1,529	1,589	1,718	1,784	1,734	1,655	1,821	1,980	2,128	2,277
11	2,032	1,624	1,685	1,813	1,878	1,830	1,751	1,916	2,075	2,224	2,372

<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,391	0,120	0,312	0,367	0,532	0,181	0,536	0,096	0,108	0,196	0,555
2	0,015	0,286	0,094	0,039	0,126	0,225	0,130	0,310	0,514	0,210	0,149
3	0,045	0,226	0,034	0,021	0,186	0,165	0,189	0,250	0,454	0,150	0,209
4	0,173	0,098	0,094	0,150	0,314	0,037	0,318	0,122	0,326	0,022	0,337
5	0,227	0,043	0,148	0,205	0,370	0,019	0,374	0,066	0,270	0,032	0,392
6	0,190	0,081	0,112	0,167	0,331	0,020	0,335	0,105	0,309	0,004	0,354
7	0,109	0,162	0,030	0,086	0,250	0,101	0,254	0,186	0,390	0,086	0,273
8	0,272	0,002	0,193	0,249	0,414	0,062	0,418	0,023	0,226	0,077	0,436
9	0,435	0,165	0,357	0,412	0,576	0,226	0,580	0,141	0,063	0,241	0,600
10	0,587	0,316	0,508	0,563	0,727	0,376	0,731	0,291	0,087	0,392	0,751
11	0,730	0,460	0,652	0,707	0,872	0,521	0,876	0,436	0,232	0,536	0,895
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,050	0,066	0,083	0,025	0,005	0,188	0,107	0,057	0,164	0,237	0,208
2	0,225	0,209	0,359	0,301	0,281	0,088	0,382	0,332	0,112	0,039	0,483
3	0,030	0,014	0,163	0,105	0,085	0,107	0,187	0,137	0,083	0,156	0,288
4	0,018	0,034	0,115	0,057	0,038	0,155	0,139	0,088	0,131	0,204	0,240
5	0,183	0,200	0,050	0,108	0,127	0,321	0,026	0,077	0,296	0,370	0,075
6	0,171	0,154	0,304	0,246	0,227	0,033	0,327	0,277	0,058	0,015	0,429
7	0,187	0,204	0,054	0,112	0,131	0,325	0,030	0,081	0,300	0,374	0,071
8	0,256	0,239	0,389	0,331	0,312	0,119	0,412	0,362	0,143	0,070	0,514
9	0,460	0,443	0,593	0,535	0,516	0,322	0,616	0,566	0,347	0,273	0,718
10	0,146	0,130	0,280	0,221	0,202	0,009	0,304	0,253	0,033	0,040	0,404
11	0,214	0,230	0,081	0,139	0,159	0,351	0,057	0,107	0,327	0,401	0,044
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,295	0,328	0,097	0,421	0,266	0,201	0,270	0,343	0,150	0,047	0,210
2	0,275	0,348	0,118	0,441	0,286	0,222	0,291	0,323	0,170	0,067	0,230
3	0,426	0,198	0,033	0,291	0,135	0,071	0,140	0,473	0,020	0,083	0,079
4	0,371	0,253	0,022	0,346	0,190	0,125	0,195	0,419	0,074	0,029	0,134
5	0,353	0,271	0,040	0,364	0,208	0,143	0,213	0,401	0,092	0,011	0,152
6	0,156	0,467	0,237	0,560	0,405	0,341	0,410	0,204	0,289	0,187	0,349
7	0,447	0,176	0,055	0,269	0,113	0,050	0,119	0,495	0,002	0,105	0,057
8	0,396	0,228	0,003	0,320	0,165	0,101	0,170	0,443	0,049	0,053	0,109
9	0,182	0,442	0,211	0,535	0,379	0,315	0,384	0,230	0,264	0,160	0,323
10	0,109	0,515	0,284	0,608	0,452	0,388	0,457	0,156	0,337	0,234	0,396
11	0,554	0,070	0,161	0,163	0,007	0,057	0,012	0,601	0,108	0,212	0,049

**Tabla A.16 Errores en distancia para la nube procedente del Trimble corregida con todos los parámetros sistemáticos, siendo D=60**

Seguidamente se listan los errores en distancia para la nube de puntos láser del láser Trimble GX para una distancia de 60 metros, corregida solamente con los parámetros sistemáticos significativos.

