Métodos Numéricos para Problemas no Lineales

Luis Ferragut Canals

6 de febrero de 2006

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Generalidades sobre las inecuaciones variacionales y su aproximación

1.1. Marco funcional

- V : espacio de Hilbert real, con producto escalar $(.,.)$, norma $\|.\|$

- V' : el espacio dual de V.

- $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathcal{R}$ una forma bilineal continua y elíptica, es decir, $\exists\ \alpha > 0$ tal que $a(v,v) \geqslant \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V$.

- $l : V \longrightarrow \mathcal{R}$ una forma lineal continua, es decir un elemento de V'.

- $j : V \longrightarrow]-\infty, \infty]$ una funcional convexa, propia y semicontinua inferior (s.c.i.). Recordemos que propia quiere decir que j no es idéntica a $+\infty$, s.c.i. quiere decir

$$v_n \to v \quad \Rightarrow \quad lim\ inf\ j(v_n) \geqq j(v)$$

- K, un subconjunto convexo y cerrado de V

Consideraremos dos tipos de inecuaciones variacionales elípticas:
Inecuaciones de tipo I, elípticas
Hallar $u \in K$ tal que

$$a(u, v-u) \geqslant < l, v-u > \quad \forall v \in K \tag{1.1.1}$$

Inecuaciones de tipo II, elípticas
Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geqslant < l, v-u > \quad \forall v \in V \tag{1.1.2}$$

Ejercicio
Introducimos la función indicatriz del conjunto K

$$I_K : V \longrightarrow]-\infty, \infty]$$

definida por

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K, \\ \infty & \text{si } v \notin K. \end{cases}$$

- Demostrar que I_K es convexa, s.c.i., y propia si $K \neq \emptyset$
- Demostrar que el problema de tipo I es un caso particular del problema tipo II donde $j(v) = I_K(v)$, $\forall v \in V$.

1.2. Existencia y Unicidad de Solución de los problemas tipo I y II

Teorema de Stampacchia: De existencia y unicidad de solución para el problema tipo I.

1. Unicidad
   Sean u_1 y u_2 dos soluciones.

$$a(u_1, v-u_1) \geq < l, v-u_1 > \quad \forall v \in K$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq < l, v - u_2 > \quad \forall v \in K$$

tomando $v = u_2$ en la primera y $v = u_1$ en la segunda y sumando

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

lo que implica gracias a la elipticidad de $a(.,.)$

$$\alpha \|u_1 - u_2\| \leq 0$$

y por tanto $u_1 = u_2$.

2. Existencia
Utilizamos un método de punto fijo. Por el teorema de Riesz existe un elemento $\tau l \in V$ tal que $< l, v >= (\tau l, v) \quad \forall v \in V$. Por otra parte introduciendo el operador

$$\begin{aligned} A: \ & V \ \rightarrow V \\ & u \ \rightarrow Au \end{aligned}$$

definido por $(Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V$. El problema I, se escribe

$$(Au - \tau l, v - u) \geq 0$$

$$u \in K$$

y también para $\rho > 0$

$$(u - \rho(Au - \tau l) - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

es decir, u es solución de la siguiente ecuación de punto fijo

$$u = \Pi_K(u - \rho(Au - \tau l))$$

donde Π_k es el operador de proyección ortogonal sobre K. El problema I es equivalente a buscar un punto fijo de la aplicación

$$\begin{aligned} W_\rho: \ & V \ \rightarrow V \\ & v \ \rightarrow \Pi_K(v - \rho(Av - \tau l)) \end{aligned}$$

Tenemos que verificar que se puede elegir ρ de modo que W_ρ sea una contracción estricta. Sea pues $v_1, v_2 \in V$ tenemos por la propiedades del operador proyección

$$\|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|$$

y desarrollando el cuadrado

$$\begin{aligned} \|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|^2 &\leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|^2 \\ = \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) &+ \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \end{aligned}$$

donde $\|A\| \geq \alpha$. Si tomamos $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$ tenemos una contracción estricta. El valor óptimo es $\rho = \frac{\alpha}{\|A\|^2}$. Por otra parte como hay unicidad, el punto fijo es independiente de ρ.

■

Comentarios

- Si $K = V$, el teorema anterior es el teorema de Lax-Milgram.
- Si a(.,.) es simétrica el problema I equivale al problema de minimización siguiente Hallar $u \in K$

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \tag{1.2.1}$$

donde $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - < l, v >$.

Demostración de la equivalencia con un problema de optimización:
Sea u solución del problema (1.2.1). Para $\lambda \in (0, 1)$, si $u, v \in K$, tendremos $u + \lambda(v - u) \in K$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(u, u) - < l, v > &\leq \frac{1}{2} a(u + \lambda(v - u), u + \lambda(v - u)) - < l, u + \lambda(v - u) > \\ &\leq \frac{1}{2} a(u, u) + \lambda a(u, v - u) + \frac{\lambda^2}{2} a(v - u, v - u) \\ &\quad - < l, u > - \lambda < l, v - u > \end{aligned}$$

simplificando

$$0 \leq \lambda a(u, v-u) + \frac{\lambda^2}{2} a(v-u, v-u) - \lambda < l, v-u >$$

dividiendo por λ

$$0 \leq a(u, v-u) + \frac{\lambda}{2} a(v-u, v-u) - < l, v-u >$$

Pasando al límite cuando $\lambda \longrightarrow 0^+$

$$0 \leq a(u, v-u) - < l, v-u > \quad \forall v \in K$$

que es el problema I.
Recíprocamente, supongamos que u es solución del problema I, (1.1.1) y sea $v \in K$ cualquiera. Pongamos $w = v - u$, podemos escribir

$$J(v) = J(u+w) = \frac{1}{2} a(u+w, u+w) - < l, u+w >=$$
$$\frac{1}{2} a(u,u) + a(u,w) + \frac{1}{2} a(w,w) - < l, u > - < l, w >=$$
$$J(u) + a(u, v-u) - < l, v-u > + \frac{1}{2} a(w,w) \geq J(u)$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta la inecuación (1.1.1) y el caracter definido positivo de la forma bilineal $a(.,.)$. ■
En el caso simétrico, para demostrar la existencia de solución se puede utilizar el siguiente
Teorema
Sea $J : V \to [-\infty, +\infty]$ una aplicación

- Convexa
- Coerciva, es decir, $lim\ J(v) = \infty$ cuando $\|v\| \to \infty$
- Propia
- s.c.i.

Entonces, si K es un conjunto convexo y cerrado de V, existe un elemento $u \in K$ t.q. $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$. Además, si J es estrictamente convexa, u es único.
DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $\{u_n\} \subset K$ una sucesión que verifica:

   $$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in K} J(v) = \alpha.$$

   En principio, α puede tomar el valor $-\infty$. La sucesión u_n está acotada, en efecto, supongamos por el contrario que $\|u_n\| \to +\infty$, $J(u_n) \to +\infty$ por ser J coerciva, lo que contradice la definición de u_n. Por lo tanto, $\{u_n\}$ está acotada: $\|u_n\| \leq c$. Podemos extraer una subsucesión $\{u_\nu\}$ de modo que:

   $$u_\nu \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ débilmente en } V.$$

   Como J es convexa y s.c.i., será s.c.i. en la topología débil de V y, en consecuencia,

   $$\alpha = \liminf_{\nu\to\infty} J(u_\nu) \geq J(u).$$

   Por otra parte, $u \in K$ pues K es débilmente cerrado. Es decir, $\alpha \neq -\infty$ y $\exists u \in K$ t. q.,

   $$\alpha = J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K.$$

2. Además, si J es estrictamente convexa,

   $$J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = \alpha$$

   luego $u_1 = u_2$. ∎

Teorema: De existencia y unicidad de solución para el problema tipo II.

1. Unicidad
   Supongamos dos soluciones (u_1, u_2) al problema; tendremos así:

   $$a(u_1, v-u_1) + j(v) - j(u_1) \geq \langle L, v-u_1\rangle, \quad \forall v \in V$$

   $$a(u_2, v-u_2) + j(v) - j(u_2) \geq \langle L, v-u_2\rangle, \quad \forall v \in V.$$

Tomando $v = u_2$ en la primera ecuación, y $v = u_1$ en la segunda,

$$a(u_1, u_2 - u_1) + j(u_2) - j(u_1) \geq \langle L, u_2 - u_1 \rangle$$
$$a(u_2, u_1 - u_2) + j(u_1) - j(u_2) \geq \langle L, u_1 - u_2 \rangle$$

y, sumando,

$$a(u_1 - u_2, u_2 - u_1) \geq 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \\ \Longrightarrow \|u_1 - u_2\|^2 = 0 \\ \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

2. Existencia
Si $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica, entonces (1.1.2) es un problema de minimización de la funcional:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j(v) - \langle L, v \rangle,$$

que es una funcional convexa, propia, s.c.i. y coerciva (ejercicio), luego existe la solución al problema (1.1.2).
Supongamos que $a(\cdot, \cdot)$ no es necesariamente simétrica, y consideremos el siguiente problema auxiliar:
Dado $u \in V, \rho > 0$, hallar $w \in V$ tal que:

$$\begin{aligned} &(w, v - w) + \rho j(v) - \rho j(w) \geq \\ &\qquad \geq (u, v - w) + \rho \langle L, v - w \rangle - \rho a(u, v - w), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Este problema tiene solución única, pues es un problema del tipo (1.1.2) con forma bilineal asociada simétrica. El problema original a resolver es, entonces, encontrar un punto fijo de la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} F_\rho : V & \longrightarrow & V \\ u & \longrightarrow & w \end{array}$$

donde w es la solución de (1.2.2). Basta demostrar, pues, que para valores adecuados de ρ, F_ρ es una contracción estricta.
Sean $w_1 = F_\rho(u_1)$ y $w_2 = F_\rho(u_2)$. Tendremos:

$$\begin{aligned}
&(w_1, v - w_1) + \rho j(v) - \rho j(w_1) \geq \\
&\qquad \geq ((u_1, v - w_1)) + \rho\langle L, v - w_1\rangle - \rho a(u_1, v - w_1) \\
&(w_2, v - w_2) + \rho j(v) - \rho j(w_2) \geq \\
&\qquad \geq (u_2, v - w_2) + \rho\langle L, v - w_2\rangle - \rho a(u_2, v - w_2)
\end{aligned}$$

Haciendo $v = w_2$ y $v = w_1$, respectivamente, tendremos:

$$\begin{aligned}
&(w_1, w_2 - w_1) + \rho j(w_2) - \rho j(w_1) \geq \\
&\qquad \leq (u_1, w_2 - w_1) + \rho\langle L, w_2 - w_1\rangle - \rho a(u_1, w_2 - w_1) \\
&((w_2, w_1 - w_2)) + \rho j(w_1) - \rho j(w_2) \geq \\
&\qquad \leq (u_2, w_1 - w_2) + \rho\langle L, w_1 - w_2\rangle - \rho a(u_2, w_1 - w_2)
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
(w_1 - w_2, w_2 - w_1) \geq (u_1 - u_2, w_2 - w_1) - \rho a(u_1 - u_2, w_2 - w_1) \\
(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&\|F_\rho(u_1) - F_\rho(u_2)\|^2 = \|w_1 - w_2\|^2 \leq \\
&\qquad \leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \rho\langle A(u_1 - u_2), w_1 - w_2\rangle.
\end{aligned}$$

Por el teorema de Riesz, podemos considerar $A(u_1 - u_2)$ como un elemento de V tal que:

$$\begin{aligned}
\|w_1 - w_2\|^2 &\leq (u_1 - u_2, w_1 - w_2) - \rho(A(u_1 - u_2), w_1 - w_2) = \\
&= ((I - \rho A)(u_1 - u_2), w_1 - w_2) \leq \\
&\leq \|I - \rho A\|\|u_1 - u_2\|\|w_1 - w_2\|
\end{aligned}$$

es decir, $\|w_1 - w_2\| \leq \|I - \rho A\| \|u_1 - u_2\|$. Por otra parte,

$$\|I - \rho A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|(I - \rho A)v\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|v - \rho Av\|$$

$$\begin{aligned}
\|v - \rho Av\|^2 &= (v - \rho Av, v - \rho Av) = \\
&= (v, v) - 2\rho(Av, v) + \rho^2(Av, Av) = \\
&= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2\|Av\|^2 \leq \\
&\leq 1 - 2\rho\alpha + \rho^2\|A\|^2, \quad \forall v \quad / \quad \|v\| \leq 1.
\end{aligned}$$

Buscamos el argumento ρ que hace mínima la función:

$$\begin{aligned}
f(\rho) &= 1 - 2\rho\alpha + \rho^2\|A\|^2 \\
f'(\rho) &= -2\alpha + 2\rho\|A\|^2 = 0 \Longrightarrow \rho = \frac{\alpha}{\|A\|^2} \\
f_{min} &= f\left(\frac{\alpha}{\|A\|^2}\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{\|A\|^2} < 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, para el valor $\rho = \frac{\alpha}{\|A\|^2}$, tenemos que:

$$\|I - \rho A\| < 1 \quad \Longleftrightarrow$$

y, en consecuencia,

$$\|w_1 - w_2\| \leq \|u_1 - u_2\|,$$

luego F_ρ es una contracción. ■

Capítulo 2

Aproximación de inecuaciones variacionales

2.1. Aproximación de inecuaciones variacionales elípticas de tipo I (I.V.E. I)

Los aspectos a considerar son:

1. Aproximación de V.
2. Aproximación de K.
3. Aproximación de $a(.,.)$.
4. Aproximación de $< l, . >$.

Las dos últimas se refieren a la aproximación numérica de las integrales correspondientes, es decir al efecto de la integración numérica. Como nosotros supondremos que utilizamos integración exacta no estudiaremos estos casos. Nos ocuparemos pues de las aproximaciones que afectan a los dos primeros puntos.

Aproximación de V

Consideraremos una sucesión $(V_h)_h$ con $h \to 0$, donde cada $V_h \subset V$ es un subespacio cerrado de V.

Aproximación de K

Consideraremos una sucesión $(K_h)_h$ con $h \to 0$, donde K_h es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de V_h. En general $K_h \nsubseteq K$ con las hipótesis siguientes:

1. Hipótesis de consistencia: Si consideramos una sucesión $(v_h)_h$ tal que $v_h \in K_h$, $\forall h$ y $(v_h)_h$ acotada en V, entonces los puntos de acumulación para la topología débil están en K

2. Propiedad de aproximación: Existe $\chi \subset V$ con $\bar{\chi} = K$ y existe una sucesión $(r_h)_h$ de aplicaciones $r_h : \chi \longrightarrow K_h$ tal que

$$\lim_{h \to 0} ||r_h v - v|| = 0, \quad \forall v \in \chi$$

Comentarios

1. Si $K_h \subset K, \quad \forall h$ la hipótesis 1) se verifica automáticamente.

2. $\bigcap_h K_h \subset K$. En efecto, sea $x \in \bigcap_h K_h$ la sucesión constante, es decir, $v_h = x, \quad \forall h$. Es una sucesión acotada con $v_h \in K_h$ y que tiene como único punto de acumulación a x. Por lo tanto $x \in K$.

3. Un variante de la propiedad 2) es:
   $\chi \subset V$, $\bar{\chi} = K$, existe una sucesión $(r_h)_h$ de aplicaciones $r_h : \chi \longrightarrow K_h$ tal que $\forall v \in \chi$, existe $h_0 = h_0(v)$ tal que $r_h v \in K_h \quad \forall h \leq h_0(v)$ y

$$\lim_{h \to 0} ||r_h v - v|| = 0$$

Aproximación de (1.1.1) Hallar $u_h \in K_h$ tal que

$$a(u_h, v_h - u_h) \geqslant < l, v_h - u_h > \quad \forall v_h \in K_h \tag{2.1.1}$$

Teorema: 2.1.1 tiene solución única.

Demostración: se aplica el teorema general.■

Teorema: Convergencia de las soluciones aproximadas
Con las hipótesis precedentes sobre $v, a(.,.), K, < l, . >$ y $(V_h)_h$ y $(K_h)_h$ tenemos

$$\lim_{h\to 0} ||u - u_h|| = 0$$

con u_h solución de 2.1.1 y u solución de 1.1.1.
Demostración:

1. <u>Estimación a priori de u_h</u>

$$u_h \in K_h$$

$$a(u_h, v - u_h) \geq < l, v_h - u_h > \quad \forall v_h \in K_h$$

de donde reordenando términos

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - < l, v_h - u_h >$$

y teniendo en cuenta la elipticidad de $a(.,.)$ y la continuidad de $a(.,.)$ y de $< l, . >$ resulta

$$\alpha ||u_h||^2 \leq ||A||.||v_h||.||u_h|| + ||l||_*(||v_h|| + ||u_h||)$$

Esta desigualdad es cierta para todo $v_h \in K_h$. En particular, utilizando la propiedad de aproximación 2), sea $v_o \in \chi$ y $v_h = r_h(v_0) \in K_h$, como la sucesión $(r_h(v_0))_h$ es convergente hacia v_0, en particular está acotada, es decir, $||v_h|| \leq C \ \forall h$ y para alguna constante C. De donde obtenemos

$$||u_h||^2 \leq \frac{C}{\alpha}||A||.||u_h|| + \frac{(C + ||u_h||)||l||_*}{\alpha}$$

y

$$||u_h||^2 \leq C_1||u_h|| + C_2$$

donde $C_1 = \frac{C||A|| + ||l||_*}{\alpha}$ y $C_2 = \frac{C||l||_*}{\alpha}$ resultando finalmente

$$||u_h|| \leq C_3$$

donde $C_3 = \sqrt{C_1^2 + 2C_2}$

2. Convergencia débil

   V es un espacio de Hilbert, por lo tanto reflexivo y en particular las bolas cerradas son compactas en la topología débil. En consecuencia al ser la sucesión $(u_h)_h$ acotada existe una subsucesión, $(u_\nu)_\nu$ y un elemento u^* tal que $\lim_{\nu \to 0} u_\nu = u^*$ en la topología débil de V.
   Tenemos

   a) $u^* \in K$ por la hipótesis de consistencia.

   b) La aplicación $v \to a(v, v)$ es s.c.i. para la topología débil de V, en efecto,
   $a(.,.)$ es bilineal, continua, semidefinida positiva. Sea $(v_n)_n$ una sucesión tal que $v_n \rightharpoonup v$ en la topología débil de V.

   $$0 \leq a(v_n - v, v_n - v) = a(v_n, v_n) - a(v_n, v) - a(v, v_n) + a(v, v)$$

   y

   $$a(v_n, v_n) \geq a(v_n, v) + a(v, v_n) - a(v, v)$$

   tomando el limite inferior

   $$\liminf a(v_n, v_n) \geq a(v, v)$$

   es decir la semi continuidad inferior. Únicamente hemos utilizado la condición $a(v, v) \geq 0$.

   c) $u^* \in K$ es solución de (1.1.1):
   En efecto, para todo $v_\nu \in K_\nu$,

   $$a(u_\nu, u_\nu) \leq a(u_\nu, v_\nu) - < l, v_\nu - u_\nu >$$

   y en particular para todo $v \in \chi$

   $$a(u_\nu, u_\nu) \leq a(u_\nu, r_\nu(v)) - < l, r_\nu(v) - u_\nu >$$

   Pasando al límite inferior

   $$a(u^*, u^*) \leq \liminf a(u_\nu, u_\nu) \leq a(u^*, v) - < l, v - u^* >$$

   es decir

   $$a(u^*, u^*) \leq a(u^*, v) - < l, v - u^* >$$

para todo $v \in \chi$. Como $\bar{\chi} = K$ y $a(.,.)$ y $< l,. >$ son continuas resulta finalmente

$$\begin{gathered} u^* \in K \\ a(u^*, v - u^*) \geq < l, v - u^* > \quad \forall v \in K \end{gathered}$$

es decir u^* es solución de (1.1.1) y como la solución es única $u^* = u$. Además como u es el único punto de acumulación de $(u_h)_h$ en la toplogía débil de V, es toda la sucesión $(u_h)_h$ la que converge hacia u.

