

Las matemáticas y su enseñanza

Las matemáticas

Desde que Pitágoras acuñase el término *matemática* (lo que se puede aprender) allá por el siglo VI antes de Cristo, la manera de adquirir y enseñar conocimientos matemáticos ha sido una constante de la humanidad en todas las épocas.

Claro que para Pitágoras la matemática era una ciencia mucho más amplia que lo que entendemos hoy en día. Englobaba todo el saber científico. Los pitagóricos son los que dividieron el saber en las cuatro materias, Aritmética (su lema era "todo es número"), Geometría, Música y Astronomía. El perdurable *quadrivium* que, junto a la Lógica, la Retórica y la Gramática, el *trivium*, constituyó la base de la enseñanza durante más de dos mil años. Las siete ramas de los saberes humanísticos, en contraposición a los teológicos. Bien avanzado el siglo XVII la formación universitaria de Newton en Cambridge estaba basada en estas materias.

Los contenidos abarcados por las matemáticas constituían de hecho el conjunto de saberes relacionados con la naturaleza.

Incluso en pleno siglo de las luces, como se puede comprobar en el famoso árbol de las ciencias de *L'Encyclopédie* de Diderot y D'Alembert, las matemáticas englobaban ciencias como la óptica, la estática, la dinámica, la mecánica, la acústica, la hidrodinámica, la neumática..., por supuesto además de la aritmética, la geometría y la astronomía.

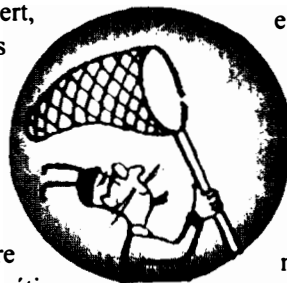
Será a lo largo del siglo XIX y sobre todo del siglo XX cuando el árbol matemático perderá muchas de estas ramas que se desarrollarán de forma autónoma y con vida propia.

Pero, en la actualidad ¿qué son las matemáticas? Parece una pregunta obvia y sin embargo, si pidiésemos una definición de esta ciencia a diez matemáticos, obtendríamos casi con toda certeza diez respuestas distintas, ¡si no más!

Ciencia que trata de la cantidad, nos da como definición el diccionario. Un especialista en Topología pondría el grito en el cielo. Su especialidad ha quedado fuera del campo matemático. *La ciencia de la cantidad y de la forma...* ¿qué opinaría un lógico matemático? *Un sistema axiomático de símbolos y leyes lógicas que permite decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición...* *Un lenguaje que es el substrato de las demás ciencias...* En fin, ninguna definición convencería a todos los matemáticos. Porque si bien es verdad que se han perdido muchas ramas por el camino, otras tantas se han incorporado a la reina de las ciencias, como la definía Gauss.

A pesar de su imagen de verdades inmutables desde los tiempos de la Grecia Clásica, las matemáticas son una ciencia viva, en constante evolución, y no sólo por los contenidos que abarca. Los intentos de resolver problemas históricos han ido dando origen a nuevas ramas de las matemáticas. Quizás el ejemplo más emblemático sea el nacimiento de la Teoría de Grupos en el intento de resolver el problema de la búsqueda de la solución general de la ecuación de quinto grado.

Nadie pone en duda que las matemáticas de principios del siglo XXI son muy distintas de las del siglo XVIII. Las sucesivas crisis de fundamentos de sus distintas ramas, análisis, geometría, aritmética... han ido marcando el devenir de las matemáticas. Las trans-



formaciones más profundas se han producido en los últimos cien años.

Y si las matemáticas de finales del siglo XX son muy diferentes de las de hace cien o doscientos años, su enseñanza forzosamente también ha de ser diferente. ¿Se pueden enseñar a los jóvenes del siglo XXI las mismas matemáticas que se enseñaban a principios del siglo XX y, sobre todo, ¿se pueden enseñar de la misma manera?

Estas son dos grandes preguntas que se plantean los profesores de matemáticas, los investigadores matemáticos y los pedagogos. ¿Qué matemáticas enseñar? ¿Cómo enseñarlas?

Un recorrido por la historia nos ayudará, si no a darnos la respuesta, al menos a evitar errores del pasado.

