Secciones

Informe Final

Anexo 1: Ejercicios corregidos

Anexo 2: Archivos de programación

Anexo 3: Ejemplos de foros

Informe Final

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INNOVACIÓN DOCENTE ID10/080 "MÉTODOS NUMÉRICOS: UN ENFOQUE MULTIDISPLINAR"

DATOS DEL PROYECTO

TÍTULO: ID10/080 “Métodos Numéricos: un enfoque multidisciplinar”

PROFESOR RESPONSABLE: Mª Teresa de Bustos Muñoz

PROFESORES DEL EQUIPO:

Antonio Fernández Martínez. Matemática Aplicada.

Raquel García Rubio. Economía y Empresa.

Juan Ramón Muñoz Rico. Ingeniería Mecánica.

Jesús Vigo Aguiar. Matemática Aplicada.

FINANCIACIÓN CONCEDIDA: 525€

- ## Introducción

El proyecto de innovación ID10/080 “Métodos Numéricos: un enfoque multidisciplinar” ha sido desarrollado por el equipo formado por los profesores: María Teresa de Bustos Muñoz, Antonio Fernández Martínez, Raquel García Rubio, Juan Ramón Muñoz Rico y Jesús Vigo Aguiar, pertenecientes a diferentes departamentos de la Universidad de Salamanca. La idea de integrar profesores dedicados a diferentes disciplinas surgió con la intención de desarrollar la asignatura Métodos Numéricos (perteneciente al bloque Fundamentos Matemáticos Aplicados a la Biotecnología) desde diferentes puntos de vista, cambiando el enfoque con el que resolver cada problema, aunque utilizando herramientas comunes. Recordemos que los alumnos pertenecientes a dicha titulación son alumnos con los mejores expedientes del distrito universitario, estudiantes cuyo currículum es brillante, con notas superiores a 8 puntos, con gran capacidad de trabajo e iniciativa, creatividad y fuerza de voluntad, como ya indicamos en la Memoria del Proyecto. Sin embargo, la experiencia de cursos anteriores nos hizo pensar en las razones por las cuales cuando un alumno empieza con ilusión los estudios de Grado divide las asignaturas en compartimentos estancos, distinguiendo entre nociones comunes en diferentes asignaturas como si fueran totalmente independientes. Así, una integral calculada en las asignaturas de matemáticas se convierte en algo diferente de una integral calculada en Física, por ejemplo; un sistema de ecuaciones parece mucho más difícil cuando tienes que resolverlo en una asignatura diferente.

En este proyecto hemos intentado motivar a los alumnos, desarrollar sus capacidades estableciendo conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas. Para ello, se ha elaborado un material tanto electrónico como en papel, con el cual los alumnos han resuelto problemas, han propuesto otros, han aprendido a investigar, a establecer esos nexos inexistentes en un principio, han deducido por sí mismos las relaciones entre lo que aprenden en las asignaturas de matemáticas y otras de su curso, así como de cursos anteriores. El resultado ha sido plenamente satisfactorio para ellos, pues han disfrutado resolviendo problemas diferentes, y bastante satisfactorio para el equipo de profesores, como analizaremos a continuación.

- **Material elaborado, resultados obtenidos y logros**

Desde la formación del equipo, hace ya prácticamente un año, los profesores han ido elaborando material para el proyecto de innovación. Dicho material está formado por programas en Mathematica (software con licencia Campus), relación de problemas pertenecientes a distintas disciplinas, foros de resolución de problemas, tanto de comunicación interna de los alumnos como foros comunes a profesores y alumnos y otras tareas en Studium. Analicemos dicho material.

- Archivos de Mathematica

Se han elaborado seis archivos con programas y ejercicios en Mathematica, que se han ido poniendo a disposición de los alumnos paulatinamente, según avanzaba la asignatura e iban adquiriendo los conocimientos necesarios para su manejo. La intención de dichos archivos era mostrar cómo las técnicas aprendidas en clase pueden llevarse a cabo con menor esfuerzo utilizando dichos programas, pero inútiles si no se conoce el fondo de los mismos y se dominan las nociones por completo. Tras una única hora de introducción a Mathematica, fueron capaces de utilizar el software sin mayor problema. Los alumnos comprendían prácticamente de inmediato cada uno de los programas y funciones utilizadas, aplicándolos con soltura. Es más, disfrutaban haciendo anotaciones y sugerencias y corrigiendo aquello que a ellos les parecía que no era correcto. En este sentido, el resultado ha sido completamente satisfactorio. Sin embargo, algo que resultó llamativo fue que, pese a tener a su disposición un software de gran potencia para cálculo simbólico, todos ellos seguían manteniendo las calculadoras a mano, pues se sentían más seguros con las operaciones básicas realizadas en ellas. Al final, sólo un 50% de los alumnos que intervinieron en el proyecto confió más en Mathematica que en sus pequeñas máquinas de cálculo.

En el anexo 2 están recogidos dos ejemplos de los archivos, así como una recopilación de los trabajos realizados por algunos alumnos (sólo aportamos en este documento una pequeña muestra del trabajo realizado por algunos de ellos, por motivos de espacio) utilizando este software para resolver los problemas planteados.

- Foros

En la plataforma Studium se abrieron foros tanto de comunicación interna de los alumnos como foros comunes a profesores y alumnos. Estos foros ofrecían la posibilidad de plantear problemas y resolver dificultades con las cuales los alumnos se encontraban, ya fueran grandes o pequeñas.

La mayor parte de los alumnos fue capaz de resolver sin problema todos los ejercicios planteados. Sin embargo, hicieron un buen uso de los foros en cuanto les surgía alguna dificultad. Si bien la participación en los foros de dudas fue abundante y satisfactoria, no lo fue tanto en los foros donde ellos podían sugerir problemas tanto propios como obtenidos de otras asignaturas. En el nivel que tienen los alumnos de primer curso, todavía les cuesta mucho establecer a priori relaciones entre unas asignaturas y otras, aunque al final del proyecto fueron capaces de aplicar las herramientas y técnicas aprendidas a problemas de las demás asignaturas.

En el Anexo 3 se encuentran algunos ejemplos de las actividades realizadas en los foros.

- Problemas pertenecientes a diferentes disciplinas

En realidad, este apartado ha sido el más importante de todo el proyecto de innovación, puesto que es el punto central en el cual los alumnos iban a demostrar si habíamos conseguido los objetivos que nos habíamos planteado desde un principio: enlazar las distintas herramientas matemáticas con otras disciplinas tanto de su curso como de materias dispares y ser capaces de resolver problemas de índole diversa.

Por esta razón, se ha elaborado una colección de problemas con aplicación a la Ingeniería Civil, a la Cinemática, a las Probabilidades, a la Ingeniería Química, a la Ingeniería Hidráulica, a la Electricidad, a la Biología, a la Física, al Cálculo, a la Dinámica, a la Ingeniería general, a la Ingeniería Eléctrica, a la Economía, a la Química, a la Industria, a la Nutrición, al Álgebra Lineal, a la Termodinámica, a la Balística, etc. (Ver Anexo 1). El número de problemas era elevado, con lo cual esperábamos una baja participación. Sin embargo, no ha sido así. La respuesta fue altamente satisfactoria. Los alumnos entregaban dos copias, una para nosotros y otra que se les devolvía completamente corregida, para que vieran sus fallos y pudieran corregir sus errores. Incluso en épocas de mucho trabajo para ellos, las entregas seguían llegando. El comentario general era que con las correcciones eran capaces de entender mucho mejor el problema, comprendiendo cuáles eran sus fallos y aprendiendo a resolverlos sin dificultad.

En el desarrollo de esta parte del Proyecto hemos comprobado distintas etapas: en un principio, los alumnos se encontraban completamente perdidos cuando tenían que resolver problemas de Nutrición, por ejemplo, utilizando técnicas aprendidas en clase de Métodos Numéricos, cuando inicialmente ¡parecía no haber relación alguna entre lo primero y lo segundo!

En una segunda etapa, los alumnos se acostumbraban a resolver problemas de cualquier índole, representando para ellos casi un desafío.

En una tercera etapa, parecía que los alumnos olvidaban de qué disciplina era el problema, recogiendo únicamente los datos para aplicar las herramientas matemáticas necesarias en cada caso. Esto en un principio nos preocupó, pues olvidaban que estaban resolviendo problemas de Química o Economía, por ejemplo, como si para ellos fueran todos equivalentes. Ello nos preocupó en un principio, pues temíamos que los alumnos actuaran como simples máquinas de repetición, reproduciendo una y otra vez los mismos argumentos, cambiando simplemente los datos. Eso es algo de lo que queríamos huir. No queremos autómatas, sino personas capaces de pensar y crear por sí mismos, que sepan resolver un problema y no copiar una solución de uno similar. Sin embargo, pronto pudimos observar que precisamente habían llegado a ese grado de homogeneización debido a haber procesado y asimilado todas las herramientas matemáticas a su disposición, y utilizándolas de una manera natural.

En una cuarta y última etapa, ellos mismos eran capaces de darse cuenta de la importancia de los logros que habían conseguido. Podemos poner un ejemplo significativo con una de las alumnas, Rebeca, que en un momento determinado

comentó: “Es increíble, cuando veíamos en clase los métodos de integración numérica no era capaz de darme cuenta que algo tan sencillo podía valer para calcular el volumen de un canal con unas cuantas mediciones, o hacer cálculos en una fábrica de coches. Y es tan sencillo”.

- ## Conclusiones

Se ha conseguido desarrollar una implantación metodológica activa enseñanza-aprendizaje, elaborando material, actividades prácticas y sistemas tutoriales innovadores. Además, los resultados obtenidos con los alumnos, analizados a lo largo de todo el informe final han sido altamente satisfactorios.

ANEXO 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

19. Aplicación a la Economía. Una empresa quiere fabricar cuatro productos distintos ayudándose de tres máquinas diferentes, que deberán estar a pleno rendimiento durante 8 horas cada día. El número de horas que cada máquina utiliza en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1 (A)	Producto 2 (B)	Producto 3 (C)	Producto 4 (D)
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Es decir, en la producción de una unidad del primer producto la primera máquina se usa una hora; la máquina 2, 2 horas y la máquina 3, 1 hora (para los demás productos, véase la tabla anterior). Hallar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos un día de 8 horas completas. Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} A+2B+C+2D&=8\\ 2A+0B+C+D&=8\\ A+2B+3C+0D&=8 \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&2&8\\ 2&0&1&1&8\\ 1&2&3&0&8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[3^0-1^0]{2^0-2\cdot 1^0} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&2&8\\ 0&-4&-1&-3&8\\ 0&0&2&-2&0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A=4-D}\\ \boxed{B=2-D}\\ \boxed{C=D} \end{array}$$

Las soluciones 'matemáticas' son infinitas. Aún así, sólo tienen sentido económico que $D=1$, porque si $D\geq 2$ hay productos que no se producen o que 'salen negativos'.

Solución 'real' $\begin{cases} 3 \text{ unidades de A}\\ 1 \text{ unidad de B}\\ 1 \text{ unidad de C}\\ 1 \text{ unidad de D} \end{cases}$

Has hecho bien las operaciones pero el análisis: $C=D$ no dice nada, pero sí $B=2-D$. El número de pistas no puede ser negativo $\Rightarrow$ D sólo puede tomar los valores 0, 1, 2

Para $D=0$, obtienes la solución $A=4,\ B=2,\ C=D=0$

$D=1$ $\quad A=3,\ B=1,\ C=D=1$

$D=2$ $\quad A=2,\ B=0,\ C=D=2.$

23. Aplicación a la Nutrición. Un endocrino esta preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada 100 gr del alimento A contienen 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento B contienen 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento C contienen 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidad de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan? Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

	Proteína	Grasa	Carbohidrato
A	2	3	4
B	3	2	1
C	3	3	2
TOTAL	25	24	21

$2A+3B+3C=25$
$3A+2B+3C=24$
$4A+B+2C=21$

Bien planteado

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$2^0 - 3/2\,1^0$
$3^0 - 2 \cdot 1^0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right) \quad 3^0 = 2^0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$A = 2'4$
$B = 4'4$
$C = 2$

Arrastra el error a A

Te has equivocado al despejar B

Bien.

Se necesitan
- 240 g de A
- 440 g de B
- 200 g de C

22. Aplicación a la Industria. Una industria produce dos tipos de plástico: común y especial. Cada tonelada de plástico común necesita 2 horas en la planta A y 5 en la planta B; cada tonelada de plástico especial necesita 2 horas en la planta A y 3 en la planta B. Si la planta A tiene disponibles 8 horas al día y la planta B 15 horas al día, ¿cuántas toneladas de cada tipo de plástico pueden fabricarse diariamente de modo que las plantas operen a toda su capacidad? Resuelve el problema utilizando el método del pivote parcial.

GAUSS

	A	B
común (x)	2	5
Especial (y)	2	3
TOTAL	8	15

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2y=8 \\ 5x+3y=15 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 15 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{2^{\circ}-5/2\,1^{\circ}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Perfecto.

$$-2y=-5 \rightarrow y=5/2$$

$$x=\frac{8-2\cdot 5/2}{2}=\frac{3}{2}$$

Se producirán 3/2 de tonelada de plástico común y 5/2 de plástico especial.

21. Aplicación a la Industria. Una refinería de petróleo produce gasolina con y sin plomo. Cada tonelada de gasolina sin plomo requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinado. Por su parte, cada tonelada de gasolina con plomo requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinado. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinado 2, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?

	Mezclado	Refinado
Con plomo (A)	5	4
Sin Plmo (B)	4	2
TOTAL	180	120

$$\begin{cases} 5A + 4B = 180 \\ 4A + 2B = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} 5A + 4B = 180 \\ -8A - 4B = -240 \end{cases}$$

$-3A = -60$ Perfect.

$\boxed{A = 20}$

$$B = \frac{180 - 5A}{4} = \frac{180 - 5 \cdot 20}{4} = \frac{20}{=}$$

Se producirán 20 toneladas con plomo y otras 20 sin plomo

LENA

20. Aplicación a la Química. Para controlar cierta enfermedad de una planta se utilizan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del químico A, 12 unidades del químico B, y 8 unidades del químico C. En el mercado hay tres marcas que se pueden utilizar. Tres litros del producto de la marca X contiene una unidad de A, dos de B y una de C. Tres litros del producto de la marca Y contiene dos unidades de A,una de B y tres de C, y tres litros del producto de la marca Z contiene tres unidades de A, dos de B y una de C. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los químicos requeridas para el control de la enfermedad? Resuelve el problema utilizando una factorización LU.

Sistema

$x + 2y + 3z = 10$ B

$x + 3y + z = 8$

$2x + y + z = 12$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^o - 2 \cdot 1^o]{2^o - 1 \cdot 1^o} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$

Te has equivocado al plantear estas ecuaciones. C

$\xrightarrow{3^o + 3 \cdot 2^o} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} = U$ $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Sistema el otro.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow$ $y_1 = 10$

$y_1 + y_2 = 8 \rightarrow y_2 = -2$

$2y_1 - 3y_2 + y_3 = 12 \rightarrow y_3 = -14$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix} \rightarrow$

$x + 2y + 3z = 10 \rightarrow x = 56/11$

$y - 2z = -2 \rightarrow y = 6/11$

$-11z = -14 \rightarrow z = 14/11$

Solución:

Necesitamos
- 1'27 l de A
- 1'63 l de B
- 3'82 l de C

LENIA

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

26. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante el resto del día. A mediodía, una máquina quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante en términos de cantidad de nieve retirada en una hora. La máquina limpió dos kilómetros hasta las dos de la tarde y un kilómetro más hasta las cuatro de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?

$V = \frac{C_1}{h}$, $h = C_2 \cdot t$ $\rightarrow$ $V = \frac{C_1}{C_2}\frac{1}{t} \Rightarrow V = K \cdot \frac{1}{t}$

$\frac{de}{dt} = \frac{K}{t} \Rightarrow \int de = \int \frac{K}{t} \cdot dt$

$\boxed{e = K \cdot \log(t) + A}$ $\rightarrow$ espacio limpiado en velocidad

Construimos un sistema de ecuaciones:

$t = 12h \rightarrow e = 0 \rightarrow 0 = K \cdot \log(x+0) + A$

$t = 14h \rightarrow e = 2 \rightarrow 2 = K + \log(x+2) + A$

$t = 16h \rightarrow e = 3 \rightarrow 3 = K + \log(x+4) + A$

$2 = K \log\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$3 = K \cdot \log\left(\frac{x+4}{x}\right)$

$\frac{2 \cdot 3}{K} = \log\left(\frac{x+2}{x}\right)^3$ $\quad \log\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \log\left(\frac{x+4}{x}\right)^2 \Rightarrow$

$\frac{3 \cdot 2}{K} = \log\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ $\quad \left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ Reject.

$(x+2)^3 = x(x+4)^2 \Rightarrow$

$x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 8 = x^3 + 8x^2 + 16x$

$2x^2 + 4x - 8 = 0$

$x^2 + 2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$

$1'23h = 74\,min \Rightarrow$ Comenzó a nevar a las $\boxed{10'46h}$

$\ominus \rightarrow$ sin sentido

JORGE
GARCÍA LEMA

27. Se sabe que cuando se perfora un tanque a presión, dicha presión disminuye a una velocidad directamente proporcional a la diferencia de presiones entre la del tanque y la exterior en dicho instante. Si la presión inicialmente era P_0 y al cabo de 5 minutos había caído un 10 %, ¿cuánto tiempo pasará hasta que caiga al 50 %?

$$\frac{dP}{dt} + aP = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -aP \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int -a\,dt \Rightarrow$$

$$\ln P = -at + c \Rightarrow P = P_0 e^{-at}$$

$t = 10$ min $\rightarrow$ $0'9 P_0 = P_0 e^{-a \cdot 10}$

Te has equivocado en el tiempo: son 5 minutos. El resto lo tienes bien planteado.

$$\text{así } \ln 0'9 = -a \cdot 10 \Rightarrow a = 0'0105\ \text{min}^{-1}$$

$$0'5 P_0 = P_0 e^{-a \cdot t}$$

$$\ln 0'5 = -0'0105 \cdot t \Rightarrow t = \frac{\ln 0'5}{-0'0105} = 66'01 \text{ min pasarán}$$

hasta que caiga al 50 %.

28. En un depósito de agua de forma cilíndrica de radio R, se hace un agujero a $0{,}5m$ del fondo. Se sabe que la velocidad a la que sale el agua es directamente proporcional a la presión del agua a la altura del agujero. La altura del agua inicialmente es de $3m$ y después de una hora descendió $0{,}5m$. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar hasta que deje de salir agua?

Tomando $V_{inicial}$ y $V_{ya\ salió}$; sabemos que la salida es directamente proporcional a la p $\Rightarrow$ la p es direct. proporcional al Volumen que queda encima

$$\frac{dV(t)}{dt} = K(V_{queda}) = K(V_{inicial} - V_{ya\ salió}).$$

$$\int \frac{dV(t)}{V_{inicial} - V_{ya\ salió}(t)} = \int K\,dt$$

$$-\log(V_{inicial} - V(t)) = K \cdot t + C \Rightarrow$$

$$V_{inicial} - V(t) = \lambda e^{-K \cdot t}$$

Como cuando deja de salir agua $V_{inicial} = V_{ya\ salió}$

$$0 = \lambda e^{-K \cdot t} \Rightarrow \boxed{t = \infty}$$

Algo falla. Fíjate bien, Jorge:
En ningún sitio utilizas que el depósito tenga forma cilíndrica.

Además, lee de nuevo el enunciado:
No dicen que la variación del volumen sea proporcional al volumen sino a la presión del agua a la altura del agujero

Es decir, depende de la altura

¿Intentar hacerlo de nuevo?

ANA KROTENBERG GARCÍA

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1 - \cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

$f(t) = \sqrt{1 - \cos(t)}$ t → segundos simpson 1/3 compuesto ⇒ aproximar integral

→ Como vamos a usar el método de Simpson 1/3 compuesto, tenemos que tener 3 puntos, y deben estar equidistantes, así que los tomo de 0'5 en 0'5.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 0$
$x_1 = 0'5$	$f(x_1) = 0'34988$
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 0'6789$
$x_3 = 1'5$	$f(x_3) = 0'963983$
$x_4 = 2$	$f(x_4) = 1'19$

$h = 0'5$; $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4}$

Esta fórmula es para el método simple

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\underbrace{I}_{\text{sumatorio de } f(x_i) \text{ con } i \text{ impar}} + 2\underbrace{P}_{\text{sumatorio de } f(x_i) \text{ con } i \text{ par}} + f(b)\right) =$$

$$= \frac{0'5}{3}\left(0 + 4(0'34988 + 0'963983) + 2(0'6789 + 0'963988) + 1'19\right) =$$

$$= 1'62187$$

- Error absoluto: $|1'300221 - 1'62187| = 0'321649$
- Error $-\frac{h^4}{180}(b-a) f^{4r}(\xi) \Rightarrow -\frac{(0'5)^4}{180}(2) f^{4r}(\xi)$

Cota de $f(t) = \sqrt{1-\cos t}$ en $(0,2)$ → $1'19$ → acercarse así que se tomará el valor en 2.

Cota: $-\frac{(0'5)^4}{180} \cdot 2 \cdot$ ¿y la derivada 4ª?

Matemática → hallar Derivada de $\sqrt{1-\cos t}$

AVA

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

$f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$ $[1,2]$

Cuadratura Gaussiana para $n=0$ y $n=1$

Perfecto.

- Para $n = 0$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$(2-1) f\left(\frac{2+1}{2}\right) = 1 \cdot f(3/2) \Rightarrow \frac{10(3/2)}{(\sqrt{3/2}+1)^5} = 0'27522$$

- Para $n = 1$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

$$\frac{2-1}{2}\left[f\left(\frac{2-1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{2+1}{2}\right) + f\left(\frac{2-1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2+1}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)}+1\right)^5} + \frac{10\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}+1\right)^5}\right)$$

$\frac{1}{2} f(1'211325) + f(1'7886$

$= \frac{1}{2}(0'296917 + 0'256362$

$= 0'276266$

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$v(t) = t^3 - 2t^2 \Rightarrow$ $y = x^3 - 2x^2$ se buscará cuando $y = 1$, entonces trabajaremos con $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ y buscaremos raíces.

Método de Newton-Raphson

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$x_0 = 3$

$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{9}{15} = 2'4$

$x_2 = 2'4 - \frac{2'304}{7'68} = 2'1$

$x_3 = 2'1 - \frac{0'441}{4'83} = 2'0087$

$x_4 = 2'0087 - \frac{0'035}{4'0648} = 2'0001$

$x_5 = 2'0001 - \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4'0008} = 2'00000002$

$x_6 = 2'00000002 - \frac{8 \cdot 10^{-8}}{4'00000016} = 2$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
3	9	15
2'4	2'304	7'68
2'1	0'441	4'83
2'0087	0'035	4'0648
2'0001	$4 \cdot 10^{-4}$	4'0008
2'00000002	$8 \cdot 10^{-8}$	4'00000016
2		

Mal calculados

$\Rightarrow$ No se podría haber tomado $x_0 = 0$, porque el cero no es derivable, es más, en la función $f(x)$ sería 0 y no se podría operar. $\longrightarrow$ Sí que es derivable, pero la derivada vale 0.

$\Rightarrow$ Hacemos 4 y 5.

Error relativo $\left|\frac{x_5 - x_6}{x_5}\right| = \frac{|2'0001 - 2'00000002|}{2'0001} = 4'9975 \cdot 10^{-5} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$

Laura Carrera

PROBLEMAS INTERPOLACIÓN

1/ Aplicación a la Ingeniería Civil

$f(t) = 9,5\, e^{-0,3t} \cos(2t)$ $\quad t \equiv$ tiempo

$P_3(x)$? $\Rightarrow$ Necesito 4 puntos. B

$P_3(R)$?

$f(0,2) = 8,240514$ Error absoluto?

Cota del error?

	δ	δ^1	δ^2	
x_i	y_i	y_{ij}	y_{ij+1}	y_{ij+11}
0	9,5	−2,7873	0,4020	−0,0338
0,15	9,0819	−2,6667	0,3868	
0,3	8,6819	−2,5507		
0,45	8,2993			

↳ Te has equivocado en estos valores. ¿Será un problema del modo de la calculadora?

$$P_3(x) = 9,5 - 2,7873x + 0,4020 \times (x-0,15) - 0,0338 \times (x-0,15)(x-0,30)$$

$$P_3(0,2) = 8,946594$$

Error absoluto $= |f(0,2) - P_3(0,2)| = 0,706080$

$$|f(t) - P_3(t)| \leq \frac{f''''(\xi)}{4!} (x-0)(x-0,15)(x-0,30)(x-0,45)$$

$f''''(x) = 131,557\, e^{-0,30x} \cdot \cos(2x) - 89,148\, e^{-0,30x} \cdot \text{Sen}(2x) \Rightarrow$ Decreciente pa todo $x \in [0,0,$

$$|f(t) - P_3(t)| \leq \frac{131,557}{4!} \cdot 0,45 \cdot 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,45 = 0,099$$

Tienes bien el procedimiento.

2/ Aplicación a la cinemática

$$v(t) = 2700 \log\left(\frac{160000}{160000 - 2680t}\right) - 9{,}81t \qquad t \equiv \text{tiempo}$$

$P_2(x)$? $\Rightarrow$ Tomo 3 puntos

$P_2(11)$? $\Rightarrow$ Error absoluto?

$v(11) = 340{,}1142$

x	y	y_{ij}	y_{ijk}
8	238,03	33,59	0,445
10	305,21	35,37	
12	375,95		

$$P_2(x) = 238{,}03 + 33{,}59(x-8) + 0{,}445(x-8)(x-10)$$

Bien calculado

$$P_2(11) = 340{,}135$$

Error absoluto $= |340{,}1142 - 340{,}135| = 0{,}0208$

$$|v(t) - P_2(t)| \leq \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)(x-10)(x-12)$$

$$f'''(t) = \frac{84\,694\,860\,800\,000}{(160\,000 - 2680t)^3} \Rightarrow \text{creciente para } \forall t \in [8, 12]$$

$$|v(t) - P_2(t)| \leq 0{,}0068 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 0{,}2162$$

3/ Aplicación a las probabilidades

$$y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

x	y	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}	y_{ijklm}	y_{ijklmn}
1	0,8427	0,375	-0,37	0,1667	0	-0,0835
1,1	0,8802	0,301	-0,32	0,1667	-0,04175	
1,2	0,9103	0,237	-0,27	0,15		
1,3	0,9340	0,183	-0,225			
1,4	0,9523	0,138				
1,5	0,9661					

Te has equivocado en el signo. El resto está bien.

$$P_5(x) = 0,8427 + 0,375(x-1) - 0,37\cdot(x-1)(x-1,1) + 0,1667(x-1)(x-1,1)(x-1,2)$$
$$- 0,0835\,(x-1)(x-1,1)(x-1,2)(x-1,3)(x-1,4)$$

$P_5(1,32) = 80,6982$ ← Has sustituido mal. Observa bien los datos, si el valor del polinomio está siempre en $[0,1]$, no puede dar ese salto a 80.

$$|y(x) - P_5(x)| \le \frac{f^{6)}(\xi)}{6!}\,|x-1|\,|x-1,1|\,|x-1,2|\,|x-1,3|\,|x-1,4|\,|x-1,5|$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral: $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt \Rightarrow f'(x) = g($

$f'(x) = \frac{2}{\pi} e^{-x^2}$ ← Bien derivado

$f''(x) = \frac{-4x}{\pi} e^{-x^2}$

$f'''(x) = \frac{8x^2}{\pi} e^{-x^2}$

$f^{4)}(x) = \frac{-16x^3}{\pi} e^{-x^2}$

$f^{5)}(x) = \frac{32x^4}{\pi} e^{-x^2}$

$f^{6)}(x) = \frac{-64x^5}{\pi} e^{-x^2}$ Decreciente

Mal derivado. Ojo, es la derivada de un producto.

$$|y(x) - P_5(x)| \le \frac{-7,5}{6!} \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5$$

$$|y(x) - P_5(x)| \le -3,75 \cdot 10^{-5}$$

4/ Aplicación a la Ingeniería Química

x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1,0276	1,1013	1,1801	1,2652	1,3480	1,4120

Para $y = P_1(25)$ Perfect.

$$P_1(x) = 1,1801 \cdot \frac{x-28}{20-28} + 1,2652 \frac{x-20}{28-20} = -0,1475(x-28) + 0,1582(x-2$$

$$P_1(x) = -0,1475x + 4,13 + 0,1582x - 3,164 = 0,0107x + 0,966.$$

$$P_1(25) = 1,2335$$

5/ Aplicación a la Ingeniería Hidráulica

t ... (días)	0	5	15	16	23	30
y (metros)	8,20	11,4	19,9	22,4	25,2	26,8

Fíjate bien en los enunciados. Léelos dos veces, para que nunca $P_2(10)$ te pase lo mismo que en este problema: te piden un polinomio de grado 2.

$$P_2(x) = 11,4 \frac{x-15}{5-15} + 19,9 \frac{x-5}{15-5} = -1,14(x-15) + 1,99(x-5)$$

$$P_2(x) = 0,85x + 7,15$$

$$P_2(10) = 15,65 \text{ m}$$

PROBLEMAS INTERPOLACIÓN

Laura Carrera

1/ Aplicación a la Ingeniería Civil

$f(t) = 9,5\, e^{-0,3t} \cos(2t)$ $\quad t$ = tiempo

$P_3(x)$? $\Rightarrow$ Necesito 4 puntos. B

$P_3(R)$?

$f(0,2) = 8,240514$ Error absoluto?

Cota del error?

	δ	δ^1	δ^2		
x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}	
0	9,5	-2,7873	0,4020	-0,0338	
0,15	9,0819	-2,6667	0,3868		
0,3	8,6819	-2,5507			
0,45	8,2993				

↳ Te has equivocado en estos valores. ¿Será un problema de l modo de la calculadora?

$P_3(x) = 9,5 - 2,7873x + 0,4020 \times (x-0,15) - 0,0338 \times (x-0,15)(x-0,30$

$P_3(0,2) = 8,946594$

Error absoluto $= |f(0,2) - P_3(0,2)| = 0,706080$

$$|f(t) - P_3(t)| \leq \frac{f''''(\xi)}{4!} (x-0)(x-0,15)(x-0,30)(x-0,45)$$

$f''''(x) = 131,557\, e^{-0,30x} \cdot \cos(2x) - 89,148\, e^{-0,30x} \cdot \text{Sen}(2x) \Rightarrow$ Decreciente pa todo $x \in [0,0,$

$$|f(t) - P_3(t)| \leq \frac{131,557}{4!} \cdot 0,45 \cdot 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,45 = 0,099$$

Tienes bien el procedimiento.

2/ Aplicación a la cinemática

$$v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000 - 2680t}\right) - 9{,}81t \qquad t \equiv \text{tiempo}$$

$P_2(x)$? $\Rightarrow$ Tomo 3 puntos

$P_2(11)$? $\Rightarrow$ Error absoluto?

$v(11) = 340{,}1142$

x	y	y_j	y_{jk}
8	238,03	33,59	0,445
10	305,21	35,37	
12	375,95		

$$P_2(x) = 238{,}03 + 33{,}59(x-8) + 0{,}445(x-8)(x-10)$$

Bien calculado.

$$P_2(11) = 340{,}135$$

Error absoluto $= |340{,}1142 - 340{,}135| = 0{,}0208$

$$|v(t) - P_2(t)| \leq \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)(x-10)(x-12)$$

$$f'''(t) = \frac{84\,694\,860\,800\,000}{(160\,000 - 2680t)^3} \Rightarrow \text{creciente para } \forall\, t \in [8, 12]$$

$$|v(t) - P_2(t)| \leq 0{,}0068 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 0{,}2162$$

3/ Aplicación a las probabilidades

$$y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

x	y	yij	yijk	yijkl	yijklm	yijklmn
1	0,8427	0,375	-0,37	0,1667	0	-0,0835
1,1	0,8802	0,301	-0,32	0,1667	-0,04175	
1,2	0,9103	0,237	-0,27	0,15		
1,3	0,9340	0,183	-0,225			
1,4	0,9523	0,138				
1,5	0,9661					

Te has equivocado en el signo. El resto está bien.

$$P_5(x) = 0,8427 - 0,375(x-1) - 0,37\,(x-1)(x-1,1) + 0,1667\,(x-1)(x-1,1)(x-1,$$
$$- 0,0835\,(x-1)(x-1,1)(x-1,2)(x-1,3)(x-1,4)$$

$P_5(1,32) = 80,6982$ ← Has sustituido mal. Observa bien los datos. Si el valor del polinomio está siempre en $[0,1]$, no puede dar ese salto.

$$|y(x) - P_5(x)| \le \frac{f^{6)}(\xi)}{6!}\,|x-1|\,|x-1,1|\,|x-1,2|\,|x-1,3|\,|x-1,4|\,|x-1,5|$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral: $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt \Rightarrow f'(x) = g($

$f'(x) = \frac{2}{\pi} e^{-x^2}$ ← Bien derivado.

$$|y(x) - P_5(x)| \le \frac{-7,5}{6!} \cdot 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5$$

$f''(x) = \frac{-4x}{\pi} e^{-x^2}$

$f'''(x) = \frac{8x^2}{\pi} e^{-x^2}$

$f^{4)}(x) = \frac{-16x^3}{\pi} e^{-x^2}$

$f^{5)}(x) = \frac{32x^4}{\pi} e^{-x^2}$

$f^{6)}(x) = \frac{-64x^5}{\pi} e^{-x^2}$ Decreciente

$$|y(x) - P_5(x)| \le -3,75 \cdot 10^{-5}$$

Mal derivado. Ojo, es la derivada de un producto.

4/ Aplicación a la Ingeniería Química

x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1,0276	1,1013	1,1801	1,2652	1,3480	1,4120

Perfect.

Para $y = P_1(25)$

$$P_1(x) = 1,1801 \cdot \frac{x-28}{20-28} + 1,2652 \frac{x-20}{28-20} = -0,1475(x-28) + 0,1582(x-20$$

$$P_1(x) = -0,1475x + 4,13 + 0,1582x - 3,164 = 0,0107x + 0,966.$$

$$P_1(25) = 1,2335$$

5/ Aplicación a la Ingeniería Hidráulica

t ... (días)	0	5	15	16	23	30
y (metros)	8,20	11,4	19,9	22,4	25,2	26,8

$P_2(10)$

Fijate bien en los enunciados. Léelos dos veces, para que nunca te pase lo mismo que en este problema: te piden un polinomio de grado 2.

$$P_2(x) = 11,4 \frac{x-15}{5-15} + 19,9 \frac{x-5}{15-5} = -1,14(x-15) + 1,99(x-5)$$

$$P_2(x) = 0,85x + 7,15$$

$$P_2(10) = 15,65 \text{ m}$$

JORGE GARCÍA LENN

Recomendación para el tema: Escribe claramente quién es la función con la cual vas a trabajar. Te evitará muchos problemas y reducirá el número de errores.

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

Para aplicar el método de Newton-Raphson: Has planteado mal el problema: te piden cuándo valdría 1: $f(x) = t^3 - 2t^2 - 1$

$\exists\ g(a)\cdot g(b) < 0$; $g'(x) \neq 0$; $g(x)$ signo constante en $[a,b]$.

Dando valores aislamos una raíz en el intervalo que va desde $t=1$ hasta $t=3$ $[1,3] \Rightarrow$ cumple las tres condiciones anteriores.

$g'(x) = 3t^2 - 4t$

$g''(x) = 6t$

$t_1 = t_0 - \frac{g(t_0)}{g'(t_0)} = 3 - \frac{9}{15} = \boxed{2'400}$

$t_2 = 2'4 - \frac{g(2'4)}{g'(2'4)} = 3 - \frac{2'304}{7'68} = \boxed{2'700}$

Jorge, observa bien estos datos la sucesión $\{x_n\}$ es creciente o decreciente en el método de Newton. No puede dar el salto en t_2.

$t_3 = 2'7 - \frac{g(2'7)}{g'(2'7)} = 2'7 - \frac{5'10300}{1110700} = \boxed{2'23902}$

$t_4 = 2'23902 - \frac{g(2'23902)}{g'(2'23902)} = 2'04205 \rightarrow$ Iteración 4 (1 cifra exacta)

$t_5 = 2'04205 - \frac{g(2'04205)}{g'(2'04205)} = 1'99796 \rightarrow$ Iteración 5

No se puede poner como punto de arranque $t=0$ porque no está contenido dentro del intervalo; $\boxed{g'(x) = 0}$ No $\Rightarrow$ No cumple condiciones de Newton-Raphson

Error Relativo y Iteración 4: $t = 2'04205$ s. error: $0'196975$

Iteración 5: $t = 1'99796$ error: $0'04409$ s.

Sí, pero en realidad, si te fijas bien, no se puede utilizar porque $f'(0) = 0$, y al estar en el denominador, dividiríamos por 0.

16. Aplicación a la Dinámica. Calcula, utilizando el método de la bisección, el coeficiente de rozamiento x necesario para que un paracaidista con una masa 70 kg adquiera una velocidad de $50m/s$, después de una caída libre de $t = 15$ segundos. (Indicación: La aceleración de la gravedad es de $9{,}8m/s^2$, y la ecuación a aproximar es $f(x) = \frac{gm}{x}(1 - e^{-(x/m)t}) - v = 0$)

$g(x) = \frac{70 \cdot 9'8}{x}\left(1 - e^{(-x/70)\cdot 15}\right) - 50$

$g(x) = \frac{686}{x} - \frac{686 e^{\frac{-15x}{70}}}{x} - 50$

$g'(x) = -\frac{686}{x^2} + \left(\frac{\frac{686 \cdot (-15)}{70} \cdot e^{\frac{-15x}{70}} - 686 e^{\frac{-15x}{70}}}{x^2}\right) =$

$= +686\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{\frac{15}{70} e^{\frac{-15x}{70}}}{x^2} + \frac{e^{\frac{-15x}{70}}}{x^2}\right) \neq g'(x) = 0$

$= 686\left(\frac{\frac{85}{70} e^{\frac{-15x}{70}} - 1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow$ ~~as~~ $g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{85}{70} e^{\frac{-15x}{70}} \neq 0$

Luego se puede aplicar todo el intervalo. (excepto en 0)

Es evidente que si $x = 0$ la ecuación no tiene sentido, ~~además si fuera~~

calculando obtenemos que: $g(1) > 0$, $g(13) < 0$ > intervalo $[1, 13]$

i	a_i	c_i	b_i	g_{ant}	g_{cc}	g_{cb}
1	1	7	13	+	+	−
2	7	10	13	+	+	−
3	10	11'5	13	+	+	−
4	11'5	12'25	13	+	+	−
5	12'25	12'625	13	+	+	−
6	12'625	12'8125	13	+	0'4033	−
7	12'8125	12'90625	13		−0'19471	
8	12'8125	12'85938	12'90625		−0'104506	

Error: $\frac{12}{28} = 0'046$

~~error pequeño~~

* Todo el problema no está

"bien" hecho. Hubiese sido + inteligente a hacer la bisección en el intervalo $[12, 13]$. Esto no quiere decir que esté mal, Jorge, sólo que tardes un poco más

. Aproximamos el coeficiente de rozamiento a 12'85938 N/m en lugar de la solución.

JORGE GARCÍA LEIVA

17. Aplicación a la Ingeniería. En un canal abierto de dimensiones constantes y con un área transversal A, bajo condiciones de flujo uniforme se cumple la ecuación de Manning

$$Q = \frac{y_n B}{n}\left(\frac{y_n B}{B + 2y_n}\right)^{2/3} S^{1/2}$$

donde Q es el flujo, y_n es la profundidad normal, B es el ancho del canal, n es un coeficiente de rugosidad y S es la pendiente del canal. La ecuación se usa en ingeniería de fluidos y recursos de agua para determinar la profundidad normal. Si este valor es menor que la profundidad crítica

$$y_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($980 cm/s^2$), entonces el flujo es subcrítico. Usando el método de la bisección, calcula y_n cuando $Q = 14{,}15 m^3/s$, $B = 4{,}572 m$, $n = 0{,}017$ y $S = 0{,}0015$. Determina si el flujo es sub o súper crítico.

Queremos $14'15 = \frac{y_n 4'572}{0'017}\left(\frac{4'572\, y_n}{4'572 + 2y_n}\right)^{2/3} \cdot 0'03873$ Tienes mal la función, Jorge

$y_c = \left(\frac{14'15^2}{4'572^2 \cdot 9'80}\right)^{1/3} = \boxed{0'99241}$ Tenemos que conseguir un intervalo en el que

$f(a) > 14'15$ y $f(b) < 14'15$ o viceversa. Observa que te dicen que $a = 14'15$

Obtenemos que:

$f(1) = 8'17794$
$f(15) = 14'62573$ $\Big\}$ → intervalo $[1, 1'5]$ ¿No sale de signo contrario?

→ Esto nos indica que el flujo es supercrítico ya que es mayor que 0'99241

Cuando bien la función, calcula el intervalo de separación de raíces y después ya opera con los métodos.

18. Aplicación a la Ingeniería Eléctrica. Una corriente oscilatoria en un circuito eléctrico se describe mediante la ecuación $I = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t)$, donde t está dado en segundos. Determínense todos los valores de t tales que $I = 2$.

$2 = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t)$. Aquellos intervalos para los que las $f(a) > 2$ y $f(b) < 2$ o viceversa. Sabemos que el seno, como el seno se repite, $t \in [0,1]$ ~~aplicamos este intervalo con el método de la bisección~~ * $f(0'25) = 7'78 > 2$; como $f(0'5) = 0$ (raíz)

i	a_i	c_i	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
1	0'25	0'375	0'5	>2	>2	<2
2	0'375	0'4375	0'5	>2	>2	<2
3	0'4375	0'46875	0'5		<2	
4	0'4375	0'45313	0'46875			$\frac{\text{Error}}{2^4} = \frac{0'25}{2^4} = 0'01$

↓

Tomamos este valor (error < 0'01)

$t = 0'45313$ s. Como se trata de una función sinusoidal, cada $0'45313$ s, $I = 2$

De tal manera que si queremos determinar (p. ej.) la enésima que $I = 2$; $T_n = 0'45313 \cdot n$

¿Quién es $f(x)$? No olvides escribir la función. En este caso, $f(x) = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t) - 2$.

JORGE GARCÍA
LEMA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

19. Aplicación a la Economía. Una empresa quiere fabricar cuatro productos distintos ayudándose de tres máquinas diferentes, que deberán estar a pleno rendimiento durante 8 horas cada día. El número de horas que cada máquina utiliza en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Es decir, en la producción de una unidad del primer producto la primera máquina se usa una hora; la máquina 2, 2 horas y la máquina 3, 1 hora (para los demás productos, véase la tabla anterior). Hallar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos un día de 8 horas completas. Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

$$\begin{aligned} A+2B+C+2D&=8\\ 2A+0B+C+D&=8\\ A+2B+3C+0D&=8 \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&2&8\\ 2&0&1&1&8\\ 1&2&3&0&8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[3^0-1^0]{2^0-2\cdot 1^0} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&1&2&8\\ 0&-4&-1&-3&8\\ 0&0&2&-2&0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A=4-D}\\ \boxed{B=2-D}\\ \boxed{C=D} \end{array}$$

Dos soluciones 'matemáticas' son imprimitas. Aún así, sólo tiene sentido económico que $D=1$, porque si $D\geq 2$ hay productos que no se producen o que 'salen negativos'.

Solución 'real' { 3 unidades de A / 1 unidad de B / 1 unidad de C / 1 unidad de D.

Has hecho bien las operaciones, pero en el análisis de $C=D$ no dice nada de que el número de piezas no puede ser negativo $\Rightarrow B=2-D$ hace que D sólo pueda ser 0, 1, 2.

Para $D=0$ obtienes la solución $A=4, B=2, C=D=0$

$D=1$ $A=3, B=1, C=D=1$

$D=2$, $A=2, B=0, C=D=2$

23. Aplicación a la Nutrición. Un endocrino esta preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada 100 gr del alimento A contienen 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento B contienen 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento C contienen 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidad de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan? Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

	Proteína	Grasa	Carbohidrato
A	2	3	4
B	3	2	1
C	3	3	2
TOTAL	25	24	21

$2A+3B+3C=25$
$3A+2B+3C=24$
$4A+B+2C=21$
Bien planteado.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$2^o - 3/2\,1^o$, $3^o - 2\cdot 1^o$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right) \quad 3^o \neq 22^o \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$A = 2'14$ → Arreglar el error de B
$B = 4'4$ → Te has equivocado al despejar
$C = 2$

Se necesitan
- 290 g de A
- 440 g de B
- 200 g de C

JORGE
GARCÍA LENA

22. Aplicación a la Industria. Una industria produce dos tipos de plástico: común y especial. Cada tonelada de plástico común necesita 2 horas en la planta A y 5 en la planta B; cada tonelada de plástico especial necesita 2 horas en la planta A y 3 en la planta B. Si la planta A tiene disponibles 8 horas al día y la planta B 15 horas al día, ¿cuántas toneladas de cada tipo de plástico pueden fabricarse diariamente de modo que las plantas operen a toda su capacidad? Resuelve el problema utilizando el método del pivote parcial.

GAUSS

	A	B
común (x)	2	5
Especial (y)	2	3
TOTAL	8	15

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2y=8 \\ 5x+3y=15 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 15 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{2^{\circ}-5/2\,1^{\circ}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Pateta.

$$-2y=-5 \rightarrow y=5/2$$

$$x=\frac{8-2\cdot 5/2}{2}=\frac{3}{2}$$

Se producirán 3/2 de tonelada de plástico común y 5/2 de plástico especial.

21. Aplicación a la Industria. Una refinería de petróleo produce gasolina con y sin plomo. Cada tonelada de gasolina sin plomo requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinado. Por su parte, cada tonelada de gasolina con plomo requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinado. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinado 2, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?

	Mezclado	Refinado
Con plomo (A)	5	4
Sin Plmo (B)	4	2
TOTAL	180	120

Perfecto.

$$\begin{cases} 5A + 4B = 180 \\ 4A + 2B = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} 5A + 4B = 180 \\ -8A - 4B = -240 \end{cases}$$

$$-3A = -60$$

$$\boxed{A = 20}$$

$$B = \frac{180 - 5A}{4} = \frac{180 - 5 \cdot 20}{4} = \frac{20}{=}$$

Se producirán 20 toneladas con plomo y otras 20 sin plomo

JORGE GARCIA LENA .

20. Aplicación a la Química. Para controlar cierta enfermedad de una planta se utilizan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del químico A, 12 unidades del químico B, y 8 unidades del químico C. En el mercado hay tres marcas que se pueden utilizar. Tres litros del producto de la marca X contiene una unidad de A, dos de B y una de C. Tres litros del producto de la marca Y contiene dos unidades de A,una de B y tres de C, y tres litros del producto de la marca Z contiene tres unidades de A, dos de B y una de C. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los químicos requeridas para el control de la enfermedad? Resuelve el problema utilizando una factorización LU. •

Sistema

$x+2y+3z=10$ B

$x+3y+z=8$

$2x+y+z=12$ M

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\\2&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[3ª-2.1ª]{2ª-1.1ª} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&-3&-5\end{pmatrix} \longrightarrow$

Te has equivocado al plantear estas ecuaciones. El sistema

$\xrightarrow{3ª+3\,2ª} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&0&-11\end{pmatrix} = U \qquad L=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&-3&1\end{pmatrix}$

es otro.

$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\8\\12\end{pmatrix} \rightarrow$ $y_1=10$

$y_1+y_2=8 \rightarrow y_2=-2$

$2y_1-3y_2+y_3=12 \rightarrow y_3=-14$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&0&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\\-14\end{pmatrix} \rightarrow$

$x+2y+3z=10 \rightarrow x=56/11$

$y-2z=-2 \rightarrow y=6/11$

$-11z=-14 \rightarrow z=14/11$

Solución:

necesitamos
- 1'27 l de A
- 1'63 l de B
- 3'82 l de C

JORGE GARCIA
LENA

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

26. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante el resto del día. A mediodía, una máquina quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante en términos de cantidad de nieve retirada en una hora. La máquina limpió dos kilómetros hasta las dos de la tarde y un kilómetro más hasta las cuatro de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?

$V = \frac{C_1}{h}$, $h = C_2 \cdot t$ $\rightarrow$ $V = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow V = K \cdot \frac{1}{t}$

$\frac{de}{dt} = \frac{K}{t} \Rightarrow \int de = \int \frac{K}{t} \cdot dt$

$\boxed{e = K \cdot \log(t) + A}$ $\rightarrow$ espacio limpiado acumulado

Construimos un sistema de ecuaciones:

$t = 12h \rightarrow e = 0 \rightarrow 0 = K \cdot \log(x+0) + A$

$t = 14h \rightarrow e = 2 \rightarrow 2 = K + \log(x+2) + A$

$t = 16h \rightarrow e = 3 \rightarrow 3 = K + \log(x+4) + A$

$\Rightarrow 2 = K \log\left(\frac{x+2}{x}\right)$, $3 = K \cdot \log\left(\frac{x+4}{x}\right)$

$\frac{2 \cdot 3}{K} = \log\left(\frac{x+2}{x}\right)^3$ $\qquad$ $\log\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \log\left(\frac{x+4}{x}\right)^2 \Rightarrow$

$\frac{3 \cdot 2}{K} = \log\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ $\qquad$ $\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ Perfecto.

$(x+2)^3 = x(x+4)^2 \Rightarrow$

$x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 8 = x^3 + 8x^2 + 16x$

$2x^2 + 4x - 8 = 0$

$x^2 + 2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$

$1'23h = 74$ min $\Rightarrow$ Comenzó a nevar a las $\boxed{10'46h}$

$\ominus \rightarrow$ sin sentido

JORGE
GARCÍA LEMA

27. Se sabe que cuando se perfora un tanque a presión, dicha presión disminuye a una velocidad directamente proporcional a la diferencia de presiones entre la del tanque y la exterior en dicho instante. Si la presión inicialmente era P_0 y al cabo de 5 minutos había caído un 10 %, ¿cuánto tiempo pasará hasta que caiga al 50 %?

$\frac{dP}{dt} + aP = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -aP \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = \int -a\,dt \Rightarrow$

$\ln P = -at + C \Rightarrow P = Ke^{-at}$

$t = 10\ \text{min} \Rightarrow 0'9P_0 = P_0 e^{-a \cdot 10}$

Te has equivocado en el tiempo: son 5 minutos, no 10. El resto lo has hecho bien.

$\ln 0'9 = -a \cdot 10 \Rightarrow a = 0'0105\ \text{min}^{-1}$

$0'5P_0 = P_0 e^{-a \cdot t}$

$\ln 0'5 = -0'0105 \cdot t \Rightarrow t = \frac{\ln 0'5}{-0'0105} = 66'01\ \text{min}$ pasarán hasta que caiga al 50 %.

28. En un depósito de agua de forma cilíndrica de radio R, se hace un agujero a $0{,}5m$ del fondo. Se sabe que la velocidad a la que sale el agua es directamente proporcional a la presión del agua a la altura del agujero. La altura del agua inicialmente es de $3m$ y después de una hora descendió $0{,}5m$. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar hasta que deje de salir agua?

Tomando $V_{inicial}$ y $V_{ya\ salió}$; sabemos que la salida es directamente proporcional a la p $\Rightarrow$ la p es direct. proporcional al Volumen que queda encima

$$\frac{dV(t)}{dt} = K(V_{queda}) = K(V_{inicial} - V_{ya\ salió}).$$

$$\int \frac{dV(t)}{V_{inicial} - V_{ya\ salió}(t)} = \int K\,dt$$

Algo falla, Jorge. Fíjate bien: en ningún sitio utilizas que el depósito tenga forma cilíndrica.

$$-\log(V_{inicial} - V(t)) = K \cdot t + C \Rightarrow$$

Además, lee de nuevo el enunciado: No te dicen que la variación del volumen sea proporcional

$$V_{inicial} - V(t) = \lambda e^{-K \cdot t}$$

Como cuando deja de salir agua $V_{inicial} = V_{ya\ salió}$

$$0 = \lambda e^{-K \cdot t} \Rightarrow \boxed{t = \infty}$$

al volumen sino a la presión del agua a la altura del agujero.

Es decir, depende de la altura.

¿Intentas hacerlo de nuevo?