3. Convergencia fuerte

Utilizamos la elipticidad, tenemos para todo $v_h \in K_h$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha||u_h - u||^2 \leq a(u_h - u, u_h - u) \\ &= a(u_h, u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \\ &\leq a(u_h, v_h) - < l, v_h - u_h > - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \end{aligned}$$

de donde en particular tomando $v_h = r_h(v)$ para todo $v \in \chi$,

$$0 \leq \alpha||u_h - u||^2 \leq a(u_h, r_h(v)) - < l, r_h(v) - u_h > - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u)$$

tomando el límite superior

$$0 \leq \alpha \limsup ||u_h - u||^2 \leq a(u, v) - < l, v - u > - a(u, u) - a(u, u) + a(u, u) \quad \forall v \in \chi$$

Teniendo en cuenta $\bar{\chi} = K$ tendremos

$$0 \leq \alpha \limsup ||u_h - u||^2 \leq a(u, v - u) - < l, v - u > \quad \forall v \in K$$

y finalmente tomando $v = u$

$$0 \leq \alpha \limsup ||u_h - u||^2 \leq 0$$

lo que implica

$$\lim_{h \to 0} ||u_h - u||^2 = 0$$

2.2. Aproximación de inecuaciones variacionales elípticas de tipo II (I.V.E. II)

Aquí los aspectos a considerar son:

1. Aproximación de V.
2. Aproximación de $j(.)$.
3. Aproximación de $a(.,.)$.
4. Aproximación de $< l, . >$.

Consideraremos los dos primeros.
Aproximación de V
Consideramos una sucesión $(V_h)_h$ de subespacios cerrados de V sobre los que hacemos las hipótesis siguiente:
Existe $\mathcal{V} \subset V$ tal que $\overline{\mathcal{V}} = V$ y para todo h existe una aplicación

$$r_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$$

verificando

$$\lim_{h \to 0} ||r_h(v) - v|| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Aproximación de $j(.)$
Existe una sucesión $(j_h)_h$ de funcionales convexas, s.c.i. con las siguientes propiedades:

1. Minoración afín uniforme en h: Existe $\lambda \in V'$ y $\mu \in \mathcal{R}$ tales que

$$j_h(v_h) \geq < \lambda, v_h > + \mu \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall h$$

2. Si $v_h \rightharpoonup v$ débilmente en V entonces

$$\liminf j_h(v_h) \geq j(v)$$

3. Para todo $v \in \mathcal{V}$
$$\lim_{h\to 0} j_h(r_h(v)) = j(v)$$

Comentarios

1. Si $j(.)$ es continua es siempre posible construir j_h satisfaciendo las propiedades anteriores en las aplicaciones que veremos. En lo que sigue supondremos que $j(.)$ es continua.
2. En ciertos casos $j_h(v_h) = j(v_h), \quad \forall v_h, \quad \forall h$. Entonces las propiedades anteriores se satisfacen automáticamente.

Aproximación de 1.1.2 Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geqslant < l, v_h - u_h > \quad \forall v_h \in V_h \tag{2.2.1}$$

Teorema: El problema (2.2.1) tiene solución única.
Demostración: Aplicamos el teorema general.■
Teorema: Convergencia de las soluciones aproximadas
Con las hipótesis precedentes sobre V, $a(.,.)$, $< l, . >$, $(V_h)_h$ y $(j_h)_h$ tenemos

$$\lim_{h\to 0} ||u_h - u|| = 0$$

$$\lim_{h\to 0} j_h(u_h) = j(u)$$

donde u es la solución de (1.1.2) y u_h es la solución de (2.2.1).
Demostración:

1. Estimación a priori
   Tenemos
   $$j_h(u_h) + a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) + j_h(v_h) - < l, v_h - u_h > \quad \forall v_h \in V_h$$
   como $j_h(u_h) \geq < \lambda, u_h > +\mu$ resulta
   $$\begin{aligned} < \lambda, u_h > +\mu + \alpha ||u_h||^2 &\leq ||A||.||u_h||.||v_h|| \\ &+ ||l||_*(||v_h|| + ||u_h||) + j_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

En particular para $v_h = r_h(v)$ con $v \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}\alpha ||u_h||^2 &\leq (||\lambda||_* + ||l||_*)||u_h|| + ||A||.||u_h||.||r_h(v)|| \\ &+ |j_h(r_h(v))| + ||l||_*||r_h(v)|| + |\mu| \quad \forall v \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

elegimos ahora $v_0 \in \mathcal{V}$ de manera que $\lim_{h\to 0} ||r_h(v_0) - v_0|| = 0$, en particular $r_h(v_0)$ está acotado. Por la tercera propiedad exigida a la sucesión $(j_h)_h$, tenemos $\lim_{h\to 0} j_h(r_h(v_0)) = j(v_0)$ y en particular la sucesión $(j_h(r_h(v_0)))_h$ está acotada. Finalmente obtenemos pues

$$||u_h||^2 \leq C_1||u_h|| + C_2$$

es decir

$$||u_h|| \leq C_3$$

2. Convergencia débil

Del apartado anterior se deduce que existe una subsucesión $(u_\nu)_\nu$ tal que $u_\nu \rightharpoonup u^*$ débilmente en V. Como u_h es solución de (2.2.1) y $r_\nu(v) \in V_\nu$ tenemos

$$j_\nu(u_\nu) + a(u_\nu, u_\nu) \leq a(u_\nu, r_\nu(v)) + j_\nu(r_\nu(v)) - < l, r_\nu(v) > \ \forall v \in \mathcal{V}$$

tomando el límite inferior y teniendo en cuenta la segunda propiedad de j_ν tenemos

$$\begin{gathered} j(u^*) + a(u^*, u^*) \leq \liminf j_\nu(u_\nu) + \liminf a(u_\nu, u_\nu) \\ \leq \liminf (j_\nu(u_\nu) + a(u_\nu, u_\nu)) \leq a(u^*, v) + j(v) - < l, v - u^* > \quad \forall v \in \mathcal{V}\end{gathered}$$

Tenemos pues

$$\begin{gathered} u^* \in V \\ a(u^*, v - u) + j(v) - j(u^*) \geq < l, v - u^* > \quad \forall v \in \mathcal{V}\end{gathered}$$

como hemos supuesto que $j(.)$ es continua la anterior desigualdad es también cierta para todo $v \in V$. De modo que finalmente $u^* = u$ y toda la sucesión $(u_h)_h$ converge débilmente hacia u.

3. Convergencia fuerte

Para todo $v \in \mathcal{V}$ tenemos

$$\begin{aligned} j_h(u_h) &\leq j_h(u_h) + \alpha||u_h - u||^2 \leq j_h(u_h) + a(u_h - u, u_h - u) \\ &= j_h(u_h) + a(u_h, u_h) - a(u_h, -u) - a(u, u_h) + a(u, u) \\ &\leq a(u_h, r_h(v)) + j_h(r_h(v)) - < l, r_h(v) - u_h > - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \end{aligned}$$

tomando limites

$$\begin{aligned} j(u) &\leq \liminf j_h(u_h) \leq \liminf (j_h(u_h) + \alpha||u_h - u||^2) \\ &\leq \limsup \Big(a(u_h, r_h(v)) + j_h(r_h(v)) - < l, r_h(v) - u_h > \\ &- a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \Big) \\ &= \lim \Big(a(u_h, r_h(v)) + j_h(r_h(v)) - < l, r_h(v) - u_h > - a(u_h, u) - a(u, u_h) + a(u, u) \Big) \\ &= a(u, v) + j(v) - < l, v - u > - a(u, u) \end{aligned}$$

como $\overline{\mathcal{V}} = V$ resulta por una parte

$$j(u) \leq \liminf j_h(u_h) \leq \limsup j_h(u_h) \leq a(u, v-u) + j(v) - < l, v-u >$$

para todo $v \in V$ y eligiendo $v = u$ resulta $\lim j_h(u_h) = j(u)$.
Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha||u - u_h||^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) \\ &\leq a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, v_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) - < l, v_h - u_h > \end{aligned}$$

elegimos $v_h = r_h(v)$ con $v \in \mathcal{V}$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \liminf ||u - u_h||^2 \leq \alpha \limsup ||u - u_h||^2 \\ &\leq \limsup \Big(a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, r_h(v)) \\ &+ j_h(r_h(v)) - j_h(u_h) - < l, r_h(v) - u_h > \Big) \\ &= \lim \Big(a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, r_h(v)) \\ &+ j_h(r_h(v)) - j_h(u_h) - < l, r_h(v) - u_h > \Big) \\ &= a(u, v - u) + j(v) - j(u) - < l, v - u > \end{aligned}$$

que es cierto para todo $v \in \mathcal{V}$ y por tanto también para todo $v \in V$. Tomando $v = u$ obtenemos

$$\text{lím}\, ||u - u_h||^2 = 0$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Introducción a la teoría de operadores maximales monótonos

3.1. Operadores monótonos.

Sea H un espacio de Hilbert.

Definición: operador multívoco A es una aplicación de H en el conjunto *partes de* H:

$$A : H \to \wp(H)$$

Definiciones: Llamamos

- **dominio** del operador: $D(A) = \{x \in H \quad / \quad Ax \neq \phi\}$
- **imagen** del operador: $R(A) = \underset{x \in H}{\cup} Ax$.

Comentario: Si para todo elemento $x \in H$, Ax contiene un solo elemento de H, el operador se llamará **unívoco**.
Propiedad: Si A y B son dos operadores, $\lambda, \mu \in \Re$, entonces:

$$(\lambda A + \mu B)x = \{\lambda u + \mu v \quad / \quad u \in Ax, v \in Bx\}$$

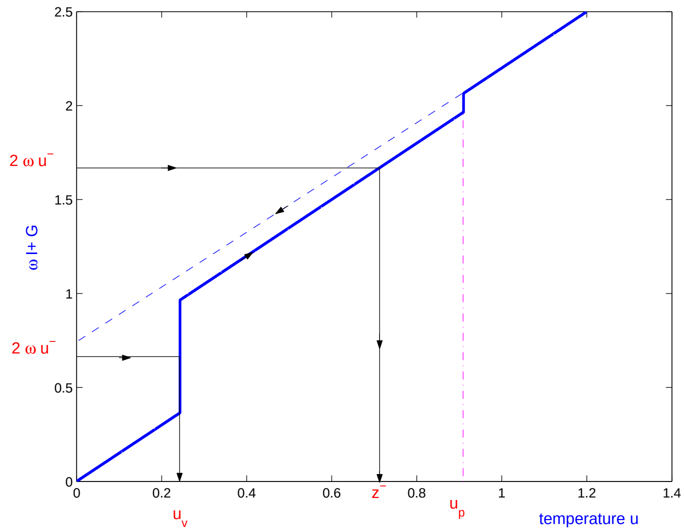

Figura 3.1: Ejemplo de una función multivoca.

con: $D(\lambda A + \mu B) = D(A) \cap D(B)$.

Comentario: Normalmente, identificamos A con su grafo:

$$G(A) = \{[x, y] \in H \times H \quad / \quad y \in Ax\}$$

Propiedad A^{-1} es el operador cuyo grafo es el simétrico del de A:

$$y \in A^{-1}x \Longleftrightarrow x \in Ay.$$

Además: $D(A^{-1}) = R(A)$.

En el conjunto de operadores multívocos, ordenaremos los operadores por inclusión de grafos:

$$A \subset B \Longleftrightarrow Ax \subset Bx, \quad \forall x \in H.$$

Definición: Un operador A de H es **monótono** si:

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

o, más correctamente, si:

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A), \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.$$

Propiedades de los operadores monótonos: Si A es un operador monótono, se verifica:

1. A^{-1} es monótono
2. λA es monótono si $\lambda \geq 0$
3. $\overline{A}$ es monótono ($\overline{A}$ = adherencia de A en $H \times H_w$)
4. $\widetilde{A}x = \overline{conv(Ax)}$ (adherencia de la envolvente convexa de Ax)
5. si J es contracción en $D \subset H$ en H, $I - J$ es monótono
6. si $C \subset H$ es un convexo cerrado, el operador proyección P_c es monótono
7. si A y B son monótonos, $A + B$ es monótono.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sean $x_1, x_2 \in D(A^{-1}) = R(A)$. Sean

   $$y_1 \in A^{-1}x_1 \Longleftrightarrow x_1 \in Ay_1, \quad y_2 \in A^{-1}x_2 \Longleftrightarrow x_2 \in Ay_2.$$

   Por ser A operador monótono, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$, luego:

   $$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0.$$

2. Sean $y_1 \in \lambda Ax_1, \quad y_2 \in \lambda Ax_2$. Por ser A operador monótono,

   $$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

3. Sea $[x_k, y_k] \in \overline{A}, \quad (k = 1, 2)$.

   Por ser un elemento adherente, existen las sucesiones $\{x_i^n\}, \{y_i^n\}$ de elementos de A t.q.

   $$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} y_i^n = y_i.$$

   Por ser A operador monótono, $(y_1^n - y_2^n, x_1^n - x_2^n) \geq 0$,

   luego $(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$

4. Sean:

   $$\begin{cases} y_1 = \lambda u_1 + (1-\lambda)v_1, & u_1, v_1 \in Ax_1, \quad \lambda \in (0,1) \\ y_2 = \lambda u_2 + (1-\lambda)v_2, & u_2, v_2 \in Ax_2, \quad \mu \in (0,1). \end{cases}$$

   Por otra parte, $w = \lambda w + (1-\lambda)w$, luego

   $$\begin{aligned}(y_1 - y_2, x_1 - x_2) &= (\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1 - \lambda y_2 - (1-\lambda)y_2, x_1 - x_2) = \\ &= \lambda\,(u_1 - y_2, x_1 - x_2) + (1-\lambda)\,(v_1 - y_2, x_1 - x_2) = \\ &= \lambda\,(\mu u_1 + (1-\mu)u_1 - \mu u_2 - (1-\mu)v_2, x_1 - x_2) + \\ &\qquad + (1-\lambda)\,(\mu v_1 + (1-\mu)v_1 - \mu u_2 - (1-\mu)v_2, x_1 - x_2) = \\ &= \lambda\mu\,(u_1 - u_2, x_1 - x_2) + \lambda(1-\mu)\,(u_1 - v_2, x_1 - x_2) + \\ &\qquad + (1-\lambda)\mu\,(v_1 - u_2, x_1 - x_2) + (1-\lambda)(1-\mu)\,(v_1 - v_2, x_1 - x_2) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

5. Por ser J una contracción, $\|Jx_1 - Jx_2\| < \|x_1 - x_2\|$ y, por consiguiente,

   $$(Jx_1 - Jx_2, x_1 - x_2) < (x_1 - x_2, x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\|^2.$$

   Tendremos, por lo tanto,

   $$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2) - (Jx_1 - Jx_2, x_1 - x_2) > 0.$$

6. El operador proyección verifica:

$$(y - P_C x, x - P_C x) \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Sean $x_1, x_2 \in H$. Entonces, $\forall y \in C$,

$$\begin{cases} (y - P_C x_1, x_1 - P_C x_1) \leq 0 \\ (y - P_C x_2, x_2 - P_C x_2) \leq 0. \end{cases}$$

En particular, la primera ecuación se verifica para $y = P_C x_2$, y la segunda para $y = P_C x_1$:

$$\begin{cases} (P_C x_2 - P_C x_1, x_1 - P_C x_1) \leq 0 \\ (P_C x_1 - P_C x_2, x_2 - P_C x_2) \leq 0. \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} (P_C x_2 - P_C x_1, x_1) \leq (P_C x_2 - P_C x_1, P_C x_1) \\ (P_C x_1 - P_C x_2, x_2) \leq (P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_2) \end{cases}$$

o bien, cambiando convenientemente los signos de los términos,

$$\begin{cases} (P_C x_1 - P_C x_2, x_1) \geq (P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_1) \\ (P_C x_1 - P_C x_2, -x_2) \geq (P_C x_1 - P_C x_2, -P_C x_2) \end{cases}$$

y sumando,

$$\begin{aligned} (P_C x_1 - P_C x_2, x_1 - x_2) &\geq (P_C x_1 - P_C x_2, P_C x_1 - P_C x_2) = \\ &= \|P_C x_1 - P_C x_2\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

luego P_C es un operador monótono.

7. Sean $y_k \in (A+B)x_k, \quad u_k \in Ax_k, \quad v_k \in Bx_k \quad (k = 1, 2)$.

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2, x_1 - x_2) &= ((u_1 + v_1) - (v_2 + v_2), x_1 - x_2) = \\ &= (u_1 - u_2, x_1 - x_2) + (v_1 - v_2, x_1 - x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

por ser A y B monótonos.

■

3.2. Subdiferenciabilidad.

Sea $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ una aplicación convexa y propia. Sabemos que su dominio $D(\varphi) = \{x \in H \quad / \quad \varphi(x) < \infty\}$ es convexo.

Definición: Llamamos **subdiferencial** de φ en el punto x al conjunto:

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} \{y \in H \quad / \quad \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq (y, \xi - x), \quad \forall \xi \in H\} & \text{si } x \in D(\varphi) \\ \phi & \text{si } x \notin D(\varphi) \end{cases}$$

Propiedad Evidentemente, $D(\partial\varphi) \subset D(\varphi)$. ■

Propiedad Si $u \in H$ es tal que $\varphi(u) = \inf\limits_{v \in H} \varphi(v)$, entonces $0 \in \partial\varphi(u)$, y recíprocamente.

Demostración: Si $\varphi(u) = \inf\limits_{v \in H} \varphi(v)$, entonces $\varphi(u) \leq \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in H$ y, por consiguiente,

$$\varphi(\xi) - \varphi(u) \geq 0, \quad \forall \xi \in H$$
$$\varphi(\xi) - \varphi(u) \geq (0, \xi - u) = 0, \quad \forall \xi \in H$$

luego $0 \in \partial\varphi(u)$. ■

Propiedad: El operador $\partial\varphi$ es monótono.

Demostración: Sean $y_1 \in \partial\varphi(x_1), y_2 \in \partial\varphi(x_2)$. Por definición, tendremos:

$$\begin{cases} \varphi(\xi) - \varphi(x_1) \geq (y_1, \xi - x_1), \quad \forall \xi \in H \\ \varphi(\xi) - \varphi(x_2) \geq (y_2, \xi - x_2), \quad \forall \xi \in H. \end{cases}$$

En particular, la primera ecuación se debe verificar para $\xi = x_2$, y la segunda para $\xi = x_1$:

$$\begin{cases} \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geq (y_1, x_2 - x_1) \\ \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq (y_2, x_1 - x_2). \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones,

$$0 \geq (y_1, x_2 - x_1) + (y_2, x_1 - x_2) = -(y_1, x_1 - x_2) + (y_2, x_1 - x_2) = (y_2 - y_1, x_1 - x_2).$$

Es decir, cambiando de signo,

$$0 \leq (y_1 - y_2, x_1 - x_2).$$

■

3.3. Generalizaciones.

Sea X un espacio vectorial topológico (e.v.t.). Sea X' su dual. Sea un operador $A : X \to \wp(X')$.

Definición: El operador A es monótono si, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$:

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \;\; \geq 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2. \tag{3.3.1}$$

Sea V un espacio de Banach, con norma $\| \cdot \|$. Sea $A : V \to \wp(V)$.

Definición El operador A es **acretivo** si:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|,$$
$$\forall x_1, x_2 \in V, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.$$

Teorema: En un espacio de Hilbert, las nociones de monotonía y acretividad coinciden.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea A un operador monótono. Tendremos, $\forall x_1, x_2 \in D(A)$

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2.$$

Por otra parte,

$$\|x_1-x_2+\lambda(y_1-y_2)\|^2 = \|x_1-x_2\|^2+2\lambda(x_1-x_2,y_1-y_2)+\lambda^2\|y_1-y_2\|^2.$$

Puesto que:

- $\lambda > 0$
- $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$
- $\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0$

tendremos,

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2.$$

Luego A es acretivo.

2. Si A es acretivo, $\forall\lambda > 0$,

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2$$

Por otra parte,

$$\|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \lambda^2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \|x_1 - x_2\|^2$$

$$2(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \lambda\|y_1 - y_2\|^2 \geq 0$$

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq -\frac{\lambda}{2}\|y_1 - y_2\|^2$$

Para $\lambda \longrightarrow 0$, $\quad (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$, luego A es monótono.

■

Sea V un espacio localmente convexo. Sea V' su dual. Sea ${}_{V'}\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ el producto de dualidad. Sea $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ convexa y propia.

Definición: Llamamos subdiferencial de φ en el punto x al conjunto:

$$\partial\varphi(x) = \{y \in V' \quad / \quad \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq \ {}_{V'}\langle y, \xi - x\rangle_V\}.$$

Si V es un espacio de Hilbert, podemos identificar V y V' a través del teorema de Riesz. ${}_{V'}\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ es entonces el producto escalar, y el subdiferencial coincide con la definición dada.