La enseñanza de las matemáticas

Y si las matemáticas han sufrido estas tremendas modificaciones a lo largo de la historia, qué podemos decir de su enseñanza.

Sin duda el libro de texto más perdurable son *Los Elementos* de Euclides; desde su nacimiento allá por el siglo III antes de Cristo hasta la Revolución Francesa, *Los Elementos* van a constituir el núcleo fundamental y muchas veces exclusivo de los conocimientos matemáticos que se enseñaban en las universidades hasta bien entrado el siglo XVII.

En Italia, entre los siglos XIII y XVI, va a proliferar otro tipo de instrucción matemática cuyo objetivo fundamental es responder a las necesidades contables de los comerciantes de las repúblicas comerciales del norte de la península itálica: las escuelas de ábaco.

La instrucción en estas escuelas está unida a la difusión del *Liber Abac (I)* de Leonardo de Pisa y su fin era poner al alcance de los hijos de los comerciantes las matemáticas de los árabes y las cifras hindúes. Es decir, formar a los jóvenes en los rudimentos del álgebra de Al-Khuwarizmi. No nos resulta nada extraño que los algoritmos para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado se descubriesen en Italia en el siglo XVI.

En el resto de Europa, la formación de los grandes matemáticos continentales del siglo XVII, Kepler, Fermat, Descartes, Mersenne, Stevin, Huygens, Leibniz..., tiene una constante casi general: no se produce en las universidades, ancladas por otra parte

en saberes medievales y aristotélicos. Con toda seguridad Newton no leyó *La Geometrie* de Descartes en Cambridge sino en sus años de vacaciones forzosas en Woolsthorpe.

Incluso en la Francia de la Ilustración, en pleno siglo XVIII, la mejor manera de aprender matemáticas no era matricularse en la Sorbona. Las matemáticas más actuales se impartían en las academias militares, en los centros de los jesuitas o en las recién fundadas Academias de Ciencias. Lagrange impartió clases de matemáticas en la Academia de Artillería de Turín, Monge en la Escuela de Ingenieros Militares de Mézières, Laplace fue profesor de Napoleón en la Academia Militar de París; Euler, Daniel y Nicolás Bernouilli trabajaron en la Academia de San Petersburgo; Euler, Lagrange y Maupertuis en la de Berlín...

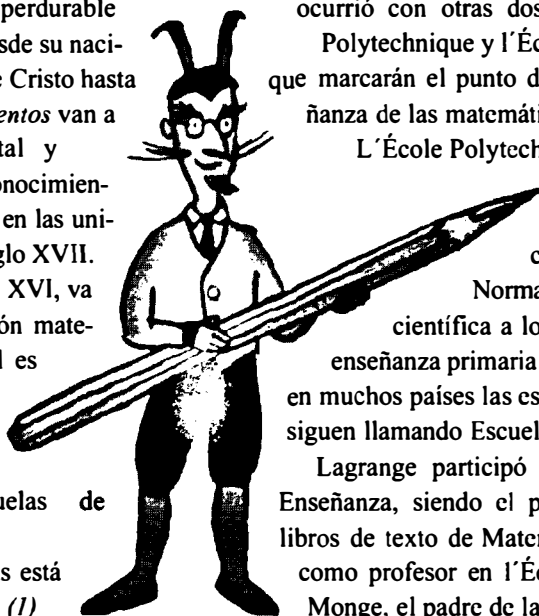
Son precisamente los matemáticos franceses vinculados a la Revolución Francesa los que van a revolucionar también la enseñanza de las matemáticas; al menos la enseñanza superior. Si la Academia Francesa de Ciencias sirvió de modelo a imitar en el resto de los países europeos y fue un instrumento definitivo para el desarrollo de las ciencias, algo similar ocurrió con otras dos instituciones, l'École Polytechnique y l'École Normale francesas, que marcarán el punto de inflexión de la enseñanza de las matemáticas en el continente.

L'École Polytechnique tenía por misión formar a los futuros ingenieros y científicos y l'École Normale preparar de forma científica a los futuros profesores de enseñanza primaria y secundaria. De hecho en muchos países las escuelas de magisterio se siguen llamando Escuela Normal.