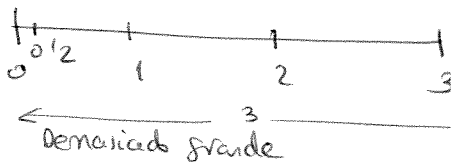
EJERCICIOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS: INTERPOLACIÓN

Manuel González Fuente
1º Biotecnología

① $f(t) = 9'5 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t)$

$x \to t$
$f(x) = y \to P(t)$ } (A veces, los he usado indistintamente sin querer)

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}
0	9'5	-12'428747	5'924793	-0'725657
1	$9'5 \cdot e^{-0'3} \cdot \cos(2) = -2'928747$	-0'479162	3'79782	—
2	-3'407909	7'116482	—	—
3	3'708573	—	—	—



Manuel, fíjate que tienes que calcular una aproximación de $f(0'2)$. Lo normal es utilizar un intervalo "pequeño" que contenga a dicho valor, para que el error sea menor, por ejemplo el $[0, 1]$

$P_3(x) = 9'5 \quad 12'428747\,x + 5'924793\,x(x-1) - 0'725657\,x(x-1)(x-2)$

$P_3(x) = 9'5 + x\left(12'428747 + (x-1)\left(5'924793 - 0'2256(x-2)\right)\right)$ En mi caso, he usado el $[0, 1$

$P_3(0'2) = 9'5 + 0'2\left(12'428747 - 0'8\left(5'924793 - 0'2256(-1'8)\right)\right) = 10'832793$

Error absoluto $= |8'240514 - 10'832793| = 2'592279$

Error de interpolación:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}(x)\cdot(x-1)(x-2)(x-3) \quad \checkmark$$

$f(x) = 9'5 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t)$

$f'(x) = -2'85 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) - 19 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t)$

$f''(x) = 0'855\, e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) + 5'7 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t) + 5'7 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t) - 38 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t)$

$f''(x) = -37'145 e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) + 11'4 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t)$

$f'''(x) = 11'1435 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) + 74'29 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t) - 3'42 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t) + 22'8 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t)$

$f'''(x) = 33'9435 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) + 70'87 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t)$

$f^{IV}(x) = -10'18305 e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) - 67'887 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t) - 21'261\, e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t) + 141'74 \cdot e^{-0'3t} \cos(2t)$

$f^{IV}(x) = 131'557 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) - 89'148 \cdot e^{-0'3t} \cdot \operatorname{sen}(2t)$ ✓

$$f(x) - P(x) = \frac{131 \cdot e^{-0'3\xi} \cdot \cos(2\xi) - 89'148\, e^{-0'3\xi} \cdot \operatorname{sen}(2\xi)}{24}(x)(x-1)(x-2)(x-3)$$

Cota:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{131 \cdot e^{-0} \cdot 1 - 89'148 \cdot e^{-0} \cdot 1}{24} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 131'757$$

(cuando $x = 3$? cuando $x = 3$; cuando $x = 0$ ↓ cuando $x = 0$)

¿Muy grande? ⇒ Lee lo de arriba.

(2) $v(t) = 2.200 \cdot \ln\left(\frac{160.000}{160.000 - 2680t}\right) - 9'81\ t$

Te para lo mismo que antes, el intervalo es demasiado grande.

x_i	Y_i	Y_{ij}	Y_{ijk}
5	143'375	32'3668	0'4475
10	305'209	36'842	
15	489'42		

$P_2(t) = 143'375 + 32'3668(x-5) + 0'4475(x-5)(x-10)$

$\boxed{P_2(t) = 143'375 + (x-5)\left(32'3668 + 0'4475(x-10)\right)}$

$\boxed{P_2(11) = 340'2608}$

Error absoluto: $|340'1142 - 340'2608| = \boxed{0'1466}$

$f(t) = 2.200 \cdot \ln\left(\frac{160.000}{160.000 - 2680t}\right) - 9'81\ t = 2.200\left(\ln(160000) - \ln(160000 - 2680t)\right) - 9'81t$

$f(t) = 26362'444 - 2200 \cdot \ln(160000 - 2680t) - 9'81t$

$f'(t) = \frac{+2200 \cdot 2680}{160.000 - 2680t} - 9'81 = \frac{5896000}{160000 - 2680t} - 9'81$

El procedimiento está bien, aunque hay algún fallo en los numeradores.

$f''(t) = \frac{+589600 \cdot 2680}{(160.000 - 2680t)^2} = \frac{1580128000}{(160.000 - 2680t)^2}$

$f'''(t) = \frac{+8'469488608 \cdot 10^{13}}{(160.000 - 2680t)^3}$

Error de interpolación $\boxed{f(x) - P(x) = \frac{8'4695 \cdot 10^{13}}{\frac{(160.000 - 2680(\xi))^3}{3!}}(x-5)(x-10)(x-15)}$

↳ Es ascendente en $[5, 15]$

Cota

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{0'04926}{3!} \cdot |10| \cdot |5| \cdot |10| = \boxed{4'105}$

↓ cuando $x = 15$; ↘ cuando $x = 15$; → cuando $x = 5$

③ $y(x) = P(0<x<x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$

X	1	1'1	1'2	1'3	1'4	1'5
Y	0'8427	0'8802	0'9103	0'9340	0'9523	0'9661

X_i	Y_i	Y_{ij} =	Y_{ijk}	Y_{ijkl}	Y_{ijklm}	Y_{ijklmn}
1	0'8427	0'325	-0'37	0'167	0'415	-1'245
1'1	0'8802	0'301	-0'32	0'333	-0'457	—
1'2	0'91103	0'232	-0'27	0'1J	—	—
1'3	0'9340	0'183	-0'223	—	—	—
1'4	0'9523	0'138	—	—	—	—
1'5	0'9661	—	—	—	—	—

Te has equivocado. Es un error mayor.

$$P_5(x) = 0'8427 + 0'325(x-1) - 0'32(x-1)(x-1'1) + 0'162(x-1)(x-1'1)(x-1'2) + 0'415(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3) - 1'245(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3)(x-1'4)$$

$$P_5(x) = 0'8427 + (x-1)\left[0'325 + (x-1'1)\left[-0'37 + (x-1'2)\left[0'162 + (x-1'3)\left[0'415 - 1'245(x-1'4)\right]\right]\right]\right]$$

$$P_5(1'32) = 0'939052$$

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt = \text{¿?}$$

Cota: $\dfrac{\left(\frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt\right)^{VI}}{6!}$ ← Recuerda el teorema fundamental del cálculo integral. $y'(x) = \frac{2}{\pi} e^{-x^2}$

$(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3)(x-1'4)(x-1'5)$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(algo)}{720} \cdot 0'5 \cdot 0'4 \cdot 0'3 \cdot 0'3 \cdot 0'4 \cdot 0'5$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \text{"algo"} \cdot 2'592$$

A partir de y', puedes calcular la derivada sin problema.

④

X	4	12	20	28	38	45
Y	1'0276	1'1013	1'1801	1'2652	1'3480	1'4120

$$P_5(x) \Rightarrow 1'0276 \cdot \frac{(x-12)(x-20)(x-28)(x-38)(x-45)}{(4-12)(4-20)(4-28)(4-38)(4-45)} + \dots$$

Al final queda: $1'24294 \cdot 10^{-2} (3'55336 + x)(2359'63 - 91'4622x + x^2)(485'663 - 27'7577x + x^2)$

(mathematica)

$P_5(25) = 1'29046$

⑤

t (días)	0	5	15	16	23	30
Y (m)	8'20	11'4	19'9	22'4	25'2	26'8

$$P_5(x) \Rightarrow 8'20 \frac{(x-5)(x-15)(x-16)(x-23)(x-30)}{(-5)(-15)(-16)(-23)(-30)} + \dots$$

Al final queda: $0'00016413 (0'853588 + x)(627'48 - 57'2132x + x^2)(65'3933 - 16.9626x + x^2)$

Mal hechos

(Pedían de grado 1 y 2)

Repetidos

④

X	20	28
Y	1'1801	1'2652

Ojo con el signo.

$$P_1(x) = 1'1801 \frac{(x-28)}{-8} + 1'2652 \frac{(x-20)}{8} = -0'1475(x-28) + 0'15815(x-20) =$$

$$-0'1475x + 4'13 + 0'15815x - 3'163 = 0'01065x + 0'967 = P_1(x)$$

$P_1(25) = 1'23325$

⑤

X	0	5	15
Y	8'20	11'4	19'9

Te pasa lo mismo con los intervalos. Debes tomar el menor intervalo que contenga al valor que quieres aproximar: [5, 16). La longitud es 11. La del intervalo que has tomado es 15.

$$P_2(x) = 8'20 \cdot \frac{(x-5)(x-15)}{25} + 11'4 \frac{(x-15) \cdot x}{-50} + 19'9 \frac{(x-5)x}{150}$$

$$P_2(x) = 0'1093(x^2 - 20x + 75) - 0'228(x^2 - 15x) + 0'1327(x^2 - 5x) =$$

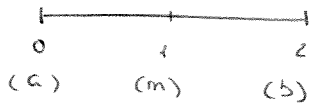
$$P_2(x) = 0'1093x^2 - 2'187x + 8'2 - 0'228x^2 + 3'42x + 0'1327x^2 - 0'663x =$$

$P_2(x) = 0'014x^2 + 0'52x + 8'2$

$P_2(16) = 15'3$ m

EJERCICIOS DE MÉTODOS - INTEGRACIÓN NUMÉRICA

(10) $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$



Simpson $\frac{1}{3}$: $\int_0^2 v(t)\,dt \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(m) + f(b)\right) = \frac{1}{3}\left(0 + 4(0'67801) + 1'1900\right) =$

$\int_0^2 v(t)\,dt \simeq \boxed{1'300687\ m}$ ✓

Error absoluto: $|1'300221 - 1'300687| = \boxed{4'66 \cdot 10^{-4}}$ ✓

Error: $\frac{-(b-a)^5}{2.880} \cdot v^{IV}(\eta) = \frac{-(2^5)}{2880} \cdot v^{IV}(\eta)$

$v(t) = (1-\cos(t))^{1/2}$

$v'(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(t))^{-1/2} \cdot \operatorname{sen}(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{2(1-\cos(t))^{1/2}}$

$v''(t) = -\frac{1}{4}(1-\cos(t))^{-3/2} \cdot \operatorname{sen}^2(t) + \frac{1}{2}(1-\cos(t))^{-1/2} \cdot \cos(t)$

$v'''(t) = \frac{3}{8}(1-\cos(t))^{-5/2} \cdot \operatorname{sen}^3(t) - \frac{1}{2}(1-\cos(t))^{-3/8} \cdot \operatorname{sen}(t)\cdot\cos(t) - \frac{1}{4}(1-\cos(t))^{-3/2} \cdot \operatorname{sen}(t)\cdot\cos$

$+ \frac{1}{2}(1-\cos(t))^{-1/2} \cdot \operatorname{sen}($

$v'''(t) = \frac{3}{8}(1-\cos(t))^{-5/2} \cdot \operatorname{sen}^3(t) - \frac{3}{4}(1-\cos(t))^{-3/2} \cdot \operatorname{sen}(t)\cdot\cos(t) + \frac{1}{2}(1-\cos(t))^{-1/2} \cdot \operatorname{sen}(t)$

$v^{IV}(t) = (\text{por mathematica}) = -\frac{\cos(t)}{2\sqrt{1-\cos(t)}} - \frac{3\cdot\cos^2(t)}{4\cdot(1-\cos(t))^{3/2}} + \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{(1-\cos(t))^{3/2}} + \frac{9\cdot\cos(t)\cdot\operatorname{sen}^2(t)}{4(1-\cos(t))^{5/2}} - \frac{15\cdot\operatorname{sen}^4(t)}{16(1-\cos(t))^{7/2}}$

$\cos(t) \to 1$; $3\cdot\cos^2(t) \to 3$; $\operatorname{sen}^2(t) \to 1$; $9\cdot\cos(t)\cdot\operatorname{sen}^2(t) \to 9$; $\operatorname{sen}^4(t) \to 15$

$\sqrt{1-\cos(t)} \to 0$; $(1-\cos(t))^{3/2} \to 0$; $(1-\cos(t))^{3/2} \to 0$; $(1-\cos(t))^{5/2} \to 0$; $(1-\cos(t))^{7/2} \to 0$

cota: $-0011 \cdot V^{IV}$

V^{IV}

⇓

¿¿ Todos los cocientes dan cero ??

Hay que evitar el 0.

④ $y = 4x \cdot tg(x) + 2$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f(0'5) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(2 + 12'37042 + 8'229631\right) =$$

$$\boxed{3'76666}$$

$$\int_0^1 4x \cdot tg(x) + 2\,dx = \underbrace{\int_0^1 4x \cdot tg(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_0^1 2\,dx}_{2x\Big]_0^1}$$

$$I = \int_0^1 4x \cdot tg(x)\,dx \longrightarrow$$ ¿¿Cómo hallar el valor exacto ??

(sin mathematica)

$4x = u \qquad du = dx$

$tg(x)\,dx = dv \qquad v = -\ln(\cos(x))$

$$\int \tan(x)$$

No se puede. Es un ejemplo de integral que sólo podemos resolver numéricamente.

(12) $f(x) = \dfrac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$

n=0) $\int_1^2 f(x)\,dx \simeq (2-1)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{15}{(\sqrt{3/2}+1)^5} = \boxed{0'275226}$ ✓ Perfect.

n=1) $\int_1^2 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\left[f\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}}_{1'211324865}\right) + f\left(\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}}_{1'788675135}\right)\right] = \boxed{0'276266}$ ✓

$0'296172044$ $\quad$ $0'256361992$

(13)

Hora	0	2	3	6	9	11	14	17	18	19	20	24
Coches/min	3	3	5	4	5	6	2	1	1	3	4	6

T ① $\quad$ T ② $\quad$ S 1/3 ③ $\quad$ T ④ $\quad$ S 1/3 ⑤ $\quad$ S 3/6 ⑥ $\quad$ T ⑦

① $\int_0^2 f(x)\,dx \simeq 6$ ← Bien.

② $\int_2^3 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\cdot(8) = 4$ ← Bien

Total = 6 + 4 + 26 + 11 + 15 + 6'375 + 20 = 88'375 ↓ 11 del coches

③ $\int_3^9 f(x)\,dx \simeq 5+16+5 = 26$ ← Has olvidado multiplicar por $\frac{b-a}{6}$

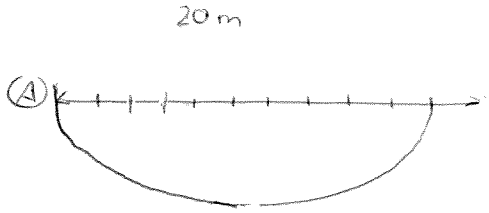
④ $\int_9^{11} f(x)\,dx \simeq 11$ ← Bien

⑤ $\int_{11}^{17} f(x)\,dx \simeq 6+8+1 = 15$ ✓

⑥ $\int_{17}^{20} f(x)\,dx \simeq \frac{3}{8}(1+3+9+4) = 6'375$ ✓

⑦ $\int_{20}^{24} f(x)\,dx \simeq 2(4+6) = 20$ ✓

(14)



Metros sobre punto A	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Profundidad	0	1'8	2	4	4	6	4	3'4	3'6	2'8	0

Simpson $\frac{1}{3}$ compuesto

$$\int_0^{20} f(x)\,dx \simeq \frac{20}{30}\left(0 + 4(1'8 + 4 + 6 + 3'4 + 2'8) + 2(2 + 4 + 4 + 3'6) + 0\right) = \boxed{66'1333\ m^2}$$

✓

Trapecio compuesto

$$\int_0^{20} f(x)\,dx \simeq \left(0 + 2(1'8 + 2 + 4 + 4 + 6 + 4 + 3'4 + 3'6 + 2'8) + 0\right) = \boxed{63'2\ m^2}$$

ANA KROTENBERG GARCÍA

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

$f(t) = 9'5e^{-0'3t}\cos(2t) \longrightarrow f(0'2) = 8'240514.$

→ Como nos dice de grado 3, entonces $n=3$, debemos hallar x_0, x_1, x_2, x_3, los valores más fáciles que tengamos cerca (Not Newton).

(0, 1, −1, 2)

Tomar un intervalo demasiado grande para aproximar $f(0'2)$

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}
$x_0 = -1$	$-5'336524 = y_0$	$y_{01} = \frac{9'5 + 5'336524}{1} = 14'836524$	$y_{012} = \frac{-27'265271 - 13'6326355}{2}$
$x_1 = 0$	$9'5 = y_1$	$y_{12} = -12'428747$	$y_{123} = 5'974792$
$x_2 = 1$	$-2'928747 = y_2$	$y_{23} = \frac{-3'407909 + 2'928742}{1} = 0'479162$	
$x_3 = 2$	$-3'407909 = y_3$		

Hacer esquema

$y_{ijkl} \rightarrow y_{0123} = \frac{5'974792 + 13'6326355}{3} = 6'535821$

$-5'336524 + 14'836524(x+1)) + 13'6326355(x-1)(x) \;) + 6'535821 \times (x-1)(x+$

Para $x = 0'2$ →

$-5'336524 + 17'8038 - 2'18122168 - 1'25488 = 9'03118$

Error absoluto $= |8'240514 - 9'03118| = 0'79066$

Error interpolación:

$$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(\dots)(x-x_n)$$

$$\frac{f^{IIII}(\xi)}{4!}(x+1)(x)(x-1)(x-2) \Rightarrow \frac{112'604\xi\cos(2\xi) + 225'209\cdot\operatorname{sen}(2\xi)}{4!}(x+1)(x-1)(x-$$

Cota interpolación: (intervalo $-1, 2$)

$$\frac{112'604(2)\cos(2\cdot 2) 225'209\cdot\operatorname{sen}(2\cdot 2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \cdot 2$$

↓ Matemática

$9'85891$

$\underbrace{2}_{3}+\underbrace{1}_{2}\underbrace{|2|1-1-1|}_{2}+\underbrace{1-2|}_{3} = 324'92$

ANA KROTENBERG GARCÍA

2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

$V(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9'81t$ $\quad V(11) = 340'1142$.

Como un pide grado 2 $\longrightarrow$ $n=2$ (x_0, x_1, x_2).

Necesitaré 3 valores de la función para crear el polinomio

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}
$x_0=0$	$y_0 = 0$	$y_{01} = \frac{27'3513-0}{1} = 27'3513$	$y_{012} = \frac{27'849-27'3513}{1'5} = 0'3318$
$x_1=1$	$y_1 = 27'3513$	$y_{12} = \frac{41'2758-27'3513}{1'5-1} = 27'849$	
$x_2=1'5$	$y_2 = 41'2758$		

No puedo considerar el intervalo $[0, 1'5]$ para calcular una aproximación de $V(11)$

Polinomio $= 0 + 27'3513(x) + 0'3318(x-1)x$

Para $x=11$ $\quad 300'8643 + 3'318 \cdot 10 = 337'3623$

Tiene que utilizar un intervalo que contenga al 11. Recuerda que estamos interpolando.

- Error absoluto $= |340'1142 - 337'3623| = 3'502$
  $|S(11) - P(11)|$
- Error Interpolación $= \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$

$\frac{f'''(\xi)}{3!}$ Bien $(x)(x-1)(x-1'5)$

$f(x) = 2200 \log\left(\frac{160000}{1600-2680t}\right) - 9'81t$

$f'(x) = -9'81 + \frac{3896000}{160000-2680x}$

$f''(x) = \frac{15801280000}{(160000-2680x)^2}$ Bien

$f'''(x) = \frac{84694860800000}{(160000-2680x)^3}$

Error interpolación $= \frac{\frac{84694860800000}{(160000-2680\xi)^3}}{3!}(x)(x-1)(x-1'5)$ $\rightarrow$ fuera calculadora de Wolfram $\rightarrow 0'00372$

Cota $\rightarrow$ Intervalo $(0, 1'5)$

$\frac{\left|\frac{84694860800000}{(160000-2680\xi)^3}\right|}{6} |1'5||-1||-1'5| = 8'37 \cdot 10^{-3}$ $\quad 0'00372$

ANA KROTENBERG GARCÍA

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7.

Fórmulas de 3 puntos:

• Progresiva:

$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$ ✓

→ Para 0 ⇒ Da 4. $f'(0) = 4$

① ② Para 3 $f'(3) = 53$

• Centrada:

$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$

→ Para 0 NO se puede ✓

Para 3 ③

NO con el 7

Te falta calcular los valores.

• Regresiva

$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)]$

→ Para 0 NO se puede ✓

con el 3 ①

con el 7 ⑤

Fórmula de 5 puntos:

• Progresiva:

$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$ ✓

→ Para 0 ⑥ Da $-\frac{51}{12}$

para 3 ⑦ $f'(3) = \frac{50\frac{4}{5}}{12}$

• Centrada

$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$

→ Para 0 NO ✓

- Para 3 ⑧

→ Para 7 NO.

• Regresiva

$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[3f(x_0-4h) - 16f(x_0-3h) + 36f(x_0-2h) - 48f(x_0-h) + 25f(x_0)]$

→ Para 0 NO ✓

7 → DERIV NUMÉRICAS h=1 ANA KROTENBERG GARCÍA

a) $g'(0) = \frac{1}{2 \cdot 1}[-3(35) + 4(52) - 95] = 4$

b) $g'(3) = \frac{1}{2}[-3(140) + 4(148) - 266] = 53$

c) $g'(3) = \frac{1}{2}[-(95) + (148)] = 51'5$

d) $g'(3) = \frac{1}{2}[52 - 4(95) + 3(140)] = 46$

e) $g'(7) = \frac{1}{2}[266 - 4(342) + 3(465) = 146'5$ ✓ ¡Lo tenía aquí!

f) $g'(0) = \frac{1}{12}[-25(35) + 48(52) - 36(95) + 16(140) - 3(148)] = +14'75$

g) $g'(3) = \frac{1}{12}[-25(140) + 48(148) - 36(266) + 16(342) - 3(465)] = 42'08$

h) $g'(3) = \frac{1}{12}[52 - 8(95) + 8(148) - 266)] = 50'83$

i) $g'(7) = \frac{1}{12}[25(465) - 48(342) + 36(266) - 16(148) + 3(140)] = 169'75$

ANA KROSTENDORG GARCÍA

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos:

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

En todos ellos podemos calcular la derivada con la fórmula centrada, que es la más exacta. Para todos ellos emplearemos la fórmula de 3 puntos:

°Derivada centrada de 3 puntos:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)] \qquad h=2$$

$$f'(2) = \frac{1}{2\cdot 2}[-500 + 1500] = 250 \qquad \text{Perfect.}$$

$$f'(8) = \frac{1}{4}[-2000 + 3000] = 250$$

$$f'(10) = \frac{1}{4}[-2500 + 3500] = 250$$

INTERPOLACIÓN

Alumno : Miguel Quijada Álamo

Curso : 1º Biotecnología

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

Tenemos la función: $f(t) = 9{,}5 \cdot e^{-0{,}3t} \cdot \cos(2t)$

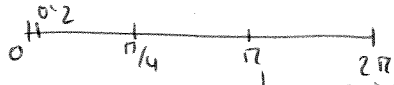
Calculamos el polinomio de interpolación por el método de Newton:

t_i	$f(t_i)$	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}
0	9,5	$y_{01} = -12{,}0958$	$y_{012} = 4{,}3503$	$y_{0123} = -7{,}4880$
$\pi/4$	0	$y_{12} = 1{,}5711$	$y_{123} = -0{,}4167$	
π	3,7018	$y_{23} = -0{,}7192$		
2π	1,4424			

$$P_3(t) = 9{,}5 - 12{,}0958 \cdot t + 4{,}3503 \cdot t\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 7{,}4880\, t\left(t - \frac{\pi}{4}\right)(t - \pi)$$

$f(0{,}2) \simeq 3{,}9926$

Consideramos un intervalo demasiado grande para aproximar $f(0{,}2)$



→ Error absoluto. $E_a = |V_{exacto} - V_{aprox}| = |8{,}240514 - 3{,}9926| = 4{,}247914$

→ Cota del error.

No olvides este factor ↓

$$|f(0{,}2) - P(0{,}2)| = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,|t|\,\left|t - \frac{\pi}{4}\right|\,|t - \pi|\,|t - 2\pi|$$

Tenemos que $f^{(4)}(x) = e^{-0{,}3t}\left(131{,}557 \cdot \cos(2t) - 17{,}296 \cdot \operatorname{sen}(t) \cdot \cos(t)\right)$

$|f(0{,}2) - P(0{,}2)| \leq d?$

Tienes que calcular una cota de la derivada cuarta.

2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

Tenemos la ecuación: $v(t) = 2200 \cdot \log\left(\frac{160000}{160000 - 2680t}\right) - 9{,}81 \cdot t$

→ Calculamos el polinomio de interpolación por el método de Newton:

t_i	$f(t_i)$	y_{ij}	y_{ijk}
8	238,0348	$y_{01} = 33{,}5869$	$y_{012} = 0{,}4457$
10	305,2085	$y_{12} = 35{,}3695$	
12	375,9475		

$$P_2(t) = 238{,}0348 + 33{,}5869(t-8) + 0{,}4457(t-10)(t-8)$$

$$\boxed{P_2(11) \simeq 340{,}1326}$$

→ Error absoluto: $E_a = |V_{exacto} - V_{aprox}| = |340{,}1142 - 339{,}2412| = 0{,}873$

→ Cota del error: $f^{(3)} = -\frac{1323357200}{(67x-4000)^3}$

$$|f(11) - P(11)| \leq \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} |t-8| \cdot |t-10| \, |t-12|.$$

¡Cuidado! Es la segunda vez que cometes este error.

No olvides que en la fórmula del error hay que poner todos los factores:

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$. Recuérdalo, Miguel.

↑ hasta el último.

3. Aplicación a las Probabilidades. En la siguiente tabla se contemplan algunos valores de la probabilidad: $y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\Pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661

Por medio de interpolación de Newton, aproxima el valor para $y(1{,}32)$. Calcula una cota del error cometido.

Como no nos dicen el grado del polinomio que tenemos que calcular, obtendremos un polinomio, por ejemplo, de grado 2: No, tienes que usar todos los valores

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}
1,2	0,9103	$y_{01} = 0{,}237$	$y_{012} = -0{,}27$
1,3	0,9340	$y_{12} = 0{,}183$	
1,4	0,9523		

✓

$$P_2(x) = 0{,}9103 + 0{,}237(x-1{,}2) - 0{,}27(x-1{,}2)(x-1{,}3)$$

$$\boxed{P_2(1{,}32) \simeq 0{,}9413}$$

→ Cota del error cometido.

¡Perfecto!

Tenemos que $f'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot e^{-x^2}$ (T. fund. Cálculo: $f(x) = \int_a^x g(t)dt \Rightarrow f'(x) = g(x)$)

Por lo que nuestra cota del error será: ¿Por qué no calculas la derivada tercera?

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{f'''(\xi)}{3!} |x-1{,}2||x-1{,}3||x-1{,}4|$$

¡Ahora sí!

Te falta calcular la cota.

4. Aplicación a la Ingeniería Química. La densidad del carbonato de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración. En un experimento para determinar la densidad del carbonato, se consideró la temperatura constante y se varió la concentración, obteniendo la tabla:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1.0276	1.1013	1.1801	1.2652	1.3480	1.4120
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno y aproxima el valor de la densidad del carbonato de potasio en solución acuosa para una concentración de 25 %.

→ Calculamos el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 1:

$$P_1(x) = y_2 \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + y_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = 1,1801 \frac{x-28}{-8} + 1,2652 \frac{x-20}{8}$$

Aproximamos el valor de la densidad para el 25% de carbonato: Perfecto

$$\boxed{P(25\%)} = 1,1801 \frac{25-28}{-8} + 1,2652 \frac{25-20}{8} = \boxed{1,2333} \checkmark$$

5. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En época de lluvias, en una presa se toman seis medidas del nivel del agua durante un mes, obteniéndose los siguientes datos:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
t (días)	0	5	15	16	23	30
y (~~densidad~~ metros)	8.20	11.4	19.9	22.4	25.2	26.8
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

El tiempo se mide en días y el nivel del agua en metros. Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, y aproxima el valor del nivel del agua al décimo día del mes.

→ Calculamos el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2:

$$P_2(t) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2(t) = 8{,}20 \cdot \frac{(x-5)(x-15)}{(-5)(-15)} + 11{,}4 \frac{(x-0)(x-15)}{5\cdot(-10)} + 19{,}9 \frac{x(x-5)}{15\cdot 10}$$

→ Ahora calculamos el valor aproximado del nivel del agua al décimo día.

$$P_2(10) \simeq 12{,}5667 \text{ m}.$$

El ejercicio está bien, pero el mejor que utilices el intervalo de menor longitud que contiene al 10. Has elegido el $[0, 15) \longrightarrow$ longitud 15

El intervalo $[5, 16] \longrightarrow$ longitud 11

DERIVACIÓN NUMÉRICA

Alumno: Miguel Quijada Álamo.

Curso: 1º Biotecnología.

6. Aplicación a la Electricidad. La carga en un circuito eléctrico con respecto al tiempo viene dado por:

t	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010
q	2.5	2.5523	2.6087	2.6682	2.7299	2.7931

donde t, es el tiempo en segundos y q la carga en culombios. Se sabe que la corriente instantánea es igual a la derivada de la carga en ese instante; ¿cuál es la fórmula de derivación lineal progresiva? Calcula el valor de la derivada con $h = 0{,}002$.

Calcularemos el valor de la derivada a $t=0$ (como no especifican el tiempo en el que hay que calcular la corriente instantánea, supongo que será a ese tiempo). Nos piden utilizar la fórmula de derivación lineal progresiva, por lo que utilizaremos las fórmulas de dos puntos, 3 puntos y 5 puntos:

→ Progresiva 2 puntos: $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{f(0{,}002) - f(0)}{0{,}002} = 26{,}15$

→ Progresiva 3 puntos: $f'(x_0) = \dfrac{1}{2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] =$

$= \dfrac{1}{2\,0{,}002}\cdot\left[-3\cdot f(0) + 4f(0{,}002) - f(0{,}004)\right] = 25{,}125$

→ Progresiva 5 puntos: $f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + \right.$

$\left. + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)\right] = \dfrac{1}{12\cdot 0{,}002}\cdot\left[-25\cdot f(0) + 48f(0{,}002) - 36\cdot f(0{,}004)\right.$

$\left. + 16\cdot f(0{,}006) - 3\cdot f(0{,}008)\right] = 24{,}9458$

* De las tres fórmulas utilizadas la más exacta es la de cinco puntos, por lo que será en esta aproximación en la que hemos cometido el menor error con respecto al valor real de la derivada.

No, Miguel, el enunciado te pide el cálculo con la fórmula lineal. ¿Te das cuenta? Es decir, tienes que calcular $f(0)$, $f(0'002)$, ... $f(0'010)$ usando la fórmula progresiva de dos puntos, excepto en el último, en el cual usarás la regresiva

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7.

Fórmulas de 3 puntos.

- Progresiva: $\frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$
- Regresiva: $\frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)]$
- Centrada: $\frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$

Fórmulas de 5 puntos.

- Progresiva: $\frac{1}{12h}[-25\cdot f(x_0) + 48\cdot f(x_0+h) - 36\cdot f(x_0+2h) + 16 f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$
- Regresiva: igual que la progresiva, cambiando "h" por "-h".
- Centrada: $\frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$

→ Valor de la derivada en "0":

- Progresiva 2 puntos: $f'(0) = \frac{f(1)-f(0)}{1} = 17$ No te piden este cálculo.
- Progresiva 3 puntos: $f'(0) = \frac{1}{2\cdot 1}[-3\cdot f(0) + 4\cdot f(1) - f(2)] = 4$ ✓
- Progresiva 5 puntos: $f'(0) = \frac{1}{12\cdot 1}[-25\cdot f(0) + 48\cdot f(1) - 36\cdot f(2) + 16\cdot f(3) - 3\cdot f(4)] = -12{,}75$ ✓

→ Valor de la derivada en "3": se pueden utilizar las siguientes fórmulas: progresiva y regresiva de 2 puntos, progresiva, regresiva y centrada de 3 puntos, progresiva de 5 puntos y centrada de 5 puntos. No

→ Valor de la derivada en "7": se pueden utilizar las siguientes fórmulas: regresivas de 2, 3 y 5 puntos. No.

Te faltan los cálculos.

8. Aplicación a la Física. Se cronometra un móvil de prueba, que se traslada por una vía recta, en algunos puntos. Los datos de las observaciones están recogidos en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos y la distancia en metros. Utilizando las fórmulas más precisas de tres puntos, calcula la velocidad aproximada en cada punto de la tabla.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	2	3	6	7	9

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos:

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

La aceleración angular a la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo.

→ Para $t = 2$: fórmula centrada de 3 puntos:

$$f'(2) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h) + f(x_0+h)\right] = \frac{1}{2\cdot 2}\cdot\left[-f(0) + f(4)\right] = 250$$

→ Para $t = 8$: fórmula centrada de 5 puntos:

$$f'(8) = \frac{1}{12\cdot 2}\cdot\left[f(4) - 8\cdot f(6) + 8\cdot f(10) - f(12)\right] = 250$$

→ Para $t = 10$: • fórmula regresiva de 5 puntos: Perfecto

$$f'(x_0) = \frac{1}{12\cdot(-h)}\cdot\left[-25\cdot f(x_0) + 48\cdot f(x_0-h) - 36 f(x_0-2h) + 16 f(x_0-3h) - 3f(x_0-4h)\right]$$

$$f'(10) = \frac{1}{12\cdot(-2)}\left[-25\cdot f(10) + 48\cdot f(8) - 36 f(6) + 16\cdot f(4) - 3\cdot f(2)\right] = 250$$

• Fórmula centrada de 5 puntos (para $t = 10$):

$$f'(10) = \frac{1}{12\cdot 2}\cdot\left[f(6) - 8\cdot f(8) + 8\cdot f(12) - f(14)\right] = 250$$

* Como podemos ver, la aceleración angular es constante en cualquier tiempo.

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Alumno: Miguel Quijada Álamo
Curso: 1º Biotecnología.

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

Tenemos que calcular la velocidad cuando $t = 2s$, por lo que $\Rightarrow \int_0^2 \sqrt{1-\cos(t)}\, dt$

Debemos aplicar el método de Simpson compuesto:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right]$$

Como no nos dan el valor de h ni el número de subintervalos que debemos coger, tomamos, por ejemplo $\boxed{h = 0{,}25}$. Así que tenemos:

$$\int_0^2 \sqrt{1-\cos(t)}\, dt = \frac{0{,}25}{3}\left[f(0) + 2\cdot\left(f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5)\right) + 4\left(f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}25) + f(1{,}75)\right) + f(2)\right]$$

$$\boxed{\int_2^0 \sqrt{1-\cos(t)}\, dt \simeq 1{,}300217}$$ ✓

→ Error absoluto: $Ea = |V_{exacto} - V_{aprox}| = 4\cdot 10^{-6}$

→ Cálculo del error y una cota:

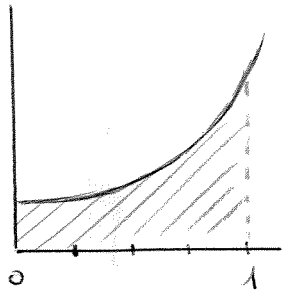
El valor de la derivada cuarta es: $f^{(4)} = \dfrac{\operatorname{sen}^8\left(\frac{x}{2}\right)}{(1-\cos x)^{7/2}}$

$$\text{Error: } \left|\frac{h^4}{180}(b-a)\cdot f^{(4)}(\eta)\right| = \frac{0{,}25^4}{180}\cdot 2\cdot \frac{\operatorname{sen}^8\left(\frac{\eta}{2}\right)}{(1-\cos\eta)^{7/2}}$$

$$\text{Cota: } \frac{0{,}25^4}{180}\cdot 2\cdot \frac{\operatorname{sen}^8\left(\frac{2}{2}\right)}{(1-\cos 2)^{7/2}} \leq \frac{0{,}25^4}{}$$

No puedes calcularlo en 0, tienes que evitar este valor.

11. Aplicación al Cálculo. Calcula el área de la región situada bajo la curva $y = 4x\tan(x) + 2$ de 0 a 1. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto cometido.



$y = 4x \cdot \tan(x) + 2$

Debemos calcular: $\int_0^1 (4x \cdot tg(x) + 2)\, dx$

Cogemos 4 subintervalos, por lo que $\Rightarrow \boxed{h = 0{,}25}$

Aplicamos el método de Simpson compuesto:

$$\int_0^1 (4x \cdot tg(x) + 2)\, dx = \frac{0{,}25}{3}\left[f(0) + 2\left(f(0{,}5)\right) + 4\left(f(0{,}25) + f(0{,}75)\right) + f(b)\right]$$

(2; 2,2553; 3,0926; 4,7948; 8,2296)

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 (4x \cdot tg(x) + 2)\, dx \simeq 3{,}717933} \checkmark$$

El área bajo la curva en el intervalo $[0, 1]$ será de $3{,}717933$ unidades^2.

→ Error absoluto; tenemos que el valor exacto de la integral es: $V_{ex} = 3{,}712353$

¿Cómo hal conseguido el valor exacto?

$$\boxed{E_a = |V_{exacto} - V_{aprox}| = |3{,}712353 - 3{,}717133| = 5'58 \cdot 10^{-3}}$$

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

Debemos calcular la aproximación de la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5} \cdot dx$

Usamos las fórmulas de cuadratura gaussiana:

→ Para $n = 0$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \simeq \frac{b-a}{2} \cdot 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5} \cdot dx \simeq (2-1)\cdot f\left(\frac{2+1}{2}\right) = 0,275226 \checkmark$$

Perfect.

Utilizando esta fórmula, obtenemos que el trabajo realizado por el cuerpo es de 0,275226 Julios.

→ Para $n = 1$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \simeq \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

$$\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5} \cdot dx \simeq \frac{1}{2}\cdot\left[f(1,211324865) + f(1,788675135)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(0,296170401 + 0,256361992) = 0,2762662 \checkmark$$

Utilizando esta fórmula, obtenemos que el trabajo realizado por el cuerpo es de 0,2762662 Jul

El valor exacto de la integral es de 0,276245, por lo que podemos observar que utilizando estas fórmulas de cuadratura gaussiana se obtienen muy buenas aproximaciones.

13. Aplicación a la Física. En un punto de una línea de ensamblaje de automóviles se observa cuántos coches pasan por minuto, obteniéndose los siguientes datos

	0	120	180	360	540	660	840	1020	1080
Hora	0:00	2:00	3:00	6:00	9:00	11:00	14:00	17:00	18:00
Coches por minuto	3	3	5	4	5	6	2	1	1

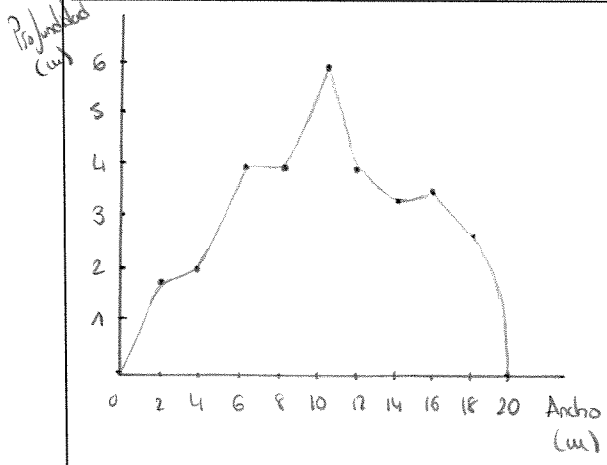
1140	1200	1440
19:00	20:00	24:00
3	4	6

Utilizando los métodos de los trapecios y de Simpson, determina el número total de coches que pasa por día en dicho punto.

14. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En un canal de 20 m de ancho, se hacen mediciones de profundidad cada dos metros, obteniendo los siguientes resultados:

Profundidad	1.8	2	4	4	6	4	3.4	3.6	2.8

La profundidad en los extremos del canal es 0. Calcula, aproximadamente, el área de la sección del canal.



Podemos calcular el valor del área de la sección del canal si calculamos el área que hay bajo la curva que hemos representado a la izquierda. Tenemos la anchura del canal dividida en diez subintervalos y tenemos que $h = 2$.

Aplicamos el método de Simpson compuesto:

$$\text{Área sección canal} \simeq \frac{2}{3} \cdot \left[f(0) + 2\left[f(4) + f(8) + f(12) + f(16) \right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[f(2) + f(6) + f(10) + f(14) + f(18) \right] + f(20) \right]$$

$$\boxed{\text{Área sección canal} \simeq 66{,}133 \text{ m}^2}$$

Perfect.

APROXIMACIÓN DE RAÍCES

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$v = 1\ m/s \Rightarrow$ Tenemos la siguiente ecuación: $t^3 - 2t^2 - 1 = 0$ ¡Perfecto!

Utilizamos el método de Newton-Raphson y tomamos como punto de arranque $x_0 = 3$:

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$; $f'(x) = 3t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \Rightarrow x_1 = 3 - \frac{8}{15} = 2,4667$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,4667 - \frac{f(2,4667)}{f'(2,4667)} = 2,2474$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,2069$ // $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,20557944$

$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 2,2055694431$

→ No se podría tomar como punto de arranque $x_0 = 0$, ya que $f'(x_0) = 0$, por lo que no podríamos realizar la operación $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ para calcular las iteraciones.

→ Error relativo (4 iteraciones) $= \frac{|V_{ex} - V_{aprox}|}{|V_{ex}|} = \frac{|2,20556443 - 2,20557944|}{|2,20556443|} = 6,41 \cdot 10^{-7}$

→ Error relativo (5 iteraciones) $= \frac{|2,20556443 - 2,2055694431|}{|2,20556443|} = 4,534 \cdot 10^{-10}$

16. Aplicación a la Dinámica. Calcula, utilizando el método de la bisección, el coeficiente de rozamiento x necesario para que un paracaidista con una masa 70 kg adquiera una velocidad de $50m/s$, después de una caída libre de $t = 15$ segundos. (Indicación: La aceleración de la gravedad es de $9{,}8m/s^2$, y la ecuación a aproximar es $f(x) = \frac{gm}{x}(1 - e^{-(x/m)t}) - v = 0$)

Tenemos la siguiente ecuación: $\frac{686}{x}\left(1 - e^{-\frac{x}{70}\cdot 15}\right) - 50 = 0$

Utilizaremos el método de la bisección para aproximar x, partiremos del intervalo

Partimos del intervalo $[12, 13]$, que por Bolzano sabemos que tiene una raíz.

$[12, 13] \Rightarrow c_0 = \frac{b+a}{2} = 12{,}5$; $f(12{,}5) > 0$, pasamos al siguiente intervalo:
" "
a_0 b_0

$[12'5, 13] \Rightarrow c_1 = \frac{b+a}{2} = 12{,}75$; $f(12{,}75) > 0$, pasamos al siguiente intervalo
" "
a_1 a_1

$[12'75, 13] \Rightarrow c_2 = 12{,}875$; $f(12{,}875) < 0$, pasamos al siguiente intervalo

$[12'75, 12'875] \Rightarrow c_3 = 12{,}8125$; $f(12{,}8125) > 0$, pasamos al siguiente intervalo

$[12'8125, 12'875] \Rightarrow c_4 = 12{,}84375$; $f(12{,}84375) > 0$, pasamos al siguiente intervalo

$[12'84375, 12'875] \Rightarrow c_5 = 12{,}859375$; $f(12{,}859375) < 0$, pasamos al siguiente intervalo

$[12'84375, 12'859375] \Rightarrow c_6 = 12{,}8515625$; $f(12{,}8515625) < 0$, pasamos al siguiente intervalo

$[12'84375, 12'8515625] \Rightarrow \boxed{c_7 = 12{,}84765625}$

Como no especifican el número de iteraciones que debemos realizar, obtenemos que el valor aproximado del coeficiente de rozamiento es $x \simeq 12{,}84765625$

¡Perfect!

Alba Mª Ramos Mateo.

* INTERPOLACIÓN *

① $f(t) = 9{,}5\, e^{-0{,}3t} \cos(2t)$

x	y
0	9,5
1	7,033
2	5,2
-1	12,81

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}
-1	12,81	$y_{01} = \frac{9{,}5 - 12{,}81}{0-(-1)} = -3{,}31$	$y_{012} = \frac{-2{,}47-(-3{,}31)}{1-(-1)} = 0{,}42$	$y_{0123} = -0{,}1$
0	9,5	$y_{12} = \frac{7{,}033 - 9{,}5}{1} = -2{,}47$	$y_{123} = \frac{-1{,}833-(-2{,}47)}{2-0} = 0{,}32$	
1	7,033	$y_{23} = \frac{5{,}2 - 7{,}033}{2-1} = -1{,}833$		
2	5,2	Hai elegido un intervalo	demasiado grande para aproximar $f(0'$	



$$P_3(x) = 12{,}81 - 3{,}31(x+1) + 0{,}42(x+1)(x) - 0{,}1(x+1)(x)(x-1)$$

$t = 0{,}2$

$$P_3(0{,}2) = 12{,}81 - (3{,}31 \cdot 1{,}2) + (0{,}42 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}2) - 0{,}1 \cdot (1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8)$$

$$= 8{,}96$$

Error absoluto: $|8{,}240514 - 8{,}96| = 0{,}72$

Cota: $\left|(9{,}5\, e^{-0{,}3t} \cdot \cos(2t)) - P_3(x)\right| = \frac{f^{IV}(G)}{24} |x+1||x||x-1|$

¡Puedes hacerlo con Wolfram Alpha, Alba!

$$f'(x) = 9{,}5\, e^{-0{,}3t} \cdot (-0{,}3) \cdot \cos(2t) - 9{,}5 e^{-0{,}3t} \cdot 2\operatorname{sen}(2t)$$

$$f''(x) = -2{,}85 e^{-0{,}3t} \cdot (0{,}3) \cdot \cos(2t) + 9{,}5 e^{-0{,}3t} \cdot 0{,}3 \cdot (-2\operatorname{sen}(2t)) + 2{,}85 e^{-0{,}3t} \cdot 0{,}6(\operatorname{sen} 2t) + 9{,}5 e^{-0{,}3} \cdot 1{,}2\cos(2t)$$

$$f'''(x) = -0{,}25 e^{-0{,}3t} \cdot \cos 2t + 0{,}84 e^{-0{,}3t} \cdot (-2\operatorname{sen} 2t) + -2{,}85 e^{-0{,}3t} \cdot 0{,}6 \operatorname{sen}(2t) + 9{,}5 e^{-0{,}3t} \cdot (1{,}2\cos(2t)) +$$

$$= 0{,}85 e^{-0{,}3} \cdot 0{,}6 \operatorname{sen} 2t + 2{,}85 e^{-0{,}3t} \cdot (-1{,}2\cos 2t) - 2{,}85 e^{-0{,}3} \cdot 1{,}2\cos(2t) + 9{,}5 e^{-0{,}3} \cdot (-2\operatorname{sen}

④ $P_1(x) = 1,0276 \cdot \frac{x-12}{4-12} + 1,1013 \cdot \frac{x-4}{12-4} =$

$= \frac{1,0276x - 12,3312}{-8} + \frac{1,1013x - 4,4052}{8} =$

$= \boxed{\frac{0,0737x + 7,926}{8}}$

$P_1(25) = \frac{0,0737 \cdot 25 + 7,926}{8} = \boxed{1,22106}$

Has usado el intervalo [4, 12].
No puedes tomar este intervalo, Alba, porque no contiene al 25.
Recuerda que estamos interpolando.

* DERIVACIÓN NUMÉRICA *

(6) $C_t = q'(t) \rightarrow C'_t = q''(t)$

Fórmula de 5 puntos progresiva:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[-25 f(x_0) + 48 f(x_0+h) - 36 f(x_0+2h) + 16 f(x_0+3h) - 3 f(x_0+4h)\right]$$

$f'(x_0)$ para $h = 0{,}002$: No, lee bien el enunciado, te piden que uses una fórmula lineal, es decir, con dos puntos

$$\frac{1}{0{,}024}\left[-25 \cdot 2{,}5 + 48 \cdot 2{,}5523 - 36 \cdot 2{,}6087 + 16 \cdot 2{,}6682 - 3 \cdot 2{,}7299\right] =$$

$$= \boxed{3546{,}69}$$

(7) Fórmulas de 3 puntos:

Progresiva: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3 f(x_0) + 4 f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right]$

Centrada: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h) + f(x_0+h)\right]$

Regresiva: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)\right]$

En 0 Fórmula progresiva.

$$f'(0) = \frac{1}{2}\left[-105 + 208 - 95\right] = \boxed{4}$$

En 3

progresiva: $f'(3) = \frac{1}{2}[-3(140) + 4(198) - 266] = 53$

entrada: $f'(3) = \frac{1}{2}[-95 + 198] = 51,5$

regresiva: $f'(3) = \frac{1}{2}[52 - 4 \cdot 95 + 3 \cdot 140] = 46$

En 7

Regresiva:

$f'(7) = \frac{1}{2}[266 - 4(342) + 3 \cdot 465] = 146,5$

Fórmulas de 5 puntos:

En 0 → progresiva

¡Perfecto!

$f'(0) = -12,75$.

En 3 → progresiva → $f'(3) = 42,0833$

→ Centrada → $f'(3) = 50,833$

En 7 → regresiva

$f'(7) = 169,75$.

* INTEGRACIÓN NUMÉRICA *

(10) $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$

Método Simpson 1/3 compuesto.

$t=2$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j}) + f(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\frac{2-0}{2}}{3}\left(\underset{\uparrow}{f(0)} + 4\underset{\uparrow}{f(1)} + \underset{\uparrow}{f(2)}\right) = 1,868$$

0 ; ojo 0,678 ; 1,19

¡Cuidado, Alba! Has usado un método de Simpson, pero simple. Te piden un método compuesto. Procura leer dos veces el enunciado.

Error absoluto ?

$$|1,300221 - 1,868| = 0,567779$$

* SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES *

(19)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \det A \neq 0$$

No, has confundido los datos, hacer mal el planteamiento.

$\downarrow \quad 2ªF = 2ª F - 2 \cdot 1ª F$

$\downarrow \quad 3ª F = 3ª F - 1ª F$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \textcircled{-4} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -2 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$x + 2y + z = 2 \rightarrow \boxed{x = 2}$

$-4y - z = -3 \rightarrow \boxed{y = 1/2}$

$2z = -2 \rightarrow \boxed{z = -1}$

¿Nº de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos un día de 8 h completas?

¿? Duda

Claro, porque te has olvidado de los términos independientes y has puesto los coeficientes de una de las variables como si fueran ellos. El sistema que hay que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z + 2t = 8 \\ 2x + z + t = 8 \\ x + 2y + 3t = 8 \end{array}\right\}$$

(20) Productos

10 A
12 B
8 C

la unidad es 3 litros.

$$\begin{pmatrix} 3x = A + 2B + C \\ 3y = 2A + B + 3C \\ 3z = 3A + 2B + C \end{pmatrix}$$

↙ De nuevo confundes los términos independientes. Son (10, 12, 8)

Además, la matriz es la transpuesta de la que hay

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

escalonada. El sistema es

$$2ªF = 2ªF - 2 \cdot 1ªF$$
$$3ªF = 3ªF - 3 \cdot 1ªF$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 2 & -12 \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b + 3c = 10 \\ 2a + b + 2c = 12 \\ a + 3b + c = 8 \end{array}\right\}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

(No está bien planteado)

MÉTODOS NUMÉRICOS

ALICIA UXÍA VÁZQUEZ BOLADO
09048157-A
1º BIOTECNOLOGÍA.

INTERPOLACIÓN

1.

$f(t) = 9,5e^{-0,3t}\cos(2t)$

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijke}
$x_0 = 0$	$y_0 = 9,5$	$y_{01} = -10,1642$	$y_{012} = -4,529$	$y_{0123} = 8,724$
$x_1 = 0,5$	$y_1 = 4,4179$	$y_{12} = -14,6932$	$y_{123} = 8,557$	
$x_2 = 1$	$y_2 = -2,9287$	$y_{23} = -6,1362$		
$x_3 = 1,5$	$y_3 = -5,9968$			

Tomar un intervalo demasiado grande para calcular una aproximación de f(0'2)



$y = 9,5 - 10,1642x - 4,529x(x-0,5) + 8,724x(x-0,5)(x-1)$

Aproximación de $x = 0,2 \rightarrow y = 8,1577$

Valor real: $f(0,2) = 8,240514$

Error absoluto: $|x_r - x| = |8,240514 - 8,1577| = 0,0827$

$$|f(x) - P(x)| = |x||x-0,5||x-1||x-1,5|\frac{M}{5!}$$

$M = f^{5)}(\xi)$

$f' = -2,85e^{-0,3t}\cos(2t) - 19e^{-0,3t}\operatorname{sen}(2t) = e^{-0,3t}(-2,85\cos(2t) - 19\operatorname{sen}(2t))$

$f'' = -0,3te^{-0,3t}(-2,85\cos(2t) - 19\operatorname{sen}(2t)) + e^{-0,3t}(5,7\operatorname{sen}(2t) - 38\cos(2t))$

$= e^{-0,3t}(0,855\cos(2t) + 5,7\operatorname{sen}(2t) + 5,7\operatorname{sen}(2t) - 38\cos(2t))$

$= e^{-0,3t}(11,4\operatorname{sen}(2t) - 37,145\cos(2t))$

¡Tenías que haberlo hecho con Wolfram Alpha, Alicia!