3.4. Operadores maximales monótonos.

Propiedad: Si A es acretivo, el operador $(I+\lambda A)^{-1}$ es una contracción.

DEMOSTRACIÓN: Sea A un operador acretivo, y sean:

$$\begin{cases} y_1 \in (I+\lambda A)x_1 \Longleftrightarrow x_1 \in (I+\lambda A)^{-1}y_1 \Longleftrightarrow \frac{y_1-x_1}{\lambda} \in Ax_1 \\ y_2 \in (I+\lambda A)x_2 \Longleftrightarrow x_2 \in (I+\lambda A)^{-1}y_2 \Longleftrightarrow \frac{y_2-x_2}{\lambda} \in Ax_2. \end{cases}$$

Por ser A acretivo,

$$\|x_1-x_2\| \leq \|x_1-x_2+\lambda\left(\frac{y_1-x_1}{\lambda}-\frac{y_2-x_2}{\lambda}\right)\| = \|y_1-y_2\|$$

luego $(I+\lambda A)^{-1}$ es una contracción. ∎

En consecuencia, el problema:

$$\text{Dado } y \in H, \qquad \text{hallar } x \in D(A) \text{ tal que } x+\lambda Ax \ni y. \tag{3.4.1}$$

tiene a lo sumo una solución si A es acretivo.

Propiedad: El conjunto de los operadores monótonos es inductivo y no vacío, por relación de inclusión de grafos.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $Q=\{A_i\}_{i\in I}$ un subconjunto totalmente ordenado de operadores monótonos. Hay que comprobar que $A=\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es un operador monótono.

   Sean

   $$\begin{cases} y_1 \in Ax_1 \Longrightarrow y_1 \in A_i x_1 \text{ para algún } i\in I \\ y_2 \in Ax_2 \Longrightarrow y_2 \in A_j x_2 \text{ para algún } j \in I. \end{cases}$$

   Puesto que Q es totalmente ordenado, $A_i \subset A_j$, p. ej., luego:

   $$y_1 \in A_j x_1 \quad y_2 \in A_j x_2.$$

En consecuencia, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0$ por ser A_j monótono. Evidentemente, A es un mayorante de Q.

2. Q es un conjunto no vacío, pues el operador identidad es monótono. En efecto,

$$\begin{cases} y_1 \in Ix_1 \Longrightarrow y_1 = x_1 \\ y_2 \in Ix_2 \Longrightarrow y_2 = x_2. \end{cases}$$

Y, por tanto, $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \|x_1 - x_2\|^2 \geq 0$.

■

Definición Un operador A en H es **maximal monótono** (m.m.) si es maximal en el conjunto de los operadores monótonos (se entiende el conjunto de grafos monótonos).

Teorema: A es maximal monótono si y sólo si A es monótono y

$$\forall\,[x, y] \in H \times H \quad \text{t.q.} \quad (y - A\xi, x - \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in D(A)$$

se verifica $y \in Ax$. O, más correctamente,

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall\,[\xi, \eta] \in A \quad \Longrightarrow \quad y \in Ax.$$

Demostración:

1. Sea A maximal monótono. Sea $[x, y] \in H \times H$ t.q.,

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0 \quad \forall [\xi, \eta] \in A. \tag{3.4.2}$$

Supongamos $y \notin Ax$. Definamos $\tilde{A}$ t. q.

$$\tilde{A}x = Ax \cup \{y\}, \quad \forall x \in D(A). \tag{3.4.3}$$

$\tilde{A}$ es monótono, p.q. dados $y_1 \in \tilde{A}x_1, y_2 \in \tilde{A}x_2$,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \begin{cases} \geq 0, & \text{si } [x_k, y_k] \in A \\ = 0, & \text{si } [x_k, y_k] = [x, y] \\ \geq 0, & \text{si } [x_1, y_1] \in A, [x_2, y_2] \notin A, \text{ por (3.4.2).} \end{cases}$$

Además, $A \subset \tilde{A}$ (cf. (3.4.3)), luego A no es maximal.

2. Recíprocamente, supongamos:

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall [\xi, \eta] \in A \Longrightarrow y \in Ax.$$

Supongamos que A no es maximal. Entonces, $\exists \tilde{A}, \tilde{A} \supset A$, siendo $\tilde{A}$ maximal. Sea $y \in \tilde{A}x$. Tendremos entonces,

$$\begin{aligned} (y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall [\xi, \eta] \in A \subset \tilde{A} \\ \Longrightarrow y \in Ax \text{ es decir } \tilde{A} \subset A. \end{aligned}$$

Luego $A = \tilde{A}$, y A es maximal.

■

Lema: Sea C un conjunto convexo cerrado de H y A un operador monótono de H con $C \supset \overline{D(A)}$. Entonces, $\forall y \in H$, existe $x \in C$ tal que:

$$(\eta + x, \xi - x) \geq (y, \xi - x) \quad \forall [\xi, \eta] \in A.$$

Demostración: ■

Teorema: Caracterización de los operadores monótonos. Sea A un operador en H. Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. A es maximal monótono
2. A es monótono y $R(I + A) = H$
3. $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)^{-1}$ es una contracción sobre todo H, o sea, $R(I+\lambda A) = H$.

Demostración:

- Supuesta la hipótesis (c), $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)^{-1}$ es contracción en H.

  Sea $z_k \in Ax_k (k = 1, 2)$. Sea:

$$y_k = x_k + \lambda z_k = x_k + \lambda A x_k = (I + \lambda A) x_k$$

luego $x_k = (I + \lambda A)^{-1} y_k$.

Por ser una contracción,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\| = \|x_1 - x_2 + \lambda(z_1 - z_2)\|.$$

Es decir, el operador A es acretivo y, por lo tanto, monótono.

Por otra parte, para $\lambda = 1$, $(I + A)^{-1}$ está definido en todo A, es decir, $R(I + A) = H$.

- Suponemos que A es monótono y $R(I+A) = H$ (hipótesis (b)). Supongamos $A \subset B$, siendo B monótono. Si $y \in Bx, \exists x' \in D(A)$ t. q.,

$$x + y \in x' + Ax' = (I + A)x'$$

pues $R(I + A) = H$. Tenemos pues,

$$\begin{cases} x + y \in x' + Ax' \subset x' + Bx' \Longrightarrow x - x' + y \in Bx' \\ y \in Bx. \end{cases}$$

Por ser B monótono (acretivo),

$$\|x - x'\| \leq \|x - x' + \lambda(y - x + x' - y\| = \|x - x' + \lambda(x' - x)\|.$$

Para $\lambda = 1, \|x - x'\| \leq 0 \Longrightarrow x = x'$, de donde

$$x + y \in x' + Ax' = x + Ax \Longrightarrow y \in Ax$$

luego A es maximal (hipótesis (a)).

- El operador A es m.m. (hipótesis (a)). Utilizaremos el lema anterior, donde el conjunto C es el espacio H. Supongamos un elemento cualquiera $y \in H$. Entonces, $\exists x \in H$ t. q.,

$$(\eta + x - y, \xi - x) = (\eta - (y - x), \xi - x) \geq 0, \quad \forall\, [\xi, \eta] \in A.$$

Como A es maximal y el operador I es monótono,

$$\begin{aligned} &y \in Ax \\ &y - x \in (A - I)x \subset Ax \qquad \text{(por ser } A \text{ maximal)} \end{aligned}$$

luego $y - x \in Ax$, es decir, $y \in (I + A)x$.

Como y es un elemento *cualquiera* de H, deducimos que si A es m.m.,

$$\begin{aligned}
& (y-\eta, x-\xi) \geq 0, \quad \forall\,[\xi,\eta] \in A && \Longrightarrow \quad y \in Ax \\
\Longleftrightarrow\ & (\lambda y-\lambda\eta, x-\xi) \geq 0, \quad \forall\,[\xi,\eta] \in A && \Longrightarrow \quad y \in Ax \\
\Longleftrightarrow\ & (y'-\eta', x-\xi) \geq 0, \quad \forall\,[\xi,\eta'] \in \lambda A && \Longrightarrow \quad y' \in \lambda Ax \\
& && \Longleftrightarrow \lambda A \text{ es m. m.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $R(I + A) = H$. Además, por ser A monótono, $(I + \lambda A)^{-1}$ es contracción (cf. Teorema 3.4). En consecuencia, se trata de una contracción sobre todo H (hipótesis (c)).

■

Corolario: Si A es monótono, existe una prolongación $\widetilde{A}$ maximal monótono de A, cuyo dominio está contenido en $\overline{convD(A)}$.

Demostración: ■

Propiedad: Si A es m.m., entonces:

1. A^{-1} es m.m.
2. λA es m.m. (si $\lambda > 0$).

Teorema: Sea φ una función convexa y propia sobre H. Sea $\alpha \geq 0$. La función convexa:

$$J : \xi \to J(\xi) = \varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2$$

alcanza su mínimo en x_0 si y sólo si: $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.

Demostración:

1. Supongamos $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$. Entonces, por definición de subdiferencial,

$$\begin{cases} \varphi(x_0) < +\infty \\ \varphi(\xi) - \varphi(x_0) \geq \alpha\,(y - x_0, \xi - x_0)\,, \quad \forall \xi \in H. \end{cases}$$

Observemos que

$$(y - x_0, \xi - x_0) = (y - x_0, \xi - y + y - x_0) = -(x_0 - y, \xi - y) + \|y - x_0\|^2$$

y como se verifica

$$(x_0 - y, \xi - y) \leq \|x_0 - y\|\|\xi - y\| \leq \frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2$$

tendremos

$$\begin{aligned}(y - x_0, \xi - x_0) \geq -\frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2 + \|y - x_0\|^2 = \\ = \frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 - \frac{1}{2}\|\xi - y\|^2\end{aligned}$$

de donde,

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}\left[\|x_0 - y\|^2 - \|\xi - y\|^2\right]$$

es decir,

$$\varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2 \leq \varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2 \quad \forall \xi \in H.$$

2. Recíprocamente, supongamos que se verifica:

$$\varphi(x_0) + \frac{\alpha}{2}\|x_0 - y\|^2 \leq \varphi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\|\xi - y\|^2 \quad \forall \xi \in H.$$

Sea $\xi = (1-t)x_0 + t\eta, \quad \eta \in H, \quad t \in (0,1)$. Puesto que

$$\varphi(\xi) \leq (1-t)\varphi(x_0) + t\varphi(\eta)$$

tendremos

$$\begin{aligned}t\left(\varphi(\eta) - \varphi(x_0)\right) \geq \varphi(\xi) - \varphi(x_0) \geq& \\ \geq \frac{\alpha}{2}\left[\|x_0 - y\|^2 - \|\xi - y\|^2\right] =& \\ = \frac{\alpha}{2}\left[\|x_0 - y\|^2 - \|(1-t)x_0 + t\eta - y\|^2\right]&\end{aligned}$$

luego

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \frac{\alpha}{2} \frac{\|x_0 - y\|^2 - \|(x_0 - y) - t(\eta - x_0)\|^2}{t}.$$

Pasando al límite en el segundo miembro, tenemos la *derivada de Gateaux* de la función $z \to |z|^2$ en el punto $z = y - x_0$ y en la dirección $\eta - x_0$, es decir:

$$\varphi(\eta) - \varphi(x_0) \geq \alpha \left(y - x_0, \eta - x_0\right), \quad \forall \eta \in H$$

es decir,

$$\alpha \left(y - x_0\right) \in \partial\varphi(x_0).$$

■

Propiedad: Sea $\varphi : H \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, propia y s.c.i.; entonces el operador $\partial\varphi$ es maximal monótono.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función:

$$J(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2.$$

J es convexa y s.c.i. (por ser suma de funciones convexas y s.c.i.). Además, por ser φ convexa y s.c.i., está minorada por una función afín, luego:

$$J(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \geq \alpha + (z, x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2.$$

Tendremos

$$\begin{aligned} J(x) &\geq \alpha + (z, x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \\ &= \alpha + (z - y, x) + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|z - y\|\|x\| + \frac{1}{2}\|y\|^2 + \alpha \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = \infty$$

luego J es coerciva. Por lo tanto (cf. Teorema **??**),

$$\exists x_0 \in H \quad / \quad \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\|x_0 - y\|^2 \leq \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Por el Teorema 3.4, tendremos que existe el punto x_0 t. q.

$$y - x_0 \in \partial\varphi(x_0)$$

y entonces $\partial\varphi$ es maximal monótono. ■

Ejemplo Sea $f : \Re \to \Re$ una función creciente; el operador

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : \Re & \to & \wp(\Re) \\ x & \to & \widetilde{f}(x) = [f(x^-), f(x^+)] \end{array}$$

es maximal monótono. ■

Un operador unívoco monótono maximal en el conjunto de los operadores unívocos no tiene por qué ser maximal en el conjunto de todos los operadores monótonos.

Sea A un operador lineal, unívoco, no necesariamente acotado y monótono.

Teorema: A es maximal monótono si y sólo si $D(A)$ es denso en H y A es maximal en el conjunto de los operadores unívocos lineales monótonos.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea A m. m. Evidentemente, A es maximal en el conjunto de los operadores unívocos lineales monótonos. Hay que demostrar que $D(A)$ es denso en H o, lo que es lo mismo, si $x \perp D(A) \Longrightarrow x = 0$.

   Sea $x \perp D(a)$. Entonces, $\forall \xi \in D(A)$,

   $$\begin{aligned} (A\xi - x, \xi) &= (A\xi, \xi) - (x, \xi) = \\ &= (A\xi, \xi) = (A\xi - A0, \xi - 0) \geq 0 \end{aligned}$$

   puesto que A es lineal ($A0 = 0$) y A es m. m. En consecuencia,

   $$x \in A0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

2. Supongamos $\overline{D(A)} = H$, siendo A m. m. en el conjunto de los operadores unívocos, lineales, monótonos. Sea $[x, y] \in H \times H$ t. q.,

$$(A\xi - y, \xi - x) \geq 0 \quad \forall \xi \in D(A). \tag{3.4.4}$$

Queremos demostrar que $y \in Ax$.

En primer lugar, observemos que $x \in D(A)$. Si no fuera así, el operador:

$$\tilde{A} : \xi + \lambda x \quad \longrightarrow \quad A\xi + \lambda y$$

definido sobre el espacio engendrado por $D(A)$ y x sería una prolongación lineal monótona estricta de A.

Puesto que (3.4.4) es válida $\forall \xi \in D(A)$, también se verificará para $x + t\xi$, con $t > 0$:

$$\begin{aligned} (A(x + t\xi) - y, x + t\xi - x) &\geq 0 \\ (Ax - y, t\xi) &\geq -(At\xi, t\xi) \\ (Ax - y, \xi) &\geq -t\,(A\xi, \xi). \end{aligned}$$

Haciendo $t \longrightarrow 0$, tendremos:

$$(Ax - y, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in D(A)$$

de donde, $Ax = y$.

■

Definición Un operador $A : H \longrightarrow H$ con $D(A) = H$ es **hemicontinuo** si, $\forall x \in H, \forall \xi \in H$:

$$\lim_{t \to 0} (A((1-t)x + t\xi), w) = (Ax, w), \quad \forall w \in H.$$

Teorema: Sea $A : H \longrightarrow H$ con $D(A) = H$ un operador monótono y unívoco. Entonces, si A es hemicontinuo, es maximal monótono.

DEMOSTRACIÓN: Sea $[x, y] \in H \times H$ t. q.

$$(Ax' - y, x' - x) \geq 0, \quad \forall x' \in H.$$

Puesto que la desigualdad anterior es válida para todo x', también lo será para $(1-t)x + t\xi, \quad \forall \xi \in H, t \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}(A((1-t)x + t\xi) - y, ((1-t)x + t\xi) - x) &\geq 0 \\ t\,(A((1-t)x + t\xi) - y, \xi - x) &\geq 0 \\ (A((1-t)x + t\xi) - y, \xi - x) &\geq 0.\end{aligned}$$

Haciendo $t \longrightarrow 0$,

$$(Ax - y, \xi - x) \geq 0$$

y, por consiguiente, $y = Ax$.

■

Definición Sea A maximal monótono. Al operador unívoco

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \qquad \lambda > 0$$

definido en todo H se le denomina **resolvente** de A.

Recordemos que J_λ es una contracción de H en H.

Propiedad: El resolvente del operador A verifica:

$$J_\lambda x = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + (1 - \frac{\mu}{\lambda}) J_\lambda x \right), \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda, \mu > 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $y = J_\lambda x$. Se puede deducir:

$$\begin{aligned} y = (I+\lambda A)^{-1}x &\Longleftrightarrow x \in y + \lambda A y \\ &\Longleftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}(x-y) \in \mu A y \\ &\Longleftrightarrow y + \frac{\mu}{\lambda}(x-y) \in y + \mu A y \\ &\Longleftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})y \in y + \mu A y \\ &\Longleftrightarrow y \in J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})y\right) \\ &\Longleftrightarrow J_\lambda x = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + (1-\frac{\mu}{\lambda})y\right). \end{aligned}$$

■

Propiedad: Si A es maximal monótono, entonces el conjunto $C = \overline{D(A)}$ es convexo y

$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = \Pi_C x, \quad \forall x \in H.$$

DEMOSTRACIÓN: ■

Propiedad: Si A es maximal monótono, Ax es convexo y cerrado, $\forall x \in D(A)$.

DEMOSTRACIÓN: ■

Definición $A^0x = \Pi_{Ax}0$, es decir, A^0x es el elemento de Ax de norma mínima.

Definición: Aproximada Yosida. Dado un operador maximal monótono A, definimos su Aproximada Yosida como el operador $A_\lambda : H \longrightarrow H$, dado por:

$$A_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda}.$$

Propiedad: La aproximación Yosida A_λ verifica:

1. es un operador unívoco

2. AJ_λ es multívoco y $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$

3. si A es lineal y unívoco, entonces,

$$\begin{cases} A_\lambda x = AJ_\lambda x, & \forall x \in H \\ J_\lambda Ax = A_\lambda x, & \forall x \in D(A) \end{cases}$$

4. si A es lineal, unívoco, maximal monótono,

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda x = Ax.$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Evidente, pues J_λ es unívoco

2. $A_\lambda x = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} x = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x)$.

   Llamando $J_\lambda x = z \Longleftrightarrow (I + \lambda A) \ni z$

$$A_\lambda x \in \frac{1}{\lambda}((I + \lambda A)z - z) = Az = AJ_\lambda x.$$

3. Sea $x \in D(A)$. Teniendo en cuenta que $(I + \lambda A)J_\lambda = I$, tendremos:

$$Ax = \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)x - x] = \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)(x - J_\lambda x)]$$
$$J_\lambda Ax = \frac{1}{\lambda}[x - J_\lambda x] = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} x = A_\lambda x.$$

4. Utilizando la notación $C = \overline{D(A)}$,

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda Ax = \Pi_C Ax = Ax.$$

   Esto no sucede si A es multívoco.

■

Teorema

1. A_λ es maximal monótono y lipschitciano de constante $\frac{1}{\lambda}$

2. $y = A_\lambda x \Longleftrightarrow y \in A(x - \lambda y)$, o también: $y \in Ax \Longleftrightarrow y = A_\lambda(x + \lambda y)$

3. $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu > 0$

4. $\forall x \in D(A), \quad \|A_\lambda x\| \uparrow \|A^0 x\|$ y $A_\lambda x \to A^0 x$ cuando $\lambda \downarrow 0$, con:
$$\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \geq \|A^0\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$$

5. $\forall x \notin D(A), \quad \|A_\lambda x\| \uparrow \infty$ cuando $\lambda \downarrow 0$.

Demostración:

1. Sabemos que:
$$A_\lambda x = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} x \Longleftrightarrow x = \lambda A_\lambda x + J_\lambda x.$$
Por otra parte, $A_\lambda x \in A(J_\lambda x)$. Como A es monótono,
$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq 0.$$
Tenemos entonces:
$$\begin{aligned} \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \|x_1 - x_2\| &\geq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) = \\ &= (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) + \\ &\qquad + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq \\ &\geq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) = \\ &= \lambda \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2. \end{aligned}$$
Por lo tanto,
$$\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x_1 - x_2\|$$
luego A_λ es lipschitciano y, en consecuencia, unívoco y hemicontinuo. Además, $D(A_\lambda) = H$, por su propia definición, luego A_λ es maximal monótono (cf. Teorema 3.4).