Lagrange participó en la Reforma de la Enseñanza, siendo el padre de los modernos libros de texto de Matemáticas al incorporarse como profesor en l'École Normale. Gaspard Monge, el padre de la Geometría Descriptiva fue el creador de la institución más prestigiosa que la Revolución legó a Francia, l'École Polytechnique, en la que define su programa y prevé que los alumnos, además de las lecciones magistrales, efectúen trabajos dirigidos y hagan experiencias de laboratorio.

Desde entonces todos los grandes matemáticos franceses pasarán por alguna de las dos instituciones, como profesores o como alumnos.

En 1794, el año del Terror, cuando las cabezas de muchos conciudadanos están en serio peligro, Adrien Marie Legendre va a publicar uno de los libros de matemáticas más leído a lo largo de los pró-



ximos cien años: *Elementos de Geometría*. El libro de texto obligado de casi todas las Universidades, Escuelas y Academias de Europa y América, en muchas de ellas el relevo de *Los Elementos* de Euclides.

Unos años más tarde, en 1821, Cauchy publicará su famoso *Cours d'Analyse*, el fundamento de la moderna teoría de funciones, como libro de texto de l'École Polytechnique.

Primero en Francia y después en el resto del mundo este tipo de textos va a cambiar por completo los programas de enseñanza de las matemáticas no sólo en los niveles superiores sino también en los elementales dando origen a los clásicos programas escolares de los bachilleres.

La enseñanza de las matemáticas en España

En España estos cambios van llegar con más de 70 años de retraso. Habrá que esperar hasta el reinado de Isabel II (1843-1868) para que se produzcan tres acontecimientos que van a repercutir directamente en el desarrollo y la enseñanza de las matemáticas: la creación de la Real Academia de Ciencias de Madrid, el nacimiento de las primeras Facultades de Ciencias (hasta entonces los estudios de ciencias constituían una sección de la Facultad de Filosofía) y la promulgación de la Ley de Instrucción Pública (1857) más conocida como Ley Moyano.

En esta ley se van a fijar la estructura y los programas de la enseñanza primaria y secundaria. Y entre otras cosas los contenidos de matemáticas en ambos niveles.

La enseñanza primaria se divide en dos ciclos, elemental y superior. Los contenidos matemáticos del ciclo elemental se reducen a los *Principios de Aritmética, con el sistema de medidas, pesas y monedas*; y los del ciclo superior a los *Principios de Geometría, de Dibujo lineal y de Agrimensura*, aunque sólo para los niños; las niñas sustituirían estos contenidos por los *Elementos de Dibujo aplicado a las labores propias de su sexo*.

La Ley divide la enseñanza secundaria en dos periodos de tres cursos cada uno en los que se impartirán matemáticas sólo en los dos primeros cursos de ambos. En primero y segundo curso los contenidos son exclusivamente de *Aritmética*; en el cuarto curso *Aritmética y Álgebra*, y en el quinto curso *Geometría*

y *principios de Trigonometría y de Geometría Matemática*.

Como se puede observar la enseñanza de las matemáticas queda reducida a la Aritmética y la Geometría con algunas nociones de Álgebra. Este programa se va a mantener con ligeros cambios hasta el comienzo del siglo XX.

En 1900 se crea el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes. En 1901 y 1903 el Conde de Romanones va a elaborar dos Reales Decretos que regularán los exámenes y los contenidos del bachillerato hasta la Dictadura de Primo de Rivera.

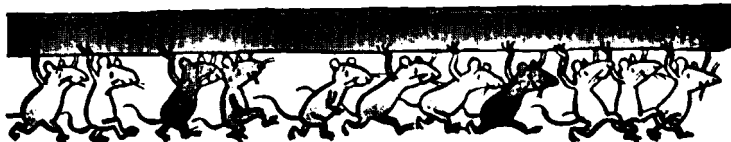
En el segundo se fijan los contenidos de matemáticas con un hecho sorprendente: sólo hay matemáticas los cuatro primeros años de los seis que consta el bachillerato. Los contenidos se limitan a Aritmética y Geometría los tres primeros cursos y sólo en el cuarto se amplían con Álgebra y Trigonometría.