<b>Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	2,147	2,367	2,090	2,244	1,830	1,738	1,971	2,182	2,432	2,145	1,846
2	2,097	2,317	2,040	2,194	1,781	1,689	1,922	2,133	2,383	2,096	1,797
3	1,878	2,099	1,822	1,976	1,562	1,470	1,703	1,914	2,164	1,877	1,578
4	2,257	2,477	2,200	2,354	1,941	1,849	2,082	2,293	2,543	2,256	1,957
5	2,119	2,339	2,063	2,216	1,803	1,711	1,944	2,155	2,405	2,118	1,819
6	2,066	2,286	2,009	2,163	1,749	1,657	1,890	2,101	2,352	2,064	1,765
7	2,131	2,351	2,074	2,228	1,815	1,723	1,955	2,166	2,417	2,130	1,831
8	2,229	2,450	2,173	2,327	1,913	1,821	2,054	2,265	2,515	2,228	1,929
9	2,313	2,533	2,256	2,410	1,996	1,905	2,137	2,349	2,599	2,312	2,012
10	1,987	2,207	1,930	2,084	1,670	1,578	1,811	2,022	2,273	1,985	1,686
11	2,279	2,499	2,222	2,376	1,963	1,871	2,104	2,315	2,565	2,278	1,979
<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,390	0,512	0,082	0,586	0,586	0,015	0,194	0,425	0,342	0,313	0,581
2	0,614	0,735	0,305	0,810	0,810	0,238	0,417	0,648	0,566	0,536	0,804
3	0,333	0,455	0,025	0,529	0,530	0,042	0,137	0,368	0,286	0,256	0,524
4	0,488	0,609	0,179	0,684	0,684	0,112	0,292	0,523	0,440	0,410	0,678
5	0,074	0,196	0,234	0,271	0,271	0,301	0,121	0,109	0,027	0,003	0,265
6	0,019	0,102	0,328	0,177	0,177	0,395	0,215	0,016	0,067	0,097	0,172
7	0,216	0,337	0,093	0,412	0,412	0,160	0,020	0,251	0,168	0,138	0,406
8	0,425	0,547	0,117	0,622	0,622	0,050	0,230	0,460	0,377	0,348	0,616
9	0,679	0,800	0,370	0,875	0,875	0,303	0,482	0,713	0,631	0,601	0,869
10	0,387	0,509	0,079	0,584	0,584	0,012	0,192	0,423	0,340	0,310	0,578
11	0,091	0,212	0,218	0,287	0,287	0,285	0,105	0,125	0,043	0,013	0,281
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,115	0,045	0,385	0,017	0,082	0,071	0,089	0,136	0,069	0,133	0,201
2	0,001	0,068	0,498	0,130	0,031	0,042	0,202	0,249	0,181	0,021	0,089
3	0,427	0,357	0,073	0,296	0,395	0,383	0,224	0,176	0,244	0,446	0,514
4	0,079	0,149	0,579	0,211	0,112	0,123	0,283	0,330	0,262	0,061	0,008
5	0,076	0,145	0,575	0,207	0,108	0,119	0,279	0,327	0,259	0,057	0,011
6	0,498	0,429	0,001	0,367	0,466	0,455	0,295	0,248	0,315	0,518	0,586
7	0,320	0,252	0,179	0,190	0,289	0,278	0,118	0,070	0,138	0,340	0,408
8	0,088	0,019	0,411	0,043	0,056	0,045	0,115	0,162	0,094	0,107	0,176
9	0,171	0,101	0,328	0,040	0,139	0,127	0,033	0,080	0,012	0,190	0,258
10	0,194	0,123	0,307	0,061	0,160	0,149	0,011	0,058	0,010	0,211	0,280
11	0,068	0,138	0,568	0,200	0,101	0,112	0,271	0,319	0,251	0,049	0,019
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,064	0,327	0,674	0,448	0,161	0,198	0,026	0,216	0,141	0,040	0,167
2	0,001	0,262	0,610	0,384	0,226	0,263	0,039	0,280	0,076	0,105	0,231
3	0,429	0,166	0,182	0,044	0,654	0,691	0,467	0,708	0,352	0,533	0,659

4	0,062	0,202	0,549	0,323	0,287	0,323	0,100	0,341	0,015	0,166	0,292
5	0,036	0,300	0,647	0,421	0,189	0,225	0,002	0,243	0,113	0,068	0,194
6	0,026	0,289	0,637	0,411	0,199	0,236	0,012	0,253	0,103	0,078	0,204
7	0,135	0,128	0,475	0,249	0,360	0,397	0,173	0,414	0,058	0,240	0,365
8	0,181	0,082	0,429	0,204	0,406	0,443	0,219	0,460	0,104	0,285	0,411
9	0,114	0,149	0,497	0,271	0,339	0,375	0,152	0,393	0,037	0,218	0,344
10	0,089	0,353	0,700	0,474	0,136	0,173	0,051	0,190	0,166	0,015	0,141
11	0,156	0,420	0,767	0,541	0,069	0,105	0,118	0,123	0,233	0,052	0,074

**Tabla A.17 Errores en distancia para la nube procedente del Trimble corregida sólo con los sistematismos significativos para D=60**

Finalizando el listado de los errores en distancia, se listan los errores del Trimble GX para D=120 metros. Primeramente se comenzará con los errores correspondientes a la nube de puntos original sin corregir.