$f''' = -0,3te^{-0,3t}(11,4\operatorname{sen}(2t) - 37,145\cos(2t)) + e^{-0,3t}(22,8\cos(2t) + 74,29\operatorname{sen}(2t))$

$= e^{-0,3t}(-3,42\operatorname{sen}(2t) + 11,1435\cos(2t) + 22,8\cos(2t) + 74,29\operatorname{sen}(2t))$

$= e^{-0,3t}(70,87\operatorname{sen}(2t) + 33,9435\cos(2t))$

$f^{4)} = -0,3e^{-0,3t}(70,87\operatorname{sen}(2t) + 33,9435\cos(2t)) + e^{-0,3t}(141,74\cos(2t) - 67,887\operatorname{sen}(2t))$

$= e^{-0,3t}(-21,261\operatorname{sen}(2t) - 10,18305\cos(2t) + 141,74\cos(2t) - 67,887\operatorname{sen}(2t))$

$= e^{-0,3t}(-89,148\operatorname{sen}(2t) + 131,55695\cos(2t))$

$f^{5)} = -0{,}3e^{-0{,}3t}(-89{,}148\operatorname{sen}(2t) + 131{,}55695\cos(2t)) + e^{-0{,}3t}(178{,}296\cos(2t) - 263{,}1193\operatorname{sen}(2t))$

$= e^{-0{,}3t}(26{,}7444\operatorname{sen}(2t) - 36{,}4671\cos(2t) - 178{,}296\cos(2t) - 263{,}1193\operatorname{sen}(2t))$

$= e^{-0{,}3t}(-236{,}3749\operatorname{sen}(2t) - 214{,}7631\cos(2t)$

$M = 114{,}2991$

$|f(x) - P(x)| = 11{,}5|x||x-1||x-2|\frac{M}{5!} \leq 2{,}1432$

2

$v(t) = 2200\ln\left(\frac{160000}{160000 - 2680t}\right) - 9{,}81t$ ⟶ Aproximar mediante un polinomio de grado 2

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_{01} = 30{,}5209$	$y_{012} = 0{,}4546$
$x_1 = 10$	$y_1 = 305{,}2085$	$y_{12} = 39{,}6122$	
$x_2 = 20$	$y_2 = 701{,}3301$		

Probaría unos intervalos más pequeños para obtener una mejor aproximación. $[0, 20]$ es demasiado grande.

$y = 30{,}5209x + 0{,}4546x(x-10)$

Aproximación en $x = 11$ ⟶ $y = 340{,}7305$

valor real : $f(11) = 340{,}1142$

Error absoluto: $|x_r - x| = |340{,}1142 - 340{,}7305| = 0{,}6163$

Cota del error cometido:

$|f(x) - P(x)| = |x||x-10||x-20|\frac{M}{4!} \leq 20 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{5{,}3130 \cdot 10^{-3}}{4!} = 0{,}8855$

Estos valores afectan mucho a la cota.

$M = f^{4)}(\xi)$

$f' = 2200 \cdot \frac{1}{\frac{160000}{160000 - 2680t}} \cdot \frac{+160000 \cdot 2680}{(160000 - 2680t)^2} - 9{,}81 = \frac{5{,}896 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^5 - 2680t} - 9{,}81$

$f'' = 5{,}896 \cdot 10^6 \frac{2680}{(160000 - 2680t)^2} = 1{,}5801 \cdot 10^{10} \frac{1}{(160000 - 2680t)^2}$

$f''' = -8{,}4693 \cdot 10^{13} \frac{1}{(160000 - 2680t)^3}$ $\qquad f^{4)} = 6{,}8093 \cdot 10^{17} \frac{1}{(160000 - 2680t)^4}$

3

$y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	0,8427	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661

a) Aproximar $y(1,32)$

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijke}	y_{ijkeu}
$x_0 = 1$	$y_0 = 0,8427$	$y_{01} = 0,375$	$y_{012} = -0,37$	$y_{0123} = 0,1667$	$y_{01234} = 0$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,8802$	$y_{12} = 0,301$	$y_{123} = -0,32$	$y_{1234} = 0,1667$	$y_{12345} = -0,0418$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,9103$	$y_{23} = 0,237$	$y_{234} = -0,27$	$y_{2345} = 0,15$	
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,9340$	$y_{34} = 0,183$	$y_{345} = -0,225$		
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,9523$	$y_{45} = 0,138$			
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,9661$				

$y_{012345} = -0,0835$

$$y = 0,8427 + 0,375(x-1) - 0,37(x-1)(x-1,1) + 0,1667(x-1)(x-1,1)(x-1,2)$$

$y(1,32) = 0,9381$

b) Calcular una cota del error cometido

Recuerda el teorema fundamental del cálculo Integral que vimos en clase para calcular $y'(x)$.

$f[x_0, \dots, x_5] = \frac{f^{5)}(\xi)}{5!} \Rightarrow y_{012345} = \frac{f^5(\xi)}{5!} = -0,0835$ Una vez que la tengas, no te costará nada calcular las derivadas

Cota del error: $|f(x) - P(x)| = |x-1||x-1,1||x-1,2||x-1,3||x-1,4| \frac{f^5(\xi)}{5!} \leq$

$\leq 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,0835 = 2,4048 \cdot 10^{-4}$

4

x (c) ºC	4	12	20	28	38	45
y (P)	1,0276	1,1013	1,1801	1,2652	1,3480	1,4120

Perfect

$$P_1(x) = 1,1801 \frac{x-28}{20-28} + 1,2652 \frac{x-20}{28-20} = -0,1475(x-28) + 0,1582(x-20)$$

$P_1(25) = -0,1475(25-28) + 0,1582(25-20) = 1,2335$

5

t ºC (días)	0	5	15	16	23	30
y(P) (metros)	8,20	11,4	19,9	22,4	25,2	26,8

Procura elegir el intervalo de menor longitud que contenga al 10

$[0, 15] \longrightarrow$ longitud 15; $[5, 16] \longrightarrow$ longitud 11

$$P_2(x) = 0 \cdot \frac{x-5}{0-5} \cdot \frac{x-15}{0-15} + 11,4 \frac{x}{5} \frac{x-15}{5-15} + 19,9 \frac{x}{15} \frac{x-5}{10} = -0,228x(x-15) + 0,1327x(x-5)$$

$P_2(10) = -0,228 \cdot 10(10-15) + 0,1327 \cdot 10(10-5) = 18,035$ metros

Derivación numérica

6

t: 0 0,002 0,004 0,006 0,008 0,010

f: 2,5 2,5523 2,6087 2,6682 2,7299 2,7931

3 puntos No, Alicia, mira bien el enunciado. Te piden fórmulas lineales, es decir,

- $f'(x) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^{3)}(\xi_0)$ de 2 puntos.

5 puntos

- $f'(x) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5}f^{5)}(\xi)$

$h = 0,002$

$f'(0) \cong 24,9458$ (5 puntos) $f'(0,002) \cong 27,125$ (5 puntos) Es un ejercicio mucho más corto.

$f'(0,004) \cong 29,2$ (3 puntos) $f'(0,006) \cong 30,475$ (3 puntos)

$f'(0,008) \cong 31,4$ (3 puntos regresiva) $f'(0,010) \cong 31,975$ (3 puntos regresiva.

7

t (días): 0 1 2 3 4 5 6 7

Bacterias: 35 52 95 140 198 266 342 465

- 3 puntos Es

  - Progresiva

  $f'(x) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^{3)}(\xi)$

  - Regresiva

  $f'(x) = \frac{1}{2h}[3f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)] + \frac{h^2}{3}f^{3)}(\xi)$

  - Centrada

  $f'(x) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{6}f^{3}(\xi)$

  5 puntos

  - Progresiva

  $f'(x) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5}f^{5}(\xi)$

  - Regresiva

  $f'(x) = \frac{1}{12h}[25f(x_0) - 48f(x_0-h) + 36f(x_0-2h) - 16f(x_0-3h) + 3f(x_0-4h)] + \frac{h^4}{5}f^{5)}(\xi)$

  - Centrada

  $f'(x) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30}f^{5)}(\xi)$

$x_0 = 0$

- 3 puntos { Progresiva $f'(0) \simeq 4$; Regresiva $f'(0) \simeq$ No se puede ; Centrada $f'(0) \simeq$ No se puede.
- 5 puntos { Progresiva $f'(0) \simeq -12,75$

$x_0 = 3$

- 3 puntos { Progresiva $f'(3) \simeq 53$; Regresiva $f'(3) \simeq 46$; Centrada $f'(3) \simeq 51,5$
- 5 puntos { Centrada $f'(3) \simeq 50,8333$

$x_0 = 7$

- 3 puntos { Regresiva : $f'(7) \simeq 146,5$
- 5 puntos { Regresiva : $f'(7) \simeq 169,75$

¡Perfect!

8

T(s)	0	3	5	8	10	13
D(m)	0	2	3	6	7	9

$V = \frac{dx}{dt}$

Fórmulas de tres puntos:

- Progresiva: $f'(x) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3}f^3(\xi)$
- Regresiva: $f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3}f^3(\xi)$
- Centrada: $f'(x) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{6}f^3(\xi)$

¡Fíjate bien! Las fórmulas no se pueden usar porque el paso no es constante.

$h = 5$

$f'(0) \simeq 0,5 \frac{m}{s}$ (progresiva)

$f'(2) \simeq 0,9 \frac{m}{s}$ (progresiva)

$f'(3) \simeq 0,7 \frac{m}{s}$ (centrada)

$f'(6) \simeq 0,7 \frac{m}{s}$ (centrada)

$f'(7) \simeq 0,9 \frac{m}{s}$ (regresiva)

$f'(9) \simeq 0,5 \frac{m}{s}$ (regresiva).

9

t(s)	0	2	4	6	8	10	12	14
x(r.p.m)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

$a = \frac{dv}{dt}$

$t = 2$

$f' \simeq \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] = \frac{1}{12 \cdot 2}[-25 \cdot 1000 + 48 \cdot 1500 - 36 \cdot 2000 + 16 \cdot 2500 - 3 \cdot 3000] = 250$ rpm/s

$t=8$ ← ¡Te has confundido en las operaciones! Sale 250

$f' \simeq \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] = \frac{1}{12\cdot 2}[1500 - 8\cdot 2000 + 8\cdot 3000 - 1500]$

$= 333,33$ rpm/s

$t=10$

$f' \simeq \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] = \frac{1}{12\cdot 2}[2000 - 8\cdot 2500 + 8\cdot 3500 - 4000]$

$= 250$ rpm/s

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

10

$v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$

$v = \frac{m}{s}$ $\quad v(t): 0,6780 \quad 1,1900 \quad 1,4107 \quad 0$

$t = s$ $\quad t(s): 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0$

$\frac{dx}{dt} = v(t) \rightarrow x = \int v(t)\,dt$

Método de Simpson $\frac{1}{3}$

$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(m) + f(b))$

$\int_0^2 f(x)dx \simeq \frac{2}{6}(0 + 4\cdot 0,6780 + 1,1900) = 1,3007$ m

Valor exacto $= 1,300221$ m

No, fíjate bien en el enunciado, te piden que uses un método de Simpson compuesto y has utilizado la fórmula simple

$E_{absoluto} = |V_e - V_a| = |1,300221 - 1,3007| = 4,456\cdot 10^{-4} \simeq 4,5\cdot 10^{-4}$

Cota del error $= \frac{Mh^5}{90} = \frac{(b-a)^5}{2880} f^4(\eta) = \frac{(2)^5}{2880} =$

$f' = \sqrt{1-\cos(t)}$; $f'' = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1-\cos(t)}}$; $f^{(3)} = \frac{\cos(t)\sqrt{1-\cos(t)} - \operatorname{sen}(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1-\cos(t)}}}{(\sqrt{1-\cos(t)})^2}$

$= \frac{\cos(t)(1-\cos(t)) - \operatorname{sen}^2(t)}{(\sqrt{1-\cos(t)})^3}$, $f^{(4)} = \frac{(-\operatorname{sen}(t)(1-\cos(t)) + \cos(t)\operatorname{sen}(t) - 2\operatorname{sen}(t)\cos(t))(\sqrt{1-\cos(t)})^3}{(\sqrt{1-\cos(t)})^6}$

$- (\cos(t)(1-\cos(t)) - \operatorname{sen}^2(t))3(\sqrt{1-\cos(t)})^2 \cdot \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1-\cos(t)}} =$

$= \frac{\operatorname{sen}(t)(\cos t + 1 + \cos t - 2\cos t)(\sqrt{1-\cos(t)})^3 + (-\cos(t) + \overbrace{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}^{1})3(\sqrt{1-\cos(t)})^2 \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1-\cos(t)}}}{(\sqrt{1-\cos(t)})^6}$

$= \frac{\operatorname{sen}(t)(1-\cos(t)) + 3\operatorname{sen}(t)(1-\cos(t))}{(\sqrt{1-\cos(t)})^5} = \frac{4\operatorname{sen}(t)(1-\cos(t))}{(\sqrt{1-\cos(t)})^5}$

¡Hazlo con Wolfram Alpha! ¡Menudo trabajo!

11

$y = 4x\tan(x) + 2$

x	0	0,5	1
y	2	3,0926	8,2296

$\int_0^1 y\,dx$

¡Te ha pasado lo mismo! Ten cuidado con los métodos simples y compuestos, Alicia. Éste también es simple y le pides compuesto.

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + \underset{\text{Mal}}{3}f(u) + f(b)\right) = \frac{1}{6}(2 + 3\cdot 3{,}0926 + 8{,}2296) = 3{,}2512\ u^2$$

$$\text{Error cometido} = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta) = -\frac{1^5}{2880}f^4(\eta) = \frac{1}{2880}f^4(\eta)$$

12

$f(x) = \dfrac{10x}{6\sqrt{x}+1)^5}$ u desde 1 hasta 2u

f(x)	0,3125	0,2752	0,2438
x	1	1,5	2

f = N

x = u

Cuadratura gaussiana

n = 0

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1\,f(1{,}5) = 0{,}2752\,N \quad \checkmark$$

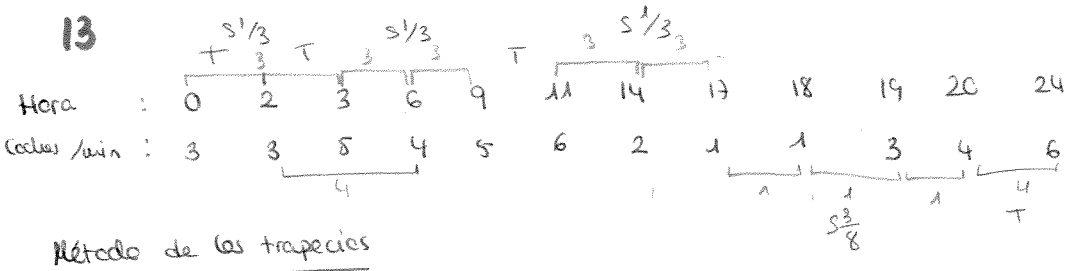
n = 1

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$ Repara las operaciones

$$= \frac{1}{2}[0{,}3189 + 0{,}3287] = 0{,}3238\,N$$

El valor es el mismo que en el n=0, porque salen muy exactos.

13



Método de los trapecios

$$\int_0^{24} f(x)dx = \frac{3}{6}(3+3+5) + \frac{6}{6}(5+4\cdot 4+5) + \frac{2}{2}(5+6) + \frac{6}{6}(6+2\cdot 4+1) + \frac{3}{8}(1+3\cdot 1+3\cdot 3+4) + \frac{4}{2}(4+6) = 88{,}375 \simeq 88\ \text{coches}$$

El planteamiento ahora es correcto.

$$\frac{2}{2}(3+5) + \frac{1}{2}(3+5)$$

14

20m de ancho

Profundidad: 1,8 2 4 4 6 4 3,4 3,6 2,8 0

Cada 2m

Te falta añadir los datos en las orillas. Influye, porque los índices que para ti son pares se convierten en impares.

$$\int_0^{20} f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + \sum_{1}^{n-1} 2f(x) + f(b)\right] = \frac{20}{2\cdot 8}\left[1{,}8 + 2\cdot 2 + 4\cdot 2 + 4\cdot 2 + 6\cdot 2 + 4\cdot 2 + 3{,}4\cdot 2 + 3{,}6\cdot 2 + 2{,}8\right]$$

$= 73{,}25\,m^2$

APROXIMACIÓN DE RAÍCES

15 ¬No, mira bien el enunciado. Tienes que calcular las raíces de $t^3 - 2t^2 = 1$

$v(t) = t^3 - 2t^2$

$v = 1\,m/s$

$x_0 = 3$

T. de Bolzano: hay al menos una raíz en $[0,1]$ y $[1,3]$

T. de Rolle: $f'(x) = 3t^2 - 4t$ $f'(0) = 0 \rightarrow f'(x) = 0$ también en $[1,2]$

$f''(x) = 6t - 4$. Tiene signo constante en $[1,3]$

$f'''(x) \neq 0$ Hay como máximo tres raíces

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_1 = 2{,}4$; $x_2 = 2{,}1$; $x_3 = 2{,}0087$; $x_4 = 2{,}0001$; $x_5 = 2{,}0000$

No se podría tomar 0 como punto de arranque porque el 0 es una raíz.

No, sí que se podría tomar aunque fuera una raíz. Pero observa que $f'(t) = 3t^2 - 4t$ y se anula en el 0 $\Rightarrow$ no podríamos dividir por $f'(0)$.

Error relativo $= |f(x_4) - f(x_{4-1})| = 0{,}0001$

número de cifras exactas = 4 $f(x_5) = 2{,}2282 \cdot 10^{-8}$

16

$$f(x) = \frac{gw}{x}\left(1 - e^{-(x/w)t}\right) - v = \frac{9{,}8\cdot 70}{x}\left(1 - e^{-(x/70)\cdot 15}\right) - 50 = \frac{686}{x}\left(1 - e^{-0{,}2143x}\right) - 50$$

T de Bolzano: $f(12) > 0$; $f(13) < 0$. Hay al menos una raíz en $[12,13]$

T de Rolle: $f'(x) = -\dfrac{49\,e^{-3x/14}\,(3x + 14\,e^{3x/14} + 14)}{x^2}$; $f'(x) = 0$ en $[-8,-4]$.

$f''(x)$ tiene signo cte en $[12,13]$.

Método de la bisectriz Bisección.

a	m	b	f(a)	f(m)	f(b)	Error
12	12,5	13	2,7976	1,1119	-0,4858	0,5
12,5	12,75	13	1,1119	0,3024	-0,4858	0,25
12,75	12,875	13	0,3024	-0,0943	-0,4858	0,125
12,75	12,813	12,875	0,3024	0,1034	-0,0943	0,0625
12,813	12,844	12,875	0,1034	$4,34 \cdot 10^{-3}$	-0,0943	0,03125
12,844	12,8593	12,875	$4,34 \cdot 10^{-3}$	-0,0449	-0,0943	0,0156
12,844	12,8514	12,859	$4,34 \cdot 10^{-3}$	-0,0197	-0,0449	$7,8185 \cdot 10^{-3}$
12,844	12,8476	12,8514	$4,34 \cdot 10^{-3}$	$-7,6759 \cdot 10^{-3}$	-0,0197	$3,9063 \cdot 10^{-3}$

Perfect.

El coeficiente de rozamiento es $x \simeq 12,8476 \ kg \cdot s^{-1}$

17

$$Q = \frac{y_n B}{n}\left(\frac{y_n B}{B + 2y_n}\right)^{2/3} S^{1/2} \qquad y_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3} = \left(\frac{14,15^2}{4,572^2 \cdot 9,8}\right)^{1/3} = 0,99 \ m$$

$$Q = 14,15 = \frac{y_n \cdot 4,572}{0,017}\left(\frac{y_n \, 4,572}{4,572 + 2y_n}\right)^{2/3} \cdot 0,0015^{1/2} \longrightarrow$$

$$y_n \cdot 10,4160\left(\frac{4,572 \, y_n}{4,572 + 2y_n}\right)^{2/3} - 14,15 = 0$$

1, 46875
1, 453125
1, 4609

Teorema de Bolzano $f(1) < 0 \ ; \ f(2) > 0$

Teorema de Rolle $f'(x) = 0 \rightarrow x \simeq 3,81$

a	m	b	f(a)	f(m)	f(b)	Error
1	1,5	2	-5,9721	0,4757	7,5987	0,5
1	1,25	1,5	-5,9721	-2,8535	0,4757	0,25
1,25	1,375	1,5	-2,8535	-1,2123	0,4757	0,125
1,375	1,4375	1,5	-1,2123	-0,3738	0,4757	0,0625
1,4375	1,4688	1,5	-0,3738	0,0496	0,4757	0,03125
1,4375	1,4531	1,4688	-0,3738	-0,1624	0,0496	0,0156
1,4531	1,4609	1,4688	-0,1624	-0,0565	0,0496	$7,8135 \cdot 10^{-3}$
1,4609	1,4648	1,4688	-0,0565	$-3,6795 \cdot 10^{-3}$	0,0496	$3,9063 \cdot 10^{-3}$

Perfect.

$y_n \simeq 1{,}4648$

$y_n > y_c$ El flujo es supercrítico.

18

$I = 10e^{-t}\,\text{sen}(2\pi t) \longrightarrow 10e^{-t}\,\text{sen}(2\pi t) - 2 = 0$

valores de t tales que $I = 2$

Teorema de Bolzano:

¿Qué problema has encontrado en este ejercicio?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

19 Hay más soluciones. Ten en cuenta la segunda ecuación. Las unidades de producto son números enteros no negativos $\Rightarrow$ $y = 2 - t$ no lleva a que $t = 0, 1, 2$. $\Rightarrow$ Hay tres soluciones dependiendo de estos valores ¿Las calculas?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$2z - 2t = 0 \rightarrow 2z = 2t \rightarrow z = t$

$-4y - z - 3t = -8 \rightarrow -4y = -8 + z + 3t \rightarrow -4y = -8 + 4t \rightarrow y = 2 - t$

$x + 2y + z + 2t = 8 \rightarrow x = 8 - 2y - z - 2t = 8 - 4 + 2t - t - 2t = 4 - t$

Solución $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

t = producto 4 y = producto 2

z = producto 3 x = producto 1.

20

	X	Y	Z	TOTAL
A	1	2	3	10
B	2	1	2	12
C	1	3	1	8

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 2x+y+2z=12 \\ x+3y+z=8 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+\frac{F_2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Perfect.

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 10 \\ 2y_1 + y_2 = 12 \rightarrow 2\cdot 10 + y_2 = 12 \rightarrow y_2 = 12-20 = -8 \\ y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 8 \rightarrow 10 + \frac{8}{3} + y_3 = 8 \rightarrow y_3 = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ -3x_2 - 4x_3 = -8 \\ -\frac{10}{3}x_3 = -\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \\ -3x_2 - \frac{4\cdot 7}{5} = -8 \rightarrow x_2 = \frac{4}{5} \\ x_1 + \frac{8}{5} + \frac{21}{5} = 10 \rightarrow x_1 = \frac{21}{5} \end{cases}$$

Solución $\begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = \frac{4}{5} \\ z = \frac{7}{5} \end{cases}$

Para x:

$1 \text{ —— } 3€$

$\frac{21}{5} \text{ —— } x$

$x = \frac{63}{5}€ = 12{,}6€$

Para y

$1 \text{ — } 3€$

$4/5 \text{ — } x$

$x = \frac{12}{5} = 2{,}4€$

Para z

$1 \text{ —— } 3€$

$7/5 \text{ —— } x$

$x = \frac{21}{5} = 4{,}2€$

21

	(x) S Pb (1 ton)	(y) CPb (1 ton)	TOTAL
PH	5	4	180
PR	4	2	120

$$\begin{cases} 5x+4y=180 \\ 4x+2y=120 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 180 \\ 4 & 2 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-\frac{4}{5}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 180 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -24 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{6}{5}y=-24 \rightarrow y=20 \\ 5x+4y=180 \rightarrow 5x+80=180 \rightarrow x=\frac{100}{5}=20 \end{cases}$$

Perfect.

Para x

1 —— 1 ton

20 —— x

$x = 20$ ton SPb

Para y:

1 —— 1 ton

20 —— x

$x = 20$ ton CPb

22

	(x) E (1 ton)	(y) C (1 ton)	TOTAL
A	2	2	8
B	3	5	15

$$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ 3x+5y=15 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 15 \\ 2 & 2 & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow F_2-\frac{2}{3}F_1 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 15 \\ 0 & -4/3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}y=-2 \rightarrow y=\frac{8}{3} \\ 3x+5\cdot\frac{8}{3}=15 \rightarrow x=\frac{5}{9} \end{cases}$$

Te has equivocado aquí.

$$\begin{cases} x=\frac{5}{9} \\ y=8/3 \end{cases}$$

Para x

1 —— 1 ton

5/9 —— x

$x = \frac{5}{9}$ ton $= 0.556$ ton especial

Para y:

1 —— 1 ton

8/3 —— x

$x = \frac{8}{3}$ ton $= 2.667$ ton común.

23

	A	B	C	TOTAL
CH	4	1	2	21
G	3	2	3	24
P	2	3	3	25

$$\begin{cases} 2A+3B+3C=25 \\ 3A+2B+3C=24 \\ 4A+B+2C=21 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-\frac{3}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{27}{2} \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -27/2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \checkmark$$

$$\begin{cases} -C=-2 \rightarrow C=2 \\ -\frac{5}{2}B-\frac{3}{2}C=-\frac{27}{2} \longrightarrow -5B-3\cdot 2=-27 \rightarrow B=\frac{-27+6}{-5}=\frac{21}{5} \\ 2A+3B+3C=25 \longrightarrow 2A+\frac{3\cdot 21}{5}+3\cdot 2=25 \rightarrow A=\frac{74}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{37}{5} \end{cases}$$

Tenía equivocado aquí.

· Solución $\begin{cases} A=\frac{37}{5} \\ B=\frac{21}{5} \\ C=2 \end{cases}$

Para A

$1 \text{ —— } 100g$

$\frac{37}{5} \text{ —— } x \qquad x=\frac{37}{5}\cdot 100=740g\ A$

Para B

$1 \text{ —— } 100g$

$\frac{21}{5} \text{ —— } x \qquad x=\frac{21}{5}\cdot 100=420g\ B$

Para C

$1 \text{ —— } 100g$

$2 \text{ —— } x \qquad x=2\cdot 100=200g\ C$

24

$AX = I \rightarrow X = A^{-1}$

A es simétrica y definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = L L^t$$

$L\bar{X} = I$

$L^t X = \bar{X}$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$l_{21} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{\sqrt{2}/2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{j=1}^{1} l_{2j}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_{32} = \frac{\left(a_{32} - \sum_{j=1}^{1} l_{3j} l_{2j}\right)}{l_{22}} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1} = \frac{1}{2}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{j=1}^{2} l_{3j}^2} = \sqrt{1 - 0 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tc hcl equivocado

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$L^t = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

El procedimiento está bien.

$L\bar{X} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} d = 0 \rightarrow a = -d \rightarrow d = -1 \\ b = 0 & \\ c = 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} b + \frac{\sqrt{2}}{2} e = 1 \rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} c + \frac{\sqrt{2}}{2} f = 0 \rightarrow f = 0 & \\ \frac{1}{2} d + \frac{\sqrt{3}}{2} g = 0 \rightarrow g = +\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = +\frac{1}{\sqrt{3}} = +\frac{\sqrt{3}}{3} & \\ \frac{1}{2} e + \frac{\sqrt{3}}{2} h = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} h = 0 \rightarrow h = -\sqrt{\frac{2}{3}} & \\ \frac{1}{2} f + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \rightarrow i = \frac{2}{\sqrt{3}} & \end{cases}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$L^t X = \bar{X}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + \frac{\sqrt{2}}{2} d = 1 \quad (d = \frac{7}{3}) & \frac{\sqrt{2}}{2} d + \frac{1}{2} g = -1 \rightarrow d = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ b + \frac{\sqrt{2}}{2} e = 0 \rightarrow b = -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} e + \frac{1}{2} h = \sqrt{2} \rightarrow e = \frac{4}{3} \\ c + \frac{\sqrt{2}}{2} f = 0 \rightarrow c = \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} f + \frac{1}{2} i = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} g = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow g = \frac{2}{3} & \downarrow \\ \frac{\sqrt{3}}{2} h = -\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow h = -\frac{2\sqrt{2}}{3} & f = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow i = \frac{4}{3} & \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7/3 & -2\sqrt{2}/3 & 2/3 \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & 4/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2/3 & -2\sqrt{2}/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

25

$$\begin{cases} 4I_1 - 2I_2 - I_3 + 1 = 0 \\ -2I_1 + 5I_2 - 2I_3 + 1 = 0 \\ -I_1 - 2I_2 + 5I_3 - 3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

A es simétrica y definida positiva

$A = L \cdot L^t$

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & -2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$I_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$ $\qquad I_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{j=1}^{1} I_{2j}^2} = \sqrt{5 - (-1)^2} = 2$

$I_{21} = \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = \dfrac{-2}{2} = -1$ $\qquad I_{32} = \dfrac{(a_{32} - \sum_{j=1}^{1} I_{3j} I_{2j})}{I_{22}} = \dfrac{(-2 - (-1)(-2))}{2} = -2$

$I_{31} = \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad I_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{j=1}^{2} I_{3j}^2} = \sqrt{5 - (-\frac{1}{2})^2 - (-2)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & -2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2y_1 = -1 \rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} \\ -y_1 + 2y_2 = -1 \rightarrow \frac{1}{2} + 2y_2 = -1 \rightarrow y_2 = -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}y_1 - 2y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3 = 3 \longrightarrow y_3 = \frac{5\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$L^t x = y$

Procedimiento así bien

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/4 \\ 5\sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \longrightarrow x_1 = \frac{13}{16} \\ 2x_2 - 2x_3 = -\frac{3}{4} \longrightarrow x_2 = \frac{31}{24} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 = \frac{5\sqrt{3}}{6} \rightarrow x_3 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{13}{16} \\ I_2 &= \frac{31}{24} \\ I_3 &= \frac{5}{3} \end{aligned}\right\} \text{ Solución}$$

Modelización matemática

26

Nieve cae de forma constante

12h → empieza a funcionar máquina quitanieves

14h → 2km

16h → 1km

$\left.\begin{array}{l} V = \frac{C_1}{h} \\ h = C_2 t \end{array}\right\}$ → La velocidad con la que retira la nieve la máquina es proporcional altura (pero inversamente). Cuánta más altura haya de nieve más tardará en quitar la nieve.

$V = \frac{C_1}{C_2 t} = k\frac{1}{t}$; como $v = \frac{de}{dt} = k\frac{1}{t}$

$\frac{de}{dt} = k\frac{1}{t} \longrightarrow \int de = k\int \frac{dt}{t} \longrightarrow e = k\ln t + cte$

↓ espacio limpiado de nieve

A las 12h ← tiempo que lleva nevando

$0 = k\ln(x+0) + A$

A las 14h

$2 = k\ln(x+2) + A$

A las 16h

$3 = k\ln(x+4) + A$

$2 = k\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \longrightarrow \frac{2}{k} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$3 = k\ln\left(\frac{x+4}{x}\right) \longrightarrow \frac{3}{k} = \ln\left(\frac{x+4}{x}\right)$

Correct.

$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{k} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \xrightarrow{\cdot 3} \frac{2\cdot 3}{k} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 \\ \frac{3}{k} = \ln\left(\frac{x+4}{x}\right) \xrightarrow{\cdot 2} \frac{3\cdot 2}{k} = \ln\left(\frac{x+4}{x}\right)^2 \end{array}\right\} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \ln\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$

$\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \left(\frac{x+4}{x}\right)^2 \longrightarrow (x+2)^3 = x(x+4)^2 \longrightarrow \cancel{x^3} + 6x^2 + 12x + 8 = \cancel{x^3} + 8x^2 + 16x$

$\rightarrow 2x^2 + 4x - 8 = 0 \longrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1{,}236$ horas

$12h - 1{,}236h = 10{,}76\,h \simeq 10h\,45min$ empezó a nevar.

27

No sólo el caudal, es O.

$V = -k\,\Delta P = -k(P_t - \overset{cte}{P_{ext}}) \longrightarrow \frac{dP}{dt} = -k(P_t - P_{ext}) \longrightarrow \int \frac{dP}{P_t - P_{ext}} = -k \int dt$

$\longrightarrow \ln(P_t - P_{ext}) = -kt + C \longrightarrow P_t - P_{ext} = Ae^{-kt} \longrightarrow P_t = P_{ext} + Ae^{-kt}$

$P_0 = P_{ext} + Ae^{-k\cdot 0} = P_{ext} + A \rightarrow$ condición inicial

$0{,}90P_0 = P_{ext} + Ae^{-k\cdot 5}$ $\quad\hookrightarrow A = P_0 - P_{ext}$

$\hookrightarrow 0{,}90P_0 = P_{ext} + (P_0 - P_{ext})e^{-5k} \longrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{0{,}90P_0 - P_{ext}}{P_0 - P_{ext}}\right)}{-5}$

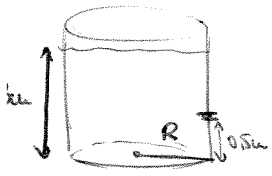
$P = P_{ext} + (P_0 - P_{ext})e^{-kt}$

$0{,}5P_0 = P_{ext} + (P_0 - P_{ext})e^{-kt} \longrightarrow \ln\left(\frac{0{,}5P_0 - P_{ext}}{P_0 - P_{ext}}\right) = -kt$

$\longrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{0{,}5P_0 - P_{ext}}{P_0 - P_{ext}}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{0{,}90P_0 - P_{ext}}{P_0 - P_{ext}}\right)}{5}} = 5\ln\left(\frac{0{,}5P_0 - P_{ext}}{0{,}90P_0 - P_{ext}}\right)$ min

Hacer $P_{ext} = 0$ e intentar resolver.

28



$h_0 = 2{,}5\,m$

$h_1 = 2\,m$ (1hora)

$$\frac{dV}{dt} = -kh \longrightarrow \frac{d\pi r^2 h}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} = -kh \rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{kh}{\pi r^2}$$

$$\int \frac{dh}{h} = -\frac{k}{\pi r^2}\int dt \longrightarrow \ln h = -\frac{k}{\pi r^2}t + C \rightarrow h = Ae^{-\frac{k}{\pi r^2}t}$$

$$h(0) = Ae^0 = 2{,}5 \rightarrow A = 2{,}5 \Longrightarrow h = 2{,}5e^{-\frac{k}{\pi r^2}t}$$

$$h(1) = 2{,}5e^{-\frac{k}{\pi r^2}\cdot 1} = 2 \longrightarrow -0{,}2231 = -\frac{k}{\pi r^2} \rightarrow k = 0{,}7010\,r^2$$

$$\Rightarrow h = 2{,}5e^{-0{,}2231t}$$

Deja de salir agua cuando $h = 0$ Correcto.

$0 = 2{,}5e^{-0{,}2231t} \longrightarrow t \rightarrow \infty$

Nunca dejaría de salir agua (teóricamente)

29

$F = m \cdot a$

$F_d \uparrow v_c = cte = 5\,m/s$ $\quad F_g = mg$ $\quad F = F_g + P_d = mg + k \cdot v = m \cdot a \longrightarrow mg + kv = mv'$

$mg = F_g$ $\quad F_d = kv$

$$\longrightarrow g + \frac{k}{m}v = v' \rightarrow \frac{dv}{dt} = g + \frac{k}{m}v = 9{,}81 + \frac{k}{m}v$$

$\boxed{|v_H|}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}v \longrightarrow \int \frac{dv}{v} = \frac{k}{m}\int dt \rightarrow \ln v = \frac{k}{m}t + C \longrightarrow v_H = Ae^{\frac{k}{m}t}$$

V_p

$$v_p = u e^{k/m \cdot t} \longrightarrow v_p' = u' e^{\frac{k}{m}t} + u \frac{k}{m} e^{\frac{k}{m}t}$$

$$9{,}81 + \frac{k}{m} u e^{\frac{k}{m}t} = u' e^{\frac{k}{m}t} + u \frac{k}{m} e^{\frac{k}{m}t} \longrightarrow 9{,}81 = u' e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\longrightarrow \frac{du}{dt} = 9{,}81\, e^{-\frac{k}{m}t} \longrightarrow \int du = 9{,}81 \int e^{-\frac{k}{m}t} dt \longrightarrow u = -9{,}81 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_p = -9{,}81 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} e^{\frac{k}{m}t}$$

$$v_g = v_H + v_p = \lambda e^{\frac{k}{m}t} - 9{,}81 \frac{m}{k}$$

Condición inicial

$v_t = 0$

$$0 = \lambda e^{\frac{k}{m} \cdot 0} - 9{,}81 \frac{m}{k} \rightarrow \lambda = 9{,}81 \frac{m}{k}$$

$$v = 9{,}81 \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} - 9{,}81 \frac{m}{k} = 9{,}81 \frac{m}{k} \left(e^{\frac{k}{m}t} - 1 \right)$$

$v = 1\ m/s$ ¿k?

Tiene que hacer todo t a infinito.

29. La ley de Newton afirma que $F = m \cdot a$, donde m es la masa de un móvil, a es su aceleración y F las fuerzas que actúan sobre él. Supongamos que un móvil de masa m se deja caer con velocidad inicial nula. Las fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad, $F_g = m \cdot g$ y la del rozamiento con el aire, F_d que es directamente proporcional a la velocidad a la que desciende. Calcula dicha constante de proporcionalidad para que el móvil descienda a una velocidad de 1m/s.

$F_t = m.a$ $\quad m$=masa $\quad V_0 = 0$

$F_{total} = F_g + F_d = m.g + K.V = m.a$

$a = \frac{dv}{dt}$ con lo que $a = v'$

$m.g + K.v = m.v'$ Tenemos una ecuación lineal. Para simplificar dividimos todos los términos entre m!

$g + \frac{K}{m}.v = v'$ y la tenemos en forma de ecuación lineal!

$v' - \frac{K}{m}v = 9'81$

Calculamos la solución de la ecuación homogénea:

$v' - \frac{K}{m}v = 0 \quad \frac{dv}{dt} = v' = \frac{K.v}{m} \quad \int \frac{dv}{v} = \frac{K}{m}\int dt \quad \ln v = \frac{K}{m}.t + A \quad v = e^{\frac{K.t}{m}} \cdot e^{A}$ ($e^A = \lambda$)

Solución homogénea: $\boxed{v_H = \lambda e^{\frac{Kt}{m}}}$

Ahora buscamos la solución particular:

$\boxed{v_p = \lambda(t).e^{\frac{Kt}{m}}} \quad v' = \lambda'.e^{\frac{Kt}{m}} + \frac{K}{m}.e^{\frac{Kt}{m}}.\lambda$

$v' = \lambda' e^{\frac{Kt}{m}} + \frac{\lambda K}{m} e^{\frac{Kt}{m}} = \frac{K}{m}\lambda.e^{\frac{Kt}{m}} + 9'81 \quad \lambda'.e^{\frac{Kt}{m}} = 9'81$

$\lambda' = \frac{d\lambda}{dt} \quad \frac{d\lambda}{dt}.e^{\frac{Kt}{m}} = 9'81 \quad d\lambda = 9'81.\frac{dt}{e^{\frac{Kt}{m}}} \; ; \; \int d\lambda = 9'81\int e^{-\frac{Kt}{m}}.dt$

$\lambda = 9'81.\left(\frac{-m}{K}\right).e^{\frac{-Kt}{m}} \quad V_p = 9'81\left(\frac{-m}{K}\right).e^{\frac{-Kt}{m}}$ Hay dudas multiplicar por $e^{K/m\,t}$

$V_{TOTAL} = V_H + V_p = -9'81\frac{m}{K}.e^{\frac{-Kt}{m}} + \lambda.e^{\frac{Kt}{m}}$

$v_0 = 0 \quad 0 = -9'81\frac{m}{K}.1 + \lambda.1 \quad \lambda = 9'81\frac{m}{K}$

$V = 1 \quad \lambda = -9'81\frac{m}{K}.e^{\frac{-K.t}{m}} + 9'81\frac{m}{K}.e^{\frac{Kt}{m}} \; ; \; \boxed{\lambda = 9'81\frac{m}{K}\left(-e^{\frac{-Kt}{m}} + e^{\frac{Kt}{m}}\right)}$

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$t^3 - 2t^2 = 1$ ✓ $\quad t^3 - 2t^2 - 1 = 0 = f(x) \quad f'(x) = 3t^2 - 4t$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{8}{15} = \underline{2'4666}$

$f(3) = 27 - 2.9 - 1 = 8$

$f'(3) = 27 - 12 = 15$

$x_2 = 2'4666 - \frac{1'8388}{8'3859} = \underline{2'2473}$ Perfecto

$f(2'4666) = 1'8388 \quad f'(2'4666) = 8'3859$

$x_3 = 2'2473 - \frac{0'2489}{6'1619} = \underline{2'2069}$

$f(2'2473) = 0'2489 \quad f'(2'2473) = 6'1619$

Error relativo en $x_4 = \frac{|x_4 - x_3|}{x_4} = 5'57.10^{-4}$

$x_4 = 2'2069 - \frac{7'72.10^{-3}}{5'7836} = \underline{2'20567}$

$f(2'2069) = 7'72.10^{-3} \quad f'(2'2069) = 5'7836$

Error relativo en $x_5 = \frac{|x_5 - x_4|}{x_5} = 4'579.10^{-5}$

$x_5 = 2'20567 - \frac{5'80467.10^{-4}}{5'77226} = \underline{2'205569}$

$f(2'20567) = 5'80467.10^{-4} \quad f'(2'20567) = 5'77226$

No se puede tomar como punto de arranque $x_0 = 0$ pues se anularía el denominador ya que $f'(x_0) = 0$.

Como en las dos últimas iteraciones mantenemos los tres primeros decimales podemos decir que tenemos fijados con exactitud estos tres cifras (2'205).

11. Aplicación al Cálculo. Calcula el área de la región situada bajo la curva $y = 4x\tan(x) + 2$ de 0 a 1. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto cometido.

$y = 4x\,tg(x) + 2$ [0,1]

Perfecto.

Simpson compuesto $\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right)$

x	0	0'25	0'5	0'75	1
y	2	2'26	3'09	4'79	8'23
n	0	1	2	3	4

$Sc = \frac{1}{3.4}\left(2 + 4.(2'26 + 4'79) + 2.3'09 + 8'23\right) =$

$= 3'7175$

Para calcular el error absoluto debemos conocer el valor exacto de la integral, pero esta es irresoluble y por lo tanto no podemos calcular el error absoluto.

23. Aplicación a la Nutrición. Un endocrino esta preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada 100 gr del alimento A contienen 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento B contienen 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento C contienen 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidad de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan? Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

	Alimento A (x)	Alimento B (y)	Alimento C (z)	
Proteínas	2	3	3	25
Grasas	3	2	3	24
carbohidratos	4	1	2	21

Unidad → 100 gr de alimento

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[3ª-2\cdot 1ª]{2ª-\frac{3}{2}1ª} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -27/2 \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow{3ª-2\cdot 1ª} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -27/2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$-z=-2$ $\boxed{z=2}$

Resto

$-\frac{5}{2}y - \frac{3}{2}\cdot 2 = -\frac{27}{2}$ $\quad -\frac{5}{2}y = -\frac{27}{2}+3 = -\frac{21}{2}$ $\quad \boxed{y=4'2}$

$2x + 3\cdot 4'2 + 3\cdot 2 = 25$ $\quad 2x = 6'4$ $\quad \boxed{x=3'2}$

Necesitamos 320 g del alimento A, 420 g del alimento B y 200 gramos del alimento C.

19. Aplicación a la Economía. Una empresa quiere fabricar cuatro productos distintos ayudándose de tres máquinas diferentes, que deberán estar a pleno rendimiento durante 8 horas cada día. El número de horas que cada máquina utiliza en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Es decir, en la producción de una unidad del primer producto la primera máquina se usa una hora; la máquina 2, 2 horas y la máquina 3, 1 hora (para los demás productos, véase la tabla anterior). Hallar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos un día de 8 horas completas. Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x + 2y + z + 2a = 8 \\ 2x + 0y + z + a = 8 \\ x + 2y + 3z + 0a = 8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[3ª-1ª]{2ª-2\cdot1ª} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Debe ser}]{2ª-(-4ª)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

(*)

Este paso sobra.

$2z = 2a$; $z = a$

Fíjate que aquí ↑ ya habías terminado el proceso.

La solución quedará en función de un parámetro pues tenemos 3 ecuaciones para cuatro incógnitas: De la última, obtenemos que $z = a$ y si consideramos α un parámetro y $\alpha = a = z$ analizar, pero en (*)

$-4y = +8 + \alpha + 3\alpha = 8 + 4\alpha$ $\qquad y = -2 - \alpha$

$x + 2(-2-\alpha) + \alpha + 2\alpha = 8$ $\qquad x - 4 - 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 8$ $\qquad x = 12 - \alpha$

Solución: $a = \alpha$ $\quad y = -(2+\alpha)$
$z = \alpha$ $\quad x = 12 - \alpha$

26. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante el resto del día. A mediodía, una máquina quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante en términos de cantidad de nieve retirada en una hora. La máquina limpió dos kilómetros hasta las dos de la tarde y un kilómetro más hasta las cuatro de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?

La velocidad es inversamente proporcional a la altura de nieve que tenemos: $v = \frac{C_1}{h}$

La altura de nieve es proporcional al tiempo: $h = C_2 \cdot t$

Dependiendo en la velocidad anterior tenemos que:

$v = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{k}{t}$ $\quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{k}{t}$ (siendo x el espacio y t el tiempo, k una constante)

$dx = \frac{k\,dt}{t}$ Integrando $\int dx = k\int \frac{dt}{t} \rightarrow x = k \cdot \ln t + C$

Empleamos las condiciones iniciales que nos dan para obtener los parámetros de la ecuación:

Comenzó a nevar una hora x que desconocemos y que queremos averiguar. La máquina comenzó a quitar nieve a las 12 de la mañana, que consideraremos la hora (x+0).

Cuando empezó a quitar nieve la situación es la siguiente:

$0 = k \cdot \ln(x+0) + C$ (1)

Tras haber quitado dos kilómetros: Perfecto

$2 = k \ln(x+2) + C$ (2)

y tras haber quitado tres quilómetros:

$3 = k \ln(x+4) + C$ (3)

Restando (1) y (2) obtenemos $2 - 0 = k \cdot \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$; $2 = k \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (4)

y restando (1) y (3) obtenemos $3 = k \ln\left(\frac{x+4}{x}\right)$ (5)

Operando con estas dos ecuaciones ((4) y (5)) para poder igualar obtenemos:

$3.\ \frac{2}{k} = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \frac{6}{k} = 2 \cdot \frac{3}{k} = \ln\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ $\quad \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^3 = \ln\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$

→ CONTINÚA POR EL OTRO LADO

$\frac{(z+2)^3}{z^3} = \frac{(z+4)^2}{z^2}$; $(z+2)^3 = (z+4)^2 z$; $z^3+6z^2+12z+8 = z^3+8z^2+16z$

$2z^2+4z-8=0 \xrightarrow{:2} z^2+2z-4=0$ $\quad z = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot4}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{2} =$ { $1'2361$; Negativo, sin sentido físico }

Por lo tanto $z = 1'2361$ y podemos determinar que comienza a llover a los $(12 - 1'2361)$ horas, a las $10'7639$ horas, es decir a las 10:45 de la mañana.

22. Aplicación a la Industria. Una industria produce dos tipos de plástico: común y especial. Cada tonelada de plástico común necesita 2 horas en la planta A y 5 en la planta B; cada tonelada de plástico especial necesita 2 horas en la planta A y 3 en la planta B. Si la planta A tiene disponibles 8 horas al día y la planta B 15 horas al día, ¿cuántas toneladas de cada tipo de plástico pueden fabricarse diariamente de modo que las plantas operen a toda su capacidad? Resuelve el problema utilizando el método del pivote parcial.

	Plástico común	Plástico especial	
Planta A	2	2	8
Planta B	5	3	15

$2x + 2y = 8$

$5x + 3y = 15$

Puesto que tenemos que usar pivoteo parcial, hemos de intercambiar las filas:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 15 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Perfect

Y ahora resolviendo por eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 15 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{5 \cdot 2ª - 2 \cdot 1ª} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 15 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$4y = 10 \quad y = 2'5$

$5x + 3 \cdot 2'5 = 15 \quad 5x = 7'5 \quad x = 1'5$

Se podían fabricar 2'5 toneladas de plástico especial y 1'5 toneladas de plástico común.

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1 - \cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

Simpson compuesto

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4I + 2P + f(b)\right]$$

v(t)	0	0'35	0'68	0'96	1'19
t(s)	0	0'5	1	1'5	2
n	0	1	2	3	4

$$I \simeq \frac{2}{3.4}\left[4(0'35+0'96)+2.0'68+1'19\right] = 1'2983$$

Error absoluto $\Rightarrow$ $|1'2983 - 1'300221| = 1'8876.10^{-3}$

Error y cota

$f(x) = \sqrt{1-\cos(t)}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\cos(t)}}$ Has derivado mal $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\cos t}} \cdot \operatorname{sen} t$

$f''(x) = -\frac{1}{4}.(1-\cos x)^{-3/2}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}(1-\cos x)^{-5/2}$

$f^4(x) = -\frac{15}{16}(1-\cos x)^{-7/2}$

Error: $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} f^4(\xi) = 6'51.10^{-4}(1-\cos\xi)^{-7/2}$

Cota: $|f^4(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$

$\dfrac{M(b-a)^5}{180\,n^4}$

Cota del error $= \dfrac{2^5}{180.4^4} \cdot \dfrac{15}{16} \cdot 1^{-7/2} = 6'51.10^{-4}$

21. Aplicación a la Industria. Una refinería de petróleo produce gasolina con y sin plomo. Cada tonelada de gasolina sin plomo requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinado. Por su parte, cada tonelada de gasolina con plomo requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinado. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinado 2, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?

	Sin plomo	Con plomo	
Planta de mezclado	5	4	180
Planta de refinado	4	2	120

Perfect

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 180 \\ 4 & 2 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow{5\cdot 2^{a} - 4\cdot 1^{a}} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 180 \\ 0 & -6 & -120 \end{array}\right)$$

$-6y = -120 \quad y = 20$

$5x + 4 \cdot 20 = 180 \quad x = 20$

Se deben producir 20 toneladas de cada tipo de gasolina para conseguir el máximo rendimiento.

20. Aplicación a la Química. Para controlar cierta enfermedad de una planta se utilizan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del químico A, 12 unidades del químico B, y 8 unidades del químico C. En el mercado hay tres marcas que se pueden utilizar. Tres litros del producto de la marca X contiene una unidad de A, dos de B y una de C. Tres litros del producto de la marca Y contiene dos unidades de A,una de B y tres de C, y tres litros del producto de la marca Z contiene tres unidades de A, dos de B y una de C. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los químicos requeridas para el control de la enfermedad? Resuelve el problema utilizando una factorización LU.

	Producto A	Producto B	Producto C
Marca X	1	2	1
Marca Y	2	1	3
Marca Z	3	2	1
	10	12	8

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[3ª-1ª]{2ª-2\cdot 1ª} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3ª-(-1/3)\cdot 2ª} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{array}\right) \equiv U$$

$$L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = L \cdot U \qquad L \cdot y = b \qquad Ux = y$$

Perfect.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} y_1 = 10 \\ 2y_1 + y_2 = 12 \\ y_1 - 1/3 y_2 + y_3 = 8 \end{array} \qquad \begin{cases} y_1 = 10 \\ y_2 = -8 \\ y_3 = -14/3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -14/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} -\frac{10}{3} x_3 = -\frac{14}{3} \quad x_3 = 1'4 \\ -3x_2 - 4 \cdot 1'4 = -8 \quad x_2 = 0'8 \\ x_1 + 2 \cdot 0'8 + 3 \cdot 1'4 = 10 \quad x_1 = 4'2 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} \text{Las unidades son} \\ \text{3 litros} \end{array}$$

Deberían emplear 12'6 L de la marca X, 2'4 L de la marca Y y 4'2 L de la marca Z.

6. Aplicación a la Electricidad. La carga en un circuito eléctrico con respecto al tiempo viene dado por:

	x_0	x_0+h	x_0+2h	x_0+3h	x_0+4h
t	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010
q	2.5	2.5523	2.6087	2.6682	2.7299	2.7931

donde t, es el tiempo en segundos y q la carga en culombios. Se sabe que la corriente instantánea es igual a la derivada de la carga en ese instante; ¿cuál es la fórmula de derivación lineal progresiva? Calcula el valor de la derivada con $h = 0{,}002$.

Corriente $= \frac{dq}{dt} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$

¡Cuidado! Te piden fórmula lineal progresiva. Esta fórmula es la progresiva de 5 puntos

$f'(0) = \frac{1}{12 \cdot 0{,}002}[-25 \cdot 2{,}5 + 48 \cdot 2{,}5523 - 36 \cdot 2{,}6087 + 16 \cdot 2{,}6682 - 3 \cdot 2{,}7299] = 24{,}9458$

Tienes que calcular la derivada en todos los puntos de la tabla.

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

$h = 1$

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7.

Fórmulas de tres puntos

Progresiva: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$

Centrada: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$

Perfecto.