2. Sea $y = A_\lambda x$. Entonces,

$$\begin{aligned} y = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} x &\iff \lambda y = x - J_\lambda x \\ &\iff J_\lambda x = x - \lambda y \\ &\iff x \in (I + \lambda A)(x - \lambda y) \\ &\iff \lambda y \in \lambda A(x - \lambda y) \\ &\iff y \in A(x - \lambda y). \end{aligned}$$

   Haciendo $x - \lambda y = z$, tenemos inmediatamente,

$$y \in Az \iff y = A_\lambda(z + \lambda y).$$

3. Utilizando la propiedad anterior,

$$\begin{aligned} y = (A_\lambda)_\mu x &\iff y = (A_\lambda)(x - \mu y) \\ &\iff y \in A(x - \mu y - \lambda y) = A(x - (\lambda + \mu)y) \\ &\iff y = A_{\lambda+\mu} x. \end{aligned}$$

4. Sean $x \in D(A), \lambda > 0$. Puesto que $A^0 x \in Ax$ y $A_\lambda \in A(J_\lambda x)$, tendremos:

$$\begin{aligned} &(A^0 x - A_\lambda x, x - J_\lambda x) \geq 0 \\ \Longrightarrow\ &(A^0 x - A_\lambda x, A_\lambda x) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

   de donde

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x\|^2 = (A_\lambda x, A_\lambda x) \leq (A^0 x, A_\lambda x) \leq \|A^0 x\| \|A_\lambda x\| \\ \Longrightarrow \|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\| \end{aligned}$$

   es decir, $\forall x \in D(A)$, $\|A_\lambda x\|$ es una cantidad acotada. En particular,

$$\begin{aligned} \|A_{\lambda+\mu} x\|^2 = \|(A_\lambda)_\mu x\|^2 \leq (A_\lambda^0 x, A_{\lambda+\mu} x) = \\ = (A_\lambda x, A_{\lambda+\mu} x) \leq \|A_\lambda x\| A_{\lambda+\mu} x\| \\ \Longrightarrow \|A_{\lambda+\mu} x\| \leq \|A_\lambda x\|, \quad \forall \lambda, \mu > 0 \end{aligned}$$

de donde,

$$\|A_{\lambda+\mu}x - A_\lambda x\|^2 = \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_{\lambda+\mu}x, A_\lambda x) + \|A_{\lambda+\mu}x\|^2 \leq$$
$$\leq \|A_\lambda x\|^2 - \|A_{\lambda+\mu}x\|^2$$

ya que $(A_{\lambda+\mu}x, A_\lambda x) \geq \|A_{\lambda+\mu}x\|^2 \geq 0$. Ahora bien, como $\|A_{\lambda+\mu}x\| \leq \|A_\lambda x\|$, resulta que la sucesión de números reales $\|A_\lambda x\|$ es creciente cuando $\lambda \downarrow 0$. Pero, si $x \in D(A)$, $\|A_\lambda x\|$ está acotada superiormente, luego convergerá, de modo que:

$$\|A_{\lambda+\mu}x - A_\lambda x\|^2 \leq \|A_\lambda x\|^2 - \|A_{\lambda+\mu}x\|^2 \underset{\lambda,\mu\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

es decir, $A_\lambda x$ es una sucesión de Cauchy y, en consecuencia,

$$\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda x = y.$$

Pero $x - J_\lambda x = \lambda A_\lambda x$; pasando al límite,

$$\lim_{\lambda\to 0} x - J_\lambda x = \lim_{\lambda\to 0} \lambda A_\lambda x = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x.$$

Finalmente, como $A_\lambda x \in A(J_\lambda x)$, tendremos:

$$\forall [\xi, \eta] \in A, \quad (y - \eta, x - \xi) \geq 0$$

luego $y \in Ax$. Además, $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$. Pasando al límite, tenemos

$$\|y\| \leq \|A^0 x\|$$

luego $y = A^0 x$, ya que $A^0 x$ es el elemento de norma mínima del conjunto Ax.

5. Supongamos $x \notin D(A)$, con $\|A_\lambda x\| \leq c, \quad \forall \lambda > 0$. El razonamiento anterior nos había llevado a que $A_\lambda x$ era sucesión de Cauchy y, por tanto,
$$\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda x = y \Longleftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda x = x.$$

Recordando que $(A_\lambda x - \eta, J_\lambda x - \xi) \geq 0, \quad \forall[\xi,\eta] \in A$ y pasando al límite,

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0, \quad \forall[\xi,\eta] \in A,$$

luego $x \in D(A)$ e $y \in Ax$, en contra de la hipótesis. En consecuencia, si $x \notin D(A)$, $\|A_\lambda x\| \uparrow \infty$.

■

Comentario: Gracias a la propiedad (a) del teorema anterior, la ecuación:

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0,$$

aproximación del problema:

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0$$

tiene solución única (teorema de Picard). ■

Nos preguntamos ahora cuándo el operador maximal monótono A es tal que la siguiente ecuación tiene solución:

$$\text{Dado } y \in H, \text{ hallar } x \in D(A) \text{ t. q. } y \in Ax$$

o, lo que es lo mismo, $R(A) = H$ (sobreyectividad de A).

Teorema Sea A maximal monótono. Si $\exists \alpha > 0$ t. q.

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq \alpha\|x_1 - x_2\|^2, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2$$

entonces A es sobreyectivo.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sean $z_k \in Ax_k, \quad y_k \in (A - \alpha I)x_k \quad (k = 1, 2)$. Se cumple entonces,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) = (z_1 - z_2, x_1 - x_2) - \alpha(x_1 - x_2, x_1 - x_2) =$$
$$= (z_1 - z_2, x_1 - x_2) - \alpha\|x_1 - x_2\|^2 \geq 0, \quad \forall z_k \in Ax_k$$

gracias a la hipótesis del teorema. En consecuencia, $A - \alpha I$ es monótono.

2. Sea $[x, y] \in H \times H$ t. q. $\forall [\xi, \eta] \in A - \alpha I$ verifique:

$$(y - \eta, x - \xi) \geq 0.$$

Hay que demostrar que $y \in (A - \alpha I)x$.

Sea $\eta \in A\xi - \alpha\xi \Leftrightarrow \eta = \tilde{\eta} - \alpha\xi, \quad \tilde{\eta} \in A\xi$.

$$\begin{aligned} (y + \alpha\xi - \tilde{\eta}, x - \xi) &\geq 0 \\ (\alpha x - \alpha\xi, x - \xi) &\geq 0 \\ \forall [\xi, \tilde{\eta}] \in A, \quad (y + \alpha x - \tilde{\eta}, x - \xi) &\geq 0 \end{aligned}$$

De donde $y + \alpha x \in Ax \Longleftrightarrow y \in (A - \alpha I)x$, y A es maximal.

3. Como $A - \alpha I$ es maximal monótono, $R(A - \alpha I + \lambda I) = H, \quad \forall \lambda > 0$; tomando $\lambda = \alpha, \quad R(A) = H$.

■

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\text{Encontrar } x \in H \text{ t.q. } 0 \in Ax$$

siendo A estrictamente monótono en el sentido: $\forall x_1, x_2 \in D(A)$,

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq \alpha \|x_1 - x_2\|^2, \quad \forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2.$$

Nos basaremos en la siguiente propiedad:

Propiedad: J_λ es una contracción estricta.

DEMOSTRACIÓN: Sean $y_k = J_\lambda x_k = (I + \lambda A)^{-1} x_k$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} y_k + \lambda A y_k &\ni x_k \\ \frac{x_k - y_k}{\lambda} &\in A y_k \end{aligned}$$

Tendremos entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha\|y_1 - y_2\|^2 &\leq \left(\frac{x_1 - y_1}{\lambda} - \frac{x_2 - y_2}{\lambda}, y_1 - y_2 \right) = \\
&= \frac{1}{\lambda}\left((x_1 - x_2) - (y_1 - y_2), y_1 - y_2\right) = \\
&= \frac{1}{\lambda}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) - \frac{1}{\lambda}\|y_1 - y_2\|^2. \\
(1 + \lambda\alpha)\|y_1 - y_2\|^2 &\leq (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \leq \|x_1 - x_2\|\|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Finalmente, obtenemos:

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{1 + \lambda\alpha}\|x_1 - x_2\|.$$

■

Como consecuencia, J_λ tiene un único punto fijo, que se puede aproximar como límite de la sucesión:

$$x^{n+1} = J_\lambda x^n.$$

Naturalmente, $x = J_\lambda x \iff (I + \lambda A)x \ni x \iff 0 \in Ax$.

Comentario: El método anterior es el método de Euler implícito:

$$\begin{aligned}
0 &\in Ax \\
0 &\in \frac{dx}{dt} + Ax \\
0 &\in \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} + Ax^n + 1 \\
x^{n+1} &= (I + \Delta t A)^{-1} x^n.
\end{aligned}$$

■

Teorema Sean A y B dos operadores maximales monótonos. Si B es monótono lipschitciano y $D(B) = H$, entonces $A + B$ es maximal monótono.

Demostración: Sabemos que $A + B$ es monótono.

1. Supongamos que B es lipschitciano de razón $L < 1$. Hay que comprobar que la ecuación:

$$\text{Dado } y \in H, \quad y \in x + Ax + Bx \tag{3.4.6}$$

   tiene solución en $D(A) \cap D(B) = D(A)$. (3.4.6) es equivalente a:

$$x = (I + \lambda A)^{-1}(y - Bx).$$

   Pero la aplicación:

$$x \longrightarrow (I + \lambda A)^{-1}(y - Bx) = J_\lambda^A(y - Bx)$$

   es contracción estricta:

$$\begin{aligned} \|J_\lambda^A(y - Bx_1) - J_\lambda^A(y - Bx_2)\| &\leq \|(y - Bx_1) - (y - Bx_2)\| = \\ &= \|Bx_1 - Bx_2\| \leq L\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

   luego (3.4.6) tiene un único punto fijo, que es la solución buscada.

2. Supongamos que B es lipschitciana de razón $L > 1$. Para cualquier t positivo, tA y tB son maximales monótonos; además, tB es lipschitciano de razón tL. Tomando $t < \frac{1}{L}$, el operador tB será contracción estricta, luego $t(A + B) = tA + tB$ será maximal monótono (por lo demostrado en el apartado (a)). En consecuencia, el operador:

$$\frac{1}{t}(tA + tB) = A + B$$

   también será maximal monótono.

■

Corolario Si A y B son maximales monótonos, $A + B_\lambda$ y $A_\lambda + B$ son maximales monótonos.

DEMOSTRACIÓN: Inmediata, puesto que A_λ es maximal monótono y lipschitciano (cf. Teorema 3.4). ■

Teorema Sea φ una función convexa, s.c.i. y propia. Sean:

- el operador $A = \partial\varphi \Longrightarrow D(A) \subset D(\varphi) \subset \overline{D(\varphi)}$
- $\varphi_\lambda(x) = \inf\limits_{y\in H}\{\frac{1}{2\lambda}|y-x|^2 + \varphi(y)\}$, definida $\forall x \in H, \forall \lambda > 0$.

Entonces,

1. $\varphi_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}\|A_\lambda x\|^2 + \varphi(J_\lambda x), \quad \forall x \in H$
2. φ_λ es convexa, diferenciable Fréchet
3. $\partial\varphi_\lambda = A_\lambda$
4. $\varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x)$ cuando $\lambda \downarrow 0, \quad \forall x \in H$
5. $\overline{D(\varphi)} = \overline{D(A)}$.

Demostración: Recordemos que ψ es diferenciable Fréchet si existe la aplicación lineal $\psi'_a : H \longrightarrow V$ tal que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\psi(a+h)-\psi(a)-\psi'_a(h)\|_V}{\|h\|_H} = 0.$$

Además, toda función diferenciable Fréchet es diferenciable Gâteaux. En consecuencia,

$$x_0 = \arg\inf_{x\in H}\varphi_\lambda(x) = \arg\inf_{x\in H}\varphi(x).$$

1. Sabemos que la función:

$$y \longrightarrow \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2 + \varphi(y)$$

alcanza su mínimo en x_0 si y sólo si:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}(x-x_0) \in (\partial\varphi)(x_0) \\ \Longrightarrow\ & x \in x_0 + \lambda(\partial\varphi)(x_0) = (I+\lambda(\partial\varphi))(x_0) \\ \Longrightarrow\ & x = J_\lambda x. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}\|J_\lambda x - x\|^2 + \varphi(J_\lambda x) = \frac{1}{2\lambda}\lambda^2\|\frac{x - J_\lambda x}{\lambda}\|^2 + \varphi(J_\lambda x) =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\|A_\lambda x\|^2 + \varphi(J_\lambda x).$$

2.

3.

4.

5.

■

Definición Sea V un espacio de Banach y V' su dual. Sea la función:

$$\varphi : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$$

convexa, propia y s.c.i. Definimos la **función conjugada** (o **polar**) como:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : V' & \longrightarrow & (-\infty, +\infty] \\ & & \varphi^*(x) = \sup\limits_{y \in V}\{{}_{V'}\langle x, y\rangle_V - \varphi(y)\}. \end{array}$$

Corolario: Si $V = V'$ es un espacio de Hilbert, entonces:

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : V & \longrightarrow & (-\infty, +\infty] \\ & & \varphi^*(x) = \sup\limits_{y \in V}\{(x, y) - \varphi(y)\}. \end{array}$$

■

Propiedad: φ^* es convexa, propia y s.c.i., pues es la envolvente superior de funciones afines continuas.

Teorema: En un espacio de Hilbert H, $(\partial\varphi)^{-1}$ es el subdiferencial de φ^*, es decir:

$$y \in (\partial\varphi)(x) \Longleftrightarrow x \in \partial\varphi^*(y). \tag{3.4.7}$$

Demostración:

1. $(\partial\varphi)^{-1}$ es m.m.; por lo tanto,

$$x \in \partial\varphi^*(y) \Longrightarrow x \in (\partial\varphi)^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in (\partial\varphi)(x).$$

2. Recíprocamente, φ^* es convexa, propia, s.c.i.; por lo tanto, $\partial\varphi^*$ es m.m. Basta demostrar que $(\partial\varphi)^{-1} \subset \partial\varphi^*$.

   Sea:

$$\begin{aligned} y \in \partial\varphi(x) \Longleftrightarrow & x \in (\partial\varphi)^{-1}(y) \\ \varphi(\xi) - \varphi(x) \leq & (y, \xi - x), \quad \forall \xi \in H \\ (y, \xi) - \varphi(\xi) \leq & (y, x) - \varphi(x), \quad \forall \xi \in H. \end{aligned}$$

   Luego,

$$\varphi^*(y) = \sup_{\xi \in H}\{(y, \xi) - \varphi(\xi)\} \leq (y, x) - \varphi(x). \tag{3.4.8}$$

   Por otra parte,

$$\begin{aligned} \varphi^*(y) &= \sup_{\xi \in H}\{(y, \xi) - \varphi(\xi)\} \\ \Longrightarrow \varphi^*(y) &\geq (y, \xi) - \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in H. \end{aligned}$$

   En particular,

$$\varphi^*(y) \geq (y, x) - \varphi(x). \tag{3.4.9}$$

   De las ecuaciones (3.4.8) y (3.4.9) deducimos: $\varphi^*(y) = (y, x) - \varphi(x)$.

   Entonces, $\forall w \in H$,

$$\begin{aligned} \varphi^*(w) - \varphi^*(y) &\geq (w, x) - \varphi(x) - (y, x) + \varphi(x) \geq \\ &\geq (w, x) - (y, x) = (w - y, x). \end{aligned}$$

   Es decir, $x \in \partial\varphi^*(y)$.

$\blacksquare$

Teorema

1. $\partial\varphi + \partial\psi \subset \partial(\varphi + \psi)$

2. Sean V y H espacios de Banach, y sean:

   - $\varphi : H \longrightarrow (-\infty, +\infty]$
   - $B : V \longrightarrow H$, lineal y continua.

   Entonces, $B^*(\partial\varphi(Bu)) \subset \partial(\varphi \circ B)(u)$.

Demostración:

1. Sea $y \in \partial\varphi(x) + \partial\psi(x)$, es decir,

$$y = y_1 + y_2 \qquad \text{con} \quad y_1 \in \partial\varphi(x), \quad y_2 \in \partial\psi(x).$$

   Entonces,

$$\begin{cases} \varphi(\xi) - \varphi(x) \geq (y_1, \xi - x) & \forall \xi \in H \\ \psi(\xi) - \psi(x) \geq (y_2, \xi - x) & \forall \xi \in H \end{cases}$$

   Sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} (\varphi(\xi) + \psi(\xi)) - (\varphi(x) + \psi(x)) \geq& (y_1 + y_2, \xi - x), \quad \forall \xi \in H \\ (\varphi + \psi)(\xi) - (\varphi + \psi)(x) \geq& (y_1 + y_2, \xi - x), \quad \forall \xi \in H \\ \Longrightarrow & \; y_1 + y_2 \in \partial(\varphi + \psi)(x). \end{aligned}$$

   Naturalmente, si $\partial\varphi + \partial\psi$ es m.m.,

$$\partial\varphi + \partial\psi = \partial(\varphi + \psi).$$

2. Sea $y \in B^*(\partial\varphi(Bu))$. Entonces,

$$\begin{aligned} y = B^* z, \quad z \in \partial\varphi(Bu) \\ \varphi(\xi) - \varphi(Bu) \geq \langle z, \xi - Bu\rangle, \quad \forall \xi \in H. \end{aligned}$$

Tomando $\xi = Bv, \quad v \in V$,

$$\varphi(Bv) - \varphi(Bu) \geq \langle z, Bv - Bu \rangle, \quad \forall v \in V$$

$$\varphi(Bv) - \varphi(Bu) \geq {}_{V'}\langle B^*z, v - u \rangle_V, \quad \forall v \in V$$

$$(\varphi \circ B)(v) - (\varphi \circ B)(u) \geq {}_{V'}\langle B^*z, v - u \rangle_V, \quad \forall v \in V$$

$$\Longrightarrow y = B^*z \in \partial(\varphi \circ B)(u).$$

Una condición para la igualdad es que exista $x \in H$ donde φ sea finita y continua.

■

3.5. Ejemplos de subdiferenciales.

Sea H un espacio de Hilbert. Sea $C \subset H$ un convexo cerrado no vacío . Recordemos que su función indicatriz viene dada por:

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in C \\ +\infty & \text{si } \ x \notin C. \end{cases}$$

Propiedad: La función indicatriz I_C es convexa, propia y s.c.i.

DEMOSTRACIÓN: ■

Propiedad: El subdiferencial de la función indicatriz I_C viene dado por:

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{z \in H \quad / \quad (z, y - x) \leq 0, \quad \forall y \in C\} & \text{si } \ x \in C \\ \phi & \text{si } \ x \notin C. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición, tenemos:

$$\partial I_C(x) = \begin{cases} \{z \in H \quad / \quad I_C(y) - I_C(x) \geq (z, y - x), \quad \forall y \in H\} & \text{si } \ x \in C \\ \phi & \text{si } \ x \notin C. \end{cases}$$

Ahora bien, $I_C(x) = 0$, pues $x \in C$. Además,

- si $y \notin C, I_C(y) = +\infty > (z, y - x)$ y la desigualdad se cumple siempre
- si $y \in C, I_C(y) = 0 \geq (z, y - x)$.

■

Propiedad: La resolvente y aproximada Yosida del operador ∂I_C vienen dados, respectivamente, por:

1. $J_\lambda^{\partial I_C} = \Pi_C$
2. $(\partial I_C)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - \Pi_C)$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Sea $J_\lambda = (I + \lambda \partial I_C)^{-1}$.

$$\begin{aligned} y \in (I + \lambda \partial I_C)^{-1}(x) &\iff y + \lambda \partial I_C(y) \ni x \\ &\iff x - y \in \lambda \partial I_C(y) \\ &\iff \left(\frac{x - y}{\lambda}, z - y \right) \leq 0, \quad \forall z \in C. \end{aligned}$$

   Luego y es la proyección del elemento x sobre el convexo C.

2. Por definición,

$$(\partial I_C)_\lambda = \frac{I - J_\lambda^{\partial I_C}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(I - \Pi_C)$$

■

Comentario: $(\partial I_C)_\lambda$ es el subdiferencial de la función:

$$\begin{aligned} (I_C)_\lambda(x) &= \frac{1}{2\lambda} \left\{ \|x - \Pi_C x\|^2 + I_C(\Pi_C x) \right\} = \\ &= \frac{1}{2\lambda} \|x - \Pi_C x\|^2. \end{aligned}$$

(Regularizada de la función indicatriz). ■

Definición Se llama **función soporte** de un convexo a la conjugada de la función indicatriz del convexo: $\varphi = (I_C)^*$.

