
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
FACULTAD DE CIENCIAS

Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas
Grupo de Física Nuclear



Dinámica de sistemas multiquark

PABLO GARCÍA ORTEGA

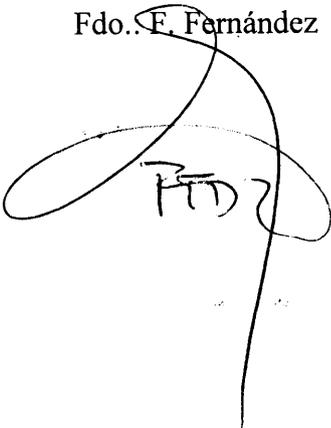
Abril de 2012

D. FRANCISCO FERNÁNDEZ GONZÁLEZ, CATEDRÁTICO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR, Y D. DAVID RODRÍGUEZ ENTEM, TITULAR DE UNIVERSIDAD DEL ÁREA DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR, MIEMBROS DEL INSTITUTO UNIVERSITARIO DE FÍSICA FUNDAMENTAL Y MATEMÁTICAS.

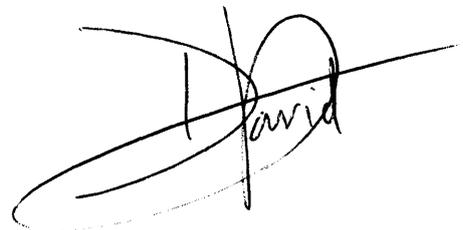
Autorizan la presentación del trabajo de tesis titulado "Dinámica de sistemas multiquark", realizado bajo su dirección por D. Pablo García Ortega.

Salamanca, 10 de abril de 2012

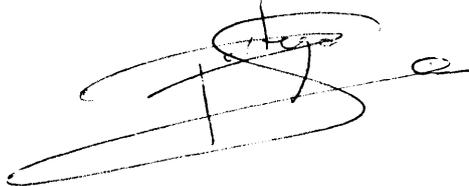
Fdo.: F. Fernández

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long vertical stroke extending downwards.

Fdo.: D. R. Entem

A handwritten signature in black ink, featuring a large loop and a horizontal line crossing through it.

Fdo: El doctorando

A handwritten signature in black ink, appearing to be a stylized name with a horizontal line at the bottom.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 7 |
| 1. Modelo quark constituyente | 13 |
| 1.1. Grupo $SU(3)$ | 13 |
| 1.2. Cromodinámica Cuántica | 15 |
| 1.3. Propiedades básicas de QCD | 17 |
| 1.3.1. Libertad asintótica | 17 |
| 1.3.2. Confinamiento | 19 |
| 1.3.3. Simetría quiral | 20 |
| 1.4. Modelizando QCD | 20 |
| 2. Método del Grupo Resonante | 25 |
| 2.1. Formulación de RGM | 26 |
| 2.2. RGM aplicado al sistema Hadrón-Antihadrón | 31 |
| 2.2.1. Estados bariónicos | 31 |
| 2.2.2. Estados mesónicos | 32 |
| 2.3. Cálculo de los kernels RGM | 35 |
| 2.3.1. Términos de interacción para Barión-Antibarión | 36 |
| 2.3.2. Términos de interacción para Barión-Mesón | 38 |
| 2.3.3. Términos de interacción para Mesón-Antimesón | 39 |
| 3. Formalismo de canales acoplados | 47 |
| 3.1. Introducción | 47 |
| 3.2. Teoría de scattering: Matriz S y matriz T | 49 |
| 3.3. Estados ligados y resonancias en un marco multicanal | 51 |
| 3.3.1. Acoplamiento de canales: Modelo 3P_0 | 51 |
| 3.3.2. Continuación analítica | 54 |
| 3.3.3. Resolución de la ecuación de Lippmann-Schwinger | 56 |
| 3.3.4. Cálculo de resonancias | 59 |
| 3.3.5. Generalización de los observables | 62 |
| 3.3.6. Anchuras parciales de desintegración | 64 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.3.7. | Desintegraciones y secciones eficaces de producción | 67 |
| 3.4. | Límite perturbativo | 75 |
| 3.5. | Formalismo con mesones inestables | 76 |
| 3.6. | Distorsión | 78 |
| 4. | Resultados | 81 |
| 4.1. | Introducción | 81 |
| 4.2. | Producción de extrañeza en colisiones protón-antiprotón | 82 |
| 4.2.1. | Secciones eficaces y formalismo de helicidad | 82 |
| 4.2.2. | Sistema nucleón-antinucleón: El protonio | 87 |
| 4.2.3. | Producción de extrañeza en el canal $\Lambda\bar{\Lambda}$ | 95 |
| 4.2.4. | Otras reacciones de producción de extrañeza | 107 |
| 4.3. | Estructuras moleculares en el espectro de mesones $c\bar{c}$ | 112 |
| 4.3.1. | El sector $J^{PC} = 1^{++}$: Las resonancias $X(3872)$ y $X(3940)$ | 112 |
| 4.3.2. | El sector $J^{PC} = 0^{++}$: Las resonancias $X(3915)$ e $Y(3940)$ | 126 |
| 4.3.3. | El sector $J^{PC} = 1^{--}$ | 128 |
| 4.4. | Estructuras moleculares en el espectro de mesones <i>open-charm</i> | 136 |
| 4.5. | El barión encantado $\Lambda_c(2940)^+$ como molécula pentaquark | 140 |
| 5. | Resumen y Conclusiones | 147 |
| A. | Coordenadas de Jacobi | 151 |
| A.1. | Sistema Barión-Antibarión | 151 |
| A.2. | Sistema Mesón-Antimesón | 153 |
| A.3. | Sistema Barión-Mesón | 155 |
| B. | Coeficientes de Spin-Sabor-Color | 157 |
| B.1. | Método de Cálculo | 157 |
| B.2. | Coeficientes para el sistema Mesón-Antimesón | 158 |
| B.3. | Coeficientes para el sistema Barión-Antibarión | 170 |
| B.4. | Coeficientes para el sistema Barión-Mesón | 188 |
| C. | Convenio de C-paridad | 193 |

Introducción

La Física de Partículas ha sido de las disciplinas científicas que más ha progresado gracias a los importantes descubrimientos que se han producido. A principios de 1960, los físicos se encontraron con una enorme dificultad a la hora de clasificar el inmenso conjunto de partículas, denominado *zoo hadrónico*, que se descubrían día tras día en los aceleradores de partículas. El número de supuestos constituyentes básicos de la materia era tan elevado que les hizo pensar en la posibilidad de que los hadrones descubiertos hasta entonces tuvieran una subestructura. El desarrollo del Modelo Quark, a mediados de la década de los 60, permitió clasificar todos los hadrones detectados hasta la fecha como compuestos de partículas más fundamentales.

En sus inicios, esta clasificación comenzó con una sucesión de investigaciones que proponían a diferentes partículas conocidas como componentes fundamentales. El primer intento de simplificación fue el artículo de 1949 de E. Fermi y C. N. Yang [1] en el que discutían la posibilidad de que la partícula π recientemente descubierta no fuera elemental, sino un compuesto de nucleón-antinucleón. El modelo de Sakata extendió estas ideas en 1955, tras el descubrimiento de la extrañeza [2], sin mucho éxito. Murray Gell-Mann se dio cuenta del problema de la clasificación de los bariones y trabajó en ello a principios de 1961, hasta que sus descubrimientos fueron publicados en una pequeña sección de la revista *Physical Review* [3]. En la misma, sugirió al grupo de Lie $SU(3)$ como simetría aproximada de la interacción fuerte y unificó en un mismo formalismo a bariones y mesones como compuestos de unos elementos a los que llamó *quarks*. Su denominado *Camino Óctuple*, la clasificación de partículas en representaciones irreducibles de $SU(3)$, no fue aceptado de forma unánime por la comunidad científica hasta el descubrimiento de la partícula Ω^- tres años más tarde.

La unificación producida por el Modelo Quark supuso una revolución en la Física de Partículas y en nuestra comprensión de la teoría de la interacción fuerte, denominada Cromodinámica Cuántica (QCD). Algunas propiedades de las partículas, como sus elevados momentos magnéticos anómalos, constituían una evidencia de la estructura compleja de las mismas, y pudieron ser explicadas gracias a la hipótesis de Gell-Mann. Hoy en día existen múltiples evidencias experimentales sobre la existencia de los quarks y gluones. Entre ellas, en Física de Altas Energías, donde se producen quarks libres que se hadronizan inmediatamente, el número relativo de eventos $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ y $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ encajan con las predicciones de QCD.

Es importante destacar que el Modelo Quark ha permitido describir numerosos procesos de la Física de Hadrones, desde propiedades de las propias partículas, como los momentos magnéticos y espectroscopía, hasta procesos de dispersión, creación o desintegración, en base a las interacciones entre sus componentes fundamentales. Gracias a este marco unificado, el análisis de numerosas reacciones, tanto a nivel de secciones eficaces como observables de spin, ha hecho avanzar el conocimiento de la Cromodinámica Cuántica en su versión menos conocida: la de baja y media energía. Como cabe esperar, en el rango de energía relevante, del orden del GeV, el tratamiento perturbativo de la Cromodinámica Cuántica no está justificado, de ahí que se deba recurrir a métodos no perturbativos si se quieren describir los datos experimentales. De hecho, la descripción en términos de grados de libertad de bariones y mesones es muy satisfactoria, tanto a la hora de describir interacciones barión-barión [4–6] (hasta 1 GeV aproximadamente), como scattering barión-mesón [7–9] o mesón-mesón [10] a energías incluso más altas.

Un proceso interesante que plantea incógnitas es el de creación de hiperones, donde podemos apreciar la creación de extrañeza en un proceso de colisión barión-antibarión como $p\bar{p}$. Esta reacción ha recibido una especial atención en las últimas décadas, ya que no sólo se ha medido la sección eficaz total y diferencial en un rango amplio de energías, sino también observables de spin, que son esenciales para poder discriminar entre los diferentes modelos teóricos que han ido surgiendo. Existen datos de alta precisión en la región del threshold obtenidos en la Colaboración PS185 en el anillo de antiprotones de baja energía (LEAR) del CERN. Por otra parte, el conocimiento de esta interacción ayudará a desentrañar futuros experimentos en la instalación *Facility for Antiproton and Ion Research* (FAIR) del GSI, en especial en su versión de baja energía FLAIR.

El proceso $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ es un canal particularmente atractivo para estudiar diferentes descripciones de la producción de extrañeza. Una gran cantidad de datos de sección eficaz y observables de scattering han sido producidos por el experimento PS185 de LEAR, en CERN [11–14] a diferentes energías. Estas medidas muestran dos características importantes: La primera es la dependencia de energía de la sección eficaz inmediatamente después del threshold. No puede ser explicada por una onda parcial S dominante, encontrándose que incluso valores altos de momento angular contribuyen a baja energía. La segunda es que la producción del par $\Lambda\bar{\Lambda}$ ocurre predominantemente en un estado de triplete, estando la contribución de singlete casi completamente suprimida. Estas dos propiedades imponen severos límites a los modelos teóricos.

Aunque todos los modelos propuestos describen con mayor o menor detalle la mayoría de datos disponibles, existen observables que son más sensibles a las diferentes aproximaciones teóricas. En 1992, Haidenbauer [15] sugirió que el parámetro de depolarización D_{nn} podría ser útil para testar la dinámica subyacente de diferentes modelos. Los modelos basados en interacciones tensoriales, llamados modelos de intercambio de mesón, tenían D_{nn} cerca de su límite inferior ($D_{nn} = -1$ para una interacción tensorial pura), mientras que los modelos de quark-gluón conducían a $D_{nn} \approx \frac{2}{3}$, debido a la dependencia de spin de la interacción. Las interacciones en el estado inicial y final podrían cambiar

ligeramente estos resultados, aunque la predicción de ambos mecanismos persiste. Los datos experimentales de D_{nn} junto con la transferencia de spin K_{nn} fueron publicados por el experimento PS185/3 en 2004 [16]. Los modelos teóricos existentes fueron incapaces de describir dichos datos [17, 18].

En este trabajo aportamos un estudio de este proceso en base al renovado interés creado por los últimos experimentos. El gran número de datos experimentales disponibles en este proceso permiten comparar diferentes mecanismos de producción, y por lo tanto, diferentes modelos de aproximación de QCD a baja energía, entre los que están el Modelo Quark Constituyente del Grupo de Física Nuclear de la Universidad de Salamanca [19, 20]. Este modelo describe satisfactoriamente y de una manera unificada la interacción NN [19], el espectro de bariones [21] y el espectro de mesones ligeros [22]. Entre los aspectos que pueden ayudar a estudiar el proceso en cuestión tenemos la introducción de aniquilación a través de bosones de Goldstone, y la posibilidad de implementar las interacciones en el estado inicial y final en el mismo esquema de quarks constituyentes. Podemos generalizar la interacción $p\bar{p}$ del modelo a baja energía [23] y describir $Y\bar{Y}$ siguiendo el mismo camino, siendo $Y \equiv \{\Lambda, \Sigma\}$.

Por otro lado, el estudio del espectro hadrónico en base a la hipótesis del Modelo Quark ha permitido explicar muchas propiedades de los estados experimentales descubiertos en las últimas décadas. Sin embargo, el modelo sencillo de mesones como agregados de quark-antiquark $q\bar{q}$ y bariones como agregados de tres quarks qqq podría no ser suficiente para describir la compleja estructura de los espectros hadrónicos. De hecho, la existencia de estados exóticos de quarks y gluones es una predicción de QCD que aún no ha sido observada en la Naturaleza, aunque nada impide su formación. Entre ellas, tenemos los multiquarks (tetraquarks $q\bar{q}q\bar{q}$, pentaquarks $qqqq\bar{q}, \dots$), los glueballs (partículas formadas exclusivamente por gluones) y los hadrones híbrido (formados por quarks y gluones no virtuales).

Aunque hasta la fecha no se han detectado estos objetos complejos en los experimentos de forma clara, sí se han observado estados que son posibles candidatos a hadrones exóticos. Entre ellos tenemos a las partículas $f_0(980)$ y $f_1(1320)$ como posibles tetraquarks; $f_0(1370)$, $f_0(1500)$, $f_0(1710)$, $\eta(1410)$ y $\eta(1460)$ como candidatos a glueballs y $\pi_1(1400)$, $\pi_1(1600)$, $\pi(1800)$, $\pi_2(1900)$ que podrían ser hadrones híbridos. El problema de estos estados exóticos es que son resonancias muy estrechas, y su medida precisa requeriría una resolución superior a la alcanzable por los experimentos actuales. Además, su vida media es muy corta, por lo que su estructura interna se debe estudiar en base a sus desintegraciones, que deben ser medidas a su vez con gran precisión, lo que finalmente nubla nuestra comprensión al no tener resolución suficiente. Sin embargo, en base a las pistas que nos dan los colisionadores, el espectro hadrónico puede esconder sorpresas que ahonden en nuestra comprensión de QCD a baja energía.

De hecho, casi 40 años después de la llamada Revolución de Noviembre [24], la espectroscopía del charmonio continúa sorprendiendo, resistiéndose a una interpretación sencilla. Una nueva era empezó en abril de 2003 cuando la Colaboración BaBar anun-

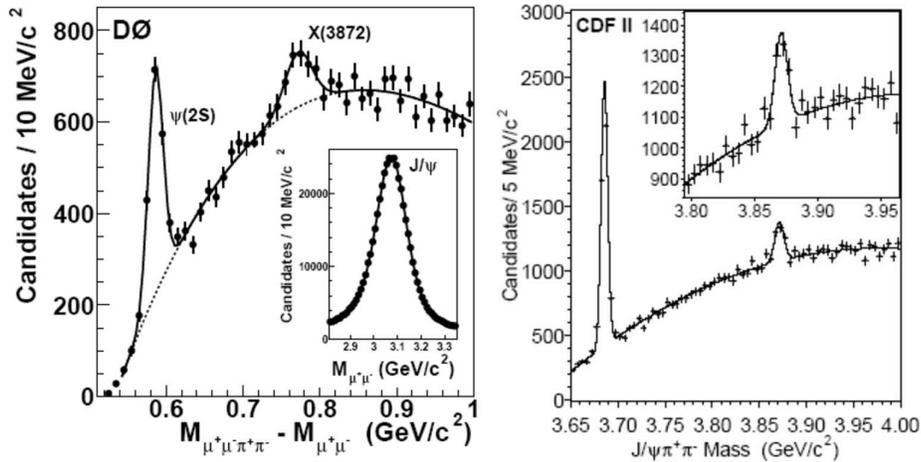


Figura 1: Detección experimental de la partícula $X(3872)$ por las Colaboraciones $D0$ (izquierda) y CDF (derecha), donde se aprecia a su vez el pico correspondiente al estado $\Psi(2S)$.

ció el descubrimiento de los enigmáticos $D_{s0}(2317)$ y $D_{s1}(2460)$ en el sector *open-charm*. Dichos estados tienen masas más ligeras que las esperadas por los modelos quark, así como anchuras menores.

Desde entonces, CLEO, Belle, Fermilab y BES se han unido a la búsqueda, y el número de nuevos estados ha aumentado espectacularmente. Algunos estados recientemente encontrados en el sector de encanto oculto podrían aceptar una descripción simple $q\bar{q}$ (como se ha propuesto para las partículas $X(3940)$, $Y(3940)$ y $Z(3930)$ como excitaciones radiales de χ_{c0} , χ_{c1} y χ_{c2} respectivamente, aunque estas asignaciones plantean incógnitas), pero otras parecen más elusivas, en particular la partícula $X(3872)$ (ver Fig. 1).

El debate sobre la naturaleza de estos estados continúa abierto. Los modelos conservadores [25–28] sugieren reconsiderar el efecto de los numerosos canales mesónicos abiertos sobre los parámetros de los estados convencionales $c\bar{c}$, predichos por los modelos basados en potenciales. Sin embargo, aproximaciones más recientes admiten la existencia de estados exóticos en el espectro del charmonio. Entre ellos tenemos modelos que sugieren estados multiquark, incluyendo estados moleculares (dos mesones débilmente ligados) [29–36], o tetraquarks (estados de cuatro quarks fuertemente ligados) [37–39]; pero también existe la posibilidad de híbridos ($c\bar{c} + gluon$ con grados de libertad del gluón excitados) [40–42], glueballs, etc.

Una indicación directa de la existencia de estados exóticos sería la observación de estados con números cuánticos prohibidos para los estados de charmonio tradicionales. Sin embargo, el descubrimiento de estados de difícil asignación en el espectro usual del charmonio plantea cuestiones aun más interesantes, al poder estudiar de primera mano

el acoplamiento entre sectores de dos y cuatro quarks. Es, pues, un marco idóneo para estudiar la extensión del Modelo Quark a configuraciones con estructuras más complejas.

Esta tesis se estructura de la siguiente forma:

En el capítulo 1 se presenta el Modelo de Quarks Constituyentes de la Universidad de Salamanca, que supone una de las bases sobre las que se desarrollará el trabajo. Analizaremos las características básicas del modelo, que toma de la Cromodinámica Cuántica, y mostraremos los potenciales derivados en espacio de momento.

El capítulo 2 se dedica a presentar el Método del Grupo Resonante (RGM) para el sistema de seis, cinco y cuatro partículas (barión-barión, barión-mesón y mesón-mesón, respectivamente) en espacio de momentos. Estudiaremos los factores de forma de dichos sistemas, necesarios para describir la interacción en términos de grados de libertad de quarks.

El estudio de estados moleculares mesón-mesón implicará utilizar un mecanismo que nos permita acoplar los sistemas $q\bar{q}$ y $q\bar{q}q\bar{q}$. El modelo elegido será el denominado 3P_0 , presentado en el capítulo 3. Gracias a este mecanismo podremos formar nuevos estados ligados y estudiar el efecto de los thresholds abiertos en el espectro mesónico.

En el mismo capítulo abordaremos la ampliación de este formalismo para abarcar estados por encima del threshold, o resonancias. Para ello necesitaremos primero la matriz T , calculada con la ecuación de Lipmann-Schwinger. A su vez, será necesario realizar una continuación analítica de la matriz S para localizar sus polos, que se relacionan con los estados físicos. También estudiaremos las secciones eficaces de producción, tanto de forma exacta como con la llamada aproximación de Flattè. En el caso del sector 1^{--} estudiaremos la producción a través de aniquilación e^+e^- . Debido a que la interacción electromagnética es bien conocida, este tipo de reacciones nos permiten profundizar en la estructura subyacente de las resonancias.

El capítulo 4 estará dedicado a presentar los resultados para diferentes cálculos de canales acoplados. En primer lugar aplicaremos los análisis anteriores al proceso de producción de hiperones. Compararemos los resultados del modelo con los datos experimentales disponibles para las reacciones $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$, $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$ y $p\bar{p} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$.

A continuación, ahondaremos en el estudio de diferentes acoplamientos en los sectores del espectro del charmonio, con sus asignaciones a estados experimentales conocidos, como la partícula $X(3872)$, $Y(4008)$, $D_{s1}(2460)^+$ y $\Lambda_c(2940)^+$, entre otras. En cada caso, estudiaremos los datos disponibles e intentaremos explicar sus propiedades en el marco anteriormente citado.

Como nota final, cabe mencionar que en todo el trabajo se han utilizado unidades naturales, es decir, $\hbar = c = 1$

Capítulo 1

Modelo quark constituyente

1.1. Grupo $SU(3)$

El concepto de carga de color fue introducida por Oscar W. Greenberg [43] poco después de que la existencia de los quarks fuera propuesta por primera vez en 1964, para intentar explicar por qué los quarks podían coexistir dentro de algunos hadrones que aparentemente violaban el principio de exclusión de Pauli. Por ejemplo, la partícula Δ^{++} se encontraría en un estado totalmente simétrico si sólo consideramos los números cuánticos orbital, spin y sabor. La idea resultó ser acertada y desde entonces las evidencias experimentales sobre la existencia de este grado de libertad no han dejado de crecer.

El grupo $SU(3)$ desempeña un papel muy importante en el contexto de las interacciones fuertes. Por un lado, $SU(3)$ de color es el grupo gauge de la Cromodinámica Cuántica (QCD) y por el otro, en el sector ligero (u, d, s), $SU(3)$ de sabor aparece como una simetría global aproximada del espectro de hadrones, colocándose estos en las representaciones irreducibles de $SU(3)$.

Debido a su importancia y por su aplicación posterior, reseñaremos brevemente las propiedades de este grupo y las de su álgebra de Lie. Los elementos del grupo $SU(3)$ son todas las matrices 3×3 unitarias y de determinante igual a 1, que podemos escribir como:

$$U(\Theta) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a \frac{\lambda_a}{2}\right) \quad (1.1)$$

donde Θ_a son números reales y λ_a son los generadores infinitesimales del grupo, ocho matrices linealmente independientes que forman los generadores del grupo y que se denominan matrices de Gell-Mann. Si tomamos la convención usual para estas matrices,

podemos encontrar una representación explícita,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Estas matrices satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_a}{2} &= i \frac{\partial U}{\partial \Theta_a} (0, \dots, 0), \\
\lambda_a &= \lambda_a^\dagger, \\
Tr(\lambda_a) &= 0, \\
Tr(\lambda_a \lambda_b) &= 2\delta_{ab}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Podemos determinar la estructura del grupo de Lie a partir de las relaciones de conmutación de las matrices de Gell-Mann,

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}. \tag{1.4}$$

Aquí observamos que el grupo SU(3) dispone de un carácter no conmutativo, reflejado en las constantes de estructura f_{abc} , completamente antisimétricas y reales. Para calcular su valor hacemos uso de la expresión,

$$f_{abc} = \frac{1}{4i} Tr([\lambda_a, \lambda_b] \cdot \lambda_c) \tag{1.5}$$

A parte de las relaciones de conmutación podemos definir unas relaciones de anticonmutación como,

$$\left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} + d_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \tag{1.6}$$

donde las nuevas constantes d_{abc} son totalmente simétricas al intercambio de dos índices cualesquiera y se calculan a través de,

$$d_{abc} = \frac{1}{4} Tr(\{\lambda_a, \lambda_b\} \cdot \lambda_c) \tag{1.7}$$

Por último, en la Tabla 1.1 y Tabla 1.2 mostramos los valores no nulos de f_{abc} y d_{abc} respectivamente.

| | | | | | | | | | |
|-----------|-----|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------------|----------------------|
| (abc) | 123 | 147 | 156 | 246 | 257 | 345 | 367 | 458 | 678 |
| f_{abc} | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Cuadro 1.1: Constantes de estructura de las relaciones de conmutación f_{abc}

| | | | | | | | | |
|-----------|----------------------|----------------|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| (abc) | 118 | 146 | 157 | 228 | 247 | 256 | 338 | 344 |
| d_{abc} | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| (abc) | 355 | 366 | 377 | 448 | 558 | 668 | 778 | 888 |
| d_{abc} | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

Cuadro 1.2: Constantes de estructura de las relaciones de anticonmutación d_{abc}

1.2. Cromodinámica Cuántica

La simetría gauge se ha convertido en una herramienta esencial en el estudio de la física de partículas, empleada para generar interacciones entre campos de materia a partir del intercambio de bosones de gauge sin masa. Un ejemplo sencillo de teoría renormalizable con simetría gauge es la Electrodinámica Cuántica (QED), de donde podemos aprender a construir una teoría invariante gauge partiendo de un lagrangiano libre. El lagrangiano libre para electrones es invariante bajo la simetría global $U(1)$, es decir,

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow e^{-i\Theta}\Psi, \\ \mathcal{L}_{free} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi &\rightarrow \mathcal{L}_{free}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Este tipo de transformación de fase global se llama transformación de gauge de primer tipo. Ahora, si queremos ir un paso más allá y pedir invarianza bajo transformaciones de gauge locales, $\Theta(x)$, tal que el lagrangiano de QED siga siendo invariante, necesitamos introducir un cuadripotencial A_μ . Representa un campo vectorial sin masa y se comporta bajo una transformación de gauge como $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Theta/e$. Así obtenemos el lagrangiano final de QED siguiente,

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.9)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. El acoplamiento debido a la invarianza gauge se obtiene más fácilmente reemplazando ∂_μ por la derivada covariante en el lagrangiano libre:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (1.10)$$

Esto se denomina acoplamiento mínimo electromagnético. Con esta definición es fácil ver que $D_\mu\Psi(x) \rightarrow \exp\{-i\Theta(x)\}D_\mu\Psi(x)$.

En la ecuación 1.9 aparece un término que presenta el cuadrado del tensor de fuerza y que describiría la dinámica del campo gauge, haciendo que éste no sea un campo externo sin más. Es interesante resaltar que no se incluye el término de masa $M^2 A^2/2$ porque violaría la invarianza gauge y por lo tanto se requiere que los bosones gauge no sean masivos.

La Cromodinámica Cuántica es la teoría gauge de la interacción fuerte. El lagrangiano de QCD puede derivarse del mismo modo que el de QED imponiendo invarianza gauge con el grupo SU(3) de color en el lagrangiano libre,

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{q}_f(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)q_f(x) \quad (1.11)$$

donde m_f es una matriz de masa diagonal y q_f es el campo de materia de QCD con sabor f , definido como tres vectores del campo de color, es decir,

$$q_f \equiv (q_f^1, q_f^2, q_f^3) \quad (1.12)$$

siendo q_f^α un campo de quark de color α y sabor f . Estos campos se pueden presentar en seis estados de sabor y tres de color. Imponemos una invarianza gauge local en este lagrangiano cuando transformamos los campos de quark por

$$q_f \rightarrow \exp\left[-i\sum_{a=1}^8\Theta_a(x)\frac{\lambda_a^C}{2}\right]q_f = U(x)q_f. \quad (1.13)$$

Es decir, cada campo de quark se transforma con la representación fundamental de SU(3) de color. Para lograr invarianza debemos introducir un cierto número de campos gauge en analogía con lo que se hace en QED. El número de campos gauge necesarios es igual al número de generadores del grupo, en este caso son 8. Así, la derivada covariante de la ecuación 1.10 consta de ocho campos independientes $\mathcal{A}_{\mu,a}$ llamados *gluones*,

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - ig\sum_{a=1}^8\left(\frac{\lambda_a^C}{2}\right)_{ij}\mathcal{A}_{\mu,a}(x), \quad (1.14)$$

con $g = \sqrt{4\pi\alpha_S}$ y donde los campos gluónicos se transforman como los miembros de la representación adjunta de SU(3). La interacción entre quarks y gluones es independiente del sabor del quark. El lagrangiano de QCD tiene, por lo tanto, la siguiente expresión,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,c,b,t}\bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu,a}\mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (1.15)$$

De la invarianza gauge del lagrangiano obtenemos la propiedad de transformación de los campos gauge,

$$\frac{\lambda_a^C}{2}\mathcal{A}_{\mu,a}(x) \rightarrow U(x)\frac{\lambda_a^C}{2}\mathcal{A}_{\mu,a}(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}\partial_\mu U(x)U^\dagger(x) \quad (1.16)$$

que a su vez implica que la derivada covariante se transforme igual que los campos, esto es, $D_\mu q_f \rightarrow U(x)D_\mu q_f$.

Siguiendo el paralelismo con QED introducimos la generalización del tensor de fuerza para el caso no abeliano

$$\mathcal{G}_{\mu\nu,a} = (D_\mu \otimes \mathcal{A}_\nu)_a = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + gf_{abc} \mathcal{A}_{\mu,b} \mathcal{A}_{\nu,a}, \quad (1.17)$$

suponiendo sumas en índices repetidos. Podemos, a partir de la Ec. 1.16, calcular la transformación del tensor de fuerza bajo SU(3), que resulta ser,

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{\lambda_a^C}{2} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \rightarrow U(x) \mathcal{G}_{\mu\nu} U^\dagger(x) \quad (1.18)$$

Usando una de las identidades de las ecuaciones 1.3, el término que contiene el cuadrado del tensor de fuerza en el lagrangiano de QCD se puede escribir como,

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}_C(\mathcal{G}_{\mu\nu} \mathcal{G}^{\mu\nu}) \quad (1.19)$$

invariante bajo la transformación de la Ec. 1.18.

Este término puramente gluónico no sólo contiene la parte dinámica del campo gauge, sino también los vértices de la interacción de tres y cuatro gluones acoplados a g y g^2 respectivamente. Este carácter no abeliano es la diferencia básica con QED y hace la teoría no lineal, razón por la cual se encuentran tantas complicaciones a la hora de intentar resolverla.

1.3. Propiedades básicas de QCD

Hay tres propiedades relevantes de QCD que corresponden a tres diferentes límites donde algunas características importantes de la teoría han sido demostradas.

1.3.1. Libertad asintótica

La Libertad asintótica fue demostrada por Gross y Wilczek [44] y por Politzer [45], ambos en 1973, siendo uno de los aspectos más relevantes de QCD. Corresponde al límite de muy alta energía, en el que los quarks llevan un gran momento y por consiguiente pueden estar muy juntos. En este límite, la constante de acoplamiento entre quarks y gluones cae rápidamente permitiendo un tratamiento perturbativo. Como consecuencia de esto, es posible entender un gran número de experimentos de alta energía donde aparecen jets de hadrones, pensando en quarks que se comportan como partículas libres dentro de los hadrones, es decir, como partones, y que se visten con pares $\bar{q}q$ del vacío a medida que su energía decrece.

En una teoría no abeliana como QCD los gluones también llevan carga de color. Como consecuencia, un gluón virtual emitido por un quark no sólo ve la carga de color de otro quark, o de un par virtual quark-antiquark, sino que también la carga de otros gluones. El efecto combinado de los diagramas de Feynman nos lleva a una constante de acoplamiento efectiva quark-quark de la forma,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g_s^2(Q^2)}{4\pi} = \alpha_s^{(0)} \left[1 - \frac{2}{3}f \frac{\alpha_s^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + 11 \frac{\alpha_s^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right] \quad (1.20)$$

donde $\alpha_s^{(0)} = (g_s^0)^2/4\pi$, g_s^0 es la constante de acoplamiento, f el número de sabores que contribuyen a la correspondiente energía, Q^2 el momento transferido en el proceso y Λ un parámetro de escala.

Es posible eliminar el cut-off Λ y $\alpha_s^{(0)}$ de la Ec. 1.20 mediante técnicas de renormalización. Pero para hacer una discusión cualitativa de los resultados utilizaremos un método más corto y diferenciaremos 1.20 respecto a $\ln Q^2$. La ecuación resultante ya no contiene al cut-off y podemos reemplazar $\alpha_s^{(0)}$ por la cantidad $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ que no depende del cut-off. Así llegamos a la ecuación diferencial siguiente [46, 47],

$$\frac{d\bar{\alpha}_s(Q^2)}{d \ln Q^2} = -(11 - \frac{2}{3}f) \frac{\bar{\alpha}_s^2(Q^2)}{4\pi} \quad (1.21)$$

Esta ecuación se puede integrar [44, 45] para dar la constante de acoplamiento fuerte como función del momento transferido,

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \frac{\bar{\alpha}_s(Q_0^2)}{1 + (11 - \frac{2}{3}f)[\bar{\alpha}_s(Q_0^2)/4\pi] \ln(Q^2/Q_0^2)} \quad (1.22)$$

siendo Q_0^2 el momento transferido de referencia para un valor de la constante de acoplamiento conocido a partir de los experimentos. La ecuación 1.22 nos dice que, aunque a bajas energías la constante de acoplamiento efectiva quark-gluón puede ser alta, ésta decrece a medida que la energía aumenta. En particular, en el límite de momento transferido alto obtenemos,

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) \simeq \left(\frac{33 - 2f}{12\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{-1} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0 \quad (1.23)$$

lo que en esencia nos describe la libertad asintótica. Nos permite, como hemos comentado con anterioridad, justificar el uso de quarks como partones en experimentos de alta energía al poder tomarlos como partículas puntuales libres. La restricción $f \leq 16$ nos da un límite superior al número de sabores de quark permitidos para que la libertad asintótica se mantenga en el dominio de energías altas.

Sin embargo, nuestro objetivo es que la expresión para $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ no dependa de un punto de renormalización arbitrario Q_0^2 . Afortunadamente, es posible expresar $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ en función de un parámetro invariante del grupo de renormalización (Λ),

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) \simeq \left(\frac{33 - 2f}{12\pi} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-1} \quad (1.24)$$

tal que hemos expresado las cantidades Q_0 y $\bar{\alpha}_s(Q_0^2)$ en el mismo parámetro de escala,

$$\Lambda^2 = Q_0^2 \exp \left(- \frac{1}{[(33 - 2f)/12\pi] \bar{\alpha}_s(Q_0^2)} \right) \quad (1.25)$$

que es invariante bajo transformaciones de escala de la forma $Q_0'^2 = \lambda^2 Q_0^2$. El valor de Λ hay que determinarlo a partir de los experimentos, pues la teoría no nos lo proporciona. De acuerdo con PDG Λ tiene un valor del orden de los 300 MeV, siendo $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ menor de 0.15 para energías por encima de 30 GeV, empezando en este dominio el tratamiento perturbativo de la teoría. Como consecuencia de esto, casi todas las características relevantes de la espectroscopía de hadrones caen dentro del régimen no perturbativo.

1.3.2. Confinamiento

El Confinamiento es una propiedad importante de QCD y que aún no ha sido rigurosamente probada. Experimentalmente todavía no se ha detectado ningún quark libre o partícula con carga de color. Así pues, independientemente de la energía de la partícula participante en la colisión, los productos de experimentos de alta energía donde los quarks juegan un gran papel son hadrones sin color. Esto lleva a la idea de confinamiento: los quarks prefieren agregarse formando partículas sin carga de color.

Diversos formalismos han intentado probar el confinamiento de QCD. Aquel que ha logrado un resultado más satisfactorio es *lattice* QCD, una formulación de la teoría original en un espacio-tiempo discreto, preservando sus simetrías y propiedades. En *lattice* QCD el confinamiento parece emerger de forma natural del lagrangiano. Al medir energía frente a distancia, se observa que el potencial de un par quark-antiquark crece linealmente con la distancia en un tratamiento puramente gluónico. Si a este cálculo le permitimos acoplarse a pares $\bar{q}q$ la pendiente del confinamiento rompe abruptamente a una constante debido a que el proceso de creación de pares $\bar{q}q$ es más favorable energéticamente que separar cada vez más el par quark-antiquark original [48]. Esto se puede modelizar con un potencial lineal cuya pendiente decrece paulatinamente hasta una constante [49].

Otra forma de mostrar el confinamiento de QCD viene del estudio del comportamiento de la constante de acoplamiento quark-gluón cuando el momento transferido tiende a cero. De la Ec. 1.24 observamos que $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ crece mucho a medida que nos aproximamos a la zona de momento transferido bajo, lo que corresponde a largas distancias. Como consecuencia, la fuerza que mantiene unidos a los quarks aumenta haciendo imposible separarlos. El punto débil de este argumento es que es precisamente en ese límite donde el tratamiento perturbativo usado para calcular $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ deja de ser válido.

1.3.3. Simetría quiral

La simetría quiral aparece en QCD en el límite en el que los quarks tienen masa cero. La masa corriente de los quarks, que aparece en el lagrangiano de QCD, es finita y no nula, pero si la comparamos con la escala hadrónica, ésta es muy pequeña. Así, aunque la simetría quiral sólo sea una simetría exacta en el límite de masa cero, en la práctica se considera una buena simetría para el sector ligero, quarks u y d , y para el extraño s , aunque su masa sea de 150 MeV y sea discutible esta incorporación.

Al contrario que la simetría de isospín, que da lugar a la conservación del vector corriente de isospín, la identificación de la corriente vector-axial no es tan sencilla debido a que la simetría se encuentra rota de forma espontánea. Diremos, en primera aproximación, que la rotura espontánea de una simetría significa que el hamiltoniano de la interacción cumple dicha simetría pero su estado de vacío no. Así, como consecuencia de esto, por el teorema de Goldstone aparecen modos no masivos llamados bosones de Goldstone que se acoplan con los fermiones de la teoría. En QCD la simetría quiral cumple esta propiedad, siendo el pión un bosón de Goldstone. El pión debería tener masa nula si la corriente estuviera exactamente conservada, pero como los quarks tienen masa corriente distinta de cero, el pión adquiere la masa que vemos en los experimentos. Aun así, observamos que esta masa es muy inferior a la escala hadrónica confirmando que la simetría es aproximada y que es un bosón de Goldstone.

El hecho de que el pión sea un bosón de Goldstone implica que a energías bajas los procesos hadrónicos están dominados por piones y por tanto todos los observables físicos pueden ser expresados como una expansión en masa y momento del pión. Esta idea es la base de la Teoría Quiral de Perturbaciones, muy eficiente a la hora de describir la física hadrónica a bajas energías.

1.4. Modelizando QCD

Como ya hemos comentado, el carácter no abeliano de QCD, sumado a que la teoría no es perturbativa a bajas energías, hace que su estudio sea muy complicado. Por lo tanto, se han desarrollado diferentes técnicas para abordar el problema, que resumimos a continuación:

- *Lattice* QCD, un método no perturbativo para resolver QCD como una teoría gauge, formulada en un retículo de puntos en el espacio tiempo. Los campos de quarks se definen en los nodos del retículo mientras que los campos de gluones se definen en las uniones que conectan nodos vecinos.
- Modelización, que consiste en tomar las propiedades más relevantes de QCD y construir a partir de ellas una teoría fenomenológica que proporcione resultados que se adapten bien a los experimentales.

Los modelos de quarks constituyentes surgen de los primeros análisis de los momentos magnéticos del protón y el neutrón, que se explicaban considerando que ambos estaban formados por quarks (constituyentes) con una masa del orden de 300 MeV. Describen de forma fenomenológica el confinamiento de quarks y la rotura espontánea de la simetría quiral a partir de potenciales efectivos, además de incorporar efectos perturbativos de QCD como el intercambio de gluones. Desde los orígenes del modelo de quarks, se creyó que los hadrones estaban construidos a partir de quarks constituyentes (masivos). Actualmente este fenómeno de la masa constituyente se explica a partir de la rotura espontánea de la simetría quiral original $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ a ciertas escalas del momento.

Un modelo que explica el origen de la rotura de la simetría quiral es el modelo de líquido de instantones de Dyakonov *et al.* [50]. En dicho modelo, el propagador de los quarks se ve modificado por la interacción con los modos cero del líquido de instantones, siendo un instantón una solución localizada de la ecuación de movimiento del gluón $D_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ de QCD. Sin embargo, independientemente del mecanismo por el que los quarks adquieran masa dinámica, un lagrangiano invariante bajo transformaciones quirales puede ser

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M(q^2)U^{\gamma_5})\Psi \quad (1.26)$$

donde $U^{\gamma_5} = \exp(i\pi^a \lambda^a \gamma_5 / f_\pi)$, siendo f_π la constante de desintegración del pión, λ^a las matrices SU(3) de sabor, π^a denota los campos pseudoescalares ($\vec{\pi}, K_i, \eta_8$) con $i = 1 \dots 4$ y $M(q^2)$ es la masa del quark constituyente.

La expresión de la masa del quark constituyente en función del momento puede ser obtenida a partir de la teoría, pero es posible parametrizarla como $M(q^2) = m_q F(q^2)$ donde $M(q^2 = 0) = m_q$ es la masa del quark constituyente ligero y $M(q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Además,

$$F(q^2) = \left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

donde Λ determina la escala a la que la simetría quiral se rompe.

Podemos expandir U^{γ_5} en términos de campos de bosón como,

$$U^{\gamma_5} = 1 + \frac{i}{f_\pi} \gamma_5 \lambda^a \pi^a - \frac{1}{2f_\pi^2} \pi^a \pi^a + \dots \quad (1.28)$$

teniendo que el primer término genera la masa del quark constituyente y el segundo da cuenta del intercambio de un bosón entre quarks. La principal contribución del tercer término viene del intercambio de dos piones correlacionados que puede ser modelizado en términos del intercambio de una partícula escalar (σ). Insertando la Ec. 1.28 en el lagrangiano 1.26 obtenemos el lagrangiano más simple invariante bajo la transformación quiral $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ con una masa constituyente dependiente de la escala y potenciales escalares y pseudoescalares.

La forma explícita de estos potenciales se obtiene tras una reducción no relativista de las consiguientes amplitudes de Feynman para cada proceso. Los diferentes términos del potencial contienen una parte central, tensorial y de spín-órbita, dependiendo del carácter del operador, y que agruparemos de la forma,

$$V_{qq}(\vec{q}_{ij}) = V_{qq}^C(\vec{q}_{ij}) + V_{qq}^T(\vec{q}_{ij}) + V_{qq}^{SO}(\vec{q}_{ij}) \quad (1.29)$$

donde C representa la parte central, T la tensorial y SO la de spín-órbita.

El potencial anterior presenta cuatro contribuciones diferentes,

$$V_{qq}(\vec{q}_{ij}) = V_{\pi}(\vec{q}_{ij}) + V_{\sigma}(\vec{q}_{ij}) + V_K(\vec{q}_{ij}) + V_{\eta}(\vec{q}_{ij}) \quad (1.30)$$

Por las características del modelo conviene dar las expresiones de los potenciales de intercambio de bosones de Goldstone en espacio de momento. Las ventajas de trabajar en espacio de momentos en vez de en espacio de configuración las expondremos en el siguiente capítulo, a la hora de desarrollar el método RGM.

Así, los potenciales no relativistas generados en la aproximación estática para los bosones de Goldstone son,

$$\begin{aligned} V_{\pi}(\vec{q}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_i m_j} \frac{\Lambda_{\pi}^2}{\Lambda_{\pi}^2 + q^2} \frac{(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q})}{m_{\pi}^2 + q^2} (\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j), \\ V_{\sigma}(\vec{q}) &= -\frac{g_{ch}^2}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda_{\sigma}^2}{\Lambda_{\sigma}^2 + q^2} \frac{1}{m_{\sigma}^2 + q^2}, \\ V_K(\vec{q}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_i m_j} \frac{\Lambda_K^2}{\Lambda_K^2 + q^2} \frac{(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q})}{m_K^2 + q^2} \sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \cdot \lambda_j^a), \\ V_{\eta}(\vec{q}) &= -\frac{g_{ch}^2}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda_{\eta}^2}{\Lambda_{\eta}^2 + q^2} \frac{(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q})}{m_{\eta}^2 + q^2} [\cos \theta_p (\lambda_i^8 \cdot \lambda_j^8) - \sin \theta_p] \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde \vec{q} es el momento transferido, $\vec{\sigma}_i$ y $\vec{\tau}_i$ son las matrices de Pauli de spin e isospin, respectivamente, del quark i , λ_i^a las matrices de Gell-Mann de sabor del quark i . Vemos que aparece el ángulo de mezcla θ_p debido a que consideramos a η como una partícula física mezcla del octete y del singlete. Los potenciales se dan trabajando con estados de momento definido normalizados a 1.

Por lo demás, $g_{ch}^2/4\pi$ es la constante de acoplo entre los bosones de Goldstone y los quarks constituyentes dada por $g_{ch} = m_q/f_{\pi}$, m_i es la masa del quark constituyente, m_{π} , m_K y m_{η} son las masas de los bosones de Goldstone fijadas en sus valores experimentales, salvo m_{σ} que viene determinada por la relación $m_{\sigma}^2 \simeq m_{\pi}^2 + 4m_{u,d}^2$, y Λ_{π} , Λ_{σ} , Λ_K y Λ_{η} son los cut-offs relacionados con la escala de energía.

En estas expresiones están incluidas la parte central y tensorial. Para separarlas haremos uso de la relación,

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q}) = \frac{1}{3} q^2 (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) + [\vec{q} \otimes \vec{q}]^2 \cdot [\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_j]^2 \quad (1.32)$$

En el apéndice B damos las claves para manejar estas expresiones, ya que sólo darán como resultado la introducción de unos coeficientes de spin-isospin-color en los potenciales.

En el sector de quarks pesados la simetría quiral está explícitamente rota, y el intercambio de bosones de Goldstone no permite reproducir la estructura hiperfina para mesones pesados. Más allá de la escala a la que se rompe la simetría quiral, uno espera que la dinámica esté gobernada por efectos perturbativos de QCD. Esto es, las fluctuaciones del gluón en el vacío de instantones, que se puede modelizar a partir del potencial de intercambio de un gluón (OGE) reproduciendo entonces la fenomenología de mesones pesados satisfactoriamente. Haciendo referencia al trabajo de Rujula *et al* [51], el intercambio de un gluón viene dado por el lagrangiano (derivado de la ecuación 1.15),

$$\mathcal{L}_{gqq} = i\sqrt{4\pi\alpha_s}\bar{\Psi}\gamma_\mu G_c^\mu \lambda^c \Psi \quad (1.33)$$

donde λ^c son las matrices SU(3) de color, G_c^μ es el campo del gluón y α_s es la constante de acoplamiento quark-gluón.

En espacio de momentos aparece el potencial de intercambio de un gluón dado por,

$$V_{OGE}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} (\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j) 4\pi\alpha_s \left\{ \frac{1}{q^2} - \frac{1}{4m_i m_j} \left(1 + \frac{2}{3} (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j) \right) + \frac{1}{4m_i m_j} \frac{1}{q^2} [\vec{q} \otimes \vec{q}]^2 \cdot [\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_j]^2 \right\} \quad (1.34)$$

siendo $\vec{\lambda}_i$ las matrices de Gell-Mann de color del quark i y α_s la constante de acoplamiento fuerte.

El modelo requiere una constante de acoplamiento fuerte que dependa de la escala de forma efectiva, para poder cubrir el espectro de energías que permita describir los mesones desde los más ligeros hasta los más pesados. Esta constante de acoplamiento no puede obtenerse de la expresión usual a 1-loop ya que ésta diverge cuando $Q \rightarrow \Lambda_{QCD}$.

Como hemos indicado anteriormente, las expresiones obtenidas para α sólo son estrictamente válidas en el régimen perturbativo. En el régimen no perturbativo es necesario eliminar la divergencia a momentos bajos, el llamado *freezing* de la constante de acoplamiento fuerte desarrollado en varios estudios teóricos [52, 53] y usado en diferentes modelos fenomenológicos [54, 55]. Esta hipótesis viene reforzada por el hecho de que la constante de acoplamiento quark-gluón depende de Q^2 de forma logarítmica, es decir, tiene un crecimiento lento. Por otra parte, la fenomenología sugiere que la constante debe ser ligeramente diferente en cada sector de sabor. Para dar cuenta de estos dos fenómenos utilizamos una constante de acoplamiento dependiente de escala dada por,

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_0}{\ln\left(\frac{\mu^2 + \mu_0^2}{\Lambda_0^2}\right)} \quad (1.35)$$

donde la escala viene dada por la masa reducida de los quarks intervinientes μ , y α_0, μ_0 y Λ_0 son parámetros libres del modelo.

Por último, cualquier modelo de QCD debe incorporar otro efecto no perturbativo, el confinamiento, es decir, los hadrones siempre aparecen en singletes de color. Para estudiar este problema debemos recurrir a estudios en *Lattice* QCD, ya que sigue siendo una

cuestión abierta cómo obtener la forma analítica del confinamiento a partir de la teoría QCD. De *Lattice* QCD sabemos que los sistemas $q\bar{q}$ se reproducen bien a cortas distancias con un potencial lineal. Éste puede ser interpretado físicamente como un quark y un antiquark unidos por un flujo de color unidimensional, que representaría el intercambio gluónico. Pero si permitimos la creación espontánea de pares $q\bar{q}$ ligeros, es decir, acoplamiento a dos mesones, esto provoca el apantallamiento de las cargas de color, produciendo un potencial quark-antiquark que no crece continuamente sino que se satura a un valor máximo produciendo eventualmente la rotura del tubo de flujo de color unidimensional que une quark-antiquark [48]. Esto puede modelizarse con un potencial lineal cuya pendiente disminuye lentamente con la distancia interquark [49]. En espacio de momentos, este potencial lineal se expresa como

$$V_{CON}(\vec{q}) = \left[(\Delta - a_c) \cdot \delta^{(3)}(\vec{q}) + \frac{a_c \mu_c}{\pi^2} \frac{1}{(q^2 + \mu_c^2)^2} \right] (\vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c) \quad (1.36)$$

donde Δ es una constante global para ajustar el origen de energías, a_c es la fuerza de confinamiento y μ_c es el parámetro de apantallamiento. En espacio de coordenadas, a cortas distancias este potencial se reduce a una forma lineal $a_c \mu_c (\vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c)$ mientras que es constante a grandes distancias $(\Delta - a_c) (\vec{\lambda}_i^c \cdot \vec{\lambda}_j^c)$.

En resumen, el modelo incorpora de QCD un efecto perturbativo, que es el intercambio de un gluón, y dos efectos no perturbativos, que son la rotura espontánea de la simetría quiral y el confinamiento. Con esto construimos la interacción quark-quark que tiene la forma siguiente, donde usamos la notación n para los quarks ligeros u y d y s para el quark extraño.

$$V_{q_i q_j} = \begin{cases} q_i q_j = nn \Rightarrow V_{CON} + V_{OGE} + V_\pi + V_\sigma + V_\eta \\ q_i q_j = ns \Rightarrow V_{CON} + V_{OGE} + V_\sigma + V_K + V_\eta \\ q_i q_j = ss \Rightarrow V_{CON} + V_{OGE} + V_\sigma + V_\eta \end{cases} \quad (1.37)$$

El potencial correspondiente a $q\bar{q}$ se obtiene a partir del de qq según J. Vijande *et al* [22]. En el caso de $V_K(\vec{r}_{ij})$ la G paridad no está bien definida, por lo tanto hay que variar la transformación $\lambda_1^a \cdot \lambda_2^a \rightarrow \lambda_1^a \cdot (\lambda_2^a)^T$ y así recuperamos el cambio de signo en el caso del intercambio de un pseudoescalar entre dos quarks extraños.

Capítulo 2

Método del Grupo Resonante

En este capítulo describiremos el método del grupo resonante RGM que utilizaremos en la descripción de los sistemas multiquark barión-antibarión, barión-mesón y mesón-antimesón en términos de grados de libertad de quarks. Este método, propuesto por Wheeler [56] en 1937, fue diseñado originalmente para describir núcleos como estructuras formadas por varias subestructuras de nucleones.

El método se basa en considerar grupos de partículas ligadas (*clusters*), de las cuales conocemos la estructura interna, y construir sus interacciones a partir de las interacciones entre sus constituyentes. El formalismo permite estudiar de forma conjunta procesos de scattering, reacciones y estados ligados. La principal ventaja de RGM es que incluye el principio de exclusión de Pauli de forma correcta, es decir, toma funciones de onda totalmente antisimétricas en el caso de fermiones constituyentes. También considera cinemática no relativista, lo que permite tratar sin problemas el movimiento del centro de masas.

En primer lugar desarrollaremos la formulación general, para luego aplicarlo a los casos particulares de dos bariones, barión-mesón y dos mesones. Para el sistema de dos bariones, dado que trabajaremos con sistemas partícula-antipartícula, los únicos términos que contribuirán serán los diagramas directos. Lo mismo sucede en el sistema barión-mesón que estudiaremos, donde no es necesario introducir diagramas de intercambio. Sin embargo, en el sistema de dos mesones aparecerán tanto diagramas directos como de intercambio.

Esta diferencia se debe a dos efectos: Por un lado, debemos asegurar la antisimetría de la función de onda al intercambio de dos quarks indistinguibles entre clusters, lo que introduce diagramas de intercambio. Por otro lado, cabe la posibilidad de conectar sistemas mesón-antimesón, que de otra forma permanecerían desconexos, mediante un proceso de disociación o *rearrangement* en el que los mesones intercambian entre si una pareja de quarks cualquiera. En ciertos casos, estos dos efectos pueden ser equivalentes si consideramos que el diagrama de intercambio que da cuenta de la antisimetría puede ser desarrollado en la base de los sistemas, con el contenido quark adecuado, conectados

mediante disociación. De esta manera, si introducimos todos los estados mesón-mesón posibles estaremos teniendo en cuenta la antisimetría correctamente. A efectos prácticos, esta base puede ser truncada a los sistemas con más acoplamiento, obviando estados muy alejados energéticamente y que no contribuyen prácticamente a la interacción.

A continuación nos centraremos en encontrar una expresión general para el factor de forma directo y, por último, estudiaremos la disociación de mesones a partir de los diagramas de intercambio para poder acoplar sistemas mesón-antimesón de otra forma disconexos.

2.1. Formulación de RGM

En esta sección presentaremos una formulación del método RGM en espacio de momentos para el caso sencillo de dos clusters, sin considerar funciones de distorsión que tengan en cuenta posibles deformaciones de los clusters durante el proceso de interacción.

Para simplificar la exposición del método RGM empezaremos considerando dos clusters A y B compuestos por N fermiones de igual masa, algunos de los cuales serán indistinguibles, y trabajaremos exclusivamente con los grados de libertad espaciales. Denotaremos con \vec{p}_{ξ_C} las coordenadas de Jacobi internas del cluster C , \vec{P} el momento relativo entre los dos agregados y \vec{P}_{CM} el momento del centro de masas. Con esto conseguimos una equivalencia entre los conjuntos $(\vec{p}_{\xi_A}, \vec{p}_{\xi_B}, \vec{P}, \vec{P}_{CM})$ y $(\vec{p}_i, \vec{p}_j)_{i \in A, j \in B}$. Consideraremos que la estructura interna de los clusters viene descrita por la función de onda $\phi_C(\vec{p}_{\xi_C})$. Así, la función de onda del sistema de dos clusters vendrá expresada por,

$$\langle \vec{p}_{\xi_A} \vec{p}_{\xi_B} \vec{P} \vec{P}_{CM} | \psi \rangle = \mathcal{A} \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \chi(\vec{P}) Z(\vec{P}_{CM}) \right] \quad (2.1)$$

donde \mathcal{A} es el antisimetrizador del sistema, $Z(\vec{P}_{CM})$ es la función de onda que describe el movimiento del centro de masas, que al final podrá ser obviado del cálculo, y $\chi(\vec{P})$ es la función de onda que describe el movimiento relativo de los clusters, que constituye la incógnita de nuestro problema.

Supondremos que las partículas participantes interaccionan exclusivamente a través de potenciales a dos cuerpos, tal que el hamiltoniano del sistema pueda ser escrito como,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij} - T_{CM} \quad (2.2)$$

donde T_{CM} es la energía cinética del centro de masas, m es la masa del fermión y V_{ij} la interacción entre éstos.

La dinámica del sistema vendrá descrita por la ecuación de Schrödinger,

$$(\mathcal{H} - E_T) |\psi\rangle = 0 \quad (2.3)$$

que podemos expresar de forma proyectada,

$$\langle \delta\psi | \mathcal{H} - E_T | \psi \rangle = 0 \quad (2.4)$$

con $\delta\psi$ una variación arbitraria de la función de onda.

Como ya hemos comentado, la incógnita de nuestro problema es $\chi(\vec{P})$, por lo tanto, para poder separarla del antisimetrizador en la ecuación 2.1, introducimos un parámetro continuo \vec{P}_i ,

$$\langle \vec{p}_{\xi_A} \vec{p}_{\xi_B} \vec{P} \vec{P}_{CM} | \psi \rangle = \int \mathcal{A} \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) Z(\vec{P}_{CM}) \right] \chi(\vec{P}_i) d\vec{P}_i \quad (2.5)$$

Si al variar la función de onda sólo variamos la del movimiento relativo, ésta se escribirá en coordenadas,

$$\langle \delta\psi | \vec{p}_{\xi'_A} \vec{p}_{\xi'_B} \vec{P}' \vec{P}'_{CM} \rangle = \int \mathcal{A} \left[\phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_f) Z^*(\vec{P}'_{CM}) \right] \delta\chi^*(\vec{P}_f) d\vec{P}_f \quad (2.6)$$

Así pues, introduciendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de Schrödinger proyectada 2.4 obtenemos,

$$\int \left[{}^{RGM}H(\vec{P}_f, \vec{P}_i) - E_T {}^{RGM}N(\vec{P}_f, \vec{P}_i) \right] \chi(\vec{P}_i) \delta\chi^*(\vec{P}_f) d\vec{P}_i d\vec{P}_f = 0 \quad (2.7)$$

siendo,

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H(\vec{P}_f, \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{P}'_{CM} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} d\vec{P}_{CM} \\ &\quad \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_f) Z^*(\vec{P}'_{CM}) \\ &\quad \mathcal{H} \mathcal{A} \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) Z(\vec{P}_{CM}) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} {}^{RGM}N(\vec{P}_f, \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{P}'_{CM} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} d\vec{P}_{CM} \\ &\quad \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_f) Z^*(\vec{P}'_{CM}) \\ &\quad \mathcal{A} \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) Z(\vec{P}_{CM}) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde hemos tenido en consideración que \mathcal{A} y \mathcal{H} conmutan y $\mathcal{A}^2 = \mathcal{N}\mathcal{A}$, con \mathcal{N} un factor de normalización, por lo que desaparece el antisimetrizador del término en $\delta\psi$. Al eliminar el antisimetrizador que proviene del bra podemos integrar en la coordenada \vec{P}_f , recuperando así la coordenada del momento relativo final \vec{P}' . Además, la coordenada del centro de masas no se ve afectada por el antisimetrizador, pues éste, en último término,

se puede escribir como suma de términos que intercambien partículas. Con esto, podemos sacar $Z(\vec{P}_{CM})$ del antisimetrizador y, como el hamiltoniano no depende del centro de masas, integrar en la coordenada \vec{P}_{CM} , que si suponemos Z normalizada nos daría un factor 1. Así los kernels se pueden escribir de la forma,

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \\ &\quad \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) \mathcal{H} \mathcal{A} \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \right], \\ {}^{RGM}N(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \\ &\quad \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) \mathcal{A} \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como la Ec. 2.7 es válida para todo $\delta\psi$ se cumple,

$$\int \left[{}^{RGM}H(\vec{P}', \vec{P}_i) - E_T {}^{RGM}N(\vec{P}', \vec{P}_i) \right] \chi(\vec{P}_i) d\vec{P}_i = 0 \quad (2.11)$$

Podemos observar que llegamos a una ecuación de tipo Schrödinger para la función de onda relativa de los dos clusters.

Escribimos ahora el antisimetrizador como:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \mathcal{A}_A \mathcal{A}_B \quad (2.12)$$

siendo \mathcal{A}_C el antisimetrizador del cluster C y \mathcal{A}' el antisimetrizador que intercambia fermiones entre los clusters. Supondremos que las funciones de onda internas $\phi_C(\vec{p}_{\xi_C})$ están antisimetrizadas adecuadamente, de forma que:

$$\mathcal{A}_C [\phi_C(\vec{p}_{\xi_C})] = \phi_C(\vec{p}_{\xi_C}) \quad (2.13)$$

Definiendo el antisimetrizador $\mathcal{A}' = 1 + \mathcal{A}''$ separaremos los términos correspondientes a la parte directa, donde no se intercambian fermiones, y la parte de intercambio, donde sí se intercambian fermiones entre clusters. Así:

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H(\vec{P}', \vec{P}_i) &= {}^{RGM}H_D(\vec{P}', \vec{P}_i) + {}^{RGM}H_E(\vec{P}', \vec{P}_i) \\ {}^{RGM}N(\vec{P}', \vec{P}_i) &= {}^{RGM}N_D(\vec{P}', \vec{P}_i) + {}^{RGM}N_E(\vec{P}', \vec{P}_i) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde expresamos,

$$\begin{aligned} {}^{RGM}H_D(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \\ &\quad \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) \mathcal{H} \phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \\ {}^{RGM}H_E(\vec{P}', \vec{P}_i) &= \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{P} \\ &\quad \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) \mathcal{H} \mathcal{A}'' \left[\phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \delta^3(\vec{P} - \vec{P}_i) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

y de igual forma para los términos de normalización. Para el caso de la normalización directa podemos, no obstante, realizar todas las integrales fácilmente, obteniendo:

$${}^{RGM}N_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i) \quad (2.16)$$

suponiendo todas las funciones de onda normalizadas a 1.

Por otro lado, si suponemos que el hamiltoniano es invariante bajo transformaciones de Galileo podremos descomponerlo de la forma,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}' \quad (2.17)$$

siendo \mathcal{H}_C el hamiltoniano del cluster C compuesto por la energía cinética de los fermiones respecto al centro de masas del cluster y las interacciones V_{ij} entre fermiones del mismo cluster y siendo el hamiltoniano relativo de los clusters el siguiente,

$$\mathcal{H}' = \frac{\vec{P}^2}{2\mu} + \sum_{i \in A, j \in B} V_{ij} \quad (2.18)$$

es decir, la suma de la energía cinética relativa de los dos clusters A y B más la interacción entre fermiones de diferentes clusters, con $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ la masa reducida del sistema formado por los dos clusters.

Teniendo en cuenta que los operadores H_C sólo actúan sobre las coordenadas internas de los clusters para el término directo se obtiene,

$${}^{RGM}H_C(\vec{P}', \vec{P}_i) = E_C \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i) \quad (2.19)$$

siendo E_C la energía del cluster C . Para la energía cinética relativa, de igual forma, se obtiene que el término directo es,

$${}^{RGM}T_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \frac{\vec{P}_i^2}{2\mu} \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i) \quad (2.20)$$

ya que el operador es diagonal y sólo se aplica sobre \vec{P} .

Solamente falta hablar del término de interacción. Así, definimos el kernel directo como,

$${}^{RGM}V_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \sum_{i \in A, j \in B} \int d\vec{p}'_{\xi'_A} d\vec{p}'_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} \phi_A^*(\vec{p}'_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}'_{\xi'_B}) V_{ij}(\vec{P}', \vec{P}_i) \phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \quad (2.21)$$

donde, como vemos, se ha integrado sobre todos los momentos internos de los clusters y la dependencia en los momentos relativos inicial y final vienen dadas simplemente por la dependencia de las interacciones V_{ij} en esos momentos.

Un caso interesante es cuando las interacciones son locales, es decir, dependientes del momento transferido $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ donde \vec{p}' y \vec{p} son respectivamente los momentos

relativos final e inicial de los quarks que interaccionan. Así, el kernel directo también sería local, dependiendo de $(\vec{P}' - \vec{P})$. Conviene darse cuenta de que el momento relativo entre quarks de diferentes clusters se puede escribir como el momento relativo \vec{P} entre clusters más momentos internos de cada cluster, de forma que el momento transferido total dependerá de $(\vec{P}' - \vec{P})$.