Regresiva: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)]$

Fórmulas de 5 puntos

Progresiva: $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$

Centrada: $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$

Regresiva $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[25f(x_0) - 48f(x_0-h) + 36f(x_0-2h) - 16f(x_0-3h) + 3f(x_0-4h)]$

→ Derivada en 0

Fórmula progresiva de tres puntos $f'(0) = \frac{1}{2}(-3.35 + 4.52 - 95) = 4$

Fórmula progresiva de cinco puntos $f'(0) = \frac{1}{12}(-25.35 + 48.52 - 36.95 + 16.140 - 3.198) =$ $-12'75$

→ Derivada en 3

Progresiva 3 puntos: $f'(3) = \frac{1}{2}(-3.140 + 4.198 - 266) = 53$

Regresiva 3 puntos: $f'(3) = \frac{1}{2}(52 - 4.95 + 3.140) = 46$

Centrada 3 puntos: $f'(3) = \frac{1}{2}(-95 + 198) = 51'5$

Progresiva 5 puntos: $f'(3) = \frac{1}{12}(-25.140 + 48.198 - 36.266 + 16.342 - 3.465) = 42'0833$

Centrada 5 puntos: $f'(3) = \frac{1}{12}(52 - 8.95 + 8.198 - 266) = 50'8333$

→ Derivada en 7

Regresiva 3 puntos: $f'(7) = \frac{1}{2}(266 - 4.342 + 3.465) = 146'5$

Regresiva 5 puntos: $f'(7) = \frac{1}{12}(25.465 - 48.342 + 36.266 - 16.198 + 3.140) = 169'75$

8. Aplicación a la Física. Se cronometra un móvil de prueba, que se traslada por una vía recta, en algunos puntos. Los datos de las observaciones están recogidos en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos y la distancia en metros. Utilizando las fórmulas más precisas de tres puntos, calcula la velocidad aproximada en cada punto de la tabla.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	2	3	6	7	9

$f'(0) = \frac{1}{2.5}(-3.0+4.3-7) = 0'5$

$f'(3) = \frac{1}{2.5}(-3.2+4.6-9) = 0'9$

$f'(5) = \frac{1}{2.5}(0+7) = 0'7$

$f'(8) = \frac{1}{2.5}(2+9) = 1'1$

$f'(10) = \frac{1}{2.5}(0-4.3+3.7) = 0'9$

$f'(13) = \frac{1}{2.5}(2-4.6+3.9) = 0'5$

Como los puntos no son equidistantes tomo $h=5$ y así consigo que lo sean pudiendo calcular la derivada en todos los puntos.

No, en este caso tienes que decir que el problema con todos los datos no se puede resolver.

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos:

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

Para $t=2$ empleeremos la fórmula centrada de 3 puntos pues es la más exacta que podemos aplicar.

$$f'(2) = \frac{1}{2.2}(-500 + 1500) = 250$$ Perfecto

Para $t=8$ empleeremos la fórmula centrada de 5 puntos, la más exacta

$$f'(8) = \frac{1}{12.2}(1500 - 8.2000 + 8.3000 - 3500) = 250$$

Para $t=10$ también emplearemos la fórmula centrada de 5 puntos porque es la más exacta.

$$f'(10) = \frac{1}{12.2}(2000 - 8.2500 + 8.3500 - 4000) = 250$$

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

Con n=0 fórmula del punto medio.

$$\int_a^b f(x)dx \sim G(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad f(3/2) = \frac{10 \cdot 1'5}{(\sqrt{1'5}+1)^5} = 0'275226$$

$G(f) = 1 \cdot f(3/2) = 0'275226$

Fórmula con n=1

$$\int_a^b f(x)dx \sim G_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b-a}{2}\right)\right]$$

$G_1(f) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot(0'2962 + 0'3286) =$

✓ Has olvidado el 10

$= 0'3124$

El procedimiento está bien

$f\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = f(1'2113) = \frac{10 \cdot 1'2113}{(\sqrt{1'2113}+1)^5} = 0'2962$

$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = f(0'7886) = \frac{10 \cdot 0'7886}{(\sqrt{0'7886}+1)^5} = 0'3286$

13. Aplicación a la Física. En un punto de una línea de ensamblaje de automóviles se observa cuántos coches pasan por minuto, obteniéndose los siguientes datos

trapecios simple | Simpson 1/3 | Simpson 1/3

Hora	0:00	2:00	3:00	6:00	9:00	11:00	14:00	17:00	18:00
Coches por minuto	3	3	5	4	5	6	2	1	1

T.S. | T.S. | T.S.

Simpson 3/8

19:00	20:00	24:00
3	4	6

Utilizando los métodos de los trapecios y de Simpson, determina el número total de coches que pasa por día en dicho punto.

Debemos ir calculando la integral por diferentes métodos según el intervalo para conseguir que los puntos estén equiespaciados.

Intervalo $[0{:}00, 2{:}00]$ $T(f) = \frac{2}{2}(3+3) = 6$

Intervalo $[2{:}00, 3{:}00]$ $T(f) = \frac{1}{2}(3+5) = 4$ Perfecto.

Intervalo $[3{:}00, 9{:}00]$ $S_{1/3}(f) = \frac{6}{6}(5+4.4+5) = 26$

Intervalo $[9{:}00, 11{:}00]$ $T(f) = \frac{2}{2}(6+5) = 11$

Intervalo $[11{:}00, 17{:}00]$ $S_{1/3}(f) = \frac{6}{6}(6+4.2+1) = 14$

Intervalo $[17{:}00, 20{:}00]$ $S_{3/8}(f) = \frac{3}{8}(1+3.1+3.3+4) = \frac{51}{8}$

Intervalo $[20{:}00, 24{:}00]$ $T(f) = \frac{4}{2}(4+6) = 5$

Número total de coches $= 6+4+26+11+14+\frac{51}{8}+5 = 72'375$

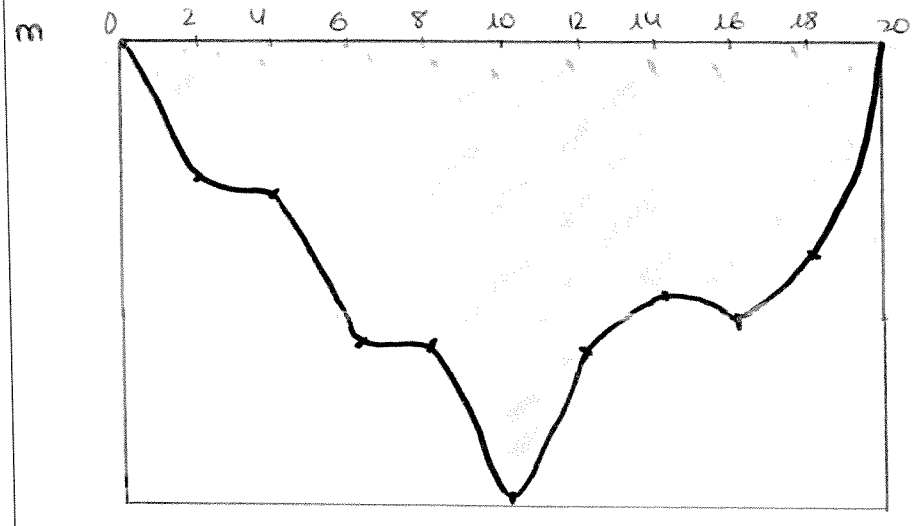
En total pasan 73 coches de día.

14. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En un canal de 20 m de ancho, se hacen mediciones de profundidad cada dos metros, obteniendo los siguientes resultados:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Profundidad		1.8	2	4	4	6	4	3.4	3.6	2.8
m		2	4	6	8	10	12	14	16	18

La profundidad en los extremos del canal es 0. Calcula, aproximadamente, el área de la sección del canal.

Te falta añadir los ceros en la tabla, pero el problema está perfecto.



Empleamos Simpson compuesto para hallar el área

$$S(f) = \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right) = \frac{20}{3 \cdot 10}\left(4(1'8+4+6+3'4+2'8) + 2(2+4+4+3'6)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}(72+27'2) = 66'1\widehat{3}$$

Como el área que queremos calcular es la coloreada, debemos restar lo que hemos obtenido al área total del rectángulo:

Área canal $= 400 - 66'1\widehat{3} = 333'8667\ m^2$

Álvaro González Garimano.

02- Junio - 2011

INTERPOLACIÓN

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

Para facilitar los cálculos $t = x$

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}
$x_0 = 0$	$y_0 = 9{,}5$	$y_{01} = -2{,}467$	$y_{012} = \frac{-1{,}832 + 2{,}467}{2} = 0{,}3175$	$y_{0123} = \frac{0{,}23 - 0{,}3}{3}$
$x_1 = 1$	$y_1 = 7{,}033$	$y_{12} = -1{,}832$		$y_{0123} = -0{,}0271$
$x_2 = 2$	$y_2 = 5{,}201$	$y_{13} = -1{,}3597$	$y_{123} = \frac{-1{,}3597 + 1{,}832}{2} = 0{,}2362$	
$x_3 = 3$	$y_3 = 3{,}8413$			

Mal calculado. ¿Será problema de la calculadora?

0 0'2 1 2 3

Has tomado un intervalo demasiado grande para aproximar $f(0'2)$, Álvaro.

$P(x) = 9{,}5 - 2{,}467x + 0{,}3175x(x-1) - 0{,}0271x(x-1)(x-2)$

$P(0'2) = 9{,}5 - 2{,}467(0{,}2) + 0{,}3175(0{,}2)(-0{,}8) - 0{,}0271(0{,}2)(-0{,}8)(-1{,}8)$

$\hookrightarrow P(0{,}2) = 8{,}948 \quad ; \quad f(0{,}2) = 8{,}2405$

El procedimiento está bien.

$E_{abs} = |8{,}948 - 8{,}2405| = 0{,}7075$

$4! = 24$

$|f(x) - p(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}|x||x-1||x-2||x-3|$

~~f(5)~~) $f^{(4)}(\xi)$? $f^{(4)}(x) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\left(0{,}216\,\text{sen}(2t) - 17{,}4319\cos(2t)\right)$

es decreciente → máx → 0

La llegada a la deriv. 4ª en eleva

$f^{(4)}(0) = 9{,}5 \qquad |f(x) - p(x)| \leq \frac{9{,}5}{24} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0{,}8 \cdot 1 \cdot 1{,}8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8 \cong 0{,}3192$???

¿no me cuadra?

El intervalo es enorme

$$p'(x) = 9{,}5\, e^{-0{,}3t} \left[-0{,}3\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t)\right]$$

$$p''(x) = 9{,}5 \cdot e^{-0{,}3t}\left(4{,}09\cos(2t) + 1{,}2\,\text{sen}(2t)\right)$$

$$f'''(x) = 9{,}5\, e^{-0{,}3t}\left[1{,}173\cos(2t) - 8{,}54\,\text{sen}(2t)\right]$$

$$f''''(x) = 9{,}5 \cdot e^{-0{,}3t}\left[0{,}216\,\text{sen}(2t) - 12{,}4319\cos(2t)\right]$$

2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

se trabajará con x en lugar de t

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_{01} = \frac{305{,}21}{10} = 30{,}521$	$y_{0123} = \frac{39{,}612 - 30{,}521}{20} = 0{,}4546$
$x_1 = 10$	$y_1 = 305{,}21$	$y_{12} = \frac{701{,}33 - 305{,}21}{10} = 39{,}612$	
$x_2 = 20$	$y_2 = 701{,}33$		

El intervalo sigue siendo derecha grande

$P(x) = 30{,}521\,(x) + 0{,}4546 \times (x-10)$ ⟵

$P(11) = 30{,}521\,(11) + 0{,}4546\,(11)\,(11-10) = 340{,}7426$

$E_{abs}: |340{,}7426 - 340{,}1142| = 0{,}6284$ El resto está bien

cota del error.

$f'''(x) \rightarrow$ en el dorso $\rightarrow f'''(x) = \frac{8{,}47 \cdot 10^{10}(16000 - 268t)}{(16000 - 268t)^4 3}$

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{f'''(20)}{3!}(11)(1)(9) = \frac{0{,}0703}{3 \cdot 2} 11 \cdot 9 = 1{,}1602$

$f'''(20) = 0{,}0703$

cota error: $1{,}1602$

otra forma de sacar

$$f(x) = 2200\left(\log(160000)\right) - 2200\left(\log(160000 - 2680t)\right) - 9{,}81\,t$$

$$f'(x) = -2200\,\frac{2680}{160000 - 2680t} - 9{,}81 = \frac{589600}{16000 - 268t} - 9{,}81$$

$$f''(x) = \frac{15801280}{(16000 - 268t)^2};$$

$$f^{3)}(x) = \frac{-15801280 \cdot 2 \cdot 268\,(16000 - 268t)}{(16000 - 268t)^4} = \frac{8{,}47 \cdot 10^{10}}{(16000 - 268t)^3}$$

3. Aplicación a las Probabilidades. En la siguiente tabla se contemplan algunos valores de la probabilidad: $y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\Pi}\int_0^x e^{-t^2}dt$

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661

Por medio de interpolación de Newton, aproxima el valor para $y(1{,}32)$. Calcula una cota del error cometido.

$x_0 = 1,0$	$y_0 = 0,8427$	(01) 0,375	(012) −0,37	(0123) 0,1667	(01234) 0
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,8802$	(12) 0,301	(123) −0,32	(1234) 0,1667	(12345) −0,0417
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,9103$	(23) 0,237	(234) −0,27	(2345) 0,15	(012345) $-8,33 \cdot 10^{-3}$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,9340$	(34) 0,183	(345) −0,225		
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,9523$	(45) 0,138			
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,9661$				

$$P(x) = 0,8427 + 0,375(x-1) - 0,37(x-1)(x-1,1) + 0,1667(x-1)(x-1,1)(x-1,2) - 8,33\cdot 10^{-3}(x-1)(x-1,1)(x-1,2)(x-1,3)(x-1,4)$$

$$P(1,32) = 0,8427 + 0,375(0,32) - 0,37(0,32)(0,22) + 0,1667(0,32)(0,22)(0,12) - 8,33\cdot 10^{-3}(0,32)(0,22)(0,12)(0,02)(-0,08)$$

$$P(1,32) = 0,8427 + 0,12 - 0,026 + 1,41\cdot 10^{-3} + 1,33\cdot 10^{-7} = 0,9381$$

$P(1,32) = 0,9381$

No puedo hallar ~~el error abs~~ ~~la cota~~ pq la integral $\int e^{-t^2}$ no se puede resolver para si en un pto. la cota

Th. Fund. cálculo $\int f'(x) = g(x)$

$f'(x) = \frac{2}{\Pi}e^{-x^2} \rightarrow f'''(x) = \frac{2}{\sqrt{\Pi}}e^{-x^2}(4x^2 - 2)$ Pedro

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{f'''(\xi)}{3!}\underbrace{|x-1|}_{0,5}\underbrace{|x-1,1|}_{0,4}\underbrace{|x-1,2|}_{0,3}\underbrace{|x-1,3|}_{0,3}\underbrace{|x-1,4|}_{0,4}\underbrace{|x-1,5|}_{0,5}$$

a lo bruto:

$$f'''(\xi) \simeq \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\cdot 1 \rightarrow |f(x) - P(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{\Pi}\cdot 3\cdot 2}\cdot 0,5^2\cdot 0,4^2\cdot 0,3^2 = 6,77\cdot 10^{-4}$$

4. Aplicación a la Ingeniería Química. La densidad del carbonato de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración. En un experimento para determinar la densidad del carbonato, se consideró la temperatura constante y se varió la concentración, obteniendo la tabla:

x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1.0276	1.1013	1.1801	1.2652	1.3480	1.4120

Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno y aproxima el valor de la densidad del carbonato de potasio en solución acuosa para una concentración de 25 %.

como quiero el 25 %

$\Rightarrow$ $\begin{array}{c|cc} & 20 & 28 \\ \hline & 1,1801 & 1,2652 \end{array}$; $P(x) = 1,1801 \dfrac{x-28}{(20-28)} + 1,2652 \dfrac{x-20}{28-20}$

$P(x) = 0,1582(x-20) - 0,1475(x-28)$

$P(25) = 0,1582(25-20) - 0,1475(25-28) =$

$= 0,791 + 0,4425 = 1,2335$ perfect.

densidad al 25 % $\rightarrow$ 1,2395

5. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En época de lluvias, en una presa se toman seis medidas del nivel del agua durante un mes, obteniéndose los siguientes datos:

t %	0	5	15	16	23	30
y (densidad)	8.20	11.4	19.9	22.4	25.2	26.8

El tiempo se mide en días y el nivel del agua en metros. Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, y aproxima el valor del nivel del agua al décimo día del mes.

2º grado ⇒ 3 ptos quiero a los 10 días ⇒ 5/15/16
los + próximos

	5	15	16
	11,4	19,9	22,4

Perfecto.

$$P(x) = 11,4\,\frac{(x-15)(x-16)}{(5-15)(5-16)} + 19,9\,\frac{(x-5)(x-16)}{(15-5)(15-16)} + 22,4\,\frac{(x-5)(x-15)}{(16-5)(16-15)} =$$

$$= 11,4\,\frac{(x-15)(x-16)}{110} + 19,9\,\frac{(x-5)(x-16)}{10} + 22,4\,\frac{(x-5)(x-15)}{19}$$

$$P(x) = 0,1036\,(x-15)(x-16) - 1,99\,(x-5)(x-16) + 2,0383\,(x-5)(x-15)$$

$$P(10) = 0,1036\,(-5)(-6) + 1,99\,(5)(-6) + 2,0383\,(5)(-5)$$

$$P(10) = 3,108 + 59,7 - 50,9090 = 11,8989$$

$$\boxed{P(10) = 11,8989}$$

DERIVACIÓN NUMÉRICA

6. Aplicación a la Electricidad. La carga en un circuito eléctrico con respecto al tiempo viene dado por:

t	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010
q	2.5	2.5523	2.6087	2.6682	2.7299	2.7931

donde t, es el tiempo en segundos y q la carga en culombios. Se sabe que la corriente instantánea es igual a la derivada de la carga en ese instante; ¿cuál es la fórmula de derivación lineal progresiva? Calcula el valor de la derivada con $h = 0{,}002$.

Fórmula progresiva de 5 ptos:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)\right]$$

$$f'(0{,}002) \approx \frac{1}{12(0{,}002)}\left[-25(2{,}5523) + 48(2{,}6087) - 36(2{,}6682) + 16(2{,}7299) - 3(2{,}7931)\right] =$$

$$= 41{,}6667\left[-63{,}8075 + 125{,}2176 - 96{,}0552 + 43{,}6704 - 8{,}3793\right] = 41{,}6667\,(0{,}646)$$

$$f'(0{,}002) = 26{,}917$$

¡Cuidado! Fíjate bien en el enunciado. Se pide la fórmula de derivación lineal progresiva. No la fórmula progresiva de 5 puntos

Tienes que calcular el valor de la derivada en todos los puntos de la tabla con esta fórmula.

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7.

3 ptos
- progr: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$
- centr: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)]$ Perfecto.
- regr: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)]$

5 ptos
- centr: $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)]$
- progr: $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)]$
- regr: $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[25f(x_0) - 48f(x_0-h) + 36f(x_0-2h) - 16f(x_0-3h) + 3f(x_0-4h)]$

f'(0)

- progr. 3 ptos: $f'(0) = \frac{1}{2}[-3(35) + 4(52) - 95] = 9$
- progr. 5 ptos: $f'(0) = \frac{1}{12}[-25(35) + 48(52) - 36(95) + 16(140) - 3(198)] =$

$$f'(0) = \frac{1}{12}(-875 + 2496 - 3420 + 2240 - 594) =$$

$$= -12{,}75$$

f'(7)

- regres. 3 ptos: $f'(7) = \frac{1}{2}[266 - 4(342) + 3(465)] =$

$$= 146{,}5$$

- regres 5 ptos: $f'(7) = \frac{1}{12}[25(465) - 48(342) + 36(266) - 16(198) + 3(140)] = 169{,}75$

$f'(3)$ →

3 ptos

progresiva: $f'(3) = \frac{1}{2}[-3(140) + 4(198) - 266] = 53$

regresiva: $f'(3) = \frac{1}{2}[52 - 4(95) + 3(140)] = 46$

centrada: $f'(3) = \frac{1}{2}[-95 + 198] = 51,5$

5 ptos

progresiva: $f'(3) = \frac{1}{12}[-25(140) + 48(198) - 36(266) + 16(342) + 3(465)] =$

$= 42,08$

regresiva $f'(3) =$ ~~$\frac{1}{12}[(-25(140)$~~ ×

Centrada: $f'(3) = \frac{1}{12}[52 - 8(95) + 8(198) - 266] = 50,83$

8. Aplicación a la Física. Se cronometra un móvil de prueba, que se traslada por una vía recta, en algunos puntos. Los datos de las observaciones están recogidos en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos y la distancia en metros. Utilizando las fórmulas más precisas de tres puntos, calcula la velocidad aproximada en cada punto de la tabla.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	2	3	6	7	9

x	0	3	5	8	10	13
y	0	2	3	6	7	9

h → no es cte (en muchos casos no puedo)

Perfect

$f'(0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{2-0}{3} = 2/3$ m/s

$f'(3) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{3-2}{2} = 1/2$ m/s

(Si) $f'(5) = \frac{1}{2h}[0 + 7]$; con $h=5 \rightarrow f'(5) = \frac{7}{10}$ m/s

(Si) $f'(8) = \frac{1}{2h}[-2 + 9] =$ con $h=5 \rightarrow f'(8) = \frac{7}{10}$ m/s

$f'(10) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{9-7}{3} = 2/3$ m/s

$f'(13) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \frac{9-7}{3} = 2/3$ m/s

no puedo usar las de 3 ptos por los intervalos no son ctes.
solo con $t=5$ $t=8$ quitando intervalos

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos:

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

aceleración instantánea: $\frac{dv}{dt}$ Perfect

$$f'(2) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h) + f(x_0+h)\right] = \frac{1}{4}(-500+1500) = 250$$

$$f'(8) = \frac{1}{12(2)}\left[1500 - 8(2000) + 8(3000) - 3500\right] = 250$$

$$f'(10) = \frac{1}{24}\left[+2000 - 8(2500) + 8(3500) - 4000\right] = 250$$

⇒ aceleración es de

t:	2	8	10
a:	250	250	250

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{1-\cos(t)}\,dt$

$\int_0^2 \sqrt{1-\cos(t)}\,dt$ con $n=4$ (supongo yo) $\Rightarrow$ 5 ptos

t	0	0,5	1	1,5	2
$v(t)$	0	0,3499	0,6781	0,9640	1,1900

Simpson 1/3 comp:

$$\int_0^2 \sqrt{1-\cos(t)}\,dt \simeq \frac{2-0}{3\cdot 4}\left(f(0) + 4f(1) + 2(f(0,5)+f(1,5)+f(2)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4(0,678) + 2(0,3499 + 0,9640) + 1,19\right) =$$

$$= 1/6\,(2,712 + 2,6278 + 1,19) = \boxed{1,0883}$$

Eabs: $|1,3002 - 1,0883| = 0,2169$

error: $-\frac{h^4}{180}(b-a)f^4(\eta)$; $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = 1/2$

$\hookrightarrow -\frac{(1/2)^4}{180}(2)f^{(4)}(\eta) = 6,94\cdot 10^{-4} f^{4)}(\eta)$

No. Observa que no podemos dar el valor 0, porque se anula el denominador.

$f^{4)}(\eta) = \frac{\text{sen}^8(x/2)}{(1-\cos(x))^{7/2}} \rightsquigarrow$ error $= \left|6,94\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{sen}^8(\eta/2)}{(1-\cos(\eta))^{7/2}}\right|$

Cota $\rightarrow \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = M\cdot\frac{2^5}{180\cdot 4^4} = M\cdot\frac{2^5}{180(2^2)^4} = 6,94\cdot 10^{-4} M$

Hay que evitar el 0.

máx valor $\sqrt{1-\cos(t)} \rightarrow 2$

si $\cos(t) = -1$ cuando $t = \pi \rightarrow$

$\hookrightarrow \sqrt{2}$

$\Rightarrow 6,94\cdot 10^{-4}\sqrt{2} = \boxed{9,81\cdot 10^{-4}}$ cota

11. Aplicación al Cálculo. Calcula el área de la región situada bajo la curva $y = 4x\tan(x) + 2$ de 0 a 1. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto cometido.

necesito varios puntos $y = 4x\tan(x) + 2$ $0-1$

0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
0	2,2553	3,0926	4,7948	8,2296

$$\int_0^1 (4x\tan(x) + 2)\,dx = 2\int_0^1 (2x\tan(x) + 1)\,dx$$

$$\int_0^1 (2x\tan(x) + 1)\,dx \cong \frac{1-0}{3\cdot 4}\left[f(0) + 4f(0{,}5) + 2(f(0{,}25) + f(0{,}75)) + f(1)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[0 + 4(3{,}0926) + 2(2{,}2553 + 4{,}7948) + 8{,}2296\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[12{,}3704 + 14{,}1002 + 8{,}2296\right] = \boxed{2{,}8917}$$

$\Rightarrow$ área $= 2\,(2{,}8917) = \boxed{5{,}7834}$

valor exacto $\rightarrow$ 3,7124 ¿cómo calculo el valor exacto?

$E_{abs}: |5{,}7834 - 3{,}7124| = \underline{2{,}071}$ un poco ¿alto no?

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

(n=0) $W = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}\,dx$

$\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}\,dx \cong (2-1)\, f\left(\frac{2+1}{2}\right) = f(3/2)$

$f(3/2) = \frac{10\,(3/2)}{(\sqrt{1{,}5}+1)^5} = \frac{15}{(1{,}2247+1)^5} = 0{,}2752$ ✓

(n=1) $\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5} \cong \frac{2-1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\right)\right]$

① $f(1{,}2113) = 0{,}2962$

② $f(1{,}7887) = 0{,}2564$

$\Rightarrow = \frac{1}{2}(0{,}2962 + 0{,}2564) = 0{,}2763$ ✓

13. Aplicación a la Física. En un punto de una línea de ensamblaje de automóviles se observa cuántos coches pasan por minuto, obteniéndose los siguientes datos

Hora	0:00	2:00	3:00	6:00	9:00	11:00	14:00	17:00	18:00
Coches por minuto	3	3	5	4	5	6	2	1	1

19:00	20:00	24:00
3	4	6

Utilizando los métodos de los trapecios y de Simpson, determina el número total de coches que pasa por día en dicho punto.

$\frac{nº\,coches}{día}$ $\int_0^{24} f(x)dx$ a Trap. $\int_0^{24} f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

Trap: $\int_0^{24} f(x)dx \simeq \frac{24-0}{2}(f(0)+f(24)) = 12(3+6) = 108$ real dato

¿¿Simpson?? No, Alicia, tienes que usar todos los datos hacerlo Trapecios y Simpson 1/3 y Simpson 3/8 donde puedas, y sumar todos los resultados.

14. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En un canal de 20 m de ancho, se hacen mediciones de profundidad cada dos metros, obteniendo los siguientes resultados:

Profundidad	1.8	2	4	4	6	4	3.4	3.6	2.8

La profundidad en los extremos del canal es 0. Calcula, aproximadamente, el área de la sección del canal.

anchura	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
profund	0	1,8	2	4	4	6	4	3,4	3,6	2,8	0
	$a = x_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$b = x_{10}$

anchura → x prof. $y \to f(x)$ Simpson compuesto $n=10$

$$\Rightarrow \int_0^{20} f(x)dx \cong \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right) =$$

Mal. Estos puntos son de índice impar

$$= \frac{20}{3\cdot 10}\left(0 + 4\left(f(2) + f(8) + f(12) + f(16)\right) + 2\left(f(4) + f(6) + f(10) + f(14) + f(18)\right) + 0\right)$$

Mal. Estos puntos son de índice par

$$= \frac{2}{3}\left(4\left[2 + 4 + 4 + 3,6\right] + 2\left(1,8 + 4 + 6 + 3,4 + 2,8\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(4\left[13,6\right] + 2(18)\right] = 60,267$$

Área = 60,267 m²

APROXIMACIÓN DE RAÍCES

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$x_0 = 3$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{8}{15} = 2,4667$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,4667 - \frac{1,8391}{8,387} = 2,2474$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,2474 - \frac{0,2497}{6,1628} = 2,2069$

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,2069 - \frac{7,64 \cdot 10^{-3}}{5,7836} = 2,2056$

$\Rightarrow$ err. relativo: $|2,2069 - 2,2056| = 1,32 \cdot 10^{-3}$

cifras exactas 2,20 (3)

$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 2,2056 - \frac{1,5728 \cdot 10^{-4}}{5,7716} = 2,20557$

err. relativo (a 4 cifras) $\simeq 0$

valor real $\rightarrow$ 2,2056 a $t = 2,2056$ seg

$v'(t) = 3t^2 - 4t$; $v''(t) = 6t - 4$ $\quad 6t = 4$ $\quad t = 4/6 = 2/3$

pillaría el pto. inflexión $\Rightarrow$ no se podría usar $x_0 = 0$ pq la $f''(0)$ debe ser cte. en el $(0, 2,21)$ en este caso

No, la razón es que $v'(t) = 0$ y el denominador se anularía en el método.

18. Aplicación a la Ingeniería Eléctrica. Una corriente oscilatoria en un circuito eléctrico se describe mediante la ecuación $I = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t)$, donde t está dado en segundos. Determínense todos los valores de t tales que $I = 2$.

si quiero que $2 = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t)$

$\Rightarrow 0 = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t) - 2$

$f(x) = 10e^{-x}(\operatorname{sen} 2\pi x) - 2$

→ se comprueba que $f(0) = f(1/2) = f(3/4) = f(1) \cong -2 < 0$

p.q. es periódica → hay ∞ soluciones

$f(0) < 0$
$f(1/4) > 0$
$f(1/2) < 0$ ⇒ $(0, 1/4)$ bisección
$f(3/4) > 0$
$f(1) < 0$

a partir de un valor → es sumarle $(K = 0,5)$ → es el intervalo

¿la raíz en el intervalo es única

Tiene que ver que $f'(x) \neq 0$

fd	a_i	c_i	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
$n=0$	0	0'125	0'25	<0	>0	>0
$n=1$	0	0,0625	0,125	<0	>0	>0
$n=2$	0	0,03125	0,0625	<0	<0	>0
$n=3$	0,03125	$4,68\cdot10^{-2}$	0,0625	<0	>0	>0
$n=4$	0,03125	0,039	$4,68\cdot10^{-2}$	<0	>0	>0
$n=5$	0,03125	0,03513	0,039	<0	>0	>0
$n=6$	0,03125	0,03319	0,03513	<0	>0	>0

$f(c_6) = 2,72\cdot10^{-3} \cong 0,002 \cong 0$

$\Rightarrow t = 0,03319$ seg
$+ 0,5$
$+ 1,0$
$+ 1,5$

$t = 0,03319 + K \cdot 0,5$ seg

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

20. Aplicación a la Química. Para controlar cierta enfermedad de una planta se utilizan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del químico A, 12 unidades del químico B, y 8 unidades del químico C. En el mercado hay tres marcas que se pueden utilizar. Tres litros del producto de la marca X contiene una unidad de A, dos de B y una de C. Tres litros del producto de la marca Y contiene dos unidades de A,una de B y tres de C, y tres litros del producto de la marca Z contiene tres unidades de A, dos de B y una de C. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los químicos requeridas para el control de la enfermedad? Resuelve el problema utilizando una factorización LU.

10 A / 12 B / 8 C

	A	B	C
Prod x	1	2	1
Prod y	2	1	3
Prod z	3	2	1

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + y + 2z = 12 \\ x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

con $1L = 3l$

Factorizar L.U.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{L \cdot U \cdot x}_{y} = b \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \qquad Ux = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = 10 \\ 2y + y_2 = 12 \Rightarrow y_2 = -8 \\ y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 8 \Rightarrow y_3 = -\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -\frac{10}{3}x_3 = -\frac{14}{3} \Rightarrow x_3 = 1{,}4 \\ -3x_2 - 4x_3 = -8; \; -3x_2 = -8 - 4(1{,}4) \\ \hookrightarrow x_2 = 4{,}53 \\ x_1 = 10 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Te equivocaste en el signo

El resto está bien.

$$x_1 = 10 - 9{,}06 - 3(1{,}4)$$

$$x_1 = 3{,}26.$$

$\Rightarrow$ $x = 3{,}26$, $y = 4{,}53$, $z = 1{,}4$ } dosis de 3 L $\xrightarrow{\text{en L}}$ { 9,78 L de x, 13,59 L de y, 4,2 L de z }

21. Aplicación a la Industria. Una refinería de petróleo produce gasolina con y sin plomo. Cada tonelada de gasolina sin plomo requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinado. Por su parte, cada tonelada de gasolina con plomo requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinado. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinado 2, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?

$x_1 \to$ toneladas sin Pb $x_2 \to$ toneladas con Pb

ec. mezclado: $5x + 4y = 180$ { hótese t€ min
ec. refinado: $4x + 2y = 120$ { descomposición L.U

$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4/5 F_1} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -6/5 \end{pmatrix}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4/5 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -6/5 \end{pmatrix}$

$Ly = b$ { $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \end{pmatrix}$ { $y_1 = 180$ Perfect
$Ux = y$ { $\frac{4}{5} y_1 + y_2 = 120$

$144 + y_2 = 120 \to y_2 = 120 - 144 = -24$ $y = \begin{pmatrix} 180 \\ -24 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -6/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ -24 \end{pmatrix}$; $\frac{-6}{5} x_2 = -24 \to 6x_2 = 120$

$x_2 = 20$

$5x_1 = 180 - 4x_2 = 180 - 4(20) = 100$; $x_1 = 20$

Tantas toneladas de Pb como de sin Pb

↳ en total 20 toneladas de cada uno

23. Aplicación a la Nutrición. Un endocrino esta preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada 100 gr del alimento A contienen 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento B contienen 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento C contienen 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidad de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan? Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

	Proteí	Grasas	Carbohidratos
100 gr A	2	3	4
100 gr B	3	2	1
100 gr C	3	3	2
	25	24	21

$$\begin{cases} 2A + 3B + 3C = 25 \\ 3A + 2B + 3C = 24 \\ 4A + B + 2C = 21 \end{cases}$$

Perfect

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - \frac{3}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \quad \Bigg\| \quad -1C = -2 \; ; \; C = 2$$

$$-2'5B - 1,5C = -13,5$$

$$-2'5B - 3 = -13,5$$

$$-2'5B = -10,5 \; ; \; B = \frac{10'5}{2,5} = 4,2 \quad B = 4,2$$

$$2A + 3B + 3C = 25$$

$$2A = 25 - 3(4,2) - 3(2) = 25 - 12,6 - 6 = 6,4$$

$$\Rightarrow A = 3,2$$

Todo por cien $\hookrightarrow$ $\begin{cases} \text{gr C} \rightarrow 200 \\ \text{gr B} \rightarrow 420 \\ \text{gr A} \rightarrow 320 \end{cases}$

24. Aplicación al Álgebra Lineal. Sabemos que la matriz inversa de una matriz A es la matriz X que es solución de la ecuación $AX = I$, donde I es la matriz identidad. Si la matriz A es simétrica y definido positiva, podemos utilizar la descomposición de Cholesky $A = LL^t$ para resolver $AX = I$, resolviendo los sistemas $L\bar{X} = I, \quad L^tX = \bar{X}$. Utilizando esta técnica, calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot A^{-1} = I$ $\quad \left.\begin{matrix} L\bar{X} = I \\ L^t \cdot X = \bar{X} \end{matrix}\right\}$ Cholesky

creemos la matriz L

$I_{KK} = \sqrt{a_{KK} - \sum_{j=1}^{k-1} I^2_{Kj}}$

$I_{iK} = \dfrac{a_{iK} - \sum_{j=1}^{k-1} I_{ij} I_{Kj}}{I_{KK}}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$

$l_{22} = \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = \dfrac{\sqrt{2}/2}{1}$

$l_{31} = a_{13} = 0$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{1/2}$

$l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \dfrac{1/2 - 0 \cdot x}{\cdot} = 0$

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 l_{32}^2} = \sqrt{1} = 1$

$\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_3 = 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x}_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\bar{x}_2 = 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\bar{x}_2 = 1$

$\sqrt{\frac{1}{2}}\bar{x}_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\bar{x}_2 = \dfrac{1 - \sqrt{2}/2}{\sqrt{1/2}}$

$\bar{x}_2 = \dfrac{(1 - \sqrt{2}/2)\sqrt{1/2}}{1/2}$

$\bar{x}_2 = 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{1/2}$

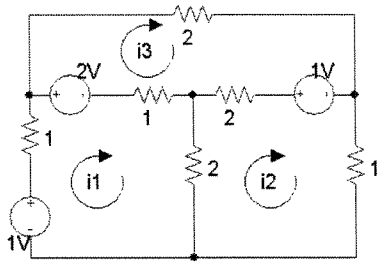
$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\sqrt{1/2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad L^t = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Tienes que ver que A es simétrica y definida positiva

2) Ahora tienes que resolver tres sistemas: $LL^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$?? no sé seguir!!

25. Aplicación a la Electricidad. Dada la red eléctrica de la figura, se tiene que aplicando las leyes de Kirchhoff se obtiene el sistema $\begin{cases} 4I_1 - 2I_2 - I_3 + 1 = 0 \\ -2I_1 + 5I_2 - 2I_3 + 1 = 0 \\ -I_1 - 2I_2 + 5I_3 - 3 = 0 \end{cases}$. Comprueba que la matriz del sistema es simétrica y definido positiva y resuélvelo utilizando el método de Cholesky.



$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ → es simétrica $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 4 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 100 - 4 - 4 - 5 - 16 - 20 = +49 > 0$ → definido positiva.

$L \cdot \underbrace{L^t \cdot x}_{y} = b \; ; \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} Ly = b \\ L^t x = y \end{cases}$

$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & -5/4 & 2{,}15 \end{pmatrix}$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$

$l_{21} = \dfrac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$l_{31} = \dfrac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}}} = \dfrac{-1}{2}$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$

$l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \dfrac{-2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)}{2} = \dfrac{-5/2}{2} = \dfrac{-5}{4}$ ¡ojo!

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 l_{32}^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{25}{4 \cdot 16}}$

es una resta, no un producto.

$\sqrt{\frac{295}{64}} \simeq 2{,}15$

No lo tienes bien

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 2{,}15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ↳ $2y_1 = -1$; $y_1 = -1/2$

$-y_1 + 2y_2 = -1$

$1/2 + 2y_2 = -1$; $2y_2 = \dfrac{-3}{2}$

$y_2 = \dfrac{-3}{4}$

y_3 ?

$$\frac{-1}{2} y_1 - \frac{5}{4} y_2 + 2{,}15 y_3 = 3$$

$$2{,}15 y_3 = 3 + 1/4 + \frac{15}{16} = 1{,}8125$$

$$y_3 = \frac{1{,}8125}{2{,}15} = 0{,}843$$

$$y = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}75 \\ 0{,}843 \end{pmatrix} \quad ; \quad U^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 2'15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}75 \\ 0{,}843 \end{pmatrix}$$

$2{,}15 I_3 = 0{,}843$; $\boxed{I_3 = 0{,}392}$

$2 I_2 - 5/4 I_3 = -0{,}75$

$2 I_2 = -0{,}75 + \frac{5}{4}(0{,}392) = -0{,}26$; $\boxed{I_2 = +0{,}13}$

$2 I_1 - I_2 - \frac{I_3}{2} = -0{,}5$

$2 I_1 = -0{,}5 + 0{,}13 + \frac{0{,}392}{2} = -0{,}174$; $\boxed{I_1 = 0{,}087}$

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

26. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante el resto del día. A mediodía, una máquina quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante en términos de cantidad de nieve retirada en una hora. La máquina limpió dos kilómetros hasta las dos de la tarde y un kilómetro más hasta las cuatro de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?

nevada → caída cte. a 12h → quitanieves a limpiar ritmo cte.

a 14 → 2 Km ; 16 → 1 Km +

$V = \frac{C_1}{h}$ $\quad h = C_2 \cdot t$; $V = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{t}$ $\quad V = \frac{dS}{dt}$

$\frac{dS}{dt} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1}{t}$; $\frac{C_1}{C_2} = K$ $\quad \frac{dS}{dt} = \frac{K}{t}$; $\int dS = K \int \frac{dt}{t}$

$S = K \log(t) + A$

$S = 0 \rightarrow K \cdot \log(0 + t) + A = 0$

$-A = K \log(0 + t)$

$S = 2 \rightsquigarrow K \cdot \log(\boxed{120 + t}) + A = 2$; $A = 2 - K \log(120 + t)$

$S = 3 \rightsquigarrow K \log(\boxed{240 + t}) + A = 3$; $A = 3 - K \log(240 + t)$

ojo, puedes poner en minutos o en horas.

$-A = K \log(t)$

$A = \boxed{2 - K \log(120 + t)}$ $\quad K = \frac{2}{\log 120} = 0{,}4178$ no se hallar la cte A

siempre se me va la ¿no puedo despejar?

$A \rightarrow K \log(t)$ Sí, tienes que intentar despejar de

Estas tres ecuaciones [1] $A + K \log(t) = 0$ | Restando [2] - [1] y [3] - [1]

[2] $A + K \log(t+2) = 2$

[3] $A + K \log(t+4) = 3$

$K \log \frac{t+2}{t} = 2$ $\quad K \log \frac{t+4}{t} = 3$ $\Rightarrow$ $3K \log \frac{t+2}{t} = 6$ $\quad 2K \log \frac{t+4}{t} = 6$ $\Rightarrow 3K \log \frac{t+2}{t} = 2K \log \frac{t+4}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \left(\frac{t+2}{t}\right)^3 = \log \left(\frac{t+4}{t}\right)^2$, y ya puedes quitar logaritmos y resolver.

27. Se sabe que cuando se perfora un tanque a presión, dicha presión disminuye a una velocidad directamente proporcional a la diferencia de presiones entre la del tanque y la exterior en dicho instante. Si la presión inicialmente era P_0 y al cabo de 5 minutos había caído un 10 %, ¿cuánto tiempo pasará hasta que caiga al 50 %?

modelizamos la ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = K(P_t - P_{ext}) \; ; \int \frac{dP}{P_t - P_e} = \int K\,dt$$

Perfect

$$\ln(P_t - P_{ext}) = K \cdot t + C \quad \rightarrow \quad P_t - P_{ext} = \Delta P$$

$$\Delta P = e^{kt} \cdot e^{C} = e^{kt} \cdot C$$

en $t = 0 \rightarrow \Delta P = P_0$

$\hookrightarrow C = P_0 \longrightarrow \Delta P = P_0 e^{kt}$

a $t = 5 \rightarrow \Delta P = 0{,}9 P_0 \rightarrow 0{,}9 P_0 = P_0 e^{kt}$

$$K = \frac{\ln(0{,}9)}{5} = -0{,}02$$

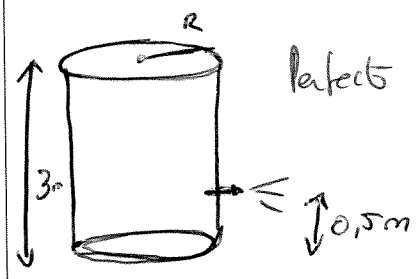
$t \rightarrow$ doble $\Delta P = 0{,}5 P_0$

$$0{,}5 P_0 = P_0 e^{-0{,}02t} \; ; \quad \ln(0{,}5) = -0{,}02t$$

$$t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}02} = 34{,}66 \text{ min}$$

$$\boxed{t = 34{,}6 \text{ min}}$$

28. En un depósito de agua de forma cilíndrica de radio R, se hace un agujero a $0{,}5m$ del fondo. Se sabe que la velocidad a la que sale el agua es directamente proporcional a la presión del agua a la altura del agujero. La altura del agua inicialmente es de $3m$ y después de una hora descendió $0{,}5m$. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar hasta que deje de salir agua?



$\frac{dv}{dt} = k_p \quad p = k.h$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = kh \; ; \; dv = \pi r^2 dh$

$\rightarrow \frac{\pi r^2 dh}{dt} = kh + c$

$\int \frac{dh}{h} = \int \frac{k dt}{\pi r^2} \rightarrow \ln(h) = \frac{k}{\pi r^2} dt + c \quad (k \rightarrow k')$

$h = e^{k't} \cdot e^c \quad (e^c \rightarrow \lambda) \; ; \; h = \lambda . e^{k't}$

$h = 2{,}5 \rightarrow t = 0 \rightsquigarrow e^0 = 1 \rightarrow h = \lambda \rightarrow \lambda = 2{,}5$

$h = 2{,}0 \rightarrow t = 1 \rightsquigarrow 2 = 2{,}5 . e^{k'} \; ; \; \ln\left(\frac{2}{2{,}5}\right) = k'$

$k' = -0{,}2231$

$h = 0 \rightarrow t = ?$

$0 = 2{,}5\, e^{k't} \rightarrow$ solo se hace 0

$0 = 2{,}5\, e^{-0{,}2231 t}$

$\ln\left(\frac{0}{2{,}5}\right) = \ln 0$

$\Downarrow$

∞

$e^{-\infty} = 0$

$\Rightarrow \boxed{t = \infty}$

29. La ley de Newton afirma que $F = m \cdot a$, donde m es la masa de un móvil, a es su aceleración y F las fuerzas que actúan sobre él. Supongamos que un móvil de masa m se deja caer con velocidad inicial nula. Las fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad, $F_g = m \cdot g$ y la del rozamiento con el aire, F_d que es directamente proporcional a la velocidad a la que desciende. Calcula dicha constante de proporcionalidad para que el móvil descienda a una velocidad de 1m/s.

$F = m \cdot a \quad F_g = mg \quad F_d = K \cdot v \quad F = F_g + F_d$

$\Rightarrow mg + \underbrace{k}_{\text{negativa}} v = ma \qquad y = v \; ; \; y' = a$

$m9'8 + ky = my'$

$\frac{m9'81}{m} + \frac{ky}{m} = \frac{my'}{m} \rightarrow 9'8 + \frac{ky}{m} = y' \quad y' = \frac{dy}{dt}$

$9{,}81 + \frac{ky}{m} = \frac{dy}{dt}$ homogénea $y' = \frac{k}{m} y$

$y_H = \lambda e^{\frac{k}{m}t}$

$y_p = u e^{\frac{k}{m}t}$

$y' = u' e^{\frac{k}{m}t} + u \frac{k}{m} e^{\frac{k}{m}t} = 9{,}81 + \frac{k}{m} y$

$y = u e^{\frac{k}{m} \cdot t}$

$u' e^{\frac{k}{m}t} + u \frac{k}{m} e^{\frac{k}{m}t} = 9{,}81 + \frac{k}{m} u e^{\frac{k}{m}t}$

$u' e^{\frac{k}{m}t} = 9{,}81 \; ; \; u' = \frac{du}{dt} \; ; \; \frac{du}{dt} = 9{,}81 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

$\int du = 9{,}81 \int e^{-\frac{k}{m}t} dt \; ; \; u = -9{,}81 \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

$y_p = -9{,}81 \frac{m}{k} \frac{e^{\frac{k}{m} \cdot t}}{e^{\frac{k}{m} \cdot t}} = -9{,}81 \frac{m}{k} \quad (y = v)$

$y_G = y_H + y_p \Rightarrow v = \lambda e^{\frac{k}{m}t} - 9{,}81 \frac{m}{k}$

$v = 0$ cuando $t = 0$

$\hookrightarrow 0 = \lambda e^{\frac{k}{m}t} - 9{,}81 \frac{m}{k} \quad 9{,}81 \frac{m}{k} = \lambda$

$v(t) = 9{,}81 \frac{m}{k} \left(e^{\frac{k}{m}t} - 1 \right) \; ; \; 1 = 9{,}81 \frac{m}{k} \left(e^{\frac{k}{m}t} - 1 \right)$

$$\frac{k}{9{,}81\,m} = e^{\frac{k}{m}t} - 1$$

Negativo

???

$$\ln\left(\frac{k}{9{,}81\,m}\right) = \frac{k}{m}t - 1 \quad ; \quad \ln k - \ln(9{,}81\,m) = \frac{k}{m}t - 1$$

¿¿despejar aquí la k??

¡Claro! No te pierdas en el bosque de cuentas, mira bien la ecuación.

Necesariamente t tiene que tomar un valor. ¿Cuál es?

Imaginemos ahora que un tirador utiliza una munición con velocidad de salida de 830m/s. Según los datos del fabricante, la velocidad del proyectil a los 300m es de 711m/s y tarda 0,392s en recorrerlos. Con estos datos, ¿a qué distancia debe de ponerse el tirador para que el proyectil alcance el blanco a los 2s? ¿Cuál será la velocidad del proyectil?

es un tiro parabólico $\Rightarrow v = \lambda \cdot e^{-kt}$

$t_0 \rightarrow v_0 = 830 \rightarrow v(t) = 830 \cdot e^{-kt}$

$v(0{,}392 \text{ seg}) = 830\, e^{-0{,}392k} = 711$

$\ln\left(\frac{711}{830}\right) = -0{,}392k$; $k = \frac{-0{,}155}{-0{,}392} = 0{,}395$

$v(2) = 830\, e^{-0{,}392 \cdot 2} = 379 \text{ m/s}$ $\quad v(2\text{seg}) = 379 \text{ m/s}$

No, ten cuidado. $v = \frac{ds}{dt}$

$v \cong \frac{s}{t}$; $711 \cong \frac{s}{0{,}392}$; $s = 279 \text{ m}$ vs 300 m

lo tomaremos como válido con coef. corrección

$279 \cdot x = 300 \rightarrow (x = 0{,}93)$

$\Rightarrow$ a los 2seg.

$s = v \cdot t \cdot x = 0{,}93 \cdot 379 \cdot 2 = 704{,}2 \text{ m}$

a 704,2 m

Modeliza la velocidad del proyectil como función del espacio que recorre el proyectil. Si fijamos la velocidad efectiva mínima en 300m/s, ¿cuál será la máxima distancia efectiva a la que se podrá situar el tirador?

$$V = 0{,}93\,\frac{s}{t} = 830\,e^{-Kt}$$

$$\Rightarrow s = \frac{830}{0{,}93}\,e^{-Kt}(t) = 892{,}5\,t\cdot e^{-0{,}525t}$$

$$V \to 300 \Rightarrow \quad V = 830\,e^{-Kt} = 300$$

$$-Kt = \ln\left(\frac{300}{830}\right) = -1{,}0176$$

$$t = \frac{-1{,}0176}{-0{,}525} = 2{,}6 \text{ seg.}$$

$$\Rightarrow s = \frac{2{,}6 \cdot 306}{0{,}93} = 825\,m; \quad \boxed{s = 825\,m}$$

ANA KROTENBERG GARCÍA.

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1 - \cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

$f(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$ → segundos. Simpson 1/3 compuesto ⇒ aproximar integral

→ Vamos a usar el método de Simpson 1/3 compuesto, tenemos 3 pares, y deben ser equidistantes, así que los tomo de 0'5 en 0'5.

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = 0$	$f(0) = 0$
$x_1 = 0'5$	$f(x_1) = 0'34988$
$x_2 = 1$	$f(x_2) = 0'6789$
$x_3 = 1'5$	$f(x_3) = 0'9639383$
$x_4 = 2$	$f(x_4) = 1'19$

$h = 0'5$ | $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4}$

Esta fórmula es para el método simple

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right) =$$

I: sumatorio de $f(x_i)$ con i impar. P: sumatorio de $f(x_i)$ con i par.

$$= \frac{0'5}{3}\left(0 + 4(0'34988 + 0'9639383) + 2(0'6789 + 0'9639383) + 1'19\right) =$$

$$= 1'62187$$

- Error absoluto: $|1'300221 - 1'62187| = 0'3216849$
- Error $-\frac{h^4}{180}(b-a) f^{4r}(\xi) \Rightarrow -\frac{(0'5)^4}{180}(2) f^{4r}(\xi)$

Cota de $f(t) = \sqrt{1-\cos t}$ en $(0,2)$. 0 y 1'19 → descarto, así que se tomará el valor en 2.

Cota $= -\frac{(0'5)^4}{180} \cdot 2 \cdot$ ¿Y la derivada 4ª?

(Matemática: hallar Derivada de $\sqrt{1-\cos t}$)

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

$f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$ $[1,2]$.

Cuadratura Gaussiana para $n=0$ y $n=1$ Perfecto

- Para $n=0$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} 2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$(2-1) f\left(\frac{2+1}{2}\right) = 1 \cdot f(3/2) \Rightarrow \frac{10(3/2)}{(\sqrt{3/2}+1)^5} = 0'27522$$

- Para $n=1$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

$$\frac{2-1}{2}\left[f\left(\frac{2-1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{2+1}{2}\right) + f\left(\frac{2-1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2+1}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)}+1\right)^5} + \frac{10\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}+1\right)^5}\right)$$

$\frac{1}{2}\left(f(1'211325) + f(1'78867\right.$

$= \frac{1}{2}(0'296147 + 0'256362)$

$= 0'276266$

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$v(t) = t^3 - 2t^2 \Rightarrow$ $y = x^3 - 2x^2$ se busca cuando $y = 1$, entonces trabajamos con $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ y buscamos raíces.