De dicha definición se deduce inmediatamente:

$$\varphi(x) = (I_C)^*(x) = \sup_{y\in H}\{(y,x) - I_C(x)\} = \sup_{y\in C}(y,x).$$

Proposición La aproximada Yosida del subdiferencial de la función soporte viene dada por:

$$(\partial\varphi)_\lambda(v) = \Pi_C(\frac{v}{\lambda}).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $p = (\partial\varphi)_\lambda(v)$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} & p \in (\partial\varphi)(v-\lambda p) \\ \text{(gracias a (3.4.7))} \iff & v - \lambda p \in (\partial I_C)(p) \\ \iff & v-\lambda p \in (\partial I_C)_{\frac{1}{\lambda}}(p + \frac{v}{\lambda} - p) = (\partial I_C)_{\frac{1}{\lambda}}(\frac{v}{\lambda}) \\ \iff & v - \lambda p \in \lambda(I - \Pi_C)(\frac{v}{\lambda}) = v - \lambda\Pi_(\frac{v}{\lambda}) \\ \iff & p = \Pi_C(\frac{v}{\lambda}). \end{aligned}$$

■

ejemplo Sean:

- $H = (L^2(\Omega))^d$
- $C = \{q \in H \quad / \quad |q(x)| \leq 1 \text{ c.p.t. en } \Omega\}$.

La función soporte de C será:

$$\varphi(p) = \sup_{q\in C}\int_\Omega p(x)q(x) = \int_\Omega |p(x)|.$$

En efecto, sea $\lambda(x)$ tal que:

$$\lambda_i(x) = \frac{p_i(x)}{|p(x)|} \Longrightarrow |\lambda(x)| = \sqrt{\sum_{i=1,d} \lambda_i^2(x)} = 1.$$

Tenemos, pues,

$$\varphi(p) \geq \int_\Omega \sum_{i=1,d} p_i(x) \frac{p_i(x)}{|p(x)|} = \int_\Omega |p(x)|.$$

Por otra parte, $\forall q \in C$,

$$\int_\Omega p(x)q(x) = \int_\Omega \sum_{i=1,d} p_i(x)q_i(x) \leq \int_\Omega |p(x)||q(x)| \leq \int_\Omega |p(x)|$$

$$\varphi(p) = \sup_{q\in C} \int_\Omega p(x)q(x) = \int_\Omega |p(x)|.$$

■

Capítulo 4

Ejemplos físicos.

4.1. Torsión elastoplástica. Ley de Hencky.

Sean:

- un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \Re^2$
- $V = H_0^1(\Omega)$
- $V' = H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$)
- $H = L^2(\Omega)^2$
- un operador B:

$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & \nabla v \end{array}$$

- el operador dual B^*:

$$\begin{array}{rcl} B^* : H & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & -\nabla q \end{array}$$

- $K = \{v \in V \,/\, |\nabla v(x)| \leq k \text{ ctp en} \Omega\}$.

Formulación del problema:

(a) Sea $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$.

Hallar $u \in V$ t. q. $J(u) = \inf J(v) \quad \forall v \in K$.

(b) Sea el conjunto $C = \{q \in L^2(\Omega)^2 \quad / \quad |q(x)| \leq k \text{ ctp en } \Omega\}$.

Sea $F(v) = J(v) + I_C(Bv) = \begin{cases} J(v) & \text{si} \quad Bv \in C \\ +\infty & \text{si} \quad Bv \notin C. \end{cases}$

Hallar $u \in V$ t. q. $F(u) = \inf\limits_{v \in V} F(v)$.

(c) Sea $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$.

Hallar $u \in V$ t. q.,

$$a(u, v-u) + I_C(Bv) - I_C(Bu) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in V.$$

(d) Puesto que I_C es finita y continua en $q = 0$, p. ej.

Hallar $u \in V$ t. q. $\quad f - Au \in B^*\partial\varphi(Bu)$.

(e) Hallar $u \in V$ t. q.

$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ p \in \partial\varphi(Bu) \end{cases}$$

es decir,

Hallar $u \in V$ t. q.

$$\begin{cases} -\triangle u - \nabla p = f \\ p \in \partial I_C(\nabla u). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

4.2. Membrana con obstáculo. Flujo en medio poroso.

Sean:

- $V = H_0^1(\Omega), \quad \Omega \subset \Re^2$
- $V' = H^{-1}(\Omega)$
- $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$
- $\langle L, v\rangle = (f,v)$
- $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \quad / \quad v(x) \geq g(x) \text{ ctp en } \Omega\}$
- $\psi = I_K$.

Formulación del problema:

(a) Sea $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv$.

Hallar $u \in V$ t. q.

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

(c) Hallar $u \in K$ t.q.

$$a(u, v-u) + I_K(v) - I_K(u) \geq (f, v-u).$$

(d) $f - Au \in \partial I_K(u)$.

(e) Hallar $u \in V$ t.q.

$$\begin{cases} Au + p = f \\ p \in \partial I_K(u). \end{cases}$$

4.3. Flujo de fluido tipo Bingham en un cilindro.

Sean:

- $V = H_0^1(\Omega)$

- $V' = H^{-1}(\Omega)$
- $H = L^2(\Omega)^d$
- un operador B:

$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & \nabla v \end{array}$$

- el operador traspuesto B^*:

$$\begin{array}{rcl} B^* : H & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & -\nabla q \end{array}$$

- $a(u, v) = \nu \int_\Omega \nabla u \nabla v$
- $\langle L, v\rangle = \int_\Omega fv$
- $C = \{q \in H \quad / \quad |q(x)| \leq 1 \text{ ctp en } \Omega\}$
- $\varphi(q) = \int_\Omega |q(x)|dx$ (función soporte de C).

Formulación del problema:

(c) Hallar $u \in V$ t. q.

$$a(u, v - u) + \varphi(Bv) - \varphi(Bu) \geq \langle L, v - u\rangle.$$

(d) Hallar $u \in V$ t. q.

$$f - Au \in B^* \partial\varphi(Bu).$$

(e) Hallar $u \in V$ t. q.

$$\begin{cases} Au + B^* p = f \\ p \in \partial\varphi(Bu). \end{cases}$$

4.4. Problema de Stefan en dos fases.

Sean:

- $\langle L, v \rangle = \int_\Omega fv$
- $C = \{v \in H^1(\Omega) \quad / \quad |v(x)| \leq 1\}$
- $\psi(v) = \lambda \int_\Omega |v| dx \quad (\lambda = \text{valor latente}).$

Formulación del problema:

(c) Utilizando la transformación de Duvaut,

Hallar $u \in V$ t. q.,

$$\langle Au, v - u \rangle + \psi(v) - \psi(u) \geq \langle L, v - u \rangle, \quad \forall v \in V$$

donde A es fuertemente monótono unívoco.

(d) Hallar $u \in V$ t. q. $\qquad f - Au \in \partial\psi(u).$

(e) Hallar $u \in V$ t. q.

$$\begin{cases} Au + p = f \\ p \in \partial\psi(u). \end{cases}$$

4.5. Problema lineal con restricciones lineales. Ecuaciones de Stokes.

Sean:

- $V = H_0^1(\Omega)^d$
- $V' = H^{-1}(\Omega)^d$

- $H = L^2(\Omega)$
- un operador B:

$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & -\nabla v \end{array}$$

- el operador traspuesto B^*:

$$\begin{array}{rcl} B^* : H & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & \nabla q \end{array}$$

Sea φ la función indicatriz del convexo $\{ \ 0 \ \}$, es decir,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : H & \longrightarrow & \Re \cup \{+\infty\} \\ q & \longrightarrow & \varphi(q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \ \ q = 0 \\ +\infty & \text{si} \ \ q \neq 0. \end{cases} \end{array}$$

Propiedad φ es convexa, propia y s.c.i.

Propiedad $\partial\varphi(p) = \begin{cases} L^2(\Omega) & \text{si} \ \ p = 0 \\ \phi & \text{si} \ \ p \neq 0. \end{cases}$

Propiedad $-\nabla u = Bu = 0 \Longleftrightarrow p \in (\partial\varphi)(Bu)$.

Formulación del problema (problema de Stokes):

(0) $\begin{cases} -\nu\triangle u + \nabla p = f \\ -\nabla u = 0. \end{cases}$

(e) Utilizando la última propiedad,

$$\begin{cases} -\triangle u + \nabla p = f \\ p \in (\partial\varphi)(-\nabla u) \end{cases} \tag{4.5.1}$$

o bien,

$$f + \triangle u \in \nabla(\partial\varphi(-\nabla u))$$

o bien,

$$f - Au \in B^*(\partial\varphi(Bu)).$$

4.6. Condiciones de contorno no homogéneas.

Sean:

- $V = H^1(\Omega)$
- $V' = (H^1(\Omega))'$
- $H = L^2(\Omega)$
- el operador *varphi*:

$$\begin{aligned} \varphi : L^2(\Gamma) &\longrightarrow \Re \cup \{+\infty\} \\ v &\longrightarrow \varphi(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = u_0 \\ +\infty & \text{si } v \neq u_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Propiedad El subdiferencial de φ viene dado por:

$$\partial\varphi = \begin{cases} L^2(\Gamma) & \text{si } v = u_0 \\ \phi & \text{si } v \neq u_0. \end{cases}$$

■

Sea la aplicación traza, $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$.

Formulación del problema:

(1) Puede expresarse de la manera siguiente:

$$\begin{cases} -\triangle u = f \\ u|_{\Gamma} = u_0. \end{cases} \tag{4.6.1}$$

(c) Encontrar u t. q.

$$\langle \triangle u, v-u\rangle + \varphi(\gamma v) - \varphi(\gamma u) \geq \langle f, v-u\rangle.$$

(e) Hallar u t. q.

$$\begin{cases} -\triangle u + \gamma^* p = f \\ p \in \partial\varphi(\gamma u). \end{cases}$$

4.7. Flujo no lineal en medio poroso. Flujo potencial compresible.

Sean:

- $W^{1,s} = \{v \in L^s(\Omega) \quad / \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^s(\Omega), i = 1, 2, \ldots, d\}$
- $V = W^{1,s}_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \{v \in W^{1,s} \quad / \quad v|_{\Gamma_1} = 0\}$
- $V' = (W^{1,s}_{0,\Gamma_1})'$
- $H = (L^s(\Omega))^d$
- $K = \{v \in W^{1,s} \quad / \quad v|_{\Gamma_1} = u_0\}$
- el operador A:

$$\begin{array}{rcl} A : V & \longrightarrow & V' \\ v & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- el operador B:

$$\begin{array}{rcl} B : V & \longrightarrow & H \\ v & \longrightarrow & \nabla v \end{array}$$

- el operador traspuesto B^*:

$$\begin{array}{rcl} B^* : H^1 & \longrightarrow & V' \\ q & \longrightarrow & -\nabla q \end{array}$$

Formulación del problema:

(1) Flujo lineal. Hallar u t. q.

$$\begin{cases} -\nabla(k\nabla u) = f \\ u|_{\Gamma_1} = u_0 \\ k\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g. \end{cases}$$

(2) Flujo no lineal: $k = k(u) = k_n|\nabla u|^n$. Tomaremos $k_n = 1$.

(a) $J(v) = \frac{1}{s}\int_\Omega |\nabla v|^s - \int_\Omega fv - \int_{\Gamma_2} gv$, donde $s = n + 2$.

Hallar u t. q. $J(u) = \inf\limits_{v\in K} J(v)$.

4.8. Elastoplasticidad.

Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \int_\Omega f_i w_i + \int_\Gamma g_i w_i \quad \forall w$$

Criterio de Plasticidad (Von Mises):

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D - k^2 \leq 0$$

Ley de Comportamiento (Prandtl - Reuss):

$$a(\dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(\dot{u}), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall\tau \in H$$

donde:

- $a(\tau, \sigma) = \int_\Omega A_{ijkl}\tau_{ij}\sigma_{kl}$
- $a(\tau, \tau) \geq \mu\|\tau\|^2 = \mu \int_\Omega \tau_{ij}\tau_{ij}$
- $H = \{\tau \in L^2(\Omega)^9 \quad / \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$
- $K = \{\tau \in H \quad / \quad F(\tau(x)) \leq 0$ ctp en $\Omega\}$.

Condiciones Iniciales: $\sigma(0) = 0$.

Formulación del problema:

(c) $a(\dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(\dot{u}), \tau - \sigma) + I_K(\tau) - I_K(\sigma) \geq 0$

(e) Sea $a(\tau, \sigma) = (A\tau, \sigma)$. Entonces,

$$A\dot{\sigma} - \varepsilon(\dot{u}) \in \partial I_K(\sigma)$$

es decir,

$$\begin{cases} A\dot{\sigma} - \varepsilon(\dot{u}) = \lambda \\ \lambda \in \partial I_K(\sigma) \end{cases}$$

donde

- $\varepsilon(\dot{u})$ = incremento de deformación elástica
- λ = incremento de deformación plástica.

Comentario Si sustituimos ∂I_K por su aproximada Yosida $(\partial I_K)_\mu$, tenemos la viscoplasticidad. ∎

Capítulo 5

Métodos de resolución numérica.

5.1. El método de penalización.

Consiste en sustituir la ecuación multívoca

$$Au + B^*\partial\varphi(Bu) \ni f$$

por la ecuación unívoca

$$Au_\lambda + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda) = f.$$

Teorema Con la hipótesis

$$a(v,v) = \langle Av, v\rangle \geq \alpha\|v\|^2, \quad \alpha \geq 0, \quad \forall v \in V$$

, obtenemos

$$\|u - u_\lambda\| \leq C\sqrt{\lambda}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos las ecuaciones:

$$Au + B^*(\partial\varphi)(Bu) \ni f$$
$$Au_\lambda + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda) = f.$$

Pongamos:

$$\begin{cases} p \in (\partial\varphi)(Bu) \Longleftrightarrow p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) \\ p_\lambda \in (\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda). \end{cases}$$

Tenemos así:

$$\begin{cases} Au + B^*p = f \\ Au_\lambda + B^*p_\lambda = f. \end{cases}$$

Restando obtenemos: $A(u - u_\lambda) + B^*(p - p_\lambda) = 0$.

Y, multiplicando por $u - u_\lambda$,

$$\langle A(u - u_\lambda), u - u_\lambda\rangle + \langle B^*(p - p_\lambda), p - p_\lambda\rangle = 0$$
$$\langle A(u - u_\lambda), u - u_\lambda\rangle + \langle p - p_\lambda, B(p - p_\lambda)\rangle = 0.$$

Por ser A coercivo, $\langle A(u - u_\lambda), u - u_\lambda\rangle \geq \alpha\|u - u_\lambda\|^2$ luego,

$$\alpha\|u - u_\lambda\|^2 + (p - p_\lambda, B(p - p_\lambda)) \leq 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |p - p_\lambda|^2 &= |(\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) - (\partial\varphi)_\lambda(Bu_\lambda)|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda}(p - p_\lambda, B(u - u_\lambda) + \lambda p) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(p - p_\lambda, B(u - u_\lambda)) + (p - p_\lambda). \end{aligned}$$

De donde se deduce,

$$\begin{aligned} |p - p_\lambda|^2 &\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u - u_\lambda\|^2 + (p - p_\lambda, p) \leq \\ &\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u - u_\lambda\|^2 + |p - p_\lambda|^2 + \frac{1}{4}p^2. \end{aligned}$$

Luego $\|u - u_\lambda\|^2 \leq \frac{\lambda}{4\alpha} p^2 = \frac{p^2}{4\alpha}\lambda$.

Tomando $C = \frac{|p|}{\sqrt{2\alpha}}$, siendo $p \in (\partial\varphi)^0(Bu)$, obtenemos la estimación:

$$\|u - u_\lambda\| \leq C\sqrt{\lambda}.$$

■

nota En la demostración anterior, hemos utilizado la siguiente propiedad:

$$ab = \varepsilon a \frac{1}{\varepsilon} b \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon^2} b^2.$$

Tomando en este caso $\varepsilon = \sqrt{2}$, tenemos $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$. ■

5.1.1. Aplicación al problema de Stokes.

Las ecuaciones de Stokes deducidas anteriormente son (cf. (4.5.1)):

$$\begin{cases} -\nu\triangle u + \nabla p = f \\ p \in \partial\varphi(-\nabla u). \end{cases}$$

El problema penalizado será:

$$\begin{cases} -\nu\triangle u_\lambda + \nabla p_\lambda = f \\ p_\lambda = \partial\varphi(-\nabla u_\lambda). \end{cases}$$

Recordemos que φ es la función indicatriz del convexo $C = \{0\}$:

$$\varphi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ +\infty & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Puesto que se trata de una función indicatriz, su aproximada Yosida viene dada por (Nota 3.5):

$$\varphi_\lambda(p) = \frac{1}{2\lambda}\|p - \Pi_C p\|^2.$$

Pero $\Pi_0 p = 0$, luego,

$$\varphi_\lambda(p) = \frac{1}{2\lambda}|p|^2$$

de donde,

$$(\partial\varphi_\lambda(p), q) = \frac{1}{\lambda}(p, q), \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

Tenemos, pues,

$$p_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\nabla u_\lambda$$

y la ecuación de Stokes penalizada es:

$$-\nu\triangle u_\lambda - \frac{1}{\lambda}\nabla(\nabla u_\lambda) = f.$$

5.1.2. Aplicación al problema lineal con condiciones no homogéneas.

El problema expuesto anteriormente es (cf. (4.6.1)):

$$\begin{cases} -\triangle u = f \\ u|_\Gamma = u_0. \end{cases}$$

El problema penalizado será:

$$\begin{cases} -\triangle u + \gamma^* p = f \\ p \in \partial\varphi(\gamma u) \end{cases}$$

donde φ es la función indicatriz del convexo $\{u_0\}$.

De manera similar al problema de Stokes, deducimos:

$$\varphi_\lambda(v) = \frac{1}{2\lambda}\int_\Gamma (v - u_0)^2$$

$$(\partial\varphi_\lambda(u), v) = \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma (u - u_0)v, \quad \forall u, v \in L^2(\Gamma).$$

En consecuencia, el problema penalizado será, en forma variacional:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma (u-u_0)\gamma v = \int_\Omega fv.$$

5.2. Un primer algoritmo (A1) para resolver (P).

Recordemos que el problema planteado era:

$$(P) \qquad \begin{cases} Au + B^*p = f & \text{en } V' \\ p \in \partial\varphi(Bu) & \text{en } H. \end{cases}$$

El problema es equivalente a:

$$(P) \qquad \begin{cases} Au + B^*p = f \\ p = (\partial\varphi)_\lambda (Bu + \lambda p). \end{cases}$$

Ello sugiere el siguiente algoritmo $(A1)$:

- Sea p^0 inicial, arbitrario.
- Obtenido p^m, resolvemos:

$$\begin{cases} Au^m = f - B^*p^m \\ p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda (Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

nota Si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y φ derivable, el anterior algoritmo es el algoritmo de Uzawa para la búsqueda del punto silla del lagrangiano:

$$L(v,q) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle L, v\rangle + (q, \varphi'(Bv))$$
$$L(u,q) \leq L(u,p) \leq L(v,p).$$

■

TeoremaCon la hipótesis

$$a(v,v) = \langle Av, v\rangle \geq \alpha\|v\|^2, \quad \alpha \geq 0, \quad \forall v \in V$$

tenemos, para un adecuado valor de λ,

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\| = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $(\partial\varphi)_\lambda$ es lipschitciano de constante $\frac{1}{\lambda}$,

$$\begin{aligned}
|p - p^{m+1}|^2 &= |(\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) - (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m)|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2}|(Bu + \lambda p) - (Bu^m + \lambda p^m)|^2 = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m) + \lambda(p - p^m)|^2 = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2}{\lambda}(B(u - u^m), (p - p^m)) + |p - p^m|^2.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 - \frac{2}{\lambda}\left(B(u - u^m), (p - p^m)\right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
Au + B^*p &= f \\
Au^m + B^*p^m &= f \\
\Longrightarrow A(u - u^m) &= B^*(p^m - p).
\end{aligned}$$

Tenemos así,

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u^m\|^2 &\leq (A(u - u^m), u - u^m) = \\
&= \langle B^*(p^m - p), u - u^m\rangle = \\
&= (p^m - p, B(u - u^m)) = \\
&= -\left(B(u - u^m), p - p^m\right).
\end{aligned}$$

De donde,

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2\alpha}{\lambda}\|u - u^m\|^2.$$

Por otra parte, B es un operador lineal y continuo, luego existe una constante c t. q.

$$|Bv| \leq c\|v\|$$

y entonces,

$$-\frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 \geq -\frac{c^2}{\lambda^2}\|u - u^m\|^2.$$

Tenemos así,

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq \frac{1}{\lambda}(2\alpha - \frac{c^2}{\lambda})\|u - u^m\|^2.$$

Escogiendo λ convenientemente, de forma que:

$$2\alpha - \frac{c^2}{\lambda} > 0$$

tendremos

$$|p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 \geq c(\lambda)\|u - u^m\|^2 \geq 0$$

donde $c(\lambda)$ es una constante positiva, tendremos finalmente que la sucesión $|p - p^m|^2$ es decreciente.