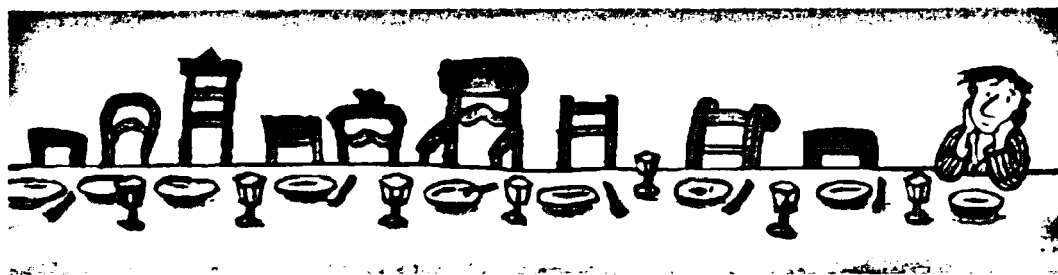
En ese mismo Real Decreto se fija el número máximo de alumnos por aula en... ¡150! Lo que nos informa claramente que la metodología de enseñanza se reducía a la conferencia magistral por parte del catedrático con escasa o nula participación de los alumnos. Los exámenes se van a convertir en el referente único para el profesor del avance del alumno.

La dictadura de Primo de Rivera va a reorganizar el bachillerato en las dos etapas que han pervivido hasta la Ley del 70, el bachillerato Elemental y el Universitario o Superior. Pero no va a alterar sustancialmente los programas.

Habrà que esperar hasta la II República (1934) para encontrar cambios significativos y algún aire de modernidad en lo que se refiere a las enseñanzas de las matemáticas no universitarias. El ministro Villalobos introduce un bachillerato de 7 años en el que las matemáticas se imparten todos los cursos. En los cuatro primeros cursos se introducen las nociones de Aritmética y Geometría de forma intuitiva y con un tratamiento cíclico. En quinto curso se introduce el Álgebra y la Geometría del espacio y un epígrafe sobre ¡Historia de las Matemáticas!; en sexto hace su aparición por primera vez el Análisis (el número real, límites, continuidad de funciones) y los números complejos, y en séptimo se profundiza en el Análisis y se introduce la Geometría Analítica (recta, circunferencia y cónicas). El cambio fue radical y muy en sintonía con los currículos europeos de la época.

La Guerra Civil, y sobre todo la posguerra, va a hacer retroceder los planes de estudio del bachillerato a la situación de principios de siglo; de las recién





tes innovaciones introducidas sólo la iniciación a la Geometría Analítica va a sobrevivir. Por otra parte la formación de maestros alcanza su mínimo. Se puede acceder a la Escuela Normal con 12 años y obtener el título de maestro tras tres cursos, es decir con 15 años.

La llegada de Joaquín Ruiz Jiménez al Ministerio de Educación Nacional en 1951 va a significar un intento de modernización y puesta al día de la estructura de la enseñanza primaria y secundaria y de los planes de estudio. Estos cambios van a verse reflejados de forma definitiva en el Plan de Estudios de 1957. Se consolida la división del bachillerato en elemental y superior, dividido este último en Ciencia y Letras y un curso de preparación a la Universidad, el famoso Preuniversitario.

En estos planes se hace mención explícita a normas didácticas. En lo referente a matemáticas podemos encontrar orientaciones como esta:

“Norma fundamental en la enseñanza de las matemáticas será la fundamentación sólida de los conocimientos como punto de partida indispensable para la ampliación y adquisición de otros nuevos. Las repeticiones, el ejercicio constante de cada mecanismo adquirido son indispensables medios didácticos...”

Curiosamente, en el mismo año en que se publican estas normas (1955), el profesor D. Pedro Puig Adam publicó su famoso “Decálogo de la Enseñanza de las Matemáticas”

1. *No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente*
2. *No olvidar el origen de las matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.*
3. *Presentar las matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.*
4. *Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.*
5. *Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.*
6. *Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conoci-*

miento.

7. *Promover en todo lo posible la autocorrección.*
8. *Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.*
9. *Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.*
10. *Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.*

Preciosos consejos, plenamente vigentes, que se adelantan a su época y constituyen una especie de voz clamando en el desierto metodológico de la práctica cotidiana en las clases de matemáticas de los centros de primaria y secundaria.