Método de Newton-Raphson

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$x_0 = 3$

$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{9}{15} = 2'4$

$x_2 = 2'4 - \frac{2'304}{7'68} = 2'1$

$x_3 = 2'1 - \frac{0'441}{4'83} = 2'0087$

$x_4 = 2'0087 - \frac{0'0035}{4'0698} = 2'0001$

$x_5 = 2'0001 - \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4'0008} = 2'00000002$

$x_6 = 2'00000002 - \frac{8 \cdot 10^{-8}}{4'000000016} = 2$ No.

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
3	9	15
2'4	2'304	7'68
2'1	0'441	4'83
2'0087	0'0035	4'0698
2'0001	$4 \cdot 10^{-4}$	4'0008
2'00000002	$8 \cdot 10^{-8}$	4'000000016
2		

Mal calculado

$\Rightarrow$ No se podría haber tomado $x_0 = 0$, porque en ese punto no sí que es derivable, es derivable, es más, en la función $f(x)$ sería 0 y no se podría aplicar, pero la derivada vale 0.

$\Rightarrow$ Iteración 4 y 5.

Error relativo $\left| \frac{x_5 - x_6}{x_5} \right| = \frac{|2'0001 - 2'00000002|}{2'0001} = 4'9875 \cdot 10^{-5} \simeq 5 \cdot 10^{-5}$

Elena Arconada Luque.

¿?

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}
$x_0 = 0$	$y_0 = 9'5$	$-10'16$	$-4'54$	$7'01$
$x_1 = 0'5$	$y_1 = 4'42$	$-14'70$	$9'48$	
$x_2 = 1$	$y_2 = -2'93$	$-0'48$		
$x_3 = 2$	$y_3 = -3'41$			

Elegiré un intervalo excesivamente grande para calcular $f(0'2)$



- $P_3(x) = 9'5 - 10'16x - 4'54x(x-0'5) + 7'01(x)(x-0'5)(x-2)$
- $P_3(0'2) = 8'49798$

Error absoluto: $|v_{exacto} - v_{aprox}| = |8'240514 - 8'49798| = 0'256966 \simeq 0'257$

Cota: ¿y la derivada?

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{}{4!}|x-0||x-0'5||x-1||x-2| \rightarrow |f(x)-P(x)| \leq$$

No es válido

$f'(x) = 9'5\cdot(-0'3)\cdot e^{-0'3t}\cdot\cos(2t) - 9'5\cdot e^{-0'3t}(+\operatorname{sen}2t)\cdot 2$

$f''(x) = -2'85\cdot(-0'3)\cdot e^{-0'3t}\cdot\cos(2t) - 2'85\,e^{-0'3t}\cdot(+\operatorname{sen}2t)\cdot 2 + 9'5(-0'3)\cdot e^{-0'3t}\operatorname{sen}(2t)\cdot 2$

$+ 9'5\cdot e^{-0'3t}\cdot\cos 2t\cdot 2 = 19'855\cdot e^{-0'6t}\cdot\cos^2(2t)$

$f^{III}(x) = 19'855\cdot(-0'6)\cdot e^{-0'6t}\cdot\cos^2(2t) + 19'855\cdot e^{-0'6t}\cdot 2\cdot\cos(2t)\cdot(-\operatorname{sen}2t)\cdot 2$

$f^{IV}(x) = (-11'913\cdot(-0'6)\cdot e^{-0'6t}\cdot\cos^2(2t) + 11'913\cdot e^{-0'6t}\cdot 2\cdot\cos(2t)\cdot(+\operatorname{sen}(2t))\cdot 2) +$

$$f^{IV}(x) = e^{-0'3x}(131'577\cos(2x) - 178'296\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x))$$

Elena Arconada.

¿?

2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

x_p	y_i	y_{ij}	y_{ijk}
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_{01} = 27'352$	$y_{012} = 0'319$
$x_1 = 1$	$y_1 = 27'352$	$y_{12} = 27'99$	
$x_2 = 2$	$y_2 = 55'342$		

No lo hiciste bien, tienes que elegir un intervalo que contenga al $11 \notin [0, 2]$

- $P_2(x) = 0 + 27'352\,x + 0'319\,x(x-1) = v(t)$
- $v(11) = 27'352 \cdot 11 + 0'319 \cdot 11 \cdot 10 = 335'9620$
- Error absoluto: $|v_{exacto} - v_{aprox.}| = |340'1142 - 335'9620| = 4'1522$
- $|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-x_0| \dots |x-x_n|$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{}{3!}\,|x-0|\,|x-1|\,|x-2|$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{265.997797200}{(9000-67x)^4} - 9'81 \longrightarrow \text{No se si es correcta}$$

Elena Arconada Luque

3. Aplicación a las Probabilidades. En la siguiente tabla se contemplan algunos valores de la probabilidad: $y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\Pi}\int_0^x e^{-t^2}dt$ → no se puede resolver.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661

Por medio de interpolación de Newton, aproxima el valor para $y(1{,}32)$. Calcula una cota del error cometido.

x_p	y_i	$y_{i,i+1}$	$y_{i,i+1,i+2}$	$y_{i,\ldots,i+3}$	$y_{i,\ldots,i+4}$	$y_{i,\ldots,i+5}$
$x_0 = 1$	0'8427	$y_{01} = 0'375$	$y_{012} = -0'37$	$y_{0123} = 0'16667$	$y_{01234} = 0$	$y_{012345} = -8'\widehat{3}.10^{-2}$
$x_1 = 1'1$	0'8802	$y_{12} = 0'301$	$y_{123} = -0'32$	$y_{1234} = 0'16667$	$y_{12345} = -4'166.10^{-2}$	
$x_2 = 1'2$	0'9103	$y_{23} = 0'237$	$y_{234} = -0'27$	$y_{2345} = 0'15$		
$x_3 = 1'3$	0'9340	$y_{34} = 0'183$	$y_{345} = -0'225$			
$x_4 = 1'4$	0'9523	$y_{45} = 0'138$				
$x_5 = 1'5$	0'9661					

- $P_5(x) = 0'8427 + 0'375(x-1) - 0'37(x-1)(x-1'1) + 0'16667(x-1)(x-1'1)(x-1'2)$
$+ 0(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3) - 8'\widehat{3}.10^{-2}(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3)(x-1'4)$

- $P_5(1'32) = 0'93806$

- Cota: $|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{7!}|x-1||x-1'1||x-1'2||x-1'3||x-1'4||x-1'5|$

Por el teorema fundamental del cálculo → $f(x) = \int_0^x g(t)dt \rightarrow f'(x) = g(x)$

7! = 5040

¡Ojo! Tienes que calcular la derivada sexta.

$f^{7)}(x) = -16e^{-x^2}\cdot x(8x^6 - 84x^4 + 216x^2 - 105)$

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{-45'0066}{5040}|x-1||x-1'1||x-1'2||x-1'3||x-1'4||x-1'5|$

$= -8'9299.10^{-3}$

* Para hallar la cota, he calculado el máximo de $f^{7)}(x)$, y me ha salido que dicha función alcanza su máximo en 1'27; sustituyendo dicho valor en $f^{7)}(x)$ obtenemos M.

$M = f^{7)}(1'27) = -45'0066$

Elena Arconada Luque.

4. Aplicación a la Ingeniería Química. La densidad del carbonato de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración. En un experimento para determinar la densidad del carbonato, se consideró la temperatura constante y se varió la concentración, obteniendo la tabla:

x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1.0276	1.1013	1.1801	1.2652	1.3480	1.4120

Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno y aproxima el valor de la densidad del carbonato de potasio en solución acuosa para una concentración de 25 %.

Como nos piden un polinomio de grado 1, solo se necesitan dos puntos, y vamos a tomar los de los extremos. No, hemos que tomar el menor intervalo que contenga al nudo. ya que depende de los puntos que tomes tendrás un polinomio distinto. Si cogemos los de los extremos, nuestro polinomio es más válido. Aunque dado que nos piden luego hallar la densidad a 25%, lo más lógico sería tomar los puntos más próximos a dicho valor. Lo vamos a hacer de las dos formas, ya que no sé cuál es la correcta.

x	4	45
y	1'0276	1'4120

$P_1(x) = 1'0276 \frac{(x-45)}{(4-45)} + 1'4120 \frac{(x-4)}{45-4}$

$= -0'025(x-45) + 0'0394(x-4) = 9'439.10^{-3}x + 0'9879 \;/\; P_1(25) = \underline{1'2233}$

x	20	28
y	1'1801	1'2652

$P_1(x) = 1'1801 \frac{(x-28)}{-8} + 1'2652 \frac{(x-20)}{8}$

$= -0'1475(x-28) + 0'1581(x-20) = 1'065.10^{-2}x + 0'968$

Son parecidos, pero no es el mismo

$P_1(25) = \underline{1'2342}$ Esta es la forma correcta

Elena Arconada Luque

5. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En época de lluvias, en una presa se toman seis medidas del nivel del agua durante un mes, obteniéndose los siguientes datos:

t % (días)	0	5	15	16	23	30
y (densidad)	8.20	11.4	19.9	22.4	25.2	26.8

El tiempo se mide en días y el nivel del agua en metros. Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, y aproxima el valor del nivel del agua al décimo día del mes.

Nos piden un polinomio de grado 2, luego necesitamos 3 puntos, que van a ser los 3 más próximos a 10, ya que luego nos piden calcular el nivel de agua dicho día.

t	5	15	16
y	11'4	19'9	22'4

Bien.

$$P_2(x) = 11'4\,\frac{(x-15)(x-16)}{(5-15)(5-16)} + 19'9\,\frac{(x-5)(x-16)}{(15-5)(15-16)} + 22'4\,\frac{(x-5)(x-15)}{(16-5)(16-15)}$$

$$P_2(x) = \frac{11'4\,(x^2-16x-15x+240)}{110} + \frac{19'9\,(x^2-5x-16x+80)}{-10} + 22'4\,\frac{x^2-15x-5x+75}{11}$$

$$\rightarrow P_2(x) = 0'1036\,(x^2-31x+240) - 1'99\,(x^2-21x+80) + 2'036\,(x^2-20x+75)$$

$$P_2(10) = 0'1036\cdot(30) - 1'99\,(-30) + 2'036\,(-25) = 11'91$$

Es un mal resultado, ya que apenas hay diferencia entre el día 5 y el 10.

Elena Arconada Luque

6. Aplicación a la Electricidad. La carga en un circuito eléctrico con respecto al tiempo viene dado por:

(s) t	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010
(C) q	2.5	2.5523	2.6087	2.6682	2.7299	2.7931

donde t, es el tiempo en segundos y q la carga en culombios. Se sabe que la corriente instantánea es igual a la derivada de la carga en ese instante; ¿cuál es la fórmula de derivación lineal progresiva? Calcula el valor de la derivada con $h = 0{,}002$.

$I = \frac{dq}{dt}$ ⇒ corriente instantánea.

derivación lineal progresiva ⇒ $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$t=0 \rightarrow f'(x) = \frac{f(0'002) - f(0)}{0'002} = 26'1$ A

$t=0'002 \rightarrow f'(x) = \frac{f(0'004) - f(0'002)}{0'002} = 28'2$ A Perfecto.

$t=0'004 \rightarrow f'(x) = \frac{f(0'006) - f(0'004)}{0'002} = 29'75$ A

$t=0'006 \rightarrow f'(x) = \frac{f(0'008) - f(0'006)}{0'002} = 30'85$ A

$t=0'008 \rightarrow f'(x) = \frac{f(0'010) - f(0'008)}{0'002} = 31'6$ A

$t=0'010 \rightarrow$ ya no se puede calcular, necesitamos otro dato.

Elena Arconada Luque.

tres puntos:
- centrada → $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0-h) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{6} f^{3)}(\xi(x))$
- progresiva / regresiva (-h) → $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3} f^{3)}(\xi(x))$

cinco puntos:
- centrada → $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^4}{30} f^{5)}(\xi(x))$
- progresiva / regresiva (-h) → $f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \frac{h^4}{5} f^{5)}(\xi(x))$

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7. $h = 1$

$X = 0$

2 puntos progresiva $\Rightarrow f'(0) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 17$

3 puntos progresiva $\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2 \cdot 1}[-3f(0) + 4f(1) - f(2)] = 9$

5 puntos progresiva $\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{12 \cdot 1}[-25f(0) + 48f(1) - 36f(2) + 16f(3) - 3f(4)] = -12'75$

$X = 3$

3 puntos centrada $\Rightarrow f'(3) = \frac{1}{2 \cdot 1}[-f(2) + f(4)] = 51'5$ Bien.

5 puntos centrada $\Rightarrow f'(3) = \frac{1}{12 \cdot 1}[f(1) - 8f(2) + 8f(4) - f(5)] = 50'83$

$X = 7$

2 puntos regresiva $\Rightarrow f'(7) = \frac{f(6) - f(7)}{-1} = 123$

3 puntos regresiva $\Rightarrow f'(7) = \frac{-1}{2}[-3f(7) + 4f(6) - f(5)] = 146'5$

5 puntos regresiva $\Rightarrow f'(7) = \frac{-1}{12}[-25f(7) + 48f(6) - 36f(5) + 16f(4) - 3f(3)] = 169'75$

Elena Arconada.

8. Aplicación a la Física. Se cronometra un móvil de prueba, que se traslada por una vía recta, en algunos puntos. Los datos de las observaciones están recogidos en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos y la distancia en metros. Utilizando las fórmulas más precisas de tres puntos, calcula la velocidad aproximada en cada punto de la tabla.

(s) Tiempo	0	3	5	8	10	13
m Distancia	0	2	3	6	7	9

$f'(x) = v = \frac{de}{dt}$

$x=0 \rightarrow$ progresiva, $h=3 \rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\cdot 3}[-3f(0)+4f(3)-f(10)] = 0'5$ m/s

$x=3 \rightarrow$ progresiva $h=3 \rightarrow f'(3) = \frac{1}{2\cdot 3}[-3f(3)+4f(8)-f(13)] = 0'9$ m/s

$x=5 \rightarrow$ centrada, $h=5 \rightarrow f'(5) = \frac{1}{2\cdot 5}[-f(0)+f(10)] = 0'7$ m/s

No, no se puede calcular ningún valor, puesto que no son equidistantes.

$x=8, \rightarrow$ centrada, $h=5 \rightarrow f'(8) = \frac{1}{2\cdot 5}[-f(3)+f(13)] = 0'7$ m/s

$x=10 \rightarrow$ regresiva, $h=5 \rightarrow f'(10) = \frac{1}{-10}[-3f(10)+4f(5)-f(0)] = 0'9$ m/s

$x=13 \rightarrow$ regresiva, $h=5 \rightarrow f'(13) = \frac{1}{-10}[-3f(13)+4f(8)-f(3)] = 0'5$ m/s

Elena Arconada Duque.

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos: $h=2$

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

$a = \frac{dv}{dt}$. Vamos a usar las fórmulas de 5 ptos y q que son más precisas, con $h=2$.

$t=2 \rightarrow$ progresiva

$$f'(2) = \frac{1}{12\cdot 2}\left[-25f(2)+48f(4)-36f(6)+16f(8)-3f(10)\right] = 250 \text{ rpm/s}^2$$

$t=8 \rightarrow$ centrada

$$f'(8) = \frac{1}{12\cdot 2}\left[f(4)-8f(6)+8f(10)-f(12)\right] = 250 \text{ rpm/s}^2$$

$t=10 \rightarrow$ regresiva

$$f'(10) = -\frac{1}{12\cdot 2}\left[-25f(10)+48f(8)-36f(6)+16f(4)-3f(2)\right] = 250 \text{ rpm/s}^2$$

"El vehículo circula a una aceleración constante", se podría afirmar con los resultados obtenidos, pero para asegurarnos habría que calcular la aceleración en cada instante.

Elena Aranda Duque

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

t	0	0'5	1	1'5	2
v	0	$6'17\cdot10^{-3}$	$1'23\cdot10^{-2}$	$1'85\cdot10^{-2}$	$2'49\cdot10^{-2}$

$n=5$, $h=\frac{b-a}{n}=0'4$

$$\int_{0=a}^{2=b}\sqrt{1-\cos(t)} \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(a)+4I+2P+f(b)\right)=\frac{0'5}{3}$$

$\frac{0'4}{3}\left(0+\right.$ ¿Qué ocurre con el ejercicio, Elena?

ALBA RODRÍGUEZ MOÍRA

16. Aplicación a la Dinámica. Calcula, utilizando el método de la bisección, el coeficiente de rozamiento x necesario para que un paracaidista con una masa 70 kg adquiera una velocidad de $50m/s$, después de una caída libre de $t = 15$ segundos. (Indicación: La aceleración de la gravedad es de $9{,}8m/s^2$, y la ecuación a aproximar es $f(x) = \frac{gm}{x}(1 - e^{-(x/m)t}) - v = 0$)

$f(x) = \frac{9'8 \cdot 70}{x}\left(1 - e^{\frac{-x\,15}{70}}\right) - 50 = 0 \qquad f(x) = \frac{686}{x}\left(1 - e^{\frac{-x}{4'666}}\right) - 50 = 0$

Tenemos que buscar un intervalo que verifique el teorema de Bolzano:

$f(4) = -3'43852$

$f(15) = -6'103572$

$f(13) = -0'4845$

$f(12) = 2'7992$

Hemos conseguido aislar una raíz de la ecuación pues la derivada no cambia de signo en ese intervalo.

$f(x) = \frac{686}{x} - \frac{686}{x}e^{\frac{-x}{4'666}} - 50$

$f'(x) = -\frac{686}{x^2} - \frac{686}{x^2}\cdot e^{\frac{-x}{4'666}} + \frac{x}{4666}e^{\frac{-x}{4'666}}\cdot\frac{686}{x}$

$f'(x) = \frac{-686}{x^2} + 686 \cdot e^{\frac{-x}{4666}}\left(\frac{1}{-x^2} + \frac{1}{4'666}\right)$

$f'(x) = 0 = e^{\frac{-x}{4666}}\left(\frac{1}{-x^2} + \frac{1}{4'666}\right)x^2$

$f'(x) = e^{\frac{-x}{4'666}}\left(\frac{x^2}{4'666} - 1\right) = 0$

$\frac{x^2}{4'666} = 1 \qquad x^2 = 4'666 \qquad x = \pm 2'16$

Aplicaremos ahora el método de la bisección: bien.

n	a	co	b	f(a)	f(co)	f(b)	ε
1	12	12'5	13	2'7992	1'1133	-0'4845	0'5
2	12'5	12'75	13	1'1133	0'3037	-0'4845	0'25
3	12'75	12'875	13	0'3037	-0'0930	-0'4845	0'125
4	12'75	12'8125	12'875	0'3037	0'1047	-0'0930	0'0625
5	12'8125	12'84375	12'875	0'1047	$568 \cdot 10^{-3}$	-0'0930	0'03125

La raíz calculada por el método de la bisección es 12'84375, y este es el coeficiente de rozamiento necesario en $\frac{Kg}{s}$

ALBA RODRÍGUEZ MEIRA

5. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En época de lluvias, en una presa se toman seis medidas del nivel del agua durante un mes, obteniéndose los siguientes datos:

t %	0	5	15	16	23	30
y (densidad)	8.20	11.4	19.9	22.4	25.2	26.8

El tiempo se mide en días y el nivel del agua en metros. Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, y aproxima el valor del nivel del agua al décimo día del mes.

$P_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}$

Debe elegir el intervalo de menor longitud que contenga al punto

$P_2(x) = 8'20\frac{(x-5)}{-5}\cdot\frac{(x-15)}{-15} + 11'4\frac{(x-0)(x-15)}{5\cdot(-10)} + 19'9\frac{(x-0)(x-5)}{15\cdot 10} =$

En el caso: $[0,15] \xrightarrow{\text{long}} 15$; $[5,16] \xrightarrow{\text{long}} 11$

$0'093(x-5)(x-15) - 0'228x(x-15) + 0'13266x(x-5) =$

$0'093(x^2 \overbrace{-5x-15x}^{-20x} + 75) - 0'228x^2 + 3'42x + 0'13266x^2 - 0'6633 =$

$0'093x^2 - 2'186x + 8'1975 - 0'228x^2 + 3'42x + 0'13266x^2 - 0'6633 =$

$0'01396x^2 + 1'234x + 7'5342$

El resto está bien.

$P_2(x) = 0'01396x^2 + 1'234x + 7'5342$

$P_2(10) = 0'01396 \times 100 + 1'234 \cdot 10 + 7'5342 = 21'2702$

El valor del nivel de agua el décimo día será 21'2702

ALBA RODRÍGUEZ MEIRA

4. Aplicación a la Ingeniería Química. La densidad del carbonato de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración. En un experimento para determinar la densidad del carbonato, se consideró la temperatura constante y se varió la concentración, obteniendo la tabla:

x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1.0276	1.1013	1.1801	1.2652	1.3480	1.4120

Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno y aproxima el valor de la densidad del carbonato de potasio en solución acuosa para una concentración de 25 %.

$P_1(x) = 1'0276\,\frac{(x-45)}{-41} + 1'4120\,\frac{(x-4)}{41} = -0'02506(x-45) + 0'0344(x-4) =$

$-0'02506x + 1'1277 + 0'0344x - 0'1376$ No, debe tomar el menor intervalo que contenga a 25.

$P_1(x) = 0'00934x + 0'9901$

$P_1(25) = 0'00934 \times 25 + 0'9901 = 1'2236$

$P_1'(x) = 1'1801\,\frac{(x-28)}{-8} + 1'2652\,\frac{(x-20)}{8} = -0'1475x + 4'13035 + 0'15815x - 3'163$

$P_1'(x) = 0'0106x + 0'96735$

$P_1'(25) = 0'0106 \cdot 25 + 0'96735 = 1'23235$

Primero he calculado el polinomio de interpolación de Lagrange empleando dos extremos, y luego lo he calculado empleando dos puntos donde se incluye el punto pedido para aproximar, obteniendo un valor ligeramente diferente (difieren en $8'75 \cdot 10^{-3}$ unidades).

ALBA RODRÍGUEZ MEIRA

3. Aplicación a las Probabilidades. En la siguiente tabla se contemplan algunos valores de la probabilidad: $y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\Pi}\int_0^x e^{-t^2}dt$

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661

Por medio de interpolación de Newton, aproxima el valor para $y(1{,}32)$. Calcula una cota del error cometido.

$P_5(x) = 0'8427 + 0'375(x-1) - 0'37(x-1)(x-1'1) + 0'1666(x-1)(x-1'1)(x-1'2) - 0'083(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3)(x-1'4)$

(*)2

	x	y	yi	yiik	yijkl	yijklm	yijklmn
K0=	1	0'8427	0'375	-0'37	0'1666	0	-0'083
K1=	1'1	0'8802	0'301	-0'32	0'1666	-0'0415	
K2=	1'2	0'9103	0'237	-0'27	0'15		
K3=	1'3	0'9340	0'183	-0'225			
K4=	1'4	0'9523	0'138				
K5=	1'5	0'9661					

$f(x) = \frac{2}{\Pi}\int_0^x e^{-t^2}dt \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{\Pi}e^{-x^2} = f''(x) = \frac{2}{\Pi}(-2x)e^{-x^2} = \frac{-4x}{\Pi}e^{-x^2}$

$f'''(x) = -\frac{4}{\Pi}\cdot e^{-x^2} + \left(-2xe^{-x^2}\cdot\frac{-4x}{\Pi}\right) = e^{-x^2}\left(-\frac{4}{\Pi} - \frac{8x^2}{\Pi}\right) = e^{-x^2}\left(\frac{8x^2-4}{\Pi}\right)$

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{f^{III}(\xi)}{3!}|x-1||x-1'1||x-1'2||x-1'3||x-1'4||x-1'5|$

Correcto

$f^{III}(\xi) = |e^{-1}|\left|\frac{8\cdot 1'5^2 - 4}{\Pi}\right| = \frac{1}{e}\cdot\frac{14}{\Pi} = 1'63939$

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1'63939}{6} \times 0'5 \times 0'4 \times 0'3 \times 0'3 \times 0'4 \times 0'5 = 9'83\cdot 10^{-4}$

(*)1 $P_5(1'32) = 0'8427 + 0'375\times 0'32 - 0'37\times 0'32\times 0'22 + 0'1666\times 0'32\times 0'22\times 0'12$

$-0'083\times 0'32\times 0'22\times 0'12\times 0'2\times(-0'8) = 0'93817$

ALBA RODRÍGUEZ MEIRA

17. Aplicación a la Ingeniería. En un canal abierto de dimensiones constantes y con un área transversal A, bajo condiciones de flujo uniforme se cumple la ecuación de Manning

$$Q = \frac{y_n B}{n}\left(\frac{y_n B}{B + 2y_n}\right)^{2/3} S^{1/2}$$

donde Q es el flujo, y_n es la profundidad normal, B es el ancho del canal, n es un coeficiente de rugosidad y S es la pendiente del canal. La ecuación se usa en ingeniería de fluidos y recursos de agua para determinar la profundidad normal. Si este valor es menor que la profundidad crítica

$$y_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($980 cm/s^2$), entonces el flujo es subcrítico. Usando el método de la bisección, calcula y_n cuando $Q = 14{,}15 m^3/s$, $B = 4{,}572 m$, $n = 0{,}017$ y $S = 0{,}0015$. Determina si el flujo es sub o súper crítico.

$9'8 \frac{m}{s^2}$ (S.I.)

$$Q = \frac{y_u \cdot 4'572}{0'017}\left(\frac{y_u \cdot 4'572}{4'572 + 2y_u}\right)^{2/3} \cdot \sqrt{0'0015} = 14'15$$

$$y_u\left(\frac{y_u \cdot 4'572}{4'572 + 2y_u}\right)^{2/3} = 1'3585$$

Buscamos un intervalo donde tenga raíz única (sabemos que es única al realizar la representación gráfica, empleando Mathematica, por ejemplo)

$$f(3) = 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 4'572}{4'572 + 3 \cdot 2}\right)^{2/3} - 1'3585 = 0'3247 \qquad f(2) = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 4'572}{4'572 + 4}\right)^{2/3} - 1'3585 = -0'5999$$

n	a	co	b	f(a)	f(co)	f(b)	E
0	2	2'5	3	-0'5999	-0'1703	0'3247	0'5
1	2'5	2'75	3	-0'1703	0'0699	0'3247	0'25
2	2'5	2'625	2'75	-0'1703	-0'0521	0'0699	0'125
3	2'625	2'6875	2'75	-0'0521	$8'449 \cdot 10^{-3}$	0'0699	0'0625
4	2'625	2'65625	2'6875	-0'0521	-0'0219	$8'449 \cdot 10^{-3}$	0'03125
5	2'65625	2'671875	2'6875	-0'0219	$-6'71 \cdot 10^{-3}$	$8'449 \cdot 10^{-3}$	0'015625

La solución aproximada obtenida mediante el método de la bisección es 2'671875.

Para determinar si el fluido es sub o supercrítico:

$$y_c = \left(\frac{14'15^2}{4'572^2 \cdot 9'8}\right)^{1/3} = 0'3258$$

Como $y_n > y_c$ el flujo es supercrítico.

LUNA RODRÍGUEZ MEIRA

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

$f(t) = 9'5 \cdot e^{-0'3t} \cdot \cos(2t)$

Empleo el método de Newton pues como nos piden un polinomio de grado 3 el proceso será a demasiado laborioso por Lagrange

t_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijkl}
$t_0 = 0$	$y_0 = 9'5$	$y_{01} = -4'6454$	$y_{012} = -15'6753$	$y_{0123} = 9'12335$
$t_1 = 0'1$	$y_1 = 9'03546$	$y_{12} = -9'348$	$y_{123} = -12'02596$	
$t_2 = 0'3$	$y_2 = 7'165849$	$y_{23} = -12'95579$		
$t_3 = 0'4$	$y_3 = 5'87027$			

$P_3(x) = 9'5 - 4'6454 x - 15'6753 x(x-0'1) + 9'12335 x(x-0'1)(x-0'2) =$

$P_3(x) = 9'5 - 4'6454 \times 0'2 - 15'6753 \times 0'2 \times 0'1 = 8'257414$

Direct.

Error absoluto $= |8'257414 - 8'240514| = 0'0169$.

Cota del error

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{t^{4'}(\xi)}{4!} |x||x-0'1||x-0'3||x-0'4|$ *(Derivada en la parte de atrás)

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{181'866}{24} \times 0'4 \times 0'3 \times 0'3 \times 0'4 = 0'10893$

$f(t) = 9'5e^{-0'3t} \cdot \cos(2t)$

$f'(t) = 9'5 \times (-0'3) \times e^{-0'3t} \cdot \cos(2t) + (-\text{sen}(2t) \cdot 2) \cdot 9'5 \cdot e^{-0'3t}$

$f'(t) = 9'5e^{-0'3t}(-0'3\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t))$

$f''(t) = 9'5 \cdot -0'3 \cdot e^{-0'3t}(0'3\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t) + 9'5e^{-0'3t}(-0'6 \cdot \text{sen}(2t) - 4\cos 2t) =$

$9'5\,e^{-0'3t}(-0'09\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t) - 0'6\,\text{sen}(2t) - 4\cos(2t))$

$(0'3\cos(2t) - 2\,\text{sen}(2t))' = 0'3(-\text{sen}(2t) \cdot 2 - 2\cos(2t) \cdot 2$

$f''(t) = 9'5e^{-0'3t}(-4'09\cos(2t) - 2'6\,\text{sen}(2t))$

$f'''(t) = 9'5e^{-0'3t}[-0'3(-4'09\cos 2t - 2'6\,\text{sen}\,2t) + (8'18\,\text{sen}\,2t - 5'2\cos(2t)) =$

$9'5 \cdot e^{-0'3t}(1'227\cos(2t) + 0'78\,\text{sen}(2t) + 8'18\,\text{sen}(2t) - 5'2\cos(2t)) =$

$9'5 \cdot e^{-0'3t}(-3'974\cos(2t) + 8'96\,\text{sen}(2t))$

$f^{(4)}(t) = 9'5 \cdot e^{-0'3t}[-0'3(-3'974\cos(2t) + 8'96\,\text{sen}(2t)) + 7'948\,\text{sen}(2t) + 17'92\cos(2t)]$

$9'5 \cdot e^{-0'3t}(1'1922\cos(2t) - 2'688\,\text{sen}(2t) + 7'948\,\text{sen}(2t) + 17'92\cos(2t))$

$f^{(4)}(t) = 9'5\,e^{-0'3t}(19'1122\cos(2t) + 5'26\,\text{sen}(2t))$

$f^{4}(t) = 9'5 \times |e^{-0'3 \cdot 0}| \times |19'1122(\cos 0) + 5'26\,\text{sen}(0)| = 9'5 \times 19'1122 = 181'5659$

ALBA RODRÍGUEZ MEIRA

30. Supongamos ahora que, para velocidades elevadas, la resistencia aerodinámica al avance es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad. ¿Cuál es el modelo que describe la velocidad en función del tiempo bajo esta hipótesis? Teniendo en cuenta que la velocidad es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, calcula la expresión del espacio como función del tiempo.

$R_A = K \cdot v^2$

$v = \sqrt{\frac{R_A}{K}}$

$\frac{dx}{dt} = K' \sqrt{R_A}$

la ecuación es $v' = a \cdot v^2$

$v = \frac{dx}{dt}$

$dx = K' \sqrt{R_A}\, dt$

$\int dx = K' \int R_A^{1/2}\, dt$

$x = K' \cdot \frac{2}{3} R_A^{3/2} + C$

ALBA RODRÍGUEZ MEIRA

2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$. donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

Por el método de Newton: $v(t) = 2200 \ln\left(\frac{160.000}{160.000 - 2680t}\right) - 9'81\,t$

t	V_i	V_{ij}	V_{ijk}
$t_0 = 10$	$V_0 = 305'2085$	$V_{01} = 35'3695$	$V_{012} = 0'477$
$t_1 = 12$	$V_1 = 375'9475$	$V_{12} = 36'8005$	
$t_2 = 13$	$V_2 = 412'7479$		

Correct.

$P_2(x) = 305'2085 + 35'3695\,(x-10) + 0'477\,(x-10)(x-12)$

$P_2(11) = 305'2085 + 35'3695 \cdot 1 + 0'477 \cdot 1 \cdot (-1) = 340'101$

Error absoluto $|340'101 - 340'1142| = 0'0132$

Cota del error

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{f'''(\xi)}{3!}\,|x-10|\,|x-12|\,|x-13|$$ (Derivada en la parte de arriba) *

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{0'35838}{6} \times 3 \times 2 \times 3 = 1'075$$

* $f(x) = 2200 \ln\left(\frac{160.000}{160000 - 2680t}\right) - 9'81t = 2200 \ln(160000) - 2200 \ln(160000 - 2680t) - 981$

$f'(x) = 2200 \times \frac{2680}{160\,000 - 2860t} - 9'81 = \frac{5896000}{160000 - 2860t} - 9'81 = \frac{589600}{16\,000 - 2866} - 9'81$

$f''(x) = \frac{589\,600 \times 268}{(16\,000 - 286t)^2} = \frac{1580\,128\,000}{(16000 - 286t)^2}$

$\frac{1}{16\,000 - 268t} = (16\,000 - 268t)^{-1} \longrightarrow -1 \cdot (16000 - 268t)^{-2} = \frac{-1}{(16\,000 - 268t)^2} \times (-268)$

$f''' = 1580\,128\,000 \times \frac{2 \times 268}{(16000 - 268t)^3} = \frac{8'469486.10^{11}}{(16000 - 268t)^3}$

$\left((16000 - 268t)^{-2}\right)' = -2(16000 - 268t)^{-3} \times -268$

$f'''(x) = 8'469486.10^{11} \times \left|\frac{1}{(16000 - 268.10)^3}\right| = 0'35838$

Elena Arconada Luque

11. Aplicación al Cálculo. Calcula el área de la región situada bajo la curva $y = 4x\tan(x) + 2$ de 0 a 1. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto cometido.

$\int_0^1 4x\tan(x)+2 = 3'71235$

x	0	0'25	0'5	0'75	1
$f(x)$	2	2'2553	3'0926	4'7997	8'2296

Aproximación

$$\int_0^1 4x\tan(x)+2 \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(a)+4\cdot I+2P+f(b)\right) \qquad n=4$$

$$\int_0^1 4x\tan(x)+2 \approx \frac{1}{3\cdot 4}\left(2+4\cdot(2'2553+4'7997)+2\cdot 3'0926+8'2296\right)$$

$\approx 3'7179$ ✓

Error absoluto $= |3'7179 - 3'71235| = 5'55\cdot 10^{-3}$

No sé como hallar la integral, ya que por partes se me anula

No se puede es un ejemplo de integral que hay que calcular numéricamente

$$4\int_0^1 x\cdot\tan(x)\,dx + 2\int_0^1 dx$$

$$\int x\cdot\tan(x)\,dx = \left|\begin{matrix} u=\tan x & du=1+\tan^2(x)\,dx=\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} & dv=x\,dx \end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\cdot\tan x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$u=x^2 \; du=$
$v=tg \; dv=\frac{1}{\cos^2}$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\tan x - \frac{1}{2}\left[x^2\cdot\tan(x) - \int 2x\cdot tgx\,dx\right] = 2x\,tgx\,dx \quad ¿?$$

$I = 2I \rightarrow I = 0$ ¿?

Elena Arconada Luque.

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

$W = F \cdot \Delta x \quad \rightarrow \quad F = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$

n=0

$$\int_1^2 f(x)dx \sim G_1(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1 \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{10 \cdot \frac{3}{2}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)^5} = \frac{15}{54'5001} = 0'2752 \text{ J.}$$

Repalado y Correcto

¡cuidado!

n=1

$$\int_a^b f(x)dx \sim G_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)0\frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[f(1'21132) + f(1'78867)\right]$$

$$\frac{1}{2} \cdot (0'29617 + 0'25636) = 0'27626 \text{ J.}$$

Elena Arconada Luque

13. Aplicación a la Física. En un punto de una línea de ensamblaje de automóviles se observa cuántos coches pasan por minuto, obteniéndose los siguientes datos

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Hora	0:00	2:00	3:00	6:00	9:00	11:00	14:00	17:00	18:00
Coches por minuto	3	3	5	4	5	6	2	1	1

x_9	x_{10}	x_{11}
19:00	20:00	24:00
3	4	6

Utilizando los métodos de los trapecios y de Simpson, determina el número total de coches que pasa por día en dicho punto.

$\rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\cdot(fx_i) + f(b)\right] \Longrightarrow$ Trapecios

$\int_0^{24} f(x)dx \approx \frac{24}{22}\left[3 + 2\cdot(3+5+4+5+6+2+1+1+3+4) + 6\right] = 84$ coches/día

$\rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\cdot I + 2P + f(b)\right] \Rightarrow$ Simpson

$\int_0^{24} f(x)dx \approx \frac{24}{33}\left[3 + 4(3+4+6+1+3) + 2(5+5+2+1+4) + 6\right]$

$= \frac{24}{33}\cdot 111 = 80'72 \approx 81$ coches/día

Por Simpson no se puede, ya que n tiene que ser un número par

Sí, pero te piden que uses ambos y puedes hacerlo a través.

Elena Arconada Luque.

14. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En un canal de 20 m de ancho, se hacen mediciones de profundidad cada dos metros, obteniendo los siguientes resultados:

	$x_0=a$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Profundidad	1.8	2	4	4	6	4	3.4	3.6	2.8		0

La profundidad en los extremos del canal es 0. Calcula, aproximadamente, el área de la sección del canal.

- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4I + 2P + f(b)\right]$ => Simpson compuesto. $n=10$

$$\int_0^{20} f(x)dx \approx \frac{20}{30}\left[0 + 4\cdot(1'8+4+6+3'4+2'8) + 2\cdot(2+4+4+3'6)\cdot 10\right] =$$

$$= 66'133\ m^2 \quad \checkmark$$

- $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\cdot\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$ => Trapecios compuesto

$$\int_0^{20} f(x)dx \approx 63'2\ m^2$$

El método de Simpons suele ser más exacto.

Elena Arconada

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$v(t) = t^3 - 2t^2 = 1 \Rightarrow t^3 - 2t^2 - 1$ $\quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

- $v(t)$ es continua.
- $v'(t) = 3t^2 - 4t$ y $v''(t) = 6t - 4$.

$v(1) < 0$, $v(3) > 0$ $\Big\}$ $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\quad v''(t)$ es de signo cte $[1, \infty]$

$n = 5 \longrightarrow x_0 = 3$

- $x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{8}{15} = 2'466$
- $x_2 = 2'466 - \frac{1'8404}{8'3859} = 2'2466$
- $x_3 = 2'2466 - \frac{0'2496}{6'155} = 2'2069$ ✓
- $x_4 = 2'2069 - \frac{7'687 \cdot 10^{-3}}{5'7836} = 2'20557$
- $x_5 = 2'20557 - \frac{3'287 \cdot 10^{-6}}{5'771} = 2'205569$

Error relativo: $|x_5 - x_4| < 1 \cdot 10^{-5}$

- No, porque el cero está fuera del entorno del signo cte.

Elena Arconada

16. Aplicación a la Dinámica. Calcula, utilizando el método de la bisección, el coeficiente de rozamiento x necesario para que un paracaidista con una masa 70 kg adquiera una velocidad de $50m/s$, después de una caída libre de $t = 15$ segundos. (Indicación: La aceleración de la gravedad es de $9{,}8m/s^2$, y la ecuación a aproximar es $f(x) = \frac{gm}{x}(1 - e^{-(x/m)t}) - v = 0$)

$m = 70kg$ $\quad v = 50m/s$ $\quad t = 15s.$ $\quad g = 9'8 m/s^2$

$f(x) = \frac{9'8 \cdot 70}{x}\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{70}\right)\cdot 15}\right) - v = \frac{686}{x}\left(1 - e^{-\frac{3x}{14}}\right) - 50.$

$f'(x) = 686 \cdot \left(1 - e^{\frac{-3x}{14}}\right) + \frac{686}{x} \cdot \left(+e^{\frac{-3x}{14}} \cdot \frac{3}{14}\right) = 0$ / $f(1) > 0$, $f(15) < 0$.

En $[1,15]$ hay una única raíz. Es un intervalo demasiado grande

i	a_i	c_i	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
0	1	7'5	15	82'81772	23'1313	-6'1099
1	7'5	11'25	15	23'1313	5'5099	-6'1099
2	11'25	13'125	15	5'5099	-0'87219	-6'1099
3	11'25	12'1875	13'125	5'5099	2'1547	-0'87219
4	12'1875	12'65625	13'125	2'1547	0'60341	-0'87219
5	12'65625	12'891	13'125	0'60841	-0'14356	-0'87219
6	12'65625	12'7736	12'891	0'60341	0'22699	-0'19356

$x = 12'7736 \ kg \cdot s^{-1}$

REBECA BUENO

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

$f(t) = 9{,}5e^{-0'3t}\cos(2t)$ $\quad P_3(x)$, $t = 0'2 \Rightarrow f(0'2) = 8'240514$

x_i	y_i	$y_{i,1}$	$y_{i,2}$	$y_{i,3}$
$x_0 = 0$	$y_0 = 9'5$	$y_{01} = -4'645$	$y_{02} = -15'678$	$y_{03} = 9'1833$
$x_1 = 0'1$	$y_1 = 9'0355$	$y_{12} = -9'3485$	$y_{13} = -12'025$	
$x_2 = 0'3$	$y_2 = 7'1658$	$y_{23} = -12'956$		
$x_3 = 0'4$	$y_3 = 5'8702$			

$P_3(x) = 9'1833 - 15'678(x-0) - 4'645(x-0)(x-0'1)$

$P_3(0'2) = 5'9048$

Error absoluto $\Rightarrow 2''335714$

Error interpolación $\Rightarrow$

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x)(x-0'1) = \frac{1}{24}\left[\left(-9'5e^{-0'3(\xi)}\right)(\cos 2(\xi)(0'027(\xi)^2 + 0'414(\xi) - 15'231) + \operatorname{sen} 2(\xi)(0'027(\xi)^2 - 0'144(\xi) + 1'544\right)[k(x-0'1)]$$

Cota $|f(x) - P_3(x)| = \text{Error interp} \leq \frac{1}{24}[(-9'5 \cdot e^{-0'3}$

¿Qué ocurre con la cota, Rebeca?

2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

$v(t) = 2200 \log\left(\frac{16\,10^4}{16\,10^4 - 2680\,t}\right) - 9'81t$ $\quad P_{x_2}$ $\quad$ JJ

x_i	y_i	y_{ci}	$y_{i,i+k}$
$x_0 = 5$	$y_0 = 34'5193$	$y_{01} = 8'5071$	$y_{012} = 0'19437$
$x_1 = 10$	$y_1 = 77'0542$	$y_{12} = 10'4508$	
$x_2 = 15$	$y_2 = 129'3089$		

Debe tomar el intervalo de menor longitud que contenga a 11: $[5, 15] \xrightarrow{\log} 10$. Demasiado grande

$P_2(x) = 0'19437 + 8'5071(x-5) + 34'5193(x-5)(x-10)$

$P_2(11) = 258'3528$

REBECA BUENO

$9'5\ e^{-0'3t}\cos 2t$

$9'5\left[e^{-0'3t}\cdot(-0'3t)\cdot\cos 2t + e^{-0'3t}(-\operatorname{sen} 2t)\cdot 2\right]$

$-9'5e^{-0'3t}\left(0'3t\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t\right)$

$-9'5e^{-0'3t}(-0'3)(0'3t\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t) + (-9'5e^{-0'3t})[0'3\cos 2t + -2\operatorname{sen} 2t + 4\cos 2t)$

$-9'5e^{-0'3t}[-0'09t\cos 2t + 0'6\operatorname{sen} 2t + 4'3\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t]$

$-9'5e^{-0'3t}(-0'09t\cos 2t + 4'3\cos 2t - 1'4\operatorname{sen} 2t)$

$-9'5e^{-0'3t}(\cos 2t(4'3-0'09t) - 1'4\operatorname{sen} 2t)$

$-9'5e^{-0'3t}(-0'3t)(\cos 2t(4'3-0'09t) - 1'4\operatorname{sen} 2t) +$

$(-9'5e^{-0'3t})(-2\operatorname{sen} 2t(4'3-0'09t) + \cos 2t(-0'09t) - 2'8\cos 2t)$

¡Estaba aquí!

$=(-9'5e^{-0'3t})(-0'3t\cos 2t(4'3-0'09t) + 0'42\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} 2t(4'3-0'$

$-0'09t\cos 2t - 2'8\cos 2t)$ ¡qué trabajo! Podría haber usado Wolfram Alpha.

$=(-9'5e^{-0'3t})(\cos 2t(-1'29+0'027t^2-0'09t-2'8) + \operatorname{sen} 2t(0'42-8'$

$+0'18t)$

$=(-9'5e^{-0'3t})(\cos 2t(0'027t^2-0'09t-4'09) + \operatorname{sen} 2t(0'18t-8'$

$(-9'5e^{-0'3t})(-0'3)(\cos 2t(0'027t^2-0'09t-4'09) + \operatorname{sen} 2t(0'18t-8'$

$+(-9'5e^{-0'3t})(-2\operatorname{sen} 2t(0'027t^2-0'09t-4'09) + \cos 2t($

$0'054t-0'09) + 2\cos 2t(0'18t-0'18) + \operatorname{sen} 2t\cdot 0'18$

$=(-9'5e^{-0'3t})(\cos 2t(-8'1\cdot 10^{-3}+0'027t^2+1'227+0'054t-0'09+0'3$

$-16'36) + \operatorname{sen} 2t(-0'054t+2'454+0'027t^2-0'09t-4'09+0'18)$

$=(-9'5e^{-0'3t})(\cos 2t(0'027t^2+0'414t-15'281) + \operatorname{sen} 2t(0'027t^2$

$-0'144t+1'544))$

REBECA BUENO.

5. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En época de lluvias, en una presa se toman seis medidas del nivel del agua durante un mes, obteniéndose los siguientes datos:

t %	0	5	15	16	23	30
y (densidad)	8.20	11.4	19.9	22.4	25.2	26.8

El tiempo se mide en días y el nivel del agua en metros. Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, y aproxima el valor del nivel del agua al décimo día del mes.

6. Aplicación a la Electricidad. La carga en un circuito eléctrico con respecto al tiempo viene dado por:

t	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010
q	2.5	2.5523	2.6087	2.6682	2.7299	2.7931

donde t, es el tiempo en segundos y q la carga en culombios. Se sabe que la corriente instantánea es igual a la derivada de la carga en ese instante; ¿cuál es la fórmula de derivación lineal progresiva? Calcula el valor de la derivada con $h = 0{,}002$.

Carga = $\frac{dq}{dt}$ // f'

FORMULA DERIVADA LINEAL PROGRESIVA

$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$f'(0) = \frac{2'5523 - 2'5}{0'002} = 26'15$

$f'(0'002) = \frac{2'6087 - 2'5523}{0'002} = 28'2$ ✓

$f'(0'004) = \frac{2'6682 - 2'6087}{0'002} = 29'75$

$f'(0'006) = \frac{2'7299 - 2'6682}{0'002} = 30'85$

$f'(0'008) = \frac{2'7931 - 2'7299}{0'002} = 31'6$

REBECA BUENO

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7.

3 PUNTOS

P => $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right)$

C => $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-f(x_0-h) + f(x_0+h)\right)$

R => $f(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)\right)$

5 PUNTOS

P => $\frac{1}{12h}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)\right]$

C => $\frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right]$

R => $\frac{1}{12h}\left[3f(x_0+4h) - 16f(x_0+3h) + 36f(x_0+2h) - 48f(x_0+h) + 25f(x_0)\right]$

$f'(0)$ { 3 puntos progresiva = 4
5 puntos progresiva = -12'75 ✓

$f'(3)$ { 3P P = 53
3P C = 51'5
3P R = 46 / 5PP = 42'0833
5P C = 50'833
5P R = 42'0833

Falta el 7

8. Aplicación a la Física. Se cronometra un móvil de prueba, que se traslada por una vía recta, en algunos puntos. Los datos de las observaciones están recogidos en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos y la distancia en metros. Utilizando las fórmulas más precisas de tres puntos, calcula la velocidad aproximada en cada punto de la tabla.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	2	3	6	7	9

$v = \frac{ds}{dt}$

3 PUNTOS

$p = \frac{1}{2h} \cdot (-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h))$

$c = \frac{1}{2h} \cdot (f(x_0+h) - f(x_0-h))$

$f'(0) = \frac{1}{2\cdot5}(-3\cdot0 + 4\cdot3 - 7) = 0'5$ m/s

$f'(3) = \frac{1}{2\cdot5}(-3\cdot2 + 4\cdot6 - 9) = 0'9$ m/s

$f'(5) = \frac{1}{2\cdot5}(7 - 0) = 0'7$ m/s

No podemos, ya que no hay paso central

$f'(8) = \frac{1}{2\cdot5}(9 - 2) = 0'7$ m/s

$f'(10) = \frac{1}{-2\cdot5}(-3\cdot7 + 4\cdot3 - 0) = 0'9$ m/s

$f'(13) = \frac{1}{-2\cdot5}(-3\cdot9 + 4\cdot6 - 2) = 0'5$ m/s.

REBECA BUENO

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos:

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

$a = \frac{dx}{dt}$ 5 PUNTOS

(D) $f'(2) = \frac{1}{12 \cdot 2}(-25 \cdot 1000 + 48 \cdot 1500 - 36 \cdot 2000 + 16\ 2500 - 3\ 3000)$

$= 250$ / 3 puntos $= 250$

(C) $f'(8) = \frac{1}{12 \cdot 2}(+1500 - 8 \cdot 2000 + 8 \cdot 3000 - 3500) = 250$

(R) $f'(8) = \frac{1}{12(-2)}(-25 \cdot 2500 + 48 \cdot 2000 - 36 \cdot 1500 + 16\ 1000 - 3500$

$= 250$ ✓

(C) $f(10) = \frac{1}{12 \cdot 2}(2000 - 8 \cdot 2500 + 8\ 3500 - 4000) = 250$

(2) $f'(10) = \frac{1}{12(-2)}(-25 \cdot 3000 + 48\ 2500 - 36 \cdot 2000 + 16 \cdot 1500$

$-3 \cdot 1000) = 250$

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

$v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$ $\int_0^2 f(x)$ Valor exacto = 1'300221

SIMPSON 1/3 COMPUESTO

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3\cdot n}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right)$$

$$\int_0^2 \left(\sqrt{1-\cos t}\right)dt \approx \frac{2}{3\cdot 8}\left[0 + 4(0'1763 + 0'518 + 0'8275 + 1'0855) + 2(0'349 + 0'678 + 0'964) + 1'190\right] = 1'3001$$

- ε absoluto $|V_{ex} - V_{aprox}| = \boxed{1'21\ 10^{-4}}$
- Error $= -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) = -\frac{2^5}{180\,8^4} \cdot \frac{-105}{2^5}(1-\cos\xi)^{-9/2}\cdot \operatorname{sen}\xi =$
- Cota: $\frac{105}{180\cdot 8^4}(1-\cos\xi)^{-9/2}\cdot\operatorname{sen}\xi \leq (*) = \underline{12'25}$ ¿Cómo entras ahí en la cota?

t	0	0'25	0'5	0'75	1	1'25	1'5	1'75	2
$f(t)$	0	0'1763	0'349	0'5180	0'678	0'8275	0'964	1'0855	1'190

$$f^{(4)}(t) = (1-\cos t)^{-1/2}\cos t\operatorname{sen} t\left[\left[-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t\left(\tfrac{3}{4}(1-\cos t)^5 + \tfrac{3}{4}(1-\cos t)^3 - \tfrac{1}{2}\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[\tfrac{1}{4}(1-\cos t)^2\operatorname{sen} t\left[15(1-\cos t)^2 + 9\right]\right]\right]$$

(*) Cota $= (1-0)^{-1/2}\cdot 1\cdot 1\left[\left[-\tfrac{1}{2}1\left(\tfrac{3}{4}(1-0)^5 + \tfrac{3}{4}(1-1)^3 - \tfrac{1}{2}\right] + \right.\right.$
$$\left.\left.\left[\tfrac{1}{4}(1-0)^2\cdot 1\left[15(1-0)^2 + 9\right]\right]\right] =$$

REBECA BUENO.

$$udv = uv - \int v\,du$$

11. Aplicación al Cálculo. Calcula el área de la región situada bajo la curva $y = 4x\tan(x) + 2$ de 0 a 1. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto cometido.