Por otra parte, dicha sucesión está acotada inferiormente:

$$|p - p^m|^2 \geq 0.$$

En consecuencia, será convergente y por lo tanto de Cauchy, de modo que

$$\lim_{m\to\infty} |p - p^m|^2 - |p - p^{m+1}|^2 = 0$$

y, de aquí,

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\|^2 = 0.$$

■

5.2.1. Aplicación al problema de torsión elastoplástica.

Recordemos el problema (4.1.1):

$$\begin{cases} -\triangle u - \nabla p = f & \text{en } H^{-1}(\Omega) \\ p \in \partial I_C(\nabla u) & \text{en } (L^2(\Omega))^2 \end{cases}$$

donde

$$C = \left\{ q \in (L^2(\Omega))^2 \quad / \quad |q(x)| \leq k \text{ ctp en } \Omega \right\}.$$

El algoritmo $A1$ será:

- Dado p^0 inicial
- Obtenido p^m, resolvemos:

$$\begin{cases} -\triangle u^m = f + \nabla p^m \\ p^{m+1} = \frac{1}{\lambda}(I - \Pi_C)(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

5.2.2. Aplicación al fluido Bingham.

Podemos escribir el problema como:

$$\begin{cases} -\triangle u - \nabla p = f & \text{en } H^{-1}(\Omega) \\ p \in \partial \varphi(\nabla u) & \text{en } (L^2(\Omega))^2 \end{cases}$$

donde φ es la función soporte de:

$$C = \left\{ q \in (L^2(\Omega))^2 \quad / \quad |q(x)| \leq 1 \text{ ctp en } \Omega \right\}.$$

El algoritmo $A1$ será:

- Dado p^0 inicial
- Obtenido p^m, resolvemos:

$$\begin{cases} -\triangle u^m = f + \nabla p^m \\ p^{m+1} = \Pi_C(\frac{\nabla u^m}{\lambda} + p^m). \end{cases}$$

5.2.3. Aplicación al problema de Stefan.

Sean:

- el operador identidad $I : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$
- $\psi(v) = \varphi(Iv)$
- $K = \{v \in (L^2(\Omega))^2 \quad / \quad |v(x)| \leq 1 \text{ ctp en } \Omega\}$

El algoritmo $A1$ será:

- Dado p^0 inicial
- Obtenido p^m, resolvemos:

$$\begin{cases} Au^m = f - I^*p^m \\ p^{m+1} = \Pi_K(\frac{u^m}{\lambda} + \lambda p^m). \end{cases}$$

o bien, en forma variacional,

- Dado p^0 inicial
- Obtenido p^m, resolvemos:

$$\begin{cases} \langle Au^m, v\rangle = (f, v) - L(p, v) \\ p^{m+1} = \Pi_K(\frac{u^m}{\lambda} + \lambda p^m). \end{cases} \qquad \text{L = valor latente}$$

donde el producto escalar es $(u, v) = \int_\Omega uv$.

5.3. Una clase general de operadores: M(ω)-maximales.

Sea H un espacio de Hilbert. Sea $\omega \in \Re$.

definición Un operador multívoco G en H es **M(ω)- maximal** si $G+\omega I$ es maximal monótono.

Propiedad Sea G $M(\omega)$-maximal. Si $\lambda\omega < 1$, entonces el operador $J_\lambda = (I+\lambda G)^{-1}$ está definido en todo H y es unívoco. Además, es monótono y lipschitciano de constante $(1-\lambda\omega)^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{aligned}(I+\lambda G)^{-1} &= (I+\lambda G+\lambda\omega I-\lambda\omega I)^{-1} = \\ &= [(1-\lambda\omega)I+\lambda(G+\omega I)]^{-1} = \\ &= (1-\lambda\omega)^{-1}[I+\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}(G+\omega I)]^{-1}.\end{aligned}$$

Como $G+\omega I$ es maximal monótono, el operador:

$$[I+\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}(G+\omega I)]^{-1}$$

está definido sobre todo H y es unívoco siempre que:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda\omega} > 0 \Longleftrightarrow \lambda\omega < 1.$$

Como I es unívoco, $G+\omega I$ también lo será.

$[I+\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}(G+\omega I)]^{-1}$ es, además, una contracción (cf. Propiedad 3.4), luego

$$J_\lambda = (1-\lambda\omega)^{-1}[I+\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}(G+\omega I)]^{-1}$$

es lipschitciano de constante $(1-\lambda\omega)^{-1}$.

■

Sea G un operador $M(\omega)$-maximal.

definición Definimos la aproximada Yosida de G como:

$$G_\lambda = \frac{I-J_\lambda}{\lambda}$$

siempre que $\lambda\omega < 1$.

Propiedad G_λ es $M\left(\frac{\omega}{1-\lambda\omega}\right)$-maximal.

DEMOSTRACIÓN:

1. El operador $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es monótono. En efecto,

$$G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I = \frac{I-J_\lambda}{\lambda} + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\omega}{1-\lambda\omega}\right) I - \frac{1}{\lambda} J_\lambda =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\lambda\omega} I - \frac{1}{\lambda} J_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\lambda\omega} I - J_\lambda\right).$$

   Además, J_λ es lipschitciano, luego

$$(J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2) \leq (1-\lambda\omega)^{-1}(x_1 - x_2, x_1 - x_2) =$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\omega}\|x_1 - x_2\|^2.$$

   Entonces,

$$\left(\frac{x_1}{1-\lambda\omega} - J_\lambda x_1 - \frac{x_2}{1-\lambda\omega} + J_\lambda x_2, x_1 - x_2\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\omega}(x_1 - x_2, x_1 - x_2) - (J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2) =$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\omega}\|x_1 - x_2\|^2 - (J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

   luego $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es monótono.

2. Además, $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es maximal, ya que (cf. Teorema 3.4):

   - $D(G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I) = D(G_\lambda) = H$
   - $G_\lambda + \frac{\omega}{1-\lambda\omega} I$ es unívoco, pues G_λ, I son unívocos

- también es hemicontinuo, pues J_λ es hemicontinuo:

$$\|J_\lambda((1-t)x+ty)-J_\lambda x\| \leq \frac{1}{1-\lambda\omega}\|(1-t)x+ty-x\| = $$
$$= \frac{|t|}{1-\lambda\omega}\|x-y\|.$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to 0}\|J_\lambda((1-t)x+ty)-J_\lambda x\| = 0.$$

■

Propiedades: Si G es M(ω)-maximal, se verifican las siguientes mayoraciones:

1. $\frac{1-2\lambda\omega}{\lambda^2}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 + \|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|v_1-v_2\|^2$
2. $\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, v_1 - v_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|$.

DEMOSTRACIÓN: Por ser $G+\omega I$ maximal monótono, se cumple:

$$(y_1-y_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) \geq 0 \tag{5.3.1}$$
$$\forall y_k \in (G+\omega I)(J_\lambda v_k) = G(J_\lambda v_k) + \omega J_\lambda v_k \quad (k=1,2).$$

Además,

$$G_\lambda v \in G(J_\lambda v).$$

Sean $z_k = G_\lambda v_k \in G(J_\lambda v_k) \quad (k=1,2)$. Entonces,

$$(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = (z_1 - z_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) =$$
$$= (z_1 + \omega J_\lambda v_1 - \omega J_\lambda v_1 - z_2 - \omega J_\lambda v_2 + \omega J_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) =$$
$$= ((z_1 + \omega J_\lambda v_1) - (z_2 + \omega J_\lambda v_2), J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) - \omega(J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) =$$
$$= (y_1 - y_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) - \omega\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2$$

donde $y_k = z_k + \omega J_\lambda v_k \quad (k=1,2)$.

Utilizando (5.3.1), obtenemos,

$$\begin{aligned}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = (z_1 - z_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) \geq \\ \geq -\omega \|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2.\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

1. Por definición de la aproximada Yosida, $\lambda G_\lambda v + J_\lambda v = (I - J_\lambda)v + J_\lambda v = v$ luego,

$$\lambda G_\lambda v_1 + J_\lambda v_1 = v_1$$

$$\lambda G_\lambda v_2 + J_\lambda v_2 = v_2$$

$$\Longrightarrow G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2 + \frac{1}{\lambda}(J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = \frac{v_1 - v_2}{\lambda}.$$

   Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned}\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 + \\ + \frac{2}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) = \frac{1}{\lambda^2}\|v_1 - v_2\|^2.\end{aligned}$$

   Luego, utilizando (5.3.2),

$$\begin{aligned}\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 - \\ - \frac{2\omega}{\lambda}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|v_1 - v_2\|^2\end{aligned}$$

   que es la propiedad 1.

2. Tenemos:

$$\begin{aligned}\|G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2\|^2 = \left(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, \frac{I - J_\lambda}{\lambda} v_1 - \frac{I - J_\lambda}{\lambda} v_2\right) = \\ = \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, v_1 - v_2) - \\ - \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2) \leq \\ \leq \frac{1}{\lambda}(G_\lambda v_1 - G_\lambda v_2, v_1 - v_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda v_1 - J_\lambda v_2\|^2\end{aligned}$$

   también gracias a (5.3.2).

■

Nota: En particular, observemos que si $\lambda\omega \leq 1/2$, entonces G_λ es lipschitciano de constante $1/\lambda$. En efecto, en la propiedad (1.), si $\lambda\omega \leq 1/2$, entonces $\frac{1-2\lambda\omega}{\lambda^2} \geq 0$, y de ahí el resultado. ■

Propiedad: Sea G un operador M(ω)-maximal. Si $\lambda\omega < 1$, tenemos la equivalencia:

$$u \in G(v) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in G_\lambda(v + \lambda u).$$

Demostración: Idéntica al caso $\omega = 0$. ■

Propiedad: Sea G M(ω)-maximal. Sean $\lambda\omega < 1$ y $v_1, v_2, w_1, w_2 \in H$. Entonces,

$$\|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}\|w_1 - w_2 - \lambda(v_1 - v_2)\|^2 + \\ + \|v_1 - v_2\|^2 + \frac{2\omega}{\lambda}\|J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2\|^2.$$

Demostración: Recordemos que:

$$G_\lambda = \frac{I - J_\lambda}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad J_\lambda = I - \lambda G_\lambda$$

Tenemos entonces:

$$\|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2)\|^2 =$$

$$= \|v_1 - v_2 - \frac{1}{\lambda}(w_1 - w_2) + (G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\|\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2) + \lambda(G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\|\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2)\|^2 + \|G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\|^2 +$$

$$+\frac{2}{\lambda}\left(\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2), G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\right) \leq$$

$$\text{(utilizando la Propiedad ??)} \ \leq \frac{1}{\lambda^2}\|\lambda(v_1 - v_2) - (w_1 - w_2)\|^2 +$$

$$+\frac{1}{\lambda}(G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2, w_1 - w_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2\|^2 +$$

$$+2\left(v_1 - v_2, G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\right) - \frac{2}{\lambda}\left(w_1 - w_2, G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\right).$$

Pero,

$$2(v_1 - v_2, G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2) \leq \|v_1 - v_2\|^2 + \|G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2\|^2 \leq$$

$$\leq \|v_1 - v_2\|^2 + \frac{1}{\lambda}(G_\lambda w_1 - G_\lambda w_2, w_1 - w_2) + \frac{\omega}{\lambda}\|J_\lambda w_1 - J_\lambda w_2\|^2$$

y entrando en la desigualdad anterior se obtiene la mayoración buscada. ■

5.4. Una modificación del algoritmo A1: el algoritmo A2.

Sea el problema general en la forma:

$$f - Au \in B^*\partial\varphi(Bu).$$

Dado $\omega \in \Re$, podemos poner:

$$f - Au - \omega B^*Bu \in B^*\partial\varphi(Bu) - \omega B^*Bu$$

es decir,

$$f - Au - \omega B^*Bu \in B^*(\partial\varphi - \omega I)(Bu).$$

Llamando $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ y $p \in G^\omega(Bu)$, el problema se escribe:

Hallar u t. q.

$$\begin{cases} Au + \omega B^*Bu = f - B^*p \\ p \in G^\omega(Bu). \end{cases}$$

Si podemos definir la aproximación Yosida G^ω_λ de G^ω, el problema es equivalente a:

$$\begin{cases} Au + \omega B^*Bu = f - B^*p \\ p = G^\omega_\lambda(Bu + \lambda p). \end{cases}$$

Un algoritmo (A2) adaptado a este problema es el siguiente:

- Sea p^0 inicial, arbitrario
- Obtenido p^m, calculamos u^m, p^{m+1} como solución de:

$$\begin{cases} Au^m + \omega B^*Bu^m = f - B^*p^m \\ p^{m+1} = G^\omega_\lambda(Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

Lema 1. *Sea φ una función convexa módulo β, es decir:*

$$\varphi((1-t)v_1 + tv_2) \leq (1-t)\varphi(v_1) + t\varphi(v_2) - \\ - \frac{1}{2}\beta t(1-t)|v_1 - v_2|^2, \quad \beta \geq 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Entonces el operador $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ es M($\omega - \beta$)-maximal.

DEMOSTRACIÓN*: Tenemos, $\forall t \in (0,1)$:*

$$\varphi(u + t(v-u)) \leq (1-t)\varphi(u) + t\varphi(u) - \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2.$$

Por otra parte,

$$\varphi(u+t(v-u))-\varphi(u) \geq (\partial\varphi(u), t(v-u)) = t\,(\partial\varphi(u), v-u)$$
$$\Longrightarrow \varphi(u+t(v-u)) \geq \varphi(u)+t(\partial\varphi(u), v-u)$$

de donde,

$$(1-t)\varphi(u)+t\varphi(v)-\frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2 \geq \varphi(u)+t(\partial\varphi(u), v-u)$$
$$\Longrightarrow t(\partial\varphi(u), u-v) \geq \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2+t(\varphi(u)-\varphi(v)).$$

Intercambiando $\{u, v\}$*, tenemos:*

$$t(\partial\varphi(v), v-u) \geq \frac{1}{2}\beta t(1-t)|u-v|^2+t(\varphi(v)-\varphi(u)).$$

Sumando y dividiendo por t*, y haciendo* $t=0$*,*

$$(\partial\varphi(u)-\partial\varphi(v), u-v) \geq \beta(1-t)|u-v|^2$$
$$(\partial\varphi(u)-\partial\varphi(v), u-v) \geq \beta|u-v|^2.$$

Es decir, $\partial\varphi$ *es fuertemente monótono y, en consecuencia, el operador* $\partial\varphi-\beta I = G^\omega+(\omega-\beta)I$ *es maximal monótono. Finalmente se deduce que el operador*

$$G^\omega = \partial\varphi-\omega I$$

es $M(\omega-\beta)$*-maximal.*

■

Teorema Con las hipótesis siguientes:

1. $a(v,v)=\langle Av, v\rangle \geq \alpha\|v\|^2, \quad \alpha \geq 0, \quad \forall v \in V$

2. φ es convexa módulo β

3. o bien $\alpha > 0$ o bien B^*B es un isomorfismo de V en V', es decir:
$$\|u - u^m\| \leq c\|B^*B(u - u^m)\|_{V'}$$
4. $\lambda(\omega - \beta) \leq 1/2$
5. $0 \leq \varepsilon_1 \leq \frac{1}{\lambda} \leq \varepsilon_2 \leq 2\left(\omega + \frac{\alpha}{\|B\|^2}\right)$

se tiene:
$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\| = 0.$$

Demostración: Recordemos el algoritmo $A2$:
$$\begin{cases} Au^m + \omega B^*Bu^m = f - B^*p^m \\ p^{m+1} = G^\omega_\lambda(Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

Gracias al lema anterior, el operador $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ es M($\omega - \beta$)-maximal. Por lo tanto, podemos aplicar la Propiedad **??** con:
$$\begin{cases} v_1 = Bu + \lambda p \\ v_2 = Bu^m + \lambda p^m \end{cases} \qquad \begin{cases} G^\omega_\lambda(Bu + \lambda p) = p \\ G^\omega_\lambda(Bu^m + \lambda p^m) = p^{m+1} \end{cases}$$
para obtener:
$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\lambda(\omega - \beta)}{\lambda^2}|J^\omega_\lambda(Bu + \lambda p) - J^\omega_\lambda(Bu^m + \lambda p^m)|^2 + |p - p^{m+1}|^2 \leq \\ \leq \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m) + \lambda(p - p^m)|^2 = \\ = \frac{1}{\lambda^2}|B(u - u^m)|^2 + \frac{2}{\lambda}\left(B(u - u^m), p - p^m\right) + |p - p^m|^2. \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Por otra parte,
$$Au + \omega B^*Bu = f - B^*p$$
$$Au^m + \omega B^*Bu^m = f - B^*p^m.$$

Restando y multiplicando por $u - u^m$, obtenemos:

$$A(u-u^m) + \omega B^*B(u-u^m) = B^*(p^m - p)$$

$$\langle A(u-u^m), u-u^m\rangle + \omega\langle B^*B(u-u^m), u-u^m\rangle = \langle B^*(p^m-p), u-u^m\rangle$$

$$\langle A(u-u^m), u-u^m\rangle + \omega(B(u-u^m), B(u-u^m)) = (p^m-p, B(u-u^m))$$

$$\alpha\|u-u^m\|^2 + \omega|B(u-u^m)|^2 \leq -(p-p^m, B(u-u^m)) \tag{5.4.2}$$

De la ecuación (5.4.1), tenemos:

$$\begin{aligned}|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 \geq{}& \frac{1-2\lambda(\omega-\beta)}{\lambda^2}|J_\lambda^\omega(Bu+\lambda p) - J_\lambda^\omega(Bu^m+\lambda p^m)|^2 - \\ &-\frac{2}{\lambda}(B(u-u^m), p-p^m) - \frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 \geq \\ \geq{}& \frac{1-2\lambda(\omega-\beta)}{\lambda^2}|J_\lambda^\omega(Bu+\lambda p) - J_\lambda^\omega(Bu^m+\lambda p^m)|^2 - \\ &-\frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 + \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + \frac{2\omega}{\lambda}|B(u-u^m)|^2.\end{aligned}$$

Como $|B(u-u^m)|^2 \leq \|B\|^2\|u-u^m\|^2$, tenemos:

$$\begin{aligned}|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 \geq{}& \frac{1-2\lambda(\omega-\beta)}{\lambda^2}|J_\lambda^\omega(Bu+\lambda p) - J_\lambda^\omega(Bu^m+\lambda p^m)|^2 + \\ &+ \left(\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\|B\|^2}+\omega\right) - \frac{1}{\lambda^2}\right)\cdot|B(u-u^m)|^2.\end{aligned}$$

Si elegimos λ y ω de forma que verifiquen la última hipótesis,

$$\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\|B\|^2}+\omega\right) - \frac{1}{\lambda^2} \geq \frac{1}{\lambda}\varepsilon_2 - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}(\varepsilon_2 - \frac{1}{\lambda}) \geq \varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_2) = 0.$$

Además, gracias a la hipótesis (d),

$$\lim_{m\to\infty}\left(|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2\right) = 0$$

de donde $\lim\limits_{m\to\infty}|B(u-u^m)| = 0$. Entonces, teniendo en cuenta (5.4),

- si $\alpha > 0$,

$$\alpha \|u - u^m\|^2 \leq (p^m - p, B(u - u^m)) \leq |p - p^m| \cdot |B(u - u^m)| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- si B^*B es un isomorfismo,

$$\|u - u^m\| \leq c\|B^*B(u - u^m)\|_{V'} \leq c\|B^*\||B(u - u^m)| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

luego

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u^m\| = 0.$$

■

Antes de pasar a los ejemplos concretos, conviene hallar una expresión de G^ω_λ, aproximada Yosida de $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ en función de la aproximada Yosida de $\partial\varphi$.