De esta forma nuestro hamiltoniano se expresará, habiendo restado ya la energía cinética del centro de masas,

$${}^{RGM}H_D(\vec{P}', \vec{P}_i) = \left(\frac{\vec{P}_i^2}{2\mu} + E_A + E_B \right) \delta^3(\vec{P}' - \vec{P}_i) + {}^{RGM}V_D(\vec{P}', \vec{P}_i) \quad (2.22)$$

Quedando la ecuación de Schrödinger proyectada como,

$$\left(\frac{\vec{P}'^2}{2\mu} - E \right) \chi(\vec{P}') + \int {}^{RGM}V_D(\vec{P}', \vec{P}_i) \chi(\vec{P}_i) d\vec{P}_i = 0 \quad (2.23)$$

con $E = E_T - E_A - E_B$ energía relativa entre los clusters.

Esta es la ecuación de Schrödinger que tenemos que resolver para los términos directos. Proyectamos en momento angular multiplicando por los armónicos esféricos correspondientes y realizamos las integraciones angulares quedando,

$${}^{RGM}H_D^{L'M'}(P', P_i) = \int d\vec{p}_{\xi'_A} d\vec{p}_{\xi'_B} d\vec{p}_{\xi_A} d\vec{p}_{\xi_B} d\hat{P}' d\hat{P}_i Y_{L'M'}^*(\hat{P}') Y_{LM}(\hat{P}_i) \phi_A^*(\vec{p}_{\xi'_A}) \phi_B^*(\vec{p}_{\xi'_B}) \mathcal{H} \phi_A(\vec{p}_{\xi_A}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta ahora los grados de libertad de spin nos vemos obligados a trabajar con estados de momento angular total definido J . Los potenciales de interacción quark-quark V_{ij} serán tensores de orden cero en el espacio de momento angular total, que en general se escriben como producto escalar de operadores en el espacio orbital por operadores en el espacio de spin de la forma,

$$V_{ij} = \mathcal{O}_L^{(k)} \cdot \mathcal{O}_S^{(k)} \quad (2.25)$$

Para calcular los kernels en una base de momento angular definido J usaremos la expresión,

$$\begin{aligned} & \langle \alpha' L' S' J' M' | \mathcal{O}_L^{(k)} \cdot \mathcal{O}_S^{(k)} | \alpha L S J M \rangle = (-1)^{J'+S'+L} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \times \\ & \times \left\{ \begin{array}{ccc} L & S & J \\ S' & L' & k \end{array} \right\} \sum_{\alpha''} \langle \alpha' L' || \mathcal{O}_L^{(k)} || \alpha'' L \rangle \langle \alpha'' S' || \mathcal{O}_S^{(k)} || \alpha S \rangle \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde α denota todos los números cuánticos restantes necesarios para describir al sistema. Así, para el caso del operador en momento angular se procederá calculando el elemento

de matriz reducido con el teorema de Wigner-Eckart, como se ha descrito anteriormente. Para el operador en espacio de spin se utilizarán técnicas de SU(2) descritas en el Apéndice B.

Con todo esto, la ecuación de Schrödinger proyectada 2.23 toma la forma de una ecuación con varios canales, en la que aparecen sumas a canales intermedios. Igualmente, si tenemos potenciales que permitan transiciones a otros clusters aparecerá una suma en los estados intermedios. Así, podremos escribir 2.23 como,

$$\left(\frac{P'^2}{2\mu} - E\right) \chi_{B_1' B_2'}^{JL'S'}(P') + \sum_{B_1 B_2 L S} \int P_i^2 dP_i {}^{RGM}V_{D B_1 B_2 J L S}^{B_1' B_2' J L' S'}(P', P_i) \chi_{B_1 B_2}^{J L S}(P_i) = 0 \quad (2.27)$$

2.2. RGM aplicado al sistema Hadrón-Antihadrón

Antes de aplicar el método RGM a los sistemas Barión-Antibarión, Barión-Mesón y Mesón-Antimesón debemos elegir una expresión para las funciones de onda internas de los agregados. Supondremos que nuestros hadrones son agregados de quark-antiquark (en el caso de mesones) o de tres quarks (en el caso de bariones) con masa constituyente, confinados en una región del espacio y que interactúan entre si por medio de un potencial deducido del lagrangiano que describe la dinámica del sistema. La forma de tratar mesones y bariones será diferente, y estudiaremos ambos casos por separado.

2.2.1. Estados bariónicos

Al tratarse de un problema de tres cuerpos la utilización de soluciones exactas derivadas del lagrangiano resulta complicada. Por esto, es normal recurrir a diferentes técnicas para abordar el problema de una forma más sencilla. Una muestra de esto lo tenemos en [20], donde se demuestra que el potencial NN obtenido por la aproximación de Born-Oppenheimer usando las funciones gaussianas, con un determinado valor de la anchura, muestran resultados muy similares a las funciones de onda exactas, soluciones de la ecuación de Schrödinger.

Así pues, por simplicidad en el cálculo, tomaremos las funciones de onda radial de los quarks como gaussianas,

$$\psi(\vec{p}_i) = \prod_{i=1}^3 \left[\frac{b^2}{\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{b^2 p_i^2}{2}} \quad (2.28)$$

donde b denota el tamaño del barión. El uso de esta aproximación nos ayudará a simplificar el cálculo de los potenciales RGM, dado que las gaussianas son unas funciones internas muy adecuadas.

La función de onda 2.28 escrita en término de coordenadas de Jacobi se escribe,

$$\psi = \left[\frac{b^2}{3\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{b^2 P^2}{6}} \phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2}) \quad (2.29)$$

siendo \vec{P} el momento centro de masas del barión y \vec{p}_{ξ_1} y \vec{p}_{ξ_2} los momentos correspondientes a las coordenadas internas. La función de onda espacial interna del barión se expresa,

$$\phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2}) = \left[\frac{2b^2}{\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-b^2 p_{\xi_1}^2} \left[\frac{2\alpha b^2}{\pi} \right]^{\frac{3}{4}} e^{-\alpha b^2 p_{\xi_2}^2} \quad (2.30)$$

que tomaremos tanto para N como para Y (hiperón) y sus correspondientes antipartículas, cambiando simplemente el valor del parámetro α . La expresión del parámetro α en función de la masa de los quarks es, siguiendo a [57]:

$$\alpha = \frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot (m_1 m_2)}{(m_1 + m_2)^2 \cdot m_3} \quad (2.31)$$

obteniendo un resultado de $\alpha = \frac{3}{4}$ para N y $\alpha = 0,532$ para Y , donde Y representa a las partículas Λ y Σ .

La función de onda total del barión debe incluir los grados de libertad de spin, sabor y color, por lo tanto,

$$\psi_B = \phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2}) \chi_B \xi_c [1^3] \quad (2.32)$$

donde, como ya hemos dicho, $\phi_B(\vec{p}_{\xi_1}, \vec{p}_{\xi_2})$ denota los grados de libertad espaciales internos del barión, χ_B la función de onda spin-sabor acoplada a los números cuánticos del barión y $\xi_c [1^3]$ es el singlete de color.

Para desarrollar el método RGM para el sistema $B\bar{B}$ debemos construir la función de onda completa del sistema barión-antibarión. Por eso, partiendo de la función de onda de un barión dada por 2.29 tomamos como función de onda el producto $\psi_B \psi_{\bar{B}}$ acoplado a buenos números cuántico totales, multiplicada por una función de onda del movimiento relativo $\chi(\vec{P})$ del sistema. Debido a que nuestro problema involucra partículas distinguibles entre clusters distintos tomaremos como función de onda total,

$$\psi_{B\bar{B}} = \chi(\vec{P}) \psi_{B\bar{B}}^{SF} = \chi(\vec{P}) \phi_B(\vec{p}_{\xi_B}) \phi_{\bar{B}}(\vec{p}_{\xi_{\bar{B}}}) \chi_{B\bar{B}}^{SF} \xi_c [2^3] \quad (2.33)$$

donde $\phi_B(\vec{p}_{\xi_B})$ y $\phi_{\bar{B}}(\vec{p}_{\xi_{\bar{B}}})$ son las funciones de onda espaciales internas dadas por 2.30, $\chi_{B\bar{B}}^{SF}$ es la función de onda de spin-sabor de B y \bar{B} acopladas a spin-sabor total SF y $\xi_c [2^3]$ es el producto de los dos singletes de color.

2.2.2. Estados mesónicos

En este caso, al tratarse de un problema de dos cuerpos se puede resolver exactamente. Basándonos en estudios realizados con anterioridad sobre espectros mesónicos [58], en

el marco del modelo de quarks constituyentes que aquí consideramos, utilizaremos las funciones de onda solución de la ecuación de Schrödinger a dos cuerpos expandidas en base de gaussianas.

No necesitaremos el uso de antisimetrizadores debido a que el quark y el antiquark son distinguibles. Por lo tanto, la función de onda total del mesón será, incluyendo los grados de libertad de spin, sabor y color,

$$\Psi_M = \psi_M(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\chi_M\xi_c[1^3] \quad (2.34)$$

donde $\psi_M(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ denota los grados de libertad espaciales internos del mesón, χ_M la función de onda spin-sabor acoplada a los números cuánticos del mesón y $\xi_c[1^3]$ es el singlete de color.

A continuación concretaremos la función de onda espacial que usaremos. Una vez dispongamos de una base de funciones de onda adecuadas procederemos a calcular los kernels RGM.

GEM para sistemas a dos cuerpos

La complejidad de describir los sistemas físicos con precisión ha contribuido al desarrollo de numerosos métodos numéricos, que tratan de aproximarse al problema desde diferentes puntos de vista. Estos métodos han ayudado a despejar ambigüedades sobre procesos físicos poco conocidos de forma experimental debido a la dificultad de reproducirlos.

Uno de los métodos ampliamente utilizados es el Método de Expansión en Gaussianas [59] (o GEM por sus siglas en inglés). Fue propuesto por M. Kamimura en 1988 al realizar cálculos no adiabáticos a tres cuerpos, aplicados a la molécula muónica y a las colisiones muón-átomo. Estos sistemas servían de test de los modelos atómicos y moleculares ya que podían calcular un mayor número de observables físicos debido a la diferencia de masa del muón frente al electrón. El problema de los desarrollos en gaussianas es el aumento inabordable del número de parámetros. Sin embargo, Kamimura propone una solución inteligente para generar los parámetros de las gaussianas, con el objetivo de que estos sean mínimos.

El método variacional es una de las técnicas más extendidas a la hora de resolver problemas de autovalores. Presentan gran simplicidad y flexibilidad, aunque la elección de la base sobre la que se va a expandir la función de onda es de vital importancia para el cálculo. En este caso seguimos GEM particularizado a un sistema de dos cuerpos en espacio de momentos.

GEM fue concebido para resolver problemas a tres cuerpos, así pues, aplicarlo a un sistema de dos cuerpos es una trivialidad y M. Kamimura [59] lo realiza para testar el método.

La forma funcional de la base hace que GEM sea uno de los métodos que mejor describe tanto las correlaciones a corto alcance como el comportamiento asintótico de la función

de onda en la región de largo alcance. Además, la forma funcional de la parte radial de la función de onda hace que el cálculo de los elementos de matriz sea analítico en la mayor parte de los casos.

Consideremos la ecuación de Schrödinger para un sistema a dos cuerpos. Suponiendo un potencial central, la ecuación en espacio de momentos para la función de onda radial es,

$$\frac{p^2}{2\mu} \psi_{lm}(\vec{p}) + \int V(\vec{p}, \vec{p}') \psi_{lm}(\vec{p}') d^3 p' = E \psi_{lm}(\vec{p}) \quad (2.35)$$

donde μ es la masa reducida y $V(\vec{p}, \vec{p}')$ es un potencial central. Expandimos $\psi_{lm}(\vec{p})$ en la base de funciones gaussianas,

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(\vec{p}) &= \sum_{n=1}^{n_{max}} C_{nl} \phi_{nlm}^G(\vec{p}), \\ \phi_{nlm}^G(\vec{p}) &= \phi_{nl}(p) Y_{lm}(\hat{p}), \\ \phi_{nl}(p) &= (-i)^l \frac{N_{nl}}{(2\eta_n)^{l+3/2}} p^l e^{-\frac{p^2}{4\eta_n}}, \\ N_{nl} &= \left(\frac{2^{2+l} (2\nu_n)^{l+3/2}}{\sqrt{\pi} (2l+1)!!} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

con N_{nl} la constante de normalización de las funciones gaussianas $\langle \phi_{nlm}^G | \phi_{nlm}^G \rangle = 1$.

Los parámetros de rango se han escogido en progresión geométrica [59],

$$\begin{aligned} \nu_n &= \frac{1}{r_n^2} \\ r_n &= r_1 a^{n-1}, \quad n = 1, \dots, n_{max} \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde los parámetros libres son $\{n_{max}, r_1, r_{n_{max}}\}$ o $\{n_{max}, r_1, a\}$. De la progresión geométrica se deduce que la base de funciones gaussianas no es ortogonal, y satisface que el solapamiento entre vecinos cercanos, $\langle \phi_{nl}^G | \phi_{n-1l}^G \rangle$, es una constante independiente de n y es una característica de la base por la que se cree que el método funciona bien.

Los coeficientes de la expansión $\{c_{nl}\}$, y las autoenergías E , se determinan a partir del principio variacional de Rayleigh-Ritz dando lugar a un problema general de autovalores,

$$\sum_{n'=1}^{n_{max}} [(T_{nn'} + V_{nn'}) - EN_{nn'}] c_{n'l} = 0, \quad n = 1, \dots, n_{max} \quad (2.38)$$

o si generalizamos para canales acoplados tendremos,

$$\sum_{n'=1}^{n_{max}} \left[(T_{nn'}^\alpha - EN_{nn'}^\alpha) c_{n'l}^\alpha + \sum_{\alpha'}^{n^\circ \text{ canales}} V_{nn'}^{\alpha\alpha'} c_{n'l}^{\alpha'} \right] = 0, \quad \begin{aligned} n &= 1, \dots, n_{max} \\ \alpha &= 1, \dots, n^\circ \text{ canales} \end{aligned} \quad (2.39)$$

en el cual el único operador que mezcla estados es el potencial.

2.3. Cálculo de los kernels RGM

En esta sección describiremos el cálculo de los kernels RGM para el sistema hadrón-antihadrón. Una vez tenemos la función de onda total estamos en posición de aplicar la formulación RGM, que nos conduce a una ecuación para la función de onda relativa 2.27 que volvemos a escribir introduciendo los grados de libertad de sabor,

$$\left(\frac{P'^2}{2\mu} - E\right) \chi_{B'\bar{B}'}^{JL'S'T'}(P') + \sum_{B\bar{B}LST} \int P_i^2 dP_i {}^{RGM}V_{D\bar{B}\bar{B}JLST}^{B'\bar{B}'JL'S'T'}(P', P_i) \chi_{B\bar{B}}^{JLST}(P_i) = 0 \quad (2.40)$$

donde el kernels RGM directo viene dado por

$${}^{RGM}V_{D\bar{B}\bar{B}JLST}^{B'\bar{B}'JL'S'T'}(P', P_i) = \sum_{i \in B, j \in \bar{B}} \int d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{p}_{\xi_{\bar{B}}} d\vec{p}_{\xi_B} d\vec{p}_{\xi_{\bar{B}}} d\hat{P}' d\hat{P}_i \psi_{B'\bar{B}'}^{JL'S'T'} V_{ij}(\vec{P}', \vec{P}_i) \psi_{B\bar{B}}^{JLST} \quad (2.41)$$

con,

$$\psi_{B\bar{B}}^{JLST}(\vec{p}_{\xi_B}, \vec{p}_{\xi_{\bar{B}}}, \hat{P}) = \left[\psi_{B\bar{B}}^{STC} Y_{LM}(\hat{P}) \right]^{JLST} \quad (2.42)$$

En general, los operadores que nos conectarán estados inicial y final serán de dos tipos:

- *Centrales*, tal que los grados de libertad de momento angular y spin de los quarks no están acoplados.
- *Tensoriales*, en los que el momento angular y el spin de los quarks se acoplan.

Para calcular los potenciales centrales podemos primero obtener la parte orbital de los kernels y por otro lado los valores esperados entre los estados inicial y final de los operadores en los espacios de spin-sabor y color. Pero para el caso de potenciales tensoriales conviene desacoplar las partes orbital y de spin con la relación 2.26 y calcular los elementos de matriz reducidos. Para la parte de spin-sabor se utilizan las propiedades estándar del álgebra de SU(3).

A la hora de describir la interacción consideramos potenciales a dos cuerpos, que conserven el momento total de los quarks que interaccionan, suponiendo además que sólo dependen de los momentos relativos de los quarks inicial y final, siendo la unidad para los demás. Es decir, usaremos un potencial quark-antiquark del tipo,

$$V_{ij} = V_{ij}(\vec{p}'_{ij}, \vec{p}_{ij}) \delta^3(\vec{P}'_{ij} - \vec{P}_{ij}) \prod_{k \neq i, j} \delta^3(\vec{p}'_k - \vec{p}_k) \quad (2.43)$$

siendo,

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ij} &= \frac{1}{2}(\vec{p}_i - \vec{p}_j), \\ \vec{P}_{ij} &= \vec{p}_i + \vec{p}_j, \end{aligned} \quad (2.44)$$

Antes de pasar a integrar debemos hacer un cambio de variables de las originales \vec{p}_i a las coordenadas de Jacobi en el potencial 2.43. Hacemos una descripción de la misma en el Apéndice A. También conviene realizar una transformación adecuada en las funciones $\delta^{(3)}$ para simplificarlas.

Daremos a continuación los resultados de los kernels para interacciones locales, es decir, dependientes del momento transferido y aún como operadores en spin-sabor-color de los quarks. Faltaría entonces calcular los coeficientes de spin-sabor-color, cuyo procedimiento detallamos en el Apéndice B.

2.3.1. Términos de interacción para Barión-Antibarión

En el caso de barión y antibarión, formados por tres quarks y tres antiquarks respectivamente, el cálculo de kernels de interacción se reduce a estudiar cuatro diagramas diferentes, como muestra la figura 2.1 para la reacción $Y\bar{Y} \rightarrow Y'\bar{Y}'$. Las demás reacciones consideradas tienen los mismos diagramas base, como veremos a continuación, aunque muchos serán iguales y sumarán o directamente no contribuirán a la interacción. Sólo tenemos términos directos, luego sólo necesitamos describir las interacciones entre un quark y un antiquark. A la hora de describir la interacción, distinguimos el quark pesado s de Y como el quark 3 (y \bar{s} como el antiquark 6 en el caso de \bar{Y}), esto implica que basta con estudiar la interacción entre el quark 1 y 4 con multiplicidad 4 (diagrama (b) de la Fig. 2.1), la interacción entre el quark 1 y 6 y entre 3 y 4 ambas con multiplicidad 2 (diagramas (d) y (c) de la misma figura), y finalmente la interacción entre 3 y 6 con multiplicidad 1 (diagrama (a)).

Los términos de interacción entre quarks del mismo cluster corresponden a términos de energía interna que simplemente redefinen la energía. Ahora estudiemos cada interacción por separado.

Interacción $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$

En el marco de este mismo modelo, la interacción $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ ha sido calculada en la Ref. [23]. En ese caso se ve que la interacción nucleón-antinucleón se puede estudiar

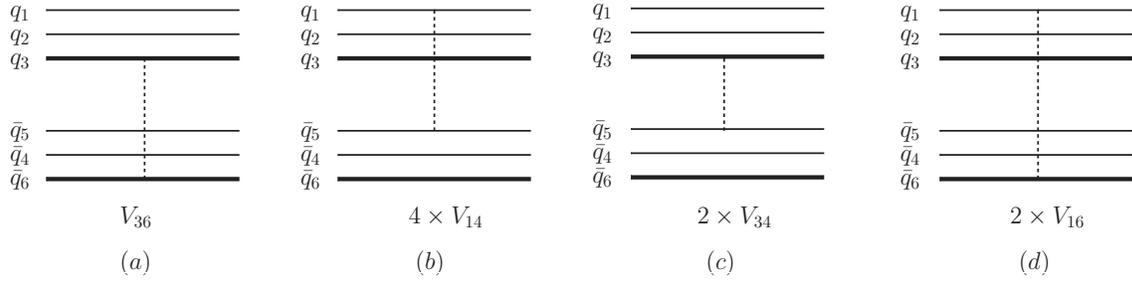


Figura 2.1: Diagramas de interacción para $Y\bar{Y} \rightarrow Y'\bar{Y}'$. V_{ij} denota la interacción entre el quark i y el antiquark j donde el factor que le acompaña indica la multiplicidad del diagrama.

simplemente con el diagrama V_{36} , por la antisimetría de la función de onda de N . Por lo tanto obtenemos, para el potencial directo, la expresión:

$${}^{RGM}V_{D36} = 9e^{-\frac{b^2(\vec{P}'-\vec{P})^2}{3}}V_{q\bar{q}}(\vec{P}'-\vec{P}) \quad (2.45)$$

donde el 9 viene de la multiplicidad de los diagramas.

Interacción $N\bar{N} \rightarrow Y\bar{Y}$

A la hora de describir la interacción $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$ interesará el diagrama V_{36} pues es el único capaz de producir un cambio de extrañeza en el estado inicial. La expresión del mismo es:

$${}^{RGM}V_{D36} = \left(\frac{2\sqrt{\alpha\alpha'}}{\alpha+\alpha'}\right)^3 e^{-\frac{8b^2(\alpha\alpha')}{9(\alpha+\alpha')} \left(\frac{3m}{M}\vec{P}'-\vec{P}\right)^2} V_{q\bar{q}}(\vec{P}'-\vec{P}), \quad (2.46)$$

con m la masa del quark ligero, m_s la masa del quark extraño s , α y α' los parámetros de la función de onda en el estado inicial y final respectivamente, y $M = 2m + m_s$.

Conviene resaltar que estos factores de forma no dependen exactamente del momento transferido $\vec{P}' - \vec{P}$ por la diferencia de masas entre el quark extraño y los ligeros.

Interacción $Y\bar{Y} \rightarrow Y'\bar{Y}'$

Para el proceso $Y\bar{Y} \rightarrow Y'\bar{Y}'$ tenemos contribución de todos los diagramas (mostrados en la Fig. 2.1). Por eso, los resultados para los potenciales RGM de interacción para este caso son,

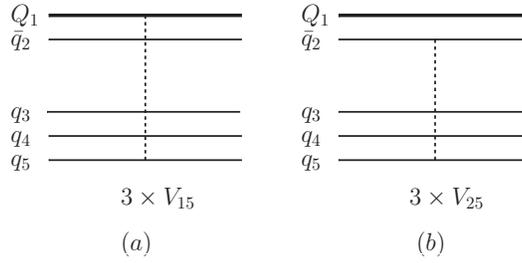


Figura 2.2: Diagramas de interacción para $Q\bar{n} - N \rightarrow Q\bar{n} - N$, con $Q = \{c, b\}$. V_{ij} denota la interacción entre el antiquark i y el quark j donde el factor que le acompaña indica la multiplicidad del diagrama.

$$\begin{aligned}
 {}^{RGM}V_{D36} &= e^{-\frac{4\alpha b^2 m^2}{M^2}(\vec{P}' - \vec{P})^2} V_{q\bar{q}}(\vec{P}' - \vec{P}), \\
 {}^{RGM}V_{D14} &= 4e^{-b^2\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha m^2}{M^2}\right)(\vec{P}' - \vec{P})^2} V_{q\bar{q}}(\vec{P}' - \vec{P}), \\
 {}^{RGM}V_{D16} &= 2e^{-\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha(4m^2 + m_s^2)}{M^2}\right)(\vec{P}' - \vec{P})^2} V_{q\bar{q}}(\vec{P}' - \vec{P}), \\
 {}^{RGM}V_{D34} &= 2e^{-\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha(4m^2 + m_s^2)}{M^2}\right)(\vec{P}' - \vec{P})^2} V_{q\bar{q}}(\vec{P}' - \vec{P})
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Con las multiplicidades correspondientes.

2.3.2. Términos de interacción para Barión-Mesón

En este caso sólo interesa calcular el sistema formado por un nucleón y un mesón $Q\bar{n}$ en onda S (es decir, un mesón D o B). El objetivo final es describir el estado $\Lambda_c(2940)^+$, en el Capítulo 4, como una molécula D^*N . Nos restringimos a estos casos por simplicidad y por las similitudes que tiene con otros casos que estudiaremos en el sistema mesón-antimesón (como el estado $X(3872)$ y $D_{s1}(2460)$).

Tenemos un sistema formado por cinco partículas, un antiquark y cuatro quarks. Por lo que tendríamos 6 diagramas directos diferentes. Sin embargo, debido a nuestra elección del sistema DN o BN , esto se reduce a estudiar el sistema $Q\bar{n} - nnn$. Explotando las simetrías del sistema encontramos dos diagramas, con multiplicidad 3 cada uno, como muestra la figura 2.2.

Igual que antes, sólo tenemos términos directos, luego sólo estudiaremos la interacción quark-antiquark. La interacción ha sido calculada utilizando las funciones de onda de barión y mesón introducidas anteriormente. En ese caso se ve que la interacción $Q\bar{n}$ -nucleón se puede estudiar simplemente con el diagrama V_{25} , por la antisimetría de la función de onda de N . La interacción Qn (diagrama V_{15}) será cero, pues para este caso la simetría quiral está explícitamente rota, y, al estar cada quark en un singlete de color

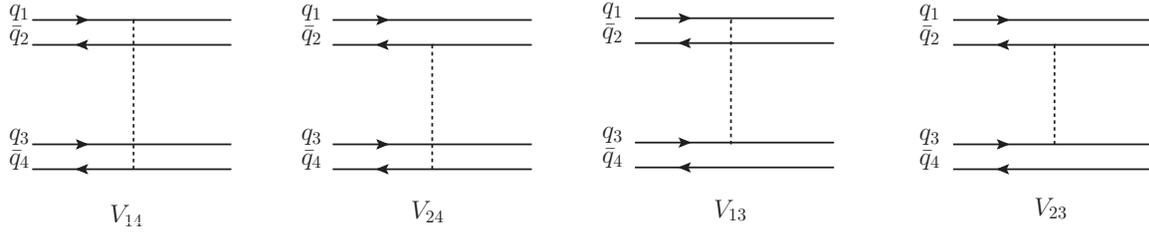


Figura 2.3: Diagramas de interacción para $AB \rightarrow A'B'$. V_{ij} denota la interacción entre el quark (antiquark) i y el quark (antiquark) j donde el factor que le acompaña indica la multiplicidad del diagrama.

diferente, no habrá intercambio de gluones.

El hecho de considerar sólo mesones en onda S simplifica las integrales. Por lo tanto obtenemos, para el potencial directo, la expresión:

$${}^{RGM}V_{D25} = 3\sqrt{4\pi} \sum_{n_A, n'_A}^{n_{max}} C_{n_A} C_{n'_A} \frac{N'_{n_A} N_{n_A}}{4(\eta_{A'}^* + \eta_A)^{3/2}} e^{-\left[\left(1 - \frac{m_q}{M_A}\right)^2 \frac{1}{4(\eta_{A'}^* + \eta_A)} + \frac{b^2}{6} \right] (\vec{P}' - \vec{P})^2} V(\vec{P}' - \vec{P}) \quad (2.48)$$

donde el 3 viene de la multiplicidad de los diagramas, m_q es la masa del quark ligero y la suma en n_A y n'_A recorre la base de gaussianas de la función de onda interna del mesón.

Como curiosidad y para mostrar su estructura cabe señalar que, en este caso, podemos identificar exactamente los factores de forma del barión y el mesón,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{F}_{Q\bar{n}} &= \sqrt{4\pi} \sum_{n_A, n'_A}^{n_{max}} C_{n_A} C_{n'_A} \frac{N'_{n_A} N_{n_A}}{4(\eta_{A'}^* + \eta_A)^{3/2}} e^{-\left(1 - \frac{m_q}{M_A}\right)^2 \frac{(\vec{P}' - \vec{P})^2}{4(\eta_{A'}^* + \eta_A)}} \\ \mathcal{F}\mathcal{F}_N &= e^{-\frac{b^2}{6} (\vec{P}' - \vec{P})^2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

siendo capaces de comparar con aquellos encontrados en el caso $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ y el caso mesón-antimesón, que estudiaremos en la siguiente subsección, particularizado al caso que nos atañe.

2.3.3. Términos de interacción para Mesón-Antimesón

Estudiaremos por separado los términos directos y los de intercambio o disociación de quarks.

Términos de interacción directa. Generalización para el caso de mesones arbitrarios.

En el caso de mesón-antimesón, formados por dos quarks y dos antiquarks podemos resumir el cálculo de los kernels directos en cuatro diagramas diferentes, como muestra la figura 2.3 para la reacción $AB \rightarrow A'B'$. Sólo tenemos términos directos, luego sólo necesitamos describir las interacciones qq , $q\bar{q}$ y $\bar{q}q$. Consideraremos diferentes las masas de todos los quarks. En caso de tener quarks indistinguibles tendremos que añadir términos de intercambio, que estudiaremos en la siguiente subsección. Los términos de interacción entre quarks del mismo cluster corresponden a términos de energía interna que simplemente redefinen la energía.

Antes de dar las expresiones finales para el potencial directo daremos unas claves sobre la forma de llegar a ellas. En el Apéndice A se llega a una expresión para el potencial a nivel quark 2.43 de forma agrupada en la Ec. A.20,

$$\begin{aligned}
V_{ij} &= V\left(\frac{(-1)^{i-1}}{2}(\vec{p}_A - \vec{p}_A) + \frac{(-1)^j}{2}(\vec{p}_B - \vec{p}_B) + \frac{1}{2}\left(\frac{m'_i}{M'_A} + \frac{m'_j}{M'_B}\right)\vec{P}' - \frac{1}{2}\left(\frac{m_i}{M_A} + \frac{m_j}{M_B}\right)\vec{P}\right) \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{cm} - \vec{P}_{cm}) \times \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{p}'_A - \vec{p}_A + (-1)^i \left[\left(1 - \frac{m'_i}{M'_A}\right)\vec{P}' - \left(1 - \frac{m_i}{M_A}\right)\vec{P} \right]) \times \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{p}'_B - \vec{p}_B + (-1)^{j-1} \left[\left(1 - \frac{m'_j}{M'_B}\right)\vec{P}' - \left(1 - \frac{m_j}{M_B}\right)\vec{P} \right])
\end{aligned} \tag{2.50}$$

con $i = 1, 2$ en el mesón A y $j = 3, 4$ en el mesón B . Como vemos, permitimos que las masas de los quarks cambien del estado inicial al final, debido a la interacción. De aquí procedemos a calcular el potencial directo por el método RGM, que es,

$$V_D(\vec{P}', \vec{P}) = \sum_{i \in A, j \in B} \int \Psi_{l'_A m'_A}^*(\vec{p}'_A) \Psi_{l'_B m'_B}^*(\vec{p}'_B) V_{ij}(\vec{p}_i, \vec{p}_j) \Psi_{l_A m_A}(\vec{p}_A) \Psi_{l_B m_B}(\vec{p}_B) \tag{2.51}$$

A la hora de calcularla analíticamente podemos utilizar la expresión de la base de mesones 2.36 para escribirla de la forma:

$$\begin{aligned}
V_D^{ij} &= \sum_{n_A, n'_A, n_B, n'_B}^{n_{max}} C_{n_A l_A} C_{n_B l_B} C_{n'_A l'_A} C_{n'_B l'_B} (-i)^{l_A - l'_A + l_B - l'_B} \times \\
&\times \frac{N_{n_A l_A} N_{n'_A l'_A}^*}{(2\eta_A)^{3/2+l_A} (2\eta_{A'})^{3/2+l'_A}} \frac{N_{n_B l_B} N_{n'_B l'_B}^*}{(2\eta_B)^{3/2+l_B} (2\eta_{B'})^{3/2+l'_B}} \langle V_{ij} \rangle
\end{aligned} \tag{2.52}$$

con

$$\begin{aligned}
\langle V_{ij} \rangle &= \int d\vec{p}'_A d\vec{p}'_B d\vec{p}_A d\vec{p}_B p_A^{l'_A} p_B^{l'_B} p_A^{l_A} p_B^{l_B} Y_{l'_A m'_A}^*(\hat{p}'_A) Y_{l'_B m'_B}^*(\hat{p}'_B) \times \\
&\times Y_{l_A m_A}(\hat{p}_A) Y_{l_B m_B}(\hat{p}_B) e^{-\frac{p_A^2}{4\eta_{A'}}} e^{-\frac{p_B^2}{4\eta_{B'}}} e^{-\frac{p_A^2}{4\eta_A}} e^{-\frac{p_B^2}{4\eta_B}} V_{ij}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Usando ahora la expresión A.20 podemos simplificar las dos integrales. Operando llegamos a dos integrales separadas semejantes para el mesón A y B ,

$$\mathcal{I} = \int d\vec{p} |\vec{p} + r\vec{q}|^{L'} p^L Y_{L'M'}^*(p + \hat{r}q) Y_{LM}(\hat{p}) e^{-\frac{(\vec{p}+r\vec{q})^2}{4\eta'^*}} e^{-\frac{p^2}{4\eta}} \quad (2.54)$$

con $r_A = (-1)^{i-1}$ y $r_B = (-1)^j$ y q_C un vector que depende de las masas y los momentos inicial y final, que definiremos más adelante. El resto del cálculo se omite por su extensión.

Como ya comentamos, para expresar los kernels en una base de momento angular definido J usamos la expresión 2.26, suponiendo un potencial del tipo $V = v_q^{(k)} \cdot v_s^{(k)}$ (con $k = 0$ para potencial central y $k = 2$ para potencial tensorial), que en este caso expresamos como

$$\begin{aligned} & \langle \alpha' L' J'_{AB} J' M' | V_{ij} | \alpha L J_{AB} J M \rangle = (-1)^{J'+J'_{AB}+L} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \times \\ & \times \left\{ \begin{array}{ccc} L & J_{AB} & J \\ J'_{AB} & L' & k \end{array} \right\} \sum_{\alpha''} \langle \alpha' L' | | v_q^{(k)} | | \alpha'' L \rangle \langle \alpha'' J'_{AB} | | v_s^{(k)} | | \alpha' J_{AB} \rangle \end{aligned} \quad (2.55)$$

con $\bar{J}_{AB} = \bar{j}_A + \bar{j}_B$, acoplamiento entre los momentos angulares totales de A y B. En este caso no será tan sencillo, pues tendremos estados acoplados. Tomaremos como estado inicial y final el sistema de dos mesones acoplados siguientes,

$$\begin{aligned} | \Psi_i^{J_{AB} J_{ABz}} \rangle &= \left| [(\phi_A \chi_A)^{j_A} (\phi_B \chi_B)^{j_B}]_{J_{ABz}}^{J_{AB}} \right\rangle, \\ | \Psi_f^{J'_{AB} J'_{ABz}} \rangle &= \left| [(\phi_A \chi_A)^{j'_A} (\phi_B \chi_B)^{j'_B}]_{J'_{ABz}}^{J'_{AB}} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.56)$$

con χ_M la función de onda de spin del mesón M , pues en general no se podrán factorizar como suponíamos antes. Antes de aplicar la ecuación 2.26 tendremos que desacoplar completamente la base de los mesones. Por lo tanto, tendremos que el elemento de matriz entre los estados inicial y final serán,

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_f^{J'_{AB} J'_{ABz}} | V | \Psi_i^{J_{AB} J_{ABz}} \rangle = \sum_{S_{AB} L_{AB} S_{ABz} S'_{AB} L'_{AB} S'_{ABz}} S_{AB} \hat{L}_{AB} \hat{j}_A \hat{j}_B \times \\ & \times \left\{ \begin{array}{ccc} s_A & s_B & S_{AB} \\ l_A & l_B & L_{AB} \\ j_A & j_B & J_{AB} \end{array} \right\} S'_{AB} \hat{L}'_{AB} \hat{j}'_A \hat{j}'_B \left\{ \begin{array}{ccc} s'_A & s'_B & S'_{AB} \\ l'_A & l'_B & L'_{AB} \\ j'_A & j'_B & J'_{AB} \end{array} \right\} C_{S_{AB} S_{ABz} L_{AB} (J_{ABz} - S_{ABz})}^{J_{AB} J_{ABz}} \times \\ & \times C_{S'_{AB} S'_{ABz} L'_{AB} (J'_{ABz} - S'_{ABz})}^{J'_{AB} J'_{ABz}} \left\langle (\phi_A \phi_B)_{(J'_{ABz} - S'_{ABz})}^{L'_{AB}} \middle| v_q \middle| (\phi_A \phi_B)_{(J_{ABz} - S_{ABz})}^{L_{AB}} \right\rangle \times \\ & \times \left\langle (\chi_A \chi_B)_{S'_{ABz}}^{S'_{AB}} \middle| v_s \middle| (\chi_A \chi_B)_{S_{ABz}}^{S_{AB}} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.57)$$

con $\bar{L}_{AB} = \bar{l}_A + \bar{l}_B$ y $\bar{S}_{AB} = \bar{s}_A + \bar{s}_B$ y donde definimos $\hat{S} \equiv \sqrt{2S+1}$. En esta expresión ya podemos identificar los coeficientes de spin $\langle S'_{AB}, S'_{ABz} | v_s | S_{AB}, S_{ABz} \rangle$.

La parte orbital, que podemos acoplar a un L, L' total para dar el braket correspondiente, se obtiene a partir de la expresión de la Ec. 2.53:

$$\left\langle (\phi_A \phi_B)_{M'_{AB}}^{L'_{AB}} \left| v_q \right| (\phi_A \phi_B)_{M_{AB}}^{L_{AB}} \right\rangle = \sum_{l_{1a}, l_{2a}, l_{3a}, l_{4a}, l_{1b}, l_{2b}, l_{3b}, l_{4b}, l_Z, l_F} \mathcal{C}_{AB} \cdot \mathcal{Q}_{AB}(P', P) \quad (2.58)$$

donde permitimos las proyecciones M y M' de L y L' aunque el potencial no depende de ellos. Realizamos este paso para que el cálculo sea más sencillo, transformando la expresión en función de elementos de matriz irreducibles de la Ec. 2.26.

En la expresión anterior hemos llamado,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{AB} \equiv & 4\pi \sum_{l_X, l_V, l_{I1}, l_{I2}, l_{I3}, l_{I4}} (-1)^{l_Z + l'_A + l'_B + l_{4a} + l_{4b} + l_{3a} + L_{AB} + l_{I1} + l_{I2} + l_{I3} + L + k + l_V + M + M_{AB}} \times \\ & \times \sqrt{\frac{k!}{(2k+1)!}} \sqrt{\frac{(2k+1)!}{(2l_Z+1)!(2(k-l_Z)+1)!}} \sqrt{\frac{(2l'_A+1)!}{(2l_{1a}+1)!(2l'_A-2l_{1a}+1)!}} \sqrt{\frac{(2l_{3a}+1)!}{(2l_{4a}+1)!(2l_{3a}-2l_{4a}+1)!}} \frac{\Gamma\left(\frac{l_{2a}+l_A+l'_A-2l_{1a}+3}{2}\right)}{\Gamma(l_{2a}+3/2)} \times \\ & \times \sqrt{\frac{(2l'_B+1)!}{(2l_{1b}+1)!(2l'_B-2l_{1b}+1)!}} \sqrt{\frac{(2l_{3b}+1)!}{(2l_{4b}+1)!(2l_{3b}-2l_{4b}+1)!}} \frac{\Gamma\left(\frac{l_{2b}+l_B+l'_B-2l_{1b}+3}{2}\right)}{\Gamma(l_{2b}+3/2)} \hat{L}' \hat{L} \hat{L}_A \hat{L}'_A (l'_A - l_{1a}) \hat{l}_{1a} \hat{l}_{2a}^2 \hat{l}_{3a}^2 \hat{l}_{4a}^2 \times \\ & \times (l_{3a} - l_{4a}) \hat{l}_B \hat{l}'_B (l'_B - l_{1b}) \hat{l}_{1b} \hat{l}_{2b}^2 \hat{l}_{3b}^2 \hat{l}_{4b}^2 (l_{3b} - l_{4b}) \hat{k} \hat{l}_Z (k - l_Z) \hat{l}_{I1}^2 \hat{l}_{I2}^2 \hat{l}_{I3}^2 \hat{l}_{I4}^2 \hat{l}_X^2 \hat{l}_F^2 \hat{l}_V^2 \hat{L}'_{AB} \hat{L}_{AB} \times \\ & \times \begin{pmatrix} l'_A - l_{1a} & l_{2a} & l_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{2a} & l_{1a} & l_{3a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'_B - l_{1b} & l_{2b} & l_B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{2b} & l_{1b} & l_{3b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} l_{4a} & l_{4b} & l_{I1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_Z & l_{I1} & l_{I2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_F & L' & l_{I2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{3a} - l_{4a} & l_{3b} - l_{4b} & l_{I3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} k - l_Z & l_{I3} & l_{I4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_F & L & l_{I4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_X & l_V & k \\ -(M_{AB} - M'_{AB}) & M - M' & \kappa \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} L & l_V & L' \\ M & -(M - M') & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'_{AB} & L_{AB} & l_X \\ M'_{AB} & -M_{AB} & M_{AB} - M'_{AB} \end{pmatrix} \times \\ & \times \left\{ \begin{matrix} l_V & L' & L \\ l_F & l_{I4} & l_{I2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l'_A & l_{3a} & l_A \\ l_{2a} & l'_A - l_{1a} & l_{1a} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l'_B & l_{3b} & l_B \\ l_{2b} & l'_B - l_{1b} & l_{1b} \end{matrix} \right\} \times \\ & \times \left\{ \begin{matrix} l_X & l_V & k \\ l_{I3} & l_{I4} & k - l_Z \\ l_{I1} & l_{I2} & l_Z \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_{I3} & l_{3b} - l_{4b} & l_{3a} - l_{4a} \\ l_X & l_{3b} & l_{3a} \\ l_{I1} & l_{4b} & l_{4a} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_A & l_{3a} & l'_A \\ L_{AB} & l_X & L'_{AB} \\ l_B & l_{3b} & l'_B \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{AB}(P', P) \equiv & 2\pi P^{l_{4a} + l_{4b} + l_Z} P^{l_{3a} - l_{4a} + l_{3b} - l_{4b} + k - l_Z} \times \\ & \times \int G_A(P, P', z) \cdot G_B(P, P', z) \cdot V_{ij}^C(P, P', z) \mathcal{P}_{l_F}(z) dz \end{aligned} \quad (2.60)$$

con $\mathcal{P}_L(z)$ polinomio de Legendre y donde $V_{ij}^C(P, P', z)$ es la parte central del potencial, obviando los acoplamientos orbitales y de spin, esto es

$$V_{ij}(\vec{q}) = V_{ij}^C(q) \cdot [\vec{q} \otimes \vec{q}]^k \cdot [\sigma_i \otimes \sigma_j]^k. \quad (2.61)$$

A su vez, $G_C(P, P', z)$ recoge la información relativa a los momentos del factor de forma y los coeficientes de la base de las funciones de onda de los mesones, definido como,

$$\begin{aligned}
G_C(P, P', z) &\equiv \sum_{n_C, n'_C}^{n_{max}} C_{l_C n_C} C_{l'_C n'_C} (-i)^{l_C - l'_C} \frac{N_{n_C l_C} N_{n'_C l'_C}^*}{(2\eta_C)^{3/2 + l_C} (2\eta_{C'}^*)^{3/2 + l'_C}} \times \\
&\times \left(\frac{4\eta_{C'}^* \eta_C}{\eta_{C'}^* + \eta_C} \right)^{\frac{1}{2}(l_C + l'_C - l_{1c} + \frac{3}{2})} (\eta_{C'}^*)^{\frac{3}{2}} a_C^{l_{4c}} a_C^{l_{3c} - l_{4c}} q_C^{l_{1c} - l_{3c} - \frac{3}{2}} \times \\
&\times e^{-\frac{q_C^2 (\eta_C + 2\eta_{C'}^*)}{8\eta_{C'}^* (\eta_C + \eta_{C'}^*)}} M_{-\frac{2(l_C + l'_C - l_{1c}) + 3}{4}, \frac{2l_{2c} + 1}{4}} \left(\frac{q_C^2}{16\eta_{C'}^{*2}} \frac{4\eta_{C'}^* \eta_C}{\eta_{C'}^* + \eta_C} \right)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

con $C = A, B$, $i = 1, 2$ y $j = 3, 4$ denotando los diferentes diagramas (ver Fig.2.3), las transferencias de momento $\vec{q}_A = a'_A \vec{P}' - a_A \vec{P}$ y $\vec{q}_B = a'_B \vec{P}' - a_B \vec{P}$, con $a'_A = \left(1 - \frac{m'_i}{M'_A}\right)$, $a_A = \left(1 - \frac{m_i}{M_A}\right)$, $a'_B = \left(1 - \frac{m'_j}{M'_B}\right)$ y $a_B = \left(1 - \frac{m_j}{M_B}\right)$ definiciones de masa, dependientes de cada diagrama.

Términos de intercambio. Disociación de mesones.

Hasta ahora hemos considerado solamente la interacción directa. A su vez, cabe la posibilidad de calcular diagramas diferentes, que también contribuyen a la interacción mesón-antimesón. En el caso de tener quarks indistinguibles entre los dos mesones es imprescindible añadir diagramas de intercambio que den cuenta del proceso de reestructuración de quarks, y así tomar correctamente la antisimetría de la función de onda total. Sin embargo, aun en el caso de no existir quarks idénticos es posible calcular estos diagramas de reestructuración de sabor (*rearrangement*) o disociación de mesones, obteniendo un método para conectar pares de mesones que no interaccionarían por términos directos. Por lo tanto, el término de intercambio es imprescindible para describir de forma correcta la dinámica del sistema mesón-mesón.

Los diagramas que contribuirán al proceso en ambos casos serán los de la Fig. 2.4. En este caso no necesitaremos tanta generalidad y nos centraremos en disociación entre mesones en onda S , con momento angular cero. Para calcularlos debemos hacer actuar el operador P_{24} sobre la función de onda.

Si tenemos en cuenta que,

$$P_{24} \left[\psi \left(\vec{p}_A, \vec{p}_B, \vec{P}, \vec{P}_{CM} \right) \right] = \psi \left(P_{24}[\vec{p}_A], P_{24}[\vec{p}_B], P_{24}[\vec{P}], P_{24}[\vec{P}_{CM}] \right) \tag{2.63}$$

sólo necesitamos la forma de actuar del operador P_{24} sobre las coordenadas de Jacobi, que reflejamos en el Apéndice A.

Antes de calcular las integrales, interesa realizar una transformación adecuada en las $\delta^{(3)}$ como en el caso directo, para simplificarlas. En el Apéndice A se expresan las interacciones relevantes en términos de las coordenadas de Jacobi, una vez realizadas estas transformaciones.

A continuación damos los resultados de los kernels para interacciones locales (Ec. 2.43), todavía como operadores en spin-sabor-color de los quarks. Faltaría calcular el valor esperado entre las funciones de onda de spin-sabor-color inicial y final, que mostramos en el

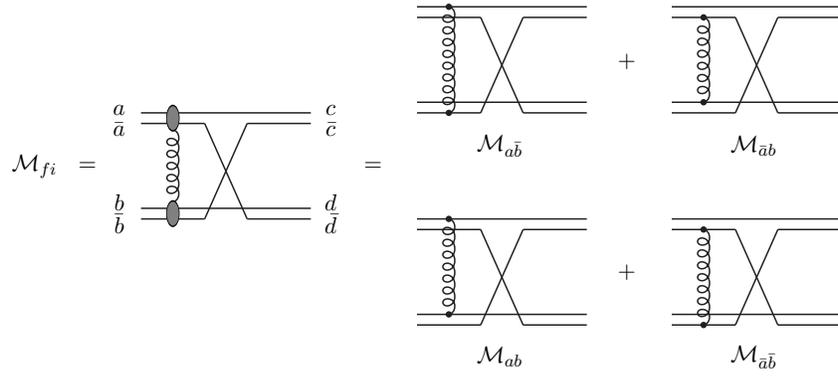


Figura 2.4: Diagramas de intercambio de quarks.

Apéndice B. Podemos expresar los resultados de todos los diagramas de forma conjunta como:

$$V_{ij}^E = \sum_{n_A, n_B, n'_A, n'_B=1}^{n_{max}} C_{n_A}^* C_{n_B}^* C_{n'_A} C_{n'_B} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{N_A^* N_B^* N'_A N'_B}{(16\eta_{AB})^{3/2}} e^{-(\alpha_{ij} P^2 + \beta_{ij} P'^2 + 2\lambda_{ij} \vec{P} \cdot \vec{P}')} \int d\vec{q} e^{-(\gamma_{ij} q^2 + 2\delta_{ij} \vec{q} \cdot \vec{P} + 2\varepsilon_{ij} \vec{q} \cdot \vec{P}')} V_{ij}(q), \quad (2.64)$$

con $\eta_{AB} = \eta_A^* \eta_B^* \eta'_A + \eta_A^* \eta_B^* \eta'_B + \eta_A^* \eta'_A \eta'_B + \eta_B^* \eta'_A \eta'_B$ y donde hemos definido las constantes:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + (1 - \omega_B)^2 \eta_A^* \eta'_A + \omega_B^2 \eta_A^* \eta'_B + \omega_A^2 \eta_B^* \eta'_A + \\ &+ (1 - \omega_A)^2 \eta_B^* \eta'_B + (1 - \omega_A - \omega_B)^2 \eta'_A \eta'_B], \\ \beta_{ij} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [(1 - \omega'_A - \omega'_B)^2 \eta_A^* \eta_B^* + (1 - \omega'_B)^2 \eta_A^* \eta'_A + \omega_A'^2 \eta_A^* \eta'_B + \\ &+ \omega_B'^2 \eta_B^* \eta'_A + (1 - \omega'_A)^2 \eta_B^* \eta'_B + \eta'_A \eta'_B], \\ \lambda_{ij} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [-(1 - \omega'_A - \omega'_B) \eta_A^* \eta_B^* - (1 - \omega_B)(1 - \omega'_B) \eta_A^* \eta'_A + \omega_B \omega'_A \eta_A^* \eta'_B + \\ &+ \omega_A \omega'_B \eta_B^* \eta'_A - (1 - \omega_A)(1 - \omega'_A) \eta_B^* \eta'_B - (1 - \omega_A - \omega_B) \eta'_A \eta'_B], \end{aligned} \quad (2.65)$$

iguales para todo (ij) y,

$$\begin{aligned}
\gamma_{14} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + \eta_A^* \eta'_B + \eta_B^* \eta'_A], \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + \eta_A^* \eta'_A + \eta_B^* \eta'_A], \\
\gamma_{13} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + \eta_A^* \eta'_A + \eta_B^* \eta'_B + \eta'_A \eta'_B], \\
\gamma_{24} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + \eta_A^* \eta'_B + \eta_B^* \eta'_A + \eta'_A \eta'_B], \\
\delta_{14} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + \omega_B \eta_A^* \eta'_B + (1 - \omega_A) \eta_B^* \eta'_B], \\
\delta_{23} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + (1 - \omega_B) \eta_A^* \eta'_A + \omega_A \eta_B^* \eta'_A], \\
\delta_{13} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + (1 - \omega_B) \eta_A^* \eta'_A + (1 - \omega_A) \eta_B^* \eta'_B + (1 - \omega_A - \omega_B) \eta'_A \eta'_B], \\
\delta_{24} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [\eta_A^* \eta_B^* + \omega_B \eta_A^* \eta'_B + \omega_A \eta_B^* \eta'_A - (1 - \omega_A - \omega_B) \eta'_A \eta'_B], \\
\varepsilon_{14} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [-(1 - \omega'_A - \omega'_B) \eta_A^* \eta_B^* + \omega'_A \eta_A^* \eta'_B - (1 - \omega'_A) \eta_B^* \eta'_B], \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [-(1 - \omega'_A - \omega'_B) \eta_A^* \eta_B^* - (1 - \omega'_B) \eta_A^* \eta'_A + \omega'_B \eta_B^* \eta'_A], \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [-(1 - \omega'_A - \omega'_B) \eta_A^* \eta_B^* - (1 - \omega'_B) \eta_A^* \eta'_A - (1 - \omega'_A) \eta_B^* \eta'_B - \eta'_A \eta'_B], \\
\varepsilon_{24} &= \frac{1}{4\eta_{AB}} [-(1 - \omega'_A - \omega'_B) \eta_A^* \eta_B^* + \omega'_A \eta_A^* \eta'_B + \omega'_B \eta_B^* \eta'_A + \eta'_A \eta'_B],
\end{aligned} \tag{2.66}$$

que dependen del diagrama.

Con estos parámetros podemos calcular la descomposición angular. La integración angular en \hat{q} dependerá del tipo de potencial que se considere. Los resultados para potenciales centrales y tensoriales se muestran a continuación.

■ *Potenciales Centrales*

Usamos la expansión

$$e^{-b\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_m (-1)^l i_l(bv_1 v_2) Y_{lm}(\hat{v}_1) Y_{lm}^*(\hat{v}_2) \tag{2.67}$$

en la ecuación 2.64. Llamando $z = \cos(P, P')$ obtenemos

$$\begin{aligned}
V_{ij}^E &= \sqrt{4\pi} \sum_{n_A, n_B, n'_A, n'_B=1}^{n_{max}} \frac{C_{n_A}^* C_{n_B}^* C_{n'_A} C_{n'_B}}{(16\eta_{AB})^{3/2}} e^{-(\alpha_{ij} P^2 + \beta_{ij} P'^2 + 2\lambda_{ij} P P' z)} \\
&\int dq q^2 i_0(2q \sqrt{\delta_{ij}^2 P^2 + \varepsilon_{ij}^2 P'^2 + 2\delta_{ij} \varepsilon_{ij} P P' z}) e^{-\gamma_{ij} q^2} V_{ij}(q),
\end{aligned} \tag{2.68}$$

con $i_0(x) = \frac{\sinh(x)}{x}$ la función esférica modificada de Bessel de primera especie.

Para obtener la descomposición en ondas parciales basta realizar la integración en el ángulo formado por el momento inicial y final (z),

$$\begin{aligned}
V_{ij}^{E,L} &= \sqrt{4\pi} \sum_{n_A, n_B, n'_A, n'_B=1}^{n_{max}} C_{n_A}^* C_{n_B}^* C_{n'_A} C_{n'_B} \frac{N_A^* N_B^* N'_A N'_B}{(16\eta_{AB})^{3/2}} \times \\
&\times 2\pi \int dz dq q^2 e^{-(\alpha_{ij} P^2 + \beta_{ij} P'^2 + 2\lambda_{ij} P P' z)} P_L(z) \times \\
&\times i_0(2q \sqrt{\delta_{ij}^2 P^2 + \varepsilon_{ij}^2 P'^2 + 2\delta_{ij} \varepsilon_{ij} P P' z}) e^{-\gamma_{ij} q^2} V_{ij}(q),
\end{aligned} \tag{2.69}$$

donde $P_L(z)$ representa los polinomios de Legendre.

■ *Potenciales Tensoriales*

Para potenciales del tipo,

$$V_{ij}^T(\vec{q}) = V_{ij}^C(q) [\vec{q} \otimes \vec{q}]^2 \cdot [\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_j]^2 \tag{2.70}$$

donde $V_{ij}^C(q)$ depende sólo del módulo del momento transferido, la expresión de los kernels resulta,

$$\begin{aligned}
V_{ij}^E &= \sqrt{4\pi} \sum_{n_A, n_B, n'_A, n'_B=1}^{n_{max}} C_{n_A}^* C_{n_B}^* C_{n'_A} C_{n'_B} \frac{N_A^* N_B^* N'_A N'_B}{(16\eta_{AB})^{3/2}} \\
&e^{-(\alpha_{ij} P^2 + \beta_{ij} P'^2 + 2\lambda_{ij} \vec{P} \cdot \vec{P}')} \int dq q^4 \frac{i_2(2q \sqrt{\delta_{ij}^2 P^2 + \varepsilon_{ij}^2 P'^2 + 2\delta_{ij} \varepsilon_{ij} \vec{P} \cdot \vec{P}'})}{\delta_{ij}^2 P^2 + \varepsilon_{ij}^2 P'^2 + 2\delta_{ij} \varepsilon_{ij} \vec{P} \cdot \vec{P}'} \\
&e^{-\gamma_{ij} q^2} V_{ij}^C(q) \left[(\delta_{ij} \vec{P} + \varepsilon_{ij} \vec{P}') \otimes (\delta_{ij} \vec{P} + \varepsilon_{ij} \vec{P}') \right] \cdot [\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_j]^2
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Capítulo 3

Formalismo de canales acoplados

3.1. Introducción

En este capítulo desarrollaremos un formalismo que nos permita acoplar los estados $q\bar{q}$ con estados de cuatro partículas, que restringiremos a estados mesón-mesón, cuyos kernels ya estudiamos en el Capítulo 2.

El método más sencillo para la creación de pares de quarks, que nos permitirá acoplar sectores, es el llamado modelo 3P_0 . El modelo, propuesto hace décadas por L. Micu [60], supone que el par es creado con los números cuánticos del vacío (3P_0) de forma uniforme. La aplicación de este modelo tiene una larga trayectoria [61–63]. Estudios sistemáticos [64, 65] de los decays de mesones ligeros y extraños muestran que las anchuras calculadas con amplitudes de tipo 3P_0 coinciden con los datos experimentales dentro de un rango de 25% – 40%.

Existen a su vez modelos microscópicos de decays fuertes, que relacionan la interacción de creación de pares con la interacción responsable de la formación del espectro, construyendo una interacción corriente-corriente debido a la fuerza de confinamiento y el intercambio de un gluón. Entre estos modelos, el modelo de Cornell [66, 67] asume que el confinamiento tiene carácter de vector de Lorentz. Otros modelos [68], en cambio, consideran que la interacción de confinamiento es escalar, mientras que el intercambio de un gluón es un vector de Lorentz.

Muchos de los artículos mencionados calculan anchuras de desintegración, y muy pocos consideran el efecto de acoplamiento entre sectores. Eichten *et al* presentan en [66, 67] un análisis detallado del charmonio acoplado a canales D utilizando el potencial de Cornell. Mientras tanto, diversos autores [69, 70] han mostrado los primeros resultados de los shifts hadrónicos para el charmonio de baja energía debido a la mezcla con pares de mesones D, calculados con el modelo de 3P_0 . Los shifts resultan ser alarmantemente grandes.

En un artículo reciente, Barnes *et al* [71] analizan los mass shifts de los estados bajos del charmonio debido al efecto de los canales de mesones D en onda S, esto es, los pares $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ y $D_s^{(*)}\bar{D}_s^{(*)}$. En dicha referencia concluye que los mass shifts tienen un valor similar

para todos los estados del charmonio, por lo que el efecto de los loops hadrónicos podría ser fácilmente reabsorbido en los parámetros del modelo. Sin embargo, su afirmación presenta problemas. En primer lugar, ignora estados mesón-mesón más altos, que pueden contribuir mediante loops virtuales. Por otro lado, en sus cálculos utiliza mass-shifts perturbativos, por lo que ignora el posible efecto no perturbativo de los pares mesón-mesón sobre el espectro del charmonio. En este sentido, los modelos fenomenológicos de canales acoplados [72–79] acumulan evidencias que apuntan a la posibilidad de generar efectos no triviales debido al acoplamiento de canales hadrónicos.

La dinámica del sistema mesón-mesón resulta ser, entonces, más compleja de lo esperado. Para aportar algo de luz al respecto, en este capítulo analizaremos dicho efecto no perturbativo del sistema de cuatro quarks sobre el espectro del charmonio. En la literatura existen algunos estudios en esta dirección, como el artículo de Eichten [80], que estudia los mass shifts y decays del charmonio con un método de canales acoplados, basado en el modelo de Cornell, y estudia la mezcla de estados debido a loops hadrónicos intermedios. En nuestro caso, para evitar los problemas derivados de los grandes shifts que se encuentran al incluir todos los pares mesónicos posibles, asumiremos que parte del acoplamiento de canales abiertos está incluido en el potencial apantallado [81]. El único efecto no incluido es el no trivial de los thresholds, por lo que la prescripción que tomaremos será la de acoplar los estados de charmonio a aquellos canales con thresholds más próximos.

Por otro lado, la mayoría de los artículos basan sus cálculos en el efecto de loops hadrónicos sobre el espectro de mesones (en general, charmonio), obviando la posibilidad de calcular el efecto del espectro mesónico sobre estados de mesón-mesón, que pueden dar lugar a nuevos estados moleculares. Esta novedosa perspectiva será desarrollada en este capítulo, y será la base de los resultados que expondremos en el Capítulo 4, dando lugar a resultados inesperados debido al acoplamiento de canales.

En este capítulo expondremos el formalismo de acoplamiento entre los sectores $q\bar{q}$ y $qq\bar{q}\bar{q}$ y presentaremos el potencial 3P_0 con el que analizaremos este proceso. Este formalismo de canales acoplados nos permitirá obtener nuevos estados moleculares a partir de la interacción entre mesones y el acoplamiento de los sectores de dos y cuatro partículas. Es un método válido para un número arbitrario de thresholds y un espectro arbitrariamente grande. Sin embargo, este formalismo no resulta adecuado si queremos tratar resonancias, o estados por encima del threshold, donde el autoestado de energía es complejo por la presencia de la anchura total. Es por ello que dedicaremos una gran parte del capítulo a desarrollar un formalismo alternativo para estudiar dichos estados, más adecuado dadas las peculiaridades matemáticas de las resonancias. A su vez, permitiremos distorsión en las funciones de onda de los mesones y veremos su influencia en los estados moleculares.

3.2. Teoría de scattering: Matriz S y matriz T

En primer lugar presentaremos una introducción a dos de los conceptos más elementales que encontramos en todos los problemas de scattering: La matriz S y la matriz T .

En general, un problema de scattering consiste en un estado asintótico libre inicial $|\psi_{in}\rangle$ que viene de $t = -\infty$, entra en una región del espacio donde interacciona (a $t = 0$ por conveniencia) y se transforma en el estado $|\psi\rangle$, que finalmente escapa de nuevo asintóticamente como el estado $|\psi_{out}\rangle$ a $t = \infty$. Desde el punto de vista del observador, la órbita del scattering está completamente caracterizada tan pronto como sus dos asíntotas son conocidas.

En Teoría de Scattering, estos estados pueden conectarse mediante los llamados *operadores de Møller*, que son operadores isométricos cuyo significado es el siguiente: Actuando sobre cualquier vector del espacio de Hilbert \mathcal{H} , proporcionan el estado a $t = 0$ del que proviene o hacia el cual evolucionaría el estado asintótico representado por ese vector. Esto es,

$$|\psi\rangle = \Omega_+ |\psi_{in}\rangle = \Omega_- |\psi_{out}\rangle \quad (3.1)$$

El hecho de que estos operadores sean isométricos implica que para cada estado normalizado $|\psi_{in}\rangle$ o $|\psi_{out}\rangle$ en \mathcal{H} , existe un único estado normalizado $|\psi\rangle$ en el correspondiente subespacio de estados de scattering \mathcal{R} , y viceversa.

Aunque el proceso de scattering se puede expresar en término de sus dos asíntotas, esto no es lo usual. El objetivo final es expresar la asíntota de salida en función de la de entrada, sin ninguna referencia a la órbita que en realidad describe. Debido a la propiedad de isometría de Ω_{\pm} , la relación $|\psi\rangle = \Omega_- |\psi_{out}\rangle$ se puede invertir. De hecho, como $\Omega_-^\dagger \Omega_- = 1$, podemos multiplicar la expresión anterior por Ω_-^\dagger para obtener,

$$|\psi_{out}\rangle = \Omega_-^\dagger |\psi\rangle = \Omega_-^\dagger \Omega_+ |\psi_{in}\rangle \quad (3.2)$$

de donde podemos definir el *operador de scattering* como

$$\mathbf{S} = \Omega_-^\dagger \Omega_+ \quad (3.3)$$

obteniendo

$$|\psi_{out}\rangle = \mathbf{S} |\psi_{in}\rangle \quad (3.4)$$

que es el resultado deseado.