$y = 4x\,tg(x) + 2$ $\int_0^1 f(x)$ SIMPSON 1/3 COMPUESTO

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right)$$

x	0	0'25	0'50	0'75	1
f(x)	2	2'2553	3'0926	4'7948	8'2296

$$\int_0^1 (4x\,tg\,x + 2)\,dx \simeq \frac{1}{3\cdot 4}\left(2 + 4(2'2553 + 4'7948) + 2(3'0926) + 8'2296\right) = 3'5179$$

$4\int \underbrace{(x\,tg\,x)}_{I_1}dx + \int 2\,dx \Rightarrow I_1 = \int tg\,x\,(x)\,\frac{dx}{dv}$ $\quad x\,dx = dv \Rightarrow \frac{x^2}{2} = v$

$tg\,x = u \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = du$

$= \frac{x^2}{2}tg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad x\cdot x = u \Rightarrow 2x\,dx = du$

$1/\cos^2 x\,dx = dv \Rightarrow tg\,x = v$

$\frac{x^2}{2}tg\,x - \frac{1}{2}\left[x^2\,tg\,x - 2\int \underbrace{tg\,x\cdot x\,dx}_{J}\right] = J$ No se puede calcular, Rebeca, hay que hacerlo por un método numé

$\frac{x^2}{2}tg\,x + \frac{1}{2}x^2 tg\,x + I = J$, $2I = \frac{x^2}{2}tg\,x - \frac{1}{2}x^2 tg\,x$

$I = x^2\,tg\,x\,(\frac{1}{2}$ no se que pasa pero da 3'71235

Error absoluto: $|Vex - Vobt| = 5'55\cdot 10^{-3}$

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

$f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$ $\int_1^2 f(x)\,dx$ Gauss Valor exacto 0'27625

n=1 $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b+a}{2}\right)+f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a+b}{2}\right)\right)$

$\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}dx \simeq \frac{2-1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{1+2}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{9-\sqrt{3}}{6}\right) = 0'29617$

$f\left(\frac{9+\sqrt{3}}{6}\right) = 0'25636$ ✓

$\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}dx \simeq \frac{1}{2}(0'29617 + 0'25636) = 0'27626$

n=0 $\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\,f\left(\frac{b+a}{2}\right) =$

$\int_1^2 \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}dx \simeq 1\cdot f(3/2) = 0'2752$

REBECA BUENO

13. Aplicación a la Física. En un punto de una línea de ensamblaje de automóviles se observa cuántos coches pasan por minuto, obteniéndose los siguientes datos

Hora	0:00	2:00	3:00	6:00	9:00	11:00	14:00	17:00	18:00
Coches por minuto	3	3	5	4	5	6	2	1	1

19:00	20:00	24:00
3	4	6

Utilizando los métodos de los trapecios y de Simpson, determina el número total de coches que pasa por día en dicho punto.

TRAP

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

$$\int_0^{24} f(x)\,dx = \frac{24}{2\cdot 11}\,(3+2\cdot 3+5+4+5+6+2+1+1+3+4)+6)$$

$$= 84 \text{ coches/día}$$

SIMPSON $n=11$, no puede ser pq tiene q ser par.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}\,(f(a)+4I+2P+f(b))$$

$$\int_0^{24} f(x)\,dx \simeq \frac{24}{3}\,(3+4(3+4+6+1+3)+2(5+5+2+1+4)+6) = 88'8 \simeq 89.$$

Hay que hacerlo a mano..

14. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En un canal de 20 m de ancho, se hacen mediciones de profundidad cada dos metros, obteniendo los siguientes resultados:

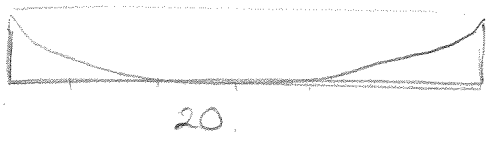
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Profundidad	1.8	2	4	4	6	4	3.4	3.6	2.8

La profundidad en los extremos del canal es 0. Calcula, aproximadamente, el área de la sección del canal.

* $\int_2^{18} f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4(I) + 2(P) + f(b)\right)$ SIMPSON

$\int_2^{18} f(x)\,dx \simeq \frac{18-2}{3\cdot 8}\left(1'8 + 4(2+4+4+3'6) + 2(4+6+3'4) + 2'8\right)$

$= 57'2\ u^2$



* TRAPECIOS

$\int_2^{18} f(x)\,dx \simeq \frac{18-2}{2\cdot 8}\left(1'8 + 2(2+4+4+6+4+3'4+3'6) + 2'8\right)$

$= 58'6\ u^2$

* Mirar No, observa bien el enunciado. Te dan dos datos más:

La profundidad en 0 y en 20 es 0. Parecen datos irrelevantes, pero no lo son. Al parecer, a y b varían y los nodos pares se convierten en impares y viceversa.

REBECA BUENO

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$v(t) = t^3 - 2t^2 = 1 \Rightarrow v(t) = t^3 - 2t^2 - 1$

NEWTON-RAPHSON

1) $v(t)$ ha de ser continua. Lo es por ser un polinomio

2) $v(t)$ ha de ser derivable 2 veces:

$v'(t) = 3t^2 - 4t$

$v''(t) = 6t - 4$

3) $v''(t)$ ha de tener signo cte.

No lo es; luego no se lo va a pasar ¡Depende del intervalo!

Pero como me dicen desde q número he de aplicar

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad n = 5$$

$x_0 = 3$ $\quad x_2 = 2'2434$ $\quad x_4 = 2'20557$

$x_1 = 2'4666$ $\quad x_3 = 2'20690$ $\quad x_5 = 2'20556$

Error: { Erelativo $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$; Error

Erelativo $|x_5 - x_4| < 1 \cdot 10^{-5}$

- No podría empezar en 0 porque se me anula.

¿Quién se anula, Rebeca?

16. Aplicación a la Dinámica. Calcula, utilizando el método de la bisección, el coeficiente de rozamiento x necesario para que un paracaidista con una masa 70 kg adquiera una velocidad de $50m/s$, después de una caída libre de $t = 15$ segundos. (Indicación: La aceleración de la gravedad es de $9{,}8m/s^2$, y la ecuación a aproximar es $f(x) = \frac{gm}{x}(1 - e^{-(x/m)t}) - v = 0$)

$f(x) = \frac{686}{x}(1 - e^{-0'2143x}) - 50 = 0$

- $f(x)$ es continua y derivable (no anula el 0, además siempre hay rozamiento)
- $f'(x) = \frac{-686}{x^2}(1 - e^{-0'2143x}) + \frac{686}{x} \cdot e^{-0'2143x} \cdot -0'2143 \neq 0$.

$f(13) = -0'485235$
$f(12'8) = 0'143607$
$\Big\}$ $f(13)\,f(12'8) < 0$ ✓ Tiene una raíz

i	a_i	c_i	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
1	12'8	12'9	13	0'143607	-0'17306	-0'485235
2	12'8	12'85	12'9	0'143607	-0'01542	-0'17306
3	12'8	12'825	12'85	0'143607	0'063712	-0'01542
4	12'825	12'8375	12'85	0'063712	0'024119	-0'01542
	12'825	12'83125	12'8375	0'024119	0'004391	-0'01542

$x = 12'8375$

(1) $f(t) = 9'5 \cdot e^{-0'3t} \cos 2t$ Grado 3 ⇒ 4 puntos ($n=3$) ($n+1$)

DIEGO GARRIDO MARTÍN | I

t	0'075	0'15	0'225	0'3
$f(t)$	9'1843	8'6763	7'9959	7'1658

(Tomo los puntos próximos a 0'2)

t_i	∂^0 y_i	∂^1 y_{ij}	∂^2 y_{ijk}	∂^3 y_{ijke}
$t_0 = 0'075$	$y_0 = 9'1843$	$y_{01} = -6'7733$	$y_{012} = -15'3247$	$y_{0123} = 8'969$
$t_1 = 0'15$	$y_1 = 8'6763$	$y_{12} = -9'072$	$y_{123} = -133067$	
$t_2 = 0'225$	$y_2 = 7'9959$	$y_{23} = -11'068$		
$t_3 = 0'3$	$y_3 = 7'1658$			

$$P_3(t) = 9'1843 - 6'7733(x-0'075) - 15'3247(x-0'075)(x-0'15) + 8'969(x-0'075)\cdot(x-0'15)\cdot(x-0'225)$$

$$P_3(t) = 9'1843 + (x-0'075)\left[-6'7733 + (x-0'15)\left[-15'3247 + 8'969(x-0'225)\right]\right]$$

$P_3(0'2) = 8'24046$ ✓

Valor real $f(0'2) = 8'240514$

$$Ea = |8'240514 - 8'24046| = 5'73 \cdot 10^{-5}$$

Error de interpolación $f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$

Cota $|f(x) - P_n(x)| = \left|\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\right| |x-x_1| \ldots |x-x_n|$

En nuestro caso: $\text{Cota} = \dfrac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} |x-0'075|\cdot|x-0'15||x-0'225||x-0'3|$

(Mathematica)

$$f^4(\xi) = e^{-0'3\xi}(131'557\cos 2\xi - 178'296\cos\xi\sin\xi - \xi\cos 2\xi)$$

$$|f^4(\xi)| = |e^{-0'3\xi}|\cdot|131'557\cdot\cos 2\xi - \xi\cos\cdot 255'131| \le$$

$$\le |e^{-0'3\xi}|\cdot(131'557\cdot|\cos 2\xi| + 178'296\cdot|\cos\xi||\sin\xi| + |\xi\cos 2\xi|) \le$$

$$\le |e^{-0'3\cdot 0'075}|\,(131'557 + 178'296) = 302'96$$

Cota (en nuestro punto $t=0'2$): $\dfrac{302'96}{24}|0'225||0'05||-0'025||-0'1| = 1'77\cdot 10^{-4}$

Cota en general $= \dfrac{302'96}{24}|0'225||0'15||0'225||0'3| = 0'02876$

2) $v(t) = 2200 \ln\left(\frac{160000}{160000 - 2680t}\right) - 9'81t$

Grado 2
$n = 2 \Rightarrow n+1 = 3$ puntos.

t	0	7	14
$v(t)$	0	205'6991	450'5573

$t = 11$?

$v(11) = 340'1142$ Ea?

Error int $\longrightarrow$ Cola

t_i	∂^0 y_i	∂^1 y_{ij}	∂^2 y_{ijk}
$t_0 = 0$	$y_0 =$ [illegible]	$y_{01} = 29'3856$	$y_{012} = 0'3996$
$t_1 = 7$	$y_1 = 205'6991$	$y_{12} = 34'9797$	
$t_2 = 14$	$y_2 = 450'5573$		

Deberían usar un intervalo de menor longitud

$$P_2(t) = 29'3856\,t + 0'3996 \cdot t(t-7)$$

$$P_2(11) = 340'824$$

$$Ea = |340'1142 - 340'824| = 0'7098$$

$$\text{Error interpolación} \equiv \frac{f^{3)}(\xi)}{3!}(t-0)(t-7)(t-14)$$

Matemática $\longrightarrow$ $f^{3)}(\xi) = -\frac{1323357200}{(-4000+67\xi)^3}$

$$|f^{3)}(\xi)| = \frac{1323357200}{|-4000+67\xi|^3} \leq \frac{1323357200}{(|4000| + |67\xi|)^3}$$

$\xi \in (0, 14)$

$$\text{Cota} = \frac{|f^{3)}(\xi)|}{3!}|t||t-7||t-14|$$

en general: $\frac{1323357200}{6 \cdot (4000)^3} \cdot 14 \cdot 7 \cdot 14 = 4'7282$

para $t = 11$: $\frac{1323357200}{6 \cdot (4000)^3} \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3 = 0'4549$

(3) $y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	1	1'1	1'2	1'3	1'4	1'5
y	0'8427	0'8802	0'9103	0'9340	0'9523	0'9661

	δ^0	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5
x_i	y_i	y_{ij}	y_{ijk}	y_{ijke}	y_{ijkem}	y_{ijkemn}
$x_0 = 1$	$y_0 = 0'8427$	$y_{01} = 0'375$	$y_{012} = -0'37$	$y_{0123} = 0'1667$	$y_{01234} = 0$	$y_{012345} = -0'0833$
$x_1 = 1'1$	$y_1 = 0'8802$	$y_{12} = 0'301$	$y_{123} = -0'32$	$y_{1234} = 0'1667$	$y_{12345} = -0'0417$	
$x_2 = 1'2$	$y_2 = 0'9103$	$y_{23} = 0'237$	$y_{234} = -0'27$	$y_{2345} = 0'15$		
$x_3 = 1'3$	$y_3 = 0'9340$	$y_{34} = 0'183$	$y_{345} = -0'225$			
$x_4 = 1'4$	$y_4 = 0'9523$	$y_{45} = 0'138$				
$x_5 = 1'5$	$y_5 = 0'9661$					

✓

$$P_5(x) = 0'8427 + 0'375(x-1) - 0'37(x-1)(x-1'1) + 0'1667(x-1)(x-1'1)(x-1'2) - 0'0833(x-1)(x-1'1)(x-1'2)(x-1'3)(x-1'4)$$

$$P_5(x) = 0'8427 + (x-1)\left[0'375 + (x-1)\left[-0'37 + (x-1'2)\left[0'1667 + (x-1'3)\left[-0'0833(x-1'4)\right]\right]\right]\right]$$

$$P_5(1'32) = 0'9381$$

Cota del error.

$$|f(x) - P(x)| = \frac{f^6(\xi)}{6!} |x-1| \dots |x-1'5|$$

$$f^6(\xi) = \frac{16}{\pi} \cdot e^{-\xi^2}(15 - 20\xi^2 + 4\xi^4)$$

Mathematica. ✓

$$\xi \in (1, 1'5)$$

$$|f^6(\xi)| \leq \frac{16}{\pi} \cdot e^{-\xi^2} \cdot |\xi| \left(15 + 20\xi^2 + 4\xi^4\right) \leq 225'53$$

$$|f(1'32) - P(1'32)| \leq \frac{225'53}{6!} \cdot |1'32-1| \dots |1'32-1'5| = 7'62 \cdot 10^{-7}$$

(4) Grado uno ⇒ 2 puntos.

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} =$$

$$= \frac{1'1801}{-8} \cdot (x-28) + \frac{1'1652}{9} \cdot (x-20) =$$

$$= -0'1475\,(x-28) + 0'1581\,(x-20) = 1'2332\,x$$

(5) $$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{11'4\,(x-15)(x-16)}{110} + 19'9\,\frac{(x-5)(x-16)}{-10} + 22'4\,\frac{(x-5)(x-15)}{11} =$$

$$= 0'1036\,(x-15)(x-16) - 1'99\,(x-5)(x-16) + 2'0364\,(x-5)(x-15) =$$

$$= 3'109 + 59'7 - 50'902 = 11'9$$

(6). corriente instantánea $q'(t)$

$$q'(t_0) = \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

$$q'(t_0) \cong \frac{f(t_0+0'002) - f(t_0)}{0'002}$$

¿En que punto?

(7)

$h = 1$

3 puntos

Progresiva

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-3 f(x_0) + 4 f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right) + \frac{h^2 f^{3)}(\xi)}{3}$$

Centrada

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(-f(x_0-h) + f(x_0+h)\right) - \frac{h^2}{6} f^{3)}(\xi)$$

Regresiva

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left(f(x_0-2h) - 4 f(x_0-h) + 3 f(x_0)\right) + \frac{h^2 f^{3)}(\xi)}{3}$$

5 ptos

progresiva

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[-25 f(x_0) + 48 f(x_0+h) - 36 f(x_0+2h) + 16 f(x_0+3h) - 3 f(x_0+4h)\right] + \frac{h^4}{5} f^{5}(\xi)$$

Centrada

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8 f(x_0-h) + 8 f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^4}{30} f^{5}(\xi)$$

Regresiva $= \frac{1}{12h}\left[3 f(x_0-4h) - 16 f(x_0-3h) + 36 f(x_0-2h) - 48 f(x_0-h) + 25 f(x_0)\right] + \frac{h^4}{5} f^{5}(\xi)$

Punto (x_0)	$f(x_0)$
0	4
3	53
3	51'5
3	46
7	196'5
0	-12'75
3	42'0?
3	50'8
7	169'7

(8)

t	0	3	5	8	10	13
x	0	2	3	6	7	9

$$v(0) = x'(t=0) \cong \frac{1}{2.5}\left(-3f(0) + 4f(5) - f(10)\right) \cong 0'5 \text{ m/s}$$

$$v(3) = x'(t=3) \cong \frac{1}{2.5}\left(-3f(3) + 4f(8) - f(13)\right) \cong 0'9 \text{ m/s}$$

Al no ser equidistante, no se puede calcular.

$$v(5) = x'(t=5) \cong \frac{1}{2.5}\left(-f(0) + f(10)\right) \cong 0'7 \text{ m/s}$$

$$v(8) = x'(t=8) \cong \frac{1}{2.5}\left(-f(3) + f(13)\right) \cong 0'7 \text{ m/s}$$

$$v(10) = x'(t=10) \cong \frac{1}{2.5}\left(f(0) - 4f(5) + 3f(10)\right) \cong 0'9 \text{ m/s}$$

$$v(13) = x'(t=13) \cong \frac{1}{2.5}\left(f(8) - 4f(8) + 3f(13)\right) \cong 0'5 \text{ m/s}$$

(9)

~~a(t) v(t)~~

$a_{ang} = \alpha(t)$ $\quad \alpha(t) = \omega'(t)$ (instant.)

$v_{ang} = \omega(t)$

$$\omega'(t=2) \cong \frac{1}{12.2}\cdot\left[-25\cdot 1000 + 48\cdot 1500 - 36\cdot 2000 + 16\cdot 2500 - 3\cdot 3000\right] \cong 250 \frac{\text{rpm}}{\text{s}}$$

$$\omega'(t=8) \cong \frac{1}{12.2}\left[+1500 - 8\cdot 2000 + 8\cdot 3000 - 3500\right] \cong 250 \text{ rpm/s}$$

$$\omega'(t=10) \cong \frac{1}{12.2}\left[+3\cdot 1000 - 16\cdot 1500 + 36\cdot 2000 - 48\cdot 2500 + 25\cdot 3000\right] \cong 250 \text{ rpm/s}$$

aceleración angular instantánea constante

(11) $f(x)=y = 4x\operatorname{tg}x + 2$ — Simpson 1/3 compuesto $\Rightarrow n=4$ mínimo

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{n\cdot 3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} f^4(\eta)$$

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{(1-0)}{4\cdot 3}\left[2 + 2(4'5463) + 4(3'2553 + 4'7948) + 8'2296\right] =$$

$$= 4'2936$$

$x_i \rightarrow$ 0'25 0'5 0'75 (0 — 1)

$f(x_i) \rightarrow$ 2 | 3'2553 | 4'5463 | 4'7948 | 8'2296

Error absoluto (Mathematica me da como valor 3'71235)

$$E_a = \left| -3'71235 + 4'2936 \right| = 0'5812$$ ✓

(12) $f(x)$ [newton] $= \dfrac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$ [posición (m)]

$$w = \int_1^2 f(x)dx$$

$n=0$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$w = \int_1^2 f(x)dx = (2-1)\cdot f(3/2) = \quad ✓$$

$$= \underline{0'2752\ J}$$

$n=1$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right)\right]$$

$$w = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[0'29617 + 0'25636\right] = \underline{0'2763}$$

(13) $\dfrac{\text{nº coches}}{\text{día}} = \int_0^{24} f(x)dx = *$

$$* = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^9 f(x)dx + \int_9^{11} f(x)dx + \int_{11}^{17} f(x)dx + \int_{17}^{20} f(x)dx +$$

$$+ \int_{20}^{24} f(x)dx = \frac{2-0}{2}(f(0)+f(2)) + \frac{3-2}{2}(f(2)+f(3)) + \frac{9-3}{6}\cdot(f(3)+4f(6)+f(7)) +$$

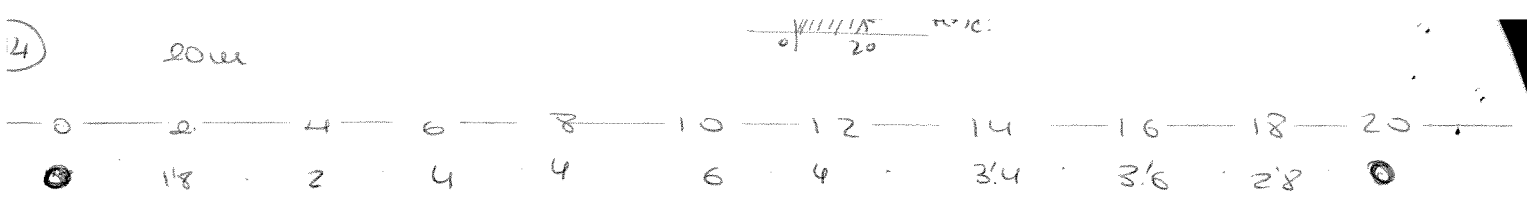
$$+ \frac{11-9}{2}(f(9)+f(11)) + \frac{17-11}{6}\cdot(f(11)+4f(14)+f(17)) + \frac{20-17}{8}(f(17)+3f(18)+$$

$$3f(19)+f(20)) + \frac{24-20}{2}(f(20)+f(24)) = 6 + 4 + 26 + 11 + 15 +$$

$$+ 6'375 + 20 = 88'375 \cong 88 \text{ coches/día}$$

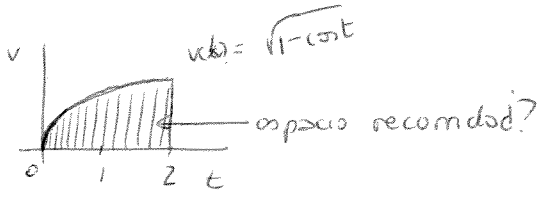
✓

(4) 20 m



Area sección $= \int_0^{20} f(x)dx \underset{\text{Simpson Comp.}}{\simeq} \frac{(20-0)}{3\cdot 10}\left[0 + 2\cdot(2+4+4+3'6) + 4\,(1'8+4+6+3'4+2'8) + 0\right] \simeq 66'13\ m^2$ ✓

(10) $v(t) = \sqrt{1-\cos t}$



$\int_0^2 (\sqrt{1-\cos t})dt = 1'300221$

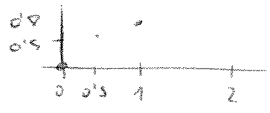
t_k	0	1	2
$v(t)$	0	0'678	1'19

$\int_0^2 v(t)dt = \frac{(2-0)}{6}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right] = 1'3006867$

$E_a = |1'3006867 - 1'300221| = 4'66\cdot 10^{-4}$

Error método de Simpson 1/3 simple : $-\frac{(b-a)^5}{2880} f^4(\eta)$

$f^4_{(x)}$ (resultado) $= \frac{\sin(x/2)^8}{(1-\cos x)^{7/2}}$



Error $= -\frac{1}{1440}\cdot\frac{\sin(\eta/2)^8}{(1-\cos\eta)^{7/2}}$ → 

Cola $= \pm\frac{1}{1440}\cdot\frac{\sin 1}{(1-\cos 1)^{7/2}} \simeq 8'87\cdot 10^3$

Error en $t=2$ $\frac{-1}{1440}\frac{\sin 1}{(1-\cos 2)^{7/2}} = -1'73\cdot 10^{-4}$

¿Cómo evitarlo?

(15) $v(t) = t^3 - 2t^2$

a) 5 iteraciones, $x_0 = 3$

b) ¿$x_0 = 0$?

c) Error relativo? cifras exactas?

$v(t) = 1\ m/s$

$t^3 - 2t^2 - 1 = 0$

Llamamos: (continua, derivable)

$f(t) = t^3 - 2t^2 - 1 = 0$

1) $f(3) = 8 > 0$, $f(2) = -1 < 0$ $\Rightarrow$ Teorema Bolzano. Raíz $\in [2,3]$

2) $f'(t) = 3t^2 - 4t$

$f'(t) \neq 0 \ \forall t \in [2,3]$ (raíz única)

3) $f''(t) = 6t - 4$

$f''(t) > 0 \ \forall t \in [2,3]$

4) $f''(3) f(3) = 112 > 0$

1), 2), 3), 4) $\Rightarrow$ Newton-Raphson

a) $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

$x_1 = 3 - \dfrac{f(3)}{f'(3)} = 2'4667$

$x_2 = 2'2473$

$x_3 = 2'2069$

$x_4 = 2'20567$

$x_5 = 2'20556$

b) $f(0) = -1 < 0$, $f(3) = 8 > 0$ $\Rightarrow \exists$ al menos 1 raíz en $[0,3]$

$f'(t) = 3t^2 - 4t$ no tiene signo cte en $[0,3]$

no es segura que el método nos lleve a la raíz.

c) $Er = \dfrac{|2'20556 - 2'20557|}{2'20556} = 4'53 \cdot 10^{-6}$

nº cifras exactas = 5

(16) x?

$m = 70\ kg$

$v = 50\ m/s$

$t = 15\ s$

$g = 9'8\ m/s^2$

$f(x) = \dfrac{gm}{x}\left(1 - e^{-(x/m)t}\right) - v = 0$

$f(x) = \dfrac{9'8 \cdot 70}{x}\left(1 - e^{-(x/70)15}\right) - 50 = 0$

$f(x) = \dfrac{686}{x}\left(1 - e^{-\left(\frac{3x}{14}\right)}\right) - 50 = 0$

~~f(2) = 82'32 > 0~~

~~f(4) = 48'77 > 0~~

~~f(5)~~

$f(12) = 2'79 > 0$, $f(13) = -0'486 < 0$ $\Rightarrow$ Bolzano: 12'7 (al menos uno) en $[12,13]$

a	$\frac{a+b}{2}$	b	f(a)	$f(\frac{a+b}{2})$	f(b)
12	12'5	13	2'7976	1'1118	-0'49
12'5	12'75	13	1'1118	1'3084	-0'48
12'75	12'875	13	1'3084	-0'0943	-0'48
12'875	12'8125	12'875	1'3084	0'1034	-0'09
12'8125	12'84375	12'875	0'1034	$4'347 \cdot 10^{-3}$	-0'07

$x =$ 12'84375

(17)

$$y_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g} \right)^{1/3} = 0'9924$$

$$14'15 = \frac{y_n \cdot 4'572}{0'017} \left(\frac{y_n (4'572)}{4'572 + 2 \cdot y_n} \right)^{2/3} (0'0015)^{1/2}$$

~~$0'211 = y_n$~~

$$1'3585 = y_n \left(\frac{y_n \cdot 4'572}{4'572 + 2 y_n} \right)^{2/3}$$

$$f(x) = y_n \left(\frac{y_n \cdot 4'572}{4'572 + 2 y_n} \right)^{2/3} - 1'3585 = 0$$

a	$\frac{a+b}{2}$	b	f(a)	$f(\frac{a+b}{2})$	f(b)
1	1'5	2	-0'5734	0'04566	0'7295
1	1'25	1'5	-0'5734	-0'2740	0'04566
1'25	1'375	1'5	-0'2740	-0'1164	0'04566
1'375	1'4375	1'5	-0'1164	-0'0358	0'04566
1'4375	1'46875	1'5	-0'0359	$4'75 \cdot 10^{-3}$	0'04566

$y_n =$ ⟶ super-crítico ¿No usa la fórmula para todos?

(18) $I = 10 e^{-t} \operatorname{sen} 2\pi t$ t en s

~~$I = 2 \Rightarrow f(x) = 10 e^{-t} \operatorname{sen} 2\pi t - 2 = 0$~~

$f'(x) = 10 [-e^{-t} \operatorname{sen} 2\pi t + 2\pi \cos 2\pi t \, e^{-t}] =$

$= 10 e^{-t} [2\pi \cos(2\pi t) - \operatorname{sen} 2\pi t]$

$f(x) = 0$ cuando $\operatorname{sen} 2\pi t = 0$

$2\pi t =$

¿?

¿Qué te ocurre en este problema?

(19)

VI

	Producto 1	P. 2	P. 3	P. 4	
Máquina 1	1 h/ud · x ud	2 h/ud · y ud	1 h/ud · 2 ud	2 h/ud · k ud	= 8 h
M. 2	2 h/ud	0	1	1	
M. 3	1	2	3	0	

$$x + 2y + z + 2k = 8$$
$$2x + z + k = 8$$
$$x + 2y + 3z = 8$$

como parámetro

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8-2k \\ 2 & 0 & 1 & 8-k \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[2ª-2\cdot1ª \\ 3ª-1ª]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8-2k \\ 0 & -4 & -1 & -8+3k \\ 0 & 0 & -2 & 2k \end{array}\right)$$

$k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{z = k}$$

$$-4y - z = -8 + 3k$$

$$-4y = -8 + 4k$$

$$\boxed{y = 2 - k}$$

$$x = 8 - 2k - k - 4 + 2k = \boxed{4 - k}$$

$k = 0$

$x = 4$
$y = 2$
$z = 0$

$k = 1$

$x = 3$
$y = 1$
$z = 1$

$k = 2$

$x = 2$
$y = 0$
$z = 2$

$k = 3 \ldots$

valores negativos de alguna variable.

¿Por qué los elimino?

Suponiendo que todas las máquinas producen algo

P.1 → 3uds
P.2 → 1ud
P.3 → 1ud
P.4 → 1ud

20)

	X (1/3L)	Y (1/3L)	Z (1/3L)	Req.
A	1ud	2	3	10 uds
B	2	1	2	12 uds
C	1	3	1	8 uds

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[3ª-1ª]{2ª-2\cdot1ª} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{3ª+1/3\cdot2ª} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -10/3 & -14/3 \end{array}\right)$$

U

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

✓

$LUx = b$

y

$Ly = b$

$Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 10$

$2y_1 + y_2 = 12 \Rightarrow y_2 = -8$

$y_1 - 1/3 y_2 + y_3 = 8$

$y_3 = 8 - 10 + 8/3 = -14/3$

~~$Ly = b$~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -14/3 \end{pmatrix}$$

$z = 1'4$

$y = 0'8$

$x = 4'2$

Resultado

$x = 12'6L$

$y = 2'4L$

$z = 4'2L$

$\frac{1ud}{3L}$

$\frac{1ud}{L} \cdot xL +$

(21)

	con plomo	sin Pb	
Mercedes	4 min/t · xt	5 min/t · yt	180 min
Renault	2 min/t · xt	4 min/t · yt	120 min

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 180 \\ 2 & 4 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow{2ª - \frac{1}{2}\,1ª} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 180 \\ 0 & 3/2 & 30 \end{array}\right) \checkmark$$

$y = 20$ t con plomo

$x = \frac{180 - 5 \cdot 20}{4} = 20$ t con plomo

(22)

	Común	Especial	
A	2u/t · xt	2u/t · yt	8u
B	5u/t · xt	3u/t · yt	15u

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Parcial}]{\text{Pivote}} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 15 \\ 2 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{2ª - 2/5 \cdot 1ª} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 15 \\ 0 & 4/5 & 2 \end{array}\right)$$

$x = 1'5$ t común
$y = 2'5$ t especial

$2 - 2/5 \cdot 3 = 2 - 6/5 = 4/5$ ✓

¿Por qué es necesario emplear Pivote parcial?

No es necesario, sólo porque lo piden.

(23)

	A en 100g	B en 100g	C en 100g	Total
Proteína	2 x uds	3 y uds	3 z uds	25
Grasa	3	2	3	24
Carbohidrato	4	1	2	21

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[2ª - \frac{3}{2}\cdot 1ª]{3ª - 2 \cdot 1ª} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -27/2 \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{3ª - 2ª \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -27/2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \checkmark$$

$2 - 9/2 = -5/2$

$3 - 9/2 = -3/2$

$24 - 25/2\,3 = -27/2$

$z = 2$

$y = \frac{27 - 3 \cdot 2}{5} = 4'2$

$x = 3'2$

solución (x 100 g)

200 g de C

420 g de B

320 g de A

---

(24)

$AX = I$

$A = LL^t$

$L\bar{X} = I$

$L^t X = \bar{X}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow L^t = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$

$l_{21} = \dfrac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = \sqrt{2}/2$

$l_{31} = \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = 0$

$$l_{KK} = \sqrt{a_{KK} - \sum_{j=1}^{K-1} l_{kj}^2}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{j=1}^{1} l_{21}^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$$

$$l_{iK} = \left(a_{1K} - \sum_{j=1}^{K-1} l_{ij} l_{kj}\right) / l_{kk}$$

$$l_{32} = \left(a_{32} - \sum_{j=1}^{1} l_{31} l_{21}\right) / l_{22} =$$

$$= \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}/2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{j=1}^{2} l_{3j}^2} = \sqrt{1 - (0 + 1/2)} = \sqrt{1/2}$$

$L\bar{X} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$x = 1$

$x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} = 0$

$y/\sqrt{2} + z/\sqrt{2} = 0$

$x = 0$

$x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} = 1 \quad y = \sqrt{2}$

$y/\sqrt{2} + z/\sqrt{2} = 0 \quad z = -\sqrt{2}$

$x = 0$

$y/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} = 0 = y$

$y/\sqrt{2} + z/\sqrt{2} = 1 \quad z = \sqrt{2}$

$x = 1$

$y = -1$

$z = 1$

$z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A continua...

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

	A)	B)	C)
$x + y/\sqrt{2} =$	1	0	0
$y/\sqrt{2} + z/\sqrt{2} =$	-1	$\sqrt{2}$	0
$\sqrt{2}/2\, z =$	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

A) $\Rightarrow$ $z = \sqrt{2}$, $y = -2\sqrt{2}$, $x = 3$

B) $\Rightarrow$ $z = -2$, $y = 4$, $x = -2\sqrt{2}$

C) $\Rightarrow$ $z = 2$, $y = -2$, $x = 2/\sqrt{2}$

$$X \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4 & -2 \\ \sqrt{2} & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Comprobamos:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

INTERPOLACIÓN

1. Aplicación a la Ingeniería Civil. En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras que están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, en cierta estructura se encontró bajo experimentos la función que describe el desplazamiento, dada por $f(t) = 9{,}5e^{-0{,}3t}\cos(2t)$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $f(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 3 y calcula su valor aproximado en $t = 0{,}2$. Tomando como valor real $f(0{,}2) = 8{,}240514$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

x_i | y_i | y_{ij} | y_{ijk} | y_{ijke}

$x_0 = 0$ | $y_0 = 9'5$ | $y_{01} = \frac{4'418 - 9'5}{0'5 - 0} = -10'164$ | $y_{012} = -4'53$ | $y_{0123} = 8'7253$

$x_1 = 0'5$ | $y_1 = 4'418$ | $y_{12} = \frac{-2'929 - 4'418}{1 - 0'5} = -14'694$ | $y_{123} = 8'558$

$x_2 = 1$ | $y_2 = -2'929$ | $y_{23} = \frac{-5'997 + 2'929}{1'5 - 1} = -6'136$

$x_3 = 1'5$ | $y_3 = -5'997$

$$P_3(x) = 9'5 - 10'164(x - 0'5) - 4'53(x - 0'5)(x - 1) + 8'7253(x - 0'5)(x - 1)(x - 1'5)$$

$$P_3(0'2) = 9'5 + 10'164 \cdot 0'3 - 4'53 \cdot 0'3 \cdot 0'8 + 8'7253 \cdot 0'3 \cdot 0'8 \cdot 1'3 = 14'184$$

Error Absoluto $= |14'184 - 8'240514| = 5'9438$

$$\text{Error} = (x)(x - 0'5)(x - 1)(x - 1'5) \cdot \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}$$

$$f^{IV}(x) = e^{0'675x}(5'26\cos(2x) + 38'296\,\text{sen}(x)\cdot\cos(x))$$

$$e^{0'675 \cdot 1'5}(5'26 \cdot 1 + 38'296 \cdot 1) < M$$

Cota del error

$$|f(x) - P_3(x)| < |0'2 \cdot (0'2 - 0'5) \cdot (0'2 - 1) \cdot (0'2 - 1'5)| \cdot \frac{119'887}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} < 0'3117$$

El intervalo es demasiado grande



2. Aplicación a la Cinemática. La velocidad en ascenso de un cohete viene dada por la ecuación $v(t) = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000-2680t}\right) - 9{,}81t$, donde t es el tiempo. Aproxima la función $v(t)$ mediante un polinomio de interpolación de grado 2 y calcula su valor aproximado en $t = 11$. Tomando como valor real $v(11) = 340{,}1142$, calcula el error absoluto cometido en la aproximación. Calcula, utilizando la fórmula del error de interpolación, una cota del error cometido.

$v = 2200 \log\left(\frac{160000}{160000 - 2680t}\right) - 9'81t$

$t = 10 \longrightarrow v = 305'2085$

$t = 12 \longrightarrow v = 375'9475$

$t = 10'5 \longrightarrow v = 322'5477$

$P_2(x) = 305'2085 \frac{(x-12)(x-10'5)}{(10-12)(10-10'5)} + 375'9475 \frac{(x-10)(x-10'5)}{(12-10)(12-10'5)} +$

$+ 322'5477 \frac{(x-10)(x-12)}{(10'5-10)(10'5-12)} =$ ✓

$= 305'2085(x-12)(x-10'5) + 125'3158(x-10)(x-10'5) - 4'3006(x-10)(x-12)$

$P_2(11) = 305'2085 \cdot (-1)(0'5) + 125'3158 \cdot 1 \cdot 0'5 - 430'0636 \cdot 1 \cdot (-1) = 340'11725$

Error absoluto $= |340'1142 - 340'11725| = 0'00305.$

error: $f(x) - P_2(x) = (x-10)(x-10'5)(x-12) \cdot \frac{f^{3)}(3)}{3!}$

$f^{3)}(3) = \frac{1323357200}{(673-4000)^3} < \frac{1323357200}{(6 \cdot 12 - 4000)^3}$

$|f(t) - P_2(t)| < |11-10||11-10'5||11-12| \cdot \frac{4'1054 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 2 \cdot 1} < 3'1378 \cdot 10^{-3}$

3. Aplicación a las Probabilidades. En la siguiente tabla se contemplan algunos valores de la probabilidad: $y(x) = P(0 < X < x) = \frac{2}{\Pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$? ?

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661

Por medio de interpolación de Newton, aproxima el valor para $y(1.32)$. Calcula una cota del error cometido.

x_i | y_i

$x_0 = 1$ | $y_0 = 0'8427$

$x_1 = 1'1$ | $y_1 = 0'8802$

$x_2 = 1'2$ | $y_2 = 0'9103$

$x_3 = 1'3$ | $y_3 = 0'9340$

$x_4 = 1'4$ | $y_4 = 0'9523$

$x_5 = 1'5$ | $y_5 = 0'9661$

x_{ij}: $x_{01} = 2'662$; $x_{12} = 3'322$; $x_{23} = 4'219$; $x_{34} = 5'464$; $x_{45} = 7'246$

x_{ijk}: $x_{012} =$; $x_{123} =$; $x_{234} = 29'643$; $x_{345} = 55'514$

x_{ijke}: $x_{0123} =$; $x_{1234} =$; $x_{2345} = 463'641$

$$P_3(x) = 1'2 + 4'219(x - 1'2) + 29'643(x - 1'2)(x - 1'3) + 463'641(x - 1'2)(x - 1'3)(x - 1'4)$$

$P_3(1'32) =$? ? ¿Qué ha ocurrido, María?

Error:

$$f(x) - P(x) = (x - 1'2)(x - 1'3)(x - 1'4) \cdot \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}$$

¿Cómo hago la derivada?

Recuerda el teorema fundamental del Cálculo que vimos en clase: $f'(x_0) = y'(x_0) = \frac{2}{\Pi} e^{-x_0^2}$

4. Aplicación a la Ingeniería Química. La densidad del carbonato de potasio en solución acuosa varía con la temperatura y la concentración. En un experimento para determinar la densidad del carbonato, se consideró la temperatura constante y se varió la concentración, obteniendo la tabla:

			x_0 ↓	x_1 ↓		
x (concentración) %	4	12	20	28	38	45
y (densidad)	1.0276	1.1013	1.1801	1.2652	1.3480	1.4120

Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno y aproxima el valor de la densidad del carbonato de potasio en solución acuosa para una concentración de 25 %.

$$P(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$P_1(x) = 1'1801 \frac{x - 28}{20 - 28} + 1'2652 \frac{x - 20}{28 - 20} = -0'1475x +$$

$$+ 4'1303 + 0'15815x - 3'168 = 0'01065x + 0'9673$$

$$P_1(25) = 0'01065\,25 + 0'9673 = 1'23355$$ ✓

5. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En época de lluvias, en una presa se toman seis medidas del nivel del agua durante un mes, obteniéndose los siguientes datos:

t (días)	0	5	15	16	23	30
y (densidad)	8.20	11.4	19.9	22.4	25.2	26.8

El tiempo se mide en días y el nivel del agua en metros. Calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de segundo grado, y aproxima el valor del nivel del agua al décimo día del mes.

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 11'4 \frac{(x-15)(x-16)}{(5-15)(5-16)} + 19'9 \frac{(x-5)(x-16)}{(15-5)(15-16)} + 22'4 \frac{(x-5)(x-15)}{(16-5)(16-15)} =$$

$$= 0'1036\,(x-15)(x-16) - 1'99\,(x-5)(x-16) + 2'036\,(x-5)(x-15)$$

$$P_2(10) = 11'908 \text{ m}$$ ✓

DERIVACIÓN NUMÉRICA

6. Aplicación a la Electricidad. La carga en un circuito eléctrico con respecto al tiempo viene dado por:

t	0	0.002	0.004	0.006	0.008	0.010
q	2.5	2.5523	2.6087	2.6682	2.7299	2.7931

donde t, es el tiempo en segundos y q la carga en culombios. Se sabe que la corriente instantánea es igual a la derivada de la carga en ese instante; ¿cuál es la fórmula de derivación lineal progresiva? Calcula el valor de la derivada con $h = 0{,}002$.

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{df''(\xi)}{dx} \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} +$$

$$+ \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot [(x-x_0) + (x-x_1)]$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{f(t_0+0'002) - f(t_0)}{0'002} + \frac{df''(\xi)}{dt} \cdot \frac{(t-t_0)(t-t_0-0'002)}{2}$$

$$+ \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (2t + 2\cdot t_0 - 0'002)$$

✓

Vs para $t=0$

$$f'(0) = \frac{f(0'002) - f(0)}{(0'002)} = \frac{2'5523 - 2'5}{0'002} = 26'15 - \frac{0'002}{2} f''(\xi)$$

$$f'(0'002) = \frac{2'6087 - 2'5523}{0'002} = 28'2 - 0'001 f''(\xi)$$

$$f'(0'004) = \frac{2'6682 - 2'6087}{0'002} = 29'75 - 0'001 f''(\xi)$$

$$f'(0'006) = \frac{-2'6682 + 2'7299}{0'002} = 30'85 - 0'001 f''(\xi)$$

$$f'(0'008) = \frac{2'7931 - 2'7299}{0'002} = 31'6 - 0'001 f''(\xi)$$

→ Para $t = 0'010$ tengo que usar la fórmula regresiva:

$$f'(0'010) = \frac{2'7931 - 2'7299}{0'002} = 31'6 + 0'001 f''(\xi)$$

7. Aplicación a la Biología. Se estudia, mediante cultivos, la tasa de crecimiento de una bacteria, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo (días)	0	1	2	3	4	5	6	7
Bacterias	35	52	95	140	198	266	342	465

Escribe las fórmulas progresivas, regresivas y centradas de tres y cinco puntos. Calcula el valor de la derivada en 0 con todas las fórmulas posibles. Repite el ejercicio anterior para calcular la derivada en 3 y en 7.

3p progr. $f'(0) = \frac{1}{2}\left[-3\cdot f(0) + 4f(0+1) - f(0+2)\right] = \frac{1}{2}(-3\cdot 35 + 4\cdot 52 - 95) = 4.$

3p. regr. $f'(x_0) = -\frac{1}{2}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0-4) - f(x_0-2\cdot 4)\right]$ → no se puede aplicar a cero

3p. centr. $f'(x_0) = \frac{1}{2}\left[-f(x_0-1) + f(x_0+1)\right]$ → no se puede aplicar a cero

5p centr. $f'(x_0) = \frac{1}{12}\left[f(x_0-2) - 8f(x_0-1) + 8f(x_0+1) - f(x_0+2)\right]$ → no se puede aplicar a cero

5p progr. $f'(0) = \frac{1}{12}\left[-25f(0) + 48f(0+1) - 36f(0+2) + 16f(0+3) - 3f(0+4)\right] = -12'75$

5p regr. $f'(x_0) = \frac{1}{-12}\left[-25f(x_0) + 48f(x_0-4) - 36f(x_0-2\cdot 4) + 16f(x_0-3\cdot 4) - 3f(x_0-4\cdot 4)\right]$ no se puede aplicar a cero.

$f'(3) = \frac{1}{2}\left[-3f(3) + 4f(4) - f(5)\right] = 53$ ✓

$f'(3) = -\frac{1}{2}\left[-3f(3) + 4f(2) - f(1)\right] = 46$

$f'(3) = \frac{1}{2}\left[-f(2) + f(4)\right] = 51'5$

$f'(3) = \frac{1}{12}\left[f(1) - 8f(2) + 8f(4) - f(5)\right] = 50'83$

$f'(3) = \frac{1}{12}\left[-25\cdot f(3) + 48f(4) - 36f(5) + 16f(6) - 3f(7)\right] = 42'083$

$f'(7) = -\frac{1}{2}\left[-3f(7) + 4f(6) - f(5)\right] = 146'5$

$f'(7) = -\frac{1}{12}\left[-25f(7) + 48f(6) - 36f(5) + 16f(4) - 3f(3)\right] = 169'17$

8. Aplicación a la Física. Se cronometra un móvil de prueba, que se traslada por una vía recta, en algunos puntos. Los datos de las observaciones están recogidos en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos y la distancia en metros. Utilizando las fórmulas más precisas de tres puntos, calcula la velocidad aproximada en cada punto de la tabla.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	2	3	6	7	9

$f'(0) = \frac{1}{10}[-3\cdot 0 + 4\cdot 3 - 7] = 0'5\ m/s$

$f'(3) = \frac{1}{10}[-3\cdot 2 + 4\cdot 6 - 9] = 0'9\ m/s$

$f'(5) = \frac{1}{10}[-0 + 7] = 0'7\ m/s$

$f'(8) = \frac{1}{10}[-3 + 9] = 0'7\ m/s$

$f'(10) = \frac{1}{10}[-3\cdot 7 + 4\cdot 3 - 0] = +0'9\ m/s$

$f'(13) = \frac{1}{10}[-3\cdot 9 + 4\cdot 6 - 2] = +0'5\ m/s$

No son todos equidistantes, no se puede hacer

9. Aplicación a la Física. Se han realizado las siguientes lecturas en el cuentarrevoluciones de un vehículo, a intervalos de dos segundos:

t (Tiempo en segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
x (Velocidad angular r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Calcula la aceleración angular instantánea para $t = 2$, $t = 8$ y $t = 10$.

$$f'(2) = \frac{1}{24}\left(-25\cdot 1000 + 48\cdot 1500 - 36\cdot 2000 + 16\cdot 2500 - 3\cdot 3000\right) = 250 \text{ rpm/s}$$

$$f'(8) = \frac{1}{12\cdot 2}\left(f(4) - 8f(6) + 8f(10) - f(14)\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\left(1500 - 8\cdot 2000 + 8\cdot 3000 - 4000\right) = 229'167 \text{ rpm/s}$$

Tenía equivocado. Todos valen 250

$$f'(10) = -\frac{1}{24}\left(-25\cdot 3000 + 48\cdot 2500 - 36\cdot 2000 + 16\cdot 1500 - 3\cdot 1000\right) = 250 \text{ rpm/s}$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

10. Aplicación a la Física. Un móvil se mueve con una velocidad variable dada por $v(t) = \sqrt{1-\cos(t)}$, donde v se mide en metros/segundos y t en segundos. Aproxima la distancia recorrida por el móvil al cabo de 2 segundos. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto de la aproximación, sabiendo que el valor exacto de la integral es 1.300221. Calcula el error y una cota del mismo.

$\int_0^2 v(t)\,dt$ = distancia recorrida tras 2s.

x	$f(x)$
$x_0 = 0$	0
$x_1 = 0'5$	0'34988
$x_2 = 1$	0'67801
$x_3 = 1'5$	0'96398
$x_4 = 2$	1'19002

tomamos $n=4$

$$\int_0^2 v(t)dt = \frac{2-0}{3\cdot 4}\left[f(0) + 4\left(f(0'5)+f(1'5)\right) + 2\cdot f(1) + f(2)\right] = \frac{1}{6}\left[4(0'34988 + 0'96398) + 2\cdot 0'67801 + 1'19002\right] =$$

$$= 1'300225\ m.$$ ✓

Error absoluto: $|1'300225 - 1'300221| = 2'6\cdot 10^{-5}$

Error $= -\frac{(2-0)^5}{180\cdot 4^4}\cdot f^{IV}(\xi) = -\frac{1}{1440}\cdot\frac{\operatorname{sen}^8(\xi/2)}{(1-\cos(\xi))^{9/2}}$

cota:

$$\frac{\operatorname{sen}^8(\xi/2)}{(1-\cos(\xi))^{7/2}} < 1$$

$$\left|-\frac{1}{1440}\cdot 1\right| < 6'94\cdot 10^{-4}$$

¿Cómo has calculado la cota?

11. Aplicación al Cálculo. Calcula el área de la región situada bajo la curva $y = 4x\tan(x) + 2$ de 0 a 1. Utiliza un método de Simpson 1/3 compuesto para calcular una aproximación de la integral. Calcula el error absoluto cometido.

$\int_0^1 4x\tan(x)+2 =$ Área → simpson 1/3 con $n=4$

x	0	0'25	0'5	0'75	1
f(x)	2	2'3558	3'0926	4'7948	8'2296

$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1-0}{3\cdot 4}\left(f(0)+4\left(f(0'25)+f(0'75)\right)+2\cdot f(0'5)+f(1)\right) =$

$= \frac{1}{12}(44'6152) = 3'7179.$

$\int_0^1 4x\tan(x)+2\,dx$ ¿cómo calculo la integral?

No se puede hacer. Es un ejemplo para que veais que la integral a veces, hay que calcularla con un método numérico. Necesitais WolframAlpha, por ejemplo.

12. Aplicación a la Física. Un cuerpo se desplaza linealmente a partir de cero con una fuerza variable dada por $f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5}$, donde f se mide en newtons y x da la posición del objeto en metros. Calcula el trabajo realizado por el cuerpo en un desplazamiento desde 1 hasta 2 metros, utilizando las fórmulas de cuadratura gaussiana para $n = 0$ y $n = 1$.

$f(x) = \frac{10x}{(\sqrt{x}+1)^5} \longrightarrow f(1'5) = \frac{10 \cdot 1'5}{(\sqrt{1'5}+1)^5} = 0'2752$

$n=0 \rightsquigarrow \int_1^2 f(x) = (2-1) \cdot f\left(\frac{2+1}{2}\right) = 0'2752 \text{ N/m}$

$n=1 \rightsquigarrow \int_1^2 f(x) = \frac{(2-1)}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}(0'2962 + 0'2564) = 0'2763 \text{ N/m}$

13. Aplicación a la Física. En un punto de una línea de ensamblaje de automóviles se observa cuántos coches pasan por minuto, obteniéndose los siguientes datos

120min 180min 360 540 660 840 1020 1080

Hora	0:00	2:00	3:00	6:00	9:00	11:00	14:00	17:00	18:00
Coches por minuto	3	2 3	1 5	3 4	3 5	2 6	3 2	3 1	1 1

1140 1200

19:00	20:00	24:00 = 1440min
1 3	1 4	4 6

Utilizando los métodos de los trapecios y de Simpson, determina el número total de coches que pasa por día en dicho punto.

$\int_0^{24} P(x) = nº$ de coches por día.

$\frac{d(\text{coches})}{dt} = v\ (\text{coches/min})$ vs $\int_0^{24} \frac{d(\text{coches})}{dt} =$ coches en 24h.

trapecio compuesto n=3

$$\int_0^9 f(x)dx \simeq \frac{9}{6}\left(f(0) + 2(f(3)+f(6)) + f(9)\right) =$$

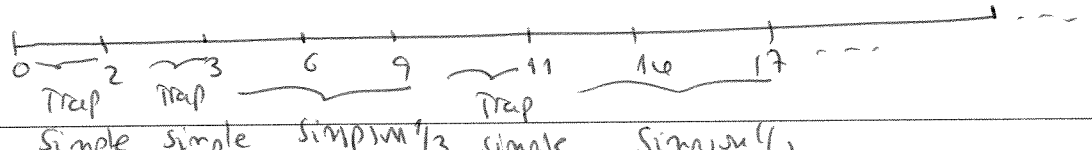
$$= \frac{3}{2}(3 + 2\cdot 9 + 5) = 39$$

$$\int_9^{24} f(x)dx \simeq \frac{15}{6}\left(f(9) + 2(f(14)+f(19)) + f(24)\right) =$$

$$= \frac{15}{6}(5 + 2(2+3) + 6) = 52'5$$

$$T = 39 + 52'5 = 91'5 \text{ coches}$$

No, los intervalos los calculo mal. No puedo unir 0, 3, 6 pues está el 2. Tengo que hacer combinaciones de trapecios y Simpson

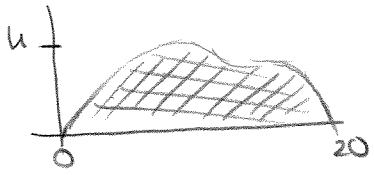


14. Aplicación a la Ingeniería Hidráulica. En un canal de 20 m de ancho, se hacen mediciones de profundidad cada dos metros, obteniendo los siguientes resultados:

Profundidad	1.8	2	4	4	6	4	3.4	3.6	2.8	0
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

La profundidad en los extremos del canal es 0. Calcula, aproximadamente, el área de la sección del canal.