<b>Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	1,700	2,561	2,414	2,479	2,252	2,694	1,779	1,790	1,989	2,528	2,063
2	1,745	2,606	2,459	2,525	2,297	2,739	1,825	1,836	2,034	2,573	2,108
3	1,788	2,652	2,503	2,568	2,341	2,782	1,867	1,878	2,078	2,617	2,152
4	1,733	2,595	2,447	2,512	2,285	2,726	1,812	1,823	2,022	2,561	2,096
5	2,121	2,983	2,835	2,901	2,673	3,115	2,200	2,211	2,410	2,949	2,484
6	1,913	2,774	2,627	2,693	2,465	2,907	1,993	2,003	2,202	2,741	2,276
7	1,620	2,480	2,334	2,400	2,172	2,614	1,700	1,711	1,909	2,448	1,984
8	1,906	2,766	2,620	2,686	2,458	2,900	1,986	1,997	2,195	2,734	2,270
9	2,032	2,892	2,746	2,811	2,584	3,025	2,111	2,122	2,321	2,860	2,395
10	1,772	2,632	2,486	2,552	2,324	2,766	1,852	1,863	2,061	2,600	2,135
11	1,664	2,529	2,380	2,444	2,217	2,658	1,743	1,754	1,954	2,493	2,029
<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	1,973	1,906	1,875	1,923	3,155	2,014	2,027	1,887	3,563	2,149	2,384
2	2,841	2,774	2,742	2,800	4,027	2,882	2,896	2,764	4,438	3,016	3,252
3	2,690	2,623	2,592	2,642	3,873	2,731	2,744	2,607	4,282	2,866	3,101
4	2,755	2,688	2,656	2,705	3,936	2,796	2,808	2,669	4,345	2,930	3,165
5	2,528	2,461	2,429	2,480	3,710	2,569	2,581	2,444	4,119	2,703	2,938
6	2,967	2,900	2,869	2,917	4,148	3,009	3,021	2,881	4,557	3,143	3,378
7	2,049	1,982	1,951	1,997	3,229	2,091	2,103	1,961	3,638	2,225	2,460
8	2,061	1,994	1,963	2,009	3,241	2,102	2,114	1,973	3,649	2,236	2,472
9	2,261	2,194	2,162	2,211	3,443	2,302	2,314	2,176	3,851	2,436	2,671
10	2,802	2,735	2,703	2,753	3,984	2,843	2,855	2,717	4,393	2,977	3,212
11	2,330	2,263	2,232	2,283	3,513	2,371	2,384	2,247	3,922	2,505	2,740
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	2,100	1,644	1,663	1,692	1,415	1,565	2,421	1,698	1,625	1,503	2,500
2	2,030	1,573	1,593	1,621	1,345	1,495	2,351	1,628	1,555	1,433	2,430



3	1,998	1,542	1,561	1,590	1,313	1,463	2,319	1,596	1,523	1,401	2,398
4	2,094	1,635	1,652	1,684	1,399	1,557	2,418	1,686	1,609	1,497	2,498
5	3,291	2,833	2,852	2,882	2,601	2,755	3,614	2,886	2,811	2,694	3,693
6	2,140	1,684	1,704	1,732	1,456	1,605	2,461	1,738	1,665	1,544	2,541
7	2,157	1,700	1,720	1,748	1,471	1,622	2,478	1,754	1,681	1,560	2,557
8	2,059	1,600	1,617	1,649	1,364	1,522	2,383	1,651	1,574	1,461	2,463
9	3,719	3,260	3,279	3,310	3,027	3,183	4,042	3,312	3,237	3,122	4,121
10	2,274	1,818	1,837	1,866	1,589	1,739	2,595	1,872	1,799	1,677	2,674
11	2,513	2,057	2,077	2,105	1,829	1,979	2,834	2,111	2,038	1,917	2,913
<b>Error en distancia entre esfera nº4 y esfera nº5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,851	0,663	0,122	1,191	1,369	1,171	1,585	1,415	1,274	0,612	0,370
2	0,397	0,210	0,332	0,737	0,915	0,718	1,132	0,961	0,820	0,159	0,084
3	0,416	0,229	0,314	0,756	0,934	0,737	1,151	0,980	0,839	0,178	0,066
4	0,443	0,256	0,286	0,783	0,961	0,764	1,178	1,007	0,866	0,205	0,038
5	0,167	0,018	0,562	0,508	0,687	0,490	0,903	0,731	0,590	0,069	0,314
6	0,315	0,128	0,414	0,655	0,833	0,636	1,050	0,879	0,738	0,077	0,167
7	1,172	0,983	0,443	1,512	1,689	1,491	1,906	1,736	1,594	0,932	0,690
8	0,452	0,266	0,277	0,792	0,971	0,774	1,187	1,016	0,875	0,215	0,029
9	0,379	0,194	0,350	0,719	0,898	0,701	1,114	0,943	0,802	0,142	0,102
10	0,255	0,067	0,474	0,595	0,773	0,575	0,990	0,819	0,678	0,016	0,226
11	1,253	1,064	0,524	1,593	1,770	1,572	1,987	1,817	1,676	1,013	0,772

**Tabla A.18 Errores en distancia para la nube de puntos original del láser Trimble para D=120 metros**

Seguidamente se presentan los errores en distancia de la nube corregida con todos los parámetros sistemáticos, para el láser Trimble GX a una distancia dada de 120 metros.