Vemos que el operador \mathbf{S} contiene toda la información de interés del proceso. Si sabemos cómo calcular \mathbf{S} el problema de scattering estará resuelto.

De hecho, en términos de \mathbf{S} podemos calcular las probabilidades de scattering, relevantes desde el punto de vista experimental. Esta cantidad nos dará la probabilidad de que

una partícula que entra en una colisión con una asíntota $|\phi\rangle$ sea observada en el estado asíntótico $|\chi\rangle$. Esta probabilidad será:

$$\mathcal{P}_{\phi \rightarrow \chi} = |\langle \chi | \mathbf{S} | \phi \rangle|^2 \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la amplitud de probabilidad para el proceso $|\phi\rangle \rightarrow |\chi\rangle$ es justo el elemento de la *matriz-S* $\langle \chi | \mathbf{S} | \phi \rangle$. Por supuesto, todavía no tenemos una cantidad directamente medible, pero afortunadamente, podemos relacionar la *matriz-S* con la sección eficaz del proceso.

Es posible descomponer la *matriz-S* en dos términos,

$$S = \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta(E_{p'} - E_p) T(\vec{p}', \vec{p}) \quad (3.6)$$

El primer término es la amplitud de las partículas que pasan sin ser dispersadas. El segundo, entonces, representa la amplitud de las partículas que sí han sido dispersadas. Aunque su momento cambia, la energía total no lo hace, por lo tanto, aparece una delta de conservación de la energía total. A la función $T(\vec{p}', \vec{p})$ se la denomina *matriz-T*, y para una gran cantidad de potenciales, es una función analítica para las variables relevantes.

Debido a la delta de conservación, la *matriz-T* está definida sólo para $\vec{p}'^2 = \vec{p}^2$. Por esta razón se la suele denominar como *matriz-T on-shell*. Sin embargo, también podemos definir la *matriz-T* para momento *off-shell*, lo cual es una herramienta muy útil para cálculos.

Para resolver el problema de scattering utilizaremos la conocida ecuación de Lippmann-Schwinger [82]. Por medio del método RGM obtuvimos la ecuación de Schrödinger proyectada 2.23 para describir el movimiento relativo de los clusters. Para estudiar estados de scattering la ecuación de Schrödinger no resulta adecuada y por ello es habitual utilizar la ecuación de Lippmann-Schwinger, obtenida de la anterior y que, en nuestro caso, al tener varios canales acoplados, resulta el conjunto de ecuaciones integrales acopladas.

El motivo de utilizar la ecuación de Lippmann-Schwinger se debe a que esta ecuación puede formularse no sólo en términos de potenciales como la ecuación de Schrödinger, sino también en términos de la *matriz-T off-shell*, que es lo que utilizaremos después. La expresión de la ecuación de Lippmann-Schwinger en canales acoplados viene dada por:

$$T^{\beta'\beta}(z; p', p) = V^{\beta'\beta}(p', p) + \sum_{\beta''} \int dp'' p''^2 V^{\beta'\beta''}(p', p'') \frac{1}{z - E_{\beta''}(p'')} T^{\beta''\beta}(z; p'', p) \quad (3.7)$$

donde β representa el conjunto de números cuánticos $M_1 M_2 J L S T$ que definen una determinada onda parcial, $V^{\beta'\beta}(p', p)$ es el potencial proyectado del sistema y $E_{\beta''}(p'')$ es la energía para momento p'' , que tomaremos en el caso no relativista como,

$$E_{\beta}(p) = \frac{p^2}{2\mu_{\beta}} + \Delta M_{\beta} \quad (3.8)$$

siendo μ_β la masa reducida del sistema M_1M_2 al que corresponda el canal β y ΔM_β la diferencia entre el umbral del sistema M_1M_2 y el que tomemos de referencia, que será el threshold de más baja energía que consideremos. Ésta se puede obtener de los términos de interacción entre quarks de un mismo mesón, los cuales relacionan la energía total del sistema E_T y la energía relativa entre agregados E . Sin embargo, basta con utilizar las masas físicas y entonces ΔM_β no es más que la diferencia entre la masa del sistema de referencia M_1M_2 y la de los bariones del canal β .

La ecuación general de la matriz- S 3.6 puede particularizarse para cinemática no relativista, que es la que usamos para la ecuación de Lippmann-Schwinger. Así, obtenemos,

$$S^{\beta'\beta}(E; p', p) = \delta^{\beta'\beta} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta(p' - p) \sqrt{\mu_{\beta'} \mu_\beta k_{\beta'} k_\beta} T^{\beta'\beta}(E; p', p) \quad (3.9)$$

con k_β el momento *on-shell* del canal β , dado por la ecuación,

$$k_\beta^2 = 2\mu_\beta(E - \Delta M_\beta) \quad (3.10)$$

Para los canales por encima del umbral $\Re(k_\beta^2) > 0$ (k_β es real), y corresponden a los momentos *on-shell*. Como veremos en la Sección 3.3.2, dado que permitimos que E sea complejo, tendremos k_β complejo en general, y debemos asegurarnos de que nos encontremos en la hoja de Riemann correcta.

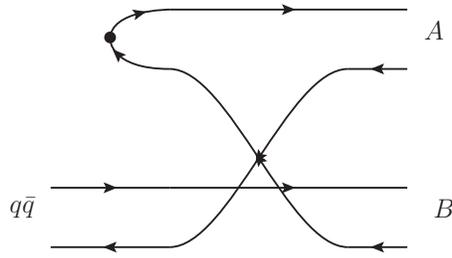
3.3. Estados ligados y resonancias en un marco multicanal

3.3.1. Acoplamiento de canales: Modelo 3P_0

Como ya comentamos, el acoplamiento entre los sectores $q\bar{q}$ y $qq\bar{q}\bar{q}$ requiere la creación de un par de quarks. En principio, siendo el mecanismo similar al proceso de desintegración fuerte, debería estudiarse con el mismo hamiltoniano que determina el espectro. Sin embargo, Ackleh [68] mostró que el modelo de creación de pares 3P_0 da resultados similares al cálculo microscópico.

En el modelo 3P_0 el par quark-antiquark se crea a partir del vacío de QCD con los números cuánticos del vacío $J^{PC} = 0^{++}$. Debido a que el quark y el antiquark tienen paridad intrínseca opuesta, deben encontrarse en un estado con momento angular orbital relativo L impar (puesto que $\mathcal{P} = (-1)^{L+1}$). Para que el acoplamiento de L y S nos de $J = 0$ debe cumplirse que $S = 1$, ya que los dos valores posibles son $S = 0, 1$. De ahí el nombre de 3P_0 , si tenemos en cuenta la notación ${}^{2S+1}L_J$. Debemos asegurarnos, a su vez, que el potencial 3P_0 conserva C -paridad, lo que demostramos en el Apéndice C.

El modelo ha sido aplicado al cálculo de desintegraciones de un mesón en dos mesones [61], de un barión en un mesón y un barión [83] o de un tetraquark en un barión y un

Figura 3.1: Diagrama de la amplitud 3P_0 .

antibarión [84], utilizándose en todos los casos funciones de onda de oscilador para los diferentes hadrones.

El operador de transición se postula de una manera totalmente fenomenológica. Creamos un quark de sabor μ con momento \vec{p}_μ y un antiquark de sabor $\nu = \bar{\mu}$ con momento \vec{p}_ν . Los números cuánticos y las propiedades del par quark-antiquark creado nos proporcionan información de cómo obtener el operador de transición. Podemos partir del hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = g \int d^3x \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (3.11)$$

cuya reducción no relativista es equivalente al operador de transición [85]

$$\mathcal{T} = -3\sqrt{2}\gamma' \sum_{\mu} \int d^3p d^3p' \delta^{(3)}(p+p') \left[\mathcal{Y}_1 \left(\frac{p-p'}{2} \right) b_{\mu}^{\dagger}(p) d_{\nu}^{\dagger}(p') \right]^{C=1, I=0, S=1, J=0} \quad (3.12)$$

donde μ ($\nu = \bar{\mu}$) son los números cuánticos del quark (antiquark) y $\gamma' = 2^{5/2}\pi^{1/2}\gamma$ con $\gamma = \frac{g}{2m}$, constante adimensional que nos da la fuerza de creación del par $q\bar{q}$ del vacío.

Uno de los atractivos del modelo 3P_0 es que puede proporcionar los aspectos más importantes de diversos tipos de transiciones con tan sólo un parámetro libre, que es la constante correspondiente al vértice de creación del par quark-antiquark. Los resultados pueden ser mejorados si se introducen términos más sofisticados para el vértice [85], pero para el objetivo de este trabajo no será necesario.

En este trabajo nos basaremos en la reducción de este potencial para mesones con funciones de onda expandidas en gaussianas (GEM de las Ec. 2.36) realizado por L.A. Blanco [86] para el cálculo de decays fuertes mesónicos.

Con el objetivo de acoplar los dos sectores mencionados empezamos suponiendo que nuestro estado hadrónico viene representado por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle + \sum_{\beta} \chi_{\beta}(P) |\phi_A \phi_B \beta\rangle \quad (3.13)$$

donde $|\psi_\alpha\rangle$ son los autoestados $q\bar{q}$ del Hamiltoniano de dos cuerpos, ϕ_i son los autoestados que describen los mesones $i = \{A, B\}$ con masa M_i , $|\phi_A\phi_B\beta\rangle$ es el estado de dos mesones con números cuánticos β acoplado a los números cuánticos totales J^{PC} y $\chi_\beta(P)$ es la función de onda relativa entre los dos mesones en la molécula.

Esta ecuación de onda cumple la ecuación de Schrödinger para canales acoplados:

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = \mathcal{E}|\psi\rangle, \quad (3.14)$$

con

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_{q\bar{q}} & \Upsilon_{q\bar{q}\rightarrow AB} \\ \Upsilon_{AB\rightarrow q\bar{q}} & H_{AB} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

donde tenemos que, al ser $|\psi_\alpha\rangle$ autoestados de $q\bar{q}$, se cumple $H_{q\bar{q}}|\psi_\alpha\rangle = M_\alpha|\psi_\alpha\rangle$, lo que define el espectro de estados $q\bar{q}$ desnudos. En la parte H_{AB} incluimos la parte de interacción entre mesones a través del modelo de quarks constituyentes, mientras que el operador $\Upsilon_{q\bar{q}\rightarrow AB}$ (Ec. 3.12) es el responsable de vestir los estados, logrando el acoplamiento. De este operador podemos definir el potencial de transición $h_{\beta\alpha}(P)$, proveniente del modelo 3P_0 , como

$$\langle\phi_A\phi_B\beta|\Upsilon|\psi_\alpha\rangle = P h_{\beta\alpha}(P) \delta^{(3)}(\vec{P}_{\text{cm}}) \quad (3.16)$$

donde P es el momento relativo del estado de dos mesones.

Usando las funciones de onda de la Ec. 3.13 y el Hamiltoniano de la Ec. 3.15 llegamos a las ecuaciones acopladas,

$$\begin{aligned} M_\alpha c_\alpha + \sum_\beta \int h_{\alpha\beta}(P) \chi_\beta(P) P^2 dP &= E c_\alpha \\ \sum_\beta \int H_{\beta'\beta}^{AB}(P', P) \chi_\beta(P) P^2 dP + \sum_\alpha h_{\beta'\alpha}(P') c_\alpha &= E \chi_{\beta'}(P') \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde M_α son las masas de los estados $q\bar{q}$ desnudos y $H_{\beta'\beta}^{AB}$ es el hamiltoniano RGM para el estado de dos mesones proveniente de la interacción $q\bar{q}$.

Resolviendo el acoplamiento con los estados $q\bar{q}$ llegamos a una ecuación de tipo Schrödinger para la función de onda relativa de los dos mesones

$$\sum_\beta \int \left(H_{\beta'\beta}^{AB}(P', P) + V_{\beta'\beta}^{eff}(P', P) \right) \chi_\beta(P) P^2 dP = E \chi_{\beta'}(P') \quad (3.18)$$

donde

$$V_{\beta'\beta}^{eff}(P', P) = \sum_\alpha \frac{h_{\beta'\alpha}(P') h_{\alpha\beta}(P)}{E - M_\alpha} \quad (3.19)$$

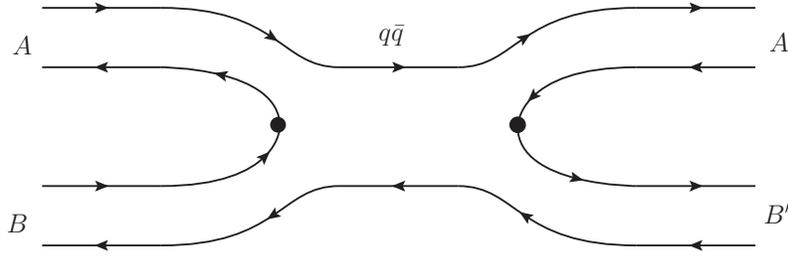


Figura 3.2: Representación del potencial efectivo debido al acoplamiento con estados $q\bar{q}$ intermedios.

es una interacción efectiva entre dos mesones debido al acoplamiento con estados $q\bar{q}$ intermedios, que vemos representada diagramáticamente en la Fig. 3.2.

En este sentido estudiamos la influencia del espectro $q\bar{q}$ en la dinámica de los estados de dos mesones. Es un punto de vista diferente del usual, donde se estudia la influencia de los estados de dos mesones (en general, sin interacción mesón-mesón) en la masa y anchura de los estados $q\bar{q}$ [69, 70].

Nuestra aproximación permite generar nuevos estados a través de la interacción mesón-mesón debido al acoplamiento con estados $q\bar{q}$ y a la interacción RGM. En principio, el formalismo es válido tanto para generar estados ligados como resonancias, esto es, estados por encima del umbral con anchura. Sin embargo, la aproximación propuesta sólo es recomendable para la generación de estados ligados, ya que el cálculo de resonancias plantea problemas que se resolverán por otra vía, mediante la ecuación de Lippmann-Schwinger y la continuación analítica de la misma.

3.3.2. Continuación analítica

El significado físico de P como la magnitud del momento incidente requiere que ésta sea una cantidad real y positiva. Sin embargo, en la ecuación de Schrödinger P es un simple parámetro, que perfectamente puede considerarse complejo. Estudiando las propiedades de la ecuación y sus soluciones para P complejo se encuentran una gran cantidad de resultados físicos interesantes. De hecho, el estudio de las amplitudes de scattering como funciones analíticas de momento complejo ha resultado ser una de las técnicas más poderosas en la teoría de scattering moderna [87].

Para poder estudiar estos casos debemos realizar la continuación analítica de los potenciales a momento complejo. Para ello debemos asegurar que la continuación analítica es única. Afortunadamente disponemos de resultados matemáticos útiles, como el que afirma que si dos funciones analíticas coinciden en un segmento lineal deben coincidir en todas partes. A su vez, tenemos que si $f(z)$ es analítica en alguna región R , entonces la función $f(z)^*$ no es, en general, analítica. Sin embargo, la función $[f(z^*)]^*$ sí es analítica

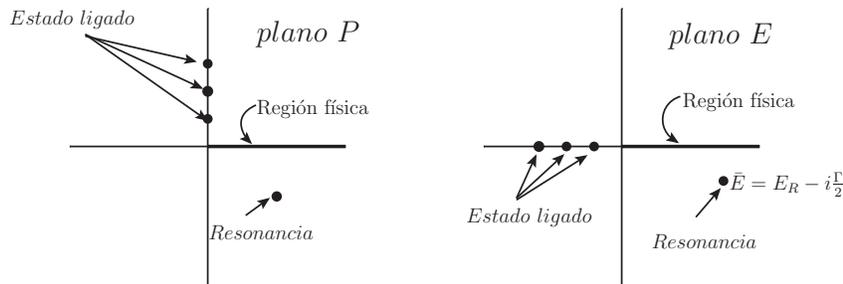


Figura 3.3: Planos de las variables complejas P y $E = P^2/2\mu$, con la parte real en el eje de abscisas y la parte imaginaria en el de ordenadas, y la posición de estados ligados y resonancias en las mismas.

en R^* . A partir de estas propiedades llegamos al *Principio de reflexión de Schwartz*, que nos dice que si $f(z)$ es analítica en una región R que incluye un segmento del eje real y $f(z)$ es real en ese segmento, entonces $f(z)$ puede ser continuado en la región R^* y satisface $f(z) = [f(z^*)]^*$ para todo z en R y R^* .

Debido a que es usual expresar los estados en términos de su energía $E = P^2/2\mu$ en vez de con P , comentaremos algunos aspectos de la conexión entre estas dos variables. Ya que el mapeo de P a E es de dos-a-uno, las amplitudes de scattering, al considerarlas funciones de E , son funciones en una *superficie de Riemann de dos hojas*. La correspondencia entre el plano P y los dos planos de E se suele elegir como mostramos en la Fig. 3.3. La primera hoja u *hoja física* de E corresponde al semiplano superior ($\Im(P) > 0$), mientras que la segunda hoja al semiplano inferior ($\Im(P) < 0$).

Para cualquier P , los puntos $\pm P$ corresponden a dos puntos diferentes en la superficie de Riemann de E (uno en la primera hoja y el otro debajo de él, en la segunda hoja), ambos con el mismo valor numérico $E = P^2/2\mu$. Los estados ligados, que son polos en el eje imaginario positivo de P , caen en el eje negativo real de la primera hoja de E . Así, la resonancia se encuentra por continuación desde la primera hoja pasando a través del corte. Es decir, el polo de la resonancia en \bar{P} se convierte en un polo en la segunda hoja, cerca de la región física, en $\bar{E} = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$.

Nuestro objetivo es calcular tanto estados ligados como resonancias, definidas en el plano complejo de energía. Para solventar el problema de hallar los polos de la matriz S deberemos acceder a la hoja correcta mediante una continuación analítica del formalismo al plano complejo, usando para ello un método más adecuado, que es la matriz T obtenida de la ecuación de Lippmann-Schwinger (Ec. 3.7).

El paso de la primera hoja de Riemann a la segunda implica pasar por el corte de las dos hojas. Para poder apreciar el efecto vamos a estudiar un caso sencillo, partiendo de un caso conocido como es el mass-shift perturbativo. El sistema de ecuaciones que describe el mass-shift perturbativo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
M_r &= M_0 - 2\mu \mathcal{P} \int \frac{h^2(q)}{q^2 - k_0^2 - i\epsilon} q^2 dq, \\
\Gamma &= 4\pi\mu \frac{h^2(k_0)}{2k_0} k_0^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

con $E = M_r - i\frac{\Gamma}{2}$ y $k_0^2/2\mu = M_0 - M_A - M_B$, y donde \mathcal{P} representa la parte principal de la integral. Inmediatamente identificamos la parte real como el mass-shift y la parte imaginaria como la anchura perturbativa.

Podemos, entonces, utilizar como base estas ecuaciones y extender el formalismo al plano complejo, del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
g(E) &= 2\mu \int \frac{h^2(q)}{q^2 - k^2 - i\epsilon} q^2 dq = \\
&= 2\mu \int \frac{q^2 h^2(q) - k^2 h^2(k)}{q^2 - k^2 - i\epsilon} dq + 2\mu \int \frac{k^2 h^2(k)}{q^2 - k^2 - i\epsilon} = \\
&= 2\mu \int \frac{q^2 h^2(q) - k^2 h^2(k)}{q^2 - k^2 - i\epsilon} dq + i2\pi\mu \frac{k^2 h^2(k)}{2k}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

con $k^2/2\mu = E - M_A - M_B$ complejo, debido a que $E = M_r - i\frac{\Gamma}{2}$ es complejo. De esta forma partimos de una ecuación con una solución en el eje real acercándonos por la segunda hoja de Riemann y realizamos una continuación analítica de la misma. Así, al no volver a pasar por el salto, podemos estar seguros de estar en la hoja correcta. Esto implica que debemos extender los potenciales para que admitan como variable momentos complejos.

Como veremos, será el propagador del estado acoplado el que nos proporcionará el polo de la matriz S (o lo que es lo mismo, el de T), y por lo tanto el mass-shift jugará un papel importante en el cálculo de las resonancias.

3.3.3. Resolución de la ecuación de Lippmann-Schwinger

Normalmente, la resolución analítica de la ecuación de Lippmann-Schwinger resulta muy complicada salvo para casos sencillos, como potenciales separables, en los cuales podemos reducir la ecuación a una algebraica [82]. En caso de potenciales más realistas se debe recurrir a métodos perturbativos, es decir, utilizando series de Born, o bien a soluciones numéricas, como es nuestro caso.

Las soluciones numéricas utilizan el método de inversión de matriz introducido por Haftel y Tabakin [88]. El método aprovecha la discretización de las integrales cuando se resuelven numéricamente, con una expresión de la forma,

$$\int f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(x_i) w_i \tag{3.22}$$

donde evaluamos la integral con los valores de la función en los N puntos x_i y los pesos w_i . Con este sistema nos damos cuenta que es fácil plantear para una ecuación integral un sistema algebraico de N ecuaciones cuyas incógnitas serán el valor de la función en los N puntos de integración.

Planteamos con esta herramienta la ecuación de Lippmann-Schwinger con canales acoplados 3.7 con umbrales diferentes. Como método de integración utilizamos el método de Gauss-Legendre [89]. Este método integra entre los límites $(-1, 1)$, por lo que deberemos extenderlos para considerar un intervalo $(0, \infty)$. En nuestro caso utilizaremos un mapeo uniforme con un *cut-off* adecuado, que tomamos de $c \sim 3500 \text{ MeV}$.

Hay que tener en cuenta que los estados por encima del threshold presentan un polo, cuya contribución debemos calcular de forma adecuada para obtener resonancias. Denotaremos por $\beta \in \mathcal{C}$ a un canal mesón-mesón genérico incluido en el cálculo, $\beta_o \in \mathcal{C}_o$ a los canales que se encuentran por encima del threshold y $\beta_c \in \mathcal{C}_c$ a los que se encuentren por debajo. Teniendo en cuenta la continuación analítica de la Sección 3.3.2 la Ec. 3.7 resulta,

$$T^{\beta'\beta}(E; p', p) = V^{\beta'\beta}(p', p) + \sum_{\beta''} \mathcal{P} \int dp'' p''^2 V^{\beta'\beta''}(p', p'') \frac{2\mu_{\beta''}}{k_{\beta''}^2 - p''^2} T^{\beta''\beta}(E; p'', p) - i\pi \sum_{\beta_o} \mu_{\beta_o} k_{\beta_o} V^{\beta'\beta_o}(p', k_{\beta_o}) T^{\beta_o\beta}(E; k_{\beta_o}, p) \quad (3.23)$$

donde hemos usado las expresiones de momentos que definimos anteriormente. Debemos ahora regularizar la integral para realizar el cálculo numérico, teniendo en cuenta que,

$$\mathcal{P} \int \frac{dq}{k^2 - q^2} = 0 \quad \forall k^2 > 0 \quad (3.24)$$

que, aplicado a la matriz T resulta,

$$\sum_{\beta_o} \mathcal{P} \int dp'' k_{\beta_o}^2 V^{\beta'\beta_o}(p', k_{\beta_o}) \frac{2\mu_{\beta_o}}{k_{\beta_o}^2 - p''^2} T^{\beta_o\beta}(E; k_{\beta_o}, p) = 0 \quad (3.25)$$

Escribimos finalmente la ecuación de Lippmann-Schwinger como,

$$T^{\beta'\beta}(E; p', p) = V^{\beta'\beta}(p', p) + \sum_{\beta_c} \mathcal{P} \int dp'' p''^2 V^{\beta'\beta_c}(p', p'') \frac{2\mu_{\beta_c}}{k_{\beta_c}^2 - p''^2} T^{\beta_c\beta}(E; p'', p) + \sum_{\beta_o} \mathcal{P} \int dp'' \frac{2\mu_{\beta_o}}{k_{\beta_o}^2 - p''^2} [p''^2 V^{\beta'\beta_o}(p', p'') T^{\beta_o\beta}(E; p'', p) - k_{\beta_o}^2 V^{\beta'\beta_o}(p', k_{\beta_o}) T^{\beta_o\beta}(E; k_{\beta_o}, p)] - i\pi \sum_{\beta_o} \mu_{\beta_o} k_{\beta_o} V^{\beta'\beta_o}(p', k_{\beta_o}) T^{\beta_o\beta}(E; k_{\beta_o}, p) \quad (3.26)$$

de forma que el cálculo numérico de las integraciones es estable, puesto que para β_c el propagador no tiene ningún polo y para β_o el numerador y el denominador se anulan en el mismo punto k_{β_o} , siendo un cero de primer orden para ambos.

Buscamos obtener la matriz T 'totally off-shell', es decir, para momento inicial y final arbitrario. Por lo tanto, el siguiente paso es discretizar las integrales según la ecuación 3.22. Así las ecuaciones 3.26 resultan,

$$\begin{aligned}
T^{\beta'\beta}(E; p', p) &= V^{\beta'\beta}(p', p) + \sum_{\beta_c} \sum_i w_i p_i^2 V^{\beta'\beta_c}(p', p_i) \frac{2\mu_{\beta_c}}{k_{\beta_c}^2 - p_i^2} T^{\beta_c\beta}(E; p_i, p) + \\
&+ \sum_{\beta_o} \sum_i w_i \frac{2\mu_{\beta_o}}{k_{\beta_o}^2 - p_i^2} [p_i^2 V^{\beta'\beta_o}(p', p_i) T^{\beta_o\beta}(E; p_i, p) - \\
&- k_{\beta_o}^2 V^{\beta'\beta_o}(p', k_{\beta_o}) T^{\beta_o\beta}(E; k_{\beta_o}, p)] - \\
&- i\pi \sum_{\beta_o} \mu_{\beta_o} k_{\beta_o} V^{\beta'\beta_o}(p', k_{\beta_o}) T^{\beta_o\beta}(E; k_{\beta_o}, p)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

siendo i el índice que recorre los puntos de integración y w_i los pesos. Plantearemos las ecuaciones tomando como momento inicial y final los momentos utilizados para la integración $\{p, p'\} = p_i$.

Con el objetivo de generalizar el cálculo, en el caso de tener canales por debajo del umbral \mathcal{C}_c , no podemos eliminar las ecuaciones en las que aparezca $T^{\beta'\beta_c}(E; p', k_{\beta_c})$ o $T^{\beta_c\beta}(E; k_{\beta_c}, p)$, aunque no contengan ningún polo en las integrales y no contribuyan a la parte *on-shell* de la matriz T . Debemos, sin embargo, tener cuidado, pues los estados ligados aparecerán como polos en el eje imaginario puro de momentos ($\Re(k_{\beta_c}) = 0$ ya que $E < M_A + M_B$) y nuestros potenciales deben permitir estos momentos.

De esta forma, si tenemos N_{ch} canales diferentes y N puntos de integración, planteamos $N_{ch} \times N_{ch} \times (N + 1) \times (N + 1)$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas, siendo estas,

$$\begin{aligned}
&T^{\beta'\beta}(E; p_i, p_j), \\
&T^{\beta'\beta}(E; p_i, k_\beta), \\
&T^{\beta'\beta}(E; k_{\beta'}, p_j), \\
&T^{\beta'\beta}(E; k_{\beta'}, k_\beta).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

El conjunto de ecuaciones se puede escribir de forma matricial como,

$$A \cdot T = V \Rightarrow T = A^{-1} \cdot V \tag{3.29}$$

siendo T y V matrices $(N_{ch}(N + 1)) \times (N_{ch}(N + 1))$, definidas por,

$$\begin{aligned}
T_{(\beta'-1)(N+1)+i, (\beta-1)(N+1)+j} &= T^{\beta'\beta}(E; p_i, p_j), \\
T_{(\beta'-1)(N+1)+i, \beta(N+1)} &= T^{\beta'\beta}(E; p_i, k_\beta), \\
T_{\beta'(N+1), (\beta-1)(N+1)+j} &= T^{\beta'\beta}(E; k_{\beta'}, p_j), \\
T_{\beta'(N+1), \beta(N+1)} &= T^{\beta'\beta}(E; k_{\beta'}, k_\beta),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

e igual para V ,

$$\begin{aligned}
V_{(\beta'-1)(N+1)+i, (\beta-1)(N+1)+j} &= V^{\beta'\beta}(p_i, p_j), \\
V_{(\beta'-1)(N+1)+i, \beta(N+1)} &= V^{\beta'\beta}(p_i, k_\beta), \\
V_{\beta'(N+1), (\beta-1)(N+1)+j} &= V^{\beta'\beta}(k_{\beta'}, p_j), \\
V_{\beta'(N+1), \beta(N+1)} &= V^{\beta'\beta}(k_{\beta'}, k_\beta),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

y A una matriz cuadrada con las mismas dimensiones que T y V , definida por,

$$\begin{aligned}
 A_{(\beta'-1)(N+1)+i,(\beta-1)(N+1)+j} &= \delta_{ij}\delta_{\beta'\beta} - V^{\beta'\beta}(p_i, p_j) \frac{2\mu_\beta}{k_\beta^2 - p_j^2} p_j^2 w_j, \\
 A_{\beta'(N+1),(\beta-1)(N+1)+j} &= -V^{\beta'\beta}(k_{\beta'}, p_j) \frac{2\mu_\beta}{k_\beta^2 - p_j^2} p_j^2 w_j, \\
 A_{(\beta'-1)(N+1)+i,\beta(N+1)} &= V^{\beta'\beta}(p_i, k_\beta) (2\mu_\beta w_{0\beta} + i\pi\mu_\beta k_\beta) \\
 A_{\beta'(N+1),\beta(N+1)} &= \delta_{\beta'\beta} + V^{\beta'\beta}(k_{\beta'}, k_\beta) (2\mu_\beta w_{0\beta} + i\pi\mu_\beta k_\beta)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

con $w_{0\beta} = \sum_n \frac{w_n \cdot k_\beta^2}{k_\beta^2 - p_n^2}$, donde $\beta, \beta' \in \{1, \dots, N_{ch}\}$ recorren todos los canales e $i, j \in \{1, \dots, N\}$ todos los puntos de integración.

3.3.4. Cálculo de resonancias

Probablemente el fenómeno más sorprendente dentro del mundo de los experimentos de scattering sean las resonancias. Estas estructuras se observan en física atómica, nuclear y de partículas. En su forma más simple dan lugar a picos estrechos en la sección eficaz total como función de la energía. Obviamente, estos efectos, una vez explicados nos conducen a información útil sobre las interacciones subyacentes.

Hay muchas aproximaciones teóricas al fenómeno de las resonancias, teniendo todas en común que la variación brusca de la sección eficaz a la energía E_R está relacionado de alguna forma con la existencia de un *quasi-estado ligado* del sistema con energía E_R . Cuando el proyectil se envía con dicha energía, puede ser temporalmente capturado en este estado metaestable, y esa posibilidad se considera la causa de la violenta variación de la sección eficaz.

De forma abreviada, se puede demostrar que los estados ligados corresponden con polos en la matriz de scattering S en la recta $\Im(P) > 0$, como estados de momento imaginario puro. De igual manera, un polo en el semiplano inferior $\Im(P) < 0$ puede, bajo ciertas circunstancias, corresponderse con una resonancia, concepto que definiremos en un momento. Esto nos sugiere una conexión entre estados ligados y resonancias. Por supuesto, para poder examinar cualquier objeto en el semiplano inferior es imprescindible que el potencial sea 'razonable', en el sentido de que permita continuación analítica al semiplano inferior.

El término resonancia se suele tomar como un sinónimo exacto de polo de S . Sin embargo, está claro que un polo lo suficientemente alejado del eje real no producirá efectos físicos observables; y, en ocasiones, pueden existir efectos observables asociados a resonancias cuando no existe un polo en la matriz S . Así, la definición de resonancia como polo de la matriz de scattering no tiene por qué corresponderse, en principio, con ningún fenómeno observable; aunque, en general, sí seremos capaces de apreciarlo.

A priori, parece que el formalismo desarrollado anteriormente en este capítulo es general, lo cual nos permitiría la generación de resonancias como nos permite los estados ligados. Sin embargo, el estudio del plano complejo es un tema delicado y tendremos que tratarlo con más detenimiento. En este apartado mostraremos el método general para la obtención de resonancias y estados ligados en un mismo marco. A su vez, daremos las claves para la obtención de diversos observables como son las probabilidades y anchuras parciales de una forma más rigurosa.

Una vez presentada la ecuación de Lippmann-Schwinger y la continuación analítica necesaria para extender el formalismo para estados resonantes por encima del threshold, estudiaremos el formalismo necesario para hallar dichas resonancias y sus propiedades.

Partimos del sistema de ecuaciones 3.17, que podemos escribir como:

$$\sum_{\beta} \int \left(H_{\beta'\beta}^{AB}(P', P) + V_{\beta'\beta}^{eff}(P', P) \right) \chi_{\beta}(P) P^2 dP = E \chi_{\beta'}(P') \quad (3.33)$$

con P, P' momento relativo inicial y final y β, β' canales inicial y final, respectivamente, de los mesones AB . Donde hemos definido,

$$V_{\beta'\beta}^{eff}(P', P) = \sum_{\alpha} \frac{h_{\beta'\alpha}(P') h_{\alpha\beta}(P)}{E - M_{\alpha}} \quad (3.34)$$

Nuestro objetivo es obtener resonancias, es decir, generar estados con mezcla $q\bar{q} - q\bar{q}q\bar{q}$ por encima del umbral. Como ya hemos visto, la solución del sistema de ecuaciones acopladas 3.18 se puede obtener a partir de la ecuación de Lippmann-Schwinger 3.7

$$T^{\beta'\beta}(E; P', P) = V_T^{\beta'\beta}(P', P) + \sum_{\beta''} \int dP'' P''^2 V_T^{\beta'\beta''}(P', P'') \frac{1}{E - E_{\beta''}(P'')} T^{\beta''\beta}(E; P'', P) \quad (3.35)$$

con $V_T^{\beta'\beta}(P', P) = V^{\beta'\beta}(P', P) + V_{eff}^{\beta'\beta}(P', P)$, suma del potencial V , proveniente del método RGM y V_{eff} , del acoplamiento debido a estados mesónicos intermedios (ver Fig. 3.2).

La matriz T completa puede ser factorizada de manera similar a V_T , de la forma,

$$T^{\beta'\beta}(E; P', P) = T_V^{\beta'\beta}(E; P', P) + \sum_{\alpha, \alpha'} \phi^{\beta'\alpha'}(E; P') \Delta_{\alpha'\alpha}(E)^{-1} \bar{\phi}^{\alpha\beta}(E; P) \quad (3.36)$$

con $\Delta^{\alpha'\alpha}(E) = \{(E - M_{\alpha})\delta^{\alpha'\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E)\}$ el propagador del estado mezcla; y donde $T_V^{\beta'\beta}(E; P', P)$ es la matriz T del potencial RGM, excluyendo el acoplamiento a $q\bar{q}$,

$$T_V^{\beta'\beta}(E; P', P) = V^{\beta'\beta}(P', P) + \sum_{\beta''} \int dP'' P''^2 V^{\beta'\beta''}(P', P'') \frac{1}{E - E_{\beta''}(P'')} T_V^{\beta''\beta}(E; P'', P) \quad (3.37)$$

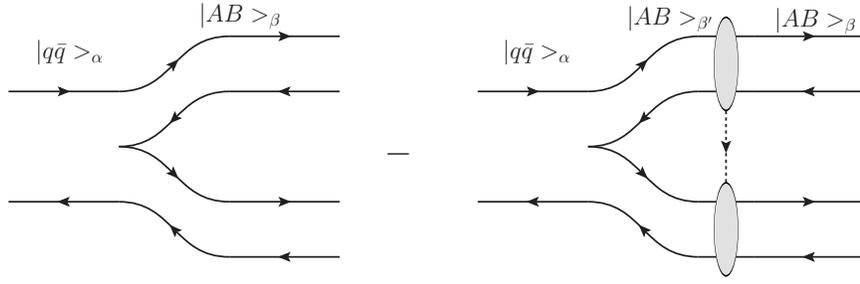


Figura 3.4: Vértice vestido $\phi^{\alpha\beta}$, construido a partir de la amplitud 3P_0 y corregido con la matriz T_V proveniente de la interacción mesón-mesón.

y donde definimos unas funciones cuya interpretación es la de los vértices 3P_0 vestidos por la interacción mesón-mesón puramente *RGM*,

$$\begin{aligned}\phi^{\alpha\beta'}(E; P) &= h_{\alpha\beta'}(P) - \sum_{\beta} \int \frac{T_V^{\beta'\beta}(E; P, q) h_{\alpha\beta}(q)}{q^2/2\mu - E} q^2 dq, \\ \bar{\phi}^{\alpha\beta}(E; P) &= h_{\alpha\beta}(P) - \sum_{\beta'} \int \frac{h_{\alpha\beta'}(q) T_V^{\beta'\beta}(q, P, E)}{q^2/2\mu - E} q^2 dq\end{aligned}\quad (3.38)$$

donde $\phi^{\alpha\beta}$ será el vértice de creación de dos mesones o de *salida* de la resonancia, cuya representación diagramática tenemos en la Fig. 3.4, y $\bar{\phi}^{\alpha\beta}$ será el vértice de destrucción de dos mesones, o de *entrada* a la resonancia (con la misma interpretación diagramática que Fig. 3.4 vista de derecha a izquierda). En general, como nuestros potenciales cumplen la invariancia temporal tendremos que la matriz S (y por consiguiente la matriz T) es simétrica, y estos dos vértices serán iguales $\phi^{\alpha\beta} = \bar{\phi}^{\alpha\beta}$, aunque seguiremos denominándolos de manera diferente.

La matriz $\mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E)$ que aparece en el propagador de la matriz T se puede identificar como el *mass-shift* exacto del estado, considerando tanto interacción mesón-mesón como acoplamientos entre los propios estados $q\bar{q}$ del espectro base. Su expresión es,

$$\mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E) = \sum_{\beta} \int dq q^2 \frac{\phi^{\alpha\beta}(q, E) h_{\beta\alpha'}(q)}{q^2/2\mu - E} \quad (3.39)$$

Para obtener la expresión 3.36 partimos de las ecuaciones 3.35 y 3.37, y usando las definiciones de los vértices modificados 3.38 llegamos a la expresión final. La representación diagramática de $\mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E)$ se puede ver en la Fig. 3.5.

Las resonancias aparecerán como polos en la matriz T , esto es, como ceros en el propagador exacto del estado mezcla. Por lo tanto, para encontrar la energía a la que se hace cero el denominador basta con imponer que su determinante sea cero.

$$\left| \Delta^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) \right| = \left| (\bar{E} - M_{\alpha}) \delta^{\alpha'\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) \right| = 0 \quad (3.40)$$

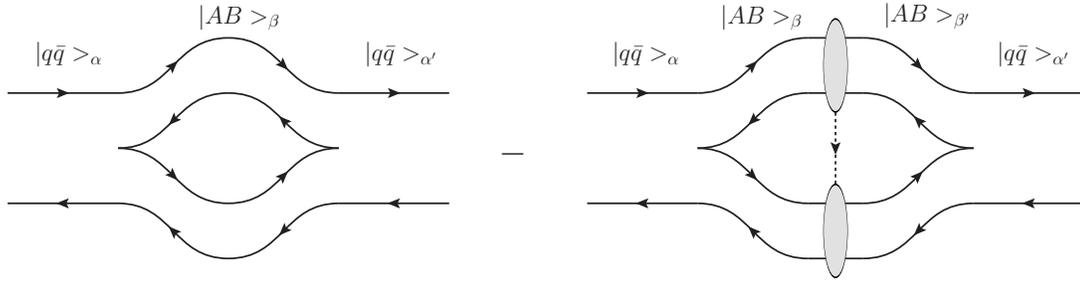


Figura 3.5: Loop hadrónico en el propagador de un mesón debido a un canal AB intermedio, corregido por la interacción mesón-mesón. Debido a que el estado inicial $q\bar{q}$ no tiene por qué ser igual al final aparece acoplamiento entre el espectro desnudo $q\bar{q}$.

con \bar{E} la posición del polo.

Numéricamente, el método de Broyden nos permite encontrar la solución del sistema de ecuaciones en el espacio de energías complejas. Se puede comprobar fácilmente cómo esta solución tiende a la perturbativa (Ec. 3.20) cuando consideramos un sólo canal mesónico y despreciamos la interacción mesón-mesón.

3.3.5. Generalización de los observables

El nuevo formalismo requiere de diferentes técnicas para obtener los observables necesarios para describir el sistema. Si somos capaces de obtener la expresión de la función de onda relativa del estado molecular y el autovalor del estado ligado, es sencillo calcular la probabilidad del estado mesónico. En efecto, la amplitud de probabilidad del estado $|q\bar{q}, \alpha \rangle$, que denotamos como c_α , se puede extraer de la primera ecuación de 3.17, una vez calculada $\chi_\beta(P)$,

$$c_\alpha = \frac{1}{E - M_\alpha} \sum_\beta \int h_{\alpha\beta}(P) \chi_\beta(P) P^2 dP \quad (3.41)$$

Por lo tanto, la obtención de todos los observables del sistema se reduciría a calcular la función de onda relativa del estado molecular. Para obtener $\chi_\beta(P)$ partiremos de Ecs. 3.17 y manipularemos la segunda ecuación,

$$\sum_\beta \int H_{\beta'\beta}^{AB}(P', P) \chi_\beta(P) P^2 dP + \sum_\alpha h_{\beta'\alpha}(P') c_\alpha = E \chi_{\beta'}(P') \quad (3.42)$$

Si expresamos $H_{\beta'\beta}^{AB}(P', P) = (P'^2/2\mu_{\beta'} + M_A + M_B) \delta(P' - P) \delta_{\beta'\beta} + V^{\beta'\beta}(P', P)$, podemos escribir,

$$(P'^2/2\mu_{\beta'} + M_A + M_B - E) \chi_{\beta'}(P') = -\sum_{\beta} \int V^{\beta'\beta}(P', P) \chi_{\beta}(P) P^2 dP - \sum_{\alpha} h_{\beta'\alpha}(P') c_{\alpha} \quad (3.43)$$

de donde obtenemos,

$$\chi_{\beta'}(P') = \frac{-2\mu_{\beta'}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \left\{ \sum_{\alpha} h_{\beta'\alpha}(P') c_{\alpha} + \sum_{\beta} \int V^{\beta'\beta}(P', P) \chi_{\beta}(P) P^2 dP \right\} \quad (3.44)$$

con $k_{\beta'}^2 = 2\mu_{\beta'}(E - M_A - M_B)$.

Como podemos observar, es imposible despejar $\chi_{\beta}(P)$ de esta forma. Así pues, para conseguir una expresión sencilla de la función de onda relativa, realizaremos un cálculo iterativo, empezando por la función de onda sin interacción $V^{\beta'\beta}(P', P) = 0$,

$$\chi_{\beta'}^{(0)}(P') = \frac{-2\mu_{\beta'} \sum_{\alpha} h_{\beta'\alpha}(P') c_{\alpha}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \quad (3.45)$$

Introduciendo esta solución en la segunda parte de la ecuación 3.44 e iterando obtendremos:

$$\begin{aligned} \chi_{\beta'}^{(1)}(P') &= \sum_{\alpha} \frac{-2\mu_{\beta'} c_{\alpha}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \left\{ h_{\beta'\alpha}(P') - \sum_{\beta_q} 2\mu_{\beta_q} \int V^{\beta'\beta_q}(P', q) \frac{1}{q^2 - k_{\beta_q}^2} h_{\beta_q\alpha}(q) q^2 dq \right\} \\ &\vdots \\ \chi_{\beta'}^{(n)}(P') &= \sum_{\alpha} \frac{-2\mu_{\beta'} c_{\alpha}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \left\{ h_{\beta'\alpha}(P') - \sum_{\beta_q} 2\mu_{\beta_q} \int V^{\beta'\beta_q}(P', q) \frac{1}{q^2 - k_{\beta_q}^2} h_{\beta_q\alpha}(q) q^2 dq + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta_q, \beta_{q'}} 4\mu_{\beta_q} \mu_{\beta_{q'}} \iint V^{\beta'\beta_q}(P', q) \frac{1}{q^2 - k_{\beta_q}^2} V^{\beta_q\beta_{q'}}(q, q') \frac{1}{q'^2 - k_{\beta_{q'}}^2} h_{\beta_{q'}\alpha}(q') q^2 dq q'^2 dq' + \dots \right\} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{-2\mu_{\beta'} c_{\alpha}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \left\{ h_{\beta'\alpha}(P') - \sum_{\beta_q} 2\mu_{\beta_q} \int h_{\beta_q\alpha}(q) \frac{1}{q^2 - k_{\beta_q}^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(V^{\beta'\beta_q}(P', q) - \sum_{\beta_{q'}} 2\mu_{\beta_{q'}} \int \frac{V^{\beta'\beta_{q'}}(P', q') V^{\beta_{q'}\beta_q}(q', q)}{q'^2 - k_{\beta_{q'}}^2} q'^2 dq' + \dots \right) q^2 dq \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Entonces, en el límite $n \rightarrow \infty$ tendremos $\chi_{\beta'}^{(n)} \rightarrow \chi_{\beta}$, y usando la definición de $T_V^{\beta'\beta}(E; P', P)$ de la Ec. 3.37 obtendremos,

$$\chi_{\beta'}(P') = \sum_{\alpha} \frac{-2\mu_{\beta'} c_{\alpha}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \left\{ h_{\beta'\alpha}(P') - \sum_{\beta_q} 2\mu_{\beta_q} \int T_V^{\beta'\beta_q}(P', q) \frac{1}{q^2 - k_{\beta_q}^2} h_{\beta_q\alpha}(q) q^2 dq \right\} \quad (3.47)$$

Usando la definición del vértice modificado resulta ser

$$\chi_{\beta'}(P') = -2\mu_{\beta'} \sum_{\alpha} \frac{\phi_{\beta'\alpha}(E; P') c_{\alpha}}{P'^2 - k_{\beta'}^2} \quad (3.48)$$

que sería nuestra expresión final para la función de onda relativa de los dos mesones AB , similar a la Ec. 3.45 pero modificando el vértice 3P_0 con la interacción RGM.

Se nos plantea ahora un problema. Como vimos, la definición de la amplitud de probabilidad c_α (Ec. 3.41) depende de la función de onda relativa χ_β , por lo tanto, debemos obtener primero ésta para hallar más tarde la parte mesónica. Sin embargo, la última expresión obtenida para la función de onda relativa depende a su vez de las amplitudes de probabilidad de los estados $|q\bar{q}\rangle_\alpha$. Es una dependencia cíclica que no nos permite obtener una solución única del sistema.

Para encontrar un método de hallar las amplitudes c_α sin depender de χ_β partiremos de la ecuación 3.41 y sustituiremos la función de onda por su expresión equivalente (Ec. 3.48),

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \frac{1}{E-M_\alpha} \sum_\beta \int h^{\alpha\beta}(P) \chi_\beta(P) P^2 dP = - \sum_{\alpha'} \frac{c_{\alpha'}}{E-M_\alpha} \sum_\beta 2\mu_\beta \int \frac{h^{\alpha\beta}(P) \phi^{\beta\alpha'}(E;P)}{P^2 - k_\beta^2} = \\ &= - \sum_{\alpha'} \mathcal{G}^{\alpha\alpha'}(E) \frac{c_{\alpha'}}{E-M_\alpha} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Esta última ecuación se puede reescribir entonces como,

$$\left\{ (\bar{E} - M_\alpha) \delta^{\alpha'\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) \right\} c_{\alpha'}(\bar{E}) = 0 \quad (3.50)$$

en la posición del polo \bar{E} , que se puede manipular para obtener,

$$\left\{ M_\alpha \delta^{\alpha'\alpha} - \mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) \right\} c_{\alpha'}(\bar{E}) = \bar{E} c_\alpha(\bar{E}) \quad (3.51)$$

problema de autovalores para el estado mezcla.

Recordemos que encontrábamos el polo de la matriz T a través del determinante $|\Delta^{\alpha\alpha'}(\bar{E})| = 0$. Por lo tanto, la ecuación 3.51 es equivalente a hallar la energía de la resonancia, mediante un problema de autovalores con una matriz dependiente de la energía E . No obstante, la ventaja de este método es que hallamos los autovectores, esto es, el conjunto c_α , que a su vez nos permite obtener una expresión para la función de onda relativa a través de la ecuación 3.48. Tendríamos todos los elementos, normalizados de forma correcta,

$$\sum_\alpha |c_\alpha|^2 + \sum_\beta \langle \chi_\beta | \chi_\beta \rangle = 1 \quad (3.52)$$

3.3.6. Anchuras parciales de desintegración

La masa, anchura total y anchuras parciales de una partícula inestable se encuentran entre los conceptos básicos de la física de partículas. De hecho, la mayoría de las partículas de la naturaleza son inestables, y sus masas, anchuras totales y anchuras parciales son algunas de sus propiedades fundamentales. Aun así, la definición precisa y consistente de estos conceptos ha sido difícil durante varias décadas. La razón es que las partículas inestables no son estados asintóticos y, consecuentemente, permanecen fuera del formalismo tradicional de la teoría cuántica de campos.

Las definiciones convencionales de la masa y la anchura son,

$$\begin{aligned} M &= M_0 - \Re(G(M)), \\ \Gamma_o &= 2 \frac{\Im(G(M))}{1 + \Re(G(M))} \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde el denominador de la anchura viene de la renormalización del estado compuesto, con $G(E)$ el loop hadrónico. La anchura parcial está entonces definida por la descomposición del numerador de la anchura en suma de contribuciones de los diferentes canales. Llamaremos a M la masa *on-shell* y a este método la formulación *on-shell*.

Las ecuaciones 3.53 son contribuciones a orden más bajo en el acoplamiento, o soluciones perturbativas. Una solución más satisfactoria desde el punto de vista de la teoría de scattering, así como la invarianza gauge, es basar las definiciones de la masa y la anchura en la posición del polo del propagador, de valor complejo (para un sólo estado $q\bar{q}$):

$$\bar{E} = M_0 - \mathcal{G}(\bar{E}) \quad (3.54)$$

Una forma usual de parametrizar esta ecuación es $\bar{E} = E_R - i\Gamma/2$, donde identificamos E_R y Γ como las definiciones en base a la matriz S de la masa y la anchura de una partícula inestable. De la ecuación 3.54 se sigue que,

$$\Gamma = 2\Im(\mathcal{G}(\bar{E})) \quad (3.55)$$

Una cuestión importante que surge en este punto es la siguiente: Si la ecuación anterior proporciona una definición consistente de la anchura, ¿cuál es la definición de las anchuras parciales? Está claro que debe cumplir la propiedad de aditividad, esto es, la suma de las anchuras parciales debe ser igual a la anchura total.

Consideremos un proceso a través de una resonancia $i \rightarrow X \rightarrow f$, donde i y f son los estados inicial y final (en los canales β y β' respectivamente) compuestos de partículas que o bien son estables o sus anchuras son despreciables. Como ya hemos expuesto, existe una relación directa entre la matriz S y la matriz T , expuesta para cinemática no relativista en la Ec. 3.9. Por supuesto, una vez factorizada la matriz T (Ec. 3.36) podemos llegar a una expresión similar para la matriz S :

$$S^{\beta'\beta}(E) = -i2\pi\delta^4(p_f - p_i) \sum_{\alpha,\alpha'} \phi^{\beta'\alpha'}(k, E) \Delta_{\alpha'\alpha}(E)^{-1} \bar{\phi}^{\alpha\beta}(k, E) + S_{bg}^{\beta'\beta}(E) \quad (3.56)$$

donde la matriz del propagador es $\Delta^{\alpha'\alpha}(E) = \{(E - M_\alpha)\delta^{\alpha'\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E)\}$. En esta ecuación podemos observar dos factores. El que hemos denominado $S_V = S_{bg}$, surge de la interacción mesón-mesón y resulta natural considerarlo como la contribución del background al scattering. El otro término es la contribución debida a resonancias, generalizada para el caso de tener interacción entre ellas (debido a que el mass-shift general $\mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E)$ nos mezcla estados del espectro).

Alrededor del polo se cumple $|\Delta(\bar{E})| = 0$, y por lo tanto, podremos desarrollar el propagador en los alrededores del mismo [90]. Así, tendremos:

$$\Delta^{\alpha'\alpha}(E) = \Delta^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) + (E - \bar{E}) \left[\delta^{\alpha'\alpha} + \mathcal{G}'^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) \right] \sim (E - \bar{E}) \mathcal{Z}^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) \quad (3.57)$$

con

$$\mathcal{G}'^{\alpha'\alpha}(\bar{E}) = \lim_{E \rightarrow \bar{E}} \frac{\mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(E) - \mathcal{G}^{\alpha'\alpha}(\bar{E})}{E - \bar{E}} \quad (3.58)$$

la derivada de la matriz de mass-shift valorada en el polo. Tomaremos este desarrollo como aproximación para energías cerca del polo. Así, la matriz S se podrá escribir como,

$$S^{\beta'\beta}(E) = -i2\pi\delta^4(p_f - p_i) \sum_{\alpha, \alpha'} \phi^{\beta'\alpha'}(\bar{k}, \bar{E}) \frac{1}{E - \bar{E}} \mathcal{Z}_{\alpha'\alpha}(E)^{-1} \bar{\phi}^{\alpha\beta}(\bar{k}, \bar{E}) + S_{bg}^{\beta'\beta}(E) \quad (3.59)$$

Suponemos ahora que la matriz \mathcal{Z} se puede factorizar en $\mathcal{Z}_{\alpha'\alpha}(E) = \sum_{\lambda} \mathcal{Z}_{\alpha'\lambda}^{1/2} \mathcal{Z}_{\lambda\alpha}^{1/2}$. Entonces escribiremos la matriz S finalmente como,

$$S^{\beta'\beta}(E) = -i2\pi\delta^4(p_f - p_i) \sum_{\alpha, \alpha', \lambda} \left[\phi^{\beta'\alpha'}(\bar{k}, \bar{E}) \mathcal{Z}_{\alpha'\lambda}(\bar{E})^{-1/2} \right] \frac{1}{E - \bar{E}} \left[\mathcal{Z}_{\lambda\alpha}(E)^{-1/2} \bar{\phi}^{\alpha\beta}(\bar{k}, \bar{E}) \right] + S_{bg}^{\beta'\beta}(E) \quad (3.60)$$

De esta expresión podemos extraer la amplitud del proceso que nos interesa, que será el vértice:

$$S(X_c \rightarrow f)^{\beta\alpha} = \sum_{\lambda} \phi^{\beta\lambda}(\bar{k}, \bar{E}) \mathcal{Z}_{\lambda\alpha}(\bar{E})^{-1/2} \quad (3.61)$$

La amplitud $S(X_c \rightarrow f)$ nos lleva a la *anchura parcial de salida* mientras que la amplitud correspondiente $S(i \rightarrow X_c)$ nos daría la *anchura parcial de entrada*. La interpretación de la anchura parcial de entrada es la de la anchura de energía de apertura (o la ventana de energía) desde el canal β a la resonancia. La interpretación de la anchura de salida es la tradicional, que se expresa como la fracción de la anchura total que decae al canal β desde la resonancia. Por lo general las anchuras de entrada y salida serán iguales. Si se da el caso de que la invariancia de inversión temporal no se cumple, entonces puede suceder que las anchuras parciales de entrada y salida de la resonancia sean diferentes. Pero en nuestro caso esto no será cierto y las anchuras serán iguales.

Podemos dar una definición de la anchura parcial a partir del residuo del polo,

$$\hat{\Gamma}_{\beta} = \int d\Phi_f |S(X_c \rightarrow f)|^2 \quad (3.62)$$

donde la integral se extiende sobre el espacio de fases del estado final f , con la condición $(\sum_n p_n)^2 = E_R^2$. No hay que confundir el espacio de fases y el valor real E_R donde el observable físico es medido con el valor complejo \bar{E} , donde la corrección a un loop debe ser calculada.

Para el caso de un decay a mesón-mesón, es decir, un decay a dos cuerpos AB , la expresión queda:

$$\hat{\Gamma}_\beta = 2\pi \frac{E_A E_B}{E_R} k_{o\beta} \sum_{\alpha', \alpha, \lambda} \phi^{*\beta\alpha'}(\bar{k}) \mathcal{Z}(\bar{E})_{\alpha'\lambda}^{*-1/2} \mathcal{Z}(\bar{E})_{\lambda\alpha}^{-1/2} \phi^{\alpha\beta}(\bar{k}) \quad (3.63)$$

con

$$k_o = \frac{\sqrt{[E_R^2 - (M_A + M_B)^2][E_R^2 - (M_A - M_B)^2]}}{2E_R} \quad (3.64)$$

que depende del canal β pues depende de M_A y M_B .

Una limitación de la ecuación anterior es que no garantiza la propiedad de aditividad. De hecho, se espera que $\sum_\beta \hat{\Gamma}_\beta \neq \Gamma$. Para remediar esta situación, proponemos definir los *branching ratios* como

$$\mathcal{B}_\beta = \frac{\hat{\Gamma}_\beta}{\sum_\beta \hat{\Gamma}_\beta} \quad (3.65)$$

y la anchura parcial como,

$$\Gamma_\beta = \mathcal{B}_\beta \Gamma \quad (3.66)$$

Esta ecuación garantiza la propiedad de aditividad.

Vemos que $\sum_\beta \hat{\Gamma}_\beta$ y Γ representan dos definiciones diferentes de la anchura total, basada en el residuo del polo y en la posición del polo, respectivamente. Aunque en la mayoría de los casos dan básicamente el mismo resultado.

3.3.7. Desintegraciones y secciones eficaces de producción: Aproximación de Flattè

El desarrollo de este capítulo nos ha permitido estudiar estados por encima del threshold, llevándonos a observables como la masa y la anchura de la resonancia. Sin embargo, el método experimental que conduce al descubrimiento de tales estados se basa en reacciones de desintegración de todo tipo. El estudio de los ratios de desintegración y las secciones eficaces de producción se convierten entonces en una herramienta indispensable a la hora de explicar tales resonancias.

Como ejemplo puede valer el estado $X(3872)$. Como breve introducción, ya que los detalles los veremos en la Sección 4.3.1, la partícula $X(3872)$ ha sido observada en la reacción $B^+ \rightarrow K^+ \pi^+ \pi^- J/\psi$ [91], así como en $B^+ \rightarrow K^+ D^0 D^0 \pi^0$. Así, el estudio de las desintegraciones $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ y $X(3872) \rightarrow D^0 D^0 \pi^0$ nos permite estudiar la

estructura interna de los estados desconocidos, comparando sus propiedades con las de los estados mesónicos teóricos.

En esta sección abordaremos el estudio de los procesos de desintegración importantes y las secciones eficaces de producción en función de la energía, siguiendo un formalismo similar a la Ref. [92].

Para empezar, como ya hicimos al estudiar el formalismo acoplado, comenzamos con un estado mezcla con parte molecular y componente mesónica, representado por la Ec. 3.13,

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle + \sum_{\beta} \chi_{\beta}(P) |\phi_A \phi_B \beta\rangle \quad (3.67)$$

Para observar el proceso de formación de dicho estado mediante un mecanismo de producción desconocido comenzamos con la matriz T completa 3.35, que representa todo lo que conocemos de la reacción,

$$T^{\beta'\beta}(E; P', P) = V_T^{\beta'\beta}(P', P) + \sum_{\beta''} \int dP'' P''^2 V_T^{\beta'\beta''}(P', P'') \frac{1}{E - E_{\beta''}(P'')} T^{\beta''\beta}(E; P'', P) \quad (3.68)$$

con $V_T^{\beta'\beta}(P', P) = V^{\beta'\beta}(P', P) + V_{eff}^{\beta'\beta}(P', P)$. Una vez disponemos de esta matriz, es trivial calcular las secciones eficaces de producción de las desintegraciones bajo estudio.

La producción a través de la componente molecular AB con números cuánticos β será:

$$\frac{dB_{r_h}((AB)^{\beta})}{dE} = \text{const} \times k |\mathcal{M}_h^{\beta}(E)|^2 \Theta(E) \quad (3.69)$$

con

$$\mathcal{M}_h^{\beta}(E) = \mathcal{F}_h \left(1 - \sum_{\beta'} \int dP T^{\beta\beta'}(E; k_{\beta}, P) \frac{2\mu_{\beta'} P^2}{P^2 - k_{\beta'}^2} \right)_{on\ shell} \quad (3.70)$$

donde \mathcal{F}_h es la amplitud de producción del estado inicial a partir de una fuente puntual, el primer término viene de la identidad y el segundo define la interacción del estado final. En la Fig. 3.6 (a), vemos la representación diagramática de dicho proceso.

También es posible tener contribución de la componente mesónica (Fig. 3.6 (b)). La producción puede expresarse como,

$$\frac{dB_{r_q}((AB)^{\beta})}{dE} = \text{const} \times k |\mathcal{M}_q^{\beta}(E)|^2 \Theta(E) \quad (3.71)$$

con la amplitud de producción

$$\mathcal{M}_q^{\beta} = -\mathcal{F}_q \sum_{\alpha} G_{q\alpha} t_{qh}^{\beta\alpha}(E; k_{\beta}), \quad (3.72)$$

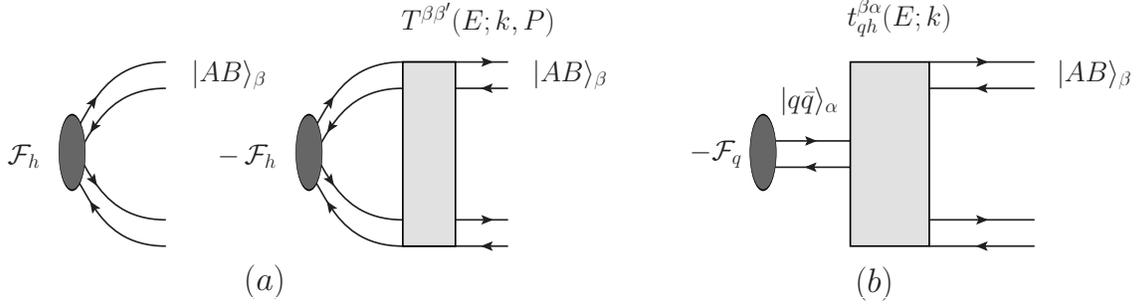


Figura 3.6: Diagramas para los dos posibles mecanismos de producción de dos mesones a través de la componente hadrónica (a) y la componente mesónica (b)

donde \mathcal{F}_q es la amplitud de producción del estado mesónico desnudo por una fuente puntual, $G_{q\alpha}(E) = 1/(M_\alpha - E)$ es la función de Green del estado mesón libre, y $t_{qh}^{\beta\alpha}$ es el elemento de matriz T responsable de la transición mesón-molécula:

$$t_{qh}^{\beta\alpha}(E; k_\beta) = h_{\beta\alpha}(k) - \sum_{\beta'} \int dP T^{\beta\beta'}(E; k_\beta, P) \frac{2\mu_{\beta'} P^2}{p^2 - k_{\beta'}^2} h_{\beta'\alpha}(P) \quad (3.73)$$

con $k^2 = 2\mu_\beta E$ momento on shell. Utilizando las expresiones de Ec. 3.36 y las definiciones de los vértices modificados 3.38 y mass-shift exactos 3.39 podemos modificar $t_{qh}^{\beta\alpha}(E; k)$,

$$t_{qh}^{\beta\alpha}(E; k) = \sum_{\alpha'} \phi_{\alpha'\beta}(E; k) \Delta_{\alpha'\alpha}(E)^{-1} (E - M_\alpha) \quad (3.74)$$

Como vemos, aunque la amplitud \mathcal{M}_q^β parece depender del propagador del mesón desnudo $G_{q\alpha}$, en realidad nos está describiendo el estado acoplado completo, con su propagador $\Delta_{\alpha\alpha'}(E)$.