Propiedad La aproximada Yosida de $G^\omega = \partial\varphi - \omega I$ viene dada por:

$$G^\omega_\lambda(v) = \frac{1}{1-\lambda\omega} (\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}} \left(\frac{v}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega} v. \tag{5.4.3}$$

Demostración: Sea $p = G^\omega_\lambda(v)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
& p \in G^\omega(v - \lambda p) \\
\Longleftrightarrow & p \in (\partial\varphi - \omega I)(v - \lambda p) \\
\Longleftrightarrow & p \in (\partial\varphi)(v - \lambda p) - \omega v + \lambda\omega p \\
\Longleftrightarrow & p + \omega v - \lambda\omega p \in (\partial\varphi)(v - \lambda p) \\
\Longleftrightarrow & p + \omega v - \lambda\omega p \in (\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}} \left(v - \lambda p + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega} p + \frac{\lambda\omega}{1-\lambda\omega} v - \frac{\lambda^2\omega}{1-\lambda\omega} p\right).
\end{aligned}$$

Pero

- $\left(-\lambda + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega} - \frac{\lambda^2\omega}{1-\lambda\omega}\right) p = 0$
- $v + \frac{\lambda\omega}{1-\lambda\omega} v = \frac{v}{1-\lambda\omega}$

luego

$$(1-\lambda\omega)p = (\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}} \left(\frac{v}{1-\lambda\omega}\right) - \omega v$$

de donde se deduce (5.4.3).

■

5.4.1. Aplicación a la torsión elastoplástica.

Según hemos visto anteriormente, $B^*B(\cdot) = -\nabla(\nabla(\cdot))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= G_\lambda^\omega(\nabla u^m + \lambda p^m) = \\ &= \frac{1}{1-\lambda\omega} (\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}} \left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{aligned}$$

Pero,

$$(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}} = \frac{1-\lambda\omega}{\lambda}(I - \Pi_C)$$

luego

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= \frac{1}{1-\lambda\omega}\frac{1-\lambda\omega}{\lambda}(I-\Pi_C)\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m) = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\lambda\omega} - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}\right)(\nabla u^m + \lambda p^m) - \frac{1}{\lambda}\Pi_C\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(\nabla u^m + \lambda p^m) - \frac{1}{\lambda}\Pi_C\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right). \end{aligned}$$

El algoritmo $A2$ será, por tanto,

$$\begin{cases} -(1+\omega)\triangle u^m = f + \nabla p^m \\ p^{m+1} = p^m + \frac{1}{\lambda}\nabla u^m - \frac{1}{\lambda}\Pi_C\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right). \end{cases}$$

5.4.2. Aplicación al fluido Bingham.

De manera similar tendremos:

$$\begin{cases} -(\nu+\omega)\triangle u^m = f + \nabla p^m \\ p^{m+1} = \frac{1}{1-\lambda\omega}\Pi_C\left(p^m + \frac{\nabla u^m}{\lambda}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

5.4.3. Aplicación al problema de Stokes.

En este caso, $Bv = -\nabla v$ y $B^*q = \nabla q$. La segunda ecuación del algoritmo será, por lo tanto,

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= \frac{1}{1-\lambda\omega}\left(\partial\varphi\right)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{-\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(-\nabla u^m + \lambda p^m) = \\ &= \frac{1}{1-\lambda\omega}\frac{1-\lambda\omega}{\lambda}\frac{-\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega} - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(-\nabla u^m + \lambda p^m) = \\ &= p^m - \frac{1}{\lambda}\nabla u^m. \end{aligned}$$

Si escribimos $\rho = 1/\lambda$, el algoritmo queda:

$$\begin{cases} -\nu\triangle u^m + \omega\nabla(\nabla u^m) = f - \nabla p^m \\ p^{m+1} = p^m - \rho\nabla u^m. \end{cases}$$

Este algoritmo es el correspondiente el método de *lagrangiano aumentado* para el problema de Stokes.

5.4.4. Aplicación al flujo no lineal en medio poroso.

Recordemos el problema:

$$\begin{cases} B^*p = f \\ p = \partial\varphi(Bu) \end{cases}$$

donde $Bv = \nabla v$ y $B^*q = -\nabla q$. Observemos que la función

$$\varphi(q) = \frac{1}{s}\int_\Omega |q(x)|^s dx$$

es diferenciable.

La forma modificada apta para inducir el algoritmo $A2$ será:

$$\begin{cases} -\omega \triangle u = f + \nabla p \\ p = G_\lambda^\omega(\nabla u + \lambda p) \end{cases}$$

donde

$$G_\lambda^\omega(q) = \frac{1}{1-\lambda\omega}\,(\partial\varphi)_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{q}{1-\lambda\omega}-\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}q.$$

El algoritmo será:

$$\begin{cases} -\omega \triangle u^m = f + \nabla p^m \\ p^{m+1} = \frac{1}{1-\lambda\omega}\frac{1-\lambda\omega}{\lambda}\left(I - J^{\partial\varphi}_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\right)\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(\nabla u^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

Hagamos

$$z^m = J^{\partial\varphi}_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right)$$

es decir, z^m es solución de:

$$(I + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}\varphi')z^m = \frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}.$$

El algoritmo será:

$$\begin{cases} -\omega \triangle u^m = f + \nabla p^m \\ z^m + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|z^m|^{s-2}z^m = \frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega} \\ p^{m+1} = p^m + \frac{1}{\lambda}(\nabla u^m - z^m). \end{cases}$$

Los pasos segundo y tercero pueden resolverse localmente. En concreto, para resolver el segundo aplicamos en cada punto de integración el método de Newton a la ecuación escalar:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|z^m|^{s-2}\right)|z^m| = |\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}|$$

(donde $|\cdot|$ es la norma euclídea en $\Re^d$) y, una vez tenemos $|z^m|$, calculamos z^m:

$$z^m = \frac{\frac{\nabla u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}}{1 + \frac{\lambda}{1-\lambda\omega}|z^m|^{s-2}}.$$

Este es un algoritmo próximo al de lagrangiano aumentado utilizado por Ferragut y Elorza.

5.5. Relación con el método de direcciones alternadas.

Sean A y B dos operadores maximales monótonos. Consideremos la ecuación multívoca:

$$Au + Bu \ni 0. \tag{5.5.1}$$

Si A es unívoco, el problema se puede poner de la forma:

$$\begin{cases} Au + p = 0 \\ p \in Bu. \end{cases}$$

Y podemos aplicar el algoritmo $A2$:

$$Au^m + \omega u^m + p^m = 0$$

$$p^{m+1} = \frac{1}{1-\lambda\omega} B_{\frac{\lambda}{1-\lambda\omega}}\left(\frac{u^m + \lambda p^m}{1-\lambda\omega}\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega}(u^m + \lambda p^m).$$

En particular, si $\omega = \frac{1}{2\lambda}$ y haciendo el cambio de variable,

$$p^m = -\frac{v^m}{2\lambda}$$

el algoritmo queda:

$$\begin{cases} Au^m + \frac{u^m - v^m}{2\lambda} = 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}v^{m+1} = 2B_{2\lambda}\left(\frac{u^m - v^m/2}{1/2}\right) - \frac{1}{\lambda}(u^m - \frac{v^m}{2}). \end{cases}$$

De la primera ecuación podemos despejar:

$$u^m = (I + 2\lambda A)^{-1} v^m = J_{2\lambda}^A v^m$$

y de la segunda,

$$\begin{aligned} v^{m+1} &= (2u^m - v^m) - 4\lambda \left(\frac{I - J_{2\lambda}^A}{2\lambda}\right)(2u^m - v^m) = \\ &= (2J_{2\lambda}^A - I)v^m - 2(I - J_{2\lambda}^B)(2J_{2\lambda}^A - I)v^m = \\ &= (I - 2I + 2J_{2\lambda}^B)(2J_{2\lambda}^A - I)v^m = \\ &= (2J_{2\lambda}^B - I)(2J_{2\lambda}^A - I)v^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A2$ puede escribirse como:

$$\begin{cases} v^{m+1} = (2J_{2\lambda}^B - I)(2J_{2\lambda}^A - I)v^m \\ u^{m+1} = J_{2\lambda}^A v^{m+1}. \end{cases}$$

Vamos a interpretar este algoritmo como un algoritmo de direcciones alternadas. Sea la ecuación multívoca (5.5.1), que podemos considerar comoel límite estacionario de la ecuación de evolución:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \ni 0.$$

El método de direcciones alternadas de Peaceman - Rachford será, formalmente:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\lambda} + Au^n + Bu^{n+1/2} \ni 0 & \begin{cases} \text{(explícito en } A) \\ \text{(implícito en } B) \end{cases} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\lambda} + Au^{n+1} + Bu^{n+1/2} \ni 0 & \begin{cases} \text{(explícito en } B) \\ \text{(implícito en } A) \end{cases} \end{cases}$$

Estas ecuaciones son equivalentes, respectivamente, a:

$$\begin{cases} u^{n+1/2} \in (I+\lambda B)^{-1}(I-\lambda A)u^n \\ u^{n+1} \in (I+\lambda A)^{-1}(I-\lambda B)u^{n+1/2} \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{aligned} u^{n+1} &\in (I+\lambda A)^{-1}(I-\lambda B)(I+\lambda B)^{-1}(I-\lambda A)u^n \\ &= J_\lambda^A(I-\lambda B)J_\lambda^B(I-\lambda A)u^n. \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

Si A o B son multívocos, la expresión anterior no es utilizable; vamos a modificarla de forma que tenga sentido en el caso de operadores multívocos (habrá equivalencia en el caso A y B unívocos). Si A y B fueran unívocos, tendríamos:

$$\begin{cases} (I+\lambda B)J_\lambda^B = I \quad \text{con} \quad J_\lambda^B = (I+\lambda B)^{-1} \\ (I+\lambda A)J_\lambda^A = I \quad \text{con} \quad J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}. \end{cases}$$

Si hacemos el cambio de variable $u^n = J_\lambda^A v^n$, la ecuación (5.5.2) queda:

$$J_\lambda^A v^{n+1} = J_\lambda^A(I-\lambda B)J_\lambda^B(I-\lambda A)J_\lambda^A v^n.$$

Tomaremos, pues, como algoritmo:

$$v^{n+1} = (I-\lambda B)J_\lambda^B(I-\lambda A)J_\lambda^A v^n.$$

Veamos ahora que, si A es unívoco,

$$\begin{aligned} 2J_\lambda^A - I &= 2J_\lambda^A - (I+\lambda A)J_\lambda^A = \\ &= (2I - I - \lambda A)J_\lambda^A = (I-\lambda A)J_\lambda^A \end{aligned}$$

luego, asumiendo la misma condición para B,

$$\begin{cases} (I-\lambda A)J_\lambda^A = 2J_\lambda^A - I \\ (I-\lambda B)J_\lambda^B = 2J_\lambda^B - I \end{cases}$$

de modo que el algoritmo resultante será:

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= (I-\lambda B)J_\lambda^B(I-\lambda A)J_\lambda^A v^n = \\ &= (2J_\lambda^B - I)(2J_\lambda^A - I)v^n \\ u^{n+1} &= J_\lambda^A v^{n+1} \end{aligned}$$

que coincide con $A2$, cambiando λ por 2λ.

5.6. Un algoritmo de penalti-dualidad (A3).

Recordemos el problema general de partida

$$\begin{cases} Au + B^* p = f \\ p \in (\partial\varphi)(Bu) \end{cases}$$

que se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} Au + B^* p = f \\ p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) \end{cases}$$

o, también,

$$\begin{cases} Au + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p) = f \\ p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p). \end{cases}$$

Ello sugiere el siguiente algoritmo $(A3)$:

- p^0 inicial, arbitrario
- obtenido p^m, calculamos u^m y p^{m+1} como solución de:

$$\begin{cases} Au^m + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m) = f \\ p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m). \end{cases}$$

nota Si elegimos $p^0 = 0$, entonces u^0 es solución de:

$$Au^0 + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu^0) = f.$$

Es decir, tendremos $\|u - u^0\| = O(\sqrt{\lambda})$ en la primera iteración, pues u^0 es la solución del problema penalizado. La dificultad estriba en que la primera ecuación a resolver es (en general) no lineal, y habrá que plantear un método iterativo de resolución. ■

Teorema Si $\alpha > 0$, o bien, si $\beta > 0$ y B^*B es un isomorfismo, entonces:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|u - u^m\|^2}{\lambda} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

1. Caso $\alpha > 0$.
   Por ser $(\partial\varphi)_\lambda$ un operador lipschitciano de constante $\frac{1}{\lambda}$ (cf. Teorema 3.4), tendremos:

   $$|(\partial\varphi)_\lambda(v_1) - (\partial\varphi)_\lambda(v_2)|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left((\partial\varphi)_\lambda(v_1) - (\partial\varphi)_\lambda(v_2), v_1 - v_2\right).$$

   Sabemos que:

   $$p = (\partial\varphi)_\lambda(Bu + \lambda p)$$
   $$p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m + \lambda p^m).$$

   Por lo tanto,

   $$|p - p^{m+1}|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\big(p - p^{m+1}, (Bu + \lambda p) - (Bu^m + \lambda p^m)\big). \qquad (5.6.1)$$

   Por otra parte, comparando las ecuaciones del problema y del algoritmo,

   $$Au + B^*p = f$$
   $$Au^m + B^*p^{m+1} = f.$$

   Restando y multiplicando por $(u - u^m)$, obtenemos:

   $$A(u - u^m) + B^*(p - p^{m+1}) = 0$$
   $$\langle A(u - u^m), u - u^m\rangle + (p - p^{m+1}, B(u - u^m)) = 0$$
   $$\alpha\|u - u^m\|^2 + (p - p^{m+1}, B(u - u^m)) \leq 0$$
   $$(p - p^{m+1}, B(u - u^m)) \leq -\alpha\|u - u^m\|^2.$$

Entrando con esta última ecuación en (5.6.1),

$$|p-p^{m+1}|^2 \leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + (p-p^{m+1}, p-p^m) \leq$$

$$\leq -\frac{\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + \frac{1}{2}|p-p^{m+1}|^2 + \frac{1}{2}|p-p^m|^2$$

$$|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 \geq \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2.$$

de donde,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|u-u^m\|^2}{\lambda} = 0.$$

2. Caso $\beta > 0, B^*B$ isomorfismo. Daremos las líneas generales de la demostración.

   En las ecuaciones del problema y del algoritmo, tenemos:

$$\begin{cases} (\partial\varphi)_\lambda(Bu+\lambda p) = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)(Bu+\lambda p) \\ (\partial\varphi)_\lambda(Bu^m+\lambda p^m) = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)(Bu^m+\lambda p^m) \end{cases}$$

   Utilizando la técnica habitual, obtenemos la siguiente estimación:

$$|p-p^{m+1}|^2 \leq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 - \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 +$$

$$+ |(p-p^m) - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m))|^2. \tag{5.6.2}$$

   Puesto que $\partial\varphi$ es M(ω)-maximal, alplicando la Propiedad **??** tendremos:

$$|p-p^m - \frac{1}{\lambda}(J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 +$$

$$+ |p-p^m|^2 - \frac{2\beta}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2$$

   de donde, entrando en (5.6.2),

$$|p-p^{m+1}|^2 \leq -\frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 - \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}|B(u-u^m)|^2 +$$

$$+ |p-p^m|^2 - \frac{2\beta}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2$$

$$|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 \geq \frac{2\alpha}{\lambda}\|u-u^m\|^2 + \frac{2\beta}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} |p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2 = 0.$$

Además, si $\beta > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2}{\lambda} = 0.$$

De (5.6.2) deducimos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}|B(u-u^m)|^2 \leq{}& \lambda\left(|p-p^m|^2 - |p-p^{m+1}|^2\right) + \\ &+ 2|p-p^m||J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)| + \\ &+ \frac{1}{\lambda}|J_\lambda(Bu+\lambda p) - J_\lambda(Bu^m+\lambda p^m)|^2.\end{aligned}$$

Pasando al límite,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|B(u-u^m)|^2}{\lambda} = 0$$

y, si B^*B es un isomorfismo,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\|u-u^m)\|^2}{\lambda} = 0.$$

■

En cada iteración del algoritmo $A3$ hay que resolver un problema en general no lineal, de la forma:

$$Au + B^*(\partial\varphi)_\lambda(Bu+\lambda p) = f$$

que se puede resolver aplicando, por ejemplo:

- los algoritmos $A1$ o $A2$; así, el algoritmo $A1$ sería:

$$\begin{cases} Au_i = f - B^*w_i \\ w_{i+1} = (\partial\varphi)_{\lambda+\mu}(Bu_i+\lambda p+\mu w_i), \quad \mu > 0 \end{cases}$$

- o bien, teniendo en cuenta que tenemos:

$$Au + B^*\left(\frac{I - J_\lambda}{\lambda}\right)(Bu + \lambda p) = f$$

$$Au + \frac{1}{\lambda}B^*Bu = f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu + \lambda p)$$

  el algoritmo correspondiente será:

$$Au_{i+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu_{i+1} = f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu_i + \lambda p).$$

Estudiemos la convergencia: restando las dos últimas expresiones,

$$Au + \frac{1}{\lambda}B^*Bu = f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu + \lambda p)$$

$$Au_{i+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu_{i+1} = f - B^*p + \frac{1}{\lambda}B^*J_\lambda(Bu_i + \lambda p)$$

$$A(u - u_{i+1}) + \frac{1}{\lambda}B^*B(u - u_{i+1}) = \frac{1}{\lambda}B^*(J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p))$$

y, multiplicando por $(u - u_{i+1})$,

$$(A(u - u_{i+1}), u - u_{i+1}) + \frac{1}{\lambda}(B^*B(u - u_{i+1}), u - u_{i+1}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(B^*(J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p)), u - u_{i+1})$$

$$(A(u - u_{i+1}), u - u_{i+1}) + \frac{1}{\lambda}(B(u - u_{i+1}), B(u - u_{i+1})) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}((J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p)), B(u - u_{i+1}))$$

y, por ser A un operador coercivo,

$$\alpha\|u - u_{i+1}\|^2 + \frac{1}{\lambda}|B(u - u_{i+1})|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}((J_\lambda(Bu + \lambda p) - J_\lambda(Bu_i + \lambda p)), B(u - u_{i+1})).$$

Por otra parte, J_λ es lipschitciano de constante $\frac{1}{1+\lambda\beta}$:

$$\alpha\|u-u_{i+1}\|^2+\frac{1}{\lambda}|B(u-u_{i+1})|^2 \leq \frac{1}{\lambda(1+\lambda\beta)}(B(u-u_i),B(u-u_{i+1})) \leq$$

$$\text{(Cauchy-Schwarz)} \qquad \leq \frac{1}{\lambda(1+\lambda\beta)}|B(u-u_i)|\cdot|B(u-u_{i+1})| =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[|B(u-u_{i+1})|\cdot\frac{1}{1+\lambda\beta}|B(u-u_i)|\right] \leq$$

$$\text{(cf. Nota 5.1 con } \varepsilon=\sqrt{\lambda}) \qquad \leq \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}|B(u-u_{i+1})|^2+\frac{1}{2(1+\lambda\beta)^2}|B(u-u_i)|^2\right]$$

de donde,

$$\alpha\|u-u_{i+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\lambda}|B(u-u_{i+1})|^2-\frac{1}{\lambda}|B(u-u_{i+1})|^2+\frac{1}{2\lambda(1+\lambda\beta)^2}|B(u-u_i)|^2.$$

Separando en fracciones simples el siguiente término:

$$\frac{1}{2\lambda(1+\lambda\beta)^2}=\frac{1}{2\lambda}-\frac{\beta(2+\lambda\beta)}{2(1+\lambda\beta)^2}$$

obtenemos:

$$\alpha\|u-u_{i+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\lambda}\left(|B(u-u_i)|^2-|B(u-u_{i+1})|^2\right)-\frac{\beta(2+\lambda\beta)}{2(1+\lambda\beta)^2}|B(u-u_i)|^2$$

donde sabemos que:

$$-\frac{\beta(2+\lambda\beta)}{2(1+\lambda\beta)^2}|B(u-u_i)|^2 \leq 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{i\to\infty}\|u-u_i\|=0.$$

En cambio, si $\alpha=0$, pero $\beta>0$, tenemos:

$$\frac{\beta(2+\lambda\beta)}{2(1+\lambda\beta)^2}|B(u-u_i)|^2 \leq \frac{1}{\lambda}\left(|B(u-u_i)|^2-|B(u-u_{i+1})|^2\right)$$

de donde $\lim\limits_{i\to\infty}|B(u-u_i)|=0$ y, si B^*B es un isomorfismo,

$$\lim_{i\to\infty}\|u-u_i\|=0.$$

5.7. Una modificación.

Si nos limitamos a una sola iteración en el algoritmo interno, el algoritmo completo quedará:

Dados u^m, p^m, hallamos u^{m+1}, p^{m+1} como solución de:

$$\begin{cases} Au^{m+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu^{m+1} = f - B^*p^m + \frac{1}{\lambda}B^*z^m \\ p^{m+1} = (\partial\varphi)_\lambda(Bu^{m+1} + \lambda p^m) \end{cases}$$

donde $z^m = J_\lambda(Bu^m + \lambda p^m)$. Este algoritmo puede ser modificado formalmente de la manera siguiente:

- sean p^0, z^0 arbitrarios
- calculamos u^{m+1} como solución de:

$$Au^{m+1} + \frac{1}{\lambda}B^*Bu^{m+1} = f - B^*(p^m - \frac{1}{\lambda}z^m)$$

- calculamos z^{m+1} como solución de:

$$z^{m+1} + \lambda(\partial\varphi)z^{m+1} \ni Bu^{m+1} + \lambda p^m$$

  (donde hemos sustituido p^{m+1}, desconocido, por p^m)

- calculamos finalmente p^{m+1}:

$$\begin{aligned} p^{m+1} &= (\partial\varphi)_\lambda(Bu^{m+1} + \lambda p^m) = \\ &= \frac{I - J_\lambda}{\lambda}(Bu^{m+1} + \lambda p^m) = \\ &= p^m + \frac{1}{\lambda}Bu^{m+1} - \frac{1}{\lambda}z^{m+1} \end{aligned}$$

5.7.1. Aplicación al problema de flujo no lineal.

En este caso, tenemos:

- $A = 0$
- $B = \nabla, \quad B^* = -\nabla \Longrightarrow B^*B = -\triangle$
- $(\partial\varphi)_\lambda(z) = \varphi'(z) = |z|^{s-2}z.$

El algoritmo queda de la forma:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\triangle u_{m+1} = f + \nabla(p_m - \frac{1}{\lambda}z_m) \\ z_{m+1} + \lambda|z_{m+1}|^{s-2}z_{m+1} = \nabla u_{m+1} + \lambda p_m \\ p_{m+1} = p_m + \frac{1}{\lambda}(\nabla u_{m+1} - z_{m+1}) \end{cases}$$

que es el algoritmo de lagrangiano aumentado utilizado por Ferragut - Elorza.