<b>Error en distancia entre esfera nº1 y esfera nº2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,542	0,551	0,355	0,940	0,602	0,264	0,981	1,344	0,698	0,980	1,298
2	1,964	1,973	1,778	2,361	2,024	1,686	2,403	2,765	2,119	2,402	2,720
3	2,014	2,023	1,828	2,411	2,073	1,736	2,452	2,815	2,169	2,451	2,770
4	1,895	1,904	1,706	2,293	1,955	1,616	2,335	2,697	2,051	2,332	2,649
5	1,477	1,486	1,288	1,875	1,537	1,198	1,916	2,279	1,633	1,914	2,231
6	2,061	2,070	1,876	2,458	2,120	1,784	2,500	2,862	2,216	2,499	2,818
7	2,309	2,318	2,122	2,706	2,368	2,031	2,748	3,111	2,464	2,747	3,065
8	1,994	2,003	1,808	2,391	2,054	1,717	2,433	2,796	2,150	2,432	2,751
9	2,266	2,275	2,079	2,664	2,326	1,988	2,705	3,068	2,422	2,704	3,022
10	2,479	2,488	2,292	2,876	2,539	2,201	2,918	3,281	2,635	2,916	3,234
11	2,243	2,251	2,056	2,639	2,302	1,964	2,681	3,043	2,398	2,679	2,998
<b>Error en distancia entre esfera nº2 y esfera nº3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	1,988	2,357	2,996	2,681	2,292	2,387	2,481	2,350	2,067	2,259	2,380

2	1,997	2,365	3,004	2,689	2,300	2,395	2,490	2,358	2,075	2,267	2,389
3	1,798	2,173	2,806	2,491	2,101	2,196	2,292	2,166	1,876	2,068	2,197
4	2,394	2,762	3,401	3,087	2,697	2,792	2,887	2,755	2,472	2,664	2,786
5	2,050	2,417	3,057	2,743	2,353	2,449	2,543	2,410	2,129	2,320	2,441
6	1,712	2,086	2,720	2,405	2,015	2,111	2,206	2,078	1,790	1,982	2,109
7	2,435	2,803	3,443	3,128	2,739	2,834	2,928	2,796	2,514	2,706	2,827
8	2,798	3,168	3,806	3,492	3,102	3,197	3,292	3,161	2,877	3,069	3,192
9	2,150	2,518	3,157	2,843	2,453	2,548	2,643	2,511	2,228	2,420	2,542
10	2,432	2,804	3,440	3,125	2,735	2,831	2,926	2,797	2,510	2,702	2,828
11	2,744	3,118	3,752	3,437	3,047	3,143	3,238	3,111	2,822	3,014	3,142
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	2,099	1,854	1,017	1,072	1,997	1,460	1,055	2,084	2,333	2,218	1,155
2	2,429	2,184	1,354	1,416	2,326	1,798	1,398	2,417	2,660	2,547	1,497
3	3,103	2,858	2,022	2,078	3,002	2,465	2,061	3,089	3,337	3,222	2,161
4	2,794	2,548	1,712	1,768	2,692	2,155	1,751	2,779	3,027	2,913	1,851
5	2,404	2,158	1,322	1,377	2,302	1,764	1,360	2,389	2,637	2,523	1,460
6	2,499	2,253	1,417	1,472	2,397	1,860	1,455	2,484	2,732	2,617	1,555
7	2,583	2,338	1,503	1,559	2,481	1,946	1,542	2,569	2,816	2,702	1,642
8	2,423	2,178	1,347	1,409	2,320	1,792	1,392	2,411	2,654	2,541	1,490
9	2,182	1,937	1,100	1,155	2,081	1,543	1,138	2,168	2,416	2,302	1,238
10	2,373	2,127	1,291	1,346	2,271	1,733	1,329	2,358	2,606	2,492	1,429
11	2,452	2,207	1,376	1,438	2,349	1,821	1,421	2,440	2,683	2,570	1,520
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,706	0,770	0,456	1,814	2,341	0,042	1,604	1,604	0,744	1,657	0,802
2	0,466	0,531	0,217	1,574	2,101	0,197	1,364	1,364	0,505	1,417	0,563
3	0,367	0,302	0,616	0,743	1,270	1,029	0,533	0,532	0,328	0,585	0,270
4	0,307	0,241	0,555	0,806	1,333	0,966	0,596	0,594	0,266	0,648	0,209
5	0,605	0,669	0,355	1,712	2,239	0,059	1,502	1,502	0,643	1,556	0,701
6	0,076	0,142	0,172	1,187	1,715	0,585	0,978	0,976	0,116	1,030	0,174
7	0,324	0,258	0,572	0,788	1,316	0,984	0,579	0,577	0,284	0,630	0,226
8	0,698	0,763	0,449	1,807	2,334	0,036	1,597	1,596	0,737	1,650	0,795
9	0,936	0,999	0,686	2,043	2,570	0,271	1,833	1,833	0,973	1,887	1,032
10	0,826	0,889	0,576	1,933	2,460	0,161	1,723	1,723	0,863	1,776	0,922
11	0,225	0,159	0,473	0,887	1,415	0,885	0,678	0,676	0,184	0,730	0,127