Puedo calcular la sección del río trabajando como si las profundidades fuesen una función de la distancia a la orilla, donde la sección será la integral de la misma:



$$\int_0^{20} p(x)\,dx \approx \frac{20}{3\cdot 10}\left[f(0) + 4\left(f(2)+f(6)+f(10)+f(14)+f(18)\right) + 2\cdot\left(f(4)+f(8)+f(12)+f(16)\right) + f(20)\right] = \frac{2}{3}\left[4\cdot(1'8+4+6+3'4+2'8) + 2\cdot(2+4+4+3'6)\right]$$

$$= 66'133\ m^2$$ ✓

15. Aplicación a la Cinemática. La velocidad (en m/s) de una partícula en función del tiempo viene dada por $v(t) = t^3 - 2t^2$. Utilizando el método de Newton-Raphson, aproxima el tiempo en el cual la partícula alcanza una velocidad de 1 m/s a partir del reposo. Haz cinco iteraciones, tomando como punto de arranque $x_0 = 3$. ¿Podría tomarse como punto de arranque $x_0 = 0$? Razona la respuesta. Con las iteraciones 4 y 5, calcula el error relativo y el número de cifras exactas.

$v(t) = t^3 - 2t^2 = 1$ m/s

$f(t) = t^3 - 2t^2 - 1 = 0 \rightarrow$ es continua

$f'(t) = 3t^2 - 4t = 0 \rightsquigarrow t = 0$, $t = 4/3$

$f(3) = 8$, $f(1) = -2$ } cumple el teorema de Rolle, porque existe valor del intervalo $(1,3)$ que anula la derivada primera, y también el de Bolzano.

Además, $f''(x) = 6t - 4 > 0$ en el intervalo. No podemos tomar $x_0 = 0$ ya que $f(x_0)\, f''(x_0) < 0$. No, no el primero porque $f'(0) = 0$ y en el método sería $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (indeterminación $\frac{0}{0}$).

$x_0 = 3$,

$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{8}{15} = 2'4667$

$x_2 = 2'4667 - \frac{f(2'4667)}{f'(2'4667)} = 2'1281$

$x_3 = 2'1281 - \frac{f(2'1281)}{f'(2'1281)} = 2'0138$

$x_4 = 2'0138 - \frac{f(2'0138)}{f'(2'0138)} = 2'0002$

$x_5 = 2'0002 - \frac{f(2'0002)}{f'(2'0002)} = 2'000000003446$

error relativo: $|x_5 - x_4| = 0'000185624\,36 \rightarrow$ cifras exactas: 4 → $\boxed{2'000}$

$|x_4 - x_3| = 0'01358 \longrightarrow$ cifras exactas: 2. → $\boxed{2'0}$

APROXIMACIÓN DE RAÍCES

16. Aplicación a la Dinámica. Calcula, utilizando el método de la bisección, el coeficiente de rozamiento x necesario para que un paracaidista con una masa 70 kg adquiera una velocidad de $50m/s$, después de una caída libre de $t = 15$ segundos. (Indicación: La aceleración de la gravedad es de $9{,}8m/s^2$, y la ecuación a aproximar es $f(x) = \frac{gm}{x}(1 - e^{-(x/m)t}) - v = 0$)

$f(x) = \frac{9\,m}{x}(1 - e^{-(x/m)\,t}) - v = 0$

$f(x) = \frac{9'8 \cdot 70}{x}(1 - e^{-x/70 \cdot 15}) - 50 = 0$

$f(x) = \frac{9'8 \cdot 70}{x} - \frac{9'8 \cdot 70}{x\, e^{15x/70}} - 50$

$f'(x) = -\frac{9'8 \cdot 70}{x^2} + \frac{9'8 \cdot 70\,(1 + \frac{15}{70}e^{15x/70})}{x^2\, e^{30x/70}} = \frac{686}{x^2}\left(\frac{1 + \frac{15}{70}e^{15x/70}}{e^{30x/70}} - 1\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{30x/70}} + \frac{15}{70}e^{-15x/70} - 1 = \frac{1}{e^{15x/70}}\left(\frac{1}{e^{15x/70}} + \frac{15}{70}\right) - 1 = 0$

$\frac{1}{e^{15x/70}} + \frac{15}{70} = e^{15x/70}$

$\frac{15}{70} = e^{15x/70} - e^{-15x/70}$

$\ln\frac{15}{70} = 15x/70 + 15x/70$

$x = \frac{70}{30}\ln\frac{15}{70} = -3'594$

1 raíz | -3'594 | 1 raíz

$f(10) = 10'552$ | hay una raíz en el intervalo $[10, 20]$
$f(20) = -16'172$ |

Está bien, pero es un intervalo muy grande

i	a_i	c_i	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
0	10	15	20	10'552	-6'1044	-16'172
1	10	12'5	15	10'552	1'1119	-6'1044
2	12'5	13'75	15	1'1119	-2'2297	-6'1044
3	12'5	13'125	13'75	1'1119	-0'8722	-2'2297
4	12'5	12'8125	13'125	1'1119	0'10336	-0'8722
5	12'8125	12'96875	13'125	0'10336	-0'3884	-0'8722

$r \simeq 12'96875$.

17. Aplicación a la Ingeniería. En un canal abierto de dimensiones constantes y con un área transversal A, bajo condiciones de flujo uniforme se cumple la ecuación de Manning

$$Q = \frac{y_n B}{n}\left(\frac{y_n B}{B + 2y_n}\right)^{2/3} S^{1/2}$$

donde Q es el flujo, y_n es la profundidad normal, B es el ancho del canal, n es un coeficiente de rugosidad y S es la pendiente del canal. La ecuación se usa en ingeniería de fluidos y recursos de agua para determinar la profundidad normal. Si este valor es menor que la profundidad crítica

$$y_c = \left(\frac{Q^2}{B^2 g}\right)^{1/3}$$

donde g es la aceleración de la gravedad $(980 cm/s^2)$, entonces el flujo es subcrítico. Usando el método de la bisección, calcula y_n cuando $Q = 14.15 m^3/s$, $B = 4.572 m$, $n = 0.017$ y $S = 0.0015$. Determina si el flujo es sub o súper crítico.

$y_c = \left(\frac{(14'15\, m^3/s)^2}{(4'572 m)^2 \cdot 980 m/s^2}\right)^{1/3} = 0'9924$ Hal confundido Q con B

$14'15 = \frac{y_n \cdot 4'572}{0'017}\left(\frac{y_n \cdot 4'572}{4'572 + 2y_n}\right)^{2/3} \cdot 0'0015^{1/2}$

$1'3585 = y_n\left(\frac{y_n \cdot 4'572}{4'572 + 2y_n}\right)^{2/3}$

$f(x) = x\left(\frac{x\ 4'572}{4'572 + 2x}\right)^{2/3} - 1'3585 \rightsquigarrow f(1) = -0'5734,\ f(2) = 0'7295$

$f'(x) = \left(\frac{x \cdot 4'572}{4'572 + 2x}\right)^{2/3} + x\frac{2}{3}\left(\frac{4'572(4'572+2x) - 2 \cdot 4'572 \cdot x}{(4'572 + 2x)^2}\right) \cdot \left(\frac{4'572\, x}{4'572 + 2x}\right)^{-1/3} \neq 0$ en el intervalo $(1, 2)$

i	a_i	c_i	b_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
0	1	1'5	2	-0'5734	0'04567	0'7295
1	1	1'25	1'5	-0'5734	-0'2740	0'04567
2	1'25	1'375	1'5	-0'2740	-0'1164	0'04567 ✓
3	1'375	1'4375	1'5	-0'1164	-0'0359	0'04567
4	1'4375	1'46875	1'5	-0'0359	0'0047	0'04567

El flujo es súper crítico.

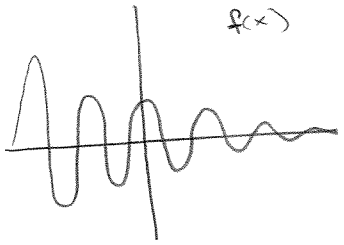
18 **Aplicación a la Ingeniería Eléctrica.** Una corriente oscilatoria en un circuito eléctrico se describe mediante la ecuación $I = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi t)$, donde t está dado en segundos. Determínense todos los valores de t tales que $I = 2$.

$I = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi \cdot t)$

$f(t) = 10e^{-t}\operatorname{sen}(2\pi \cdot t) - 2 = 0$

Sí, hay que calcular raíces de $f(t)=0$

¿Qué le ha ocurrido, Nacho?



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

19. Aplicación a la Economía. Una empresa quiere fabricar cuatro productos distintos ayudándose de tres máquinas diferentes, que deberán estar a pleno rendimiento durante 8 horas cada día. El número de horas que cada máquina utiliza en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por

x y z t

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Máquina 1	1	2	1	2
Máquina 2	2	0	1	1
Máquina 3	1	2	3	0

Es decir, en la producción de una unidad del primer producto la primera máquina se usa una hora: la máquina 2, 2 horas y la máquina 3, 1 hora (para los demás productos, véase la tabla anterior). Hallar el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos un día de 8 horas completas. Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

máquina 1: $x + 2y + z + 2t = 8$

máquina 2: $2x + z + t = 8$

máquina 3: $x + 2y + 3z = 8$

Cada máquina emplea 8h totales para producir "x", "y", "z" y "t". El tiempo para producir x es de 1 hora para la máquina 1, mientras que y tarda 2 horas, por lo que producir 1 de y conllevará gastar el doble de tiempo. Se obtiene un sistema compatible indeterminado (4 incógnitas, 3 ec

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[2ªF-2·1ªF]{3ªF-1ªF} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$x + 2y + z + 2t = 8$

$-4y - z - 3t = -8 \longrightarrow -4y - t - 3t = -8,\ y = 2 - t$

$2z - 2t = 0 \longrightarrow z = t$

$x = 8 - 2\cdot 2 + 2t - t - 2t = 4 - t$

Se producirán (si $t = \lambda$) λ unidades de t, λ unidades de z, $4 - \lambda$ unidades de x, $2 - \lambda$ unidades de y.

Te falta concluir: Como no pueden ser negativos ni fracciones, dependiendo de lo 2 e

$y = 2 - t \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

Para cada valor de t hay una solución $\Rightarrow$ Hay 3 distintas

20. Aplicación a la Química. Para controlar cierta enfermedad de una planta se utilizan tres productos químicos en las siguientes proporciones: 10 unidades del químico A, 12 unidades del químico B, y 8 unidades del químico C. En el mercado hay tres marcas que se pueden utilizar. Tres litros del producto de la marca X contiene una unidad de A, dos de B y una de C. Tres litros del producto de la marca Y contiene dos unidades de A,una de B y tres de C, y tres litros del producto de la marca Z contiene tres unidades de A, dos de B y una de C. ¿Qué cantidad de cada marca debe emplearse para fumigar la planta con las cantidades exactas de los químicos requeridas para el control de la enfermedad? Resuelve el problema utilizando una factorización LU.

total: $10A + 12B + 8C$

$3L\ X \longrightarrow 1A + 2B + 1C$

$3L\ Y \longrightarrow 2A + 1B + 3C$

$3L\ Z \longrightarrow 3A + 2B + 1C$

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 1y + 2z = 12 \\ 1x + 3y + 1z = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2ªF-2\cdot 1ªF]{3ªF-1ªF} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3ªF+\frac{1}{3}2ªF} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10/3 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10/3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 10 \\ 2y_1 + y_2 = 12 \rightarrow y_2 = -8 \\ y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 8 \end{array}$$

$$y_3 = 8 - 10 + \frac{1}{3}(-8) = -\frac{14}{3}$$

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -14/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 10 \rightarrow x = 4'2 \\ -3y - 4z = -8 \rightarrow y = 0'8 \\ -\frac{10}{3}z = -\frac{14}{3} \rightarrow z = 1'4 \end{array}$$

Se deben emplear:

$4'2 \cdot 3 = 12'6$ Litros de X

$0'8 \cdot 3 = 2'4$ Litros de Y

$1'4 \cdot 3 = 4'2$ Litros de Z

✓

21. Aplicación a la Industria. Una refinería de petróleo produce gasolina con y sin plomo. Cada tonelada de gasolina sin plomo requiere 5 minutos en la planta de mezclado y 4 en la planta de refinado. Por su parte, cada tonelada de gasolina con plomo requiere 4 minutos en la planta de mezclado y 2 en la planta de refinado. Si la planta de mezclado tiene 3 horas disponibles y la de refinado 2, ¿cuántas toneladas de cada gasolina se deben producir para que las plantas se utilicen al máximo?

Sin $<$ 5 min, 4 min $\Big\}$ 3 horas

Con $<$ 4 min, 2 min $\Big\}$ 2 horas

$$\begin{cases} 5S + 4C = 180 \\ 4S + 2C = 120 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 180 \\ 4 & 2 & 120 \end{array}\right) \xrightarrow{2ªF - \frac{4}{5}1ªF} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 180 \\ 0 & -1'2 & -24 \end{array}\right)$$

$5S + 4C = 180$

$-1'2C = -24$ ✓

$C = 20$ toneladas

$S = 20$ toneladas

La cantidad máxima que se producirá será cuando los tiempos de una y otra gasolina estén acoplados, produciéndose en total 40 toneladas de gasolina

23. Aplicación a la Nutrición. Un endocrino esta preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada 100 gr del alimento A contienen 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento B contienen 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada 100 gr del alimento C contienen 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidad de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántos gramos de cada comida se necesitan? Resuelve el problema utilizando el método de eliminación gaussiana.

100gr A → 2p, 3g, 4c (x)

100gr B → 3p, 2g, 1c (y)

100gr C → 3p, 3g, 2c (z)

total 25p, 24g, 21c

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 25 \\ 3x + 2y + 3z = 24 \\ 4x + y + 2z = 21 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 24 \\ 4 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow{2ªF - \frac{3}{2}1ªF,\ 3ªF - 2\cdot 1ªF} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & -5 & -4 & -29 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3ªF - 2\,2ªF} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & -2'5 & -1'5 & -13'5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$2x + 3y + 3z = 25 \Rightarrow 2x + 3\cdot 4'2 + 3\cdot 2 = 25 \Rightarrow x = 3'2$

$-2'5y - 1'5z = -13'5 \Rightarrow -2'5y = -13'5 + 3 \Rightarrow y = 4'2$

$-z = -2 \longrightarrow z = 2$ ✓

Se necesitarán 200gr de C, 420 de B y 320 de A.

22. Aplicación a la Industria. Una industria produce dos tipos de plástico: común y especial. Cada tonelada de plástico común necesita 2 horas en la planta A y 5 en la planta B; cada tonelada de plástico especial necesita 2 horas en la planta A y 3 en la planta B. Si la planta A tiene disponibles 8 horas al día y la planta B 15 horas al día, ¿cuántas toneladas de cada tipo de plástico pueden fabricarse diariamente de modo que las plantas operen a toda su capacidad? Resuelve el problema utilizando el método del pivote parcial.

1 ton. → plástico común → 2 A, 5 B

1 ton → plástico especial → 2 A, 3 B

$A_{total} = 8$h

$B_{total} = 15$h

x ton

y ton

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{permuta}} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$2^{a}F - \frac{2}{5}1^{a}F$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2/5 \cdot y_1 + y_2 = 8 \rightarrow y_2 = 2 \\ y_1 = 15 \end{matrix}$$

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 5x + 3y = 15 \rightarrow x = 1'5 \\ 4/5\, y = 2 \rightarrow y = 2'5 \end{matrix}$$

✓

Respuesta: Se obtienen 1'5 toneladas del plástico común y 2'5 toneladas del especial.

24. Aplicación al Álgebra Lineal. Sabemos que la matriz inversa de una matriz A es la matriz X que es solución de la ecuación $AX = I$, donde I es la matriz identidad. Si la matriz A es simétrica y definido positiva, podemos utilizar la descomposición de Cholesky $A = LL^t$ para resolver $AX = I$, resolviendo los sistemas $L\bar{X} = I$, $L^tX = \bar{X}$. Utilizando esta técnica, calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

$$I_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} I_{kj}^2} \qquad I_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} I_{ij}\, I_{kj}\right) / I_{kk} \qquad L = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

$I_{11} = \sqrt{1} = 1$

$I_{21} = \sqrt{2}/2$

$I_{31} = 0$

$I_{22} = \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{1} I_{21}^2} = \sqrt{1 - 2/4} = 1/\sqrt{2}$

$I_{32} = \left(1/2 - \sum_{j=1}^{1} I_{31} \cdot I_{21}\right) / I_{22} = (1/2 - 0 \cdot \sqrt{2}/2) / 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

$I_{33} = \sqrt{1 - (0 + \sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{1 - 2/4} = 1/\sqrt{2}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 1$, $b = 0$, $c = 0$

$1/\sqrt{2}\, d = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $d = -1$ ← $\sqrt{2}/2 \cdot 1 + 1/\sqrt{2}\, d = 0$

$+ 1/\sqrt{2}\, e = 1$, $e = \sqrt{2}$ ← $1 \cdot 1/\sqrt{2}$, $f = 0$, $f = 0$

$-\sqrt{2}/2 \cdot 1 + 1/\sqrt{2}\, g = 0 \to g = 1$

$1 + 1/\sqrt{2}\, h = 0 \to -\sqrt{2}$

$+ 1/\sqrt{2}\, i = 1 \to i = \sqrt{2}$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

✓

$L^t X = \bar{X}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \to$$

$a' + \sqrt{2}/2\, d' = 1 \to a' = 3$

$b' + \sqrt{2}/2\, e' = 0 \to b' = -2\sqrt{2}$

$c' + \sqrt{2}/2\, f' = 0 \to c' = \sqrt{2}$

$1/\sqrt{2}\, d' + \sqrt{2}/2\, g' = -1 \to d' = -2\sqrt{2}$

$1/\sqrt{2}\, e' + \sqrt{2}/2\, h' = \sqrt{2} \to e' = 4$

$1/\sqrt{2}\, f' + \sqrt{2}/2\, i' = 0 \to f' = -2$

$1/\sqrt{2}\, g' = 1 \to g' = \sqrt{2}$

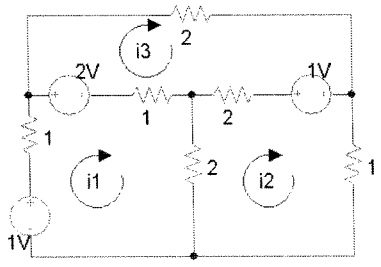
$1/\sqrt{2}\, h' = -\sqrt{2} \to h' = -2$

$1/\sqrt{2}\, i' = \sqrt{2} \to i' = 2$

la matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 4 & -2 \\ \sqrt{2} & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

25. Aplicación a la Electricidad. Dada la red eléctrica de la figura, se tiene que aplicando las leyes de Kirchhoff se obtiene el sistema $\begin{cases} 4I_1 - 2I_2 - I_3 + 1 = 0 \\ -2I_1 + 5I_2 - 2I_3 + 1 = 0 \\ -I_1 - 2I_2 + 5I_3 - 3 = 0 \end{cases}$. Comprueba que la matriz del sistema es simétrica y definido positiva y resuélvelo utilizando el método de Cholesky.



$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ → es simétrica

$|4| > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 4 > 0$

$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 100 - 4 - 4 - 5 - 8 - 20 > 0$

} es definido-positiva.

$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}$

$L_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} I_{kj}^2}$

$L_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} I_{ij} I_{kj}\right) / I_{kk}$

$L_{11} = \sqrt{4} = 2$

$L_{21} = -2/2 = -1$ Te has equivocado.

$L_{31} = -1/2$

$L_{22} = \sqrt{5 - (-1)^2} = 2$

$L_{32} = \left(-2 - (-1/2)\cdot(-1)\right)/2 = -5/4$

$L_{33} = \sqrt{5 - (-1/2 - 5/4)^2} = \sqrt{31}/4$

$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & -5/4 & \sqrt{31}/4 \end{pmatrix}$ $L_t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 2 & -5/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{31}/4 \end{pmatrix}$

$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $2y_1 = -1 \to y_1 = -1/2$

$-y_1 + 2y_2 = -1 \to y_2 = -1$

$-1/2\, y_1 - 5/4\, y_2 + \frac{\sqrt{31}}{4} y_3 = 3$

$y_3 = 6/\sqrt{31}$

$L^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 6/\sqrt{31} \end{pmatrix} \Rightarrow$ $2x - y - 1/2\, z = -1/2$

$2y - 5/4\, z = -1$

$\sqrt{31}/4\, z = \frac{6}{\sqrt{31}}$

$z = 0'7742$

$y = -0'0161$

$x = -0'0484$

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

26. Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo nieve de forma constante el resto del día. A mediodía, una máquina quitanieves comenzó a limpiar una carretera a un ritmo constante en términos de cantidad de nieve retirada en una hora. La máquina limpió dos kilómetros hasta las dos de la tarde y un kilómetro más hasta las cuatro de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?

$v = \frac{c_1}{h}$ $\quad h = c_2 \cdot t$ $\Big\} v = \frac{dS}{dt} = \frac{k}{t} \rightarrow \frac{1}{k}\int dS = \int \frac{dt}{t}$ porque va disminuyendo

$\frac{dc_N}{dt} = cte = h \cdot S$

la altura de nieve acumulada es directamente proporcional al tiempo que está nevando, mientras que el espacio longitudinal que quita de nieve el quitanieves es inversamente proporcional al mismo, ya que cada vez hay más nieve.

$\frac{1}{k} S + C' = \ln t$

$\frac{1}{k} 2 + C = -\ln 14$

$\frac{1}{k} 3 + C' = -\ln 16$

$-\ln 14 - \frac{1}{k} 2 = -\ln 16 - \frac{1}{k} 3$

$-\ln 16 + \ln 14 = \frac{3}{k} - \frac{2}{k}$

$K = -7'4889$

$C' = -\ln 14 + \frac{2}{7'4889} = -2'372$

$\frac{1}{-7'4889} \cdot 0 - 2'372 = -\ln t$

$t = 10'719 = \underline{10:43 \text{ horas}}$ ✓

ANEXO 2

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

■ La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1.
Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
   Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0036839
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00333333
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
    (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

- La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

- La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
- La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
- La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

- La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) ( -25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) ( f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

```
-0.6025
```

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

```
0.253333
```

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

```
-1.07917
```

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

- La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

- La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
derivadasegunda[f, 0, 0.1]
```

```
1.00083
```

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

```
0.875
```

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

```
0.2
```

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

```
-0.92
```

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

```
0.06
```

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium

△ Apellidos:
Nombre:
Ordenador:

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

■ La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.05171
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.951626
```

□ Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.05\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0552585
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1. Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
    {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
     b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
    Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
        D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00333333 ℮^c
```

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00333333 ℮^c
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00407134
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00407134
```

```
0.003333333333333334`
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

$-0.00166667\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00184195
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
    (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

■ La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

■ La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
- La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
- La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) (-25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) (f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.999983
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999997
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0000298365
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00002
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

-0.6025

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

0.253333

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

-1.07917

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

- La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

- La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]
```

- Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

  La solución será :

```
derivadasegunda[funcion1, 0, 0.1]
```

∞

```
100. (f[-0.1] - 2 f[0] + f[0.1])
```

1.00083

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

No se puede calcular

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

0.875

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

0.2

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

-0.92

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

0.06

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

No se puede calcular

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium.

△ Apellidos:VB
Nombre:Alicia Uxia
Ordenador:

```
(* Ejercicio 1 *)

lista1 = {0.4794 , 0.5646 , 0.6442}; h = 0.1;
(* f'(0.5)*)
D3plista[lista1, 1, h]
```

0.88

```
(* f'(0.6)*)
(*progresiva*)
D2plista[lista1, 2, h]
```

0.796

```
(*regresiva*)
D2plista[lista1, 2, -h]
```

0.852

```
(* f'(0.7)*)
D3plista[lista1, 3, -h]
```

0.768

```
Lista2 = {0.00, 0.7414, 1.3718}; h = 0.2;

(*f'(0.0)*)
D3plista[lista2, 1, h]
```

-1.875`

```
(*f'(0.2)*)
D2plista[lista2, 2, h]
```

11.25

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

2.5

```
(*f'(0.4)*)

D3plista[lista2, 3, -h]
```

15.625

```
(* Ejercicio 2*)

Lista3 = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.4465}; h = 0.1;

(*f'(1.1)*)
D3plista[lista3, 1, h]
```

-3.75

```
(*f'(1.2)*)

D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

13.75

```
(*f'(1.3)*)
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

24.5

```
(*f'(1.4)*)
D3plista[lista3, 4, -h]
```

28.5

```
(* Ejercicio 3 *)
Lista4 = {0.69315, 0.78846, 0.875469}; h = 0.2;
(*Interpolación lineal*)
(*f'(2.0)*)
```

```
D2plista[Lista4, 1, h]
```

0.47655

```
(* Interpolación cuadrática *)
```

```
D3plista[Lista4, 1, h]
```

0.497303

```
(* Cota superior del error*)
funcion1[x_] := Log[x]
Cota3pf[funcion1, 2, 0.2]
```

0.00651042

```
(*f''(2.2)*)
```

```
derivadasegundalista[Lista4, 2, h]
```

−0.0207525

```
derivadasegunda[funcion1, 2.2, 0.2]
```

−0.20747

```
(* Ejercicio 4 *)
funcion2[x_] := x^4
lista5 = {0.0256, 0.1296, 0.4096}; h = 0.2;
(*f'(0.6)*)
```

```
D3plistacentrada[lista5, 2, h]
```

0.96

```
D3pfcentrada[funcion2, 0.6, 0.2]
```

0.96

```
Cota3pfcentrada[funcion2, 0.6, 0.2]
```

0.128

```
(*f''(0.6)*)
```

```
derivadasegundalista[lista5, 2, h]
```

0.44

```
(* Ejercicio 5 *)
lista6 = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.444465}; h = 0.1;
(*f'(1.1)*)
D3plista[lista6, 1, h]
```

17.7697

```
(* f'(1.2)*)
D3plistacentrada[lista6, 2, h]
```

22.1936

```
(*f'(1.3)*)
```

```
D3plistacentrada[lista6, 3, h]
```

```
27.1064
```

```
(*f'(1.4)
```

```
D3plista[lista6, 4, -h]
```

```
32.5081
```

```
(* Ejercicio 6 *)
lista7 = {16.94410, 17.56492, 18.19056, 18.82091}; h = 0.12;
```

```
(*f'(8.1)*)
D3plista[lista7, 1, h]
```

```
5.15342
```

```
(*f'(8.3)*)
D3plistacentrada[lista7, 2, h]
```

```
5.19358
```

```
(*f'(8.5)*)
D3plistacentrada[lista7, 3, h]
```

```
5.23329
```

```
(*f'(8.7)*)
D3plista[lista7, 4, -h]
```

```
5.27254
```

```
(* Ejercicio 7 *)
lista8 = {2.4142, 2.6734, 2.8974, 3.0976, 3.2804}; h = 1;
```

```
(*f'(3)*)
```

```
D5plistacentrada[lista8, 3, h]
```

```
0.210617
```

```
(* Ejercicio 8 *)
```

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

■ La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.05171
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.951626
```

□ Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.05\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0552585
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1. Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
    {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
     b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
    Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
        D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00333333\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00333333\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00407134
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00407134
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

$-0.00166667\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
   (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

■ La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

■ La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
- La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
- La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) ( - 25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) ( f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.999983
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999997
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\ e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\ e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0000298365
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00002
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\ e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\ e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\ e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

```
-0.6025
```

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

```
0.253333
```

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

```
-1.07917
```

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

■ La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

■ La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
derivadasegunda[f, 0, 0.1]
```

```
100. (f[-0.1] - 2 f[0] + f[0.1])
```

```
1.00083
```

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

```
0.875
```

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

```
0.2
```

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

```
-0.92
```

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

```
0.06
```

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium.

△ Apellidos: RR
Nombre: Laura
Ordenador:

```
(* Ejercicios * )
(* 2*)
```

```
lista1 = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.44465}; h = 0.1;
```

```
D3plista[lista1, 1, h]
```

```
17.7697
```

```
D3plistacentrada[lista1, 2, h]
```

```
22.1936
```

```
D3plistacentrada[lista1, 3, h]
```

```
27.1073
```

```
D3plista[lista1, 4, -h]
```

```
32.5109
```

```
(*Ejercicio 3*)
lista2 = {0.69315, 0.78846, 0.875469} ; h = 0.2;
funcion1[x_] := Log[x]
D2plista[lista2, 2, h]
```

```
0.435045
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
0.435045
```

```
derivadasegundalista[lista2, 2, h]
```

```
-0.0207525
```

```
Cota2pf[funcion1, 2, h]
```

```
0.025
```

```
Cota3pf[funcion1, 2, h]
```

```
0.00651042
```

```
(*Ejericico1*)
Lista3 = {0.4794, 0.54} (no me da tiempo a terminarlo)
```

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

■ La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.05171
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.951626
```

□ Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.05\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0552585
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1. Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
    {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
     b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
    Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
        D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00333333 ℮^c
```

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00333333 ℮^c
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00407134
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00407134
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

$-0.00166667\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00184195
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
    (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

■ La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

■ La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
- La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
- La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) (-25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) (f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.999983
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999997
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0000298365
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00002
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

```
-0.6025
```

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

```
0.253333
```

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

```
-1.07917
```

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

- La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

- La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]
```

- Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

  La solución será :

```
derivadasegunda[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00083
```

```
1.00083
```

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

```
0.875
```

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

```
0.2
```

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

```
-0.92
```

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

```
0.06
```

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium.

△ Apellidos: QS
Nombre: Antolín
Ordenador:

```
Ejercicio2 - 5
```

```
listaej2 = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.44465}; h = 0.1;
D3plistacentrada[listaej2, 1, h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[listaej2, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[listaej2, 2, h]
```

22.1936

```
D3plistacentrada[listaej2, 2, -h]
```

22.1936

```
D3plistacentrada[listaej2, 3, h]
```

27.1073

```
D3plistacentrada[listaej2, 3, -h]
```

27.1073

```
D3plistacentrada[listaej2, 4, h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[listaej2, 4, -h]
```

No se puede calcular

Ejercicio1

```
listaej11 = {0.4794, 0.5646, 0.6642}; h = 0.1;

listaej12 = {0.00, 0.7414, 1.3718}; h = 0.2;
D2plista[listaej11, 1, h]
```

0.426

```
D2plista[listaej11, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D2plista[listaej11, 2, h]
```

0.498

```
D2plista[listaej11, 2, -h]
```

0.426

```
D2plista[listaej11, 3, h]
```

No se puede calcular

```
D2plista[listaej11, 3, -h]
```

0.498

```
D2plista[listaej12, 1, h]
```

3.707

```
D2plista[listaej12, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D2plista[listaej12, 2, h]
```

3.152

```
D2plista[listaej12, 2, -h]
```

3.707

```
D2plista[listaej12, 3, h]
```

No se puede calcular

```
D2plista[listaej12, 3, -h]
```

3.152

Ejercicio6

```
listaej6 = {16.94410, 17.56492, 18.19056, 18.82091}; h = 0.2;
D3plistacentrada[listaej6, 1, h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[listaej6, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[listaej6, 2, h]
```

3.11615

```
D3plistacentrada[listaej6, 2, -h]
```

3.11615

```
D3plistacentrada[listaej6, 3, h]
```

3.13998

```
D3plistacentrada[listaej6, 3, -h]
```

3.13998

```
D3plistacentrada[listaej6, 4, h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[listaej6, 4, -h]
```

No se puede calcular

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

■ La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.05171
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.951626
```

□ Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.05\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0552585
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1. Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
    {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
     b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
    Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
        D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00333333\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00333333\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00407134
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00407134
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

$-0.00166667\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00184195
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
    (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

■ La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

■ La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
- La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
- La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) (-25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) (f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

```
0.999976
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.999983
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999997
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0000298365
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00002
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

4.07134×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

-0.6025

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

0.253333

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

-1.07917

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

- La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

- La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]
```

- Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

  La solución será :

```
derivadasegunda[f, 0, 0.1]
```

```
100. (f[-0.1] - 2 f[0] + f[0.1])
```

```
1.00083
```

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

```
0.875
```

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

```
0.2
```

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

```
-0.92
```

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

```
0.06
```

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium.

△ Apellidos: PB
Nombre: Nadia
Ordenador:

```
Ejercicio 3
```

```
Hallamos f'(2) con la fórmula de dos puntos progresiva (interpolación lineal)
```

```
lista10 = {0.69315, 0.78846, 0.875469}; h = 0.1;
```

```
D2plista[lista10, 1, 0.2]
```

```
0.47655
```

```
Hallamos f'(2) con la fórmula de tres puntos progresiva (interpolación cuadrática)
```

```
D3plista[lista10, 1, 0.2]
```

```
0.497303
```

Hallamos f''(2.2)

```
derivadasegunda[lista10, 2, 0.2]
```

```
24.999999999999996` ({0.69315`, 0.78846`, 0.875469`}[1.8`] -
   2 {0.69315`, 0.78846`, 0.875469`}[2] + {0.69315`, 0.78846`, 0.875469`}[2.2`])
```

```
25. ({0.69315, 0.78846, 0.875469}[1.8] -
   2 {0.69315, 0.78846, 0.875469}[2] + {0.69315, 0.78846, 0.875469}[2.2])
```

*** Hallamos una cota superior del error de f'(2) calculado con la fórmula progresiva de 2 puntos**

```
funcion10[x_] := Log[x]
```

```
Cota2pf[funcion10, 2, 0.2]
```

```
0.025
```

Hallamos una cota superior del error de f'(2) calculado con la fórmula progresiva de 3 puntos

```
Cota3pf[funcion10, 2, 0.2]
```

```
0.00651042
```

Ejercicio 2

```
lista11 = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.44465}; h = 0.1;
```

Calculamos f'(1.1) con la fórmula progresiva de 3 puntos

```
D3plista[lista11, 1, h]
```

```
17.7697
```

Calculamos f'(1.2) con la centrada

```
D3plistacentrada[lista11, 2, h]
```

```
22.1936
```

Calculamos f'(1.3) con la centrada

```
D3plistacentrada[lista11, 3, h]
```

```
27.1073
```

Calculamos f'(1.4) con la regresiva

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
28.5
```

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

■ La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.05\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0552585
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1. Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

```
D2plista[{1, 1.5`, 3.75`}, 3, -1]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
   Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996404570712105`
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.9969054046707188`
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00333333 ℯ^c
```

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00333333 ℯ^c
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00407134
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00407134
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
-0.00166667 ℮^c
```

```
-0.00166667 ℮^c
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00184195
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
   (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

- La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

- La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
  - La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
  - La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
  - La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
  - La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
  - La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) ( -25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) ( f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.999983
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999997
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0000298365
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00002
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\ e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\ e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\ e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

```
-0.6025
```

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

```
0.253333
```

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

```
-1.07917
```

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

- La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

- Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

- La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
derivadasegunda[f, 0, 0.1]
```

```
100. (f[-0.1] - 2 f[0] + f[0.1])
```

```
1.00083
```

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h^2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

```
1.75
```

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

```
0.4
```

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

```
-1.84
```

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

```
0.12
```

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium.

△ Apellidos:GC
Nombre:Inés

Ordenador:

(*ejercicio 6*)

```
lista1 = {16.94410, 17.56492, 18.19056, 18.82091}; h = 0.2;
D3plista[lista1, 1, h]
```

```
3.092050000000013`
```

3.09205

```
D3plistacentrada[lista1, 2, h]
```

3.11615

```
D3plistacentrada[lista1, 3, h]
```

3.13998

```
D3plista[lista1, 4, -h]
```

3.16353

```
lista2 = {0.4794, 0.5646, 0.6442}; h = 0.1;
D3plista[lista2, 1, h]
```

0.88

```
4.101`
```

```
D3plistacentrada[lista2, 2, h]
```

4.101

0.824

```
D3plista[lista2, 3, -h]
```

0.768

```
lista3 = {0.0, 0.7414, 1.3718}; h = 0.2;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

3.9845

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
3.4295`
```

```
D3plista
```

.

EJERCICIOS

FÓRMULAS DE 2 PUNTOS

APROXIMACIÓN

```
funcion1[x_] := Exp[x]
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

1.05171

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

0.951626

ERRORES

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^c$

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.05\, e^c$

COTAS

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

0.0552585

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

0.05

FÓRMULA DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

APROXIMACIÓN

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
D2plista[lista2, 1, h]
```

0.5

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

0.5

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

No se puede calcular

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

2.25

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

APROXIMACIÓN

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

0.996405

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

0.996905

ERROR

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00333333\, e^{c}$

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00333333\, e^{c}$

COTAS

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

0.00407134

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

0.00407134

CENTRADA

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

1.00167

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

0.00184195

FÓRMULA CON LISTA DE VALORES

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
D3plista[lista3, 1, h]
```

−0.375

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

2.05

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

No se puede calcular

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

No se puede calcular

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

3.125

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

No se puede calcular

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

2.85

CENTRADA

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

No se puede calcular

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

1.375

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

2.45

FORMULA DE 5 PUNTOS

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

0.999976

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

0.999983

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

0.999997

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\,e^{c}$

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\,e^{c}$

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

0.0000298365

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

0.00002

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\,e^{c}$

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

FÓRMULAS CON LISTA

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

-0.6025

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

No se puede calcular

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

0.253333

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

-1.07917

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

2.69333

LISTA CENTRADA

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

No se puede calcular

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

No se puede calcular

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

2.74917

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

1.75333

DERIVADA SEGUNDA

```
derivadasegunda[funcion1, 0, 0.1]
```

1.00083

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

No se puede calcular

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

1.75

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

-1.84

PROBLEMA 3 DERIVACIÓN

Utiliza las formulas de tres puntos más precisa para calcular las entradas vacías de la tabla :

```
listaa = {16.94410, 17.56492, 18.19056, 18.82091}; h = 0.2;
D3plista[listaa, 1, h]
```

3.09205

```
D3plistacentrada[listaa, 2, h]
```

3.11615

```
D3plistacentrada[listaa, 3, h]
```

```
3.13998
```

```
D3plista[listaa, 4, -h]
```

```
3.16353
```

PROBLEMA 2 DERIVACIÓN

Utiliza las formulas de tres puntos más precisa para calcular las entradas vacías de la tabla :

```
listab = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.44465}; h = 0.1;
```

```
D3plista[listab, 1, h]
```

```
17.7697
```

```
D3plistacentrada[listab, 2, h]
```

```
22.1936
```

```
D3plistacentrada[listab, 3, h]
```

```
27.1073
```

```
D3plista[listab, 4, -h]
```

```
32.5109
```

Tarea 2: DERIVACIÓN NUMÉRICA

Este notebook calcula:

- La fórmula para dos puntos.
- La fórmula para tres puntos (progresiva y regresiva)
- La fórmula centrada para tres puntos.
- La fórmula para cinco puntos (progresiva y regresiva).
- La fórmula centrada para cinco puntos.
- Fórmulas de error y cotas para las funciones anteriores.
- Cálculo de la derivada segunda con la fórmula centrada de tres puntos y el error.

Se utilizan las siguientes funciones.

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON FUNCIÓN DADA.

- La función D2pf[función, punto, paso] calcula la derivada de la función en el punto, con el paso indicado usando la fórmula progresiva de dos puntos. Cambiando h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.
- La función Error2pf[funcion, punto, paso] calcula el error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0 y paso h.
- La función Cota2pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de dos puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D2pf[f_, x0_, h_] := (f[x0 + h] - f[x0]) / h;
Error2pf[f_, x0_, h_] := (-h / 2) D[f[x], {x, 2}] /. x → c;
Cota2pf[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h], b = Max[x0, x0 + h]},
  Abs[(h / 2) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 2}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 2}] /. x → a, D[f, {x, 2}] /. x → b]]]
```

- Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de dos puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

```
funcion1[x_] := Exp[x]
```

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.05171
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.951626
```

- Ejemplo del error: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.05\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05 ℮^c
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de dos puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota2pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0552585
```

Para la regresiva :

```
Cota2pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.05
```

FÓRMULAS DE DOS PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D2plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada de la función f en el punto que ocupa el lugar indicado, usando la fórmula progresiva de tres puntos, con paso h. Si se cambia h por -h, se obtiene la fórmula regresiva.

```
D2plista[lista_, lugar_, h_] := If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista])) && h > 0) ||
    (((1 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar]]) / h, Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en los puntos en los que sea posible, usando todas las fórmulas de dos puntos posibles.
En este caso, como el punto es el central, podemos usar una fórmula progresiva y una regresiva. Claramente h=1. Escribiremos:

```
lista2 = {1, 1.5, 3.75}; h = 1;
```

```
D2plista[lista2, 1, h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 2, -h]
```

```
0.5
```

```
D2plista[lista2, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D2plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.25
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

```
D3pf[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) (-3 f[x0] + 4 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error3pf[f_, x0_, h_] := (h^2 / 3) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pf[f_, x0_, h_] := Module[
    {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h],
     b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 - h, x0 - 2 * h]},
    Abs[(h^2 / 3) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
        D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]];
D3pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (2 h) ( f[x0 + h] - f[x0 - h]);
Error3pfcentrada[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 6) D[f[x], {x, 3}] /. x → c;
Cota3pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 6) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 3}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 3}] /. x → a, D[f, {x, 3}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando las fórmulas de tres puntos progresiva y regresiva, con h=0.1.

La solución, usando la fórmula progresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.996405
```

La solución, usando la fórmula regresiva será :

```
D3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.996905
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00333333 ℮^c
```

Para la regresiva :

```
Error3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00333333 ℮^c
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00407134
```

Para la regresiva :

```
Cota3pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00407134
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
1.00167
```

```
1.00167
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos:

```
Error3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$-0.00166667\, e^{c}$

$-0.00166667\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de tres puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota3pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.00184195
```

FÓRMULAS DE TRES PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D3plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de tres puntos.

```
D3plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)) && h > 0) ||
    (((2 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-3 lista[[lugar]] + 4 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 2), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de tres puntos posibles.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plista[lista3, 1, h]
```

```
-0.375
```

```
D3plista[lista3, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 2, h]
```

```
2.05
```

```
D3plista[lista3, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 3, -h]
```

```
3.125
```

```
D3plista[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plista[lista3, 4, -h]
```

```
2.85
```

■ La función D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de tres puntos.

```
D3plistacentrada[lista_, lugar_, h_] := If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h * 2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada cuando sea posible.

```
lista3 = {1, 1.5, 3.75, 6.40}; h = 1;
```

```
D3plistacentrada[lista3, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D3plistacentrada[lista3, 2, h]
```

```
1.375
```

```
D3plistacentrada[lista3, 3, h]
```

```
2.45
```

```
D3plistacentrada[lista3, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON FUNCIÓN DADA

■ La función D5pf[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula progresiva de cinco puntos, con paso h. Cambiando h por -h, se obtiene la regresiva.
- La función D5pfcentrada[f_, x0, h_] calcula la derivada de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de cinco puntos, con paso h.
- La función Cota5pfcentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Cota5pf[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de las fórmulas de cinco puntos (progresiva y regresiva) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función Error5pf[funcion, punto, paso] calcula el error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.
- La función cotaerrorcincopuntoscentrada[funcion, punto, paso] calcula una cota de error de la fórmula de cinco puntos (centrada) de la función f en el punto x0, con paso h.

```
D5pf[f_, x0_, h_] :=
  1 / (12 h) ( -25 f[x0] + 48 f[x0 + h] - 36 f[x0 + 2 h] + 16 f[x0 + 3 h] - 3 f[x0 + 4 h]);
D5pfcentrada[f_, x0_, h_] := 1 / (12 h) ( f[x0 - 2 h] - 8 f[x0 - h] + 8 f[x0 + h] - f[x0 + 2 h]);
Error5pf[f_, x0_, h_] := (h^4 / 5) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pf[f_, x0_, h_] := Module[
   {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h],
    b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 + 3 h, x0 + 4 h]},
   Abs[(h^4 / 5) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
       D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]];
Error5pfcentrada[f_, x0_, h_] := (h^4 / 30) D[f[x], {x, 5}] /. x → c;
Cota5pfcentrada[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h],
   b = Max[x0, x0 + h, x0 + 2 h, x0 - h, x0 - 2 h]},
  Abs[(h^4 / 30) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 5}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 5}] /. x → a, D[f, {x, 5}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula progresiva con h=0.1.

La solución, utilizando la fórmula progresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999976
```

La solución, utilizando la fórmula regresiva, será :

```
D5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
D5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.999997
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Error5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

Para la regresiva :

```
Error5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

$0.00002\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pf[funcion1, 0, 0.1]
```

```
0.0000298365
```

Para la regresiva :

```
Cota5pf[funcion1, 0, -0.1]
```

```
0.00002
```

□ Ejemplo: Queremos calcular el error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos:

```
Error5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

$3.33333 \times 10^{-6}\, e^{c}$

□ Ejemplo: Queremos calcular la cota del error cometido al calcular la derivada primera de la función Exp(x) en el punto x0=0, con h=0.1, usando la fórmula centrada de cinco puntos. Tenemos para la fórmula progresiva:

```
Cota5pfcentrada[funcion1, 0, 0.1]
```

4.07134×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

3.6839×10^{-6}

FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS CON LISTA DE VALORES

■ La función D5plista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con las fórmulas progresiva y regresiva de cinco puntos.

```
D5plista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[(((1 ≤ lugar) && (lugar < Length[lista] - 3)) && h > 0) ||
   (((4 < lugar) && (lugar <= Length[lista])) && h < 0),
  (-25 lista[[lugar]] + 48 * lista[[lugar + Sign[h]]] - 36 lista[[lugar + 2 * Sign[h]]] +
     16 * lista[[lugar + 3 * Sign[h]]] - 3 * lista[[lugar + 4 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas las fórmulas progresivas y regresivas de cinco puntos posibles.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plista[lista5, 1, h]
```

```
-0.6025
```

```
D5plista[lista5, 1, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 2, h]
```

```
0.253333
```

```
D5plista[lista5, 2, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 3, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 4, -h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 5, -h]
```

```
-1.07917
```

```
D5plista[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plista[lista5, 6, -h]
```

```
2.69333
```

■ La función D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada en el punto de la lista que ocupe el lugar indicado, con paso h, con la fórmula centrada de cinco puntos.

```
D5plistacentrada[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((2 < lugar) && (lugar < Length[lista] - 1)),
  (lista[[lugar - 2 * Sign[h]]] - 8 * lista[[lugar - Sign[h]]] +
     8 * lista[[lugar + Sign[h]]] - lista[[lugar + 2 * Sign[h]]]) /
   (h * 12), Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de cinco puntos donde sea posible.

```
lista5 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
D5plistacentrada[lista5, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 2, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 3, h]
```

```
2.74917
```

```
D5plistacentrada[lista5, 4, h]
```

```
1.75333
```

```
D5plistacentrada[lista5, 5, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
D5plistacentrada[lista5, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

DERIVADA SEGUNDA

DERIVADA SEGUNDA CON FUNCIÓN

■ La función derivadasegunda[f_, x0, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos, con paso h.

```
derivadasegunda[f_, x0_, h_] := 1 / (h^2) ( f[x0 - h] - 2 f[x0] + f[x0 + h]);
Errorderivadasegunda[f_, x0_, h_] := (-h^2 / 12) D[f[x], {x, 4}] /. x → c;
Cotaderivadasegunda[f_, x0_, h_] := Module[
  {a = Min[x0, x0 + h, x0 - h], b = Max[x0, x0 + h, x0 - h]},
  Abs[(h^2 / 12) N[Max[NMaximize[{Abs[D[f[x], {x, 4}]], a ≤ x ≤ b}, x][[1]],
      D[f, {x, 4}] /. x → a, D[f, {x, 4}] /. x → b]]]
```

□ Ejemplo: Queremos calcular la derivada segunda de la función f(x)=Exp(x) en el punto x0=0, usando la fórmula centrada con h=0.1.

La solución será :

```
derivadasegunda[f, 0, 0.1]
```

```
100. (f[-0.1] - 2 f[0] + f[0.1])
```

```
1.00083
```

DERIVADA SEGUNDA CON LISTA DE VALORES

■ La función derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] calcula la derivada segunda de la función f en el punto x0 usando la fórmula centrada de tres puntos para la lista de valores dada.

```
derivadasegundalista[lista_, lugar_, h_] :=
 If[((1 < lugar) && (lugar < Length[lista])),
  (lista[[lugar + Sign[h]]] - 2 * lista[[lugar]] + lista[[lugar - Sign[h]]]) / (h^2),
  Print["No se puede calcular"]]
```

□ Ejemplo: Dados los puntos (0,1), (1,1.5), (2, 3.75), (3,6.40),{4, 7.21),(5,8.14) correspondientes a una función f, queremos calcular la derivada segunda de f en todos los puntos posibles, usando todas la fórmula centrada de tres puntos donde sea posible.

```
lista6 = {1, 1.5, 3.75, 6.40, 7.21, 8.14}; h = 1;
```

```
derivadasegundalista[lista6, 1, h]
```

```
No se puede calcular
```

```
derivadasegundalista[lista6, 2, h]
```

```
1.75
```

```
derivadasegundalista[lista6, 3, h]
```

```
0.4
```

```
derivadasegundalista[lista6, 4, h]
```

```
-1.84
```

```
derivadasegundalista[lista6, 5, h]
```

```
0.12
```

```
derivadasegundalista[lista6, 6, h]
```

```
No se puede calcular
```

EJERCICIOS

△ 1. - Ejecuta por orden cada una de las funciones nuevas y los ejemplos anteriores, intentando comprender qué se hace en cada uno de ellos (no te debe llevar más de 15 minutos).

△ 2. - Realiza los ejercicios propuestos en Studium.

△ Apellidos:AP
Nombre:Marta
Ordenador:

```
(* Ejercicio 8 *)
```

```
lista = {3.10, 3.12, 3.14, 3.18, 3.24}; h = 0.01;
```

```
D5plista[lista, 1, h]
```

```
3.16667
```

```
D3plistacentrada[lista, 2, h]
```

```
2.
```

```
D5plistacentrada[lista, 3, h]
```

```
2.83333
```

```
D3plistacentrada[lista, 4, h]
```

```
5.
```

```
D5plista[lista, 5, -h]
```

```
6.5
```

```
0.98 * 3.1666666666665697 + 0.142 * 3.10
```

```
3.54353
```

```
0.98 * 2.0000000000000018 + 0.142 * 3.12
```

```
2.40304
```

```
0.98 * 2.833333333333362 + 0.142 * 3.14
```

```
3.22255
```

```
0.98 * 5.000000000000004 + 0.142 * 3.18
```

```
5.35156
```

```
0.98 * 6.499999999999892 + 0.142 * 3.24
```

```
6.83008
```

```
(* Ejercicio 1 *)
```

```
lista1 = {0.4794, 0.5646, 0.6442}; h = 0.1;
```

```
D3plista[lista1, 1, h]
```

```
0.88
```

```
D3plistacentrada[lista1, 2, h]
```

```
0.824
```

```
D3plista[lista1, 3, -h]
```

```
0.768
```

```
lista2 = {0.00, 0.7414, 1.3718}; h = 0.2;
```

```
D3plista[lista2, 1, h]
```

```
3.9845
```

```
D3plistacentrada[lista2, 2, h]
```

```
3.4295
```

```
D3plista[lista2, 3, -h]
```

```
2.8745
```

```
(* Ejercicio 2 *)
```

```
lista4 = {9.025013, 11.02318, 13.46374, 16.44465}; h = 0.1;
```

```
D3plista[lista4, 1, h]
```

```
17.7697
```

```
D3plistacentrada[lista4, 2, h]
```

```
22.1936
```

```
D3plistacentrada[lista4, 3, h]
```

```
27.1073
```

```
D3plista[lista4, 4, -h]
```

```
32.5109
```

```
(*ejercicio 3*)
```

```
lista5 = {0.69315, 0.78846, 0.875469}; h = 0.2;
```

```
D2plista[lista5, 1, h]
```

```
0.47655
```

```
D3plista[lista5, 1, h]
```

```
0.497303
```

```
derivadasegundalista[lista5, 2, h]
```

```
-0.207525
```

```
Cotaderivadasegunda[Log, 2.2, h]
```

```
0.00125
```

Tarea 5: Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos

Este notebook calcula:

- La eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada de un sistema.
- La resolución del sistema triangular resultante.
- La factorización LU de una matriz cuadrada.
- La resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se conoce la factorización LU de la matriz del sistema.

Se utilizan las siguientes funciones.

Eliminación gaussiana y descomposición LU

-La función intercambiofilas[matriz, fila1, fila2] intercambia las filas fila1 y fila2 de la matriz
- La función egsinp[matriz]realiza la eliminación gaussiana en la matriz aa hasta que no encuentra pivote. En ese caso, debemos intercambiar las filas a mano con la función anterior, y volver a realizar la eliminación gaussiana de la matriz resultante.

Irá dando los pasos intermedios, los elementos que constituirán la matriz L en la descomposición LU, y la matriz triangular final.,
- La función resolgsinp[matriz eliminada] resuelve el sistema de ecuaciones lineales dado por la matriz resultante de la función egsinp anterior.
-La función resolL[matriz L, término independiente] resuelve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular inferior.
-La función resolU[matriz U, termino independiente[resuleve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular superior.