Hemos descrito dos procesos en principio diferentes, aunque en realidad uno esperaría contribución de ambos mecanismos en el estado físico. Así, podemos escribir el rate completo de producción como:

$$\frac{dB_r((AB)^\beta)}{dE} = \mathcal{B} \times k_\beta \left| \mathcal{M}_h^\beta + \mathcal{M}_q^\beta \right|^2 \Theta(E) \quad (3.75)$$

si es suma coherente, o de otra forma, si es suma incoherente,

$$\frac{dB_r((AB)^\beta)}{dE} = \frac{dB_q((AB)^\beta)}{dE} + \frac{dB_h((AB)^\beta)}{dE} \quad (3.76)$$

Aproximación de Flattè

Estudiaremos ahora un caso particular del proceso anterior, donde despreciaremos la interacción mesón-mesón, quedándonos sólo con el acoplamiento al espectro mesónico, y donde supondremos energías de ligadura pequeñas. Esta aproximación, conocida como aproximación de Flattè [93], nos permitirá estudiar de forma más sencilla y detallada procesos que no requieren del formalismo anterior.

Partiendo de la expresión 3.36, sin interacción mesón-mesón y donde hemos despreciado la mezcla entre estados $|q\bar{q}\rangle_\alpha$, se puede derivar fácilmente la amplitud de scattering AB :

$$F_{AB}^\beta(E; P, P) = -\pi\mu_\beta \sum_\alpha \frac{h_{\beta\alpha}^2(P)}{E - M_\alpha + g_{AB}^\alpha(E)} \quad (3.77)$$

donde la función de mass-shift $g_{AB}^\alpha(E)$ viene dada por

$$g_{AB}^\alpha(E) = \sum_\beta \int \frac{h_{\beta\alpha}^2(P)}{P^2 - k_\beta^2} 2\mu_\beta P^2 dP. \quad (3.78)$$

con k_β momento *on-shell*.

Para energía de ligadura pequeña, $\epsilon = M_A + M_B - E$, podemos expandir la ecuación anterior como,

$$g_{AB}^\alpha(E) = \bar{E}_{AB}^\alpha + \frac{i}{2}\Gamma_{AB}^\alpha + \mathcal{O}(4\mu_\beta^2\epsilon/\Lambda^2) \quad (3.79)$$

donde

$$\bar{E}_{AB}^\alpha = \sum_\beta 2\mu_\beta \int_0^\infty h_{\beta\alpha}^2(P) dP \quad (3.80)$$

$$\Gamma_{AB}^\alpha = \sum_\beta 2\pi\mu_\beta h_{\beta\alpha}^2(0) k_\beta \quad (3.81)$$

y $\Lambda \gg \epsilon$ es la escala característica de la amplitud de producción $h_{\alpha\beta}$ que correspondería a la escala de la función de onda del mesón, que se asume mucho mayor que la energía de ligadura del estado físico.

Una generalización inmediata para incluir varios canales nos da la expresión para la amplitud de scattering AB cerca del threshold

$$F_{AB}^\beta(E; P, P) = -\frac{1}{2k_\beta} \sum_\alpha \frac{\Gamma^\alpha}{E - \bar{E}_{AB}^\alpha + \frac{i}{2}(\Gamma_{AB}^\alpha + \Gamma(E)) + \mathcal{O}(4\mu_\beta^2\epsilon/\Lambda^2)} \quad (3.82)$$

donde $\Gamma(E)$ da cuenta de la anchura debida a otros procesos diferentes de la apertura del cercano threshold AB .

La Ec. 3.82 corresponde a la parametrización de Flattè con

$$D(E)^\alpha = E - \bar{E}_{AB}^\alpha + \frac{i}{2}(\Gamma_{AB}^\alpha + \Gamma(E)) + \mathcal{O}(4\mu_\beta^2\epsilon/\Lambda^2) \quad (3.83)$$

Igual que antes, podemos dar la expresión para el cálculo de los rates diferenciales para un proceso genérico,

$$\frac{dB r_q(AB)^\beta}{dE} = \mathcal{B} \frac{1}{2\pi} \sum_\alpha \frac{\Gamma_{AB}^\alpha(E)}{|D(E)^\alpha|^2}. \quad (3.84)$$

con $D(E)$ definida en 3.83 y \mathcal{B} es una constante que da cuenta de lo que no conocemos del proceso, donde quedaría encriptada la amplitud de producción a la resonancia.

Producción en aniquilación e^+e^- a través de una resonancia

Nuestro objetivo en este apartado es calcular el proceso $e^+e^- \rightarrow AB$ (representado en Fig.3.7) a través de un conjunto arbitrario de resonancias con $J^{PC} = 1^{--}$.

Calcularemos la desintegración en el formalismo de la matriz S . Para ello nos basaremos en el formalismo de Ref. [86]. Cabe recordar que el diagrama de Feynman puede emplearse cuando las partículas en cuestión son libres y tienen un determinado momento; sin embargo, en un mesón tenemos que tener en cuenta que la amplitud fundamental para los quarks debe ser integrada con la correspondiente función de onda $\phi(\vec{P})$, que nos da la amplitud de probabilidad de encontrar un quark con momento \vec{P} dentro del mesón $|q\bar{q}\rangle_\alpha$.

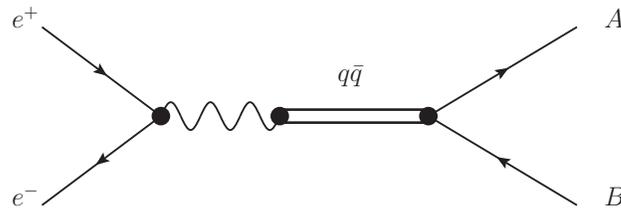


Figura 3.7: Producción de AB a través de una resonancia $q\bar{q}$ con $J^{PC} = 1^{--}$.

Para describir el proceso $|q\bar{q}\rangle_\alpha \rightarrow |AB\rangle_\beta$ necesitamos un estado $q\bar{q}$ con función de onda antisimétrica en color y proyecciones de spin arbitrarias. Así, en el resultado de la reacción $|e^+e^-\rangle \rightarrow |q\bar{q}\rangle_\alpha$ hay que sumar en proyecciones. Además, hay que añadir un factor $\sqrt{3}$ de la parte de color para asegurar que es singlete.

El proceso a estudiar será $\langle e^+e^-|AB\rangle_\beta$ a través de una o varias resonancias $|q\bar{q}\rangle_\alpha$, es decir:

$$\langle e^+e^-|AB\rangle_\beta = \sum_\alpha \langle e^+e^-|q\bar{q}\rangle_\alpha \langle q\bar{q}|AB\rangle_\beta \quad (3.85)$$

En el sistema de referencia de centro de masas, la matriz S del proceso $\langle e^+e^-|q\bar{q}\rangle_\alpha$ se puede escribir como,

$$S = -ie^2e_q(2\pi)^4 \int d^3p \frac{\delta^{(4)}(P_i-P_f)m_l m_q}{(2\pi)^3 E_p (2\pi)^3 E_q} \sum_{M_1 M_2 \mu_L \mu_S} \langle L\mu_L S\mu_S | J\mu_J \rangle \langle \frac{1}{2}M_1 \frac{1}{2}M_2 | S\mu_S \rangle \phi(\vec{p}) \frac{g_{\mu\nu}}{s} [\bar{u}_l(q, \xi_1) \gamma^\mu v_l(-q, \xi_2)] [\bar{v}_q(-p, M_2) \gamma^\nu u_q(p, M_1)] \quad (3.86)$$

con $k_\gamma = E_{cm}/2 = \sqrt{s}/2$, momento del fotón. En esta expresión hemos usado el hecho de que el momento relativo \vec{p} que aparece en la función de onda del mesón se elige de tal manera que es igual al momento del quark y, por tanto, al opuesto del momento del antiquark.

Definimos los corchetes siguientes, separando en parte quark y parte leptónica:

$$A_q^\nu \equiv [\bar{v}_q(-p, M_2) \gamma^\nu u_q(p, M_1)], \quad (3.87)$$

$$A_l^\mu \equiv [\bar{u}_l(q, \xi_1) \gamma^\mu v_l(-q, \xi_2)].$$

Siguiendo el mismo proceso que Blanco [86] obtenemos, para la parte quark,

$$\sum_{M_1, M_2} A_q^i = \delta_{S,1} \sqrt{2} \left[\frac{E_p}{m_q} (-1)^{i+1} \delta_{i, -\mu_S} - \frac{1}{m_q(E_p + m_q)} \sum_j p_i p_j^* (-1)^{j+1} \delta_{j, -\mu_S} \right] \quad (3.88)$$

Por lo que nos queda una matriz S ,

$$S = \sum_i (-1)^{i+1} i e^2 e_q \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m_l}{E_q} \frac{1}{s} \delta^{(4)}(P_i - P_f) \int d^3p \phi(\vec{p}) \sum_{\mu_L \mu_S} \langle L\mu_L S\mu_S | J\mu_J \rangle \delta_{S,1} \sqrt{2} \left[(-1)^{i+1} \delta_{i, -\mu_S} - \frac{1}{E_p(E_p + m_q)} \sum_j p_i p_j^* (-1)^{j+1} \delta_{j, -\mu_S} \right] [\bar{u}_l(q, \xi_1) \gamma^\mu v_l(-q, \xi_2)] \quad (3.89)$$

Si nos centramos ahora en la parte de la matriz S que depende del quark,

$$B^i \equiv \int d^3p \phi(\vec{p}) \sum_{\mu_L \mu_S} \langle L\mu_L S\mu_S | J\mu_J \rangle \delta_{S,1} \sqrt{2} \left[(-1)^{i+1} \delta_{i, -\mu_S} - \frac{1}{E_p(E_p + m_q)} \sum_j p_i p_j^* (-1)^{j+1} \delta_{j, -\mu_S} \right] \quad (3.90)$$

el desarrollo de esta expresión nos lleva a,

$$B^i = (2\pi)^{3/2} \delta_{S,1} \delta_{J,1} \delta_{i, -\mu_J} \sqrt{2} (-1)^{1-\mu_J} \left[\Psi(0) \delta_{L,0} - \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \sqrt{2L+1} \langle L010 | 10 \rangle I_4 \right] \quad (3.91)$$

donde definimos $\overline{\Psi(0)} = \left[\Psi(0)\delta_{L,0} - \frac{\sqrt{2}}{6\pi}\sqrt{2L+1}\langle L010|10\rangle I_4 \right]$ y con

$$I_4 \equiv \int \frac{p^4 dp R_r(p)}{E_p(E_p + m_q)} \quad (3.92)$$

Resolviendo también la parte leptónica obtenemos para la matriz S

$$S = ie^2 e_q \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{m_l}{E_q} \frac{1}{s} 2\overline{\Psi(0)} \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - P) (-1)^{1/2+\xi_2} \frac{E_q+m_l}{2m_l} \left[\left(1 + \frac{q^2}{(E_q+m_l)^2} \right) \langle \frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2 | 1\mu_J \rangle - \frac{2}{(E_q+m_l)^2} \sum_n (-1)^n \langle \frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2 | 1n \rangle q_{-n} q_{\mu_J} \right] \quad (3.93)$$

Si usamos la relación entre la matriz S y la matriz \mathcal{M} :

$$S = -2\pi i \delta^{(4)} \left(\sum p_f - \sum p_i \right) \mathcal{M} \quad (3.94)$$

obtenemos la matriz:

$$\mathcal{M} = e^2 e_q \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{m_l}{E_q} \frac{1}{s} 2\overline{\Psi(0)} (-1)^{1/2+\xi_2} \frac{E_q+m_l}{2m_l} \left[\left(1 + \frac{q^2}{(E_q+m_l)^2} \right) \langle \frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2 | 1\mu_J \rangle - \frac{2}{(E_q+m_l)^2} \sum_n (-1)^n \langle \frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2 | 1n \rangle q_{-n} q_{\mu_J} \right] \quad (3.95)$$

Hasta ahora nos hemos centrado en el braket $\langle e^+ e^- | q\bar{q} \rangle_\alpha$. Ahora, si miramos la parte ${}_\alpha \langle q\bar{q} | AB \rangle_\beta$ resulta sencillo concluir que la amplitud se calcula a través de un proceso de producción similar al representado en la Fig. 3.6 (b). Es justo el desarrollo de la Ec. 3.72, donde ahora sí que conocemos la expresión de la amplitud de producción,

$${}_\alpha \langle q\bar{q} | AB \rangle_\beta = \frac{t_{qh}^{\alpha\beta}(E; k)}{E - M_\alpha} \quad (3.96)$$

con k el momento *on-shell* relativo de los dos mesones, que dependerá de la conservación del momento y la energía. Por lo tanto, utilizando la Ec. 3.74 con el propagador de la resonancia,

$${}_\alpha \langle q\bar{q} | AB \rangle_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha'} \phi_{\alpha'\beta}(E; k) \Delta_{\alpha'\alpha}(E)^{-1} \quad (3.97)$$

donde, como ya sabemos, $\Delta_{\alpha'\alpha}(E)^{-1}$ es el propagador completo de la resonancia y $\frac{1}{\sqrt{2}}$ aparece para evitar el doble conteo proveniente de la parte quark.

Queremos la amplitud al cuadrado de \mathcal{M} , además debemos promediar las polarizaciones de los estados iniciales y sumar a estados finales.

$$|\mathcal{M}_\beta|^2 = \frac{3}{8} (2\pi)^{-3} \frac{m_l^2}{E_q^2} \frac{e^4 e_q^2}{s^2} \left(\frac{E_q+m_l}{m_l} \right)^2 \left| \sum_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha'\beta}(k; E_{cm}) \Delta_{\alpha'\alpha}(E_{cm})^{-1} \overline{\Psi_\alpha(0)} \right|^2 \left[\sum_{\xi_1, \xi_2, \mu_J} \left[\left(1 + \frac{q^2}{(E_q+m_l)^2} \right) \langle \frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2 | 1\mu_J \rangle - \frac{2}{(E_q+m_l)^2} \sum_n (-1)^n \langle \frac{1}{2}\xi_1 \frac{1}{2}\xi_2 | 1n \rangle q_{-n} q_{\mu_J} \right]^2 \right] \quad (3.98)$$

Hemos incluido un factor $\frac{3}{4}$, donde el factor 3 viene de la función de onda de color y $\frac{1}{4}$ viene del promedio a los $\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)}$ estados iniciales, pues $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$. El corchete leptónico se puede simplificar, obteniendo:

$$|\mathcal{M}_\beta|^2 = \frac{3}{8}(2\pi)^{-3} \frac{m_l^2 e^4 e_q^2}{E_q^2 s^2} \left(\frac{E_q + m_l}{m_l} \right)^2 \left[\frac{8E_q^2}{(E_q + m_l)^2} + \frac{4m_l^2}{(E_q + m_l)^2} \right] \times \quad (3.99)$$

$$\times \left| \sum_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha'\beta}(k; E_{cm}) \Delta_{\alpha'\alpha}(E_{cm})^{-1} \overline{\Psi}_\alpha(0) \right|^2$$

Luego, simplificando

$$|\mathcal{M}_\beta|^2 = \frac{3}{8}(2\pi)^{-3} \frac{m_l^2 e^4 e_q^2}{E_q^2 s^2} 4 \left(1 + \frac{2E_q^2}{m_l^2} \right) \left| \sum_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha'\beta}(k; E_{cm}) \Delta_{\alpha'\alpha}(E_{cm})^{-1} \overline{\Psi}_\alpha(0) \right|^2 \quad (3.100)$$

Para obtener una expresión de la sección eficaz total usaremos la expresión de Weimberg:

$$d\sigma_\beta = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - P) \frac{E_1 E_2}{\sqrt{(q_1 \cdot q_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_\beta|^2 d^3 p_1 d^3 p_2 \quad (3.101)$$

Que en el sistema de centro de masas es:

$$d\sigma_\beta = (2\pi)^4 \delta(E_A + E_B - \sqrt{s}) \frac{E_q}{2|q|} |\mathcal{M}_\beta|^2 d^3 k \quad (3.102)$$

con $E_A = \sqrt{k^2 + m_A^2}$ y $E_B = \sqrt{k^2 + m_B^2}$. Simplificando la delta:

$$d\sigma_\beta = (2\pi)^4 \frac{E_A E_B}{\sqrt{s} k_0} \delta(k - k_0) \frac{E_q}{2|q|} |\mathcal{M}_\beta|^2 d^3 k \quad (3.103)$$

donde el momento *on-shell* es,

$$k_o = \frac{\sqrt{[s - (m_A + m_B)^2][s - (m_A - m_B)^2]}}{2\sqrt{s}} \quad (3.104)$$

Ahora, sustituyendo \mathcal{M}_β ,

$$d\sigma_\beta = 6\pi^2 \frac{e^4 e_q^2}{s^{5/2}} \frac{E_A E_B}{k_o} \delta(k - k_o) \frac{1}{E_q |q|} (m_l^2 + 2E_q^2) \left| \sum_{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha'\beta}(k; E_{cm}) \Delta_{\alpha'\alpha}(E_{cm})^{-1} \overline{\Psi}_\alpha(0) \right|^2 k^2 dk \quad (3.105)$$

Podemos integrar en el momento relativo de los dos mesones. Ahora, por cinemática, $E_q \sim |q| \sim \frac{\sqrt{s}}{2}$, donde consideramos $m_l^2 \ll s$. Luego

$$\sigma_\beta = 12\pi^2 \alpha^2 e_q^2 \frac{\sqrt{k_o^2 + m_A^2} \sqrt{k_o^2 + m_B^2} k_o}{s^{5/2}} \left| \sum_{\nu, \nu'} \phi_{\nu'\beta}(k_o; \sqrt{s}) \Delta_{\nu'\nu}(\sqrt{s})^{-1} \overline{\Psi}_\nu(0) \right|^2 \quad (3.106)$$

donde, como vemos, depende sólo del momento *on-shell* de los mesones en el estado final.

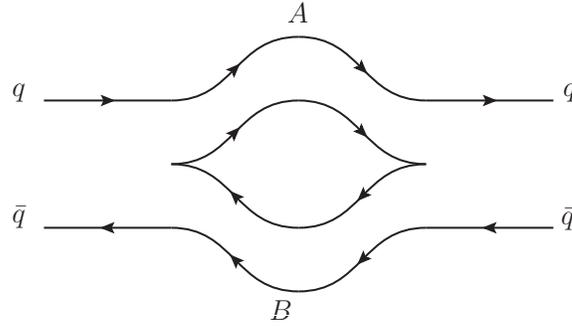


Figura 3.8: Loop hadrónico en el propagador de un mesón debido a un canal AB intermedio.

3.4. Límite perturbativo

Hasta ahora hemos resuelto las ecuaciones 3.17 desde el punto de vista de estados moleculares, es decir, estados ligados de dos mesones. Sin embargo, en la literatura el problema se aborda desde el ángulo contrario, y vale la pena detenerse un momento.

En efecto, si estudiamos el efecto de canales mesón-mesón en el espectro de $q\bar{q}$ tendremos que el valor de las masas 'desnudas' se desplaza debido a la incorporación de loops hadrónicos al propagador del mesón. Para estudiar el caso más sencillo despreciaremos la interacción mesón-mesón y consideraremos un sólo canal mesónico y molecular [70], por lo que las ecuaciones 3.17 resultan ser:

$$\begin{aligned} M_0 c_0 + \int h(P)\chi(P) P^2 dP &= E c_0 \\ \left(P'^2/2\mu + M_A + M_B\right) \chi(P') + h(P')c_0 &= E \chi(P') \end{aligned} \quad (3.107)$$

De la segunda ecuación podemos despejar la función de onda de los dos mesones $\chi_\beta(P)$,

$$\chi(P') = -\frac{h(P')c_0}{P'^2/2\mu + M_A + M_B - E} \quad (3.108)$$

e introduciendo esta ecuación en la primera resulta,

$$E - M_0 + g(E) = 0 \quad (3.109)$$

con

$$g(E) = \int \frac{h^2(P)}{P^2/2\mu + M_A + M_B - E} P^2 dP \quad (3.110)$$

llamado *mass-shift* y cuya interpretación diagramática, en términos de loops hadrónicos, podemos ver en la Fig. 3.8. La resolución de esta ecuación integral nos daría el estado mesónico desplazado. Cuando el estado E está por debajo del threshold ($E < M_A + M_B$) respondería a un cambio del valor de la masa. Sin embargo, si el estado está por encima del threshold $E > M_A + M_B$ obtendríamos un estado con anchura.

Normalmente, muchos autores [69] realizan una aproximación en el propagador del estado AB , sustituyendo $E \sim M_0$. Esta situación permite calcular de forma sencilla tanto el mass-shift como la anchura perturbativa del estado en el caso de que se encuentre por encima del umbral ($M_0 > M_A + M_B$). En efecto, teniendo en cuenta que,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x - x_0 - i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{f(x)}{x - x_0} + i\pi f(x) \delta(x - x_0) \quad (3.111)$$

obtendríamos para $E - M_0 + g(E) = 0$, separando en parte real e imaginaria, el sistema,

$$\begin{aligned} M_r &= M_0 - 2\mu \mathcal{P} \int \frac{h^2(q)}{q^2 - k_0^2 - i\epsilon} q^2 dq, \\ \Gamma &= 4\pi\mu \frac{h^2(k_0)}{2k_0} k_0^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$

con $E = M_r - i\frac{\Gamma}{2}$ y $k_0^2/2\mu = M_0 - M_A - M_B$, y donde \mathcal{P} representa la parte principal de la integral. Inmediatamente identificamos la parte real como el mass-shift y la parte imaginaria como la anchura perturbativa.

3.5. Formalismo con mesones inestables

En la Sección 3.3 llegamos al sistema de ecuaciones acopladas 3.17. Para obtener las mismas hemos supuesto que los mesones interaccionantes AB tienen anchura nula. Esto, en general, es buena aproximación en el caso de anchura pequeña, puesto que el efecto de incorporarla no es muy importante. Sin embargo, si la anchura es apreciable, la dinámica del sistema se verá modificada debido a que los mesones que interaccionan son inestables. En esta sección ampliaremos el formalismo estudiado anteriormente para incluir este efecto, permitiendo que los mesones M_i puedan ser inestables.

Supondremos, para desarrollar el formalismo, que la partícula B tiene un sólo canal de desintegración, en dos partículas $\{b_1, b_2\}$, siendo A estable. Tendremos que ampliar la función de onda 3.13 para permitir el estado de tres partículas correspondiente Ab_1b_2 :

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle + \sum_{\beta} \chi_{\beta}(P) |\phi_A \phi_B \beta\rangle + \varphi(P, Q) |\phi_A \phi_{b_1} \phi_{b_2}\rangle \quad (3.113)$$

donde φ_i representa la función de onda radial de tres mesones con función de onda interna ϕ_i con $i = \{A, b_1, b_2\}$.

Igual que antes, esta función de onda cumple la ecuación de Schrödinger 3.14, salvo que ahora el hamiltoniano debe ser ampliado. Para simplificar el cálculo tomaremos un

sólo estado mesónico α e ignoraremos la interacción mesónica. Llamaremos K_{AB} y $K_{b_1b_2}$ a la energía cinética del par AB y b_1b_2 respectivamente, $T_{c\bar{c}\rightarrow AB}(P) = h(P)$ a la amplitud de 3P_0 , como antes, y a la amplitud $T_{B\rightarrow b_1b_2}(Q) = f(Q)$ con lo que:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} M_0 & h(P) & 0 \\ h(P) & M_A + M_B + K_{AB}(P) & f(Q) \\ 0 & f(Q) & M_A + M_{b_1} + M_{b_2} + K_{AB}(P) + K_{b_1b_2}(Q) \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

con $K_{AB}(P) = P^2/2\mu_p$ y $K_{b_1b_2} = Q^2/2\mu_q$ y con $\mu_p = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$ y $\mu_q = \frac{M_{b_1} M_{b_2}}{M_{b_1} + M_{b_2}}$.

Entonces, de la ecuación 3.14 y 3.114 obtenemos el sistema de ecuaciones acopladas siguiente para $c, \chi(P)$ y $\varphi(P, Q)$:

$$\begin{aligned} c_0 M_0 + \int h(P) \chi(P) P^2 dP &= E c_0 \\ (K_{AB}(P) + M_A + M_B) \chi(P) + c_0 h(P) + \int f(Q) \varphi(P, Q) Q^2 dQ &= E \chi(P) \\ (K_{AB}(P) + K_{b_1b_2}(Q) + M_A + M_{b_1} + M_{b_2}) \varphi(P, Q) + f(Q) \chi(P) &= E \varphi(P, Q) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Despejando en la última ecuación la función de onda $\varphi(P, Q)$ tenemos:

$$\varphi(P, Q) = -\frac{f(Q) \chi(P)}{K_{AB}(P) + K_{b_1b_2}(Q) + M_A + M_{b_1} + M_{b_2} - E} \quad (3.116)$$

Introduciendo esta función en la segunda ecuación de Ecs. 3.115,

$$\begin{aligned} c_0 M_0 + \int h(P) \chi(P) P^2 dP &= E c_0 \\ (K_{AB}(P) + M_A + M_B - G_B(P)) \chi(P) + c_0 h(P) &= E \chi(P) \end{aligned} \quad (3.117)$$

con

$$G_B(P) = \int \frac{|f(Q)|^2}{K_{AB}(P) + K_{b_1b_2}(Q) + M_A + M_{b_1} + M_{b_2} - E} Q^2 dQ \quad (3.118)$$

Podemos interpretar $G_B(P)$ como el mass-shift de la partícula B , que influye en la dinámica del propagador total del estado AB . Si escribimos $M_B - G_B(P) = M_B^{exp} - i\frac{\Gamma_B^{exp}}{2}$, es decir, si consideramos que el efecto del decay a b_1b_2 se puede englobar en la masa y anchura experimental de la partícula B tendremos,

$$\begin{aligned} c_0 M_0 + \int h(P) \chi(P) P^2 dP &= E c_0 \\ (K_{AB}(P) + M_A + M_B - i\frac{\Gamma_B}{2}) \chi(P) + c_0 h(P) &= E \chi(P) \end{aligned} \quad (3.119)$$

donde hemos suprimido los superíndices *exp*. Esto se puede generalizar para el caso de que el mesón A sea inestable también,

$$\begin{aligned} c_0 M_0 + \int h(P) \chi(P) P^2 dP &= E c_0 \\ (K_{AB}(P) + M_A + M_B - i\frac{\Gamma_A + \Gamma_B}{2}) \chi(P) + c_0 h(P) &= E \chi(P) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Esto es, el efecto de considerar mesones inestables se aprecia en la energía cinética de los mismos, donde podemos tomar la masa experimental con su anchura correspondiente. Este formalismo se puede generalizar trivialmente para incluir un número arbitrario de estados $|q\bar{q}, \alpha\rangle$ e interacción mesón-mesón.

Podemos, como antes, derivar el mass-shift del estado $q\bar{q}$ por el efecto de AB , dejando $\chi(P)$ e introduciéndolo en la primera ecuación de 3.120, donde obtendríamos $E - M_0 + g(E) = 0$, con

$$g(E) = \int \frac{|h(P)|^2}{P^2/2\mu_p + M_A + M_B - i\frac{\Gamma_A + \Gamma_B}{2} - E} P^2 dP \quad (3.121)$$

Como caso particular, a partir de esta última ecuación, si tomamos la parte imaginaria de $g(E)$ y aproximamos $E \sim M_0$ en el denominador, considerando sólo B inestable, obtendríamos la anchura parturbativa,

$$\Gamma_{q\bar{q} \rightarrow AB} = 2 * \Im(g(E)) = \int \frac{\Gamma_B |h(P)|^2}{(P^2/2\mu_p + M_A + M_B - M_0)^2 + \frac{\Gamma_B^2}{4}} P^2 dP \quad (3.122)$$

que es el resultado original de L.Blanco [86] para el decay de una partícula a mesones inestables.

3.6. Distorsión

Hasta ahora hemos supuesto que tanto la interacción como la disociación no modifican la estructura interna de los mesones. Esto, aunque no es del todo cierto, es buena aproximación en la mayoría de los casos. Sin embargo, cuando tenemos interacciones fuertes entre mesones, al poseer una estructura interna, ésta puede variar, distorsionando su función de onda.

Es razonable pensar que la estructura interna de los clusters es diferente a la de su estado libre. Es más, en el caso de materia nuclear, la distorsión específica de clusters a corta distancia debido a su interacción mutua ha sido claramente demostrada por muchos autores [94–96]. Normalmente se asume que los clusters mantienen más o menos su identidad, pero su estructura interna es diferente a la de los clusters libres. [97–101].

En esta sección ampliaremos el formalismo para permitir distorsión en las funciones de onda. Para proceder, se puede asumir que la función de onda de los mesones puede cambiar, determinándose variacionalmente. En una primera aproximación podemos partir de la base interna expandida en gaussianas (GEM) de los mesones, convirtiendo los coeficientes C_{nl} libres en parámetros. Es decir, la ecuación que planteamos para el sistema molecular es:

$$\begin{aligned}
\Psi_M(P, p_A, p_B) &= \psi(p_A)\psi(p_B)\chi(P), \\
\psi(p_A) &= \sum_{n=1}^N C_n^A \phi_n^G(p_A), \\
\psi(p_B) &= \sum_{n=1}^N C_n^B \phi_n^G(p_B),
\end{aligned} \tag{3.123}$$

donde hemos obviado los índices de momento angular lm de las funciones de onda para simplificar la notación.

A la hora de aplicar *RGM* debemos realizar una variación de la función de onda total,

$$\begin{aligned}
\Psi_M(P, p_A, p_B) &= \psi(p_A)\psi(p_B)\delta\chi(P) + \\
&\delta\psi(p_A)\psi(p_B)\chi(P) + \psi(p_A)\delta\psi(p_B)\chi(P).
\end{aligned} \tag{3.124}$$

permitiendo ahora la distorsión en mesones. Obtenemos a partir de esta función de onda un sistema de ecuaciones variacionales, que constituyen el problema autoconsistente a resolver,

$$\begin{aligned}
\int P^2 dP \left(\sum_{ijlm} C_i^{*A} C_j^{*B} (H - E)_{ijlm}(P', P) C_l^A C_m^B \right) \chi(P) &= 0, \\
\sum_l \left(\int P'^2 dP' P^2 dP \chi^*(P') \sum_{ijm} C_j^{*B} (H - E)_{ijlm}(P', P) C_m^B \chi(P) \right) C_l^A &= 0, \\
\sum_m \left(\int P'^2 dP' P^2 dP \chi^*(P') \sum_{ijl} C_i^{*A} (H - E)_{ijlm}(P', P) C_l^A \chi(P) \right) C_m^B &= 0.
\end{aligned} \tag{3.125}$$

donde hemos definido la normalización de la función de onda mesónica como,

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{il} C_i^A N_{il} C_l^A = 1 \tag{3.126}$$

y definimos el operador $(H - E)_{ijlm}$ como,

$$\begin{aligned}
(H - E)_{ijlm}(P', P) &= \langle \psi_G^i \psi_G^j | H - E | \psi_G^l \psi_G^m \rangle \\
&= P^2 / 2\mu \delta^{(3)}(P' - P) N_{il} N_{jm} + V_{ijlm} - E N_{il} N_{jm},
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Por lo tanto, podemos expresar el sistema como

$$\begin{aligned}
\int P^2 dP \left(\sum_{ijlm} C_i^{*A} C_j^{*B} H_{ijlm}(P', P) C_l^A C_m^B \right) \chi(P) &= E \chi(P), \\
\sum_l \left(\int P'^2 dP' P^2 dP \chi^*(P') \sum_{ijm} C_j^{*B} H_{ijlm}(P', P) C_m^B \chi(P) \right) C_l^A &= E N_{il} C_l^A, \\
\sum_m \left(\int P'^2 dP' P^2 dP \chi^*(P') \sum_{ijl} C_i^{*A} H_{ijlm}(P', P) C_l^A \chi(P) \right) C_m^B &= E N_{jm} C_m^B.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Podríamos considerar la función de onda interna de los mesones con una forma arbitraria, no imponiendo que factorice en el producto de cada uno de ellas por separado. Sin embargo, debido a que la distorsión es un proceso sólo visible a cortas distancias esta aproximación será suficiente para nuestros propósitos. En el caso de materia nuclear, al estar ligados por fuerzas de intensidad similar el efecto de distorsión será más evidente. Por otro lado, nuestra interacción mesón-mesón será menor que la que existe entre el par $q\bar{q}$ dentro del mesón, haciendo que este proceso de distorsión no sea apreciable salvo cuando se presentan acoplamientos muy intensos.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Introducción

Los formalismos desarrollados en los capítulos anteriores constituyen un poderoso instrumento para el estudio de la dinámica de los sistemas multiquarks. En este capítulo los aplicaremos a diversas situaciones en el que las correlaciones entre quarks juegan un papel importante en la dinámica del sistema. En primer lugar estudiaremos la creación de extrañeza, centrándonos en la producción de pares de hiperón-antihiperón. Tal como dijimos en la introducción, este problema es particularmente atractivo porque las descripciones teóricas a nivel bariónico (que utilizan potenciales de intercambio de bosones) y a nivel quark (basadas en potenciales de aniquilación a través de un gluón) dan predicciones incompatibles con las últimas mediciones experimentales, en particular para algunos observables como el parámetro de depolarización D_{nn} .

El experimento $PS-185$ estudió la producción de extrañeza en colisiones $p\bar{p}$ usando el complejo *Low Energy Antiproton Ring* (LEAR) del CERN. Con un momento máximo del haz disponible de $2,0\text{ GeV}/c$ y los thresholds de hiperones en $1,435$, $1,653$, y $1,853\text{ GeV}/c$ para $\Lambda\bar{\Lambda}$, $\Lambda\bar{\Sigma}$, y $\Sigma\bar{\Sigma}$, respectivamente, muchos de los experimentos analizaron la región de baja energía. Usando la escala de energía definida por el exceso de energía $\epsilon = \sqrt{s} - m_Y - m_{\bar{Y}}$, los estudios se consideraban en el régimen de cerca del threshold si ϵ es del orden de unos pocos MeV .

La mayor parte de los datos experimentales se han centrado en la reacción de isospin cero $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$. Sin embargo, si queremos estudiar con más profundidad los procesos subyacentes de la reacción conviene comparar dichos resultados con otros canales finales como $\Lambda\bar{\Sigma}$, que sólo va a través de isospin uno, o $\Sigma\bar{\Sigma}$ que permite tanto isospin 0 como 1.

En la primera parte de este capítulo, ampliaremos estudios anteriores de los canales $N\bar{N}$ [23] y $\Lambda\bar{\Lambda}$ [102], y a su vez incluiremos nuevos estados finales, para dar una visión general del proceso de creación de extrañeza en base a un modelo de quarks constituyentes.

Otros sistema en el que la dinámica multiquark puede jugar un papel relevante es el espectro del charmonio y de los mesones con encanto (*open-charm*). El estudio de

este sistema ha despertado desde el año 2003 un gran interés por el descubrimiento de estados que no encajan con las predicciones del modelo quark simple. Entre las diversas explicaciones que se han propuesto, los estados multiquark, y en particular los estados moleculares, son una alternativa plausible que explica muchas de las características de estos nuevos estados. En la segunda parte de este capítulo recopilamos los resultados obtenidos al aplicar el formalismo presentado anteriormente a diferentes sectores, en un intento de explicar los estados exóticos XYZ que han aparecido recientemente, así como propiedades de estados mesónicos conocidos que no son capaces de explicar los modelos teóricos actuales.

4.2. Producción de extrañeza en colisiones protón-antiprotón

4.2.1. Secciones eficaces y formalismo de helicidad

En el capítulo anterior estudiamos la ecuación de Lippmann-Schwinger, equivalente a la ecuación de Schrödinger, más adecuada para estudiar estados de scattering y de donde calculamos la matriz de scattering T . Para obtener los observables del proceso necesitamos la matriz de scattering S , la cual se obtiene de la matriz T *on-shell* solución de la ecuación 3.7. La relación entre T y S se escribe para el caso de cinemática no relativista como

$$S_{\alpha}^{\alpha'} = 1 - 2\pi i \sqrt{\mu_{\alpha}\mu_{\alpha'}k_{\alpha}k_{\alpha'}} T_{\alpha}^{\alpha'}(E + i0; k_{\alpha'}, k_{\alpha}) \quad (4.1)$$

con la definición para k_{α}

$$k_{\alpha}^2 = 2\mu_{\alpha}(E - \Delta M_{\alpha}) \quad (4.2)$$

siendo μ_{α} la masa reducida del sistema $B\bar{B}$ al que corresponda el canal α y ΔM_{α} la diferencia entre el umbral del sistema $B\bar{B}$ y el que tomemos de referencia, que será el threshold de más baja energía que consideremos, es decir, $N\bar{N}$.

La sección eficaz total viene dada en términos de la matriz de scattering S para cada onda parcial. Como tenemos diferentes canales esta matriz se puede escribir como:

$$S = \begin{pmatrix} S_{p\bar{p}} & S_{Y\bar{Y} \rightarrow p\bar{p}} \\ S_{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}} & S_{Y\bar{Y}} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Con esto podemos describir la sección eficaz para los diferentes procesos. Para $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ tenemos las secciones eficaces de aniquilación y elástica, que resultan ser,

$$\begin{aligned}
 \sigma_A^{I,N\bar{N}} &= \frac{\pi}{4p_{N\bar{N}}^2} \sum_J (2J+1) \left[(1 - |^1S_J^{JI}|_{N\bar{N}}^2) + (1 - |^3S_J^{JI}|_{N\bar{N}}^2) + \right. \\
 &+ \left. (2 - |^3S_{J+1}^{JI}|_{N\bar{N}}^2 - |^3S_{J-1}^{JI}|_{N\bar{N}}^2 - 2|^3S_{J+1,J-1}^{JI}|_{N\bar{N}}^2) \right], \\
 \sigma_e^{I,N\bar{N}} &= \frac{\pi}{4p_{N\bar{N}}^2} \sum_J (2J+1) \left[|1 - ^1S_J^{JI}|_{N\bar{N}}^2 + |1 - ^3S_J^{JI}|_{N\bar{N}}^2 + \right. \\
 &+ \left. |1 - ^3S_{J+1}^{JI}|_{N\bar{N}}^2 + |1 - ^3S_{J-1}^{JI}|_{N\bar{N}}^2 + 2|^3S_{J+1,J-1}^{JI}|_{N\bar{N}}^2 \right], \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

para cada canal de isospin I . Denotamos como $^1S_J^{JI}$ el elemento de matriz del singlete, $^3S_J^{JI}$ el triplete desacoplado, $^3S_{J\pm 1}^{JI}$ el elemento diagonal para el triplete acoplado y $^3S_{J\pm 1, J\mp 1}^{JI}$ los no diagonales para el mismo. Por supuesto, la segunda línea de cada fórmula no aparece con $J = 0$, pues no existe triplete desacoplado para ese valor del momento angular y sólo hay una onda en el acoplado. La sección eficaz para $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ se obtiene como combinación adecuada de las anteriores:

$$\begin{aligned}
 \sigma_A^{p\bar{p}} &= \frac{1}{2} \left(\sigma_A^{0,N\bar{N}} + \sigma_A^{1,N\bar{N}} \right), \\
 \sigma_e^{p\bar{p}} + \sigma_{ce}^{p\bar{p}} &= \frac{1}{2} \left(\sigma_e^{0,N\bar{N}} + \sigma_e^{1,N\bar{N}} \right), \\
 \sigma_T^{p\bar{p}} &= \sigma_e^{p\bar{p}} + \sigma_{ce}^{p\bar{p}} + \sigma_A^{p\bar{p}} \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

con σ_{ce} la sección eficaz de intercambio de carga (*charge exchange*).

Para $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$ la expresión es similar,

$$\begin{aligned}
 \sigma_T^{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}} &= \frac{\pi}{4p_{N\bar{N}}^2} \frac{1}{2} \sum_J (2J+1) \left[|^1S_J^{JI}|_{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}}^2 + |^3S_J^{JI}|_{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}}^2 + \right. \\
 &+ \left. |^3S_{J+1}^{JI}|_{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}}^2 + |^3S_{J-1}^{JI}|_{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}}^2 + 2|^3S_{J+1,J-1}^{JI}|_{p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}}^2 \right] \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ viene de pasar de formalismo de isospin, utilizado en Lippmann-Schwinger, a base física, usando la relación entre bases:

$$\begin{aligned}
 |p\bar{p}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|N\bar{N}\rangle_{I=0} + |N\bar{N}\rangle_{I=1}), \\
 |\Lambda\bar{\Lambda}\rangle &= |\Lambda\bar{\Lambda}\rangle_{I=0} \\
 |\Lambda\bar{\Sigma}^0\rangle &= |\Lambda\bar{\Sigma}\rangle_{I=1} \\
 |\Sigma^+\bar{\Sigma}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|\Sigma\bar{\Sigma}\rangle_{I=2} + \sqrt{3}|\Sigma\bar{\Sigma}\rangle_{I=1} + \sqrt{2}|\Sigma\bar{\Sigma}\rangle_{I=0}), \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Aunque la sección eficaz total determina características básicas de la interacción, si se quiere hacer un estudio más detallado del proceso es necesario estudiar la sección eficaz diferencial y observables de polarización. Los observables de spin son un buen marco para

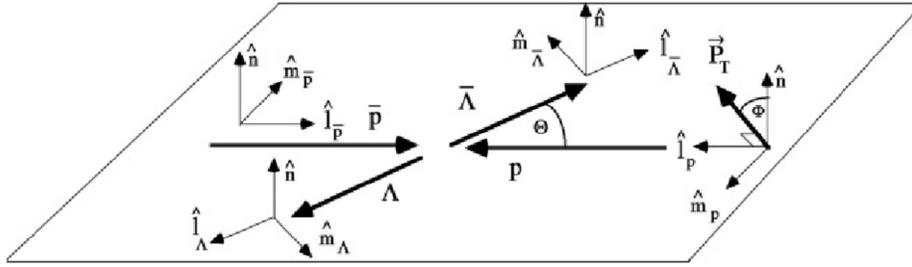


Figura 4.1: Figura obtenida de Ref. [104] para la reacción $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$. Ejes de coordenadas elegidos para descomponer la dirección de spin de cada partícula. La dirección \hat{n} es común para todas. La polarización del blanco se muestra como \vec{P}_T .

entender la producción de extrañeza porque en ellos aparecen detalles de los modelos que permanecen desapercibidos con el resto de observables de scattering. Estos observables serán los que permitan estudiar las diferencias con otros modelos ya propuestos. Para ello utilizaremos el formalismo desarrollado por B. Holzenkamp *et al.* [103], que realiza un cálculo acoplado del scattering de dos partículas distinguibles. Todo el formalismo se realiza en base de helicidad, siendo ésta la proyección del spin en la dirección del momento de la partícula ($h = \vec{S} \cdot \frac{\vec{p}}{p}$). Las amplitudes de helicidad a utilizar se pueden relacionar con nuestra matriz T expresada en base de momento angular, a través de una transformación unitaria.

El cálculo de todos los observables de spin y scattering se realiza en base a la matriz M , siendo una matriz 4×4 on-shell que describe el scattering de dos partículas de spin $\frac{1}{2}$. En el formalismo de la matriz densidad M nos conecta los estados inicial $B\bar{B}$ y final $B'\bar{B}'$:

$$\rho^{B'\bar{B}'} = M\rho^{B\bar{B}}M^\dagger \quad (4.8)$$

Es conveniente construir este operador a partir de una combinación de productos directos de operadores de barión y de antibarión. Los operadores de barión se definirán como aquellos que transforman del espacio de spin del barión inicial al del barión final, dejando los de los antibariones intactos. De igual forma, los de antibarión nos transformarán del espacio de spin del antibarión inicial al final. Llamaremos a los primeros como $I^B, \sigma_l^B, \sigma_m^B, \sigma_n^B$ (usando la notación $\sigma_P = \vec{\sigma} \cdot \vec{P}$) y a los segundos como $I^{\bar{B}}, \sigma_l^{\bar{B}}, \sigma_m^{\bar{B}}, \sigma_n^{\bar{B}}$. Aunque estos operadores tienen la misma representación matricial, actúan en espacios distintos. Para escoger la notación hemos seguido la definición de la base de la figura 4.1.

Es importante tener en cuenta esta definición de coordenadas presentadas aquí cuando nos disponemos a comparar las predicciones con las medidas experimentales. El significado de una correlación de spin en particular depende de los ejes respecto a los cuales ha sido definido. Por ejemplo, con esta elección de coordenadas, el ángulo entre \hat{m}_p y \hat{m}_Λ depende

del ángulo de scattering (ver Fig. 4.1). Esto no se puede ignorar cuando calculemos la correlación entre la componente \hat{m}_p del protón inicial y la \hat{m}_Λ del hiperón final. Estos ejes fueron los elegidos para extraer datos experimentales [104, 105]. Para los observables que involucren sólo componentes normales no hay problema, pues es común para todos y no hay ambigüedad. Por las leyes de conservación de la interacción fuerte, sólo aquellas combinaciones de operadores que tengan paridad y C-paridad positiva contribuyen a la matriz de scattering. La combinación lineal de estos términos que escogeremos será:

$$M(q'_i, q_i, \theta) = \frac{1}{2} \{ (a+b) I^B I^{\bar{B}} + (a-b) \sigma_n^B \sigma_n^{\bar{B}} + (c+d) \sigma_m^B \sigma_m^{\bar{B}} + (c-d) \sigma_l^B \sigma_l^{\bar{B}} + e(\sigma_n^B I^{\bar{B}} + I^B \sigma_n^{\bar{B}}) + g(\sigma_m^B \sigma_l^{\bar{B}} + \sigma_l^B \sigma_m^{\bar{B}}) \}, \quad (4.9)$$

Los seis coeficientes complejos $\{a, \dots, g\}$ están relacionados con los elementos de matriz de los estados de helicidad y, por lo tanto, codifican la información de la matriz T calculada con la ecuación de Lippmann-Schwinger. La base elegida para expresar la matriz M es,

$$\hat{l} = \frac{q'_i}{|q'_i|}, \quad \hat{n} = \frac{q_i \times q'_i}{|q_i \times q'_i|}, \quad \hat{m} = \hat{n} \times \hat{l}, \quad (4.10)$$

definida en la base de la partícula saliente $B' \bar{B}'$.

Antes de evaluar los observables debemos pasar a base física desde formalismo de isospin,

$$\begin{aligned} \langle p\bar{p} | M | p\bar{p} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle N\bar{N} | M^{I=0} | N\bar{N} \rangle + \langle N\bar{N} | M^{I=1} | N\bar{N} \rangle), \\ \langle p\bar{p} | M | \Lambda\bar{\Lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle N\bar{N} | M^{I=0} | \Lambda\bar{\Lambda} \rangle \\ \langle p\bar{p} | M | \Lambda\bar{\Sigma}^0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle N\bar{N} | M^{I=1} | \Lambda\bar{\Sigma} \rangle \\ \langle p\bar{p} | M | \Sigma\bar{\Sigma} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}} (\sqrt{2} \langle N\bar{N} | M^{I=0} | \Sigma\bar{\Sigma} \rangle + \sqrt{3} \langle N\bar{N} | M^{I=1} | \Sigma\bar{\Sigma} \rangle) \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, el cálculo de los observables de polarización, de spin o la sección eficaz diferencial es trivial. La notación más general para los coeficientes de correlación es la de Paschke [104], aunque en nuestro caso es más cómodo hacer referencia a la nomenclatura tradicional a la hora de estudiarlos (llamando $n \equiv y$, $m \equiv x$ y $l \equiv z$), ya que permite una interpretación más intuitiva que en el caso general. Más adelante relacionaremos estos con la expresión general:

$$Q[j_{\bar{B}}, k_B, \mu_{\bar{B}'}, \nu_{B'}] = \frac{q'}{q} \frac{1}{4I_0} \text{Tr}(\sigma_\mu^{\bar{B}'} \sigma_\nu^{B'} M \sigma_j^{\bar{B}} \sigma_k^B M^\dagger) \quad (4.11)$$

donde I_0 es la sección eficaz diferencial,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv I_0 = \frac{q'}{q} \frac{1}{4} \text{tr}(M M^\dagger) = \frac{1}{2} \frac{q'}{q} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + |e|^2 + |g|^2). \quad (4.12)$$

Los demás observables tienen las siguientes expresiones. Escribiremos sólo los de la reacción $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$, dado que los observables de la reacción $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ son idénticos.

Para la polarización y el *analyzing power*,

$$\begin{aligned} Q[n_{\bar{\Lambda}}] &\equiv P_y^{\bar{\Lambda}} = -\frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(ae^*) - \Im(gd^*)], \\ Q[n_p] &\equiv A_y = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(ae^*) + \Im(gd^*)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para los parámetros de correlación de spin,

$$\begin{aligned} Q[n_{\bar{\Lambda}}, n_{\Lambda}] &\equiv C_{yy} = \frac{1}{2} \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2 + |e|^2 + |g|^2), \\ Q[m_{\bar{\Lambda}}, m_{\Lambda}] &\equiv C_{xx} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(ad^* + bc^*) + \Im(ge^*)], \\ Q[l_{\bar{\Lambda}}, l_{\Lambda}] &\equiv C_{zz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(-ad^* + bc^*) - \Im(ge^*)], \\ Q[m_{\bar{\Lambda}}, l_{\Lambda}] &\equiv C_{xz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(ag^*) + \Im(ed^*)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Una particular combinación de tres de estos observables tiene una interpretación física directa, y se denomina *Singlet Fraction*, que se define como la fracción de pares $Y\bar{Y}$ creados en un estado de singlete de spin. Puede escribirse como:

$$F_s = \frac{1}{4}(1 + C_{xx} - C_{yy} + C_{zz}) \quad (4.15)$$

A continuación, los parámetros de depolarización son,

$$\begin{aligned} Q[n_p, n_{\Lambda}] &\equiv D_{yy} = \frac{1}{2} \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 + |e|^2 - |g|^2), \\ Q[m_p, m_{\Lambda}] &\equiv D_{xx} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} \Re(ab^* + cd^*), \\ Q[l_p, l_{\Lambda}] &\equiv D_{zz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} \Re(ab^* - cd^*), \\ Q[m_p, l_{\Lambda}] &\equiv D_{xz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(cg^*) + \Im(eb^*)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

y

$$\begin{aligned}
Q[n_p, n_{\bar{\Lambda}}] &\equiv K_{yy} = \frac{1}{2} \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2 + |e|^2 - |g|^2), \\
Q[m_p, m_{\bar{\Lambda}}] &\equiv K_{xx} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} \Re(ac^* + bd^*), \\
Q[l_p, l_{\bar{\Lambda}}] &\equiv K_{zz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} \Re(ac^* - bd^*), \\
Q[m_p, l_{\bar{\Lambda}}] &\equiv K_{xz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} [\Re(bg^*) + \Im(ec^*)].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

También calcularemos las correlaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
Q[n_p, m_{\bar{\Lambda}}, m_{\Lambda}] &\equiv C_{yxx} = -C_{yzz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (\Re(d^*e) + \Im(a^*g)), \\
Q[n_p, l_{\bar{\Lambda}}, m_{\Lambda}] &\equiv C_{yzx} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (\Re(e^*g) + \Im(d^*a - c^*b)), \\
Q[n_p, m_{\bar{\Lambda}}, l_{\Lambda}] &\equiv C_{yxz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (\Re(e^*g) + \Im(d^*a + c^*b)), \\
Q[m_p, n_{\bar{\Lambda}}, l_{\Lambda}] &\equiv C_{xyz} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} \Im(b^*a + c^*d), \\
Q[m_p, l_{\bar{\Lambda}}, n_{\Lambda}] &\equiv C_{xzy} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} \Im(c^*a + b^*d), \\
Q[m_p, n_{\bar{\Lambda}}, m_{\Lambda}] &\equiv C_{xyx} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (\Re(b^*e) + \Im(g^*c)), \\
Q[m_p, m_{\bar{\Lambda}}, n_{\Lambda}] &\equiv C_{xxy} = \frac{q'}{q} \frac{1}{I_0} (\Re(c^*e) + \Im(g^*b)).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Este set completo de observables es una buena base para intentar describir el proceso completo, ya que nos da información muy amplia de la estructura de spin de la reacción.

Una vez llegados a este punto estamos listos para abordar el estudio de los resultados en la siguiente sección. Realizaremos el cálculo acoplado de varios canales. Por lo tanto resulta cómodo estudiar primero los resultados experimentales para los canales inicial y final para a continuación estudiar el cálculo acoplado completo.

4.2.2. Sistema nucleón-antinucleón: El protonio

A la hora de describir la interacción inicial nos basamos en el modelo de $N\bar{N}$ [23], desarrollado para baja energía. Se trata de un modelo que incluye el intercambio de un π y σ , a la vez que tiene en cuenta los posibles diagramas de aniquilación a través de un

π , η y un gluón. La parte imaginaria de la aniquilación se describe fenomenológicamente mediante un potencial óptico que dé cuenta de la aniquilación en mesones. Sin embargo, debemos pensar que este potencial no ha sido desarrollado para energías de scattering $p\bar{p}$ tan altas. De hecho, la energía requerida para crear un par $Y\bar{Y}$ (sea $Y = \Lambda$ o Σ) es mucho mayor que el threshold de producción de piones en el sistema NN . Aun así, siendo conscientes de este detalle, tomaremos este modelo como referencia.

La mayoría de los parámetros utilizados provienen de otros cálculos [23, 106]. Sin embargo, para dar una descripción adecuada de la sección eficaz total en el rango de energías de producción de $Y\bar{Y}$, hemos ajustado los parámetros del potencial óptico. Por supuesto, dado que nuestro objetivo es describir una región más amplia de energías que en el modelo $N\bar{N}$ original, la forma de este potencial no será tan sencilla como en [23]. Así, permitiremos un potencial complejo con dependencia en isospín como forma más general del potencial óptico,

$$V_{opt}^{N\bar{N},I} = (V_r^I + i \cdot W_i^I) e^{-b^2 q^2} \quad (4.19)$$

con q el momento transferido entre dos quarks e I el isospin total.

| | | | |
|-------------------------------------|-------|-------------------------------------|-------|
| b'_1 (fm) | 0,545 | b'_2 | 8,800 |
| $V_{r1}^{I=0}$ (GeV ⁻²) | -1,60 | $V_{r2}^{I=0}$ (GeV ⁻²) | 0,00 |
| $W_{i1}^{I=0}$ (GeV ⁻²) | -1,94 | $W_{i2}^{I=0}$ (GeV ⁻²) | -0,05 |
| $V_{r1}^{I=1}$ (GeV ⁻²) | -1,60 | $V_{r2}^{I=1}$ (GeV ⁻²) | 0,00 |
| $W_{i1}^{I=1}$ (GeV ⁻²) | -1,24 | $W_{i2}^{I=1}$ (GeV ⁻²) | -0,05 |

Cuadro 4.1: Parámetros del potencial óptico de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$

Incluimos dependencia en isospin para ajustar correctamente la sección eficaz de intercambio de carga (*Charge Exchange*). Los parámetros del modelo se muestran en la tabla 4.1. La dependencia en la energía del potencial de aniquilación sigue la misma línea que los modelos microscópicos conocidos. Una forma intuitiva de comprender la necesidad de incluir el potencial óptico es que, a medida que la energía aumenta, el número de canales de aniquilación abiertos aumenta y por lo tanto hay más pérdida de flujo.

Para no romper el ajuste a baja energía debido a la modificación de los parámetros, hemos incluido una segunda gaussiana, con rango b'_2 grande (ver Tabla 4.1). Esta gaussiana sólo afecta a la región de bajo momento, y nos proporciona un potencial óptico válido para todas las regiones. En la región de producción de $Y\bar{Y}$ afectará sólo la gaussiana con rango b'_1 , aunque la segunda será importante para el cálculo de los shifts de energía del protonio, como veremos más adelante.

En principio, deberíamos determinar los parámetros del potencial óptico resolviendo la matriz T completa en el cálculo acoplado y comparándolo con los datos empíricos de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$. Afortunadamente, el efecto del canal $Y\bar{Y}$ en la matriz T diagonal de $p\bar{p}$ puede

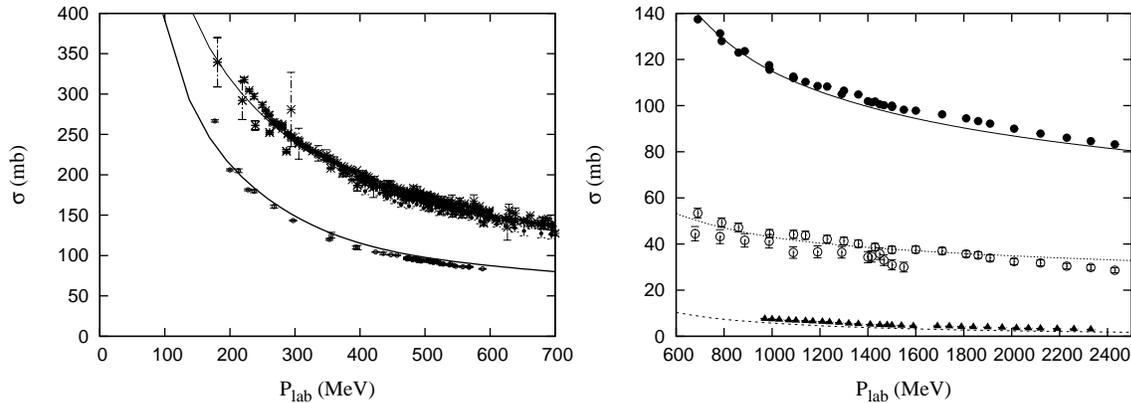


Figura 4.2: Gráficas de secciones eficaces de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ a baja energía (izquierda) y en la región de producción de hiperones (derecha) realizadas con la parametrización de la Tab. 4.1. Representamos la Sección Eficaz Total con una línea continua, la Sección Eficaz de aniquilación con una línea gruesa continua, la Sección Eficaz Elástica con una línea discontinua y la Sección Eficaz de intercambio de carga (Charge Exchange) con una línea de puntos. Datos experimentales de [107–110].

ser ignorado sin problemas, ya que el branching ratio de $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$ es extremadamente pequeño, en comparación con el resto de canales.

Hecho esto, conseguimos reproducir cuantitativamente la sección eficaz total, elástica y de intercambio de carga para $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$, como podemos ver en la figura 4.2, en un rango de energías muy amplio. Una vez ajustada la sección eficaz total calculamos la sección eficaz diferencial elástica, lo que nos da una idea de la validez del modelo en el rango en el que nos movemos. También es necesario tener una descripción correcta en esta reacción, porque, debido a que hacemos un cálculo acoplado, nos afectará a la hora de calcular secciones eficaces y observables de polarización y de spin de $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$.

Los resultados obtenidos para la sección eficaz diferencial de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ están representados en la figura 4.3. Como podemos apreciar, el modelo nos da una descripción más que razonable de los datos experimentales, sobre todo en ángulos hacia delante (o *forward*, entre $[0^\circ, 90^\circ]$), debido principalmente al intercambio de un pión. Aunque en la parte de ángulos hacia atrás (o *backward*, entre $[90^\circ, 180^\circ]$) la descripción es algo peor no debemos olvidar que la escala representada es logarítmica, y el desacuerdo se debe a detalles del modelo que influirán poco en el proceso global. Así, aunque deberemos tener precaución a la hora de analizar los observables en ángulos *backward*, tenemos una buena base para calcular observables en el proceso de producción de $Y\bar{Y}$. Al poder describir correctamente el estado inicial, disminuye la incertidumbre a la hora de analizar los resultados del cálculo acoplado completo.

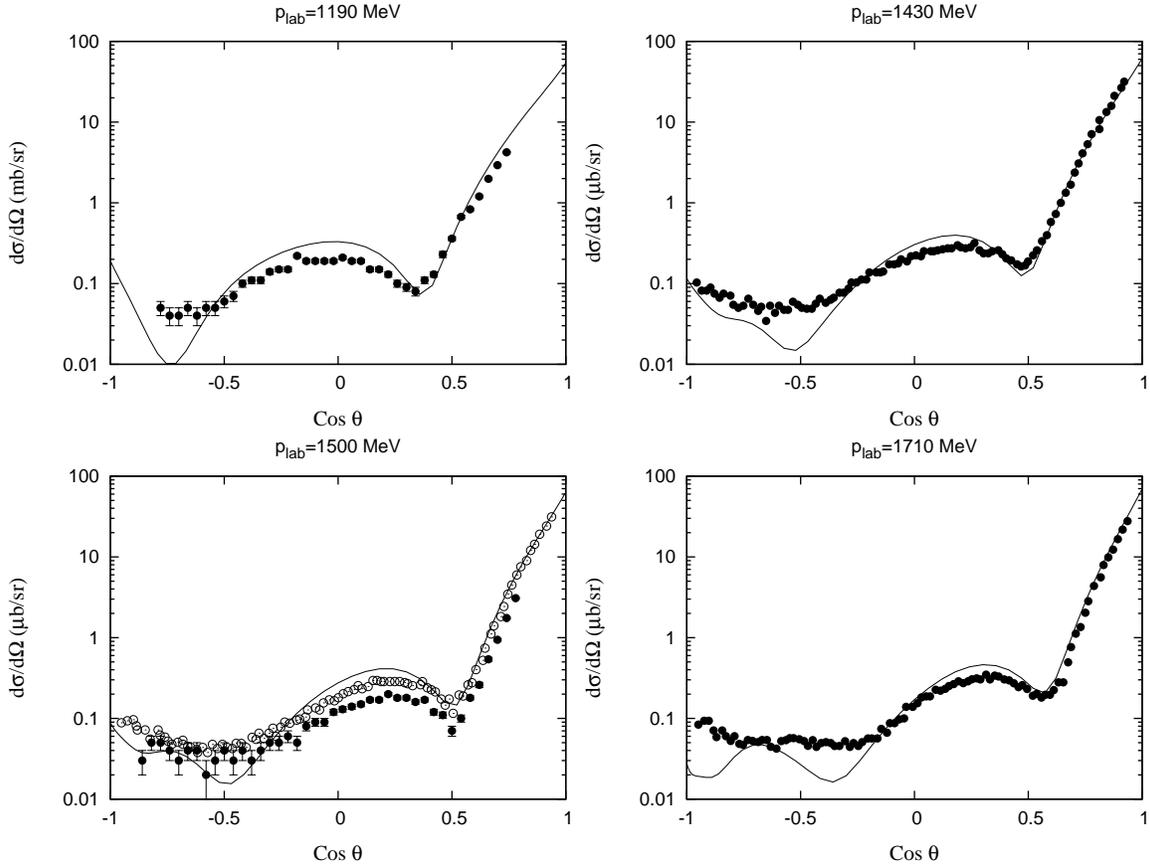


Figura 4.3: Sección eficaz diferencial de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ a diferentes energías. Datos extraídos de [111] para momentos de laboratorio $1190 \text{ MeV}/c$ y $1500 \text{ MeV}/c$ y de [112] para $p_{lab} = 1430 \text{ MeV}/c$, $1500 \text{ MeV}/c$ y $1710 \text{ MeV}/c$.

En la figura 4.4 representamos los datos del llamado *Analyzing power* de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ a diferentes energías, que se define como el cociente de la sección eficaz diferencial con un haz polarizado inicial respecto a la sección eficaz diferencial con un haz sin polarizar, y que calculamos con la segunda expresión de la Ec. 4.13. Existen más datos de *Analyzing power* que de polarización debido a que es más fácil para los experimentales controlar la polarización del haz incidente que determinar empíricamente la polarización del estado final. No hemos tratado de mejorar los resultados, por ejemplo, añadiendo más términos en el potencial óptico (como spin-órbita o tensoriales) o haciendo a los parámetros dependientes de la energía, pues pensamos que el acuerdo es suficiente y nos dará una descripción razonable de la distorsión de $p\bar{p}$ en la reacción $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$.