**Tabla A.19 Errores en distancia para la nube procedente del Trimble corregida con todos los parámetros sistemáticos, siendo D=120**

Seguidamente se presentan los errores en distancia de la nube corregida solamente con los parámetros significativos, para el láser Trimble GX a una distancia dada de 120 metros.

<b>Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>

1	1,683	1,647	2,222	2,299	1,823	2,156	1,340	1,759	1,731	2,295	2,466
2	1,954	1,919	2,494	2,571	2,094	2,425	1,612	2,030	2,001	2,567	2,738
3	1,335	1,298	1,873	1,950	1,476	1,808	0,990	1,410	1,383	1,947	2,117
4	1,981	1,945	2,520	2,597	2,121	2,452	1,638	2,057	2,028	2,594	2,764
5	2,032	1,997	2,571	2,648	2,172	2,503	1,690	2,108	2,079	2,645	2,815
6	1,917	1,881	2,456	2,534	2,057	2,388	1,575	1,993	1,964	2,530	2,701
7	2,005	1,969	2,544	2,621	2,145	2,477	1,662	2,081	2,052	2,618	2,788
8	2,106	2,070	2,645	2,722	2,245	2,577	1,763	2,182	2,153	2,718	2,889
9	2,408	2,372	2,947	3,024	2,547	2,879	2,065	2,484	2,455	3,020	3,191
10	2,525	2,489	3,064	3,141	2,665	2,996	2,182	2,601	2,572	3,137	3,308
11	2,066	2,030	2,606	2,683	2,206	2,538	1,724	2,142	2,113	2,679	2,850
<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	1,988	2,282	2,405	2,331	2,212	2,286	2,226	2,248	3,719	2,160	2,409
2	1,951	2,246	2,368	2,294	2,174	2,249	2,188	2,212	3,682	2,122	2,372
3	2,533	2,830	2,950	2,876	2,757	2,831	2,771	2,796	4,265	2,705	2,954
4	2,609	2,907	3,026	2,952	2,833	2,907	2,847	2,873	4,342	2,781	3,030
5	2,133	2,423	2,550	2,476	2,357	2,430	2,370	2,388	3,862	2,304	2,554
6	2,475	2,765	2,893	2,819	2,700	2,773	2,713	2,731	4,205	2,647	2,896
7	1,646	1,946	2,063	1,989	1,870	1,944	1,884	1,912	3,380	1,818	2,067
8	2,067	2,363	2,484	2,410	2,291	2,365	2,305	2,329	3,798	2,238	2,488
9	2,042	2,333	2,460	2,386	2,267	2,340	2,280	2,298	3,772	2,214	2,463
10	2,607	2,904	3,024	2,950	2,831	2,905	2,845	2,869	4,339	2,779	3,028
11	2,776	3,075	3,194	3,120	3,001	3,074	3,014	3,041	4,509	2,948	3,198
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	2,172	1,458	2,168	1,343	2,036	2,173	2,020	1,299	2,013	2,214	1,531
2	2,427	1,721	2,426	1,610	2,291	2,427	2,268	1,565	2,273	2,468	1,808
3	2,600	1,885	2,596	1,770	2,464	2,601	2,449	1,726	2,441	2,642	1,957
4	2,522	1,808	2,518	1,692	2,386	2,523	2,371	1,649	2,363	2,564	1,880
5	2,408	1,694	2,404	1,579	2,272	2,409	2,257	1,535	2,249	2,450	1,766
6	2,465	1,751	2,461	1,636	2,329	2,466	2,313	1,593	2,307	2,507	1,826
7	2,409	1,695	2,405	1,580	2,273	2,410	2,257	1,537	2,250	2,451	1,769
8	2,391	1,686	2,391	1,575	2,255	2,392	2,233	1,530	2,238	2,432	1,773
9	3,885	3,175	3,882	3,061	3,749	3,886	3,731	3,017	3,728	3,927	3,253
10	2,351	1,637	2,347	1,522	2,215	2,352	2,200	1,478	2,192	2,393	1,709
11	2,595	1,881	2,591	1,766	2,459	2,596	2,443	1,723	2,436	2,637	1,955
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,845	1,712	1,396	0,985	1,684	1,979	1,880	1,045	0,977	0,329	1,761
2	0,145	1,013	0,697	0,287	0,984	1,280	1,180	0,346	0,277	0,370	1,063
3	0,848	1,716	1,400	0,990	1,688	1,983	1,884	1,049	0,980	0,334	1,766
4	0,033	0,901	0,585	0,176	0,873	1,169	1,069	0,235	0,165	0,481	0,952
5	0,713	1,580	1,264	0,853	1,552	1,847	1,748	0,913	0,845	0,198	1,629