```
intercambiofilas[aa_, i_, l_] :=
  Module[{b1 = aa[[i]], b2 = aa[[l]], a = aa}, a[[i]] = b2; a[[l]] = b1; Return[a]];
egsinp[aa_] := Module[{a = aa},
       For[i = 1, i ≤ Length[a], i++,
          If[a[[i, i]] =!= 0,
             For[l = i + 1, l ≤ Length[a], l++,
      Print[a[[l, i]] / a[[i, i]]]; a[[l]] = a[[l]] - a[[l, i]] / a[[i, i]] * a[[i]]];
     Print[MatrixForm[a]], Print["no se puede", i]]]; Return[a]
       ];
resolegsinp[u_] := Module[{s, uu = u, n = Length[u]},
  s = {u[[n, n + 1]] / u[[n, n]]};
  Do[PrependTo[s, 1 / uu[[i, i]] * (uu[[i, n + 1]] - Take[uu[[i]], {i + 1, n}].s)],
   {i, n - 1, 1, -1}];
  Return[s]

 ]
resolL[L_, b_] := Module[{s = {b[[1]]}, n = Length[L]},
   Do[AppendTo[s, b[[i]] - Take[L[[i]], i - 1].s], {i, 2, n}]; s];
resolU[U_, b_] := resolegsinp[Transpose[Append[Transpose[U], b]]]
```

```

```

□ Ejemplo 1 : Eliminación gaussiana de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 1 : Ejemplo 2 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3
2x - z = 1
3x + 4 y -z =0
Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
{{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
2
```

```
3
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1, 3\}, \{0, -2, -3, -5\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}, -\frac{23}{2}\right\}\right\}$$

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

La solución del sistema es, entonces, $x = \frac{17}{11}$, $y = -\frac{7}{11}$, $z = \frac{23}{11}$

Comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial, utilizando la función LinearSolve de Mathematica.

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3
x + 2y + 2z = 1
4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 0, 2, -2}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
m = intercambiofilas[m, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[m]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

Para dar la solución, resolvemos el sistema triangular y comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial.

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

Descomposición LU

Descomposición LU : Usaremos las funciones definidas en la eliminación gaussiana.

□ Ejemplo 1 : Descomposición LU de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz triangular superior utilizando la función anterior

```
U = egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como vemos, tenemos U, y los coeficientes {1, 0}, {4}, por tanto L será la matriz

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {0, 4, 1}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 2 : Resolución mediante el método LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3

2x - z = 1

3x + 4 y -z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1}, {2, 0, -1}, {3, 4, -1}}; b = {3, 1, 0};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

2

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1\}, \{0, -2, -3\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}\right\}\right\}$$

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {3, -1 / 2, 1}}
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \{2, 1, 0\}, \left\{3, -\frac{1}{2}, 1\right\}\right\}$$

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y. Utilizamos las funciones resolL y resolU

```
y = resolL[L, b]
```

$$\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}$$

```
resolU[U, y]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de descomposición LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3
x + 2y + 2z = 1
4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0}, {1, 2, 2}, {0, 4, 5}};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 0, 2}, {0, 4, 5}}
```

Tenemos que permutar las filas 2 y 3, por tanto, habrá que permutar los elementos de la primera columna de L.

```
U = intercambiofilas[U, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[U]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y

```
lasy = Array[y, Length[L]]
```

```
{y[1], y[2], y[3]}
```

Hay que cambiar también el orden en los términos independientes.

```
nuevob = {3, 0, 1}
```

```
{3, 0, 1}
```

```
Solve[L.lasy == nuevob, lasy]
```

```
{{y[1] → 3, y[2] → 0, y[3] → -2}}
```

```
yes = Flatten[Array[y, Length[L]] /. Solve[L.lasy == nuevob, lasy]]
```

```
{3, 0, -2}
```

```
lasx = Array[x, Length[nuevob]]
```

```
{x[1], x[2], x[3]}
```

```
Solve[U.lasx == yes, lasx]
```

$$\left\{\left\{x[1] \to \frac{1}{2},\ x[2] \to \frac{5}{4},\ x[3] \to -1\right\}\right\}$$

```
k
```

```
variables = Array[sol, Length[nuevob]]
```

```
{sol[1], sol[2], sol[3]}
```

```
Solve[matriz.variables == b, variables]
```

$$\left\{\left\{sol[1] \to \frac{1}{2},\ sol[2] \to \frac{5}{4},\ sol[3] \to -1\right\}\right\}$$

EJERCICIOS

△ Realiza los problemas propuestos en Studium.

Tarea 5: Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos

Este notebook calcula:

- La eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada de un sistema.
- La resolución del sistema triangular resultante.
- La factorización LU de una matriz cuadrada.
- La resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se conoce la factorización LU de la matriz del sistema.

Se utilizan las siguientes funciones.

Eliminación gaussiana y descomposición LU

-La función intercambiofilas[matriz, fila1, fila2] intercambia las filas fila1 y fila2 de la matriz
- La función egsinp[matriz]realiza la eliminación gaussiana en la matriz aa hasta que no encuentra pivote. En ese caso, debemos intercambiar las filas a mano con la función anterior, y volver a realizar la eliminación gaussiana de la matriz resultante.

Irá dando los pasos intermedios, los elementos que constituirán la matriz L en la descomposición LU, y la matriz triangular final.,
- La función resolgsinp[matriz eliminada] resuelve el sistema de ecuaciones lineales dado por la matriz resultante de la función egsinp anterior.
-La función resolL[matriz L, término independiente] resuelve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular inferior.
-La función resolU[matriz U, termino independiente[resuleve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular superior.

```
intercambiofilas[aa_, i_, l_] :=
  Module[{b1 = aa[[i]], b2 = aa[[l]], a = aa}, a[[i]] = b2; a[[l]] = b1; Return[a]];
egsinp[aa_] := Module[{a = aa},
       For[i = 1, i ≤ Length[a], i++,
          If[a[[i, i]] =!= 0,
             For[l = i + 1, l ≤ Length[a], l++,
      Print[a[[l, i]] / a[[i, i]]]; a[[l]] = a[[l]] - a[[l, i]] / a[[i, i]] * a[[i]]];
     Print[MatrixForm[a]], Print["no se puede", i]]]; Return[a]
       ];
resolegsinp[u_] := Module[{s, uu = u, n = Length[u]},
  s = {u[[n, n + 1]] / u[[n, n]]};
  Do[PrependTo[s, 1 / uu[[i, i]] * (uu[[i, n + 1]] - Take[uu[[i]], {i + 1, n}].s)],
   {i, n - 1, 1, -1}];
  Return[s]

 ]
resolL[L_, b_] := Module[{s = {b[[1]]}, n = Length[L]},
   Do[AppendTo[s, b[[i]] - Take[L[[i]], i - 1].s], {i, 2, n}]; s];
resolU[U_, b_] := resolegsinp[Transpose[Append[Transpose[U], b]]]
```

```

```

□ Ejemplo 1 : Eliminación gaussiana de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 1 : Ejemplo 2 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3
2x - z = 1
3x + 4 y -z =0
Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
{{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
2
```

```
3
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1, 3\}, \{0, -2, -3, -5\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}, -\frac{23}{2}\right\}\right\}$$

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

La solución del sistema es, entonces, $x = \frac{17}{11}, y = -\frac{7}{11}, z = \frac{23}{11}$

Comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial, utilizando la función LinearSolve de Mathematica.

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3
x + 2y + 2z = 1
4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 0, 2, -2}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
m = intercambiofilas[m, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[m]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

Para dar la solución, resolvemos el sistema triangular y comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial.

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

Descomposición LU

Descomposición LU : Usaremos las funciones definidas en la eliminación gaussiana.

□ Ejemplo 1 : Descomposición LU de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz triangular superior utilizando la función anterior

```
U = egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como vemos, tenemos U, y los coeficientes {1, 0}, {4}, por tanto L será la matriz

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {0, 4, 1}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 2 : Resolución mediante el método LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.
x + y + z = 3
2x - z = 1
3x + 4 y -z =0
Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1}, {2, 0, -1}, {3, 4, -1}}; b = {3, 1, 0};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

2

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1\}, \{0, -2, -3\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}\right\}\right\}$$

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {3, -1 / 2, 1}}
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \{2, 1, 0\}, \left\{3, -\frac{1}{2}, 1\right\}\right\}$$

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y. Utilizamos las funciones resolL y resolU

```
y = resolL[L, b]
```

$$\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}$$

```
resolU[U, y]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de descomposición LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3

x + 2y + 2z = 1

4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0}, {1, 2, 2}, {0, 4, 5}};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 0, 2}, {0, 4, 5}}
```

Tenemos que permutar las filas 2 y 3, por tanto, habrá que permutar los elementos de la primera columna de L.

```
U = intercambiofilas[U, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[U]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y

```
lasy = Array[y, Length[L]]
```

$$\left\{\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[1], \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[2], \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[3]\right\}$$

Hay que cambiar también el orden en los términos independientes.

```
nuevob = {3, 0, 1}
```

$$\{3, 0, 1\}$$

```
Solve[L.lasy == nuevob, lasy]
```

$$\left\{\left\{\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[1] \to 3, \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[2] \to 0, \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[3] \to -2\right\}\right\}$$

```
yes = Flatten[Array[y, Length[L]] /. Solve[L.lasy == nuevob, lasy]]
```

$$\{3, 0, -2\}$$

```
lasx = Array[x, Length[nuevob]]
```

$$\{x[1], x[2], x[3]\}$$

```
Solve[U.lasx == yes, lasx]
```

$$\left\{\left\{x[1] \to \frac{1}{2}, x[2] \to \frac{5}{4}, x[3] \to -1\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\mathbf{x[1] \to \frac{1}{2}, x[2] \to \frac{5}{4}, x[3] \to -1}\right\}\right\} \mathbf{k}$$

$$\left\{\left\{k\left(x[1] \to \frac{1}{2}\right), k\left(x[2] \to \frac{5}{4}\right), k\,(x[3] \to -1)\right\}\right\}$$

```
variables = Array[sol, Length[nuevob]]
```

$$\{sol[1], sol[2], sol[3]\}$$

```
Solve[matriz.variables == b, variables]
```

$$\left\{\left\{sol[1] \to \frac{1}{2}, sol[2] \to \frac{5}{4}, sol[3] \to -1\right\}\right\}$$

```
(*EJERCICIOS*)

(*4.-Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando los m etodos
de eliminaci on gaussiana.Indicar cu al es la
  matriz de permutaci on (intercambio de las) utilizada*)

(* Por eliminacino gaussiana*)
g = {{2, 1, 2, 1}, {1, 1, 3, 2}, {1, 3, 1, 1}};
g // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
c
```

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{2, 1, 2, 1\}, \left\{0, \frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right\}, \{0, 0, -10, -7\}\right\}$$

c

$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right\}$$

```
(*EJERCICIO 1*)
(*1. Resolver,si es posible,mediante el m etodo de eliminaci on gaussiana y LU el
sistema de ecuaciones cuya matriz de coe
cientes y t erminos independientes
vienen dados respectivamente por:*)
(*GAUUS*)
g3 = {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}};
g3 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[g3]
```

```
1
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}
```

```
m = intercambiofilas[m, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}
```

```
m = egsinp[m]
```

```
0
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
0
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
-1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
no se puede4
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

resolegsinp[m]

Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

∞::indet: Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered. ≫

{Indeterminate, Indeterminate, Indeterminate, Indeterminate}

Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

∞::indet: Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered. ≫

g3 = intercambiofilas[g3, 2, 3]

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 1, −1, 3, 0, −2}, {0, 0, −1, −1, 2, 1}, {0, 1, 0, 4, −2, −3}}

g4 = {{1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 2, 3, 7}, {1, 3, 2, 7, 5}, {1, 3, 3, 8, 3}};
b = {3, 4, 1, 0};

U = egsinp[g4]

1

1

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

no se puede2

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

{{1, 2, 3, 4, 5}, {0, 0, −1, −1, 2}, {0, 1, −1, 3, 0}, {0, 1, 0, 4, −2}}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

0

no se puede2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

1

1

1

(*3.Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando los m etodos de eliminaci on gaussiana y descomposici on LU.*)

```
(*GAUUS*)
g5 = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}};
g5 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[g3]
```

1

1

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

no se puede2

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}

Tarea 5: Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos

Este notebook calcula:

- La eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada de un sistema.
- La resolución del sistema triangular resultante.
- La factorización LU de una matriz cuadrada.
- La resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se conoce la factorización LU de la matriz del sistema.

Se utilizan las siguientes funciones.

Eliminación gaussiana y descomposición LU

-La función intercambiofilas[matriz, fila1, fila2] intercambia las filas fila1 y fila2 de la matriz
- La función egsinp[matriz]realiza la eliminación gaussiana en la matriz aa hasta que no encuentra pivote. En ese caso, debemos intercambiar las filas a mano con la función anterior, y volver a realizar la eliminación gaussiana de la matriz resultante.

Irá dando los pasos intermedios, los elementos que constituirán la matriz L en la descomposición LU, y la matriz triangular final.,
- La función resolgsinp[matriz eliminada] resuelve el sistema de ecuaciones lineales dado por la matriz resultante de la función egsinp anterior.
-La función resolL[matriz L, término independiente] resuelve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular inferior.
-La función resolU[matriz U, termino independiente[resuleve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular superior.

```
intercambiofilas[aa_, i_, l_] :=
  Module[{b1 = aa[[i]], b2 = aa[[l]], a = aa}, a[[i]] = b2; a[[l]] = b1; Return[a]];
egsinp[aa_] := Module[{a = aa},
       For[i = 1, i ≤ Length[a], i++,
          If[a[[i, i]] =!= 0,
             For[l = i + 1, l ≤ Length[a], l++,
      Print[a[[l, i]] / a[[i, i]]]; a[[l]] = a[[l]] - a[[l, i]] / a[[i, i]] * a[[i]]];
     Print[MatrixForm[a]], Print["no se puede", i]]]; Return[a]
       ];
resolegsinp[u_] := Module[{s, uu = u, n = Length[u]},
  s = {u[[n, n + 1]] / u[[n, n]]};
  Do[PrependTo[s, 1 / uu[[i, i]] * (uu[[i, n + 1]] - Take[uu[[i]], {i + 1, n}].s)],
   {i, n - 1, 1, -1}];
  Return[s]

 ]
resolL[L_, b_] := Module[{s = {b[[1]]}, n = Length[L]},
   Do[AppendTo[s, b[[i]] - Take[L[[i]], i - 1].s], {i, 2, n}]; s];
resolU[U_, b_] := resolegsinp[Transpose[Append[Transpose[U], b]]]
```

```

```

□ Ejemplo 1 : Eliminación gaussiana de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 1 : Ejemplo 2 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3

2x - z = 1

3x + 4 y -z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
{{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
2
```

```
3
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1, 3\}, \{0, -2, -3, -5\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}, -\frac{23}{2}\right\}\right\}$$

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

La solución del sistema es, entonces, $x = \frac{17}{11}$, $y = -\frac{7}{11}$, $z = \frac{23}{11}$

Comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial, utilizando la función LinearSolve de Mathematica.

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3
x + 2y + 2z = 1
4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 0, 2, -2}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
m = intercambiofilas[m, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[m]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

Para dar la solución, resolvemos el sistema triangular y comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial.

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

Descomposición LU

Descomposición LU : Usaremos las funciones definidas en la eliminación gaussiana.

□ Ejemplo 1 : Descomposición LU de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz triangular superior utilizando la función anterior

```
U = egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como vemos, tenemos U, y los coeficientes {1, 0}, {4}, por tanto L será la matriz

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {0, 4, 1}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 2 : Resolución mediante el método LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3

2x - z = 1

3x + 4 y -z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1}, {2, 0, -1}, {3, 4, -1}}; b = {3, 1, 0};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

2

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1\}, \{0, -2, -3\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}\right\}\right\}$$

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {3, -1 / 2, 1}}
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \{2, 1, 0\}, \left\{3, -\frac{1}{2}, 1\right\}\right\}$$

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y. Utilizamos las funciones resolL y resolU

```
y = resolL[L, b]
```

$$\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}$$

```
resolU[U, y]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de descomposición LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3

x + 2y + 2z = 1

4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0}, {1, 2, 2}, {0, 4, 5}};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 0, 2}, {0, 4, 5}}
```

Tenemos que permutar las filas 2 y 3, por tanto, habrá que permutar los elementos de la primera columna de L.

```
U = intercambiofilas[U, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[U]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y

```
lasy = Array[y, Length[L]]
```

$$\left\{\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[1], \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[2], \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[3]\right\}$$

Hay que cambiar también el orden en los términos independientes.

```
nuevob = {3, 0, 1}
```

$$\{3, 0, 1\}$$

```
Solve[L.lasy == nuevob, lasy]
```

$$\left\{\left\{\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[1] \to 3, \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[2] \to 0, \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[3] \to -2\right\}\right\}$$

```
yes = Flatten[Array[y, Length[L]] /. Solve[L.lasy == nuevob, lasy]]
```

$$\{3, 0, -2\}$$

```
lasx = Array[x, Length[nuevob]]
```

$$\{x[1], x[2], x[3]\}$$

```
Solve[U.lasx == yes, lasx]
```

$$\left\{\left\{x[1] \to \frac{1}{2}, x[2] \to \frac{5}{4}, x[3] \to -1\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\mathbf{x[1] \to \frac{1}{2}, x[2] \to \frac{5}{4}, x[3] \to -1}\right\}\right\} \mathbf{k}$$

$$\left\{\left\{k\left(x[1] \to \frac{1}{2}\right), k\left(x[2] \to \frac{5}{4}\right), k\,(x[3] \to -1)\right\}\right\}$$

```
variables = Array[sol, Length[nuevob]]
```

$$\{sol[1], sol[2], sol[3]\}$$

```
Solve[matriz.variables == b, variables]
```

$$\left\{\left\{sol[1] \to \frac{1}{2}, sol[2] \to \frac{5}{4}, sol[3] \to -1\right\}\right\}$$

```
(*. 4.-Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando los m etodos
de eliminaci on gaussiana.Indicar cu al es la
  matriz de permutaci on (intercambio de las) utilizada.*)

(*  2x+y+2z=1
    x+y+3z=2
    x+3y+z=1   *)

h = {{2, 1, 2, 1}, {1, 1, 3, 2}, {1, 3, 1, 1}}
% // MatrixForm
```

$$\{\{2, 1, 2, 1\}, \{1, 1, 3, 2\}, \{1, 3, 1, 1\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\{\{2, 1, 2, 1\}, \{1, 1, 3, 2\}, \{1, 3, 1, 1\}\}$$

```
m = egsinp[h]
```

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

{{2, 1, 2, 1}, {0, 1/2, 2, 3/2}, {0, 0, -10, -7}}

$\left\{\{2, 1, 2, 1\}, \left\{0, \frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right\}, \{0, 0, -10, -7\}\right\}$

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right\}$

```
LinearSolve[Take[h, All, 3], h[[All, 4]]]
```

$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right\}$

```
(*. 1. Resolver,si es posible,mediante el m etodo de eliminaci on gaussiana y LU el
sistema de ecuaciones cuya matriz de coecientes y terminos independientes
vienen dados respectivamente por ... .*)

g = {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[g]
```

```
1
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
m = intercambiofilas[m, 2, 4]
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[g]
```

```
1
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}
```

```
(*. 3.-Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando los m etodos
de eliminacion gaussiana y descomposici on LU.*)
```

```
(*. x+y-z=0
    x+2y+z=5
    x+y+z=4  .*)
```

```
k = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
{{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[k]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1, 0}, {0, 1, 2, 5}, {0, 0, 2, 4}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
LinearSolve[Take[k, All, 3], k[[All, 4]]]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
k = {{1, 1, -1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 1}}
```

```
{{1, 1, -1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 1}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[k]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1}, {0, 1, 2}, {0, 0, 2}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {-1, 2, 2}}
```

```
{{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {-1, 2, 2}}
```

```
b = {0, 5, 4}
```

```
{0, 5, 4}
```

```
resolL = {L, b}
```

```
{{{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {-1, 2, 2}}, {0, 5, 4}}
```

Tarea 5: Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos

Este notebook calcula:

- La eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada de un sistema.
- La resolución del sistema triangular resultante.
- La factorización LU de una matriz cuadrada.
- La resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se conoce la factorización LU de la matriz del sistema.

Se utilizan las siguientes funciones.

Eliminación gaussiana y descomposición LU

-La función intercambiofilas[matriz, fila1, fila2] intercambia las filas fila1 y fila2 de la matriz
- La función egsinp[matriz]realiza la eliminación gaussiana en la matriz aa hasta que no encuentra pivote. En ese caso, debemos intercambiar las filas a mano con la función anterior, y volver a realizar la eliminación gaussiana de la matriz resultante.

Irá dando los pasos intermedios, los elementos que constituirán la matriz L en la descomposición LU, y la matriz triangular final.,
- La función resolgsinp[matriz eliminada] resuelve el sistema de ecuaciones lineales dado por la matriz resultante de la función egsinp anterior.
-La función resolL[matriz L, término independiente] resuelve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular inferior.
-La función resolU[matriz U, termino independiente[resuleve el sistema de ecuaciones lineales con matriz triangular superior.

```
intercambiofilas[aa_, i_, l_] :=
  Module[{b1 = aa[[i]], b2 = aa[[l]], a = aa}, a[[i]] = b2; a[[l]] = b1; Return[a]];
egsinp[aa_] := Module[{a = aa},
       For[i = 1, i ≤ Length[a], i++,
          If[a[[i, i]] =!= 0,
             For[l = i + 1, l ≤ Length[a], l++,
      Print[a[[l, i]] / a[[i, i]]]; a[[l]] = a[[l]] - a[[l, i]] / a[[i, i]] * a[[i]]];
     Print[MatrixForm[a]], Print["no se puede", i]]]; Return[a]
       ];
resolegsinp[u_] := Module[{s, uu = u, n = Length[u]},
  s = {u[[n, n + 1]] / u[[n, n]]};
  Do[PrependTo[s, 1 / uu[[i, i]] * (uu[[i, n + 1]] - Take[uu[[i]], {i + 1, n}].s)],
   {i, n - 1, 1, -1}];
  Return[s]

 ]
resolL[L_, b_] := Module[{s = {b[[1]]}, n = Length[L]},
   Do[AppendTo[s, b[[i]] - Take[L[[i]], i - 1].s], {i, 2, n}]; s];
resolU[U_, b_] := resolegsinp[Transpose[Append[Transpose[U], b]]]
```

```

```

□ Ejemplo 1 : Eliminación gaussiana de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 1 : Ejemplo 2 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3
2x - z = 1
3x + 4 y -z =0
Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
{{1, 1, 1, 3}, {2, 0, -1, 1}, {3, 4, -1, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

2

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1, 3\}, \{0, -2, -3, -5\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}, -\frac{23}{2}\right\}\right\}$$

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

La solución del sistema es, entonces, $x = \frac{17}{11}$, $y = -\frac{7}{11}$, $z = \frac{23}{11}$

Comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial, utilizando la función LinearSolve de Mathematica.

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de eliminación gaussiana, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3

x + 2y + 2z = 1

4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {1, 2, 2, 1}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 0, 2, -2}, {0, 4, 5, 0}}
```

```
m = intercambiofilas[m, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[m]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0, 3}, {0, 4, 5, 0}, {0, 0, 2, -2}}
```

Para dar la solución, resolvemos el sistema triangular y comprobamos que la solución es la misma que la del sistema inicial.

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

```
LinearSolve[Take[matriz, All, 3], matriz[[All, 4]]]
```

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -1\right\}$$

Descomposición LU

Descomposición LU : Usaremos las funciones definidas en la eliminación gaussiana.

□ Ejemplo 1 : Descomposición LU de una matriz que no necesita permutación.

```
g = {{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
{{1, 2, 0}, {1, 3, 2}, {0, 4, 5}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz triangular superior utilizando la función anterior

```
U = egsinp[g]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
4
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 1, 2}, {0, 0, -3}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Como vemos, tenemos U, y los coeficientes {1, 0}, {4}, por tanto L será la matriz

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {0, 4, 1}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

□ Ejemplo 2 : Resolución mediante el método LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz no necesita permutación.

x + y + z = 3

2x - z = 1

3x + 4 y -z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 1, 1}, {2, 0, -1}, {3, 4, -1}}; b = {3, 1, 0};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

2

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{1, 1, 1\}, \{0, -2, -3\}, \left\{0, 0, -\frac{11}{2}\right\}\right\}$$

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {3, -1 / 2, 1}}
```

$$\left\{\{1, 0, 0\}, \{2, 1, 0\}, \left\{3, -\frac{1}{2}, 1\right\}\right\}$$

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y. Utilizamos las funciones resolL y resolU

```
y = resolL[L, b]
```

$$\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}$$

```
resolU[U, y]
```

$$\left\{\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{23}{11}\right\}$$

□ Ejemplo 3 : Resolución mediante el método de descomposición LU, de un sistema de ecuaciones cuya matriz necesita permutación.

x + 2y = 3
x + 2y + 2z = 1
4 y + 5z =0

Para ello, introducimos la matriz ampliada.

```
matriz = {{1, 2, 0}, {1, 2, 2}, {0, 4, 5}};
b = {3, 1, 0};
```

```
matriz // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 0, 2}, {0, 4, 5}}
```

Tenemos que permutar las filas 2 y 3, por tanto, habrá que permutar los elementos de la primera columna de L.

```
U = intercambiofilas[U, 2, 3]
```

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[U]
```

```
0
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 0}, {0, 4, 5}, {0, 0, 2}}
```

Por tanto, la matriz L será

```
L = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

Tenemos que resolver los sistemas Ly=b, Ux=y

```
lasy = Array[y, Length[L]]
```

$$\left\{\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[1], \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[2], \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[3]\right\}$$

Hay que cambiar también el orden en los términos independientes.

```
nuevob = {3, 0, 1}
```

$$\{3, 0, 1\}$$

```
Solve[L.lasy == nuevob, lasy]
```

$$\left\{\left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[1] \to 3, \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[2] \to 0, \left\{3, -5, -\frac{23}{2}\right\}[3] \to -2\right\}\}$$

```
yes = Flatten[Array[y, Length[L]] /. Solve[L.lasy == nuevob, lasy]]
```

$$\{3, 0, -2\}$$

```
lasx = Array[x, Length[nuevob]]
```

$$\{x[1], x[2], x[3]\}$$

```
Solve[U.lasx == yes, lasx]
```

$$\left\{\left\{x[1] \to \frac{1}{2}, x[2] \to \frac{5}{4}, x[3] \to -1\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\mathbf{x[1] \to \frac{1}{2}, x[2] \to \frac{5}{4}, x[3] \to -1}\right\}\right\} \mathbf{k}$$

$$\left\{\left\{k\left(x[1] \to \frac{1}{2}\right), k\left(x[2] \to \frac{5}{4}\right), k\,(x[3] \to -1)\right\}\right\}$$

```
variables = Array[sol, Length[nuevob]]
```

$$\{sol[1], sol[2], sol[3]\}$$

```
Solve[matriz.variables == b, variables]
```

$$\left\{\left\{sol[1] \to \frac{1}{2}, sol[2] \to \frac{5}{4}, sol[3] \to -1\right\}\right\}$$

```
(*PROBLEMA NUMERO4*)
g = {{2, 1, 2, 1}, {1, 1, 3, 2}, {1, 3, 1, 1}}
```

$$\{\{2, 1, 2, 1\}, \{1, 1, 3, 2\}, \{1, 3, 1, 1\}\}$$

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[g]
```

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{2, 1, 2, 1\}, \left\{0, \frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right\}, \{0, 0, -10, -7\}\right\}$$

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right\}$$

```
LinearSolve[Take[m, All, 3], m[[All, 4]]]
```

$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right\}$$

```
(*PROBLEMA NÚMERO 1*)
g = {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[g]
```

1

1

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

no se puede2

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}

m = intercambiofilas[m, 2, 4]

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}

% // MatrixForm

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

m = egsinp[Take [m, 2]]

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no se puede2

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}

(*PROBLEMA NÚMERO 3*)

g = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}

{{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}

% // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

m = egsinp[g]

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1, 0}, {0, 1, 2, 5}, {0, 0, 2, 4}}
```

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
LinearSolve[Take[m, All, 3], m[[All, 4]]]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
g = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
{{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[g]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1, 0}, {0, 1, 2, 5}, {0, 0, 2, 4}}
```

```
U // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {-1, 2, 2}, {0, 5, 4}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

```
(*ejercicio 2*)
```

```
g = {{1, 2, 1, 2}, {0, 2, 9, -1}, {0, 0, 4, 1}, {0, 0, 0, 8}}
```

```
{{1, 2, 1, 2}, {0, 2, 9, -1}, {0, 0, 4, 1}, {0, 0, 0, 8}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

```
Inverse[g]
```

$$\left\{\left\{1, -1, 2, -\frac{5}{8}\right\}, \left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{9}{8}, \frac{13}{64}\right\}, \left\{0, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{32}\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{1}{8}\right\}\right\}$$

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -\frac{5}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{8} & \frac{13}{64} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{32} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

```
(*ejercicio 3 *)
h = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
{{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[h]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1, 0}, {0, 1, 2, 5}, {0, 0, 2, 4}}
```

```
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
resolegsinp[m]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
{1, 1, 2}
```

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
b = {0, 5, 4}
```

```
{0, 5, 4}
```

```
y = resolL[L, b]
```

```
{0, 5, 4}
```

```
resolU[U, y]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
(*ejerncicio 1*)
```

```
g = {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
m = egsinp[g]
```

```
1
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2
```

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}
```

```
a = Intercambiofilas[g, 2, 3]
```

```
Intercambiofilas[
 {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3]
```

```
m = egsinp[a]
```

Part::partd :
Part specification Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]] is longer than depth of object. ≫

Part::partd :
Part specification Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]] is longer than depth of object. ≫

Part::partd :
Part specification Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]] is longer than depth of object. ≫

General::stop : Further output of Part::partd will be suppressed during this calculation. ≫

Thread::tdlen : Objects of unequal length in

$$\left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]], \frac{1}{2} \ll 1 \gg, \frac{1}{3} \ll 1 \gg [[2, 1]], \frac{1}{4} \text{Intercambiofilas}[\ll 1 \gg][[2, 1]], \frac{1}{5} \ll 1 \gg, \frac{1}{3} \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]]\right\} \{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \ll 1 \gg, \ll 1 \gg, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}$$

cannot be combined. ≫

Thread::tdlen : Objects of unequal length in

$$-\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\} \left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]], \frac{1}{2} \ll 1 \gg, \frac{1}{3} \ll 1 \gg, \ll 1 \gg, \frac{1}{5} \ll 1 \gg [[2, 1]], \frac{1}{3} \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]]\right\}$$

cannot be combined. ≫

Thread::tdlen : Objects of unequal length in

$$\left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2 - \{\{\ll 6 \gg\}, \{\ll 6 \gg\}, \{\ll 6 \gg\}, \{\ll 6 \gg\}\} \{\text{Part}[\ll 3 \gg], \text{Times}[\ll 2 \gg], \text{Times}[\ll 2 \gg], \text{Times}[\ll 2 \gg], \text{Times}[\ll 2 \gg], \text{Times}[\ll 2 \gg]\}, 3][[3, 1]], \frac{1}{2} \text{Intercambiofilas}[\ll 1 \gg][[3, 1]], \ll 2 \gg, \frac{1}{5} \text{Intercambiofilas}[\{\ll 1 \gg\}, 2 - \{\ll 1 \gg\} \ll 1 \gg, 3][[\ll 1 \gg]], \frac{1}{3} \ll 1 \gg\right\} \ll 1 \gg \text{ cannot be combined. } \gg$$

General::stop : Further output of Thread::tdlen will be suppressed during this calculation. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. ≫

$$\text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2 - \{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\} \left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]], \frac{1}{2} \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]], \frac{1}{3} \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][[2, 1]], \frac{1}{4} \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\},$$

```
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]},
3 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

```
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
  3, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
   {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
  3, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
   {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
   {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

$$\left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{2}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{4}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!]\right\}\Big]\![\![3,1]\!]\Big\} -$$

$$\left\{\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\},\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{4}\right\},\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{1}{5},1\right\},\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{8},\frac{1}{3},\text{ComplexInfinity}\right\}\right\}\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,

```
  8,
  3,
  0}}
{1 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 2 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 4 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 5 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}
(2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]})
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
```

```
3, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
    {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
 3, 1]], -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
    {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
-1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

```
                1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
                1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
          1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
            {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
           2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
             {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
          1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
            {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
           2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
             {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]]}]

Intercambiofilas[
 {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

```
1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
    {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
    {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
    {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]},
3 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
 {Intercambiofilas[
   {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
  3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
    {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
```

```
3, 1]], -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
  {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
  {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], -1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
  {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], -1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    -1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
```

```
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
  1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]]} -
{{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/3}, {1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/7, 1/4}, {1,
  1/3,
  1/2,
  1/7,
  1/5,
  1}, {1,
  1/3,
  1/3,
  1/8,
  1/3,
  ComplexInfinity}} {{1,
  2,
  3,
  4,
  5,
  3}, {1,
  2,
  2,
  3,
```

```
  7,
  4}, {1,
  3,
  2,
  7,
  5,
  1}, {1,
  3,
  3,
  8,
  3,
  0}}
{1 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 2 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 4 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 5 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}
(2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]})
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
     1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
```

```
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3]][[
3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3]][[
3, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
{1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
```

```
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
 {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
 {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
  {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
 {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
 {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
  {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
 {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
```

```
Intercambiofilas[
 {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]},
 3 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[
      {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
      2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
        {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
    3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
     2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
       {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
          {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
          {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
       1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
          {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
          {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

```
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
    {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
  {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
  {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
3, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
  {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
      {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

```
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
            {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
            {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
            {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
            {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
      {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
     2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
      {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
          {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
          {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
          {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
          {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
          {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
          {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]]} -
{{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/3}, {1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/7, 1/4}, {1,
   1/3,
   1/2,
   1/7,
   1/5,
   1}, {1,
   1/3,
   1/3,
   1/8,
   1/3,
   ComplexInfinity}} {{1,
```

```
  2,
  3,
  4,
  5,
  3}, {1,
  2,
  2,
  3,
  7,
  4}, {1,
  3,
  2,
  7,
  5,
  1}, {1,
  3,
  3,
  8,
  3,
  0}}
{1 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 2 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 4 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 5 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}
(2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]})
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

$$\left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{2}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{4}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{5}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!]\right\}, 3\Big][\![3, 1]\!], \frac{1}{2}\ \text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2 - \{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}$$

$$\left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{2}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{4}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{5}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!]\right\}, 3\Big][\![3, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2 - \{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}$$

$$\left\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{2}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{4}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{5}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\}, \{1, 3, 2, 7, 5, 1\}, \{1, 3, 3, 8, 3, 0\}\}, 2, 3][\![2, 1]\!], \frac{1}{3}\ \text{Intercambiofilas}[\{\{1, 2, 3, 4, 5, 3\}, \{1, 2, 2, 3, 7, 4\},$$

```
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
     {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
         {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
         {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
     {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
         {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
         {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
     {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
```

```
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]]}]
{{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/3}, {1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/7, 1/4},
 {1, 1/3, 1/2, 1/7, 1/5, 1}, {1, 1/3, 1/3, 1/8, 1/3, ComplexInfinity}}
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{1 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
     {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 2 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
     {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
     {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 4 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 5 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
 3 / Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
     {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]} {Intercambiofilas[
   {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
     {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
       1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
       1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
   3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
   2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
     {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
         {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
         {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
       1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
```

```
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1,
2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1,
2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
{1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1,
2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
{1, 3, 3, 8, 3, 0}},
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
{Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
```

```
                {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                 {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
              1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                 {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1,
                  2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
           1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
              {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
             2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
               {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                   {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
                1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                   {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                   {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
                1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
                   {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
                   {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
                1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
                   {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]]}

Intercambiofilas[
 {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
 2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
   {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
    1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]},
```

```
3 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
  {Intercambiofilas[
     {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
     2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
       {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
     3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
     2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
       {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
     3, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
     {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
     2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
       {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
           {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
           {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

$$\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!]\Big\},3\Big][\![3,1]\!],\frac{1}{4}\,\text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2-\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\}\Big\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{2}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{4}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!]\Big\},3\Big][\![3,1]\!],\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2-\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\}\Big\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{2}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{4}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!]\Big\},3\Big][\![3,1]\!],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2-\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\}\Big\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],\frac{1}{2}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][\![2,1]\!],$$

```
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
            {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
            {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
            {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
        1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
            {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]]}]

{Intercambiofilas[
  {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[
  3, 1]], 1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
    {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
    {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
        {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
        {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
      1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
        {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
  1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
    {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
```

```
2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
  {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
   {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
  {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
       {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]]}, 3][[3, 1]],
1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
   {1, 3, 3, 8, 3, 0}},
  2 - {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
  {Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4},
      {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/2 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/3 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
   1/4 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1},
       {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]], 1/5 Intercambiofilas[{{1, 2, 3, 4, 5, 3},
       {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}, 2, 3][[2, 1]],
```

$$\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]]\Big\},3\Big][[3,1]],$$

$$\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}\Big[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},$$

$$2-\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\}$$

$$\Big\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{2}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{4}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]]\Big\},3\Big][[3,1]]\Big\}$$

$$\Big\{\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],\frac{1}{2}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{4}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{5}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]],$$

$$\frac{1}{3}\,\text{Intercambiofilas}[\{\{1,2,3,4,5,3\},\{1,2,2,3,7,4\},\{1,3,2,7,5,1\},\{1,3,3,8,3,0\}\},2,3][[2,1]]\Big\}$$

```
(*Ejercicio 1*)


g = {{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {1, 2, 2, 3, 7, 4}, {1, 3, 2, 7, 5, 1}, {1, 3, 3, 8, 3, 0}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
matriz = egsinp[g]
```

```
1

1

1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
no se puede2

0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}

matriz = intercambiofilas[matriz, 2, 3]

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 1, 0, 4, -2, -3}}

% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

0

0

0

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

0

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

-1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no se puede4

{{1, 2, 3, 4, 5, 3}, {0, 1, -1, 3, 0, -2}, {0, 0, -1, -1, 2, 1}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}

% // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**(*El sistema es de tipo compatible indeterminado, con infinitas soluciones,
ya que posee cinco incógnitas y sólo tres ecuaciones,
ya que el rango de la matriz es como máximo 3*)**

(*Ejercicio 3*)

p = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}

{{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}

% // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

z = egsinp[p]

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1, 0}, {0, 1, 2, 5}, {0, 0, 2, 4}}
```

```
resolegsinp[z]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
(*Las soluciones al sistema son: x=1; y=1; z=2*)
```

```
t = {{1, 1, -1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 1}}
```

```
{{1, 1, -1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 1}}
```

```
b = {0, 5, 4}
```

```
{0, 5, 4}
```

```
t // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[t]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1}, {0, 1, 2}, {0, 0, 2}}
```

```
(*Ejercicio 4*)
n = {{2, 1, 2, 1}, {1, 1, 3, 2}, {1, 3, 1, 1}}
```

```
{{2, 1, 2, 1}, {1, 1, 3, 2}, {1, 3, 1, 1}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[n]
```

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\{2, 1, 2, 1\}, \left\{0, \frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right\}, \{0, 0, -10, -7\}\right\}$$

```
resolegsinp[m]
```

$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{7}{10}\right\}$$

```
(*Las soluciones al sistema son: x=-3/10; y=1/5; z=7/10*)
```

```
(*EJERCICIO 3*)


matriz = {{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
{{1, 1, -1, 0}, {1, 2, 1, 5}, {1, 1, 1, 4}}
```

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
m = egsinp[matriz]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1, 0}, {0, 1, 2, 5}, {0, 0, 2, 4}}
```

```
resolegsinp[m]
```

```
{1, 1, 2}
```

```
matriz1 = {{1, 1, -1}, {1, 2, 1}, {1, 1, 1}}; b = {0, 5, 4};
```

```
matriz1 // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
U = egsinp[matriz1]
```

```
1
```

```
1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
0
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 1, -1}, {0, 1, 2}, {0, 0, 2}}
```

```
L = {{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
{{1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}}
```

```
y = resolL[L, b]
```

```
{0, 5, 4}
```

```
resolU[U, y]
```

```
{1, 1, 2}
```

ANEXO 3



Duda métodos de integracion compuestos
de LAURA CARRERA CARBALLÉS - domingo, 12 de junio de 2011, 13:03

Hola!! me acaba de surgir una duda... en los métodos de integración compuestos, ¿también tienen que estar los puntos equidistantemente separados?Es que en el ejercicio 13 de las últimas hojas de ejercicios, no están igualmente separados entre sí y no sé como abordarlo.

Gracias de antemano!



Re: Duda métodos de integracion compuestos
de ISABEL GORDALIZA ALAGUERO - domingo, 12 de junio de 2011, 14:44

Yo he utilizado puntos equidistantes para el método de los trapecios compuesto, aunque también tengo esa duda.
En Simpson creo que sí que tienen que ser equidistanes.



Re: Duda métodos de integracion compuestos
de MANUEL GONZÁLEZ FUENTE - domingo, 12 de junio de 2011, 15:26

Yo creo que sí, también necesitas que los puntos estén equidistantes para los metodos compuestos.

Yo lo que hice fue hacer varios intervalos de puntos equidistantes por ejemplo: 3,6,9 y hacer un simpson 1/3 o el 17,18,19,20 y hacer un simpson compuesto... el resto quer no se pueda hacer ni por simpson ni por compuestos, hazlo por trapecios simple y luego sumas todos.

Al menos eso es lo que he hecho yo. ;)



Re: Duda métodos de integracion compuestos
de LAURA CARRERA CARBALLÉS - domingo, 12 de junio de 2011, 19:11

Gracias chicos! pero, Manu, hacer trapecios simple y luego sumarlos no es en realidad hacer trapecios compuesto? al menos si miras la demostración de la fórmula eso parece...



Re: Duda métodos de integracion compuestos
de MANUEL GONZÁLEZ FUENTE - lunes, 13 de junio de 2011, 09:49

Es que lo que no sé es si trapecios compuestos necesita o no que los puntos estén equidistantes. A ver si alguien nos contesta y nos aclara esta duda... de todas formas, ¿cuánto te da?



Re: Duda métodos de integracion compuestos
de ALBA RODRÍGUEZ MEIRA - lunes, 13 de junio de 2011, 11:22

Yo tengo el ejercicio corregido por María Teresa, y como para trapecios compuestos hay que coger los puntos equidistantes, se hace trapecios compuestos donde se pueda y en el resto de casos trapecios simples.
Para trapecios compuestos se necesita que los puntos sean equidistantes.

Bueno, yo también lo tenía mal, eso es lo que entedí yo de mi correción, pero creo que es como digo =)



Re: Duda métodos de integracion compuestos
de MARÍA TERESA DE BUSTOS MUÑOZ - martes, 14 de junio de 2011, 09:06

¡Claro! Tenéis que aprender bien la teoría. Fijaos en que la distancia que separa dos puntos consecutivos es $h = \frac{b-a}{n}$, que es constante.



Ejercicios
de DIEGO GARRIDO MARTIN - sábado, 28 de mayo de 2011, 18:01
Hola! Alguien podría darme alguna idea acerca de cómo resolver el ejercicio 14 (el último) de aproximación de raíces? Es que le doy vueltas y vueltas y no soy capaz de resolverlo.

Gracias!!



Re: Ejercicios
de ALICIA UXIA VÁZQUEZ BOLADO - domingo, 29 de mayo de 2011, 13:55
Con el Mathematica puedes hacer la representación de la función y asi ves las raices que puede tener para luego calcularlas



Re: Ejercicios
de MARÍA TERESA DE BUSTOS MUÑOZ - lunes, 30 de mayo de 2011, 08:59
¡Hola!

El método gráfico siempre ayuda, pero se puede resolver el problema fácilmente. Recordad que los máximos y mínimos relativos se calculan igualando a cero la primera derivada. Para el valor que os salga, la concentración ha de ser 1. Así se calcula la A. El método numérico se aplica en el segundo apartado.

Intentadlo, y si todavía os queda alguna duda, decídmelo, ¿de acuerdo?



Re: Ejercicios
de DIEGO GARRIDO MARTIN - jueves, 2 de junio de 2011, 19:55
Buenas! Lo he hecho como dices y me sale 11h 3 minutos. ¿A alguien le da lo mismo? Es solo para saber si lo hago bien. (Me sale también un valor menor de 3 h, pero no lo considero porque el enunciado parece así indicarlo)
Gracias!



Re: Ejercicios
de DIEGO GARRIDO MARTIN - domingo, 12 de junio de 2011, 19:07
Hola de nuevo! A alguien le salen los dos últimos problemas de modelización (29 y 30)?? En ambos me quedo atascado y no hay manera..

Gracias



Re: Ejercicios
de DIEGO GARRIDO MARTIN - domingo, 12 de junio de 2011, 20:04
Ah por cierto otra cosilla... en derivación numérica, para hallar las cotas, imaginemos que la función derivada es 1/& + &, con & entre 1 y 3. La cota sería 4 (tomando &=1 en el primer miembro y &=3 en el segundo) o 2 (tomando en ambos &=1)??
Gracias y ánimo!! que ya queda poco!!



Re: Ejercicios
de LAURA CARRERA CARBALLÉS - domingo, 12 de junio de 2011, 20:08
emm.. yo creo que 4, es decir, tomando lo maximo en cada miembo.. al menos es

lo que yo tengo hecho en los ejercicios de clase!! yo también tenía esa duda.

Por cierto, en el ejercicio 7 de este tema, como calculas la integral con Simpson cuando le añades un punto más? si los nodos han de ser pares, no? :S



Re: Ejercicios
de ISABEL GORDALIZA ALAGUERO - domingo, 12 de junio de 2011, 20:43
Yo diría que la cota es 4, porque si sustituyes & por 3, te queda 3.33333 que es mayor que 2, pero menor que 4.



Re: Ejercicios
de MARÍA TERESA DE BUSTOS MUÑOZ - martes, 14 de junio de 2011, 09:04
Una cota de $f(x) = x + 1/x$ en [1,3] es, evidentemente, el 4. El 3 maximiza el primer sumando; el 1, el segundo. Por tanto, sumando los valores, vale el 4. No es la mejor, evidentemente, pero nos piden una cota.



Varias Dudas
de DIEGO GARRIDO MARTIN - sábado, 5 de marzo de 2011, 12:02
Hola! Creo que me toca romper el hielo en el nuevo foro jeje...

Escribo porque me han surgido un par de dudas sobre la hoja de problemas de derivación numérica. En primer lugar, en el ejercicio tres dice: "Hallar el valor de f'(2.0) usando una INTERPOLACIÓN LINEAL y una CUADRÁTICA" ¿A que se refiere?

Por otro lado,el ejercicio 7 no estoy seguro de hacerlo bien. Primero calculo f'(3) con la fórmula de 5 puntos (la más exacta en principio, según pide el enunciado) y luego la cota sabiendo que f""" (perdón por la notación) es menor que 23 (según dice también el enunciado) Pero me extraña que no haya que utilizar los otros datos (las cotas de las derivadas de menor orden) ¿Es correcto mi planteamiento?

Finalmente, ya que acabo de leer la cabecera del foro, ¿Donde están las herramientas matemáticas de Studium? No las encuentro por ningún lado jeje...

Gracias!
Editar | Borrar | Responder



Re: Varias Dudas
de MARÍA TERESA DE BUSTOS MUÑOZ - sábado, 5 de marzo de 2011, 14:40
Hola Diego.

Me alegra que hayas roto el hielo

La interpolación lineal es la que da como resultado una recta, es decir, un polinomio de grado 1. Por tanto, necesitas dos puntos. La cuadrática, aquella con la que se obtiene un polinomio de grado 2. Por tanto, para esta última necesitas tres puntos.

En cuanto a las cotas, sólo tienes que utilizar la que necesites. Las demás no hacen falta.

Por último, en Studium hay dos herramientas para Matemáticas. Abrid cualquier cuadro de texto, como éste que estoy utilizando para responder a las preguntas de Diego. Arriba a la derecha os encontraréis dos iconos que quedan fuera de la barra:

1- El icono , es decir, la raíz cuadrada, que sirve para escribir con notación matemática, y puedes usar, por ejemplo, para escribir la derivada quinta así: .

2.- El icono [ ]: sirve para calcular derivadas, resolver integrales, ecuaciones diferenciales, operaciones con matrices,... Sí, Studium resuelve, no sólo sirve para mensajes.

Además, yo puedo poner cualquier operación, pero vosotros podéis editarlo y cambiar. Por ejemplo, ¿recordáis el problema del otro día, aquel en el cual f(x)=x

cos(x)? Bueno, pues vamos a hacer que Studium nos calcule la derivada:

Pulsamos en [ ]. Vemos que aparece algo como lo de antes, es decir, como lo que tenemos aquí debajo:

La diferencia es que ahora aparece el símbolo igual.

Bueno, pues escribimos (x cos(x))' (la prima es la que está en la misma tecla que ?), pulsamos sobre el símbolo = y nos da el resultado.



Para calcular una integral, aquí tenéis un ejemplo:



El punto para multiplicar no lo podéis poner a mano (el punto normal no sirve), es el asterisco que tenéis en la tecla que está al lado de "Enter".
Si hacéis click sobre mis dos cuadros, podéis cambiar lo que queráis.

Esos dos iconos se basan en Wiris. Hay ayuda en español en la red.

¿No os lo contaron los de mates del primer cuatrimestre?

Feliz puente
Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder



Re: Varias Dudas
de LAURA CARRERA CARBALLÉS - domingo, 6 de marzo de 2011, 16:00
hola!

Respecto al problema al que haces alusión, es el que me toca entregar a mí y según lo que me dijo Teresa el otro día, hay que calcular la cota teniendo en cuenta el 23 que se refiere a la derivada quinta y creo que lo demás no hace falta

Lo de la aproximación de la derivada lineal y cuadrática te lo iba a decir, pero ya veo que está resuelto

yo sigo teniendo algun que otro problemilla con el problema 6 de interpolación, con lo que comentó Alba en el otro foro. ¿Alguien tiene resuelto ese apartado?

Gracias y felices carnavales



Re: Varias Dudas
de MIGUEL QUIJADA ALAMO - lunes, 7 de marzo de 2011, 17:04
hola!

el problema 6 de interpolación es el que tuve que entregar yo así que te cuento

como lo hice, aunque no sé si estará bien...

en el apartado b) te pide calcular la estimación del error para T=5º y T=54º, pero para calcular el error necesitas saber la función con la que estamos trabajando, pero como no la tenemos yo lo que hice fue calcular la aproximación del error. Como tienes los polinomios de interpolación del apartado a), lo que hice fue añadir un nuevo punto (que lo puedes obtener de la tabla del enunciado) y a partir de ahí calcular la aproximación del error, y lo mismo para el apartado c) añadiendo el punto que te dicen.

Por ejemplo, para T=54º, tienes el polinomio de interpolación que has calculado en el apartado a) que pasa por los puntos: i= 2,3,4. Calculas el valor de la viscosidad con este polinomio y, a continuación, para calcular la aproximación del error, añades un nuevo punto, i=5 (construyes una nueva tabla añadiendo ese punto y calculas el error). Para este caso, el resultado para la aproximación del error que me daba era 1,7618x10^-3.

Lo mismo para T=5º (utilizando el polinomio que pasa por i= 0,1,2,3) y para el apartado c)

Así es como lo hice yo, espero que te sirva de ayuda!



Re: Varias Dudas
de Mª LORETO PARGA VIDAL - jueves, 17 de marzo de 2011, 21:38

mmm..es que me ha surgido una duda ahora de última hora!
la interpolacion lineal y cuadrática..yo la había hecho por el método normal de derivación (con 2 y 3 puntos) pero eso es interpolación? o tiene algo que ver con el primer tema? (se hace el polinomio y luego la derivada)
espero respuesta :D graciiias!



Re: Varias Dudas
de MARÍA TERESA DE BUSTOS MUÑOZ - viernes, 18 de marzo de 2011, 09:09

Loreto, se llama fórmula lineal o cuadrática indicando el polinomio de interpolación de la que proviene. Las fórmulas de dos puntos provienen de un polinomio de grado 1, es decir, son fórmulas lineales. Las de tres puntos, de un polinomio de grado 2, por tanto es una fórmula cuadrática.



Re: Varias Dudas
de MARÍA TERESA DE BUSTOS MUÑOZ - viernes, 18 de marzo de 2011, 09:08

Miguel, así estaría bien, pero ahorraréis operaciones si hacéis la tabla con todos los datos al principio. Después, para cada apartado, basta con que seleccionéis la subtabla correspondiente.