Las “Matemáticas Modernas”. La Ley Villar

Cuatro años más tarde, en 1959, va a tener lugar una reunión patrocinada por la OCDE que va a cambiar de manera radical el panorama de la educación matemática en algunos países de Europa y cuyos efectos llegarán a nuestro país con 10 años de retraso, pero con el mismo efecto nocivo. Es el Coloquio de Royaumont, donde al grito de “Abajo Euclides” una selección de expertos encabezados por los componentes del Grupo Bourbaki va a cambiar radicalmente los currículos de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria abriendo las puertas de las aulas de par en par a las “Matemáticas Modernas”.

En España, en 1962, se creó la *Comisión para el ensayo didáctico sobre la Matemática Moderna* que, bajo la dirección del catedrático de la Universidad Complutense D. Pedro Abellanas, fijará los tópicos que deben ser tratados desde la enseñanza primaria: Conjuntos, Operaciones con conjuntos, Producto cartesiano, Relaciones binarias, Aplicaciones entre conjuntos, Grupos, Anillos, Espacios vectoriales...

Estas ideas son las que van a inspirar los planes de estudio y las orientaciones metodológicas de la Ley General de Educación de 1970, la Ley Villar, en la que se crea la EGB, el BUP y el COU.

Aunque las intenciones eran buenas, reformar unos planes obsoletos, los resultados fueron lamentables. En la EGB se concedió una importancia

excesiva al estudio de conjuntos y estructuras algebraicas, presentadas de forma axiomática, en unas edades en que los alumnos difícilmente podían entender de qué les estaban hablando. Los nuevos planes trajeron consigo el abandono de la geometría sintética y del cálculo numérico, situación magistralmente planteada por Morris Kline en su libro *¿Por qué Juanito no sabe sumar? El fracaso de la Matemática Moderna* (2)

La situación en el BUP no era mucho mejor. El programa dividido en tres años comprendía estos temas:

1º BUP (5 clases semanales): Combinatoria; Números reales; Polinomios; Funciones polinómicas; Ecuaciones, inecuaciones y sistemas; Progresiones; Estadística y Números complejos.

Entre las orientaciones metodológicas, encontramos joyas como esta:

“el cuestionario se debe abordar partiendo de los conceptos de Anillo y Cuerpo introducidos en la EGB...”

2º BUP (4 clases semanales): Sucesiones y límites; Funciones reales de variable real; Límites y continuidad, Funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica; Derivadas y primitivas; Plano vectorial y afín.

3º BUP (4 clases semanales): Producto escalar; Trigonometría; Geometría analítica del plano; Números complejos; Derivadas; Integrales y Estadística.

Asimismo se fijaron los contenidos de las matemáticas de COU: Sistemas de ecuaciones lineales; Espacios afín y euclídeo tridimensionales; Cálculo diferencial e Integral y Cálculo de probabilidades.

En la práctica docente cotidiana, y a pesar de algunas declaraciones de los decretos en sentido contrario, los principios que inspiraban el desarrollo de estos planes de estudio eran:

- Presentación de los contenidos de forma axiomático-deductiva.
- Repetición de ejercicios similares como mecanismo para adquirir destrezas.
- Finalidad exclusiva como preparación para estudios universitarios de ciencias e ingenierías.

Estos planes de estudio han estado en vigor, con algunas ligeras modificaciones, hasta la llegada de la controvertida LOGSE.

La Reforma de la Enseñanza

La LOGSE va a implicar tres cambios radicales en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas:

Una transformación radical de la composición sociológica del alumnado en la Enseñanza Secunda-

ria Obligatoria (ESO), motivada por la obligatoriedad hasta los 16 años. En las aulas del segundo ciclo (14-16) va a aparecer un tipo de alumnado que antes era excluido del sistema educativo o derivado a la segunda red, la Formación Profesional. Esta situación va a dar origen a uno de los graves problemas de la Reforma, ante el que el profesorado no está preparado a responder y al que las administraciones educativas no encuentran una solución eficaz, el tratamiento de la diversidad dentro de las aulas.