6	0,844	1,710	1,395	0,983	1,682	1,978	1,879	1,044	0,976	0,328	1,760
7	0,677	1,543	1,227	0,815	1,515	1,811	1,711	0,876	0,809	0,161	1,592
8	0,012	0,857	0,541	0,132	0,829	1,125	1,024	0,191	0,120	0,526	0,908
9	0,698	1,566	1,250	0,840	1,537	1,833	1,733	0,899	0,830	0,184	1,616
10	0,885	1,751	1,436	1,024	1,723	2,019	1,919	1,084	1,017	0,369	1,801
11	0,234	1,105	0,789	0,382	1,076	1,373	1,272	0,439	0,367	0,277	1,157

**Tabla A.20 Errores en distancia para la nube procedente del Trimble corregida sólo con los sistematismos significativos para D=120**

En las dos próximas tablas se listarán los errores correspondientes al láser escáner terrestre Riegl para las dos distancias consideradas, recordando que solamente se dispone de la nube de puntos original. Primeramente se listan los resultados para la distancia de 30 metros.

<b>Error en distancia entre esfera n°1 y esfera n°2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,277	0,562	0,295	0,491	0,438	0,268	0,537	0,448	0,057	0,528	0,491
2	0,262	0,022	0,245	0,048	0,104	0,272	0,002	0,091	0,483	0,011	0,048
3	0,021	0,264	0,003	0,193	0,140	0,030	0,239	0,151	0,241	0,230	0,193
4	0,188	0,097	0,170	0,026	0,027	0,197	0,072	0,017	0,408	0,063	0,026
5	0,205	0,490	0,222	0,419	0,365	0,196	0,465	0,376	0,015	0,456	0,419
6	0,045	0,330	0,062	0,259	0,205	0,036	0,305	0,217	0,175	0,296	0,259
7	0,274	0,011	0,256	0,059	0,114	0,283	0,013	0,102	0,494	0,023	0,059
8	0,094	0,380	0,112	0,308	0,255	0,085	0,354	0,265	0,126	0,345	0,308
9	0,211	0,073	0,194	0,003	0,052	0,220	0,049	0,040	0,432	0,040	0,003
10	0,135	0,150	0,117	0,079	0,026	0,144	0,126	0,036	0,355	0,116	0,079
11	0,268	0,553	0,286	0,483	0,429	0,259	0,528	0,440	0,048	0,519	0,482
<b>Error en distancia entre esfera n°2 y esfera n°3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	1,284	1,205	1,582	1,298	1,299	1,297	1,380	1,338	1,241	1,188	1,385
2	1,002	0,922	1,299	1,015	1,017	1,015	1,098	1,055	0,958	0,906	1,103
3	1,269	1,189	1,566	1,282	1,284	1,282	1,365	1,322	1,225	1,173	1,370
4	1,071	0,992	1,368	1,084	1,086	1,084	1,167	1,124	1,027	0,975	1,172
5	1,129	1,050	1,427	1,142	1,145	1,142	1,226	1,183	1,086	1,033	1,230
6	1,294	1,215	1,592	1,308	1,309	1,307	1,390	1,348	1,251	1,198	1,395
7	1,023	0,944	1,320	1,036	1,038	1,035	1,119	1,076	0,979	0,927	1,123
8	1,114	1,035	1,412	1,128	1,129	1,127	1,210	1,168	1,071	1,018	1,215
9	1,507	1,428	1,805	1,520	1,522	1,520	1,603	1,561	1,464	1,411	1,608
10	1,033	0,954	1,330	1,046	1,048	1,046	1,129	1,086	0,989	0,937	1,134
11	1,071	0,992	1,369	1,085	1,086	1,084	1,167	1,125	1,028	0,976	1,172
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,179	0,745	0,172	0,368	0,284	0,232	0,158	0,006	0,062	0,050	0,009
2	0,256	0,823	0,249	0,446	0,361	0,154	0,081	0,072	0,015	0,027	0,068
3	0,117	0,448	0,125	0,071	0,013	0,528	0,455	0,302	0,359	0,346	0,306