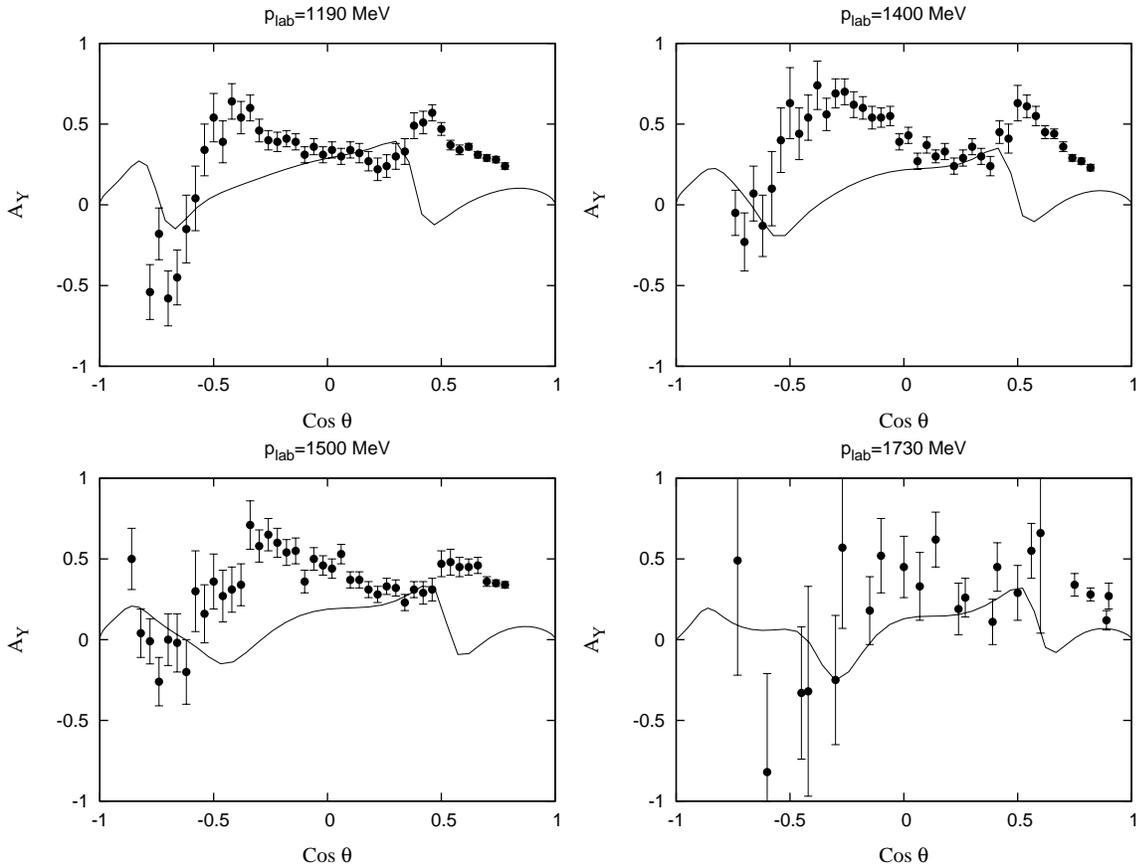


Figura 4.4: *Analyzing Power* de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ a diferentes energías. Datos experimentales de [111] para momento $p_{lab} = 1190 \text{ MeV}/c$, $1400 \text{ MeV}/c$ y $1500 \text{ MeV}/c$ y de [113] para $p_{lab} = 1730 \text{ MeV}/c$.

Shifts de energía del protonio

La reciente observación de una estructura estrecha cerca del threshold en la masa invariante de $p\bar{p}$ en el decay radiativo $J/\psi \rightarrow \gamma p\bar{p}$ en la Colaboración BES [114] ha renovado el interés en la interacción $N\bar{N}$ y sus posibles estados ligados bariónicos. Estudiando la distribución angular del fotón, dicha estructura tiene probablemente números cuánticos $J^{PC} = 0^{-+}$ o $J^{PC} = 0^{++}$, lo que, en principio, no corresponde a ninguna resonancia mesónica conocida. Sin embargo, no se ha observado ninguna señal similar en el canal $\pi^0 p\bar{p}$, lo que sugiere que la resonancia es isoescalar. La interpretación más simple es un estado ligado bariónico [115], aunque el resultado se ha interpretado de diversas formas [116–119].

El estudio del sistema protón-antiprotón como un átomo ofrece una oportunidad para comprobar las amplitudes de scattering de $N\bar{N}$ justo en el threshold. Las características esenciales de los átomos antiprotónicos pueden entenderse en términos de la interacción

electromagnética y los niveles de energía E_n descritos por la fórmula de Bohr, siendo una función del número cuántico principal n y proporcionales a la masa reducida μ . Sin embargo, los niveles de átomo protónico se mueven y se ensanchan debido a la interacción fuerte. Es decir, la energía completa E_{nl} se desplaza del valor electromagnético ϵ_{nl} una cantidad compleja $\Delta E_{nl} = E_{nl} - \epsilon_{nl} = \delta E_{nl} - i\Gamma_{nl}/2$.

Entre 1983 y 1996, la espectroscopía del protonio fue analizada en LEAR, determinando los shifts y anchuras de los niveles $1s$ y $2p$ [120, 121]. Uno de los resultados más interesantes de este experimento es que el shift del nivel 3P_0 $\delta E({}^3P_0) = -140 \pm 28 \text{ meV}$ es mucho más grande que los demás. Este resultado sugiere la existencia de una resonancia $N\bar{N}$ cerca del threshold que incrementa la amplitud de scattering.

En la Ref. [23] se realizó un estudio del sistema $N\bar{N}$ con el mismo modelo pero con una parametrización diferente para el potencial óptico de $p\bar{p}$, con el objetivo de ajustar la región de baja energía. Debido a que queremos estudiar la producción de hiperones hemos de ajustar la región de alta energía de $p\bar{p}$ y, por lo tanto, la parametrización del potencial óptico. Entonces resulta lógico preguntarse si los shifts del protonio se siguen reproduciendo en el nuevo marco. Es por ello que realizaremos un estudio de los shifts de energía en las ondas S y P y las compararemos con los resultados experimentales.

Los shifts de energía en los átomos hadrónicos pueden calcularse con la fórmula de Trueman mejorada, deducida a partir de la continuación analítica de la amplitud de scattering [122, 123], usando la longitud de scattering (en ondas S) o volumen de scattering (ondas P),

$$\delta E_{nl} = -E_n \frac{4}{n} \frac{a_l}{a_B^{2l+1}} \alpha_{nl} \left(1 - \frac{a_l}{a_B^{2l+1}} \beta_{nl} + \dots \right), \quad (4.20)$$

donde $a_B = \hbar/\alpha\mu c$ es el radio de Bohr del sistema, a_l es la longitud (o volumen) de scattering, y α_{nl} y β_{nl} están definidas como,

$$\begin{aligned} \alpha_{nl} &= \prod_{s=1}^l \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right), & \alpha_{n0} &= 1, \\ \beta_{nl} &= 2 \left[\log n + \frac{1}{n} - \Psi(n) \right], & \beta_{n1} &= \alpha_{n1} \beta_{n0} - \frac{4}{n^3}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde $\Psi(n)$ es la función digamma.

Otra posibilidad es utilizar teoría de perturbaciones, que reproduce el resultado anterior para potenciales débiles [124]. Sin embargo, esto no es cierto para ondas S . Para este caso, la interacción fuerte es suficientemente grande comparada con la de Coulomb como para que la teoría de perturbaciones no funcione. Para ondas P , la barrera centrífuga contribuye a suavizar la interacción fuerte, eliminando contribuciones de corto alcance, y la teoría de perturbaciones se vuelve útil.

En la Tabla 4.2 mostramos los resultados del cálculo de los shifts de energía y las anchuras para $p\bar{p}$ en $L = 0$ y $L = 1$ utilizando la fórmula de Trueman mejorada. También incluimos los resultados del cálculo perturbativo para ondas P , que son compatibles

| Estado | $a_l(fm^{2l+1})$ | $a_l^{Ref}(fm^{2l+1})$ | ΔE | ΔE^{Ref} | $\Delta E_{p\bar{p}}$ | ΔE_{exp} | |
|----------|------------------|------------------------|------------------|------------------|-----------------------|---------------------------------|-------|
| 1^1S_0 | $0,55 - i0,88$ | $0,61 - i1,01$ | $497,0 - i718,2$ | $557,3 - i820,9$ | | $440 \pm 75 - i(600 \pm 125)^a$ | eV |
| 2^1S_0 | | | $60,7 - i92,7$ | $67,7 - i106,3$ | | | |
| 2^1P_1 | $-1,11 - i3,58$ | $-1,14 - i0,51$ | $-27,1 - i87,6$ | $-27,9 - i12,4$ | $-34,7 - i68,7$ | | meV |
| 2^3P_0 | $-3,79 - i5,74$ | $-2,75 - i3,87$ | $-92,9 - i140,6$ | $-67,3 - i94,7$ | $-80,6 - i68,7$ | $-140 \pm 28 - i(60 \pm 12)^b$ | meV |
| 2^3P_1 | $1,52 - i3,51$ | $1,49 - i0,44$ | $37,3 - i86,0$ | $36,5 - i10,9$ | $31,2 - i68,7$ | | meV |

Cuadro 4.2: Shifts de energía de $p\bar{p}$ calculados a partir de la fórmula mejorada de Trueman (ΔE) y las contribuciones de teoría de perturbaciones. En el cálculo perturbativo $\Delta E_{p\bar{p}}$ sólo incluye correcciones de los estados $p\bar{p}$. Los resultados experimentales son de Ref. [120] (a) y Ref. [121] (b). Para compararlos con el cálculo original mostramos en las columnas a_l^{Ref} y ΔE^{Ref} los resultados de Ref. [23].

con aquellos calculados con la fórmula de Trueman. A su vez, mostramos como comparación los resultados originales de Ref. [23] realizados con una parametrización diferente del potencial óptico. Como podemos apreciar, no existen grandes diferencias, salvo para la parte imaginaria de las ondas P , que aumentan para la longitud de scattering y consecuentemente para el shift de energía.

Podemos ver que los resultados experimentales son reproducidos correctamente salvo para 3P_0 , cuya parte real está infravalorada por un factor casi 2 y su parte imaginaria es demasiado alta. Este valor nos dice que estamos usando un modelo muy simple. En particular, el intercambio de un pión acopla los canales $p\bar{p}$ y $n\bar{n}$, y este acoplamiento puede influir significativamente en las predicciones teóricas.

Para solucionar esta cuestión usaremos teoría de perturbaciones de canales acoplados para las ondas P . Empezamos entonces con las ecuaciones acopladas,

$$\begin{aligned}
H_{p\bar{p}}|p\bar{p}\rangle + V_{n\bar{n}\rightarrow p\bar{p}}|n\bar{n}\rangle &= E|p\bar{p}\rangle, \\
H_{n\bar{n}}|n\bar{n}\rangle + V_{p\bar{p}\rightarrow n\bar{n}}|p\bar{p}\rangle &= E|n\bar{n}\rangle,
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

con

| Estado | $\Delta E_{p\bar{p}}$ | $\Delta E_{n\bar{n}}$ | ΔE_f | ΔE_f^{Ref} |
|----------|-----------------------|-----------------------|------------------|--------------------|
| 2^1P_1 | $-34,7 - i68,7$ | $-1,9 + 0,07$ | $-36,6 - i68,7$ | $-28,5 - i10,4$ |
| 2^3P_0 | $-80,6 - i68,7$ | $-30,4 - i15,2$ | $-111,0 - i83,9$ | $-112,2 - i26,0$ |
| 2^3P_1 | $31,2 - i68,7$ | $-11,1 - i1,2$ | $20,1 - i69,9$ | $29,6 - i12,1$ |

Cuadro 4.3: Shifts de energía de $p\bar{p}$ calculados con teoría de perturbaciones. $\Delta E_{p\bar{p}}$ incluye sólo correcciones de $p\bar{p}$, mientras que $\Delta E_{n\bar{n}}$ incluye también de $n\bar{n}$. $\Delta E_f = \Delta E_{p\bar{p}} + \Delta E_{n\bar{n}}$ es el resultado final. Para compararlos con el cálculo original mostramos también los resultados de Ref. [23].

$$\begin{aligned}
H_{p\bar{p}} &= \frac{p^2}{2\mu} + V_{p\bar{p}}^{em} + V_{p\bar{p}}, \\
H_{n\bar{n}} &= \frac{p^2}{2\mu} + V_{n\bar{n}}, \\
V_{p\bar{p}} &= V_{n\bar{n}} = \frac{1}{2}(V_1 + V_0),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$V_{p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}} = V_{n\bar{n} \rightarrow p\bar{p}} = \frac{1}{2}(V_1 - V_0),$$

donde $V_{p\bar{p}}^{em}$ es la interacción electromagnética y $V_1(V_0)$ es el potencial fuerte en isospin 1(0).

Despejando $|n\bar{n}\rangle$ de la segunda ecuación de Ecs. 4.22 obtenemos

$$|n\bar{n}\rangle = \frac{1}{E - H_{n\bar{n}}} V_{p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}} |p\bar{p}\rangle. \tag{4.24}$$

Insertando la ecuación anterior en la primera ecuación de Ecs. 4.22,

$$\left(\frac{p^2}{2\mu} + V_{p\bar{p}}^{em} + V_{p\bar{p}} + V_{n\bar{n} \rightarrow p\bar{p}} \frac{1}{E - H_{n\bar{n}}} V_{p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}} \right) |p\bar{p}\rangle = E |p\bar{p}\rangle \tag{4.25}$$

Por lo tanto, podemos considerar como perturbación el potencial $p\bar{p}$ efectivo,

$$V_{p\bar{p}}^{eff} = V_{p\bar{p}} + V_{n\bar{n} \rightarrow p\bar{p}} \frac{1}{E - H_{n\bar{n}}} V_{p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}}. \tag{4.26}$$

Tomaremos como función sin perturbar la función de onda de Coulomb $|\psi_{p\bar{p}}^{nl}\rangle$. Así, la primera corrección a la energía será,

$$\Delta E_{p\bar{p}}^{nl} = \langle \psi_{p\bar{p}}^{nl} | V_{p\bar{p}}^{eff} | \psi_{p\bar{p}}^{nl} \rangle = \Delta E_{p\bar{p}} + \Delta E_{n\bar{n}}, \tag{4.27}$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta E_{p\bar{p}} &= \langle \psi_{p\bar{p}}^{nl} | V_{p\bar{p}} | \psi_{p\bar{p}}^{nl} \rangle, \\
\Delta E_{n\bar{n}} &= \langle \psi_{p\bar{p}}^{nl} | V_{n\bar{n} \rightarrow p\bar{p}} \frac{1}{E - H_{n\bar{n}}} V_{p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}} | \psi_{p\bar{p}}^{nl} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Mostramos los resultados en la tabla 4.3 para ondas P . Como vemos, el acoplamiento con $n\bar{n}$ tiene poco efecto en los shifts de energía salvo para la onda parcial 3P_0 . El incremento observado en esta onda es debido a una resonancia localizada cerca del threshold $N\bar{N}$ en este canal, que es correctamente reproducido por el modelo.

Si comparamos con la parametrización original observamos que la parte imaginaria del shift es mayor en nuestro caso, y eso conduce a una mejor explicación del shift experimental de la onda 3P_0 . En general, podemos afirmar que la parametrización utilizada es adecuada para el rango de energías que estudiamos, describiendo las secciones eficaces del sistema $N\bar{N}$ así como las longitudes de scattering y los shifts de los niveles del protonio. Esto nos proporciona una base firme para el estudio de los sistemas extraños.

4.2.3. Producción de extrañeza en el canal $\Lambda\bar{\Lambda}$

La interacción diagonal $Y\bar{Y}$, es decir, las reacciones $\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ (con $I = 0$), $\Lambda\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0$ (con $I = 1$) y $\Sigma\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$ (con $I = 0, 1$), se describen en analogía con el caso $p\bar{p}$. Usamos el modelo de quarks constituyentes basado en el intercambio de una σ , una η y un π , aunque este último sólo es posible cuando hay involucrado una partícula Σ . A su vez, añadimos los diagramas de aniquilación a través de un gluón, un Kaón, un π y una η donde estén permitidos. A parte, la aniquilación en mesones se parametriza con un potencial óptico de forma gaussiana para cada canal:

$$V_{opt}^{Y\bar{Y}} = (V_r + i \cdot W_i)e^{-b'^2q^2} \quad (4.29)$$

De esta región no existen datos experimentales, así pues los parámetros libres se ajustaron en base a la sección eficaz total y diferencial de la reacción $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$ para los tres diferentes canales que expondremos en la siguiente sección. Los valores resultado del ajuste se muestran en la tabla 4.4. Los resultados expuestos para los sistemas inicial y final dan confianza al cálculo de los procesos de producción. En este sentido, hemos propuesto una parametrización tal que la constante de acoplamiento quiral original g_{ch}^2 sea capaz de reproducir los datos experimentales de una forma aceptable.

Aunque no existan datos experimentales podemos predecir, según nuestro modelo, la sección eficaz total y elástica en comparación con aquellos de $p\bar{p}$, pues existe una ligera analogía con los dos casos. El mecanismo de canales acoplados proporciona una predicción

| | $\Lambda\bar{\Lambda}$ | $\Lambda\bar{\Sigma}^0$ | $\Sigma\bar{\Sigma}$ |
|----------------------|------------------------|-------------------------|----------------------|
| b' (fm) | 0,318 | 0,318 | 0,210 |
| V_r (GeV $^{-2}$) | -0,20 | -0,11 | -1,17 |
| W_i (GeV $^{-2}$) | -0,20 | -0,04 | -0,01 |

Cuadro 4.4: Parámetros del potencial óptico de $Y\bar{Y}$ para los tres canales estudiados.

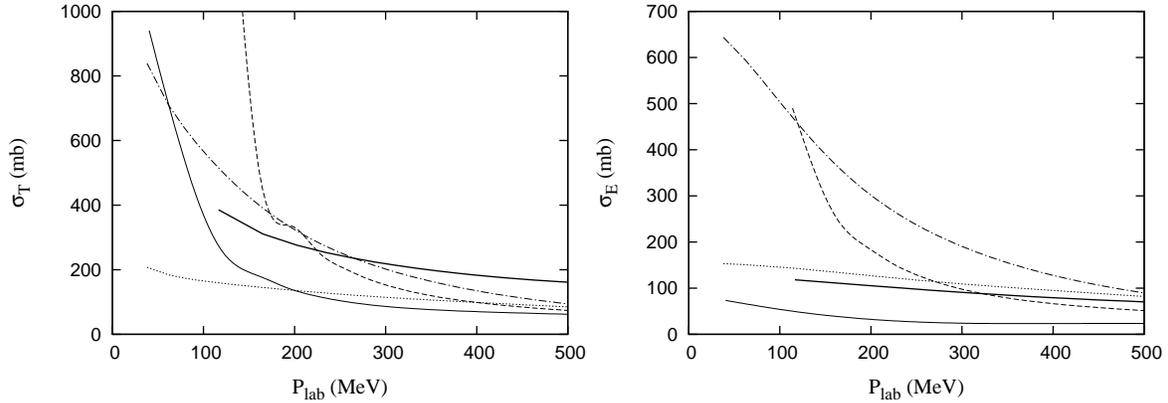


Figura 4.5: Sección eficaz total (izquierda) y elástica (derecha) de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ (línea gruesa continua) y $Y\bar{Y} \rightarrow Y\bar{Y}$, donde representamos con línea fina continua la reacción $\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$, con línea quebrada $\Lambda\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0$ y la reacción $\Sigma\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$ con isospin cero con línea de puntos y con isospin uno con línea *dash-dotted* (o punto- raya).

para los observables del canal diagonal $Y\bar{Y}$. Por ello, representamos en la figura 4.5 la sección eficaz total de las tres reacciones $\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$, $\Lambda\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0$ y $\Sigma\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$ junto con aquella de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ a baja energía, que sabemos que describe bien los datos empíricos en esa región de energía.

Podemos observar la similitud que existe entre las gráficas. Apreciamos que la sección eficaz total de $\Lambda\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0$ es mucho mayor y presenta un ligero abombamiento alrededor de $p_{lab} = 200 \text{ MeV}$, lo que puede significar que existe una estructura en esa región; aunque hay que recordar que la ausencia de más datos hace que los parámetros elegidos puedan variar ligeramente, desapareciendo el fenómeno. Por otro lado, se observa cómo la sección eficaz inelástica es menor en las reacciones $\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ y $\Lambda\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0$ que en $\Sigma\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$. De nuevo, hay que tener en cuenta que los parámetros del potencial óptico de $\Sigma\bar{\Sigma}$ se tomaron en base a un sólo dato experimental, con lo que es imposible sacar conclusiones a partir de estas gráficas.

Procedemos por lo tanto a estudiar la reacción de producción $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$, que es el proceso del que más datos experimentales disponemos y el que es realmente interesante desde el punto de vista teórico. Una vez descrita esta reacción estudiaremos la producción de otros canales de extrañeza.

Secciones eficaces

Los modelos de quark constituyente modernos incluyen más ingredientes que la masa constituyente y el intercambio de un gluón [125]. Los bosones de Goldstone, que aparecen como consecuencia de la rotura de la simetría quiral, se pueden identificar con los

miembros del octete pseudoescalar $\{\pi, K, \eta\}$. Entonces, este tipo de modelos comparte las propiedades de los modelos tradicionalmente usados para describir esta reacción, basados en el intercambio de un mesón a nivel bariónico o la aniquilación de un gluón a nivel quark, y puede ser capaz de describir los datos experimentales. Para todos los canales de producción, expuestos en esta y en las sucesivas secciones, se ha elegido un modelo que, aparte de incluir la aniquilación a partir de un gluón y el intercambio de un kaón K , también aporta el intercambio del escalar extraño κ . Esta elección proporciona una descripción más completa del proceso, basándonos en el análisis de las referencias [126] y [102].

Comparado con cálculos anteriores [102], los resultados para el proceso de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ están ahora, en principio, modificados por la apertura del canal adicional $\Sigma\bar{\Sigma}$. Sin embargo, resulta que este efecto es muy pequeño [127]. Obtenemos esencialmente los mismos resultados que si no añadieramos dicho canal, sin ningún cambio en los parámetros. Por lo tanto, por simplicidad, tomaremos los canales extraños de forma individual. Procedemos ahora a presentar los resultados para este canal.

Una vez hemos ajustado los parámetros libres de los potenciales ópticos en secciones anteriores (ver tablas 4.1 y 4.4) se puede apreciar el buen acuerdo que da el modelo a la hora de describir la sección eficaz total del proceso acoplado en la figura 4.6, donde mostramos la misma gráfica en dos intervalos diferentes de energías.

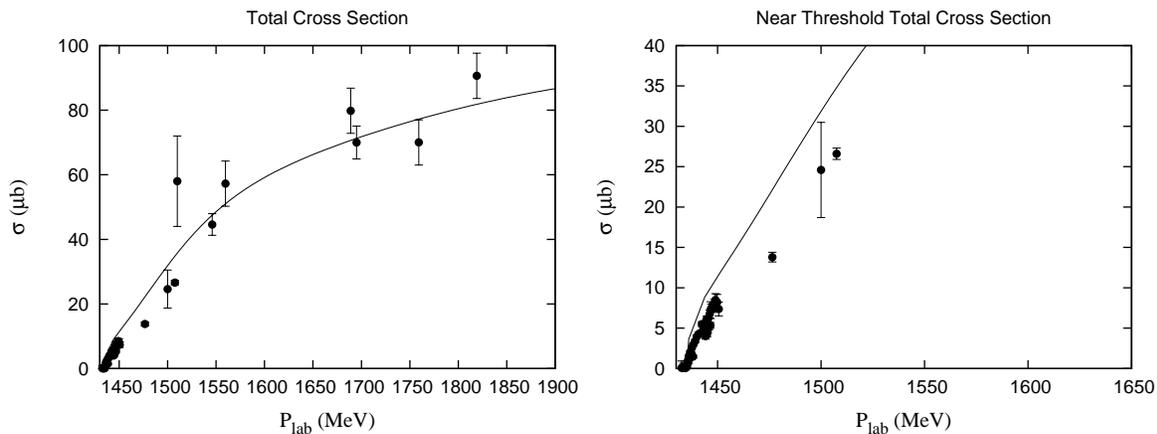


Figura 4.6: Sección eficaz total de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$. Datos experimentales de [11–14, 128–130]

El aparente desacuerdo a baja energía se debe al potencial óptico de $\Lambda\bar{\Lambda}$, pero rápidamente recuperamos el acuerdo con los datos, proporcionando una base sólida para el cálculo del resto de los observables. Una vez realizado esto podemos estudiar la sección eficaz diferencial y los diferentes observables de polarización y de spin.

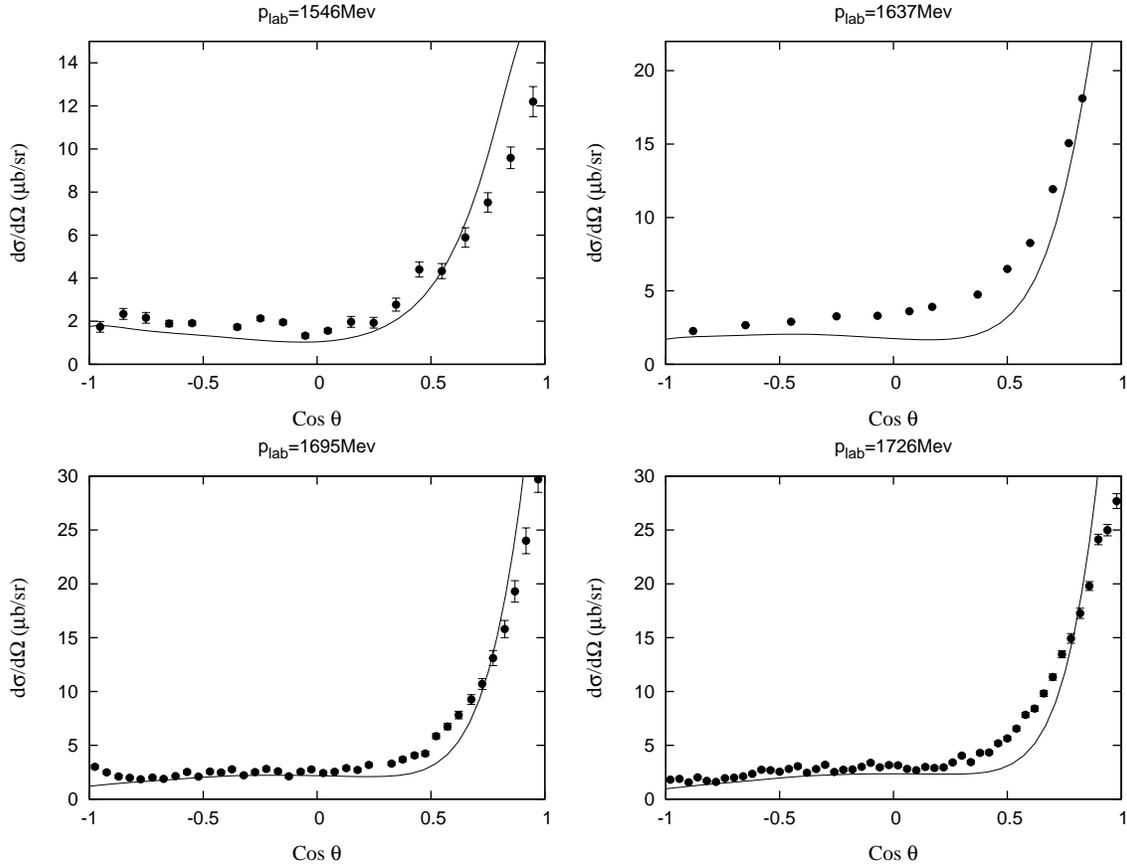


Figura 4.7: Sección eficaz diferencial de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ para diferentes energías. Datos experimentales de [13] para momento $p_{lab} = 1546,2 \text{ MeV}/c$ y $1695,0 \text{ MeV}/c$, [131] para $p_{lab} = 1726,0 \text{ MeV}/c$ y [104] para $p_{lab} = 1637,0 \text{ MeV}/c$.

Mostramos en la figura 4.7 la sección eficaz diferencial para diversas energías. En la región del threshold la predicción del modelo se encuentra algo por encima de los datos experimentales, debido a la parametrización del potencial óptico. A alta energía, aproximadamente a partir de $p_{lab} \geq 1,5 \text{ GeV}/c$, los resultados mejoran notablemente.

En este punto hay que comentar que la sección eficaz diferencial es apreciablemente sensible al estado final para ángulos *backward*. Si tenemos en cuenta que no hay datos experimentales del canal $\Lambda\bar{\Lambda}$ y que los parámetros abiertos los hemos ajustado a la sección eficaz total concluimos que debemos actuar con precaución a la hora de evaluar los observables para dichos ángulos. Es una muestra de lo sensible que es esta reacción a la interacción en el estado inicial y el final. Sin embargo, según observamos, el mecanismo es capaz de reproducir la sección eficaz diferencial de forma correcta. Además, debido a que

en el marco del modelo de quarks constituyentes la inclusión de la interacción en el canal inicial y final se realiza de forma consistente, esta queda automáticamente determinada dentro del mismo, lo que le da mayor credibilidad a los resultados.

Polarización

Cabe esperar que la contribución de cada onda parcial a los observables de polarización sea distinta para los diferentes modelos teóricos existentes. En la sección eficaz diferencial o total es difícil ver esto. Consecuentemente, esperamos ver efectos más pronunciados en observables que dependan más específicamente en las ondas parciales particulares. Por ello, estudiaremos en primer lugar el observable de Polarización y en los siguientes apartados otros observables de spin de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$.

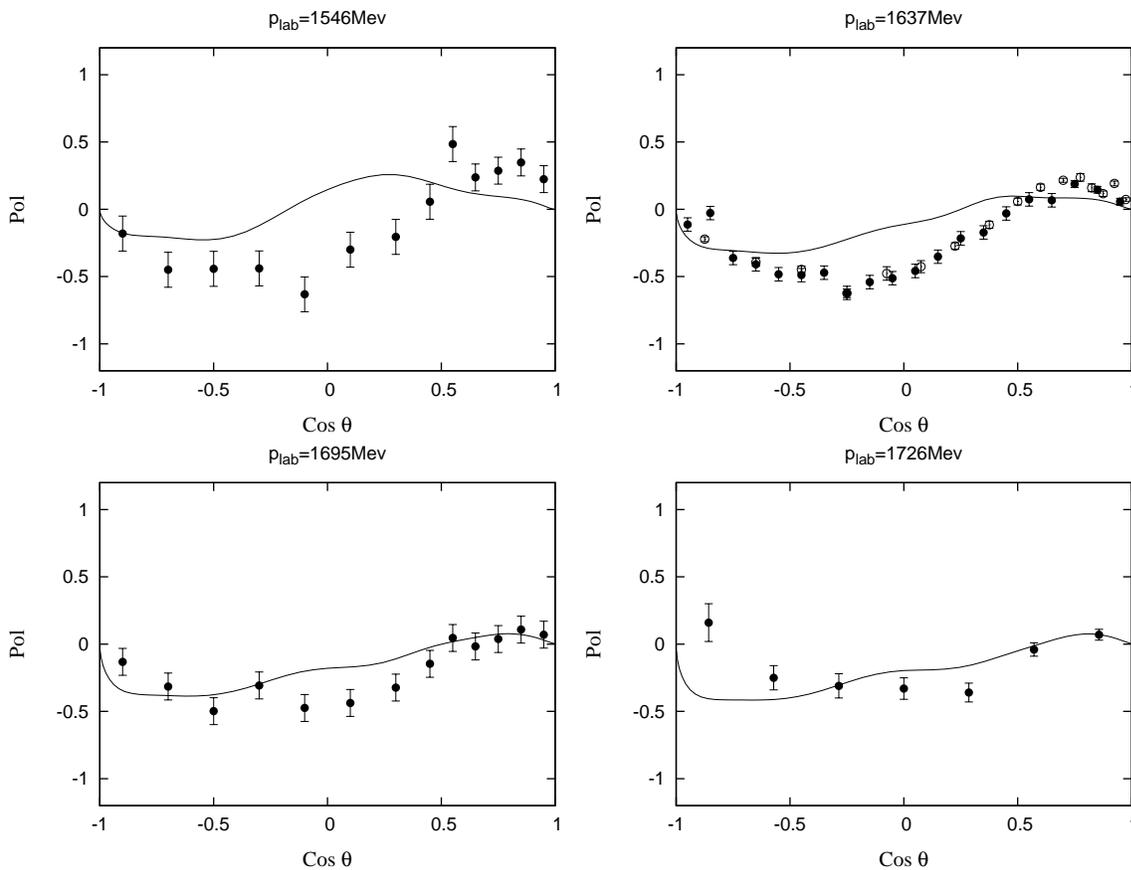


Figura 4.8: Observable de Polarización de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ para diversas energía. Datos experimentales de [13] para momento $p_{lab} = 1546,2 \text{ MeV}/c$ y $1695,0 \text{ MeV}/c$, [131] para $p_{lab} = 1726,0 \text{ MeV}/c$ [104] para $p_{lab} = 1637,0 \text{ MeV}/c$

Los resultados de la Polarización predicho por el mecanismo de transición bajo estudio se muestra en la figura 4.8. Como podemos observar, el modelo da una descripción correcta de los datos empíricos en todo el rango de energía considerado. Debido a que el modelo incorpora el intercambio de una κ , la parte escalar es más fuerte, y por ello la curva de Polarización es más suave. Esto hace que se ajuste muy bien a alta energía.

Observables de correlación de spin C_{ij}

Presentamos los observables de correlación de spin del estado final Λ y $\bar{\Lambda}$, comúnmente denotadas por C_{xx} , C_{yy} , C_{zz} y C_{xz} en las figuras 4.9 y 4.10 a diferentes energías. Debido a que es un proceso fuerte podemos usar las invariancias frente a conjugación de carga, lo que nos conduce a $C_{zx} = C_{xz}$, y conservación de la paridad que nos dice que $C_{xy} = C_{yx} = C_{yz} = C_{zy} = 0$.

No obstante, debemos mantener prudencia con los datos disponibles. Por causas experimentales, en algunos observables no se cumplen los límites físicos o no se satisfacen las relaciones de invarianza. De todas formas, el modelo es capaz de reproducir los datos de forma satisfactoria. Como pasaba con la polarización, los parametros de correlación de spin dependen del tipo de interacción usada en el estado final e inicial. Sin embargo, para C_{yy} esto no es tan brusco, y se observa una cierta estabilidad frente a variaciones en las interacciones en el estado inicial y final.

La figura 4.10 también muestra los resultados para *Singlet Fraction* (Ec. 4.15):

$$F_s = \frac{1}{4}(1 - \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle) = \frac{1}{4}(1 + C_{xx} - C_{yy} + C_{zz}) \quad (4.30)$$

Por definición, el *Singlet Fraction* varía entre 1, para puro singlete creado, y 0, para el caso de sólo crear $\Lambda\bar{\Lambda}$ en el estado final de triplete. Los datos experimentales que mostramos en la Fig. 4.10 se obtuvieron de la ecuación 4.15, usando los datos empíricos de las correlaciones de spin. Los valores negativos no físicos ocurren entonces como resultado de una fluctuación estadística o una sensibilidad excesiva en los errores sistemáticos al hacer la combinación lineal de los observables. Es interesante notar que la regla empírica comúnmente aceptada de $F_s = 0$ para esta reacción está claramente rota en ángulos *backward*.

Los datos experimentales de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ nos muestran que F_s es cero, es decir, que sólo se crean pares $\Lambda\bar{\Lambda}$ en estado de triplete. El spin de la Λ lo lleva enteramente el quark s , así pues, la creación de un par $s\bar{s}$ en triplete de spin significa que $\Lambda\bar{\Lambda}$ también lo está. El modelo logra describir esta situación de manera aceptable, ajustándose correctamente a los datos experimentales.

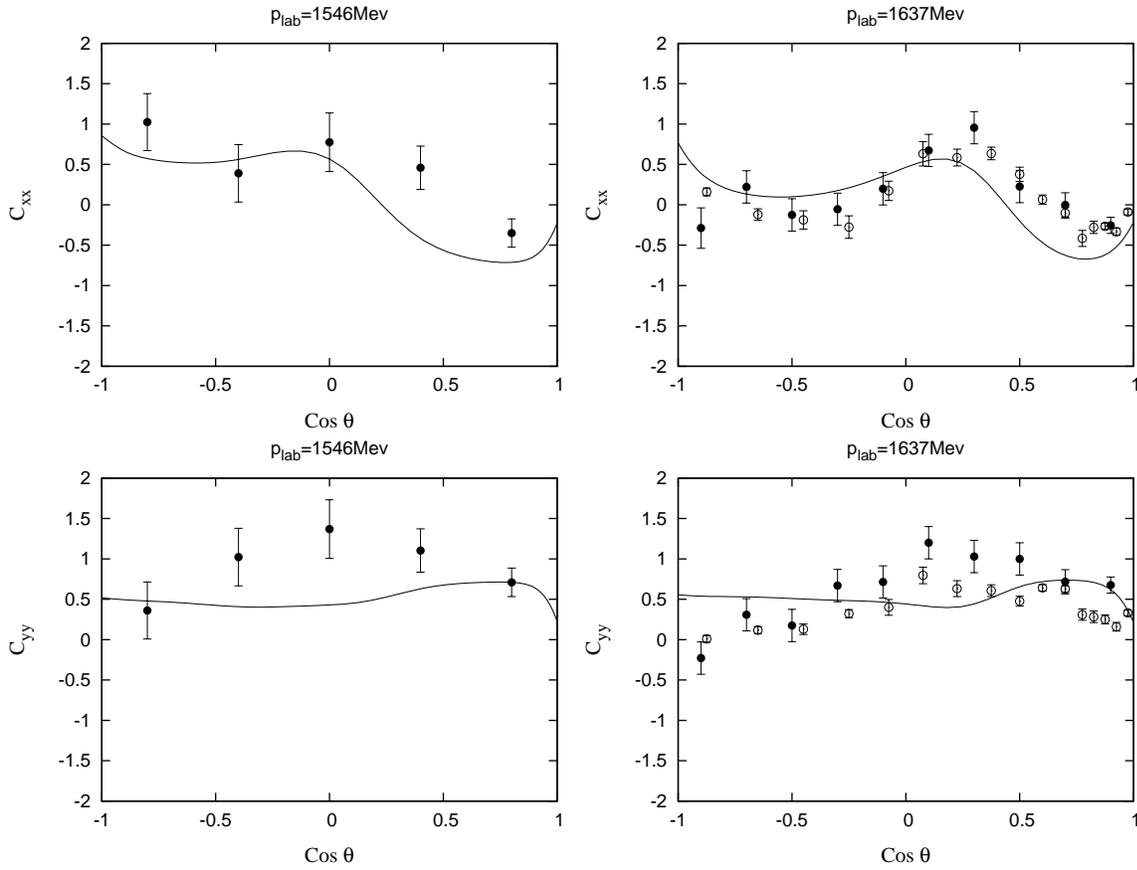


Figura 4.9: Observables C_{xx} y C_{yy} de spin de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ a diferentes energías. Datos experimentales de [104] para $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$ y [13] para $p_{lab} = 1546,2 \text{ MeV}/c$.

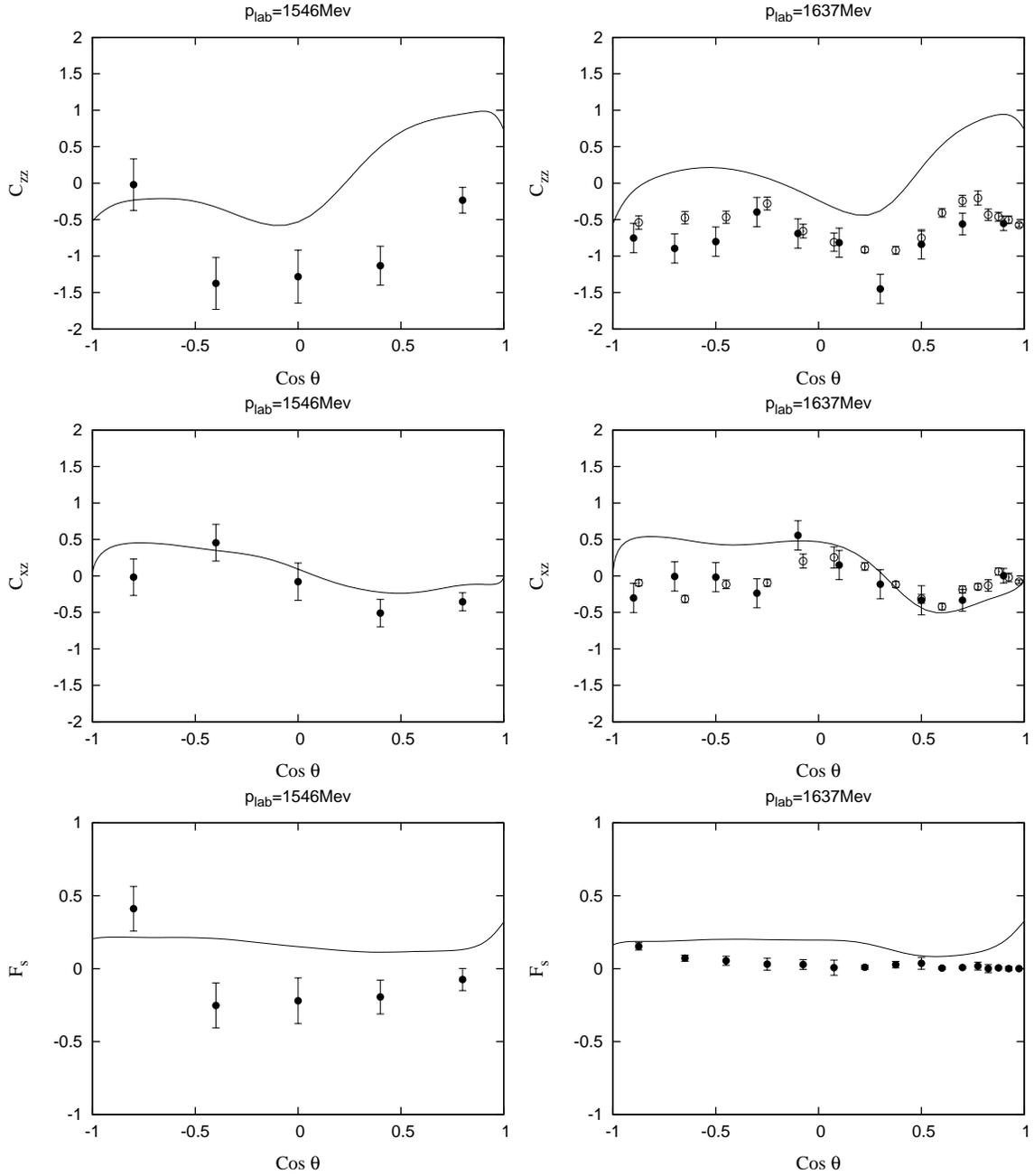


Figura 4.10: Observables C_{zz} , C_{xz} y F_s de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ a diferentes energías. Datos experimentales de [104] para $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$ y [13] para $p_{lab} = 1546,2 \text{ MeV}/c$.

Observables de transferencia de spin y depolarización

Antes de introducir las polarizaciones en el estado final en los estudios de la reacción de producción de hiperones conviene comentar que la colaboración PS185 fue capaz de incrementar el número de datos disponibles en observables de spin. En particular, las polarizaciones en el estado final y las correlaciones de spin de Λ y $\bar{\Lambda}$, como ya hemos visto. Esta riqueza de datos producida por PS185 provocó una explosión de actividad teórica y dos aproximaciones distintas, el modelo de intercambio de mesones y el modelo quark de intercambio de un gluón, fueron capaces de describir bien los datos.

Sin embargo, las predicciones del cambio de spin en los modelos mesónicos y quark eran tan diferentes que se tuvo que proponer un método para distinguir la validez de las dos clases de modelos [15]. Dado que ambos modelos predecían fuertes interacciones de triplete, las correlaciones de spin del estado final eran similares y la medida del spin del estado final por si solo no era suficiente para distinguirlos. Esa sensibilidad se puede encontrar en la medida de la correlación entre el spin del estado inicial y el del estado final. En particular, los observables D_{yy} y K_{yy} , comúnmente llamados depolarización y transferencia de spin normal-normal (con 'normal' nos referimos a la dirección perpendicular al plano de scattering). Se requerían haces polarizados para este tipo de estudios de observables, que no se consiguieron hasta la última década, en la colaboración PS185 [104] para momento de laboratorio de $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$ y [16] para $p_{lab} = 1525 \text{ MeV}/c$.

En primer lugar analizamos el observable de depolarización D_{yy} , presentado en la figura 4.11 para $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$ y $p_{lab} = 1525 \text{ MeV}/c$, las dos únicas energías en las que ha sido medido. El observable de depolarización describe la transferencia de spin desde el blanco a la partícula saliente, en este caso de p a Λ . Debemos notar que el máximo cambio de spin posible, i.e., $D_{yy} = -1$, está generado por una interacción tensorial pura. Por otro lado, el modelo quark simple (en la versión 3S_1) lleva, en aproximación de Born, a $D_{yy} = \frac{2}{3}$. Es decir, un cambio de spin pequeño, que está generado por la dependencia de spin del operador de proyección $P_T = \frac{1}{4}(3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$ en estados de triplete de spin.

Obviamente, las interacciones en el estado inicial y final modifican la cantidad de spin que se transfiere. Sin embargo, y lo que es más importante, las diferencias más notables entre los diferentes mecanismos de transición persisten. En la literatura observamos tales diferencias entre los modelos conocidos [17], siendo D_{yy} mayor para los modelos de intercambio de un mesón a nivel bariónico que para los de intercambio de un gluón a nivel quark. Es más, los resultados son bastante estables frente a perturbaciones de las interacciones en el estado inicial y final. Podemos apreciar que el modelo estudiado reproduce correctamente dichos observables, debido a que la parte central de la interacción reduce la contribución de la parte tensorial.

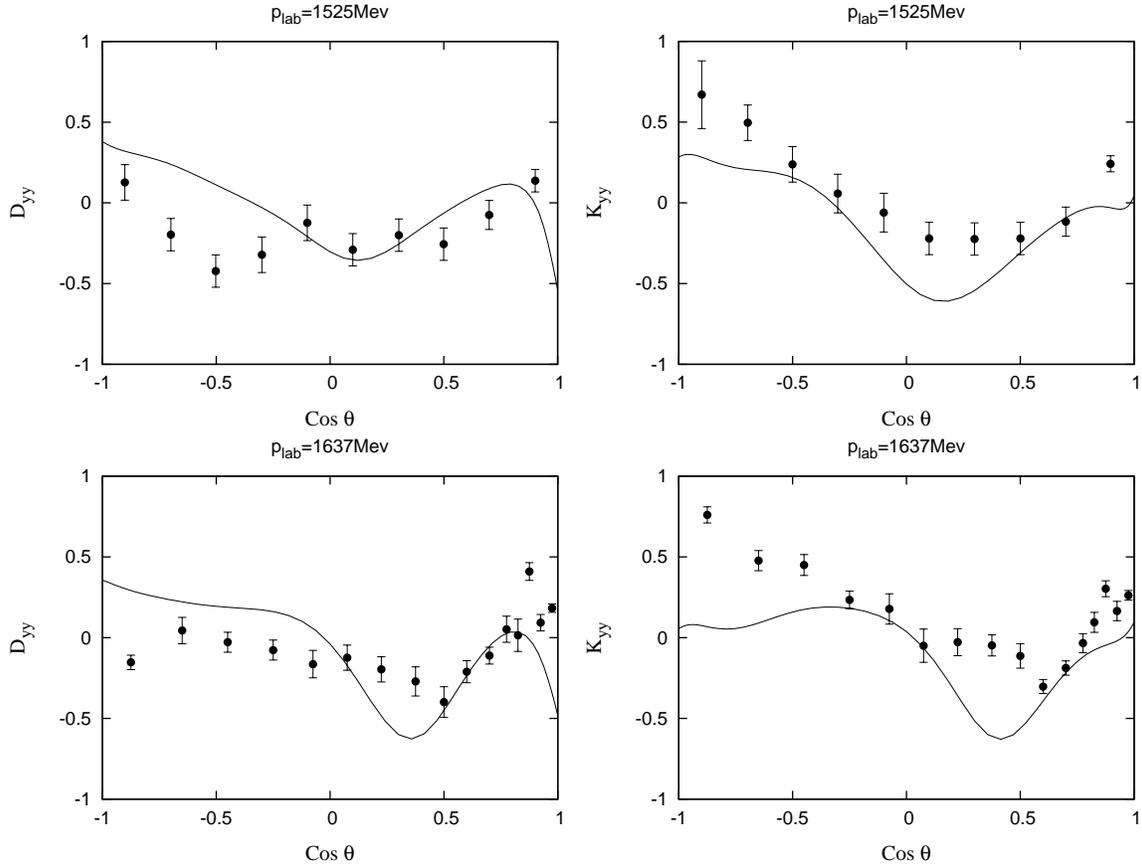


Figura 4.11: Observables de depolarización D_{yy} y de transferencia de spin K_{yy} para $p_{lab} = 1525 \text{ MeV}/c$ y $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$. Datos experimentales de [104] para $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$ y de [16] para $p_{lab} = 1525 \text{ MeV}/c$.

Si miramos ahora al observable de transferencia de spin K_{yy} en la misma figura 4.11, que mide la correlación entre el spin de p y el de $\bar{\Lambda}$, obtenemos la misma conclusión. Obtenemos una descripción muy aceptable de los datos experimentales, mientras que, en general, los modelos de intercambio de un mesón tienen una dependencia angular menos pronunciada y no son capaces de describir correctamente este observable. De nuevo, estos resultados son bastante estables frente a variaciones de las interacciones en el estado inicial y final.

Así, si aceptamos que el observable más indicado para discriminar modelos es D_{yy} y K_{yy} [15], el modelo parece describir los datos de forma muy razonable, pues, aunque se aleje de los datos experimentales de forma apreciable en ángulos *backward*, es capaz de describir la forma cualitativa de la curva. Además vemos que no sólo describe bien D_{yy} y K_{yy} , sino que nos da resultados muy aceptables para el resto de los observables.

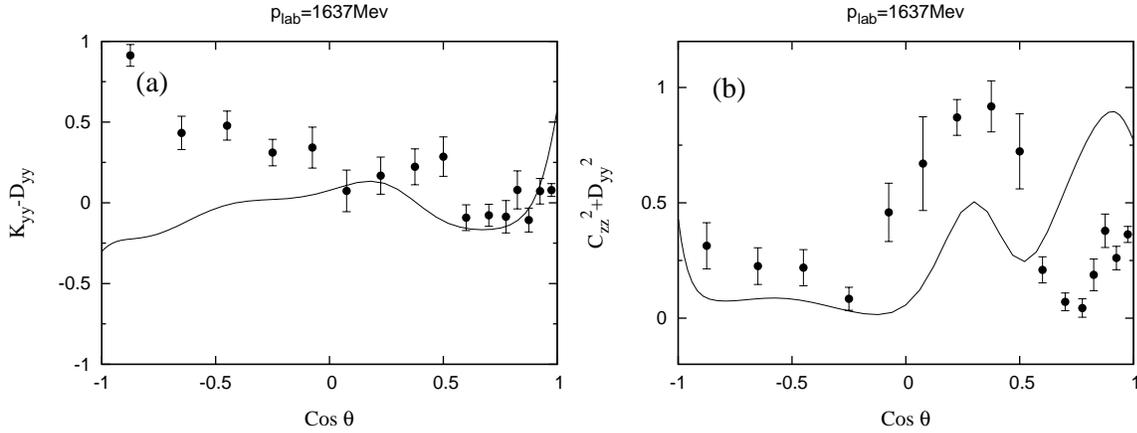


Figura 4.12: Representación de $K_{yy} - D_{yy}$ y $C_{zz}^2 + D_{yy}^2$ para $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$. Datos experimentales de [104].

Para testear la relación $D_{yy} = K_{yy}$ [132], que se cumple en el caso de un mecanismo de producción con triplete de spin puro, representamos también la diferencia entre los dos observables. Como podemos ver en la Fig. 4.12 (a), el modelo teórico cumple la relación, pero los datos experimentales difieren de cero en ángulos *backward*, como también se observa, aunque en menor grado, en F_s . También hemos comprobado la relación $C_{zz}^2 + D_{yy}^2 \leq 1$, que es satisfecha por los datos y los resultados teóricos, en Fig. 4.12 (b). El desacuerdo entre ambos se debe, principalmente, al observable C_{zz} , que presenta una mayor desviación respecto a los datos experimentales.

Finalmente, presentamos también los resultados correspondientes a otras combinaciones angulares de transferencia de spin y depolarización, i.e., D_{xx} , D_{xz} , D_{zz} y K_{xx} , K_{xz} , K_{zz} en Fig. 4.13 para la energía dada. El modelo describe adecuadamente el conjunto de datos experimentales disponibles.

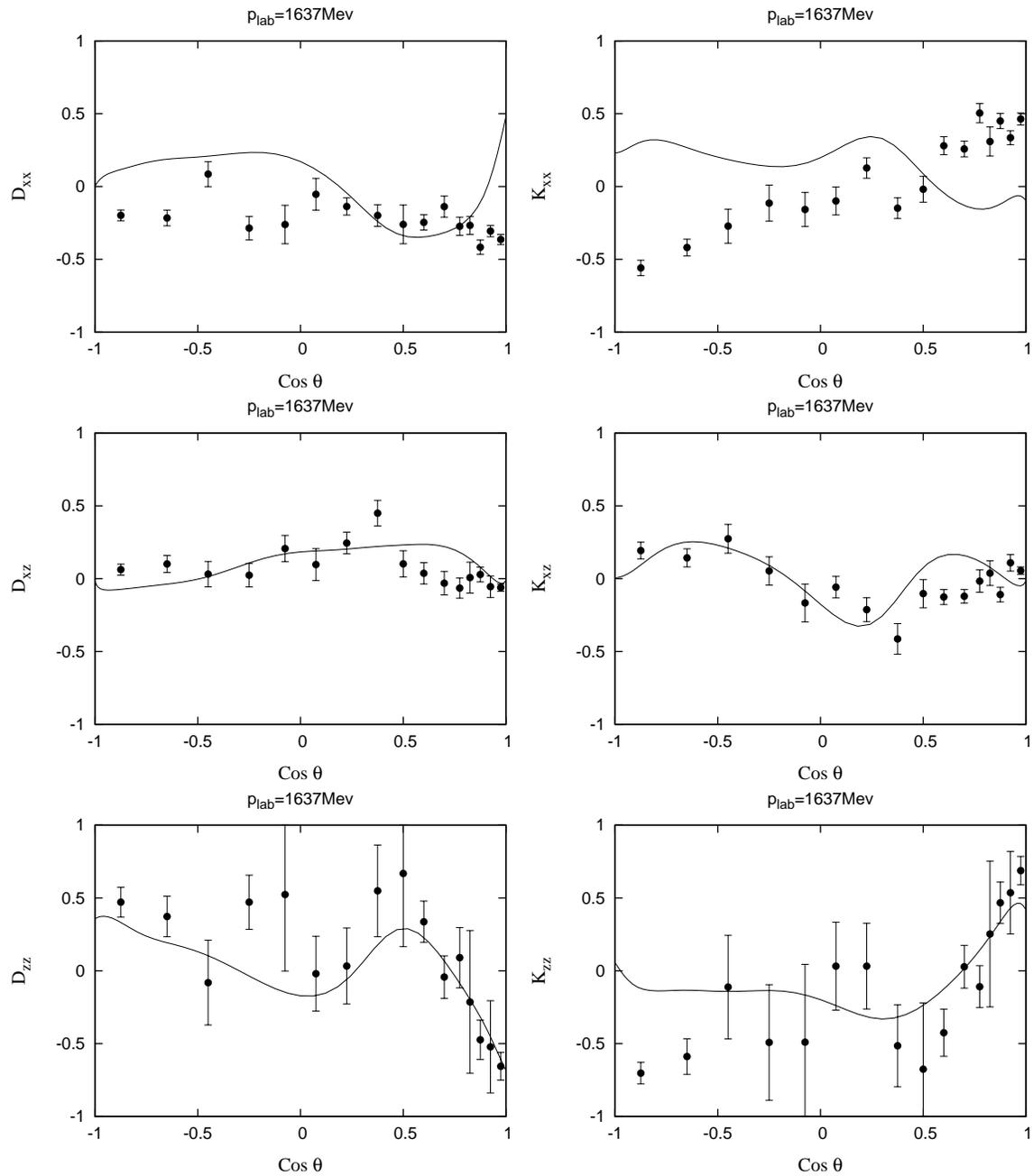


Figura 4.13: Observables de depolarización D_{ij} y de transferencia de spin K_{ij} para $p_{lab} = 1637 \text{ MeV}/c$. Datos experimentales de [104]

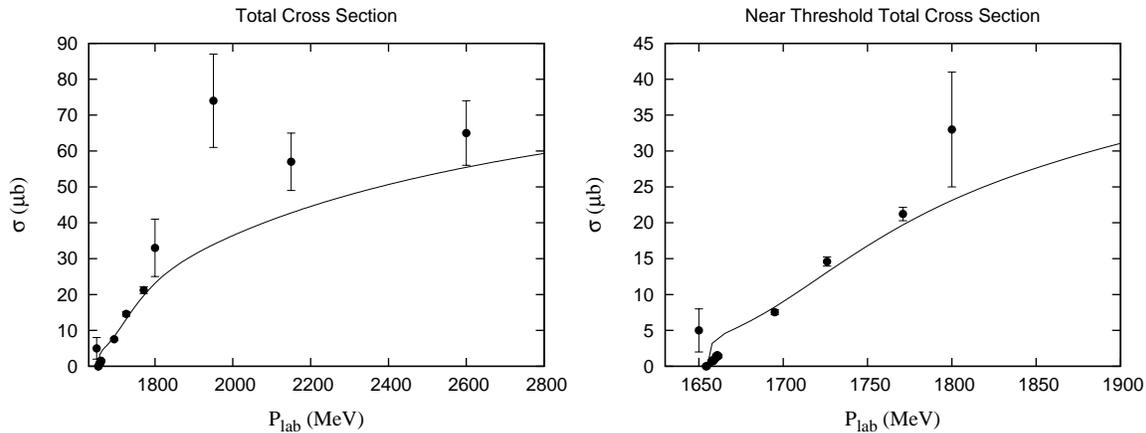


Figura 4.14: Sección eficaz total de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$. Datos experimentales de [14, 129, 131, 133].

4.2.4. Otras reacciones de producción de extrañeza

Reacción $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$

Al contrario que el canal $\Lambda\bar{\Lambda}$, que filtra el isospin $I = 0$, la reacción $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$ se produce totalmente a través del isospin $I = 1$. Esto significa, muy probablemente, que existirán diferencias en la dependencia de spin. En un modelo quark *naive*, el spin de la partícula Λ lo lleva enteramente el quark s , mientras que el spin de Σ es el contrario al del quark constituyente s . Por lo tanto, si la correlación de spin en el estado final se atribuye a un estado específico de $s\bar{s}$, esto se traduce en efectos diferentes para $\Lambda\bar{\Lambda}$ y $\Lambda\bar{\Sigma}$.

En primer lugar presentamos la sección eficaz total en dos regiones diferentes de energía en Fig. 4.14. Los datos experimentales disponibles para este canal son menores que para el anterior, pero suficientes para analizar el canal de forma adecuada.

Para la reacción $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + \bar{\Lambda}\Sigma^0$, la medida de la sección eficaz diferencial y los observables de polarización y correlación de spin han sido medidos por la Colaboración PS185 de LEAR a momentos de laboratorio de $1726 \text{ MeV}/c$ y $1771 \text{ MeV}/c$ [131].

Como observamos en la Fig. 4.15, nuestros resultados muestran un buen acuerdo con los datos experimentales. El bump que se observa en ángulos *forward* también aparecía a baja energía en la reacción $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$, aunque aquí aparece más pronunciado. Su origen se encuentra en el diagrama de aniquilación a través de un gluón. En esta reacción el efecto es más fuerte debido a que el intercambio de un kaón K y una κ se ve debilitado, como podemos observar en los correspondientes coeficientes de spin-isospin-color del Apéndice B. Además, como ocurre en otros estudios teóricos [127, 134], el efecto de la parte tensorial del potencial es mucho más bajo en este canal.

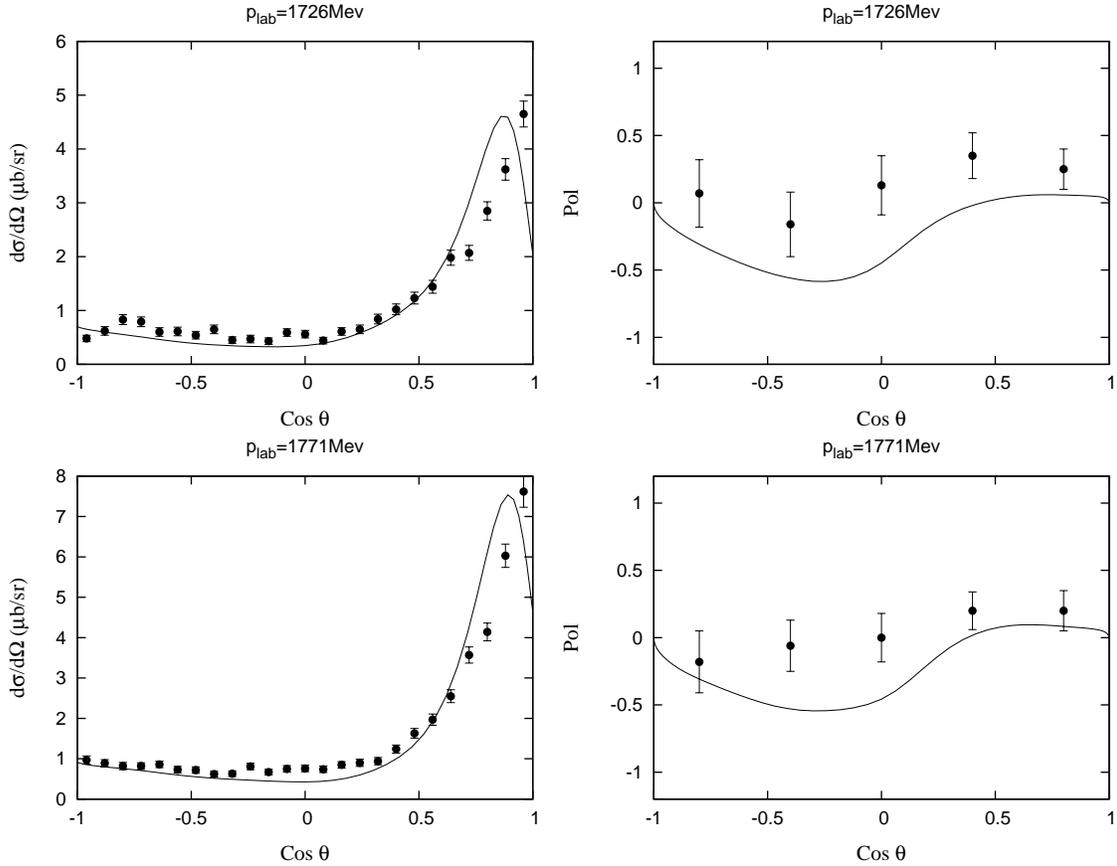


Figura 4.15: Sección eficaz diferencial y observable de polarización de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$ a baja energía. Datos experimentales de [131] para $p_{lab} = 1726 \text{ MeV}/c$ y $1771 \text{ MeV}/c$.

La dominancia de la parte escalar hace que los observables de correlación de spin C_{ij} , presentados en las Figs. 4.16 y 4.17, sean mucho menores que en la reacción de isospin cero. A pesar de que, en este caso, la incertidumbre en los datos sea muy grande, podemos afirmar que el acuerdo encontrado es bueno. Lo mismo podemos decir del *singlet fraction*, mostrado en la misma Fig. 4.17. Al contrario que antes, la producción no se produce en estado de triplete, y los resultados muestran que F_s se aleja del cero. Los datos experimentales muestran la misma tendencia, aunque se requiere de nuevas mediciones para reducir el error.