5.7.2. Aplicación al problema de la elastoplasticidad.

Recordemos las principales ecuaciones planteadas en la sección 4.8 (suponemos $g_i = 0$, por simplificar):

$$(\sigma(u), \varepsilon(u)) = (f, w), \quad \forall w \in V$$

$$a(\dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(\dot{u}), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in H.$$

Discretización espacial y temporal: resolviendo paso a paso,

$$\begin{cases} (\sigma^{n+1}, \varepsilon(w)) = (f^{n+1}, w), \quad \forall w \in V_h \\ a(\frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t}, \tau - \sigma^{n+1}) - (\varepsilon(v^{n+1}), \tau - \sigma^{n+1}) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \end{cases}$$

donde:

- $V_h = \{w \in V \quad / \quad w|_T \in (P_1(T))^3, T \in T_h\}$
- $H_h = \{\hat{\tau} \in H \quad / \quad \hat{\tau}|_T \in (P_0(T))^9, T \in T_h\}$
- $K_h = K \cap H_h.$

En cada paso de tiempo hay que resolver, por lo tanto, un problema del tipo:

Dado $\tilde{\sigma}$, hallar σ tal que:

$$\begin{cases} (\sigma, \varepsilon(w)) = (f, w), \quad \forall w \in V_h \\ \frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \end{cases} \tag{5.7.1}$$

Este problema puede ser resuelto, por ejemplo, mediante el algoritmo de Uzawa (en realidad, es el algoritmo $A1$):

- obtenido v_i, calculamos σ_{i+1} como solución de:

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \tau - \sigma_{i+1}) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \tag{5.7.2}$$

- a continuación, calculamos v_{i+1} como solución de:

$$(\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho((f, w) - (\sigma_{i+1}, \varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h. \tag{5.7.3}$$

nota

- El tensor de velocidad de deformación juega aquí el papel de multiplicador de Lagrange.
- El operador auxiliar se puede elegir de otra forma, por ejemplo, $(A^{-1}\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w))$, que es el operador asociado a la elasticidad lineal.
- El primer paso es un problema no lineal pero desacoplado; en cada punto de integración tenemos un problema lineal de 6 ecuaciones con 6 incógnitas.

Convergencia del algoritmo: Tomemos $\tau = \sigma_{i+1}$ en la segunda ecuación de (5.7.1) y $\tau = \sigma$ en (5.7.2):

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma_{i+1} - \sigma) - (\varepsilon(v), \sigma_{i+1} - \sigma) \geq 0$$
$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \sigma - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \sigma - \sigma_{i+1}) \geq 0.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos:

$$a(\sigma_{i+1} - \sigma, \sigma - \sigma_{i+1}) - \Delta t(\varepsilon(v_i) - \varepsilon(v), \sigma - \sigma_{i+1}) \geq 0 \tag{5.7.4}$$

Por otra parte, utilizando ahora la primera ecuación de (5.7.1) y entrando en (5.7.3):

$$\begin{aligned}(\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w)) &= (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho[(\sigma, \varepsilon(w)) - (\sigma_{i+1}, \varepsilon(w))] = \\ &= (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h\end{aligned}$$

o bien,

$$(\varepsilon(v_{i+1} - v), \varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i - v), \varepsilon(w)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h$$

Tomando $w = v_{i+1} - v$:

$$(\varepsilon(v_{i+1} - v), \varepsilon(v_{i+1} - v)) = (\varepsilon(v_i - v), \varepsilon(v_{i+1} - v)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(v_{i+1} - v))$$

de donde,

$$\|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 \leq \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\| \cdot \|\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_i)\|.$$

Dividiendo por $\|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|$, y elevando la inecuación resultante al cuadrado,

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &\leq \|\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_i)\|^2 \leq \\ &\leq \|\varepsilon(v_i - v)\|^2 + 2\rho(\varepsilon(v_i - v), \sigma - \sigma_{i+1}) + \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2.\end{aligned}$$

Utilizando (5.7.4), tenemos:

$$\begin{aligned}\|\varepsilon(v_i - v)\|^2 - \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &\geq -2\rho\,(\varepsilon(v_i - v), \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 \geq \\ &\geq -\frac{2\rho}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \sigma, \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = \\ &= \frac{2\rho}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \sigma, \sigma_{i+1} - \sigma) - \rho^2\|\sigma_{i+1} - \sigma\|^2 \geq \\ &\geq \frac{2\rho}{\Delta t}\mu\|\sigma_{i+1} - \sigma\|^2 - \rho^2\|\sigma_{i+1} - \sigma\|^2 = \\ &= \left(\frac{2}{\Delta t} - \rho\right)\rho\|\sigma_{i+1} - \sigma\|^2.\end{aligned}$$

Luego, para un adecuado valor de ρ:

$$\lim_{i\to\infty} \|\sigma_{i+1} - \sigma\| = 0.$$

Resolución del problema en cada paso de tiempo. Dado $\tilde{\sigma}$, hallar $\sigma \in K_h$ tal que:

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0, \qquad \forall \tau \in K_h \tag{5.7.5}$$

$$(\sigma, \varepsilon(w)) = (f, w), \qquad \forall w \in V_h. \tag{5.7.6}$$

Podemos aquí utilizar el algoritmo de Uzawa (es el algoritmo $A1$ adaptado):

- Sea v_0 arbitrario
- Obtenido v_i, calculamos $\{\sigma_{i+1}, v_{i+1}\}$ resolviendo:

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \tau - \sigma_{i+1}) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h \tag{5.7.7}$$

$$(\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho[(f, w) - (\sigma_{i+1}, \varepsilon(w))], \quad \forall w \in V_h. \tag{5.7.8}$$

(5.7.7) es un problema local de 6 ecuaciones con 6 incógnitas en cada punto de integración.

nota

- El operador auxiliar $(\varepsilon(v), \varepsilon(w))$ puede ser sustituido por $(A^{-1}\varepsilon(v), \varepsilon(w))$; resolvemos así un problema de elasticidad lineal en cada iteración. $\varepsilon(v)$ juega el papel de multiplicador de Lagrange.
- Para resolver la primera ecuación, nos trasladamos al caso:

$$a(\sigma, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0 \tag{5.7.9}$$

introduciendo, por ejemplo, un campo $\tilde{v}$ tal que $A\tilde{\sigma} = \tilde{v}$. La resolución de (5.7.9) es entonces una proyección respecto al producto escalar $a(\sigma, \tau)$ de $A^{-1}\varepsilon(v)$:

$$\sigma = \Pi_{K_h} A^{-1}\varepsilon(v). \qquad \blacksquare$$

Estudio de la convergencia. Tomemos $\tau = \sigma_{i+1}$ en (5.7.5) y $\tau = \sigma$ en (5.7.7):

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \sigma_{i+1} - \sigma) - (\varepsilon(v), \sigma_{i+1} - \sigma) \geq 0$$
$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma_{i+1} - \tilde{\sigma}, \sigma - \sigma_{i+1}) - (\varepsilon(v_i), \sigma - \sigma_{i+1}) \geq 0.$$

Sumando y transformando convenientemente la inecuación,

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \sigma_{i+1}, \sigma_{i+1} - \sigma) - (\varepsilon(v) - \varepsilon(v_i), \sigma_{i+1} - \sigma) \geq 0$$
$$\Longrightarrow \frac{2\rho}{\Delta t} a(\sigma - \sigma_{i+1}, \sigma - \sigma_{i+1}) \leq 2\rho(\varepsilon(v) - \varepsilon(v_i), \sigma - \sigma_{i+1}). \qquad (5.7.10)$$

Por otra parte, multiplicando (5.7.6) por ρ y entrando en (5.7.8),

$$(\varepsilon(v_{i+1}), \varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i), \varepsilon(w)) + \rho[(\sigma, \varepsilon(w)) - (\sigma_{i+1}, \varepsilon(w))], \quad \forall w \in V_h$$
$$(\varepsilon(v_{i+1} - v), \varepsilon(w)) = (\varepsilon(v_i - v), \varepsilon(w)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(w)), \quad \forall w \in V_h$$

Haciendo $w = v_{i+1} - v$,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &= (\varepsilon(v_i - v), \varepsilon(v_{i+1} - v)) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}, \varepsilon(v_{i+1} - v)) = \\ &= (\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1}), \varepsilon(v_{i+1} - v)) \leq \\ &\leq \|\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1})\| \cdot \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|. \end{aligned}$$

Simplificando la desigualdad, y elevando la resultante al cuadrado,

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &\leq \|\varepsilon(v_i - v) + \rho(\sigma - \sigma_{i+1})\|^2 \leq \\ &\leq \|\varepsilon(v_i - v)\|^2 + 2\rho(\varepsilon(v_i - v), \sigma - \sigma_{i+1}) + \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(v_i - v)\|^2 - \|\varepsilon(v_{i+1} - v)\|^2 &\geq -2\rho(\varepsilon(v_i - v), \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = \\
&= 2\rho(\varepsilon(v - v_i), \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 \geq \\
\text{gracias a (5.7.10)} &\geq \frac{2\rho}{\Delta t} a(\sigma - \sigma_{i+1}, \sigma - \sigma_{i+1}) - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 \geq \\
&\geq \frac{2\rho\mu}{\Delta t}\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 - \rho^2\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = \\
&= \left(\frac{2\mu}{\Delta t} - \rho\right)\rho\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2.
\end{aligned}$$

Eligiendo $0 < \rho < \frac{2\mu}{\Delta t}$, tendremos:

$$\lim_{i\to\infty}\|\sigma - \sigma_{i+1}\|^2 = 0.$$

Resolución del problema:

$$\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in K_h.$$

Introduciendo el operador A^{-1},

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} a(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma) - a(A^{-1}\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0, &\quad \forall \tau \in K_h \\
a(\sigma - \tilde{\sigma}, \tau - \sigma) - a(\Delta t A^{-1}\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0, &\quad \forall \tau \in K_h \\
a((\tilde{\sigma} + \Delta t A^{-1}\varepsilon(v)) - \sigma, \tau - \sigma) \leq 0, &\quad \forall \tau \in K_h
\end{aligned}$$

luego

$$\sigma = \Pi_{K_h}(\tilde{\sigma} + \Delta t A^{-1}\varepsilon(v))$$

donde la proyección se toma en el sentido del producto escalar $a(\cdot,\cdot)$, y se puede calcular explícitamente en el caso del criterio de Von Mises; poniendo $\tilde{\sigma} = A^{-1}e$,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \Pi_{K_h}(A^{-1}(e + \Delta t\varepsilon(v))) = \\
&= \Pi_{K_h}(A^{-1}\Sigma) = \\
&= K_0\Sigma_{kk}\delta_{ij} + \inf\left(2\mu, \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\Sigma_{ij}^D\Sigma_{ij}^D}}\right)\Sigma_{ij}^D.
\end{aligned}$$

5.8. Reformulación del problema de la elastoplasticidad. Generalización: viscoplasticidad.

La ley de comportamiento:

$$a(\dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(\dot{u}), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in K$$

o bien

$$(A\dot{\sigma} - \varepsilon(\dot{u}), \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in K$$

puede también escribirse como:

$$\varphi(\tau) - \varphi(\sigma) \geq (\varepsilon(\dot{u}) - A\dot{\sigma}, \tau - \sigma) \geq 0, \quad \forall \tau \in H$$

o también

$$\varepsilon(\dot{u}) - A\dot{\sigma} \in \partial\varphi(\sigma)$$

donde $\varphi = I_K$ es la función indicatriz de K. Considerando distintas funciones φ, tenemos un modelo general de elastoplasticidad. En particular, tomando:

$$\partial\varphi = (\partial I_K)_\lambda = \partial(I_K)_\lambda$$

tenemos un modelo de viscoplasticidad.

Para reescribir el problema completo, introduzcamos:

$$S = \{\tau = (\tau_{ij}) \in H \quad / \quad \int_\Omega \tau_{ij}\varepsilon_{ij}(w) = \int_\Omega f_i w_i + \int_{\Gamma_1} g_i w_i, \quad \forall w \in V\}$$

$$S^{(0)} = \{\tau = (\tau_{ij}) \in H \quad / \quad \int_\Omega \tau_{ij}\varepsilon_{ij}(w) = 0, \quad \forall w \in V\}.$$

El problema general de la viscoplasticidad se puede formular:

Hallar $\sigma \in S$ tal que:

$$\varepsilon(\dot{u}) - A\dot{\sigma} \in \partial\varphi(\sigma)$$

o, de forma equivalente,

Hallar $\sigma \in S$ tal que:

$$\varphi(\tau) - \varphi(\sigma) \geq (\varepsilon(\dot{u}) - A\dot{\sigma}, \tau - \sigma), \quad \forall \tau \in H.$$

En particular, $\forall \tau \in S$ tendremos:

$$(\tau - \sigma, \varepsilon(\dot{u})) = \int_\Omega (\tau_{ij} - \sigma_{ij})\varepsilon_{ij}(\dot{u}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau - \sigma \in S^{(0)}$$

luego

$$\varphi(\tau) - \varphi(\sigma) \geq (-A\dot{\sigma}, \tau - \sigma), \quad \forall \tau \in S.$$

Este problema puede también escribirse, introduciendo I_S (función indicatriz de S):

$$I_S(\tau) + \varphi(\tau) - I_S(\sigma) - \varphi(\sigma) \geq (-A\dot{\sigma}, \tau - \sigma), \quad \forall \tau \in S, \quad \sigma \in S$$

o bien,

$$-A\dot{\sigma} \in \partial(I_S + \varphi)(\sigma)$$

y, debido a las propiedades de continuidad de I_S (es continua en el interior de su dominio efectivo),

$$\partial(I_S + \varphi) = \partial I_S + \partial\varphi$$

$$\Longrightarrow - A\dot{\sigma} \in \partial I_S(\sigma) + \partial\varphi(\sigma)$$

$$\Longrightarrow A\dot{\sigma} + \partial I_S(\sigma) + \partial\varphi(\sigma) \ni 0$$

es decir, una ecuación del tipo: $S\dot{u} + Au + Bu \ni 0$.

Encontremos una interpretación del valor obtenido en cada iteraci'on de los algoritmos diseñados para resolver el problema estacionario $Au + Bu \ni$

0. Volviendo, pues, a la formulaci'on inicial, y haciendo en ella $\dot{\sigma} = 0$, el problema es:

Hallar $\{\sigma, u\}$ tales que:

$$\begin{cases} \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(w) = \int_\Omega f_i w_i + \int_{\Gamma_1} g_i w_i, \quad \forall w \\ \varepsilon(\dot{u}) \in \partial\varphi(\sigma). \end{cases}$$

Si escribimos $\langle G, w\rangle = \int_\Omega fw + \int_{\Gamma_1} gw$, el problema se puede formular:

$$\langle \sigma, \varepsilon(w)\rangle = \langle G, w\rangle$$

$$\langle \varepsilon^t\sigma, w\rangle = \langle G, w\rangle = \langle \partial G(\dot{u}), w\rangle$$

luego

$$\begin{cases} \varepsilon^t\sigma = \partial G(\dot{u}) \\ \sigma \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) \qquad (F = \varphi^*) \end{cases}$$

Supongamos, por simplificar, $g = 0$. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(w) - \int_\Omega f_i w_i = 0 \\ \sigma \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) \end{cases}$$

Podemos transformar la segunda ecuación en:

$$\sigma - \omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) - \omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) =$$

$$= G^\omega(\varepsilon(\dot{u}))$$

mientras que la primera ecuación es:

$$\varepsilon^*\sigma = L \tag{5.8.1}$$

donde L es la aplicación tal que: $\langle L, w\rangle = \int_\Omega fw$. De ello se puede deducir:

$$\begin{cases} \varepsilon^*\sigma = L \\ \sigma \in \partial F(\varepsilon(\dot{u})) \end{cases} \Longrightarrow L \in \varepsilon^*(\partial F(\varepsilon(\dot{u}))).$$

Por lo tanto, (5.8.1) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
-\omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &= -\varepsilon^*\sigma - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) + L \\
L - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &= \varepsilon^*(\partial F(\varepsilon(\dot{u})) - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u})) \\
L - \omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) &\in \varepsilon^*(\partial F - \omega a^{-1})(\varepsilon(\dot{u})) \\
&= \varepsilon^* G^\omega(\varepsilon(\dot{u})).
\end{aligned}$$

El problema es, por lo tanto,

$$\begin{cases}
\omega\varepsilon^* A^{-1}\varepsilon(\dot{u}) = L - \varepsilon^*(p) \\
p \in G^\omega(\varepsilon(\dot{u})) = (\partial F - \omega A^{-1})(\varepsilon(\dot{u}))
\end{cases}$$

o bien, en forma variacional,

$$\begin{cases}
\omega \int_\Omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u})\varepsilon(w) = \int_\Omega f_i w_i - \int_\Omega p_{ij}\varepsilon_{ij}(w) \\
p = (\partial F - \omega A^{-1})_\lambda(\varepsilon(\dot{u}) + \lambda p).
\end{cases}$$

Finalmente, el algoritmo de resolución ser'a:

- p^0 arbitrario,
- en la iteración n, resolver:

$$\begin{cases}
\omega \int_\Omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u}^n)\varepsilon(w) = \int_\Omega f_i w_i - \int_\Omega p^n_{ij}\varepsilon_{ij}(w) \\
p^{n+1} = (\partial F - \omega A^{-1})_\lambda(\varepsilon(\dot{u}^n) + \lambda p^n) \\
\sigma^{n+1} = p^{n+1} + \omega A^{-1}\varepsilon(\dot{u}^n).
\end{cases}$$