4	0,164	0,730	0,156	0,354	0,269	0,247	0,173	0,021	0,077	0,065	0,024
5	0,165	0,730	0,157	0,353	0,269	0,246	0,173	0,020	0,077	0,064	0,024
6	0,167	0,732	0,159	0,355	0,271	0,244	0,171	0,018	0,075	0,062	0,022
7	0,083	0,649	0,076	0,272	0,187	0,328	0,254	0,102	0,158	0,146	0,105
8	0,126	0,691	0,118	0,314	0,230	0,285	0,212	0,059	0,116	0,103	0,063
9	0,222	0,788	0,215	0,411	0,327	0,189	0,115	0,037	0,019	0,007	0,034
10	0,274	0,841	0,267	0,464	0,379	0,136	0,063	0,090	0,033	0,046	0,086
11	0,078	0,644	0,071	0,267	0,183	0,332	0,259	0,106	0,163	0,151	0,110
<b>Error en distancia entre esfera nº4 y esfera nº5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	0,113	0,044	0,030	0,212	0,494	0,461	0,105	0,104	0,253	0,008	0,055
2	0,677	0,608	0,594	0,778	0,072	1,026	0,670	0,668	0,312	0,574	0,620
3	0,105	0,036	0,022	0,204	0,501	0,453	0,097	0,095	0,261	0,001	0,047
4	0,301	0,232	0,218	0,401	0,304	0,649	0,294	0,292	0,064	0,198	0,244
5	0,218	0,149	0,135	0,318	0,388	0,566	0,211	0,209	0,148	0,114	0,161
6	0,299	0,368	0,382	0,199	0,905	0,049	0,306	0,308	0,664	0,403	0,357
7	0,226	0,295	0,309	0,126	0,832	0,123	0,233	0,235	0,591	0,330	0,283
8	0,073	0,142	0,156	0,027	0,679	0,275	0,080	0,083	0,438	0,177	0,131
9	0,130	0,199	0,212	0,030	0,735	0,219	0,137	0,139	0,495	0,233	0,187
10	0,118	0,187	0,201	0,018	0,724	0,231	0,125	0,127	0,483	0,222	0,175
11	0,077	0,146	0,160	0,023	0,683	0,271	0,084	0,087	0,442	0,181	0,135

**Tabla A.21 Errores en distancia para la nube de puntos original del láser Riegl para D=30 metros**

Finalmente se recogen las tablas de errores de los invariantes espaciales de errores en distancia con los correspondientes a la nube original Riegl para una distancia de 60 metros.

<b>Error en distancia entre esfera nº1 y esfera nº2 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	2,337	2,119	1,932	2,858	2,145	2,516	2,680	2,596	2,506	2,783	3,400
2	1,433	1,208	1,033	1,957	1,246	1,612	1,773	1,698	1,600	1,881	2,500
3	1,635	1,410	1,234	2,159	1,447	1,814	1,974	1,898	1,802	2,083	2,700
4	2,036	1,815	1,634	2,560	1,847	2,216	2,377	2,297	2,205	2,484	3,100
5	1,926	1,708	1,522	2,449	1,735	2,106	2,268	2,185	2,096	2,374	2,989
6	1,560	1,339	1,157	2,084	1,371	1,740	1,900	1,820	1,729	2,009	2,623
7	1,843	1,623	1,439	2,365	1,652	2,022	2,185	2,103	2,012	2,290	2,906
8	2,062	1,837	1,662	2,585	1,874	2,240	2,403	2,328	2,229	2,509	3,129
9	1,854	1,626	1,454	2,378	1,667	2,032	2,192	2,119	2,020	2,302	2,921
10	2,117	1,896	1,713	2,639	1,927	2,296	2,459	2,378	2,285	2,564	3,181
11	2,272	2,049	1,871	2,796	2,084	2,451	2,613	2,535	2,440	2,720	3,338
<b>Error en distancia entre esfera nº2 y esfera nº3 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	3,224	4,412	3,634	4,054	3,647	4,232	3,551	3,576	4,020	3,902	4,407
2	2,955	4,130	3,366	3,772	3,378	3,960	3,283	3,307	3,752	3,622	4,133