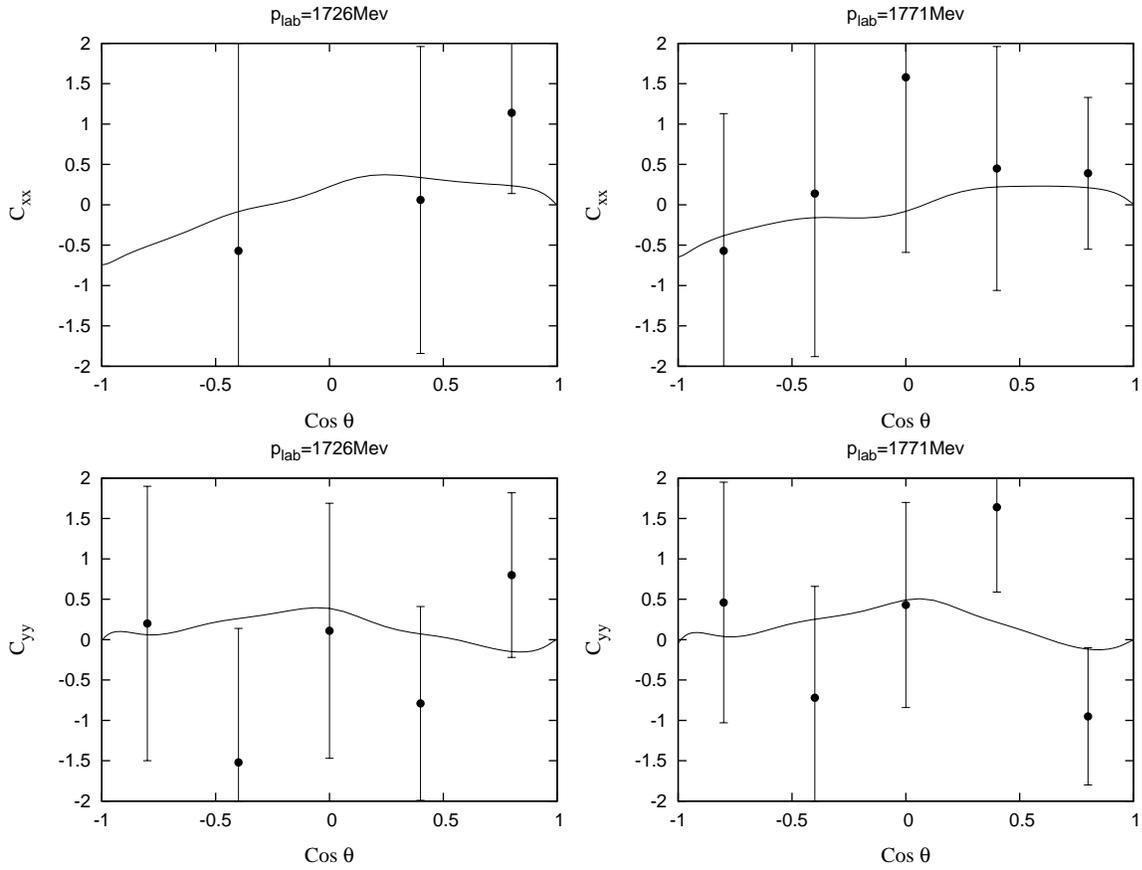


Figura 4.16: Observables C_{xx} y C_{yy} de spin de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$ a diferentes energías. Datos experimentales de [131].

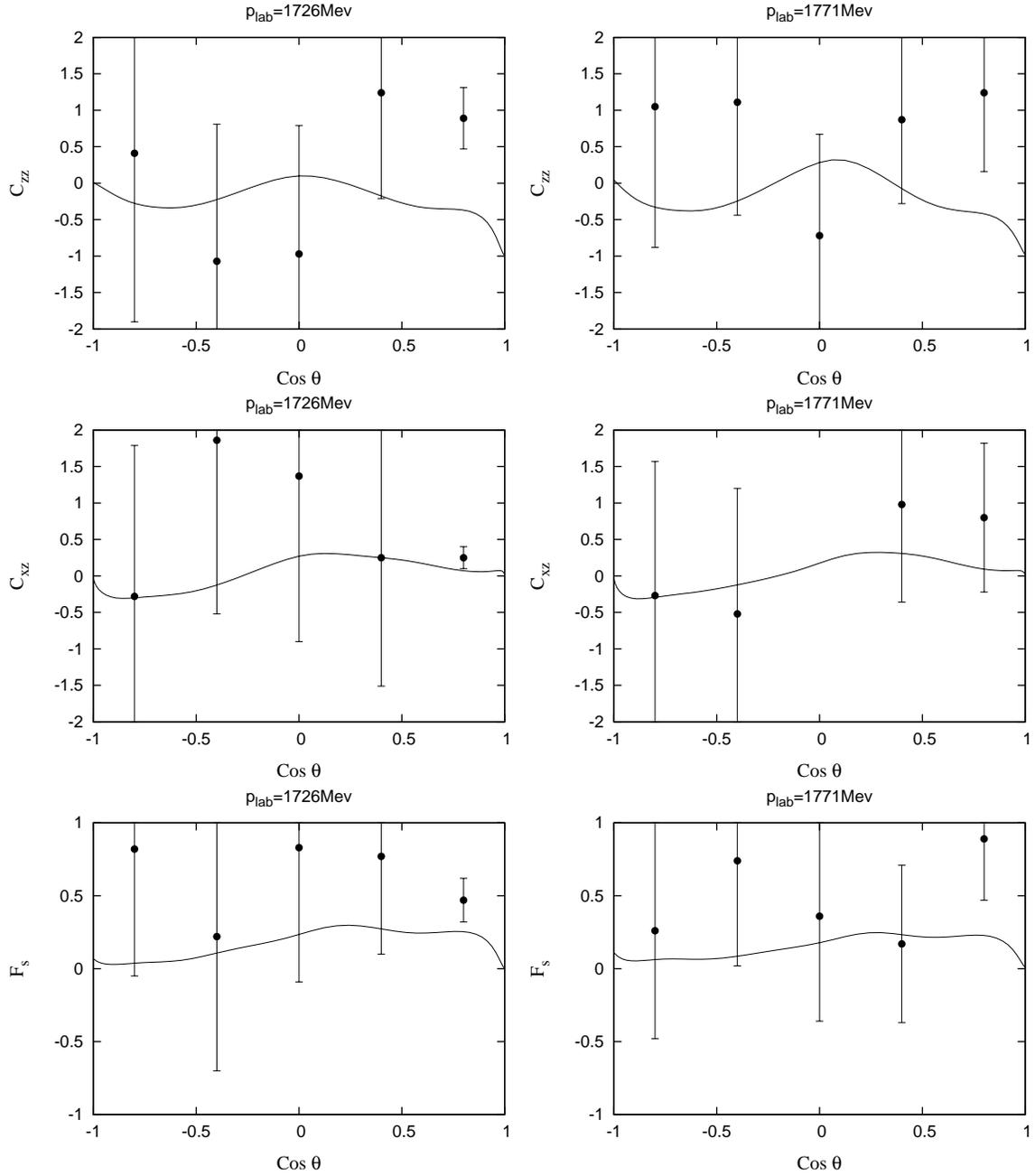


Figura 4.17: Observables C_{zz} , C_{xz} y F_s de $p\bar{p} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}^0 + c.c.$ a diferentes energías. Datos experimentales de [131].

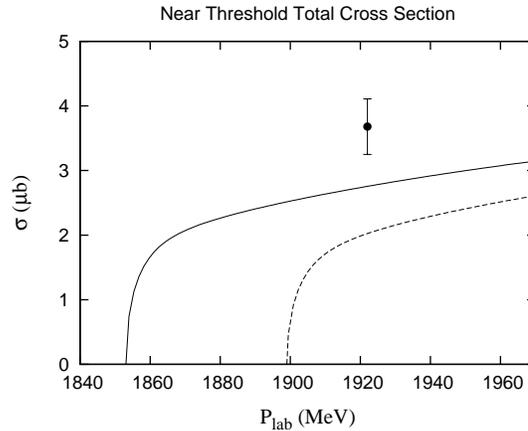


Figura 4.18: Sección eficaz total de $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ (línea continua) y $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+$ (línea de puntos). El dato experimental correspondiente a la reacción $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ proviene de [135].

Reacción $p\bar{p} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$

La sección eficaz total para las reacciones $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$ y $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+$ predichas por nuestro modelo se muestran en la figura 4.18. Por desgracia, sólo existe un dato en la región de energía cercana al threshold de $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$, en momento de laboratorio de $p_{lab} = 1922 \text{ MeV}/c$ [135]. Esto implica que la elección de los parámetros del potencial óptico para este canal resulta muy complicado, y equivale casi a una predicción.

El aspecto teórico más interesante de la Fig. 4.18 viene de la reacción $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+$. Al contrario que el proceso $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-$, $p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+$ sólo puede ocurrir en un proceso de dos pasos, debido a que, o bien debe involucrar un intercambio exótico de una unidad de extrañeza y dos unidades de carga, o un estado intermedio (por ejemplo $\Lambda\bar{\Lambda}$). Esto haría sospechar que la última reacción estuviera suprimida frente a $\Sigma^+\bar{\Sigma}^-$.

Sin embargo, observamos que la producción de $\Sigma^-\bar{\Sigma}^+$ no está en absoluto suprimida como uno podría esperar, al menos cerca del threshold. Así, $\sigma(p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+)$ es sólo un 25 % menor que $\sigma(p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-)$ para $p_{lab} = 1922 \text{ MeV}/c$, es decir:

$$\frac{\sigma(p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-)}{\sigma(p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+)} \approx 1,3 \quad (4.31)$$

lo que está en acuerdo con el resultado experimental de [135]

$$\frac{\sigma(p\bar{p} \rightarrow \Sigma^+\bar{\Sigma}^-)}{\sigma(p\bar{p} \rightarrow \Sigma^-\bar{\Sigma}^+)_{EXP}} = 2,4 \begin{matrix} +3,0 \\ -1,3 \end{matrix} \quad (90 \% \text{ CL}) \quad (4.32)$$

Además, se observa que la mayor parte de la diferencia entre reacciones tiene su origen en la diferencia de thresholds, al utilizar la base de carga con masas experimentales.

4.3. Estructuras moleculares en el espectro de mesones $c\bar{c}$

4.3.1. El sector $J^{PC} = 1^{++}$: Las resonancias $X(3872)$ y $X(3940)$

Nuestro objetivo es aplicar el formalismo desarrollado en el Capítulo 3 al cálculo de moléculas mesónicas. En particular, en esta sección, utilizaremos el método desarrollado al estudio de uno de los estados mejor establecidos, la llamada $X(3872)$ [136].

La partícula $X(3872)$ fue descubierta por primera vez en la Colaboración Belle, en el espectro de masa invariante de $J/\psi\pi\pi$ del decay $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-J/\psi$ [91]. Su existencia fue pronto confirmada por las Colaboraciones BaBar [137], CDF [138] y D0 [139]. Su masa media es $M_X = 3871,2 \pm 0,5 \text{ MeV}$ y su anchura $\Gamma_X < 2,3 \text{ MeV}$. Las correlaciones angulares entre partículas en el estado final en el decay $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$, medido por Belle [140] favorece los números cuánticos $J^{PC} = 1^{++}$, sin embargo no puede excluir la posibilidad $J^{PC} = 2^{++}$. Un análisis posterior de la Colaboración CDF [141] de la misma desintegración es compatible con los resultados de Belle, y concluye a partir el espectro de la masa del dipión que los números cuánticos más idóneos son $J^{PC} = 1^{++}$, aunque no puede excluir totalmente la combinación $J^{PC} = 2^{-+}$.

Estas conclusiones fueron confirmadas por un nuevo análisis de CDF del decay $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$ seguido de $J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-$ excluyendo las otras posibilidades hasta un nivel de confianza del 99,7% [142]. A su vez, el pequeño espacio de fases disponible para la reacción $X(3872) \rightarrow D^0\bar{D}^0\pi^0$ observada por Belle [143] descarta $J = 2$.

No obstante, recientemente la Colaboración BaBar [144] realizó un análisis del canal de desintegración $J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$ concluyendo que la asignación 2^{-+} se ajustaba mejor a los datos experimentales. Sin embargo, un reanálisis de las distribuciones de masas de dos y tres piones en las desintegraciones $X(3872) \rightarrow J/\psi\rho$ y $X(3872) \rightarrow J/\psi\omega$ realizada por Hanhart et al. [145] concluyen que los datos existentes hasta ahora favorecen la asignación 1^{++} .

En el sector 1^{++} el único estado bien establecido en el Particle Data Group (PDG) [146] es $\chi_{c1}(1P)$, con una masa de $M = 3510,66 \pm 0,07 \text{ MeV}$. La primera excitación se espera alrededor de 3950 MeV . La masa de la $X(3872)$ es difícil de reproducir por los modelos quark estándar (ver Ref. [147] para un review). El estado parece ser muy pesado para un estado $1D$ del charmonio y muy ligero para un $2P$. Además, no se han encontrado configuraciones de cuatro quarks en esta región de masas, lo que descarta la posibilidad de que esta partícula sea un tetraquark compacto [148, 149].

Una propiedad importante de la partícula $X(3872)$ es que su masa está extremadamente próxima al umbral D^0D^{*0} , con una diferencia que abarca desde $-0,25 \pm 0,4 \text{ MeV}$ usando las últimas medidas, a $-0,6 \pm 0,6 \text{ MeV}$ usando los valores del Particle Data Group. La proximidad al threshold D^0D^{*0} hace a la $X(3872)$ un candidato natural a una molécula $C = + D^0D^{*0}$. La hipótesis de la molécula DD^* ligada principalmente por el intercambio de un pión ha sido sugerida por diversos autores [150–155]. En particular, en la

Ref. [156, 157] se discute que la $X(3872)$ es una molécula $J^{PC} = 1^{++} D^0 D^{*0}$ estabilizada por la mezcla con los estados $\rho J/\psi$ y $\omega J/\psi$. Los autores muestran que el intercambio de un pión por sí solo no es capaz de ligar la molécula, siendo el efecto combinado del pión y el acoplamiento de canales el responsable de ello. Las componentes $D^0 D^{*0}$ dominan la función de onda a la energía experimental, haciendo las demás contribuciones pequeñas.

La interpretación molecular tiene problemas cuando intenta explicar el alto valor del decaimiento radiativo a $\gamma\psi'$. Para un estado molecular, este proceso sólo puede producirse a través de diagramas de aniquilación, y por lo tanto, es muy pequeño.

Esta situación sugiere para la $X(3872)$ una combinación del estado del charmonio $2P$ y una molécula $D^0 D^{*0}$ débilmente ligada [158, 159]. La asignación experimental $J^{PC} = 1^{++}$ favorece esta conclusión porque permite a la molécula estar en una onda parcial relativa S mientras que el charmonio correspondiente está en onda P . Entonces, las masas de los quarks ligeros adicionales se compensan con la excitación angular y ambas configuraciones pueden estar en la misma región de masas.

Todos los parámetros que utilizaremos en el cálculo han sido tomados de cálculos previos [22, 58], incluyendo el parámetro $\gamma = 0,26$ en la ecuación 3.12. Este valor fue ajustado a la ecuación $\psi(3770) \rightarrow DD$, dado que es la única desintegración fuerte bien establecida del charmonio. Realizaremos tres cálculos diferentes que pondrán de manifiesto diferentes aproximaciones al estado $X(3872)$.

Cálculo acoplado de $X(3872)$ en base de isospin

En primer lugar, estudiamos un cálculo con isospin simétrico, incluyendo las ondas parciales 3S_1 y 3D_1 de DD^* (donde con DD^* hacemos referencia a la combinación de C -paridad adecuada que estudiamos en el Apéndice C), y tomando las masas de los mesones D y D^* como el promedio de las masas experimentales de los estados cargados.

Si sólo consideramos la interacción RGM y despreciamos el acoplamiento a estados $c\bar{c}$ no encontramos ningún estado ligado de DD^* en el sector 1^{++} , tanto con isospin $I = 0$ como con $I = 1$. La interacción que surge del intercambio de un pión es atractiva en isospin 0, pero no lo suficiente como para ligar el sistema, incluso permitiendo distorsión en los estados mesónicos como describimos en la Sección 3.6. Los estados se modifican, en dirección a una mayor atracción, pero siguen conservando su identidad y no consiguen ligar la molécula por sí solos.

El siguiente paso es incluir el acoplamiento con charmonio en el canal $I = 0$. Los estados teóricos más relevantes en 1^{++} en esta región de energía son el estado fundamental y el primer excitado, con masas desnudas proporcionadas por el modelo y de valor,

$$\begin{aligned} c\bar{c}(1^3P_1) &\rightarrow M = 3503,9 \text{ MeV} \\ c\bar{c}(2^3P_1) &\rightarrow M = 3947,4 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Mostramos en la Tabla 4.5 los resultados de este cálculo. Encontramos un estado $c\bar{c}(1^3P_1)$ casi puro con una masa de 3467 MeV que identificamos con $\chi_{c1}(1P)$. El otro

| $M (MeV)$ | $c\bar{c}(1^3P_1)$ | $c\bar{c}(2^3P_1)$ | D^0D^{*0} | $D^\pm D^{*\mp}$ |
|-----------|--------------------|--------------------|-------------|------------------|
| 3865 | 1 % | 32 % | 33,5 % | 33,5 % |
| 3467 | 95 % | 0 % | 2,5 % | 2,5 % |

Cuadro 4.5: Masas y probabilidades de los canales para los dos estados obtenidos en el cálculo en base de isospin. La probabilidad menor que 0,5 % la mostramos como cero.

estado, con masa $3865 MeV$, es casi una molécula DD^* ligada por el acoplamiento a estados $c\bar{c}$. El estado que correspondería al primer excitado $c\bar{c}(2^3P_1)$ se encontraría por encima del threshold y lo estudiaremos más adelante. Cabe señalar que el hecho de añadir estados $c\bar{c}$ más altos no influye significativamente en el cálculo de masas y probabilidades, justificando entonces la elección de los dos primeros estados del espectro.

Aunque este cálculo presenta un estado nuevo, resulta insuficiente. La coexistencia de las desintegraciones a $J/\psi\pi\pi$ ($I = 1$) y $J/\psi\pi\pi\pi$ ($I = 0$) sugiere sin duda una fuerte mezcla de isospin. Sin embargo, el branching ratio relativo entre los dos modos puede engañarnos en cuanto a la verdadera mezcla en la función de onda de la $X(3872)$, debido a la supresión del espacio de fases del canal $J/\psi\omega$ frente a $J/\psi\rho$. De hecho, si asumimos que la $X(3872)$ es una molécula D^0D^{*0} , el ratio $\frac{B(X(3872)\rightarrow\pi^+\pi^-\pi^0J/\psi)}{B(X(3872)\rightarrow\pi^+\pi^-J/\psi)}$ sería un factor 20 menor que el experimental, debido a los diferentes espacios de fase [154].

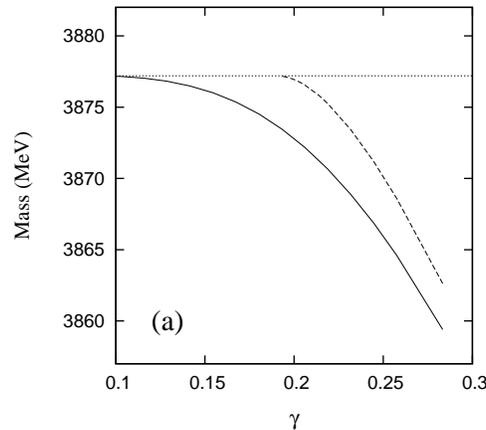


Figura 4.19: Masa de la partícula $X(3872)$ como función del parámetro γ del modelo 3P_0 en base de isospin. La línea de puntos muestra la posición del threshold para DD^* promediado a estados cargados. La línea sólida muestra el resultado total y la quebrada el resultado sin considerar interacción RGM para DD^* .

Teniendo en cuenta que el modelo 3P_0 es probablemente muy elemental, podríamos

estar sobreestimando el valor del parámetro γ , que da cuenta de la fuerza de creación del par ligero del vacío. Para ver la dependencia del cálculo con γ mostramos en la Fig. 4.19 la variación de la masa de la partícula $X(3872)$ con la misma. Observamos que a medida que aumenta la masa se hace mayor, como es razonable al tener un acoplamiento mayor.

Cálculo acoplado de $X(3872)$ en base de carga

En el apartado anterior se ha visto la necesidad de contar con la contribución de las componentes cargadas de la función de onda. En este apartado realizaremos el cálculo considerando las mismas, permitiendo que el sistema dinámico elija los pesos de dichas componentes.

Para introducir la rotura de isospin en nuestro cálculo debemos trabajar en la base de carga, en vez de en la base de isospin, transformando los estados con las relaciones,

$$|D^\pm D^{*\mp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|DD^*I=0\rangle - |DD^*I=1\rangle) \quad (4.34)$$

$$|D^0 D^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|DD^*I=0\rangle + |DD^*I=1\rangle) \quad (4.35)$$

y escribiendo las interacciones de isospin definido en la base de carga. Ahora rompemos explícitamente el isospin tomando las masas experimentales de los mesones, apareciendo la diferencia de thresholds en las ecuaciones y resolviendo para las componentes cargadas y neutras.

De nuevo, obtenemos dos estados ligados, observando una mayor diferencia respecto al resultado anterior en las componentes moleculares DD^* . Mostramos las masas y probabilidades de los canales en la parte A de la Tabla 4.6. Obtenemos ahora una mayor probabilidad para la componente $D^0 D^{*0}$, aunque la componente de isospin 0 sigue dominando con un 66 % de probabilidad, reduciéndose a un 3 % la probabilidad de isospin 1.

| | $M (MeV)$ | $c\bar{c}(1^3P_1)$ | $c\bar{c}(2^3P_1)$ | $D^0 D^{*0}$ | $D^\pm D^{*\mp}$ |
|---|-----------|--------------------|--------------------|--------------|------------------|
| A | 3863 | 1 % | 30 % | 46 % | 23 % |
| | 3467 | 95 % | 0 % | 2,5 % | 2,5 % |
| B | 3871 | 0 % | 7 % | 83 % | 10 % |
| | 3484 | 97 % | 0 % | 1,5 % | 1,5 % |

Cuadro 4.6: Masas y probabilidades de los diferentes canales para el cálculo en base de carga. En el conjunto A observamos el efecto de rotura de isospin en las probabilidades de DD^* con la γ del modelo 3P_0 original. El segundo set de resultados corresponde a un valor de $\gamma = 0,19$ que ajusta la masa experimental de la partícula $X(3872)$.

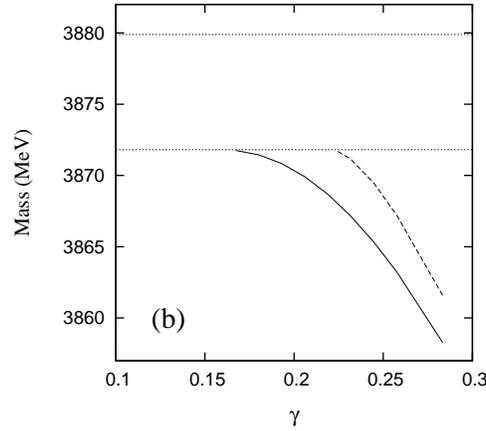


Figura 4.20: Masa de la partícula $X(3872)$ como función del parámetro γ del modelo 3P_0 en base de carga. La línea de puntos muestra la posición de los thresholds D^0D^{*0} (abajo) y $D^\pm D^{*\mp}$ (arriba). La línea sólida muestra el resultado total y la quebrada el resultado sin considerar interacción RGM para DD^* .

Como antes, para observar la sensibilidad al parámetro γ del 3P_0 , mostramos en la Fig. 4.20 la variación de la masa de $X(3872)$ respecto al mismo. Vemos que es posible conseguir la masa experimental mediante un ligero ajuste del valor del parámetro. Si utilizamos la energía de ligadura de $0,6 \text{ MeV}$ obtenemos un valor de $\gamma = 0,19$, un 25 % menor que el original. Mostramos las masas y probabilidades en la parte B de la Tabla 4.6.

Ahora, la componente D^0D^{*0} domina claramente, con un 83 % de probabilidad, dando un 70 % para la componente de isospin 0 y un 23 % para el isospin 1. Por supuesto, como la rotura de isospin es un efecto de threshold [156], crece a medida que nos acercamos al mismo, como podemos observar en la Figura 4.21, donde mostramos las probabilidades de las diferentes componentes para el estado $X(3872)$.

La explicación de los decays radiativos y su relación con los decays fuertes requiere el conocimiento de los mecanismos de desintegración correspondientes. A continuación presentaremos un estudio más detallado de los mismos.

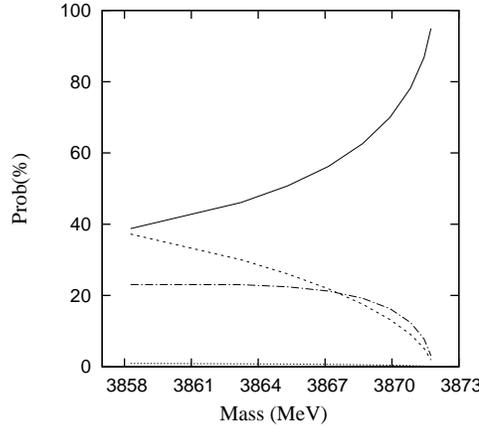


Figura 4.21: Probabilidad (en %) para las diferentes componentes como función de la energía de ligadura cuando variamos el parámetro γ del modelo 3P_0 . La línea sólida nos da la probabilidad para $D^0 D^{*0}$, la línea punto-rayada la probabilidad de $D^\pm D^{*\mp}$, la quebrada de $c\bar{c}(2^3P_1)$ y la línea de puntos la de $c\bar{c}(1^3P_1)$.

Decays de la partícula $X(3872)$

Desde su descubrimiento en 2003 por la Colaboración Belle en el espectro de masa invariante de $J/\psi\pi\pi$ de la reacción $B^+ \rightarrow K^+\pi^+\pi^-J/\psi$ [91], la resonancia $X(3872)$ ha atraído mucha atención por sus extrañas propiedades.

Una cuestión intrigante de la $X(3872)$ es el ratio [160]

$$R_1 = \frac{X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi}{X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi} = 0,8 \pm 0,3. \quad (4.36)$$

El espectro de masa del dipión en el canal $\pi^+\pi^-J/\psi$ muestra que los piones proceden de la resonancia ρ^0 . Por otro lado, la masa espectral de $\pi^+\pi^-\pi^0$ tiene un fuerte pico alrededor de 750 MeV , sugiriendo que el proceso está dominado por el mesón ω . Entonces, el ratio $R \sim 1$ parece indicar que hay una gran violación de isospín, incompatible con la asignación tradicional a un estado del charmonio. Sin embargo, esta conclusión es dudosa, debido a la fuerte supresión del espacio de fases del canal $\omega J/\psi$ frente al de $\rho J/\psi$.

Diferente información se puede obtener del decay radiativo a $\gamma J/\psi$

$$R_2 = \frac{\Gamma(X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi)}{\Gamma(X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = \begin{cases} 0,14 \pm 0,05 [161] \\ 0,33 \pm 0,12 [159] \end{cases}, \quad (4.37)$$

y del decay radiativo a $\gamma\psi(2S)$ [159]

$$R_3 = \frac{\Gamma(X(3872) \rightarrow \gamma\psi(2S))}{\Gamma(X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 1,1 \pm 0,4. \quad (4.38)$$

| γ | E_{bind} | $c\bar{c}(2^3P_1)$ | D^0D^{*0} | $D^\pm D^{*\mp}$ | $J/\psi\rho$ | $J/\psi\omega$ |
|----------|------------|--------------------|-------------|------------------|--------------|----------------|
| 0,231 | -0,60 | 12,40 | 79,24 | 7,46 | 0,49 | 0,40 |
| 0,226 | -0,25 | 8,00 | 86,61 | 4,58 | 0,53 | 0,29 |

Cuadro 4.7: Energía de ligadura (en MeV) y probabilidades de los canales (en %) para el estado $X(3872)$ para dos valores del parámetro γ del modelo 3P_0 .

| $E_{bind}(\text{MeV})$ | $\Gamma_{\pi^+\pi^-J/\psi}$ | $\Gamma_{\pi^+\pi^-\pi^0J/\psi}$ | R_1 |
|------------------------|-----------------------------|----------------------------------|-------|
| -0,60 | 27,61 | 14,40 | 0,52 |
| -0,25 | 24,18 | 10,64 | 0,44 |

Cuadro 4.8: Anchuras de desintegración (en KeV) de $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$ y $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0J/\psi$ y su ratio para el estado $X(3872)$ para dos energías de ligadura diferentes. El valor experimental es $R_1 = 1,0 \pm 0,4 \pm 0,3$ [161].

La interpretación molecular fracasa al explicar el alto rate a $\gamma\psi(2S)$ porque, para un estado molecular, sólo podemos decaer a través de diagramas de aniquilación y, por tanto, deben ser menores que los de $\gamma J/\psi$.

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar los decays fuertes y radiativos, para intentar explicar los ratios antes mencionados. Para completar la descripción del estado tomaremos como base el cálculo acoplado en base de carga obtenido anteriormente. En este caso, incluiremos el estado de charmonio $c\bar{c}(2^3P_1)$ con masa $M = 3947,4$ MeV, los canales cargado y neutro de DD^* y los canales $J/\psi\rho$ y $J/\psi\omega$. Obviaremos en este caso el estado fundamental del charmonio, por encontrarse lejos de nuestro threshold. Como en el caso anterior, el parámetro γ lo tomamos de cálculos anteriores [58], ajustado a la reacción $\psi(3770) \rightarrow DD$, aunque debido a efectos de Final State Interaction podríamos estar sobreestimándolo, y por lo tanto debemos ser conscientes de que el valor último puede variar ligeramente.

Al contrario que en cálculos equivalentes [156], en nuestro caso el acoplamiento de DD^* con los canales $J/\psi\rho$ y $J/\psi\omega$ no es suficiente para ligar la molécula, y es imprescindible acoplar con el par $c\bar{c}$ para alcanzar el estado ligado. Para hacernos una idea de la sensibilidad de las anchuras de desintegración de la $X(3872)$ con su energía de ligadura, y teniendo en cuenta que su valor experimental varía de $0,6$ MeV a $0,25$ MeV, hemos ajustado ligeramente el valor del parámetro γ del modelo 3P_0 para conseguir estas dos energías. En la Tabla 4.7 podemos ver los resultados de dicho cálculo, presentando las probabilidades de cada canal.

Debido a que el estado está por debajo de los thresholds involucrados, la descripción de las anchuras parciales se debe hacer de forma explícita. Por ello, estudiaremos ahora los diferentes casos.

En primer lugar estudiaremos las desintegraciones fuertes. Por desintegraciones fuertes nos referimos a los decays $X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ y $X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$, que pueden ser descritos en nuestro formalismo asumiendo que la contribución principal procede de la componente DD^* del estado $X(3872)$ que decae a $\rho J/\psi$ ($\omega J/\psi$) y luego al estado final $\pi^+\pi^- J/\psi$ ($\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$). Entonces, la anchura del proceso $\pi^+\pi^- J/\psi$ viene dada por

$$\Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi} = \sum_{J,L} \int_0^{k_{max}} dk \frac{\Gamma_\rho}{(M_X - E_\rho - E_{J/\psi})^2 + \frac{\Gamma_\rho^2}{4}} |\mathcal{M}_{\rho J/\psi}(k)|^2. \quad (4.39)$$

donde

$$\mathcal{M}_{\rho J/\psi} = \int d^3P \chi_{D\bar{D}^*}(P) h_{D\bar{D}^* \rightarrow \rho J/\psi}(P, P'). \quad (4.40)$$

y la amplitud $h_{D\bar{D}^* \rightarrow \rho J/\psi}$ se calcula usando los diagramas de disociación calculados en el Capítulo 2.

En este caso incluimos explícitamente los canales $\rho(\omega)J/\psi$ en el cálculo de la molécula $X(3872)$ y asumimos que decae a dichos estados finales. En este sentido, la anchura viene dada por

$$\Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi} = \sum_{J,L} \int_0^{k_{max}} dk \Gamma_\rho |\chi_{\rho J/\psi}(k)|^2. \quad (4.41)$$

Como el cálculo es perturbativo para la componente $\rho J/\psi$ tenemos la relación

$$\chi_{\rho J/\psi} = \frac{\mathcal{M}_{\rho J/\psi}}{M_X - E_\rho - E_{J/\psi}} \quad (4.42)$$

y para obtener la Ec. 4.39 la anchura del mesón ρ debería ser incluida en el denominador. Ambos cálculos son el mismo, pero debemos tomar uno solo para evitar considerarlo dos veces. Usaremos expresiones similares para el proceso $\pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$.

En la Tabla 4.8 mostramos las anchuras para los decays fuertes $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ y $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi$ usando la Ec. 4.39, cuyo ratio no está lejos del valor experimental. Vale la pena mencionar que, para obtener este ratio, es suficiente con tener de un 20–30 % de componente $I = 1$, debido a, como ya comentamos, las diferencias en el espacio de fases de los canales $\rho J/\psi$ y $\omega J/\psi$.

Ahora nos centraremos en estudiar las desintegraciones radiativas de la partícula $X(3872)$. En un modelo de canales acoplados, el estado $X(3872)$ puede decaer tanto a través de su componente molecular como por su componente mesónica $c\bar{c}$.

Asumiendo una estructura DD^* para la molécula, el mecanismo más simple, mostrado en la Fig. 4.22 (a), es la aniquilación de los quarks ligeros, dejando el par $c\bar{c}$ restante en un estado J/ψ o $\psi(2S)$. La amplitud de este proceso será,

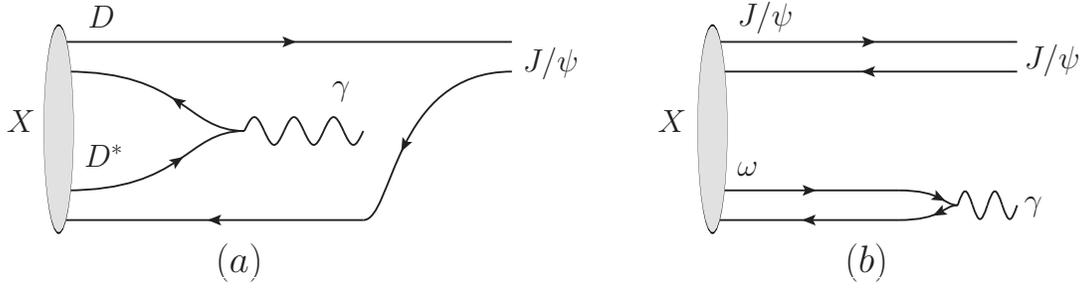


Figura 4.22: Diagramas de aniquilación (a) y de *vector dominance mode* (b).

$$\mathcal{A} = \sqrt{2}q_c \int d^3p d^3k \chi_\beta(p) \phi_D(k - \frac{q}{2} - \rho_{cu} \frac{p}{2}) \phi_{D^*}(k + \frac{q}{2} - \rho_{cu} \frac{p}{2}) \phi_{J/\psi}(k + \frac{p}{2}) \frac{\langle \sigma \rangle \epsilon^*(q, \lambda)}{\sqrt{2}q} \quad (4.43)$$

con $\rho_{ij} = \frac{m_i - m_j}{m_i + m_j}$. La anchura de este proceso ha sido calculada en Ref. [156] obteniendo la expresión

$$\Gamma_{ANN} = \frac{4}{27} \alpha \frac{q E_\Psi}{M_X} e^{-\frac{q^2}{2\beta_D^2}} \left(\eta_{00} - \frac{1}{2} \eta_{+-} \right)^2 \quad (4.44)$$

donde η_β viene dado por

$$\begin{aligned} \eta_\beta(1S) &= \frac{\sqrt{8}}{\pi^{3/4}} \left(\frac{\beta_\psi}{2\beta_\psi^2 + \beta_D^2} \right)^{3/2} \int p^2 dp \chi_\beta(p) e^{-\frac{\rho^2 p^2}{2\beta_\psi^2 + \beta_D^2}}, \\ \eta_\beta(2S) &= \frac{4}{\sqrt{3}\pi^{3/4}} \left(\frac{\beta_{\psi'}}{2\beta_{\psi'}^2 + \beta_D^2} \right)^{3/2} \int p^2 dp \chi_\beta(p) e^{-\frac{\rho^2 p^2}{2\beta_{\psi'}^2 + \beta_D^2}} \left(\frac{3\beta_{\psi'}^2}{2\beta_{\psi'}^2 + \beta_D^2} - \frac{4\rho^2 p^2 (\beta_{\psi'}^2 + \beta_D^2)^2}{\beta_{\psi'}^2 (2\beta_{\psi'}^2 \beta_D^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

con $\rho = m_c/(m_c + m_n)$ y $\chi_\beta(p)$ la función de onda relativa de la componente DD^* de $X(3872)$ en el canal cargado β . Aquí, β_ψ , $\beta_{\psi'}$ y β_D son los parámetros de oscilador armónico que ajustan nuestra función de onda solución del problema de dos cuerpos $q\bar{q}$.

De igual forma, otro posible mecanismo de desintegración molecular es el llamado *vector dominance mode*, mostrado en la Fig. 4.22 (b). Este proceso actúa a través de las componentes $\rho(\omega)J/\psi$, con el inmediato decay del mesón ρ o ω a un fotón. En este caso, la anchura viene dada por [156],

$$\Gamma_{VMD} = \frac{4}{27} \alpha \frac{q E_\Psi}{M_X} \left(3|\phi_\rho(r=0)|\chi_{\rho J/\psi}(q) + |\phi_\omega(r=0)|\chi_{\omega J/\psi}(q) \right)^2 \quad (4.46)$$

donde q es el momento del fotón, $\phi_\omega(r=0) = \phi_\rho(r=0)$ son las funciones de onda de los mesones ρ y ω en el origen y $\chi_{\rho J/\psi}(q)$ y $\chi_{\omega J/\psi}(q)$ son las funciones de onda de las

| $E_{bind}(\text{MeV})$ | $\Gamma_{J/\psi\gamma}^{VMD}$ | $\Gamma_{J/\psi\gamma}^{ANN}$ | R_2^M | $\Gamma_{J/\psi\gamma}^{c\bar{c}}$ | $R_2^{c\bar{c}}$ | R_2 |
|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------|------------------------------------|------------------|-------|
| -0,60 | 0,014 | 0,056 | $2,5 \cdot 10^{-3}$ | 8,15 | 0,29 | 0,30 |
| -0,25 | 0,011 | 0,045 | $2,3 \cdot 10^{-3}$ | 5,25 | 0,22 | 0,22 |

Cuadro 4.9: Anchuras de desintegración radiativa (en KeV) para el canal $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$ para dos energías de ligadura diferentes. Los mecanismos de Vector meson dominante (VMD) y aniquilación (ANN) son producidos a través de la componente molecular, mientras que la anchura restante vienen de la componente mesónica $c\bar{c}$. R_2^M es el ratio incluyendo sólo contribuciones de la parte molecular, $R_2^{c\bar{c}}$ de la componente $c\bar{c}$ y R_2 es el resultado completo. Los datos experimentales disponibles son $R_2 = 0,14 \pm 0,05$ [161] y $R_2 = 0,33 \pm 0,12$ [159].

componentes $\rho J/\psi$ y $\omega J/\psi$ de la $X(3872)$.

La anchura parcial para la transición E1 entre estados $n^{2S+1}L_J$ y $n'^{2S'+1}L'_{J'}$, correspondiente al decay de la componente mesónica $c\bar{c}$ viene dado por [162]

$$\Gamma_{E1} \left(n^{2S+1}L_J \rightarrow n'^{2S'+1}L'_{J'} \right) = \frac{4\alpha e_c^2 q^3}{3} (2J' + 1) S_{fi}^E \delta_{SS'} |\mathcal{E}_{fi}|^2 \frac{E_f}{M_i} \quad (4.47)$$

donde S_{fi}^E es el factor estadístico

$$S_{fi}^E = \max(L, L') \left\{ \begin{array}{ccc} J & 1 & J' \\ L' & S & L \end{array} \right\}^2, \quad (4.48)$$

q es el momento del fotón, M_i es la masa del estado inicial, y E_f la energía del estado final. Si se mantiene la dependencia completa en el momento, la integral de solapamiento \mathcal{E}_{fi} es

$$\mathcal{E}_{fi} = \frac{3}{k} \int_0^\infty R_{\alpha'}(r) \left(\frac{qr}{2} j_0\left(\frac{qr}{2}\right) - j_1\left(\frac{qr}{2}\right) \right) R_\alpha(r) r^2 dr \quad (4.49)$$

donde α (α') son los números cuánticos del mesón inicial (final).

Mostramos los resultados para los decays radiativos para el canal $\gamma J/\psi$ en la Tabla 4.9 y para el canal $\gamma\psi(2S)$ en la Tabla 4.10. Inmediatamente nos damos cuenta de que la contribución molecular a la anchura de desintegración es muy pequeña. Así, vemos que para el canal $\gamma J/\psi$ el mecanismo de aniquilación es ligeramente más importante que el VMD. Esto se debe al pequeño valor de la probabilidad de la componente $J/\psi\omega$. Los ratios R_2^M y R_3^M son dos ordenes de magnitud menor. Estos resultados muestran claramente que una interpretación puramente molecular para la partícula en cuestión es incapaz de explicar los datos. Si incluimos la componente $c\bar{c}$ las anchuras son mucho más grandes y esta contribución domina los ratios.

| $E_{bind}(\text{MeV})$ | $\Gamma_{\Psi(2S)\gamma}^{ANN}$ | R_3^M | $\Gamma_{\Psi(2S)\gamma}^{c\bar{c}}$ | $R_3^{c\bar{c}}$ | R_3 |
|------------------------|---------------------------------|---------------------|--------------------------------------|------------------|-------|
| -0,60 | 0,134 | $4,8 \cdot 10^{-3}$ | 9,80 | 0,35 | 0,34 |
| -0,25 | 0,101 | $4,2 \cdot 10^{-3}$ | 6,31 | 0,26 | 0,26 |

Cuadro 4.10: Anchuras de desintegración radiativas (en KeV) para el canal $X(3872) \rightarrow \gamma\psi(2S)$ para dos energías de ligadura diferentes. R_3^M es el ratio incluyendo sólo contribuciones de la parte molecular, $R_3^{c\bar{c}}$ de la componente $c\bar{c}$ y R_3 es el resultado completo. El dato experimental disponible es $R_3 = 1,1 \pm 0,4$ [161].

Encontramos un buen acuerdo con el ratio experimental R_2 . Sin embargo, para el ratio R_3 obtenemos un valor demasiado bajo. Recientemente, la Colaboración Belle [163] realizó una nueva medición de los decays radiativos y no encontró la desintegración $X(3872) \rightarrow \gamma\psi(2S)$. El límite que dan es

$$\frac{\Gamma(X(3872) \rightarrow \gamma\psi(2S))}{\Gamma(X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi)} \leq 2,1 \text{ (at 90\% C.L.)} \quad (4.50)$$

por lo que el valor experimental antiguo para R_3 puede estar sobrevalorado.

Si tomamos el cociente R_3/R_2 en las tablas 4.9 y 4.10 obtenemos, para las dos energías de ligadura, un valor de 1,2, que está dentro del límite superior impuesto por las últimas mediciones.

Secciones eficaces de producción

Las Colaboraciones BaBar y Belle han medido recientemente las secciones eficaces de producción de los canales $\pi^+\pi^-J/\psi$ y $D^0\bar{D}^0\pi^0$ en los decays $B \rightarrow KX(3872) \rightarrow K\pi^+\pi^-J/\psi$ y $B \rightarrow KX(3872) \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0$.

Debido a que la energía de ligadura de la $X(3872)$ es muy pequeña, podemos realizar, para el canal $\pi^+\pi^-J/\psi$, una simple aproximación de Flattè sin considerar la interacción DD^* [136]. Esto se debe a que, como veremos más adelante, la pequeña anchura total de la resonancia hace que la función de resolución adquiera un gran papel en los datos, ocultando la estructura interna del mesón.

Para el canal $D^0\bar{D}^0\pi^0$, sin embargo, necesitaremos una descripción más completa de la resonancia, ya que los datos son sensibles a ésta en la cercanía del threshold. Para ello, utilizaremos el cálculo exacto de las secciones eficaces de producción, que incluye el efecto de la interacción RGM de DD^* y considera el propagador exacto de la resonancia.

Para traducir estos resultados a los datos experimentales debemos determinar la distribución del número de eventos a partir de la sección eficaz diferencial

$$N_{Belle}^{\pi\pi J/\psi}(E) = 2,5[\text{MeV}] \left(\frac{131}{8,3 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow K\pi^+\pi^- J/\psi)}{dE} \quad (4.51)$$

$$N_{Belle}^{D^0\bar{D}^0\pi^0}(E) = 2,0[\text{MeV}] \left(\frac{50,1}{0,80 \cdot 10^{-4}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0)}{dE} \quad (4.52)$$

$$N_{BaBar}^{\pi\pi J/\psi}(E) = 5[\text{MeV}] \left(\frac{93,4}{8,4 \cdot 10^{-6}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow K\pi^+\pi^- J/\psi)}{dE} \quad (4.53)$$

$$N_{BaBar}^{D^0D^{*0}}(E) = 2,0[\text{MeV}] \left(\frac{33,1}{1,67 \cdot 10^{-4}} \right) \frac{dBr(B \rightarrow KD^0\bar{D}^{*0})}{dE}. \quad (4.54)$$

tomando los datos experimentales de las Refs. [164, 165].

En todas las reacciones hemos tomado en cuenta el background, modelándolo como en la Ref. [166]. Para $B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0$, la señal DD^{*0} interfiere con el fondo y por lo tanto se ha introducido una fase $\phi^{Belle} = 0^0$ y $\phi^{BaBar} = 45^0$. También, hay que considerar el branching ratio experimental $B(D^{*0} \rightarrow D^0\pi^0) = 0,62$.

Empezaremos describiendo los resultados del cálculo exacto para las secciones eficaces de producción del canal $D^0D^0\pi^0$. En la Fig. 4.23 comparamos nuestros resultados con los datos de $B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0$ de Belle (a) y (c) y los de $B \rightarrow KD^0\bar{D}^{*0}$ de BaBar (b) y (d). En todas las figuras, las líneas quebradas muestran los resultados sin usar función de resolución, que da cuenta de la anchura de los bins de energía experimentales. La función de resolución para los datos de Belle los tomamos de la propia Colaboración Belle [167] y para los datos de BaBar usaremos la prescripción de la Ref. [166]

Las Figuras (a) y (b) muestran los resultados asumiendo que la producción de la partícula $X(3872)$ se produce a través de su componente $c\bar{c}$, mientras que (c) y (d) a través de la componente molecular, como ya describimos en la sección 3.3.7.

Encontramos una descripción razonable de todos los datos, aunque el ajuste con los datos de $B \rightarrow KD^0D^0\pi^0$ de Belle es mejor. Es necesario utilizar diferentes constantes para la producción de una fuente puntual para los datos de Belle y BaBar. También es importante darse cuenta que en el análisis de Belle la masa de la $X(3872)$ aparece en 3872 MeV , mientras que en los datos de BaBar la resonancia está localizada 3 MeV por encima. La masa de BaBar no coincide con la masa obtenida en nuestro cálculo, lo que puede ser la razón para un peor ajuste.

También encontramos una mejor descripción de los datos de Belle cuando asumimos que el proceso de producción sucede a través de la componente mesónica $c\bar{c}$. Este resultado es coherente con que el proceso de producción de la componente $c\bar{c}$ de la resonancia es más probable que el proceso a través de una componente molecular, que involucra cuatro partículas.

La misma comparación la realizamos en la Fig. 4.24 para los datos de $B \rightarrow K\pi^+\pi^- J/\Psi$ de Belle (a) y BaBar (b) en aproximación de Flattè, que como ya comentamos engloba los dos tipos de procesos de producción. En todas las figuras la línea quebrada muestra

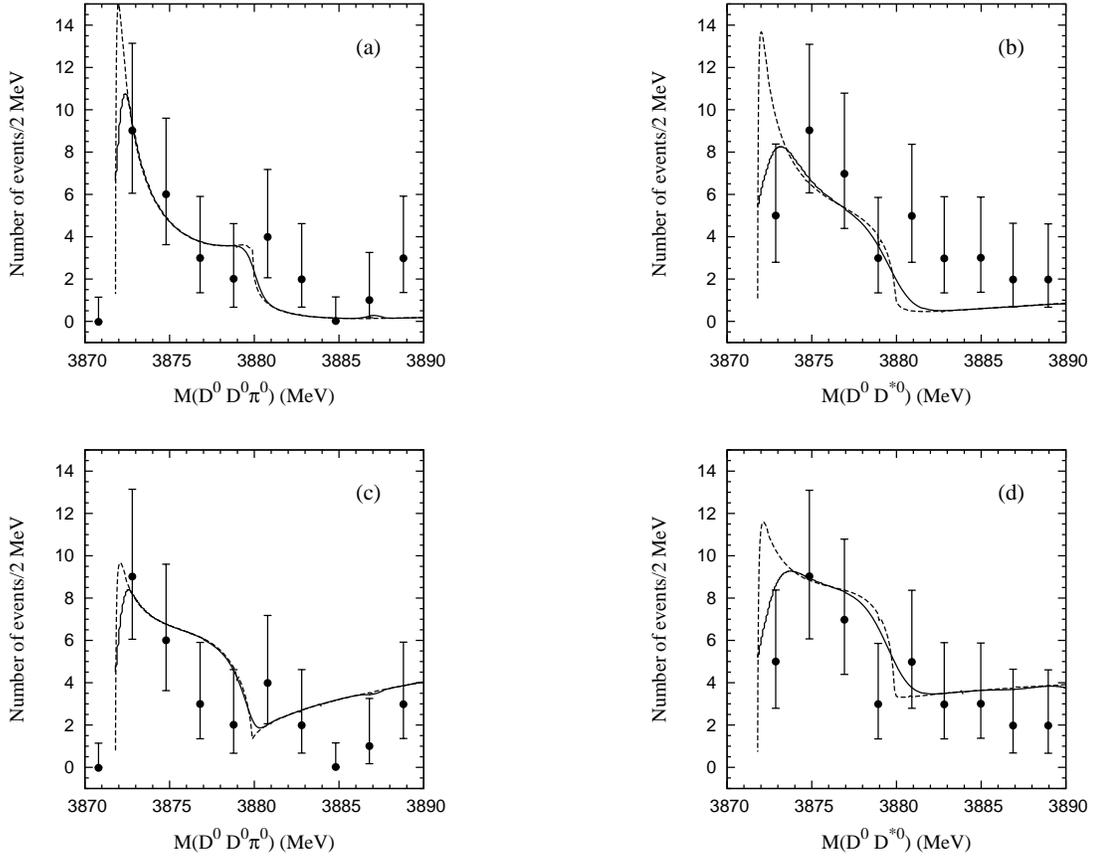


Figura 4.23: Datos de Belle y BaBar para las reacciones $B \rightarrow KD^0\bar{D}^0\pi^0$ (Belle) y $B \rightarrow KD^0\bar{D}^{*0}$ (BaBar). Las figuras (a) (Belle) y (b) (BaBar) muestran el resultado de asumir la producción a través de la componente mesónica, mientras que (c) (Belle) y (d) (BaBar) lo hacen a través de la componente molecular. La línea quebrada representa el cálculo sin función de resolución y la línea sólida con función de resolución. En todos los casos la energía de ligadura de la partícula $X(3872)$ es $0,25 \text{ MeV}$.

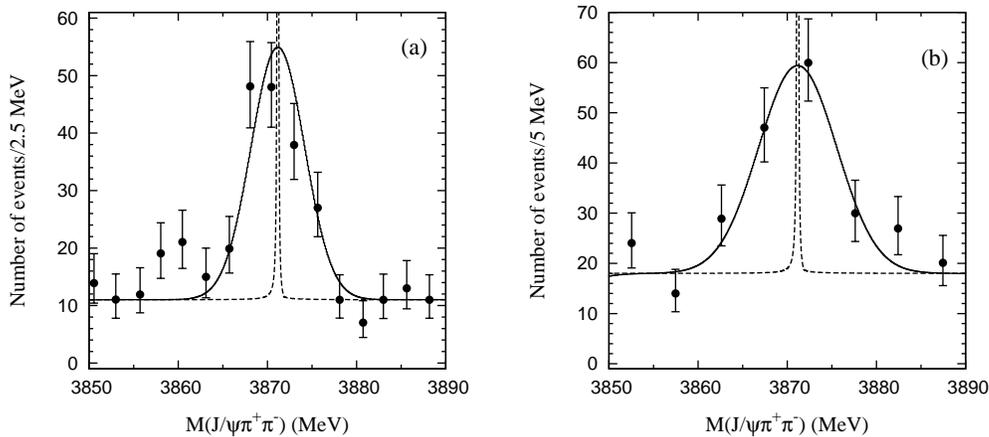


Figura 4.24: Número de eventos del decay $B \rightarrow K\pi^+\pi^- J/\Psi$ medido por Belle (a) y BaBar (b). La línea sólida y la quebrada muestran los resultados con y sin función de resolución, respectivamente, como explicamos en el texto.

los resultados sin función de resolución. La línea sólida da los resultados usando la función de resolución. Como antes, todas las funciones de resolución vienen dadas por las Colaboraciones Belle [167] y BaBar [164].

Los datos de $B \rightarrow K\pi^+\pi^- J/\Psi$ están bien descritos para ambos conjuntos de datos. En este caso, ambas Colaboraciones dan valores similares para la masa de la resonancia, que está en mucho mejor acuerdo con nuestros resultados. Como vemos, la utilización de la aproximación de Flatté para este caso está justificada, pues los resultados sin función de resolución son muy estrechos, lo que implica que la anchura de la partícula X es menor que la resolución (el bin de energía) utilizada por los experimentos.

Resonancia $X(3940)$

En la misma región de energía de la $X(3872)$, la Colaboración Belle ha comunicado la observación de tres estructuras resonantes, denominadas $X(3940)$, $Y(3940)$ y $Z(3930)$. La última, observada en Belle en la reacción $\gamma\gamma \rightarrow D\bar{D}$ [168] ya ha sido incluida en el PDG como la partícula $\chi_{c2}(2P)$.

La partícula $Y(3940)$ aparece como un aumento en el threshold en la distribución de masa invariante de $J/\psi\omega$ del decay $B \rightarrow J/\psi\omega K$ [158]. Nos centraremos en ella más adelante.

Por último, la partícula $X(3940)$ ha sido vista como un pico en el espectro de masas de la J/ψ producida en colisiones e^+e^- . Su canal de desintegración principal es DD^* [169, 170]. El estado tiene una masa Breit-Wigner de $3943 \pm 6 \pm 6 \text{ MeV}$ y una anchura menor de 52 MeV al 90 %C.L.. Resulta natural interpretar esta partícula con el estado $2P c\bar{c}$.

Si estudiamos la región por encima del threshold DD^* en el sector 1^{++} encontramos, junto a la molécula, un estado con una probabilidad alta de $c\bar{c}(2P)$, que podemos identificar con la resonancia $X(3940)$. Este estado, que decae principalmente en el canal DD^* , es un buen candidato para el estado del charmonio $\chi_{c1}(2P)$.

Para obtener sus propiedades hemos buscado la resonancia como un polo en el plano complejo, utilizando para ello los dos valores del parámetro γ del modelo 3P_0 utilizados para caracterizar la partícula $X(3872)$. Podemos apreciar las probabilidades de los diferentes canales en la Fig. 4.11 y sus anchuras parciales a diferentes canales en la Fig. 4.12.

| γ | Masa | Γ | $c\bar{c}(2^3P_1)$ | D^0D^{*0} | $D^\pm D^{*\mp}$ | $J/\psi\rho$ | $J/\psi\omega$ |
|----------|--------|----------|--------------------|-------------|------------------|--------------|----------------|
| 0,231 | 3942,5 | 93,8 | 61,02 | 18,57 | 16,86 | 0,01 | 3,54 |
| 0,226 | 3941,8 | 89,9 | 61,09 | 18,53 | 16,85 | 0,01 | 3,52 |

Cuadro 4.11: Masa y anchura total (en MeV) y probabilidades de los canales (en %) para el estado $X(3940)$ para dos valores del parámetro γ del modelo 3P_0 .

| γ | D^0D^{*0} | $D^\pm D^{*\mp}$ | $J/\psi\rho$ | $J/\psi\omega$ |
|----------|-------------|------------------|--------------|----------------|
| 0,231 | 41,82 | 41,91 | 0,04 | 10,01 |
| 0,226 | 40,15 | 40,28 | 0,03 | 9,45 |

Cuadro 4.12: Anchuras parciales (en MeV) de los canales para el estado $X(3940)$ para dos valores del parámetro γ del modelo 3P_0 .

Como vemos, la partícula decae principalmente a través de DD^* , donde, como vemos, hay prácticamente la misma probabilidad de la componente neutra y la cargada. Esto indica que la rotura de isospin ha desaparecido casi por completo; quedando sólo la componente de isospin cero, al estar la resonancia lo suficientemente alejada del threshold.

Como consecuencia de esto, la probabilidad y anchura del canal $J/\psi\rho$ son muy pequeñas. El decaimiento a $J/\psi\omega$ es pequeño comparado con la del par DD^* , pero suficientemente grande para ser un buen canal para encontrar a la resonancia.

En este caso, al contrario que con el estado $X(3872)$, la dependencia en el parámetro γ no es tan importante, debido a que se encuentra lejos de los thresholds, y su efecto ya no es tan crítico.

4.3.2. El sector $J^{PC} = 0^{++}$: Las resonancias $X(3915)$ e $Y(3940)$

La resonancia $Y(3940)$ tiene una historia complicada. Belle anunció su descubrimiento [158] en el subsistema $J\psi\omega$ del proceso $B \rightarrow K\pi\pi J/\psi$. La masa y anchura se han determinado en $3943 \pm 11 \pm 13 \text{ MeV}$ y $87 \pm 22 \pm 26 \text{ MeV}$, respectivamente. El estado no

ha sido observado en los canales de desintegración $Y \rightarrow D\bar{D}$ o $D\bar{D}^*$. Este estado, llamado $Y(3940)$, no comparte ni la producción ni los canales de desintegración de la partícula $X(3940)$, y por lo tanto estos estados posiblemente sean diferentes.

Esta observación fue confirmada por BaBar [171] pero con una masa inferior ($3914,6_{-3,4}^{+3,8}$ ($stat$) $\pm 2,0$ ($syst$) MeV) y anchura 34_{-8}^{+12} ($stat$) ± 5 ($syst$) MeV , aunque siguió manteniéndose la denominación $Y(3940)$. Posteriormente, Belle anunció el descubrimiento de una nueva resonancia, llamada $X(3915)$, en el proceso $\gamma\gamma \rightarrow J/\psi\omega$ con una masa 3914 ± 3 ($stat$) ± 2 ($syst$) MeV y anchura 17 ± 10 ($stat$) ± 5 ($syst$) MeV [172]. En la actualidad no está claro si estas dos resonancias son las mismas o no, aunque algunos autores [173] las consideran como una resonancia a pesar de la diferencia de anchuras.

Entre las explicaciones al estado $Y(3940)$, se analizó la posibilidad de que fuera un híbrido. Sus modos de desintegración inusuales y los branching fraction son consistentes con una estructura híbrida [174–176]. Sin embargo, una masa de menos de $4000 MeV$ está en conflicto con los cálculos de *quenched lattice* para el espectro bajo de híbridos [177]. Otra posible explicación recurre a los resultados de CDF, sugiriendo que la partícula $Y(3940)$ podrían ser una molécula hadrónica D^*D^* con números cuánticos $J^{PC} = 0^{++}$ [178].

Es obvio que se necesitan más datos y cálculos teóricos para poder asegurar la estructura de estos estados. Aunque actualmente los datos de $X(3915)$ y $Y(3940)$ son todavía preliminares y la igualdad de las anteriores partículas necesita más estudio, merece la pena estudiar las posibles asignaciones, sobre todo debido a la posibilidad de encontrar nuevas partículas. Por ello, en esta sección, estudiaremos la opción molecular en el sector $J^{PC} = 0^{++}$.

Tomaremos los thresholds más cercanos, con masas:

$$\begin{aligned}
 D\bar{D} &\longrightarrow M = 3736,050 MeV, \\
 J/\psi\omega &\longrightarrow M = 3879,566 MeV, \\
 D_s\bar{D}_s &\longrightarrow M = 3936,970 MeV, \\
 J/\psi\phi &\longrightarrow M = 4116,371 MeV.
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

El hecho de tomar sólo los thresholds cercanos se apoya en el hecho de que el potencial apantallado ya toma en cuenta el efecto de los canales abiertos sobre el espectro mesónico [81]. Sin embargo, la dinámica de dichos sistemas puede cambiar debido a la presencia de thresholds cercanos, apareciendo fenómenos no perturbativos como estados moleculares o resonancias.

En este caso, estudiaremos el efecto de los thresholds anteriores sobre el estado mesónico $c\bar{c}(2^3P_0)$ con masa desnuda teórica $M = 3908,984 MeV$. Interesa en este caso estudiar el efecto sobre el estado teórico a medida que vamos incorporando thresholds. Los resultados se muestran en la figura 4.13. Los umbrales $D\bar{D}$ y $J/\psi\omega$ están por debajo de la masa teórica, y por lo tanto, suben la masa del estado desnudo. Al incorporar el umbral $D_s\bar{D}_s$, sin embargo, que se encuentra pocos MeV por encima del estado desnudo, observamos que aparece una nueva resonancia por encima de dicho threshold. Este estado, con una

anchura grande, aparece debido a la apertura del canal $D_s\bar{D}_s$, y es un efecto puramente no perturbativo. Aquí podemos observar la importancia del efecto de los canales mesón-mesón sobre el espectro del charmonio, sobre todo aquellos canales cercanos a estados simples $c\bar{c}$, que pueden tener una influencia inesperada sobre la evolución de los estados al interaccionar con la dinámica de los estados moleculares.

| $Masa (MeV)$ | $\mathcal{P}_{(2^3P_0)}$ | $\mathcal{P}_{(DD)}$ | $\mathcal{P}_{(J/\psi\omega)}$ | $\mathcal{P}_{(D_sD_s)}$ | $\mathcal{P}_{(J/\psi\phi)}$ | $\Gamma_{(DD)}$ | $\Gamma_{(J/\psi\omega)}$ | $\Gamma_{(D_sD_s)}$ |
|---|--------------------------|----------------------|--------------------------------|--------------------------|------------------------------|-----------------|---------------------------|---------------------|
| <i>Threshold DD.</i> | | | | | | | | |
| $3920,81 - i 5,33$ | 40,37 | 59,63 | – | – | – | 10,65 | – | – |
| <i>Threshold DD + J/ψω.</i> | | | | | | | | |
| $3919,50 - i 4,95$ | 40,60 | 54,73 | 4,67 | – | – | 8,85 | 1,04 | – |
| <i>Threshold DD + J/ψω + D_sD_s.</i> | | | | | | | | |
| $3896,29 - i 2,18$ | 34,39 | 47,05 | 9,07 | 9,49 | – | 3,52 | 0,84 | – |
| $3966,21 - i 98,18$ | 59,51 | 34,65 | 0,18 | 5,67 | – | 36,54 | 4,08 | 155,74 |
| <i>Threshold DD + J/ψω + D_sD_s + J/ψφ.</i> | | | | | | | | |
| $3896,05 - i 2,10$ | 34,22 | 46,67 | 9,41 | 9,67 | 0,03 | 3,37 | 0,83 | – |
| $3970,07 - i 94,67$ | 57,27 | 35,32 | 0,15 | 5,72 | 1,54 | 38,69 | 2,89 | 147,76 |

Cuadro 4.13: Masa de los polos encontrados, juto con la probabilidad y anchura de los canales. El cálculo se ha realizado con un sólo estado $c\bar{c}$. Vemos que el efecto de incorporar el threshold D_sD_s es la aparición de un nuevo estado.

Resulta interesante observar que el estado de menor masa es el estado más estrecho como predicen los datos experimentales. Por lo tanto, el cálculo demuestra que las resonancias denominadas $X(3915)$ y $Y(3940)$ pueden ser dos resonancias distintas como señalan las medidas experimentales de la Colaboración Belle.