Una transformación radical de los currículos, tanto en lo referente a los contenidos (por primera vez se incluyen contenidos distintos de los conceptuales, incluyendo contenidos procedimentales y sobre todo de actitudes), como, sobre todo, en lo que respecta a la metodología con la que desarrollar esos contenidos y a los mecanismos de evaluación. Estas orientaciones metodológicas ponen el énfasis en el carácter constructivo del conocimiento matemático, resaltando el hecho de que el aprendizaje de las matemáticas es inseparable de la actividad matemática del alumno. La “resolución de problemas” se convierte en uno de los ejes vertebradores del proceso de aprendizaje, huyendo de la idea de que la mera transmisión de saberes cerrados y acabados es el núcleo fundamental de la enseñanza matemática. Enfoque que recoge de forma casi completa las sugerencias del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de Estados Unidos publicados en su “Agenda para la Acción” y en sus “Stándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática” y por el Informe Cockcroft publicado en 1982 en el Reino Unido. De cualquier manera no hace falta ir tan lejos, los principios metodológicos que inspiran el currículo de matemáticas recogen de forma completa los consejos del citado anteriormente Decálogo de D. Pedro Puig Adam.

Por desgracia, el tercer aspecto, el cuantitativo es completamente negativo. Los contenidos de la ESO y de los bachilleratos no suponen, en la práctica y al final de la secundaria un recorte sustancial respecto de los del plan del 70, incluso en algún caso como el bachillerato de Ciencias Sociales incorpora contenidos nuevos como la inferencia estadística; además una metodología activa y participativa de los alumnos, incorporando nuevos medios tecnológicos y recursos diversificados, reclama más tiempo de clase para abordarlos con éxito. Sin embargo, el número real de horas de clase en la ESO se ha reducido de forma significativa respecto al antiguo BUP. Mientras el número de clases semanales en 7º y 8º de EGB y 1º y 2º de BUP, equivalentes por edad a los cuatro cursos de la ESO, eran de cuatro y de 60 minutos, en la actualidad las clases semanales de matemáticas en

todos los cursos de ESO es de tres y de 50 minutos. Una reducción sustancial que en la práctica hace imposible cumplir los objetivos propuestos con las orientaciones metodológicas indicadas.

La Reforma de la Reforma

La controvertida Reforma de las Humanidades ha salpicado de paso a las matemáticas. Por un lado, y es una noticia esperanzadora, se amplían el número de horas de clase a cuatro, pero curiosamente sólo en el primer ciclo de la ESO. Al mismo tiempo se incrementan los contenidos de 3º y de 4º de ESO y también del bachillerato de Ciencias, cursos en los que se mantienen los periodos lectivos actuales. Si ya es difícil abordar todos los contenidos del currículo actual con ese número de horas, el futuro programa será directamente inalcanzable.

Pero mirando con calma los contenidos propuestos en los borradores (confiemos que sólo sean borradores) de los Reales Decretos que recogen estas modificaciones, hay algo que llama la atención, y esta vez de forma negativa; aunque los objetivos se siguen manteniendo casi con las mismas formulaciones, los contenidos han sufrido una transformación

sustancial: ha desaparecido cualquier referencia a procedimientos y actitudes y los contenidos conceptuales se parecen sospechosamente... a los del plan de estudios del 70.

Confiemos que la sensatez y la cordura no nos haga retroceder en el tiempo porque, como dijo Napoleón:

“El desarrollo de los pueblos está íntimamente ligado al desarrollo de las matemáticas”

Y, añado yo, el desarrollo de las matemáticas depende directamente de la enseñanza de las mismas desde las edades más tempranas. ☒

Notas

- (1) *Liber Abaci*. Publicado en 1202. Para más información ver *Las Matemáticas en el Renacimiento Italiano* de Francisco Martín Casalderrey. Ed Nivola. Madrid 2000.
- (2) Kline, M. *EL fracaso de la Matemática Moderna*. Madrid: Siglo XXI, 1976
- (3) Publicados en España por la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Andalucía. Thales

Antonio Pérez Sanz. Jefe de Dpto. de Matemáticas del IES Salvador Dalí. Madrid

PUBLICIDAD