3	2,861	4,056	3,271	3,698	3,283	3,871	3,187	3,213	3,656	3,546	4,047
4	3,760	4,949	4,170	4,591	4,183	4,768	4,086	4,112	4,555	4,439	4,943
5	3,069	4,262	3,478	3,904	3,491	4,078	3,394	3,420	3,863	3,751	4,254
6	3,393	4,578	3,803	4,220	3,816	4,400	3,720	3,745	4,189	4,068	4,575
7	3,545	4,729	3,956	4,371	3,968	4,553	3,872	3,898	4,342	4,220	4,727
8	3,538	4,736	3,947	4,378	3,959	4,547	3,863	3,889	4,331	4,224	4,725
9	3,371	4,554	3,782	4,196	3,795	4,379	3,699	3,724	4,168	4,045	4,552
10	3,676	4,863	4,085	4,505	4,098	4,683	4,002	4,027	4,471	4,353	4,858
11	4,318	5,512	4,728	5,154	4,740	5,327	4,644	4,670	5,113	5,001	5,503
<b>Error en distancia entre esfera n°3 y esfera n°4 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	2,963	2,023	1,840	2,133	2,229	2,430	2,395	2,035	2,262	2,136	1,819
2	4,106	3,160	2,980	3,275	3,365	3,575	3,537	3,179	3,408	3,281	2,959
3	3,377	2,438	2,254	2,548	2,644	2,844	2,809	2,448	2,676	2,550	2,233
4	3,747	2,801	2,621	2,916	3,006	3,217	3,178	2,820	3,049	2,923	2,600
5	3,388	2,449	2,265	2,558	2,655	2,855	2,820	2,459	2,687	2,561	2,243
6	3,966	3,025	2,842	3,136	3,231	3,433	3,398	3,038	3,266	3,139	2,821
7	3,293	2,354	2,170	2,463	2,560	2,760	2,725	2,364	2,592	2,466	2,149
8	3,316	2,377	2,193	2,487	2,583	2,784	2,749	2,388	2,616	2,490	2,172
9	3,762	2,824	2,640	2,933	3,030	3,229	3,194	2,834	3,061	2,935	2,618
10	3,604	2,659	2,478	2,773	2,864	3,073	3,035	2,677	2,906	2,779	2,458
11	4,133	3,191	3,009	3,303	3,397	3,602	3,565	3,206	3,434	3,308	2,988
<b>Error en distancia entre esfera n°4 y esfera n°5 (mm)</b>											
<b>Caso</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	1,306	1,246	1,334	0,766	0,091	1,046	0,682	0,817	0,060	0,874	0,508
2	0,368	0,309	0,397	0,172	1,032	0,109	0,258	0,122	0,880	0,066	0,433
3	0,183	0,123	0,211	0,357	1,216	0,077	0,443	0,307	1,065	0,250	0,617
4	0,475	0,415	0,504	0,065	0,924	0,215	0,151	0,015	0,773	0,042	0,325
5	0,576	0,517	0,604	0,035	0,823	0,317	0,050	0,086	0,672	0,143	0,224
6	0,771	0,711	0,800	0,232	0,627	0,510	0,146	0,282	0,476	0,339	0,028
7	0,737	0,677	0,765	0,197	0,661	0,477	0,111	0,247	0,511	0,304	0,063
8	0,376	0,316	0,405	0,163	1,021	0,116	0,248	0,113	0,870	0,056	0,422
9	0,603	0,543	0,632	0,064	0,794	0,343	0,021	0,114	0,643	0,171	0,196
10	0,477	0,417	0,506	0,062	0,920	0,216	0,148	0,012	0,770	0,045	0,322
11	0,161	0,101	0,190	0,379	1,238	0,099	0,465	0,329	1,087	0,272	0,639

Tabla A.22 Errores en distancia para la nube de puntos original del láser Riegl para D=60 metros

# Agradecimientos

Esta Tesis Doctoral ha sido financiada con una beca de predoctoral de Formación de Personal Investigador (F.P.I.) de la Universidad de Salamanca (2008-2009) y una beca de predoctoral de Formación de Profesorado Universitario (F.P.U) del Ministerio de Educación (2009-2011).

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que me han apoyado durante la realización de esta Tesis Doctoral:

Al Dr. D. Diego González Aguilera, quien me dió la oportunidad de participar en el grupo de investigación TIDOP, y que como director me ha guiado a lo largo del desarrollo de la Tesis Doctoral. Quiero expresar mi más sincero agradecimiento por su apoyo, guía y paciencia durante todo el camino.

Al Dr. D. Javier Gómez Lahoz y al Dr. D. Manuel Álvarez-Claro Yrisarri quienes me guiaron durante las fases previas del doctorado ya hace más de cinco años.

Al resto de miembros del grupo de investigación TIDOP con los que he compartido muchas horas de trabajo y buenos momentos.

Al Departamento de Ingeniería Cartográfica y del Terreno, a la EPS de Ávila y a la Universidad de Salamanca, por poner a mi disposición los medios necesarios para llevar a buen término esta Tesis Doctoral.

Al grupo de investigación en Fotogrametría y Teledetección Cercanas perteneciente a Universidad de Vigo por la utilización del equipo láser Riegl LMS-Z390i y por el establecimiento del campo de calibración láser. Y especialmente a Dr. D.<sup>a</sup> Julia Armesto e Dr. D. Higinio González por su asesoramiento en los análisis térmicos y metrológicos, respectivamente.

Al Dr. D. Pedro Saura por la utilización de la imagen de alta resolución del signo serpentiforme de la cueva de Llonín.

Y finalmente y más importante, agradecer a mi familia por su comprensión, paciencia y ánimo.

*El agradecimiento es la memoria del corazón*

*Lao-Tsé (siglo VI a. C.)*