4.3.3. El sector $J^{PC} = 1^{--}$

La física de la aniquilación e^+e^- en la región de energía de $3 - 5 GeV$ es interesante porque fija los números cuánticos del canal emergente a $J^{PC} = 1^{--}$, y por ello atrae la atención de estudios teóricos y experimentales. La física en esta región de energía involucra varias resonancias vectoriales bien establecidas, como J/ψ , $\psi(2S)$, $\psi(3770)$, $\psi(4040)$ y $\psi(4160)$, que son estados ligados del quark-antiquark $c\bar{c}$.

Recientemente, las llamadas factorías-B han realizado muchas medidas de la sección eficaz para la aniquilación de e^+e^- a pares de mesones encantados usando *initial-state radiation* (ISR). Estudiando la producción y desintegraciones de estas resonancias podemos profundizar en nuestro conocimiento de la dinámica de las interacciones entre quarks.

Principalmente nos centraremos en dos regiones de energía: un poco por encima del threshold $D\bar{D}$ y la región de las resonancias $\psi(4040) - \psi(4160)$.

Partícula $\psi(3770)$

La estructura llamada $\psi(3770)$, producida en aniquilación e^+e^- cerca de $3,770\text{ GeV}$ encontrada por la Colaboración MARK-I [179] ha sido principalmente interpretada como un charmonio con una onda 1^3D_1 dominante con una pequeña mezcla de onda 2^3S_1 . Aunque con menor repercusión, se han propuesto otras explicaciones para esta estructura, como tetraquarks en onda P o resonancias del threshold $D\bar{D}$. Historicamente, el descubrimiento de la resonancia por la Colaboración MARK-I y la medida de sus propiedades por MARK-II [180] nunca descartaron la interpretación molecular de esta estructura. Para entender mejor la naturaleza de la resonancia $\psi(3770)$ necesitamos estudiar sus canales de desintegración. La resonancia $\psi(3770)$ tiene una masa justo por encima del threshold $D\bar{D}$. Por ello, se cree que su decay dominante será el mismo par $D\bar{D}$. Todos los modos de desintegración diferentes de $D\bar{D}$ sólo muestran un branching ratio del orden del $10^{-3} - 10^{-4}$ [146, 181, 182]. La suma de todos estos decay rates medidos deja el branching ratio a $D\bar{D}$ en $\mathcal{B}_{D\bar{D}} = 93_{-9}^{+8}\%$.

En colisiones e^+e^- las propiedades de la resonancia se miden a través del proceso de scattering $e^+e^- \rightarrow \psi(3770) \rightarrow f$, donde f puede ser cualquier estado final, como $D\bar{D}$ u otros hadrones. Existen medidas de las Colaboraciones BES [183] y Belle [184] para la sección eficaz $e^+e^- \rightarrow D\bar{D}$ en la región de energía $3,74 - 4,4\text{ GeV}$, con buen acuerdo entre ambas.

En esta sección estudiaremos dichos datos en el marco de estudio de resonancias. De esta forma, incluimos la resonancia $\psi(3770)$, con masa teórica $M = 3796,249\text{ MeV}$ como un $c\bar{c}(1^3D_1)$ y los thresholds más cercanos $D^0\bar{D}^0$ y $D^+\bar{D}^-$, en base de carga, con masas

$$\begin{aligned} M_{D^0\bar{D}^0} &= 3729,680\text{ MeV}, \\ M_{D^+\bar{D}^-} &= 3739,420\text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

que se encontrarán en onda parcial relativa 1P_1 .

Nuestro objetivo principal, a parte de explicar los resultados experimentales de masa, anchura y branching fractions, es analizar la validez del valor del parámetro γ del 3P_0 usado en nuestro esquema. La parametrización original de γ se basaba en un estudio perturbativo de la anchura de desintegración $\psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$, que es la única desintegración fuerte bien establecida. Podemos pensar que, debido a que el threshold $D\bar{D}$ se encuentra tan cerca en energías, los efectos de interacción en el estado final (FSI) pueden ser importantes.

La masa experimental y la anchura proporcionadas por el PDG actualmente son:

$$M_X = 3772,92 \pm 0,35\text{ MeV}, \quad (4.57)$$

$$\Gamma_X = 27,3 \pm 1,0\text{ MeV}. \quad (4.58)$$

lo que, unido con el branching de $D\bar{D}$ nos da un valor para la anchura fuerte de $\Gamma_{D\bar{D}} = 25,3 \pm 3,2\text{ MeV}$.

| γ | ΔM_{th} | Masa | Γ | $\mathcal{P}_{(1^3D_1)}$ | $\mathcal{P}_{(D^0D^0)}$ | $\mathcal{P}_{(D^+D^-)}$ | $\mathcal{B}_{(D^0D^0)}$ | $\mathcal{B}_{(D^+D^-)}$ |
|----------|-----------------|---------|----------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0,258 | 8,0 | 3772,96 | 19,68 | 49,35 | 28,05 | 22,59 | 56,3 | 43,7 |
| 0,296 | 19,5 | 3772,90 | 25,96 | 49,28 | 27,89 | 22,82 | 56,0 | 44,0 |

Cuadro 4.14: Resultados para $\psi(3770)$ en base de carga. Presentamos la masa y anchura (en MeV) y las probabilidades y branching fractions (en %) para diferentes situaciones. Hemos denotado como γ al parámetro del modelo 3P_0 y ΔM_{th} a la renormalización de la masa teórica desnuda para obtener la masa y anchura experimentales.

Un aspecto importante a la hora de describir correctamente la anchura es el espacio de fases utilizado. Por supuesto, la anchura total y las parciales dependerán en gran medida en la masa del polo encontrado. Sin embargo, en un primer momento, el cálculo nos da un mass shift mayor del necesario, lo que también modifica la anchura. Para conseguir una medida más acertada debemos renormalizar ligeramente la masa teórica desnuda en un factor ΔM_{th} para obtener un espacio de fases correcto.

Encontramos los resultados del cálculo en la Tabla 4.14, para dos valores del parámetro γ : el original $\gamma = 0,258$ y el mismo aumentado un 115 % hasta $\gamma = 0,296$. Las renormalizaciones utilizadas varían ligeramente para adecuar la masa al dato experimental. Vemos que de esta forma, la anchura entra dentro del rango de la experimental, y, a su vez, obtenemos datos de los branching a estados cargados que encajan con las medidas empíricas de $\mathcal{B}_{(D^0D^0)}^{(exp)} = 52 \pm 5$ y $\mathcal{B}_{(D^+D^-)}^{(exp)} = 41 \pm 4$ (PDG). Conviene resaltar que la probabilidad de la componente $c\bar{c}$ es sólo del 50 %, siendo el resto molécula. Este fuerte acoplamiento con el sector $D\bar{D}$ se debe en gran medida a la cercanía del threshold del canal mesón-mesón anterior al estado $\psi(3770)$. Esto provoca que sea el principal canal de desintegración del estado y que su componente molecular aumente.

Una vez obtenidos estos resultados, mostramos las gráficas de producción en colisiones e^+e^- en la Fig. 4.25 para $D^0\bar{D}^0$ y Fig. 4.26 para D^+D^- para los dos valores obtenidos anteriormente. En las gráficas (a) y (c) presentamos los resultados para el valor original de $\gamma = 0,258$, mientras que en las gráficas (b) y (d) el valor utilizado es $\gamma = 0,296$. Observamos que ambos datos reproducen la gráfica correctamente, si bien el valor de $\gamma = 0,296$ (gráficas (b) y (d)) parece ajustarse mejor a los datos experimentales que apuntan a una anchura de $\Gamma_{D\bar{D}} = 25,3 \pm 3,2 \text{ MeV}$. Por supuesto, la razón de este mejor ajuste es que la anchura total predicha por dicho valor de γ está en mejor acuerdo con este valor experimental que la anchura predicha por el valor original de γ . Este último, al ser más bajo, hace que la gráfica de sección eficaz sea mayor, dando una peor descripción de las medidas experimentales.

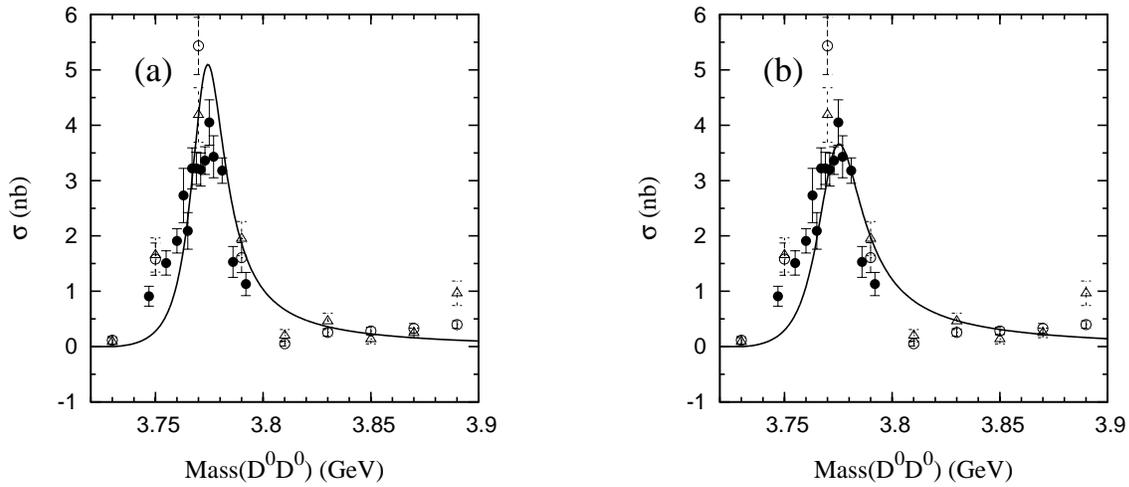


Figura 4.25: Sección eficaz de producción en colisiones $e^+e^- \rightarrow D^0\bar{D}^0$, a través de la resonancia $\psi(3770)$, para dos valores diferentes del parámetro γ del modelo 3P_0 (el original $\gamma = 0,258$ en (a) y $\gamma = 0,296$ en (b)). Con una línea sólida presentamos el resultado teórico. Datos experimentales de Ref. [183] (puntos negros), Ref. [184] (puntos blancos) y Ref. [185] (triángulos blancos).

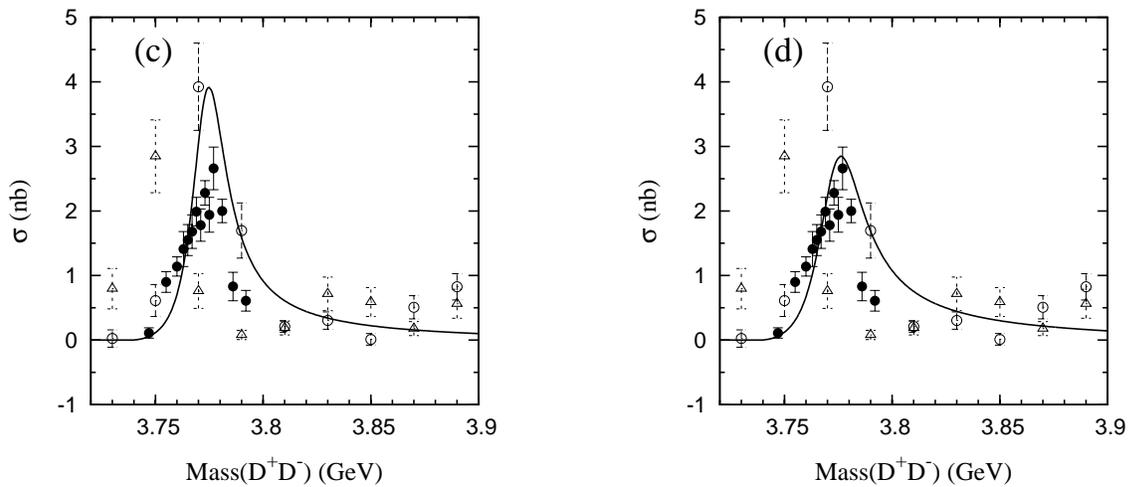


Figura 4.26: Sección eficaz de producción en colisiones $e^+e^- \rightarrow D^+\bar{D}^-$, a través de la resonancia $\psi(3770)$, para dos valores diferentes del parámetro γ del modelo 3P_0 (el original $\gamma = 0,258$ en (a) y $\gamma = 0,296$ en (b)). Presentamos el mismo convenio que en la Fig. 4.25.

Partículas $Y(4008) - \psi(4040) - \psi(4160)$

Antes del descubrimiento de la $X(3872)$ sólo había cuatro estados del charmonio bien establecidos por encima del threshold $D\bar{D}$. Estos son, $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4160)$ y $\psi(4415)$. Todos tienen números cuánticos $J^{PC} = 1^{--}$ y han sido asignados tradicionalmente como $\psi(1^3D_1)$, $\psi(3^3S_1)$, $\psi(2^3D_1)$ y $\psi(4^3S_1)$ respectivamente.

Debido a sus números cuánticos y a sus energías es de esperar que las resonancias anteriormente citadas decaigan principalmente a estados $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ y algunos a $D_s^{(*)}\bar{D}_s^{(*)}$. En Ref. [186] se realizó un estudio sistemático de todos los canales $D^{(*)}\bar{D}^{(*)}$ obteniendo ratios entre los decays que no coincidían con las predicciones de diversos modelos, entre ellos el 3P_0 . Una posible explicación de esta discrepancia es que los efectos de acoplamiento y mezcla son importantes en este sector, en cuyo caso nuestro mecanismo sería útil para describir correctamente las desintegraciones. Por ello, en esta sección realizaremos un estudio del sector permitiendo acoplamientos, y estudiando las resonancias resultantes de la dinámica del sistema multiquark.

Aparte de estas estructuras, la Colaboración Belle [187] encontró una estructura ancha cerca de $4,05 GeV/c^2$, a la que llamaron $Y(4008)$, cuando analizaban la distribución $J/\psi\pi^+\pi^-$ en *initial state radiation* (ISR). Se descubrió junto a la resonancia $Y(4260)$, cuando vieron que ajustando con dos amplitudes Breit-Wigner interfiriendo entre si describen mejor los datos que asumir una sola resonancia, especialmente para la baja energía. Sin embargo, lejos de confirmar este descubrimiento, la Colaboración BaBar presentó una actualización del sector 1^{--} en un estudio de la resonancia $Y(4260)$, y no encontró la estructura ancha alrededor de $4,0 GeV/c^2$ [188]. Por lo tanto, la existencia de esta resonancia permanece como un tema pendiente, abierto a esfuerzos teóricos y experimentales.

La masa y anchura de esta resonancia $Y(4008)$ viene dada por [187],

$$\begin{aligned} M_{Y(4008)} &= 4008 \pm 40_{-28}^{+114} MeV, \\ \Gamma_{Y(4008)} &= 226 \pm 44 \pm 87 MeV. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Aunque todavía no está confirmado, dicho estado plantea problemas con su asignación. Una posibilidad es que este estado esté relacionado con el estado $\psi(4040)$ e incluso con el $\psi(4160)$, debido a su proximidad. Otra explicación es que tenga una estructura molecular, debido a su cercanía al threshold $D^*\bar{D}^*$. Dado que en este caso el número de thresholds y estados cercanos es grande nos encontramos con un problema interesante para estudiar la dinámica de las resonancias.

En este caso, dado que uno de los puntos interesantes es describir los ratios experimentales de los decays, el método será algo diferente a lo habitual. En vez de incorporar solamente los thresholds más cercanos debemos considerar todos los thresholds medidos como estado final, esto es, $D\bar{D}$, $D\bar{D}^*$, $D^*\bar{D}^*$, $D_s\bar{D}_s$, $D_s\bar{D}_s^*$ y $D_s^*\bar{D}_s^*$. De esta manera podremos tener una lectura directa tanto de la anchura total como de las anchuras parciales a cada canal.

Los estados del charmonio desnudos cuya dinámica estudiaremos son los estados

$c\bar{c}(3^3S_1)$ y $c\bar{c}(2^3D_1)$, con masas teóricas

$$\begin{aligned} c\bar{c}(3^3S_1) &\longrightarrow M = 4097,615 \text{ MeV}, \\ c\bar{c}(2^3D_1) &\longrightarrow M = 4152,715 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

el estado inmediatamente anterior es el identificado como $\psi(3770)$. Queda muy lejos de los dos propuestos y por lo tanto no influirá en el sistema.

En la tabla 4.15 vemos las probabilidades para los estados resultantes del cálculo. Observamos que aparece un nuevo estado por debajo del threshold de $D^*\bar{D}^*$, que identificamos como la partícula $Y(4008)$, con componente principalmente de $c\bar{c}(3^3S_1)$ y $D\bar{D}^*$. Resulta curioso observar cómo la componente $D^*\bar{D}^*$, más cercana al estado, es menor que la $D\bar{D}^*$. Esto es debido a las propiedades de las ondas parciales relativas de $D^*\bar{D}^*$. En principio, las ondas parciales de $D^*\bar{D}^*$ necesarias para estudiar el estado $Y(4008)$ son $^1P_1 - ^5P_1$. Es decir, nos encontraríamos con una molécula en onda P . A primera vista podríamos descartarla alegando que las moléculas en onda P son complicadas de formar por la repulsión centrífuga, pero debido a la proximidad con el threshold, mayor de lo habitual en otros sectores, la atracción del sistema mesón-mesón es suficientemente grande para invertir el caracter del potencial.

| $M \text{ (MeV)}$ | $\mathcal{P}_{(3^3S_1)}$ | $\mathcal{P}_{(2^3D_1)}$ | $\mathcal{P}_{(DD)}$ | $\mathcal{P}_{(DD^*)}$ | $\mathcal{P}_{(D^*D^*)}$ | $\mathcal{P}_{(D_sD_s)}$ | $\mathcal{P}_{(D_sD_s^*)}$ | $\mathcal{P}_{(D_s^*D_s^*)}$ |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|------------------------------|
| $3994,6 - i 11,60$ | 31,56 | 3,00 | 2,49 | 36,44 | 17,75 | 7,53 | 0,52 | 0,71 |
| $4048,4 - i 7,54$ | 0,92 | 36,15 | 2,99 | 23,49 | 25,81 | 8,86 | 0,92 | 0,85 |
| $4123,9 - i 71,11$ | 59,01 | 0,98 | 2,13 | 6,84 | 19,19 | 0,75 | 3,37 | 7,73 |

Cuadro 4.15: Masas y probabilidades para el sistema 1^{--} en la región de 4 GeV. Cálculo exacto con thresholds $DD + DD^* + D^*D^* + D_sD_s + D_sD_s^* + D_s^*D_s^*$ y dos estados $c\bar{c}$ teóricos.

Un resultado sorprendente del cálculo es la inversión de estados entre la $\psi(4040)$, que pasaría a ser mayoritariamente $c\bar{c}(2^3D_1)$ y $\psi(4160)$, que sería ahora principalmente $c\bar{c}(3^3S_1)$. Viendo las similitudes con el caso del sector 0^{++} , podríamos pensar que se trata de un efecto no perturbativo debido a los canales más cercanos a los estados teóricos desnudos. Para analizar el posible origen de esta inversión hemos simplificado el cálculo a los dos canales más próximos $D^*D^* + D_sD_s^*$, hemos eliminado el potencial mesón-mesón proveniente del modelo de quarks constituyente y estudiamos sólo el efecto de acoplamiento con 3P_0 . En la Fig. 4.27 mostramos la evolución de los polos en el plano complejo con el valor del parámetro γ del 3P_0 , que nos da la “fuerza” de creación de pares del vacío.

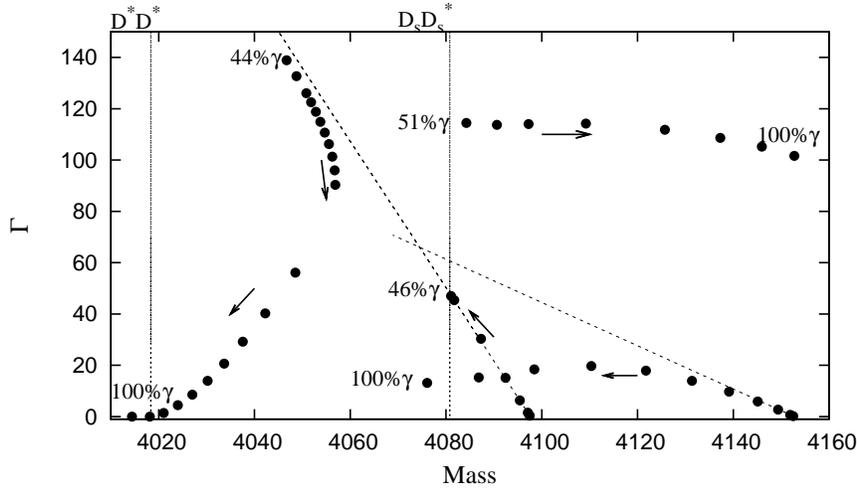


Figura 4.27: Evolución de los polos con el parámetro γ para el caso de dos thresholds $D^*D^* + D_s D_s^*$, dos estados teóricos $c\bar{c}$, y sin considerar interacción CQM. Las líneas verticales representan las masas de los thresholds. Las líneas quebradas marcan la evolución de los polos en el cálculo perturbativo, mientras los puntos sólidos representan la evolución de los mismos en el cálculo no perturbativo. Representamos con flechas el sentido que siguen los polos al aumentar la γ , y su porcentaje en algunos puntos críticos.

De la figura podemos sacar la conclusión de que la apertura del canal $D_s \bar{D}_s^*$ es la causante de la inversión de estados teóricos. Esto, sin embargo, podría tratarse de un artificio provocado por el modelo 3P_0 o por el mismo mecanismo de estados acoplados. Para eliminar toda duda respecto al método calcularemos los ratios experimentales, que relacionan entre si los decays medidos. En la tabla 4.16 mostramos las anchuras parciales de los estados para el cálculo original con todos los thresholds incluidos y la interacción mesón-mesón añadida. Para el cálculo de las anchuras parciales hemos utilizado las masas experimentales y un espacio de fases relativista, para reducir posibles incertidumbres a la hora de medir los ratios. Los resultados de los ratios los mostramos en la tabla 4.17

| M | Γ | $\Gamma(DD)$ | $\Gamma(DD^*)$ | $\Gamma(D^*D^*)$ | $\Gamma(D_s D_s)$ | $\Gamma(D_s D_s^*)$ |
|--------|----------|--------------|----------------|------------------|-------------------|---------------------|
| 3994,6 | 23,37 | 0,12 | 19,09 | — | 4,16 | — |
| 4048,4 | 15,09 | 0,51 | 7,24 | 4,42 | 2,92 | — |
| 4123,9 | 142,23 | 4,73 | 7,51 | 100,03 | 3,82 | 26,15 |

Cuadro 4.16: Anchuras parciales para el sistema 1^{--} en la región de 4 GeV. Para los datos hemos usado un espacio de fases relativista con masa experimental. Cálculo exacto con $DD + DD^* + D^*D^* + D_s D_s + D_s D_s^* + D_s^* D_s^*$ y dos estados $c\bar{c}$.

Podemos observar que nuestros resultados dan una descripción correcta de todos los ratios, mejorando enormemente los resultados del modelo simple 3P_0 y C^3 , que presenta desacuerdos de órdenes de magnitud.

Como conclusión, el sector 1^{--} a esta energía resulta ser un marco ideal para estudiar efectos no perturbativos en el espectro del charmonio, y se necesitan más esfuerzos teóricos y experimentales para desvelar sus peculiaridades.

| Ratio | C^3 [80] | 3P_0 [58] | 3P_0 [189] | Resultado teórico | Medida experimental |
|--|------------|----------------|-----------------|-------------------|--------------------------|
| $\frac{\mathcal{B}(\psi(4040) \rightarrow DD)}{\mathcal{B}(\psi(4040) \rightarrow DD^*)}$ | 0,0003 | 0,21 | 0,003 | 0,07 | $0,24 \pm 0,05 \pm 0,12$ |
| $\frac{\mathcal{B}(\psi(4040) \rightarrow D^* \bar{D}^*)}{\mathcal{B}(\psi(4040) \rightarrow DD^*)}$ | 1,0 | 3,70 | 1,0 | 0,61 | $0,18 \pm 0,14 \pm 0,03$ |
| $\frac{\mathcal{B}(\psi(4160) \rightarrow DD)}{\mathcal{B}(\psi(4160) \rightarrow DD^*)}$ | 0,008 | 0,27 | 0,46 | 0,05 | $0,02 \pm 0,03 \pm 0,02$ |
| $\frac{\mathcal{B}(\psi(4160) \rightarrow D^* \bar{D}^*)}{\mathcal{B}(\psi(4160) \rightarrow DD^*)}$ | 0,16 | 0,03 | 0,011 | 0,08 | $0,34 \pm 0,14 \pm 0,05$ |

Cuadro 4.17: Ratios de los branching fractions para las dos resonancias ψ . El primer error es estadístico, el segundo sistemático.

El hecho de que los estados $c\bar{c}$ se vistan con componentes moleculares hace plantearse si aparecerán nuevos canales de desintegración antes suprimidos. En un artículo reciente, Voloshin [190] analiza la rotura de la simetría heavy quark debido a la proximidad de thresholds en el sector 1^{--} . Según su razonamiento, un ejemplo lo vemos con los estados $\Psi(2S)$ y $\psi(4040)$. Así, mientras que para $\Psi(2S)$ el decay a $J/\psi\pi\pi$ es diez veces mayor que a $J/\psi\eta$, para la $\psi(4040)$ las cotas son del mismo orden. Por lo tanto, el efecto de esta rotura es el aumento del valor de decays muy suprimidos en estados $c\bar{c}$ puros, como $J/\psi\eta$ y $\eta_c\omega$. La medida de estas desintegraciones implicaría la existencia una estructura molecular en la función de onda de los estados mezclados.

Como nota final, recientemente BaBar [185] y Belle [184] han descrito la aparición de un pico en ISR con masa 3943 ± 21 y anchura 52 ± 11 , al que han denominado $G(3900)$. La naturaleza de este pico y su relación con la $Y(4008)$ se desconoce, aunque algunos autores [67] aseguran que no es necesario tener una resonancia para explicar la $G(3900)$ ya que podría tratarse de un efecto de thresholds. Cabe la posibilidad de que el estado $G(3900)$ recientemente descrito sea la resonancia que encontramos, y que de alguna manera esté relacionada con el estado $Y(4008)$, si su existencia se confirma. El rango de masas y los canales de desintegración encontrados para la $G(3900)$ son los mismos que para nuestro estado molecular, y su aparición debido a la dinámica de thresholds encaja con la hipótesis de los autores para la $G(3900)$. Lo que sí podemos concluir es que el estudio no perturbativo de canales puede explicar propiedades del espectro que de otra forma permanecerían ocultas.

4.4. Estructuras moleculares en el espectro de mesones *open-charm*

Los mesones D_s con onda P han resultado ser un sistema excelente para estudiar QCD a bajas energías. La combinación de un quark ligero y uno pesado nos permite utilizar las ventajas de aproximaciones como HQS (Heavy Quark Symmetry), que supone que la dinámica del sistema la lleva el spin del quark ligero, mientras que el pesado actúa como espectador.

Con esta asunción, el quark ligero del sistema $c\bar{s}$ puede caracterizarse por el momento angular $j_q = s_q + L$, donde s_q es el spin del quark ligero y L el momento angular orbital. Para obtener el momento angular total, debemos acoplar j_q con el spin del quark pesado S_Q . Esta propiedad nos permite agrupar los mesones en onda P en dobletes, categorizados por $j_q = \frac{1}{2}$ con $J^P = 0^+, 1^+$, y $j_q = \frac{3}{2}$ con $J^P = 1^+, 2^+$. Cuando la masa del quark pesado tiende a infinito, los dobletes están degenerados. Lo que es más, las desintegraciones fuertes de los mesones $j_q = \frac{3}{2}$ se realizan exclusivamente a través de onda D , mientras que los mesones $j_q = \frac{1}{2}$ lo hacen por onda S . Debido a la supresión por la barrera centrífuga, los mesones que decaen por onda D se esperan que sean estrechos, mientras que los que van por onda S serán anchos.

Más interesantes son, sin embargo, las propiedades mostradas por los experimentos. En 2003, la Colaboración BaBar anunció la observación del estado $D_{s0}^*(2317)$ [191], confirmado poco después por la Colaboración CLEO [192], que reportó otro mesón *charm-strange* llamado $D_{s1}(2460)$. Ambos estados fueron medidos por la Colaboración Belle [193, 194]. Sus resultados son consistentes con la asignación de spin-paridad $J^P = 0^+$ para $D_{s0}^*(2317)$ y $J^P = 1^+$ para $D_{s1}(2460)$.

Aunque algunas propiedades de los estados $j_q = \frac{3}{2}$ son consistentes con los datos de los mesones $D_{s1}(2536)$ y $D_{s1}(2573)$ descubiertos previamente [146], las propiedades de $D_{s0}^*(2317)$ y $D_{s1}(2460)$ no encajan con las predicciones teóricas de los estados $j_q = \frac{1}{2}$.

Recientemente, nuevos datos relacionados con el mesón $D_{s1}(2536)$ han aparecido. La Colaboración BaBar ha realizado una medida de alta precisión de su anchura, obteniendo un valor de $1,03 \pm 0,05 \pm 0,12 \text{ MeV}$ [195]. Además, medidas de los ratios de onda D y S en el decay $D_{s1}(2536)^+ \rightarrow D^{*+}K^0$ por la Colaboración Belle [196] mostraron que la amplitud de onda S es medible, lo que está en contradicción con las predicciones de HQS, aunque el estado en cuestión sea estrecho. Esto implica que existen supresiones fuertes en las amplitudes de desintegración.

Todas estas propiedades hacen que los mesones D_{sJ} en onda P fueran un sistema interesante donde estudiar las masas de los mesones [147, 22] y sus decays fuertes [197] sin el uso de la aproximación HQS. Los estudios anteriormente citados utilizan un tetraquark para acoplarlo con los estados $c\bar{s}$ desnudos con el modelo 3P_0 , consiguiendo romper la degeneración del doblete de mesones en onda P y explicar la estrechez de $D_{s1}(2536)$. El tetraquark que utilizan se encuentra a alta energía, y predicen la existencia de un estado adicional en dicha región con una componente grande de tetraquark.

Nuestra aproximación al problema en este caso será diferente. Utilizando el formalismo descrito acoplaremos los mesones 3P_1 y 1P_1 con su threshold más cercano D^*K , en un intento de explicar el estado $D_{s1}(2460)$ como una molécula y a su vez poder explicar las propiedades del estado $D_{s1}(2536)$ sin suposiciones adicionales.

Para los números cuánticos $J^P = 1^+$ el modelo quark predice dos estados: 1P_1 y 3P_1 . Dado que la conjugación de carga no está bien definida en el sector ligero-pesado, estos dos estados estarán mezclados. Como primera aproximación, como ya comentamos, esta mezcla se puede obtener con HQS. Para ondas P, el spin del quark ligero se acopla con el momento angular dando dos estados $j_q = \frac{3}{2}$ y $j_q = \frac{1}{2}$ para $J^P = 1^+$, cuyas expresiones son:

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, 1^+\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|{}^3P_1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|{}^1P_1\rangle, \\ |\frac{3}{2}, 1^+\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|{}^3P_1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|{}^1P_1\rangle, \end{aligned} \quad (4.60)$$

prediciendo que el estado $|\frac{3}{2}, 1^+\rangle$ debe ser estrecho.

Para empezar, consideraremos que estos dos estados $c\bar{s} {}^1P_1$ y 3P_1 no están mezclados y se encuentran casi degenerados, con masas dadas por el modelo quark de $M_{1^3P_1} = 2571,475 \text{ MeV}$ y $M_{1^1P_1} = 2575,934 \text{ MeV}$. Estudiaremos la mezcla que nos proporciona el modelo 3P_0 . El cálculo que realizaremos incluye los thresholds D^*K , el más bajo en energía y más importante para la dinámica del sistema, y los adicionales $D_s^*\eta$, $D_s\omega$ y DK^* , interesantes para estudiar los decays en detalle, con masas:

$$\begin{aligned} D^*K &\longrightarrow M = 2504,16 \text{ MeV}, \\ D_s^*\eta &\longrightarrow M = 2660,15 \text{ MeV}, \\ D_s\omega &\longrightarrow M = 2751,14 \text{ MeV}, \\ DK^* &\longrightarrow M = 2763,70 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

La razón de añadir los canales extra $D_s^*\eta$ y $D_s\omega$ es el hecho de considerar la antisimetría de la función de onda del estado D^*K y DK^* de forma correcta.

En general, la función de onda total del estado D^*K (sería igual para DK^*) es:

$$\Psi_{D^*K} = \phi_{D^*}(\vec{p}_A)\phi_K(\vec{p}_B)\chi_{D^*K}(\vec{P})Z(\vec{P}_{CM})\xi_c[1^3]\xi_{SF} \quad (4.61)$$

Así, si consideramos la simetría $SU(3)$ como exacta debemos antisimetrizar el quark \bar{n} y el \bar{s} del sistema, esto es, aplicar el antisimetrizador $\mathcal{A} = 1 - P_{24}$, si consideramos el contenido quark $D^*K = c\bar{n}n\bar{s}$. A nivel de la función de onda de sabor, el permutador actuará como $P_{24}|c\bar{n}n\bar{s}\rangle = |c\bar{s}n\bar{n}\rangle$.

Con esto, la antisimetrización de la función de onda de D^*K (o de DK^*) se puede escribir como,

$$\Psi_{[D^*K]\equiv(cn)[\bar{n}\bar{s}]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \Psi_{D^*K\equiv(c\bar{n})(n\bar{s})} - \Psi_{(c\bar{s})(n\bar{n})} \right\} \quad (4.62)$$

Por supuesto, el segundo término no es un estado final apropiado, pues aunque está relacionado con la función de onda de D^*K no existe como estado de scattering. Para poder trabajar más cómodamente expandiremos el resultado de la antisimetrización en la base de los estados $D_s - (n\bar{n})_i$, con D_s cualquier meson con contenido quark $c\bar{s}$ y $(n\bar{n})_i$ cualquier meson ligero $n\bar{n}$. Dichos estados pueden conectarse con D^*K tanto a través de mesones extraños como con potenciales de disociación.

Sin embargo, no es necesario incluir todos los canales posibles $D_s - (n\bar{n})_i$, debido a que muchos no nos darán acoplamiento con D^*K y DK^* o estarán muy lejos de los thresholds importantes como para dar una contribución importante. Es por ello que truncamos la base a los dos estados anteriormente descritos $D_s^*\eta$ y $D_s\omega$.

Por otro lado, cabe señalar a su vez que, en este caso y al contrario que para las moléculas $D_n D_n$ o $D_s D_s$, tendremos contribución de dos diagramas diferentes, los llamados (13) y (14) en la Fig. 2.3. Debemos tener en cuenta que los mesones η y ω tienen componente $n\bar{n}$ y $s\bar{s}$, siendo la mezcla grande sobre todo el estado η . Para poder describir correctamente la interacción resulta imprescindible incluir la función de onda completa en sabor para estos mesones, que tomaremos,

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= -0,7937 |n\bar{n}\rangle + 0,6083 |s\bar{s}\rangle, \\ |\omega\rangle &= 0,9592 |n\bar{n}\rangle + 0,2828 |s\bar{s}\rangle \approx |n\bar{n}\rangle. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Esto nos permitirá enlazar los canales a través del intercambio de una κ y un Kaón, además de mediante diagramas de intercambio, dando un factor extra de interacción. En la tabla 4.18 mostramos un resumen de las interacciones permitidas entre cada canal considerado. En el mismo, vemos la importancia de incluir el canal DK^* para tener intercambio de un pión, dado que para la interacción $D^*K \rightarrow D^*K$ está prohibido por coeficientes de spin.

| | D^*K | $D_s^*\eta$ | $D_s\omega$ | DK^* |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------|-----------------|
| D^*K | $\sigma + anh$ | $\kappa + dis + anh$ | $K + dis$ | $\pi + anh$ |
| $D_s^*\eta$ | $\kappa + dis + anh$ | $\sigma + anh$ | — | $K + dis + anh$ |
| $D_s\omega$ | $K + dis$ | — | σ | $\kappa + dis$ |
| DK^* | $\pi + anh$ | $K + dis + anh$ | $\kappa + dis$ | $\sigma + anh$ |

Cuadro 4.18: Interacciones permitidas entre los canales considerados, donde 'anh' representa aniquilación y 'dis' los diagramas de disociación.

Aunque pueda parecer que la inclusión de tanta interacción puede nublar nuestra comprensión de la evolución de los polos con el acoplamiento, en realidad la interacción quark-quark tiene una pequeña influencia en la dinámica del sistema, siendo el principal moldeador el potencial 3P_0 . Sin embargo, dicha interacción sí influye en los detalles de los estados y es necesaria incluirla.

En la tabla 4.19 mostramos los resultados para el cálculo con los thresholds $D^*K + D_s^*\eta + D_s\omega + DK^*$ y los dos estados teóricos. Como vemos, no aparece ningún estado

| $M (MeV)$ | $Prob(^1P_1)$ | $Fase(^1P_1)$ | $Prob(^3P_1)$ | $Fase(^3P_1)$ | $Prob(Molecula)$ |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|
| 2481,1 | 39,5 | + | 24,6 | + | 35,9 |
| 2509,9 - i 0,1 | 14,9 | + | 30,9 | - | 54,2 |

Cuadro 4.19: Cálculo del sector 1^+ con los canales $D^*K + D_s^*\eta + D_s\omega + DK^*$ sin modificar la γ del modelo 3P_0 . Unificamos las probabilidades de todos los canales en $Prob(Molecula)$. La fase se refiere al signo de la amplitud de probabilidad para dicho estado.

nuevo y recuperamos los dos estados originales. Sin embargo observamos que uno de ellos ha bajado por debajo del threshold D^*K , mientras que el otro se mantiene por encima, con una anchura muy pequeña.

A primera vista puede extrañar que la resonancia 2509 tenga una probabilidad molecular mayor que la propia molécula. Este efecto se puede explicar mediante la posición de la resonancia en el plano complejo. Si nos fijamos, la resonancia se encuentra muy próxima al threshold D^*K , más incluso que la molécula 2480. Esto provoca que la probabilidad molecular se dispare, en un efecto similar al del estado $X(3872)$. La componente molecular, entonces, se reduciría si colocáramos la masa de la resonancia en el valor experimental del estado $D_{s1}(2535)$.

Dadas las diferentes masas de los quarks c y s , cabe esperar que la mezcla de los estados se comporte como predeciría HQS. Si observamos las ecuaciones 4.60 vemos que el estado estrecho debe tener fases opuestas y una probabilidad de 1P_1 de valor doble a la probabilidad de la componente 3P_1 . Si observamos los resultados vemos que el estado con masa 2509, con anchura extraordinariamente pequeña, tiene un ratio de

$$\left(\frac{Prob(^1P_1)}{Prob(^3P_1)} \right)_{D_s(2535)} = 2,07 \quad (4.64)$$

que encaja con las predicciones de heavy quark symmetry para $|\frac{3}{2}, 1^+\rangle$. Podemos entonces identificar este estado con el experimental estrecho $D_s(2535)$. El hecho de que su anchura sea tan estrecha y que la probabilidad molecular sea tan grande se debe al hecho de que su masa está muy próxima al threshold de D^*K . El ajuste de la masa a su valor experimental podría, por supuesto, mejorar la situación, pero nuestro objetivo es dar una explicación cualitativa de la dinámica del sistema.

Igual ocurre con el estado molecular con masa 2481, identificado como $D_s(2460)$, que se correspondería con un estado ancho $|\frac{1}{2}, 1^+\rangle$. En este caso las fases son iguales y la probabilidad está cambiada, siendo en HQS igual a 0,5 y en nuestro caso,

$$\left(\frac{Prob(^1P_1)}{Prob(^3P_1)} \right)_{D_s(2460)} = 0,62 \quad (4.65)$$

lo que encaja con un estado ancho, que en este caso no tiene anchura por estar debajo del

threshold.

El hecho de que los estados 1P_1 y 3P_1 , degenerados en principio, se acoplen de forma diferente al modelo 3P_0 conduce a que los estados evolucionen por si solos a estados de HQS, sin más intervención que la dinámica del sistema. Aunque las masas de los estados obtenidos no encajen con las masas experimentales obtenidas, el estudio de las probabilidades es una indicación fuerte de que el mecanismo que actúa en el sector es el acoplamiento con estados mesón-mesón.

4.5. El barión encantado $\Lambda_c(2940)^+$ como molécula pentaquark

La Colaboración BaBar anunció el descubrimiento de un nuevo barión encantado, denominado $\Lambda_c(2940)^+$, con masa $M = 2939,8 \pm 1,3 \pm 1,0 \text{ MeV}/c^2$ y anchura $\Gamma = 17,5 \pm 5,2 \pm 5,9 \text{ MeV}$, analizando el espectro de masa invariante de D^0p , que es un singlete de isospin debido a que no hay evidencia de estados doblemente cargados en el espectro de D^+p [198]. Más tarde, la Colaboración Belle confirmó dicho estado en los canales $\Sigma_c(2455)^{0,++}\pi^\pm$ [199], con los resultados para la masa de $M = 2938,0 \pm 1,3_{-4,0}^{+2,0} \text{ MeV}/c^2$ y anchura $\Gamma = 13_{-5}^{+8}{}_{-7}^{+27} \text{ MeV}$, consistente con las medidas de BaBar.

Comparando con el caso de los mesones, la estructura de los bariones es más complicada, tanto desde el punto de vista teórico como experimental. Recientemente, con el progreso de los experimentos en las colaboraciones BaBar, Belle y BES, se han descubierto nuevos estados mesónicos que no encajan con las predicciones de la estructura $q\bar{q}$. Es natural imaginar que dicha situación se presente también para el caso de bariones. Sin embargo, en este caso es más intrincado. Al estar los bariones compuestos por tres quarks, la configuración de posibles estados exóticos es más difícil de identificar. Por otro lado, es un marco perfecto para aumentar nuestro conocimiento de la estructura fundamental de los hadrones.

Es por todo esto que la observación de la $\Lambda_c(2940)^+$ ha estimulado el interés de diferentes grupos teóricos, que han propuesto diferentes explicaciones a la estructura de dicho barión. Como la partícula $\Lambda_c(2940)^+$ está cerca del threshold de D^*p , se propuso la posibilidad de que fuera una molécula D^*p en onda S con números cuánticos $J^P = \frac{1}{2}^-$ o $\frac{3}{2}^-$ [200, 201]. También se llevaron a cabo estudios de decays fuertes bajo la asignación molecular, con $J^P = \frac{1}{2}^\pm$ [202], que indicaban cómo la partícula tenía que asignarse a una molécula D^*N con $J^P = \frac{1}{2}^+$. Sin embargo, si la partícula $\Lambda_c(2940)^+$ tiene $J^P = \frac{1}{2}^+$, el mesón D^* interacciona con el nucleón con onda P, lo que complica su enlace.

Por otro lado, aparte de estas explicaciones exóticas, los teóricos han intentado encajar al estado $\Lambda_c(2940)^+$ dentro del espectro de los bariones encantados. Los modelos de potencial predicen que las masas para las Λ_c con $J^P = \frac{5}{2}^-, \frac{3}{2}^+$ son 2900 MeV y 2910 MeV [203, 204], respectivamente. En la Ref. [205], los decays fuertes de los nue-

| J^P | $^{2S+1}L_J$ | | |
|-----------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\frac{1}{2}^-$ | $^2S_{\frac{1}{2}}$ | $^4D_{\frac{1}{2}}$ | |
| $\frac{1}{2}^+$ | $^2P_{\frac{1}{2}}$ | $^4P_{\frac{1}{2}}$ | |
| $\frac{3}{2}^-$ | $^4S_{\frac{3}{2}}$ | $^2D_{\frac{3}{2}}$ | $^4D_{\frac{3}{2}}$ |
| $\frac{3}{2}^+$ | $^2P_{\frac{3}{2}}$ | $^4P_{\frac{3}{2}}$ | $^4F_{\frac{3}{2}}$ |

Cuadro 4.20: Ondas parciales para los diferentes canales con más probabilidad de provocar un estado ligado.

Los hadrones encantados se estudiaron con el modelo 3P_0 . El resultado numérico para la $\Lambda_c(2940)^+$ sólo podría corresponderse a un barión encantado en onda D, mientras que se descarta que el estado sea la primera excitación radial de $\Lambda_c(2286)^+$ (con $J^P = \frac{1}{2}^+$), por la observación por BaBar [198] de la reacción $\Lambda_c(2940)^+ \rightarrow D^0 p$.

Aunque se han propuesto diferentes explicaciones para $\Lambda_c(2940)^+$, por el momento las propiedades de dicha partícula son poco claras, lo que implica que se necesitan más estudios teóricos para descubrir su estructura interna. Para intentar aclarar la estructura de este barión indagaremos en la asignación a un estado molecular de D^*N , y estudiaremos los canales más interesantes $\frac{1}{2}^\pm$ y $\frac{3}{2}^\pm$.

Mostramos en la Fig. 4.20 las ondas parciales permitidas en los canales con más probabilidad de dar ligadura. Por supuesto, los canales $\frac{1}{2}^-$ y $\frac{3}{2}^-$ son los que más interés revierten, pues la molécula se encuentra en onda S y no tenemos barrera centrífuga que disminuya la atracción de los potenciales.

Estamos pues en un caso similar a la partícula $X(3872)$, con la particularidad de que la interacción es más fuerte debido a la multiplicidad del diagrama. En efecto, dado que el nucleón tiene tres quarks ligeros, tendremos interacción de un pión con cada uno de esos quarks y el antiquark del mesón D^* , lo que nos da un factor 3 más de lo que teníamos en el caso de la $X(3872)$. Por ello, en este caso, no acoplaremos al espectro bariónico para intentar obtener un estado molecular puro. En la decisión también influye la dificultad de tener un espectro bariónico preciso, que no introduzca más incertidumbre en el cálculo.

| Masa | $\mathcal{P}_{^4S_{3/2}(D^*N)}$ | $\mathcal{P}_{^2D_{3/2}(D^*N)}$ | $\mathcal{P}_{^4D_{3/2}(D^*N)}$ |
|---------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 2939,68 | 96,08 | 0,89 | 3,03 |

Cuadro 4.21: Cálculo de $\Lambda_c(2940)^+$ en base de isospin en el sector $\frac{3}{2}^-$.

Para realizar el cálculo incluiremos el intercambio de un π , una σ y una η . Analizando

dichos canales, encontramos un estado molecular en el canal $\frac{3}{2}^-$, con isospin cero. Mostramos el resultado obtenido para la base de isospin en la Tabla 4.21 y en base de carga en la Tabla 4.22. Como podemos ver, la masa obtenida encaja con la masa experimental encontrada para la partícula $\Lambda_c(2940)^+$. La partícula es básicamente una molécula D^*N en onda S , con una pequeña componente de onda D . Si estudiamos la base de carga, vemos que la componente de isospin cero es aproximadamente del 97,5 %, con un 64 % de componente $D^{*0}p$ y un 36 % de componente $D^{*+}n$. Este resultado apoya la hipótesis de un estado molecular $D^{*0}p$, y explica por qué no se han encontrado compañeros cargados de la partícula $\Lambda_c(2940)^+$ en el espectro de $D^{*+}p$.

| Masa | $\mathcal{P}_{4S_{3/2}}$ | $\mathcal{P}_{2D_{3/2}}$ | $\mathcal{P}_{4D_{3/2}}$ | $\mathcal{P}_{D^{*0}p}$ | $\mathcal{P}_{D^{*+}n}$ | $\mathcal{P}_{I=0}$ | $\mathcal{P}_{I=1}$ |
|---------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|
| 2938,80 | 96,22 | 0,86 | 2,92 | 63,93 | 36,07 | 97,52 | 2,48 |

Cuadro 4.22: Cálculo exacto de Λ_c en base de carga en el sector $\frac{3}{2}^-$.

Para complementar la asignación del estado $\Lambda_c(2940)^+$ como una molécula D^*N vamos a estudiar sus desintegraciones, con el objetivo de comprobar que podemos describir su anchura total de forma correcta en base a nuestra hipótesis.

En un primer lugar, la partícula $\Lambda_c(2940)^+$ se descubrió en el canal D^0p . Este canal se encuentra unos 140 MeV por debajo del estado molecular, con lo que hay suficiente espacio de fases. Además se trata de una desintegración fuerte, así pues esperamos que sea un canal importante y por ello merece la pena estudiarlo.

La anchura del proceso lo calcularemos a través de la fórmula usual:

$$\Gamma = 2\pi \frac{E_A E_B k_0}{M_\Lambda} \sum_{J,L} |\mathcal{M}_{J,L}|^2 \quad (4.66)$$

con E_A y E_B las energías relativistas de los hadrones D y N en este caso, M_Λ la masa de la partícula $\Lambda_c(2940)^+$ y k_0 el momento on-shell del sistema, que viene dado por:

$$k_0 = \frac{\sqrt{[M_\Lambda^2 - (M_A - M_B)^2][M_\Lambda^2 - (M_A + M_B)^2]}}{2M_\Lambda} \quad (4.67)$$

Para incluir la desintegración a este canal debemos conocer la anchura del proceso $D^*N \rightarrow DN$ en el marco de nuestra interacción. El estado molecular que encontramos se encuentra en $J^{PC} = \frac{3}{2}^-$, así pues, la onda parcial de DN que está permitida para esos números cuánticos es ${}^2D_{3/2}$.

Para calcular la amplitud del proceso $\Lambda_c(2940)^+ \rightarrow DN$ mediante los potenciales $D^*N \rightarrow DN$ usaremos la función de onda del estado molecular, utilizando la ecuación:

$$\mathcal{M} = \int_0^\infty V_{D^*N \rightarrow DN}(k_0, P) \chi_{D^*N}(P) P^2 dP \quad (4.68)$$

donde $V_{D^*N \rightarrow DN}(k_0, P)$ es el potencial que nos conectan los sistemas DN y D^*N y χ_{D^*N} es la función de onda de la molécula.

Esta amplitud dependerá de las ondas parciales de la molécula y del isospin. Para conocer los decays a los canales físicos D^0p y D^+n pasaremos de la base de isospin a la base de carga:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{D^0p} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{M}_{DN}^{I=0} + \mathcal{M}_{DN}^{I=1}), \\ \mathcal{M}_{D^+n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{M}_{DN}^{I=0} - \mathcal{M}_{DN}^{I=1}).\end{aligned}\quad (4.69)$$

Una vez disponemos de todos los elementos, obtenemos los resultados:

$$\begin{aligned}\Gamma(\Lambda_c \rightarrow D^0p) &= 3,14 \text{ MeV}, \\ \Gamma(\Lambda_c \rightarrow D^+n) &= 3,58 \text{ MeV},\end{aligned}\quad (4.70)$$

siendo la contribución principal el proceso $D^*N(^4S_{3/2}) \rightarrow DN(^2D_{3/2})$ en isospin 0. El resultado no sorprende, ya que $^4S_{3/2}$ es la onda parcial principal de la molécula, que además se encuentra prácticamente en isospin cero. Precisamente, por ser isospin cero, vemos que los dos canales de desintegración están casi degenerados.

A parte de la desintegración a D^0p y D^+n , existe otro canal donde la molécula ha sido medida. Este canal es $\Sigma_c(2455)^{0,++}\pi^\pm$, que se encuentra aproximadamente a 350 MeV por debajo del estado $\Lambda_c(2940)^+$. Para completar el estudio de los decays, vamos a calcular las anchuras a este canal.

En este caso, la obtención del potencial de transición $D^*N \rightarrow \Sigma_c\pi$ presenta mayores dificultades, ya que existe un rearrangement de quarks entre el estado inicial y el final. Por lo tanto, para describir el proceso, debemos recurrir a un potencial de disociación como en el caso de la desintegración $X(3872) \rightarrow J/\psi\omega$. Consecuentemente, esperamos que la anchura de desintegración sea pequeña para estos canales. Aun así, debido a que la diferencia de masas es mayor, puede presentar un espacio de fases mayor que compense un potencial más débil. Por ello, vale la pena calcular su valor.

Los números cuánticos del estado final son:

$$\begin{aligned}\pi &\rightarrow J^P = 0^- (J = 0, L = 0, S = 0), \\ \Sigma_c(2455) &\rightarrow J^P = \frac{1}{2}^+ (J = \frac{1}{2}, L = 0, S = \frac{1}{2}),\end{aligned}\quad (4.71)$$

luego el canal es similar a DN , y la única onda parcial permitida en $J^{PC} = \frac{3}{2}^-$ para el estado final será $^2D_{3/2}$.

El potencial de disociación para el caso mesón-barión se puede obtener de forma similar al caso mesón-mesón. Una vez calculado podemos usar las ecuaciones 4.68 para obtener la amplitud del proceso, con el momento on-shell adecuado para este sistema.

En este caso dispondremos de tres canales físicos, que se relacionan con las amplitudes en base de isospín a través de las relaciones,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\Sigma_c^{++}\pi^-} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{M}_{\Sigma_c\pi}^{I=0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{M}_{\Sigma_c\pi}^{I=1}, \\
\mathcal{M}_{\Sigma_c^+\pi^0} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{M}_{\Sigma_c\pi}^{I=0}, \\
\mathcal{M}_{\Sigma_c^0\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{M}_{\Sigma_c\pi}^{I=0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{M}_{\Sigma_c\pi}^{I=1}.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

La anchura a este canal se calcula de igual forma con la ecuación 4.66, obteniendo en este caso:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\Lambda_c \rightarrow \Sigma_c^{++}\pi^-) &= 29,7 \text{ keV}, \\
\Gamma(\Lambda_c \rightarrow \Sigma_c^+\pi^0) &= 25,2 \text{ keV}, \\
\Gamma(\Lambda_c \rightarrow \Sigma_c^0\pi^+) &= 21,1 \text{ keV}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Como ya esperábamos, son valores mucho más pequeños que el caso DN , debido a que el proceso de disociación es mucho más débil que el proceso de intercambio de un bosón de Goldstone.

Sumando todos los canales estudiados obtenemos un valor de $6,80 \text{ MeV}$. La anchura total del proceso está bien descrita, principalmente con los canales D^0p y D^+n , los cuales nos dan un valor muy próximo a la anchura experimental medida. Todo esto refuerza la hipótesis de la partícula $\Lambda_c(2940)^+$ como una molécula pentaquark.

El hecho de obtener una molécula D^*N mediante potenciales mesón-barión abre la posibilidad de encontrar un análogo en el sector del bottonomio, es decir, una molécula B^*N con los mismos números cuánticos $J^{PC} = \frac{3}{2}^-$. Debido a que la masa del quark b es más pesada que la del quark c , la energía cinética del sistema será menor, lo que favorecerá la creación de nuevos clusters. Estos estados presentan gran interés, pues pueden ser medidos por experimentos como LHCb y nos dan mucha información de la dinámica de sistemas multiquark. Este caso no difiere mucho del anterior, los números cuánticos de las partículas involucradas siguen siendo los mismos, sólo difieren en la masa, luego lo descrito anteriormente sigue sirviendo para este caso.

Si hacemos el mismo cálculo para dicho sector obtenemos una molécula con mayor energía de ligadura, como esperábamos. En la Tabla 4.23 presentamos los resultados en base de carga. El threshold $B^{*0}p$ se encuentra en $6263,37 \text{ MeV}$, por lo que la molécula está 15 MeV por debajo de la misma, y tiene isospin cero. El estado, como antes, es una molécula B^*N prácticamente en onda S , con una pequeña componente de onda D . La rotura de isospin es mucho más débil que en el caso de la $\Lambda_c(2940)^+$, dado que la energía de ligadura es mayor y los thresholds de carga están más degenerados.

| Masa | $\mathcal{P}_{4S_{3/2}}$ | $\mathcal{P}_{2D_{3/2}}$ | $\mathcal{P}_{4D_{3/2}}$ | $\mathcal{P}_{D^{*0}p}$ | $\mathcal{P}_{D^{*+}n}$ | $\mathcal{P}_{I=0}$ | $\mathcal{P}_{I=1}$ |
|---------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|
| 6248,34 | 95,15 | 1,08 | 3,77 | 52,56 | 47,44 | 99,91 | 0,09 |

Cuadro 4.23: Cálculo exacto de Λ_b en base de carga en el sector $\frac{3}{2}^-$.

Podemos esperar que este estado Λ_b tenga desintegraciones similares a la $\Lambda_c(2940)^+$. Con el objetivo de facilitar su detección predeciremos su anchura y canales de desintegración principales.

En un primer lugar tenemos los canales $B^0 p$ y $B^+ n$. En este caso, dichos canales se encuentran sólo $\sim 31 \text{ MeV}$ por debajo del estado, por lo que su espacio de fases será menor y obtendremos menor anchura. Calculamos dicho valor con las ecuaciones 4.66 y 4.68, una vez calculados los potenciales $B^* N \rightarrow BN$. Como lo único que cambian son las masas de las partículas no pararemos tanto en detalles. El valor de dichas anchuras es,

$$\begin{aligned}\Gamma(\Lambda_b \rightarrow B^0 p) &= 1,23 \text{ MeV}, \\ \Gamma(\Lambda_b \rightarrow B^+ n) &= 1,25 \text{ MeV},\end{aligned}\tag{4.74}$$

siendo la contribución principal el proceso $B^* N(^4S_{3/2}) \rightarrow BN(^2D_{3/2})$ en isospin 0, ya que es la onda parcial de la molécula.

El otro canal de desintegración interesante se obtiene a través de un rearrangement de quarks. Se trata de $\Sigma_b^{0,++} \pi^\pm$, que se encuentra aproximadamente a 350 MeV por debajo del estado Λ_b . Debido a que debe existir diagramas de intercambio, esperamos que sea una contribución pequeña, pero importante dado que es más sencilla de detectar experimentalmente.

La anchura a este canal se calcula de igual forma con la ecuación 4.66, obteniendo en este caso:

$$\begin{aligned}\Gamma(\Lambda_b \rightarrow \Sigma_b^{++} \pi^-) &= 40,9 \text{ keV}, \\ \Gamma(\Lambda_b \rightarrow \Sigma_b^+ \pi^0) &= 39,5 \text{ keV}, \\ \Gamma(\Lambda_b \rightarrow \Sigma_b^0 \pi^+) &= 38,1 \text{ keV}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Para finalizar, sumando todos los canales estudiados obtenemos un valor de $2,60 \text{ MeV}$ para la anchura total. El comportamiento de este último sistema es muy similar al caso de $\Lambda_c(2940)^+$, por lo cual es un buen marco para comprobar la validez de la hipótesis de la molécula pentaquark.

Capítulo 5

Resumen y Conclusiones

En este trabajo hemos utilizando un modelo de quarks constituyente no relativista [19, 20] con el objetivo de estudiar diferentes sistemas multiquarks, que resumimos en los procesos de creación de extrañeza $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$, con $Y = \{\Lambda, \Sigma\}$, y diferentes candidatos a moléculas en el espectro del charmonio $c\bar{c}$, el espectro con *open-charm* y los bariones encantados Λ_c .

El estudio del proceso de creación de extrañeza requirió el uso del método RGM para describir la reacción y, con esto, resolver la ecuación de Lippmann-Schwinger de forma numérica. La descripción correcta de la sección eficaz total requirió la modificación del potencial óptico de $N\bar{N}$ a baja y alta energía para escribir satisfactoriamente la sección eficaz total de $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ y así reducir incertidumbres en el cálculo de observables, ya que en base a un cálculo acoplado de canales es importante describir correctamente cada uno de forma individual.

Para el estudio del espectro y, en particular, los candidatos a moléculas mesónicas del mismo, se planteó la resolución del problema de autovalores en base a los potenciales quark-quark propuestos por el modelo de quarks constituyentes. Para casos particulares se vio que este método era insuficiente para describir la rica espectroscopía y las propiedades de los diferentes estados descubiertos recientemente, por lo que se propuso un método de canales acoplados entre los sectores de dos y cuatro quarks mediante el uso del modelo 3P_0 , que supone la creación de pares del vacío.

El análisis teórico de los estados ligados y estructuras de resonancias como polos en el plano de Riemann es una poderosa herramienta para estudiar el comportamiento del sistema con la incorporación de nuevos thresholds. El formalismo desarrollado nos permite describir la dinámica del sistema $q\bar{q}$ frente a la presencia de canales mesón-mesón en su cercanía de forma no perturbativa, explicando la aparición de nuevos estados y propiedades que no encajan con la asignación clásica de mesones en base a un agregado de quark-antiquark.

Por lo tanto, resumiremos brevemente las conclusiones derivadas de este trabajo:

- Hemos utilizado el método RGM para describir todos los procesos a nivel hadrónico

en base a potenciales quark-quark. Este método, desarrollado en espacio de momentos, hace que podamos describir de forma sencilla e intuitiva el acoplamiento entre canales. Su forma permite que en la mayoría de los casos el cálculo de factores de forma sea analítico, pues describimos la función de onda de los bariones como gaussianas, suponiendo que todos los quarks están en onda S , y los mesones a través del GEM, método de expansión en gaussianas.

- Estudiamos tres reacciones diferentes de creación de extrañeza, con un mecanismo de transición basado en el intercambio de un kaón más el escalar extraño κ . Para describir correctamente el proceso tuvimos que modificar el potencial óptico de $N\bar{N}$ para la región de energía de creación de los pares $Y\bar{Y}$. La ampliación de este potencial a energías más altas no modificó los shifts de energía del protonio, y en cambio, mejoró sus predicciones, sobre todo para onda 2^3P_0 , donde el shift del nivel encaja mejor con los datos experimentales. Este resultado, junto con la descripción de la sección eficaz total, elástica y de intercambio de carga, reducen la incertidumbre de los resultados a efectos del canal inicial.

Sin embargo, se dispone de poca información sobre el canal final, y el ajuste del potencial óptico para las reacciones $Y\bar{Y} \rightarrow Y\bar{Y}$ se realizó en base a los datos de la reacción de creación $p\bar{p} \rightarrow Y\bar{Y}$. Por supuesto, esta falta de datos experimentales es una fuente de incertidumbre que nubla la descripción teórica del proceso. De todas formas, aunque las interacciones en el estado final e inicial puedan modificar el proceso, las predicciones del modelo en la descripción del mecanismo de transición permanecen, y podemos concluir que obtenemos una descripción muy razonable de los datos, superior a los modelos anteriores basados en el intercambio de un kaón a nivel bariónico o en la aniquilación a través de un gluón, dado que nuestro mecanismo de transición une ambos procesos de forma consistente.

- Hemos desarrollado un formalismo que nos permite calcular de forma no perturbativa el efecto de los thresholds sobre el espectro de mesones. La descripción del proceso en base a la matriz de scattering T nos permitió estudiar en un mismo marco los estados ligados y las resonancias, definiéndolas como polos de la matriz S en el plano de Riemann. Con esta base, pudimos describir muchos de los estados exóticos descubiertos en la última década, como la partícula $X(3872)$ como una molécula $D\bar{D}^*$ en onda S , la partícula $D_{s1}(2460)$ como un agregado D^*K o $\Lambda_c(2940)^+$ como una molécula D^*N .
- El formalismo también nos permitió describir fenómenos puramente no perturbativos en el espectro del charmonio, como la inversión de estados $3^3S_1 - 2^3D_1$ en la asignación de $\psi(4040) - \psi(4160)$ en el sector 1^{--} gracias al efecto del canal $D_s\bar{D}_s^*$, o en la aparición de la partícula $Y(3940)$ en el sector 0^{++} gracias al canal $D_s\bar{D}_s$.

En resumen, podemos afirmar que el estudio del espectro hadrónico es un entorno idóneo para el estudio de sistemas multiquark, especialmente en espectros que involucran

quarks pesados como c y b . De hecho, el estudio del espectro del bottonomio será, en un futuro, un entorno ideal para el descubrimiento de nuevos estados exóticos, dado que la energía cinética de los sistemas multiquark disminuye por el gran valor de la masa del quark b , propiciando la creación de nuevos estados y nuevos efectos no perturbativos difícilmente explicables en los modelos quark clásicos.

Apéndice A

Coordenadas de Jacobi

A.1. Sistema Barión-Antibarión

Las coordenadas de Jacobi para el sistema $B\bar{B}$ en función de las coordenadas de los quarks depende del sistema que consideremos. Si hablamos del sistema $Y\bar{Y}$ debemos distinguir la masa del quark 3 y 6 del resto (identificándolo con el extraño, según la Fig. 2.1), y se escriben,

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{\xi_1} &= \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \\
 \vec{p}_{\xi_2} &= \frac{2m}{M}\vec{p}_3 - \frac{m_s}{M}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2), \\
 \vec{p}_{\xi_3} &= \frac{1}{2}(\vec{p}_4 - \vec{p}_5), \\
 \vec{p}_{\xi_4} &= \frac{2m}{M}\vec{p}_6 - \frac{m_s}{M}(\vec{p}_4 + \vec{p}_5), \\
 \vec{P} &= \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4 - \vec{p}_5 - \vec{p}_6), \\
 \vec{P}_{CM} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5 + \vec{p}_6,
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

con m la masa del quark ligero, m_s la masa del quark extraño s y $M = 2m + m_s$. La transformación inversa será:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_1 &= \vec{p}_{\xi_1} - \frac{1}{2}\vec{p}_{\xi_2} + \frac{m}{M}\vec{P} + \frac{m}{2M}\vec{P}_{CM}, \\
 \vec{p}_2 &= -\vec{p}_{\xi_1} - \frac{1}{2}\vec{p}_{\xi_2} + \frac{m}{M}\vec{P} + \frac{m}{2M}\vec{P}_{CM}, \\
 \vec{p}_3 &= \vec{p}_{\xi_2} + \frac{m_s}{M}\vec{P} + \frac{m_s}{2M}\vec{P}_{CM}, \\
 \vec{p}_4 &= \vec{p}_{\xi_3} - \frac{1}{2}\vec{p}_{\xi_4} - \frac{m}{M}\vec{P} + \frac{m}{2M}\vec{P}_{CM}, \\
 \vec{p}_5 &= -\vec{p}_{\xi_3} - \frac{1}{2}\vec{p}_{\xi_4} - \frac{m}{M}\vec{P} + \frac{m}{2M}\vec{P}_{CM}, \\
 \vec{p}_6 &= \vec{p}_{\xi_4} - \frac{m_s}{M}\vec{P} + \frac{m_s}{2M}\vec{P}_{CM},
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

El sistema $N\bar{N}$ se describe con la misma transformación que antes, realizando el límite $m_s \rightarrow m$, Ahora, para calcular los kernels RGM interesa expresar las interacciones en coordenadas de Jacobi. Como ya vimos, las interacciones relevantes para el sistema $B\bar{B}$ son,

$$V_{ij} = V_{ij}(\vec{p}'_{ij}, \vec{p}_{ij}) \delta^3(\vec{P}'_{ij} - \vec{P}_{ij}) \prod_{k \neq i,j} \delta^3(\vec{p}'_k - \vec{p}_k) \quad (\text{A.3})$$

para $(ij) = (36), (14), (34), (16)$. Al expresarlo en coordenadas de Jacobi tendremos combinaciones lineales de estas en las funciones $\delta^{(3)}$.

Tras hacer una transformación adecuada de éstas obtenemos para la interacción (36) del proceso $N\bar{N} \rightarrow Y\bar{Y}$, la única no nula que contribuye a la reacción,

$$\begin{aligned} V_{36} = & V_{36}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} - (\frac{1}{3}\vec{P} - \frac{m_s}{M}\vec{P}')) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} + (\frac{2}{3}\vec{P} - \frac{2m}{M}\vec{P}')) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{\xi_{24}} - \vec{P}_{\xi_{24}} - \frac{2(m-m_s)}{3M}\vec{P}_{CM}) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1}) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3}) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde hemos usado para el estado final \vec{p}'_i las transformaciones para $Y\bar{Y}$ A.2 y para el estado inicial \vec{p}_i las transformaciones correspondientes a $N\bar{N}$, y siendo,

$$\begin{aligned} \vec{P}'_{\xi_{ij}} &= \vec{p}_{\xi_i} + \vec{p}_{\xi_j} \\ \vec{p}'_{\xi_{ij}} &= \frac{1}{2}(\vec{p}_{\xi_i} - \vec{p}_{\xi_j}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De igual forma, para el proceso $Y\bar{Y} \rightarrow Y'\bar{Y}'$, obtenemos que las interacciones a estudiar son,

$$\begin{aligned} V_{36} = & V_{36}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} + \frac{m_s}{M}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} - \frac{2m}{M}(\vec{P}' - \vec{P})) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{\xi_{24}} - \vec{P}_{\xi_{24}}) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1}) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3}) \delta^{(3)}(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} V_{14} = & V_{14}((\vec{p}'_{\xi_{13}} - \vec{p}_{\xi_{13}}) - \frac{1}{2}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}}) + \frac{m}{M}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} + \frac{m_s}{M}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{P}'_{\xi_{24}} - \vec{P}_{\xi_{24}}) \delta^{(3)}(\vec{P}'_{\xi_{13}} - \vec{P}_{\xi_{13}}) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_{13}} - \vec{p}_{\xi_{13}} - \frac{1}{2}(\vec{P}' - \vec{P})) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} V_{34} = & V_{34}(\frac{1}{2}(\vec{p}'_{\xi_2} - \vec{p}_{\xi_2}) - \frac{1}{2}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3}) + \frac{1}{4}(\vec{p}'_{\xi_4} - \vec{p}_{\xi_4}) + \frac{m+m_s}{2M}(\vec{P}' - \vec{P})) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3} + \frac{1}{2}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1}) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} - \frac{2m-m_s}{2M}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{P}'_{\xi_{24}} - \vec{P}_{\xi_{24}} - (\vec{P}' - \vec{P})) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} V_{16} = & V_{16}(\frac{1}{2}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1}) - \frac{1}{4}(\vec{p}'_{\xi_2} - \vec{p}_{\xi_2}) - \frac{1}{2}(\vec{p}'_{\xi_4} - \vec{p}_{\xi_4}) + \frac{m+m_s}{2M}(\vec{P}' - \vec{P})) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1} - \frac{1}{2}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3}) \times \\ & \times \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_{24}} - \vec{p}_{\xi_{24}} - \frac{2m-m_s}{2M}(\vec{P}' - \vec{P})) \delta^{(3)}(\vec{P}'_{\xi_{24}} - \vec{P}_{\xi_{24}} + (\vec{P}' - \vec{P})) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Las transformaciones de Jacobi preservan la invarianza del hamiltoniano bajo transformaciones de Galileo tanto en el sector extraño como en el ligero. Es decir, el hamiltoniano es invariante bajo translaciones del centro de masas, lo que es más que deseable. Podemos separar grados internos y externos de libertad. Este resultado nos da pie para proponer una función de onda como la descrita en la ecuación 2.29.

A.2. Sistema Mesón-Antimesón

Las coordenadas de Jacobi para el sistema de cuatro partículas mesón-antimesón en función de las coordenadas de los quarks se escriben como,

$$\vec{p}_A = \frac{m_2}{M_A}\vec{p}_1 - \frac{m_1}{M_A}\vec{p}_2, \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{p}_B = \frac{m_4}{M_B}\vec{p}_3 - \frac{m_3}{M_B}\vec{p}_4, \quad (\text{A.11})$$

$$\vec{P} = \frac{M_B}{M_T}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - \frac{M_A}{M_T}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4), \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{P}_{cm} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4. \quad (\text{A.13})$$

con m_i la masa del quark i , $M_A = m_1 + m_2$, $M_B = m_3 + m_4$ y $M_T = M_A + M_B$, siguiendo el ordenamiento de quarks de la Fig.2.3.

La inversa de estas coordenadas será:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_A + \frac{m_1}{M_A}\vec{P} + \frac{m_1}{M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_A + \frac{m_2}{M_A}\vec{P} + \frac{m_2}{M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_B - \frac{m_3}{M_B}\vec{P} + \frac{m_3}{M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{p}_4 = -\vec{p}_B - \frac{m_4}{M_B}\vec{P} + \frac{m_4}{M_T}\vec{P}_{cm}. \quad (\text{A.17})$$

e igual para el estado final.

Ahora, para calcular los kernels RGM interesa expresar las interacciones en función de las coordenadas de Jacobi. Las interacciones relevantes para el sistema mesón-mesón son las locales, igual que antes,

$$V_{ij} = V_{ij}(\vec{p}'_{ij}, \vec{p}_{ij})\delta^3(\vec{P}'_{ij} - \vec{P}_{ij}) \prod_{k \neq i,j} \delta^3(\vec{p}'_k - \vec{p}_k) \quad (\text{A.18})$$

siendo,

$$\begin{aligned} \vec{p}'_{ij} &= \frac{1}{2}(\vec{p}'_i - \vec{p}'_j), \\ \vec{P}'_{ij} &= \vec{p}'_i + \vec{p}'_j, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

para $(ij) = (13), (14), (23), (24)$. Al expresarlo en coordenadas de Jacobi tendremos combinaciones lineales de las coordenadas en las funciones $\delta^{(3)}$. Tras hacer una transformación

adecuada de éstas obtenemos diferentes expresiones para las interacciones del proceso $AB \rightarrow A'B'$.

En el caso de los términos directos estas expresiones se pueden reescribir de forma conjunta como:

$$\begin{aligned}
V_{ij}^D &= V\left(\frac{(-1)^{i-1}}{2}(\vec{p}'_A - \vec{p}_A) + \frac{(-1)^j}{2}(\vec{p}'_B - \vec{p}_B) + \frac{1}{2}\left(\frac{m'_i}{M'_A} + \frac{m'_j}{M'_B}\right)\vec{P}' - \frac{1}{2}\left(\frac{m_i}{M_A} + \frac{m_j}{M_B}\right)\vec{P}\right) \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{cm} - \vec{P}_{cm}) \times \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{p}'_A - \vec{p}_A + (-1)^i \left[\left(1 - \frac{m'_i}{M'_A}\right)\vec{P}' - \left(1 - \frac{m_i}{M_A}\right)\vec{P} \right]) \times \\
&\times \delta^{(3)}(\vec{p}'_B - \vec{p}_B + (-1)^{j-1} \left[\left(1 - \frac{m'_j}{M'_B}\right)\vec{P}' - \left(1 - \frac{m_j}{M_B}\right)\vec{P} \right])
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Si tratamos con los términos de intercambio la cosa es más complicada y tendremos una expresión diferente para cada diagrama. Siguiendo el esquema de la Fig. 2.4 tendríamos que aplicar el operador P_{24} sobre las coordenadas de Jacobi, obteniéndose,

$$\begin{aligned}
P_{24}[\vec{p}_A] &= \frac{m_4}{m_1+m_4}\vec{p}_A + \frac{m_1}{m_1+m_4}\vec{p}_B + \frac{m_1}{m_1+m_4}\left(\frac{m_4}{m_1+m_4} + \frac{m_2}{m_2+m_3}\right)\vec{P} + \frac{m_1(m_4-m_2)}{(m_1+m_4)M_T}\vec{P}_{CM}, \\
P_{24}[\vec{p}_B] &= \frac{m_3}{m_2+m_3}\vec{p}_A + \frac{m_2}{m_2+m_3}\vec{p}_B - \frac{m_3}{m_2+m_3}\left(\frac{m_4}{m_1+m_4} + \frac{m_2}{m_2+m_3}\right)\vec{P} - \frac{m_3(m_4-m_2)}{(m_2+m_3)M_T}\vec{P}_{CM}, \\
P_{24}\left[\vec{P}\right] &= \vec{p}_A - \vec{p}_B + \frac{m_1 m_3 - m_2 m_4}{(m_1+m_4)(m_2+m_3)}\vec{P} + \frac{m_2 - m_4}{M_T}\vec{P}_{CM}, \\
P_{24}\left[\vec{P}_{cm}\right] &= \vec{P}_{CM}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

y utilizando estas coordenadas obtenemos para la transformación,

$$\begin{aligned}
V_{14}^E &= V\left(-\frac{1}{2}(\tilde{p}_A + \tilde{p}_B) + \tilde{p}'_A + \frac{1}{2}(\vec{P}' - \vec{P})\right)\delta(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \times \\
&= \delta(\tilde{p}'_B - \tilde{p}_A)\delta(\tilde{p}'_B - \tilde{p}_B - (\vec{P}' - \vec{P})), \\
V_{23}^E &= V\left(\frac{1}{2}(\tilde{p}_A + \tilde{p}_B) - \tilde{p}'_B + \frac{1}{2}(\vec{P}' - \vec{P})\right)\delta(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \times \\
&= \delta(\tilde{p}'_A - \tilde{p}_B)\delta(\tilde{p}'_A - \tilde{p}_A + (\vec{P}' - \vec{P})), \\
V_{13}^E &= V\left(-\frac{1}{2}(\tilde{p}_A - \tilde{p}_B) + \frac{1}{2}(\tilde{p}'_A - \tilde{p}'_B) + (\vec{P}' - \vec{P})\right)\delta(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \times \\
&= \delta(\tilde{p}'_B - \tilde{p}_A)\delta(\tilde{p}'_A - \tilde{p}_B), \\
V_{24}^E &= V\left(\frac{1}{2}(\tilde{p}_A - \tilde{p}_B) + \frac{1}{2}(\tilde{p}'_A - \tilde{p}'_B)\right)\delta(\vec{P}'_{CM} - \vec{P}_{CM}) \times \\
&= \delta(\tilde{p}'_A - \tilde{p}_A + (\vec{P}' - \vec{P}))\delta(\tilde{p}'_B - \tilde{p}_B - (\vec{P}' - \vec{P})).
\end{aligned} \tag{A.22}$$

donde hemos definido,

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_A &= \vec{p}_A - \frac{m_2}{M_A}\vec{P} = \vec{p}_A - \omega_A\vec{P}, \\
\tilde{p}_B &= \vec{p}_B + \frac{m_4}{M_B}\vec{P} = \vec{p}_B + \omega_B\vec{P}, \\
\tilde{p}'_A &= \vec{p}'_A - \frac{m_2}{M'_A}\vec{P}' = \vec{p}'_A - \omega'_A\vec{P}', \\
\tilde{p}'_B &= \vec{p}'_B + \frac{m_4}{M'_B}\vec{P}' = \vec{p}'_B + \omega'_B\vec{P}',
\end{aligned} \tag{A.23}$$

En el caso de los términos de intercambio, calcularemos los elementos de matriz en el sistema de referencia de centro de masas, para evitar posibles dependencias en \vec{P}_{CM} debido a las masas de los quarks.

A.3. Sistema Barión-Mesón

Para el sistema de 5 partículas usaremos un sistema mezcla de los dos anteriores:

$$\vec{p}_{\xi_1} = \frac{m_2}{M_A}\vec{p}_1 - \frac{m_1}{M_A}\vec{p}_2, \quad (\text{A.24})$$

$$\vec{p}_{\xi_2} = \frac{1}{2}(\vec{p}_3 - \vec{p}_4), \quad (\text{A.25})$$

$$\vec{p}_{\xi_3} = \frac{2}{3}\vec{p}_5 - \frac{1}{3}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4), \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{P} = \frac{M_B}{M_T}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - \frac{M_A}{M_T}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5), \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{P}_{cm} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{p}_5. \quad (\text{A.28})$$

considerando que el barión es un nucleón, es decir $m_3 = m_4 = m_5 = m_q$.

Con un sencillo cálculo la inversa resulta ser,

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{\xi_1} + \frac{m_1}{M_A}\vec{P} + \frac{m_1}{M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_{\xi_1} + \frac{m_2}{M_A}\vec{P} + \frac{m_2}{M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.30})$$

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_{\xi_2} - \frac{1}{2}\vec{p}_{\xi_3} - \frac{1}{3}\vec{P} + \frac{M_B}{3M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.31})$$

$$\vec{p}_4 = -\vec{p}_{\xi_2} - \frac{1}{2}\vec{p}_{\xi_3} - \frac{1}{3}\vec{P} + \frac{M_B}{3M_T}\vec{P}_{cm}, \quad (\text{A.32})$$

$$\vec{p}_5 = \vec{p}_{\xi_3} - \frac{1}{3}\vec{P} + \frac{M_B}{3M_T}\vec{P}_{cm}. \quad (\text{A.33})$$

Utilizamos la misma expresión para los kernels RGM que en el caso barión-antibarión y mesón-antimesón, expresados en la Ec. A.20. La interacción directa se puede escribir de forma agrupada de la siguiente forma, considerando que $i = \{1, 2\}$ (Mesón) y $j = \{3, 4, 5\}$ (Barión):

$$\begin{aligned} V_{ij} &= V\left(\frac{(-1)^{i-1}}{2}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1}) + \frac{(-1)^j}{2}(\vec{p}'_{\xi_2} - \vec{p}_{\xi_2}) + \frac{a_j}{4}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3}) + \frac{1}{2}\left(\frac{m_i}{M_A} + \frac{1}{3}\right)(\vec{P}' - \vec{P})\right) \\ &\times \delta^{(3)}(\vec{P}'_{cm} - \vec{P}_{cm}) \times \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_1} - \vec{p}_{\xi_1} + (-1)^i\left(1 - \frac{m_i}{M_A}\right)(\vec{P}' - \vec{P})) \times \\ &\times \delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_2} - \vec{p}_{\xi_2} + \frac{c_j}{2}(\vec{P}' - \vec{P}))\delta^{(3)}(\vec{p}'_{\xi_3} - \vec{p}_{\xi_3} - \frac{a_j}{3}(\vec{P}' - \vec{P})) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

donde hemos definido $a_j = \{1, 1, -2\}$ y $c_j = \{1, -1, 0\}$ para $j = \{3, 4, 5\}$.

En principio, tenemos un potencial directo que depende de j . Sin embargo, a la hora de hacer las integrales pertinentes para obtener la expresión de la Ec. 2.48, la dependencia en cualquier variable que involucre el índice j desaparece. Es decir, recuperamos el resultado que indica que los diagramas $V_{i3} = V_{i4} = V_{i5}$, y por lo tanto tenemos simplemente dos diagramas con multiplicidad 3 cada uno.

Apéndice B

Coeficientes de Spin-Sabor-Color

En este apéndice describimos las técnicas utilizadas para el cálculo de los coeficientes de Spin-Sabor-Color para el sistema de dos mesones, dos bariones y el sistema barión-mesón y presentamos a continuación las tablas con los coeficientes de Spin-Sabor-Color para la reacción general $AB \rightarrow A'B'$ en el caso Mesón-Antimesón, las reacciones $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$, $N\bar{N} \rightarrow Y\bar{Y}$ y $Y\bar{Y} \rightarrow Y'\bar{Y}'$ en el caso Barión-Antibarión y la reacción $(Q\bar{n})N \rightarrow (Q\bar{n})N$ para el caso Barión-Mesón, donde $Q = \{c, b\}$.

B.1. Método de Cálculo

El método para calcular los coeficientes de Spin-Sabor-Color es similar para los sistemas de cuatro, cinco y seis quarks. Por lo tanto, presentaremos el método sólo para el caso Mesón-Antimesón, pudiéndose aplicar a los dos casos con mínimas modificaciones.

Las funciones de onda en Spin-Sabor-Color de los mesones se pueden escribir como,

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_M}} |(s_1, s_2)S \rangle \otimes |(t_1, t_2)T \rangle \otimes \xi_c[1^2] \quad (\text{B.1})$$

donde $|(s_1, s_2)S \rangle$ ($|(t_1, t_2)T \rangle$) representa el acoplamiento del spin (sabor) del par quark-antiquark del mesón M , con $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ y $t_1 = t_2 = \{0, \frac{1}{2}\}$, y donde S (T) su spin (sabor) total y N_M es un factor de normalización.

Los valores de los factores de normalización son N_M . Los acoplamientos mínimos son $S = T = 0$ y los máximos son $S = T = 1$.

Debido a que la función de onda de color factoriza, nos ocupamos en primer lugar de los coeficientes de spin-sabor, sin preocuparnos de la parte de color. La función de onda de spin-sabor de dos mesones la escribimos de forma general como,

$$|AB; ST\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_A N_B}} |(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})S_A; (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})S_B; S \rangle \otimes |(t_1, t_2)T_A; (t_3, t_4)T_B; T \rangle \quad (\text{B.2})$$

donde S (T) es el spin (sabor) total al que se acopla el sistema. Con esta función de onda los quarks $\{1, 2\}$ pertenecen al mesón A y los quarks $\{3, 4\}$ al B .

Si tenemos un operador en el espacio de spin-sabor dado por $\mathcal{O}^S \mathcal{O}^T$ los coeficientes de spin-sabor que necesitaremos serán los elementos de matriz reducidos del operador entre los estados inicial y final, los cuales vendrán dados por,

$$\langle A'B'; S'T' || \mathcal{O}^S \mathcal{O}^T || AB; ST \rangle = \frac{1}{\sqrt{N_A N_B N_{A'} N_{B'}}} \eta_{AB}^{A'B'}(\mathcal{O}^S, S', S) \eta_{AB}^{A'B'}(\mathcal{O}^T, T', T) \quad (\text{B.3})$$

siendo

$$\eta_{AB}^{A'B'}(\mathcal{O}^T, T', T) = \langle (t'_1, t'_2)T_{A'}; (t'_3, t'_4)T_{B'}; T' || \mathcal{O}^T || (t_1, t_2)T_A; (t_3, t_4)T_B; T \rangle \quad (\text{B.4})$$

y análogamente para el spin. Aunque el cálculo de los coeficientes de Spin puede simplificarse usando técnicas de $SU(2)$, debido a que el cálculo de los coeficientes de Sabor debe realizarse en $SU(3)$ completo resulta más sencillo utilizar programas de cálculo como *Mathematica*. De esta forma obtenemos un método unificado para calcular los coeficientes de Spin-Sabor-Color. Para obtener los coeficientes de Spin-Sabor-Color basta multiplicar los coeficientes de Spin-Sabor por los de Color correspondientes, que siempre factorizan.

B.2. Coeficientes para el sistema Mesón-Antimesón

B.2.1. Coeficientes de Spin

Operador de Spin ($\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$): Términos directos

En el caso de estados mesón-mesón, los coeficientes de Spin-Sabor factorizan, así pues, basta con calcular los operadores de spin y los de sabor por separado y luego multiplicarlos. Empezamos mostrando los coeficientes de spin escalares para los mesones $AB \rightarrow A'B'$ para términos directos.

Considerando una ordenación de los quarks de $q_1 \bar{q}_2 - q_3 \bar{q}_4$ tendremos,

$$\begin{array}{r}
 S = 2 \quad (1, 1) \\
 (1, 1) \quad 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
 (1, 1) \quad -1 \quad \sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \\
 (1, 0) \quad \sqrt{2} \quad 0 \quad 1 \\
 (0, 1) \quad -\sqrt{2} \quad 1 \quad 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
 (1, 1) \quad -2 \quad -\sqrt{3} \\
 (0, 0) \quad -\sqrt{3} \quad 0
 \end{array}$$

Cuadro B.1: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_3)$. Representamos en horizontal (S'_A, S'_B) y en vertical (S_A, S_B) , donde S_A, S_B, S'_A, S'_B son los spines de los mesones AB iniciales y finales respectivamente.

$$\begin{array}{r}
 S = 2 \quad (1, 1) \\
 (1, 1) \quad 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
 (1, 1) \quad -1 \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \\
 (1, 0) \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad -1 \\
 (0, 1) \quad \sqrt{2} \quad -1 \quad 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
 (1, 1) \quad -2 \quad \sqrt{3} \\
 (0, 0) \quad \sqrt{3} \quad 0
 \end{array}$$

Cuadro B.2: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{rcc}
S = 2 & (1, 1) & \\
(1, 1) & 1 & \\
S = 1 & (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\
(1, 1) & -1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
(1, 0) & \sqrt{2} & 0 & -1 \\
(0, 1) & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\
S = 0 & (1, 1) & (0, 0) \\
(1, 1) & -2 & \sqrt{3} \\
(0, 0) & \sqrt{3} & 0
\end{array}$$

Cuadro B.3: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3)$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{rcc}
S = 2 & (1, 1) & \\
(1, 1) & 1 & \\
S = 1 & (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\
(1, 1) & -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\
(1, 0) & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\
(0, 1) & \sqrt{2} & 1 & 0 \\
S = 0 & (1, 1) & (0, 0) \\
(1, 1) & -2 & -\sqrt{3} \\
(0, 0) & -\sqrt{3} & 0
\end{array}$$

Cuadro B.4: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_4)$. Misma convención que en Fig. B.1.

Operador de Spin $(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)$: Términos de intercambio

Tomaremos las mismas consideraciones que antes. Debido a que se trata de términos de intercambio debemos incluir el operador identidad, cuyos coeficientes no serán triviales. Las funciones de onda de spin vienen dadas por:

$$|\chi_S^{S_A, S_A^z}\rangle = \sum_{s_1, s_2} \langle s_1, s_1^z, s_2, s_2^z | S_A, S_A^z \rangle |s_1, s_1^z, s_2, s_2^z\rangle \quad (\text{B.5})$$

por lo que un coeficiente del operador identidad será,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{S,ij} &= \langle \chi_S^A \chi_S^B | \chi_S^{A'} \chi_S^{B'} \rangle = \\
&= \sum_{i,j} \chi_A^S(s_1, s_2) \chi_B^S(s_3, s_4) \delta_{1,1'}^{(s)} \delta_{2,4'}^{(s)} \delta_{3,3'}^{(s)} \delta_{4,2'}^{(s)} \mathbf{1} \chi_C^S(s'_1, s'_2) \chi_D^S(s'_3, s'_4)
\end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Los diferentes valores de este factor están resumidos en las figuras siguientes. Para el término spin-spin debemos reemplazar $\mathbf{1}$ por el $(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)$ que corresponda a cada diagrama. Con esto, los coeficientes son,

$$\begin{array}{l}
 S = 2 \quad (1, 1) \\
 (1, 1) \quad 1 \\
 \\
 S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
 (1, 1) \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 (1, 0) \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
 (0, 1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\
 \\
 S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
 (1, 1) \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 (0, 0) \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Cuadro B.5: Coeficientes de spin para el operador Identidad para términos de intercambio. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{l}
 S = 2 \quad (1, 1) \\
 (1, 1) \quad \frac{1}{4} \\
 \\
 S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
 (1, 1) \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \\
 (1, 0) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \\
 (0, 1) \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \frac{3}{8} \quad -\frac{1}{8} \\
 \\
 S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
 (1, 1) \quad \frac{5}{8} \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \\
 (0, 0) \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \frac{3}{8}
 \end{array}$$

Cuadro B.6: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_3)$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{r}
S = 2 \quad (1, 1) \\
(1, 1) \quad \frac{1}{4}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
(1, 1) \quad 0 \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \\
(1, 0) \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \\
(0, 1) \quad -\frac{3}{4\sqrt{2}} \quad -\frac{3}{8} \quad -\frac{3}{8}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
(1, 1) \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{\sqrt{3}}{8} \\
(0, 0) \quad 3\frac{\sqrt{3}}{8} \quad -\frac{3}{8}
\end{array}$$

Cuadro B.7: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{r}
S = 2 \quad (1, 1) \\
(1, 1) \quad \frac{1}{4}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
(1, 1) \quad 0 \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \\
(1, 0) \quad \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad -\frac{3}{8} \quad -\frac{3}{8} \\
(0, 1) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
(1, 1) \quad -\frac{1}{8} \quad -\frac{\sqrt{3}}{8} \\
(0, 0) \quad 3\frac{\sqrt{3}}{8} \quad -\frac{3}{8}
\end{array}$$

Cuadro B.8: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3)$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{r}
 S = 2 \quad (1, 1) \\
 (1, 1) \quad \frac{1}{4} \\
 \\
 S = 1 \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
 (1, 1) \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \\
 (1, 0) \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \frac{3}{8} \quad -\frac{1}{8} \\
 (0, 1) \quad -\frac{1}{4\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \\
 \\
 S = 0 \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
 (1, 1) \quad \frac{5}{8} \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \\
 (0, 0) \quad \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \frac{3}{8}
 \end{array}$$

Cuadro B.9: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_4)$. Misma convención que en Fig. B.1.

Operador Spin $[\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_j]$: Términos directos

Mostramos ahora los coeficientes de spin tensoriales para los términos directos.

$$\begin{array}{r}
 (S, S') = (2, 2) \quad (1, 1) \\
 (1, 1) \quad \sqrt{\frac{35}{3}} \\
 \\
 (S, S') = (1, 1) \quad (1, 1) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \\
 (1, 1) \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{\frac{5}{2}} \quad -\sqrt{\frac{5}{2}} \\
 (1, 0) \quad \sqrt{\frac{5}{2}} \quad 0 \quad -\sqrt{5} \\
 (0, 1) \quad -\sqrt{\frac{5}{2}} \quad -\sqrt{5} \quad 0 \\
 \\
 (S, S') = (0, 0) \quad (1, 1) \quad (0, 0) \\
 (1, 1) \quad 0 \quad 0 \\
 (0, 0) \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

Cuadro B.10: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_3]$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{cccc}
(S, S') = (2, 2) & (1, 1) & & \\
(1, 1) & \sqrt{\frac{35}{3}} & & \\
(S, S') = (1, 1) & (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\
(1, 1) & \sqrt{5} & -\sqrt{\frac{5}{2}} & -\sqrt{\frac{5}{2}} \\
(1, 0) & -\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & \sqrt{5} \\
(0, 1) & -\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{5} & 0 \\
(S, S') = (0, 0) & (1, 1) & (0, 0) & \\
(1, 1) & 0 & 0 & \\
(0, 0) & 0 & 0 &
\end{array}$$

Cuadro B.11: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{cccc}
(S, S') = (2, 2) & (1, 1) & & \\
(1, 1) & \sqrt{\frac{35}{3}} & & \\
(S, S') = (1, 1) & (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\
(1, 1) & \sqrt{5} & \sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\
(1, 0) & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & \sqrt{5} \\
(0, 1) & \sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{5} & 0 \\
(S, S') = (0, 0) & (1, 1) & (0, 0) & \\
(1, 1) & 0 & 0 & \\
(0, 0) & 0 & 0 &
\end{array}$$

Cuadro B.12: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_3]$. Misma convención que en Fig. B.1.

$$\begin{array}{cccc}
 (S, S') = (2, 2) & (1, 1) & & \\
 (1, 1) & \sqrt{\frac{35}{3}} & & \\
 & & (S, S') = (1, 1) & (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\
 & & (1, 1) & \sqrt{5} & -\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\
 & & (1, 0) & -\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & -\sqrt{5} \\
 & & (0, 1) & \sqrt{\frac{5}{2}} & -\sqrt{5} & 0 \\
 & & & & & & (S, S') = (0, 0) & (1, 1) & (0, 0) \\
 & & & & & & (1, 1) & 0 & 0 \\
 & & & & & & (0, 0) & 0 & 0
 \end{array}$$

Cuadro B.13: Coeficientes de spin para términos directos. Diagrama $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_4]$. Misma convención que en Fig. B.1.

B.2.2. Operadores de Sabor

Los elementos de matriz de los operadores de sabor dependerán del contenido quark de los estados mesón-mesón que consideremos. Entre todos los que estudiamos tenemos, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_n D_n &= n\bar{c} c\bar{n}, \\
 \bar{D}_s D_s &= s\bar{c} c\bar{s}, \\
 \bar{D}_s \eta(n\bar{n}) &= s\bar{c} n\bar{n}, \\
 \bar{D}_s \eta(s\bar{s}) &= s\bar{c} s\bar{s}, \\
 \bar{D}_n K &= n\bar{c} s\bar{n},
 \end{aligned}$$

numerando los quarks de 1 a 4 de izquierda a derecha en cada par de mesones considerado. Aunque en un primer momento parece difícil generalizar dichos coeficientes, estudiaremos diferentes operadores que se corresponden con diferentes bosones de goldstone.

Operador Isospin $(\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j)$

El operador de isospin, presente en el intercambio de un pión, aparece entre quarks ligeros u, d , es por tanto importante cuando tenemos quarks o antiquarks ligeros n en diferentes mesones, como por ejemplo en las reacciones

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_n D_n &\rightarrow \bar{D}_n D_n, \\
 \bar{D}_n K &\rightarrow \bar{D}_n K
 \end{aligned}$$

aunque hay otras, como, por ejemplo, las que involucran mesones B_n .

Dicho coeficiente se puede expresar como:

$$\langle nn | \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j | nn \rangle = 2I(I+1) - 3 = \begin{cases} -3 & \text{si } I = 0 \\ 1 & \text{si } I = 1 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

con I el isospin total del estado AB . Por supuesto, este coeficiente es cero para los diagramas que no involucren quarks ligeros n (o \bar{n}).

Este coeficiente es el mismo para el caso nn y $n\bar{n}$. El signo del cambio de G -paridad lo introducimos en el potencial del π directamente. Hay que tener cuidado porque esto no es cierto para los diagramas de aniquilación, donde se toma con el signo incluido.

Operador $\sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \lambda_j^a)$

Este operador es el que presenta el kaón K o el escalar extraño κ , y nos cambia sabores, es decir, nos mezcla quarks ligeros con extraños. Por lo tanto, participará en reacciones del estilo,

$$\begin{aligned} \bar{D}_n D_n &\rightarrow \bar{D}_s D_s, \\ \bar{D}_n K &\rightarrow \bar{D}_s \eta(n\bar{n}) \end{aligned}$$

donde $\eta(n\bar{n})$ representa la parte $n\bar{n}$ de la función de onda de la η . Tendremos entonces dos tipos de reacciones

▪ **Caso** $ns \rightarrow sn$

Es un cambio de extrañeza que aparece, por ejemplo, en la reacción $\bar{D}_n K \rightarrow \bar{D}_s \eta(n\bar{n})$ (que en ese caso es $\bar{n}\bar{s} \rightarrow \bar{s}\bar{n}$, pero el cálculo es idéntico). Así, al tener una interacción quark-quark (o antiquark-antiquark), el coeficiente de sabor correspondiente será:

$$\langle ns | \sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \lambda_j^a) | sn \rangle = 2 \quad (\text{B.8})$$

sin ninguna restricción de isospin, debido a que el isospin del quark s es cero.

▪ **Caso** $n\bar{n} \rightarrow s\bar{s}$

Es el diagrama para reacciones del tipo $\bar{D}_n D_n \rightarrow \bar{D}_s D_s$. En este caso, tenemos una interacción quark-antiquark, por lo que debemos aplicar el operador G -paridad. Como ya comentamos en el Capítulo 1, la G -paridad no está bien definida para $SU(3)$, por lo tanto tendremos que calcular directamente el operador transformado $\langle n\bar{n} | \sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \lambda_j^{aT}) | s\bar{s} \rangle$.

$$\langle n\bar{n} | \sum_{a=4}^7 (\lambda_i^a \lambda_j^a) | s\bar{s} \rangle = \begin{cases} 2\sqrt{2} & \text{si } I = 0 \\ 0 & \text{si } I = 1 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

En este caso sí se aprecia que el isospin total de $n\bar{n}$ debe ser $I = 0$, debido a que el isospin del estado final es cero y se debe conservar.

Operador $(\vec{\lambda}_i^8 \cdot \vec{\lambda}_j^8)$

Es el operador que nos proporciona la parte singlete-singlete del bosón η . No cambia sabores y aparecerá en gran número de reacciones. Se puede hacer analíticamente sin problemas. Presentaremos las reacciones base en las que puede aparecer.

- **Caso $nn \rightarrow nn$**

También válido para el caso quark-antiquark $n\bar{n} \rightarrow n\bar{n}$. El coeficiente será:

$$\langle nn | \lambda_i^8 \lambda_j^8 | nn \rangle = \frac{1}{3} \quad (\text{B.10})$$

- **Caso $ss \rightarrow ss$**

También incluye el caso quark-antiquark $s\bar{s} \rightarrow s\bar{s}$. El coeficiente será:

$$\langle ss | \lambda_i^8 \lambda_j^8 | ss \rangle = \frac{4}{3} \quad (\text{B.11})$$

- **Caso $ns \rightarrow ns$**

También válido para el caso quark-antiquark $n\bar{s} \rightarrow n\bar{s}$. El cálculo del coeficiente nos da:

$$\langle ns | \lambda_i^8 \lambda_j^8 | ns \rangle = -\frac{2}{3} \quad (\text{B.12})$$

Diagramas de Aniquilación

Buscamos ahora los coeficientes para los potenciales de aniquilación a través de un gluón y un pión. Aunque podemos tener aniquilación a través de otros bosones, el pión y el gluón son los más importantes, y nos aportarán diagramas extras a nivel quark (que podemos apreciar en la Fig. B.1).

Esta interacción se puede derivar del modelo de quarks constituyentes a partir del intercambio de un π y un gluón. En espacio de momentos se puede escribir como:

$$\begin{aligned} V_{q\bar{q}}^{OGE} &= \frac{4\pi\alpha_s}{(2\pi)^3} \frac{1}{4m_q^2} \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{12} \vec{\lambda}_i^c \vec{\lambda}_j^c \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \vec{\tau}_i \vec{\tau}_j \right), \\ V_{q\bar{q}}^{OPE} &= \frac{g_{ch}^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4m_q^2 - m_\pi^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \vec{\lambda}_i^c \vec{\lambda}_j^c \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vec{\tau}_i \vec{\tau}_j \right). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

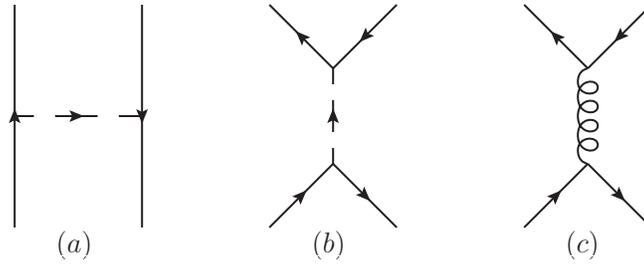


Figura B.1: Diagramas que contribuyen a la interacción microscópica $q\bar{q}$, donde (a) son los términos de intercambio de un bosón de Goldstone y (b), (c) los términos de aniquilación a través de un bosón o un gluón, respectivamente.

Como vemos, estos diagramas dependerán de los propios elementos de matriz de spin, isospin y color. Podemos entonces particularizarlos para el caso de un proceso mesón-mesón $AB \rightarrow A'B'$. Entonces, aplicando los elementos que hemos estudiado anteriormente tendremos:

$$\begin{aligned} V_{AB}^{OGE} &= \frac{4\pi\alpha_s}{(2\pi)^3} \frac{1}{4m_q^2} \frac{4}{9} (3\delta_{AB} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma})_{AB}) \delta_{I,0}, \\ V_{AB}^{OPE} &= \frac{g_{ch}^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{4m_q^2 - m_\pi^2} \frac{1}{3} (\delta_{AB} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma})_{AB}) \delta_{I,1}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

con la particularidad de que la aniquilación a través de un gluón se realiza entre todo tipo de sabores ($n\bar{n}$, $s\bar{s}$, $c\bar{c}$ y $b\bar{b}$) y el pión sólo puede aniquilar quarks ligeros, es decir, reacciones del tipo $n\bar{n} \rightarrow n\bar{n}$.

El diagrama a través de un pión se puede generalizar para todo tipo de pseudoescalares, como la η . Pero esta contribución no la tendremos en cuenta por tener un efecto pequeño en la interacción.

B.2.3. Operador de Color

La función de onda de color para mesones es:

$$\xi_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{c_1, c_2=1}^3 \delta_{1,2}^{(c)}, \quad (\text{B.15})$$

totalmente simétrica, donde c_i representa el color del quark i .

En el caso de términos directos, el término de color estará regido por una interacción singlete-singlete. Por lo tanto, los coeficientes de color serán:

$$\begin{aligned} \langle \xi_c^A \xi_c^B | \xi_c^{A'} \xi_c^{B'} \rangle &= 1, \\ \langle \xi_c^A \xi_c^B | \lambda_i^c \lambda_j^c | \xi_c^{A'} \xi_c^{B'} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

es decir, la identidad nos da un factor 1, mientras que la interacción $\lambda^c \lambda^c$ es cero al no haber intercambio de color entre singletes.

Los términos de intercambio, por otro lado, sí nos proporcionan una interacción diferente de cero al existir un intercambio de quarks entre mesones. Así pues, los coeficientes de color serán:

$$\begin{aligned} \langle \xi_c^A \xi_c^B | \xi_c^{A'} \xi_c^{B'} \rangle &= \frac{1}{3}, \\ \langle \xi_c^A \xi_c^B | \lambda_i^c \lambda_j^c | \xi_c^{A'} \xi_c^{B'} \rangle &= \begin{cases} -\frac{16}{9} & \text{para diagramas } (ij) = (14), (23) \\ \frac{16}{9} & \text{para diagramas } (ij) = (13), (24) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

B.2.4. Funciones de onda de spin

Para obtener los coeficientes de spin hemos tenido que utilizar las funciones de onda de spin de cuatro partículas, que reproducimos en la Tabla. B.14.

| $(S_A, S_B)S, M$ | Funciones de onda de spin |
|------------------|---|
| $(1, 1)2, +2$ | $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow = \eta_{1+1} \otimes \eta_{1+1}$ |
| $(1, 1)2, +1$ | $\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) = \eta_{10} \otimes \eta_{1+1} + \eta_{1+1} \otimes \eta_{10}$ |
| $(1, 1)2, 0$ | $\frac{1}{\sqrt{6}}(\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\uparrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) =$ $= \eta_{1+1} \otimes \eta_{1-1} + \eta_{10} \otimes \eta_{10} + \eta_{1-1} \otimes \eta_{1+1}$ |
| $(1, 1)1, +1$ | $\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\uparrow) = \eta_{10} \otimes \eta_{1+1} - \eta_{1+1} \otimes \eta_{10}$ |
| $(1, 1)0, 0$ | $\frac{1}{\sqrt{12}}(2\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow + 2\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow) =$ $= 2\eta_{1+1} \otimes \eta_{1-1} - \eta_{10} \otimes \eta_{10} + 2\eta_{1-1} \otimes \eta_{1+1}$ |
| $(1, 0)1, +1$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow) = \eta_{1+1} \otimes \eta_{00}$ |
| $(0, 0)0, 0$ | $\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\downarrow) = \eta_{00} \otimes \eta_{00}$ |

Cuadro B.14: Funciones de onda de spin para 4 partículas

B.3. Coeficientes para el sistema Barión-Antibarión

En particular, trabajaremos con los bariones N , Λ y Σ . Las funciones de onda de estos estados se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{MA} \otimes \chi_{MA} + p_{MS} \otimes \chi_{MS}), \\
 n &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n_{MA} \otimes \chi_{MA} + n_{MS} \otimes \chi_{MS}), \\
 \Lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)s \otimes \chi_{MA}, \\
 \Sigma^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)s \otimes \chi_{MS}, \\
 \Sigma^+ &= uus \otimes \chi_{MS}, \\
 \Sigma^- &= dds \otimes \chi_{MS}
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 p_{MA} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u, \\
 p_{MS} &= -\frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)u - 2uud], \\
 n_{MA} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d, \\
 n_{MS} &= \frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)d - 2ddu],
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

y donde las funciones de onda de spin son

$$\begin{aligned}
 \chi_{MA} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \uparrow, \\
 \chi_{MS} &= -\frac{1}{\sqrt{6}}[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \uparrow - 2 \uparrow\uparrow\downarrow].
 \end{aligned}$$

Con esto podemos calcular los coeficientes de Spin-Sabor-Color. Ponemos directamente los coeficientes para Barión-Antibarión, con la transformación de G-paridad ya incluida donde corresponda.

B.3.1. Coeficientes escalares

$$N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | $\frac{2}{9}$ | $-\frac{26}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{25}{9}$ |
| (1,0) | $\frac{2}{3}$ | $\frac{26}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{25}{9}$ |
| (0,1) | $\frac{2}{3}$ | $\frac{22}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{9}$ | $\frac{27}{25}$ |
| (1,1) | $\frac{2}{9}$ | $-\frac{22}{81}$ | $\frac{1}{9}$ | $-\frac{1}{9}$ | $-\frac{25}{81}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{9}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{27}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{27}$ |

Cuadro B.15: Coeficientes de intercambio

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{a_{36}}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{a_{36}})$ |
|-------|---|---|
| (0,0) | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8}{9}$ |
| (1,0) | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{8}{27}$ |
| (0,1) | $\frac{14}{9}$ | $-\frac{26}{27}$ |
| (1,1) | $\frac{14}{9}$ | $\frac{26}{81}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{a_{36}}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{a_{36}})$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^{8_{36}}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^{8_{36}})$ |
|-------|---|---|--|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{2}{9}$ | $-\frac{14}{27}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{14}{81}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{27}$ | $\frac{8}{81}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{27}$ | $-\frac{8}{243}$ |

Cuadro B.16: Coeficientes de Aniquilación

$$N\bar{N} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | $3\sqrt{2}$ | $-9\sqrt{2}$ | 0 | 0 | 0 |
| (1,0) | $3\sqrt{2}$ | $3\sqrt{2}$ | 0 | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | $3\sqrt{2}$ | $-9\sqrt{2}$ | 0 | 0 |
| (1,0) | $3\sqrt{2}$ | $3\sqrt{2}$ | 0 | 0 |

Cuadro B.17: Coeficientes de intercambio. Factor 3 de multiplicidad ya incluido.

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ |
|-------|--|--|
| (0,0) | 0 | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8)$ |
|-------|--|--|---------------------------------|---|
| (0,0) | 0 | 0 | $-\sqrt{2}$ | $3\sqrt{2}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ |

Cuadro B.18: Coeficientes de Aniquilación. Factor 3 ya incluido

$$N\bar{N} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,1) | $-2\sqrt{3}$ | $-2\sqrt{3}$ | 0 | 0 | 0 |
| (1,1) | $-2\sqrt{3}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,1) | $-2\sqrt{3}$ | $-2\sqrt{3}$ | 0 | 0 |
| (1,1) | $-2\sqrt{3}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 0 | 0 |

Cuadro B.19: Coeficientes de intercambio. Factor 3 ya incluido

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT})$ |
|-------|---|---|
| (0,1) | 0 | 0 |
| (1,1) | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT})$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------------|--|
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ |

Cuadro B.20: Coeficientes de Aniquilación. Factor 3 ya incluido

$$N\bar{N} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | 0 |
| (1,0) | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | 0 |
| (0,1) | 2 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 0 |
| (1,1) | 2 | $\frac{2}{9}$ | 0 | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ | 0 | 0 |
| (1,0) | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$ | 0 | 0 |
| (0,1) | 2 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,1) | 2 | $\frac{2}{9}$ | 0 | 0 |

Cuadro B.21: Coeficientes de intercambio. Factor 3 ya incluido

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT})$ |
|-------|---|---|
| (0,0) | 0 | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 |
| (0,1) | 0 | 0 |
| (1,1) | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^{aT})$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{27\sqrt{3}}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{27}$ |

Cuadro B.22: Coeficientes de Aniquilación. Factor 3 ya incluido

$$\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | $\frac{4}{3}$ | -4 | -3 | 0 | 0 |
| (1,0) | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 1 | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | -4 |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (1,0) | $-\frac{3}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_1^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 | $-\frac{3}{3}$ | 0 |

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (1,0) | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |

Cuadro B.23: Coeficientes de intercambio

| | | | | | |
|-------|--|---|--|---------------------------------|--|
| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ | | |
| (0,0) | 0 | | 0 | | |
| (1,0) | 0 | | 0 | | |
| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8)$ |
| (0,0) | 0 | | 0 | $\frac{4}{3}$ | -4 |
| (1,0) | 0 | | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |
| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | | |
| (0,0) | 0 | | 0 | | |
| (1,0) | 0 | | 0 | | |
| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=4}^7 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a)$ | $\lambda_{16}^8 \lambda_{16}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_{16}^8 \lambda_{16}^8)$ |
| (0,0) | 2 | | 0 | 0 | 0 |
| (1,0) | 2 | | 0 | 0 | 0 |
| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)$ | $(\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | | |
| (0,0) | $\frac{3}{2}$ | | 0 | | |
| (1,0) | $\frac{3}{2}$ | | 0 | | |
| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)$ | $(\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | $\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8)$ |
| (0,0) | 0 | | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 |
| (1,0) | 0 | | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 |

Cuadro B.24: Coeficientes de Aniquilación

$$\Lambda \bar{\Sigma} \rightarrow \Lambda \bar{\Sigma}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,1) | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | 1 | 0 | 0 |
| (1,1) | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,1) | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | 0 | 0 |
| (1,1) | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6) (\lambda_1^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,1) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{9}$ |

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,1) | $\frac{1}{3}$ | -1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6}$ |
| (1,1) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |

Cuadro B.25: Coeficientes de intercambio

| | | | | | |
|-------|--|---|--|---------------------------------|--|
| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ | | |
| (0,1) | 0 | | 0 | | |
| (1,1) | 0 | | 0 | | |
| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8)$ |
| (0,1) | 0 | | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |
| (1,1) | 0 | | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | | |
| (0,1) | 0 | | 0 | | |
| (1,1) | 0 | | 0 | | |
| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)$ | $(\sum_{a=4}^7 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a)$ | $\lambda_{16}^8 \lambda_{16}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_{16}^8 \lambda_{16}^8)$ |
| (0,1) | 2 | | -2 | 0 | 0 |
| (1,1) | 2 | | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 |
| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)$ | $(\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | | |
| (0,1) | $\frac{3}{2}$ | | $-\frac{2}{3}$ | | |
| (1,1) | $\frac{3}{2}$ | | $-\frac{1}{6}$ | | |
| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)$ | $(\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | $\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8)$ |
| (0,1) | 0 | | 0 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ |
| (1,1) | 0 | | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{18}$ |

Cuadro B.26: Coeficientes de Aniquilación

$$\Sigma\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\Sigma$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|--|---------------------------------------|---|--|
| (0,0) | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,0) | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |
| (0,1) | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,1) | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|--|------------------------------|---|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ |
|-------|---|--|---------------------------------------|---|--|
| (0,0) | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,0) | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{27}$ | $-\frac{2}{9}$ | 0 | 0 |
| (0,1) | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,1) | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{27}$ | $-\frac{2}{9}$ | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_6^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_1^8 \lambda_6^{8T})$ |
|-------|---|--|------------------------------|---|
| (0,0) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|-------|---|--|---------------------------------------|---|--|
| (0,0) | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{27}$ |
| (1,0) | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{8}{27}$ |
| (0,1) | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{16}{9}$ | $-\frac{4}{3}$ | 1 | $\frac{1}{27}$ |
| (1,1) | $\frac{4}{3}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | 1 | $\frac{9}{9}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|-------|---|--|------------------------------|---|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |

Cuadro B.27: Coeficientes de intercambio

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=1}^3 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ |
|-------|--|---|
| (0,0) | 0 | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 |
| (0,1) | 0 | 0 |
| (1,1) | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=4}^7 \lambda_{36}^a \lambda_{36}^a)$ | $\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8$ | $(\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_{36}^8 \lambda_{36}^8)$ |
|-------|--|---|---------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ |
|-------|--|---|
| (0,0) | 0 | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 |
| (0,1) | 0 | 0 |
| (1,1) | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\sum_{a=4}^7 \lambda_{16}^a \lambda_{16}^a)$ | $\lambda_{16}^8 \lambda_{16}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_6)(\lambda_{16}^8 \lambda_{16}^8)$ |
|-------|--|---|---------------------------------|--|
| (0,0) | 2 | $\frac{4}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,0) | 2 | $-\frac{4}{9}$ | 0 | 0 |
| (0,1) | 2 | $\frac{4}{3}$ | 0 | 0 |
| (1,1) | 2 | $-\frac{4}{9}$ | 0 | 0 |

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ |
|-------|--|---|
| (0,0) | $\frac{11}{6}$ | $\frac{11}{54}$ |
| (1,0) | $\frac{11}{6}$ | $\frac{22}{27}$ |
| (0,1) | 1 | $\frac{1}{9}$ |
| (1,1) | 1 | $\frac{4}{9}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | $\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4)(\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8)$ |
|-------|--|---|---------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{18}$ | $-\frac{2}{27}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{2}{81}$ |
| (0,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{9}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{27}$ |

Cuadro B.28: Coeficientes de Aniquilación

$$\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,0) | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ |
| (1,0) | 0 | $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (1,0) | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cuadro B.29: Coeficientes de intercambio

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^{aT})$ |
|-------|---|---|
| (0,0) | 0 | $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ |
| (1,0) | 0 | $-\frac{1}{6\sqrt{3}}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^{aT})$ | $\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------------|--|
| (0,0) | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{6\sqrt{3}}$ |
| (1,0) | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{18\sqrt{3}}$ |

Cuadro B.30: Coeficientes de Aniquilación

$$\Lambda\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$$

| (S,T) | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|-------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| (0,1) | 0 | $-\frac{4}{\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{6\sqrt{3}}$ |
| (1,1) | 0 | $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|-------|---|---|------------------------------|--|
| (0,1) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (1,1) | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cuadro B.31: Coeficientes de intercambio

| (S,T) | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ |
|-------|--|--|
| (0,1) | 0 | $\frac{5}{12\sqrt{3}}$ |
| (1,1) | 0 | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ |

| (S,T) | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{14}^a \lambda_{14}^a)$ | $\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8$ | $(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_4) (\lambda_{14}^8 \lambda_{14}^8)$ |
|-------|--|--|---------------------------------|---|
| (0,1) | 0 | 0 | 0 | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ |
| (1,1) | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{9\sqrt{3}}$ |

Cuadro B.32: Coeficientes de Aniquilación

B.3.2. Coeficientes tensoriales

$$N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$$

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|---|---|---|---|
| (1,1)0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{52\sqrt{5}}{27}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{50\sqrt{5}}{27}$ |
| (1,1)1 | $\frac{2}{9}$ | $-\frac{44\sqrt{5}}{81}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ | $-\frac{1}{9}$ | $-\frac{50\sqrt{5}}{81}$ |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|---|------------------------------|--|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{27}$ |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{27}$ |

Cuadro B.33: Coeficientes tensoriales

$$N\bar{N} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$$

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|---|---|---|---|
| (1,1)0 | $3\sqrt{2}$ | $6\sqrt{10}$ | 0 | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|---|------------------------------|--|
| (1,1)0 | $3\sqrt{2}$ | $6\sqrt{10}$ | 0 | 0 |

Cuadro B.34: Coeficientes tensoriales. Factor 3 de multiplicidad ya incluido.

$$N\bar{N} \rightarrow \Lambda\bar{\Sigma}$$

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|---|---|---|---|
| (1,1)0 | $-2\sqrt{3}$ | $4\sqrt{\frac{5}{3}}$ | 0 | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|---|------------------------------|--|
| (1,1)0 | $-2\sqrt{3}$ | $4\sqrt{\frac{5}{3}}$ | 0 | 0 |

Cuadro B.35: Coeficientes tensoriales. Factor 3 de multiplicidad ya incluido.

$N\bar{N} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{3}}$ | 0 | 0 | 0 |
| (1,1)1 | 2 | $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | 0 | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{10}{3}}$ | 0 | 0 |
| (1,1)1 | 2 | $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | 0 | 0 |

Cuadro B.36: Coeficientes tensoriales. Factor 3 de multiplicidad ya incluido.

 $\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ | $2\sqrt{5}$ | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ |

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\lambda_1^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 0 |

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |

Cuadro B.37: Coeficientes tensoriales

$$\Lambda \bar{\Sigma} \rightarrow \Lambda \bar{\Sigma}$$

| | | | | | |
|---------|---|---|---|--|---|
| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
| (1,1)1 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{8\sqrt{5}}{9}$ | $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$ | 0 | 0 |
| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ | |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{8\sqrt{5}}{9}$ | |
| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ |
| (1,1)1 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ | 0 | 0 |
| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2 (\lambda_1^8 \lambda_6^{8T})$ | |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | |
| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2 (\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
| (1,1)1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ |
| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2 (\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ | |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | |

Cuadro B.38: Coeficientes tensoriales

$$\Sigma\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$$

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\vec{\lambda}_3 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ | 0 | 0 |
| (1,1)1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ | $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_3^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_3^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_3 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\lambda_3^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ |

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_6^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ | $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | 0 | 0 |
| (1,1)1 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ | $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$ | 0 | 0 |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_6^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_6^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_6]^2(\lambda_1^8 \lambda_6^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ |

| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
|---------|---|--|---|---|--|
| (1,1)0 | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{8\sqrt{5}}{27}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{9}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{16\sqrt{5}}{27}$ |
| (1,1)1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{32\sqrt{5}}{27}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{9}$ | 1 | $\frac{8\sqrt{5}}{9}$ |

| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (1,1)0 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ |
| (1,1)1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8\sqrt{5}}{27}$ |

Cuadro B.39: Coeficientes tensoriales

$$\Lambda\bar{\Lambda} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$$

| | | | | | |
|---------|---|--|---|---|--|
| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
| (1,1)0 | 0 | $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ |

| | | | | |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
| (1,1)0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cuadro B.40: Coeficientes tensoriales

$$\Lambda\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\bar{\Sigma}$$

| | | | | | |
|---------|---|--|---|---|--|
| (S,S')T | $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_4^T)$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=1}^3 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ |
| (1,1)1 | 0 | $\frac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ | 0 | 0 | $\frac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ |

| | | | | |
|---------|---|--|------------------------------|---|
| (S,S')T | $\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\sum_{a=4}^7 \lambda_1^a \lambda_4^{aT})$ | $\lambda_1^8 \lambda_4^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_4]^2(\lambda_1^8 \lambda_4^{8T})$ |
| (1,1)1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cuadro B.41: Coeficientes tensoriales

B.4. Coeficientes para el sistema Barión-Mesón

En este caso, trabajaremos con el nucleón y un mesón $Q\bar{n}$ con $Q = c, b$ en onda S. Las funciones de onda de isospin que usaremos, en el caso de DN , serán:

| $(I_A, I_B)I, M_I$ | Funciones de onda de isospin |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})0, 0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}(D^+n + D^0p)$ |
| $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, +1$ | D^+p |
| $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, 0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}(D^+n - D^0p)$ |
| $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, -1$ | D^0n |

y las de spin

| $(S_A, S_B)S, M$ | Funciones de onda de spin |
|---|--|
| $(0, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ | $\eta_{00} \otimes \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ |
| $(0, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | $\eta_{00} \otimes \eta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ |
| $(1, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}\eta_{1+1} \otimes \eta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\eta_{10} \otimes \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ |
| $(1, \frac{1}{2})\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}\eta_{10} \otimes \eta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_{1-1} \otimes \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ |
| $(1, \frac{1}{2})\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}$ | $\eta_{1+1} \otimes \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ |
| $(1, \frac{1}{2})\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}\eta_{1+1} \otimes \eta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_{10} \otimes \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ |
| $(1, \frac{1}{2})\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}\eta_{10} \otimes \eta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\eta_{1-1} \otimes \eta_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ |
| $(1, \frac{1}{2})\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ | $\eta_{1-1} \otimes \eta_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ |

Igual que antes, ponemos directamente los coeficientes para Barión-Mesón, con la transformación de G-paridad ya incluida donde corresponda.

B.4.1. $(Q\bar{n})N \rightarrow (Q\bar{n})N$

Coeficientes escalares

| $T(s'_1, s_1)S$ | $\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_5$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_5$ | $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) (\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT})$ |
|------------------------|---|---|---------------------------------------|---|---|
| $0(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| $0(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | $\frac{16}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | 0 | $5\sqrt{3}$ |
| $0(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 4 | $-\frac{32}{3}$ | -2 | 3 | -10 |
| $0(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 4 | $\frac{16}{3}$ | 1 | 3 | 5 |
| $1(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $1(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | $-\frac{4}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | 0 | $-\frac{5}{\sqrt{3}}$ |
| $1(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ | -2 | -1 | $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ |
| $1(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | 1 | -1 | $-\frac{5}{3}$ |

| $T(s'_1, s_1)S$ | $\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) (\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT})$ | $\lambda_2^8 \lambda_5^{8T}$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) (\lambda_2^8 \lambda_5^{8T})$ |
|------------------------|---|---|------------------------------|--|
| $0(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $0(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $0(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{2}{3}$ |
| $0(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| $1(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $1(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $1(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{2}{3}$ |
| $1(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ |

Cuadro B.42: Coeficientes de intercambio. Factor 3 de multiplicidad ya incluido en los coeficientes. (s_1, s'_1) se refieren al spin del mesón inicial y final, respectivamente, mientras que S es el spin total.

| $T(s'_1, s_1)S$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_{25}^a \lambda_{25}^a$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) (\sum_{a=1}^3 \lambda_{25}^a \lambda_{25}^a)$ |
|------------------------|--|--|
| $0(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 3 | 0 |
| $0(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | $-\sqrt{3}$ |
| $0(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 3 | 2 |
| $0(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 3 | -1 |
| $1(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 5 | 0 |
| $1(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | $\frac{7}{\sqrt{3}}$ |
| $1(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 5 | $-\frac{14}{3}$ |
| $1(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 5 | $\frac{7}{3}$ |

| $T(s'_1, s_1)S$ | $\sum_{a=4}^7 \lambda_{25}^a \lambda_{25}^a$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) (\sum_{a=4}^7 \lambda_{25}^a \lambda_{25}^a)$ | $\lambda_{25}^8 \lambda_{25}^8$ | $(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_5) (\lambda_{25}^8 \lambda_{25}^8)$ |
|------------------------|--|--|---------------------------------|---|
| $0(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $0(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 0 | $\sqrt{3}$ |
| $0(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | -2 |
| $0(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $1(0,0)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| $1(0,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ |
| $1(1,1)_{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ |
| $1(1,1)_{\frac{3}{2}}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{9}$ |

Cuadro B.43: Coeficientes de Aniquilación. Factor 3 de multiplicidad ya incluido en los coeficientes. (s_1, s'_1) se refieren al spin del mesón inicial y final, respectivamente, mientras que S es el spin total.

Coeficientes tensoriales

| $(S,S')T$ | $\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_5$ | $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 (\vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_5)$ | $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2$ | $\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 (\sum_{a=1}^3 \lambda_2^a \lambda_5^{aT})$ |
|-------------------------------|---|---|---|---|---|
| $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})0$ | 4 | $-\frac{16\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ | $-\sqrt{\frac{10}{3}}$ | 3 | $-5\sqrt{\frac{10}{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})0$ | 4 | $\frac{16\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ | $\sqrt{\frac{10}{3}}$ | 3 | $5\sqrt{\frac{10}{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})0$ | 4 | $\frac{32\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ | $2\sqrt{\frac{10}{3}}$ | 3 | $10\sqrt{\frac{10}{3}}$ |
| $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})1$ | 0 | $\frac{4\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ | $-\sqrt{\frac{10}{3}}$ | -1 | $\frac{5\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})1$ | 0 | $-\frac{4\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ | $\sqrt{\frac{10}{3}}$ | -1 | $-\frac{5\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})1$ | 0 | $-\frac{8\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ | $2\sqrt{\frac{10}{3}}$ | -1 | $-\frac{10\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |

| $(S,S')T$ | $\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT}$ | $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 (\sum_{a=4}^7 \lambda_2^a \lambda_5^{aT})$ | $\lambda_2^8 \lambda_5^{8T}$ | $[\vec{\sigma}_2 \otimes \vec{\sigma}_5]^2 (\lambda_2^8 \lambda_5^{8T})$ |
|-------------------------------|---|---|------------------------------|--|
| $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})0$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})0$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})0$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})1$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |
| $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})1$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$ |

Cuadro B.44: Coeficientes tensoriales. Factor 3 de multiplicidad ya incluido en los coeficientes. Sólo mostramos los coeficientes para $s_1 = s'_1 = 1$, ya que para $s_1 = 0$ ó $s'_1 = 0$ éstos son cero.

Apéndice C

Convenio de C-paridad

En este Apéndice planteamos el problema de construir estados de C -paridad definida para mesones distinguibles, debido a que, en general, los estados físicos tienen C -paridad definida. Si queremos describir dichos estados como moléculas mesónicas, debemos aprender a construir los autoestados del operador.

C.1. Operador de C-paridad en sistema Mesón-Antimesón

Es bien conocido que los mesones compuestos por partículas idénticas son autoestados de C -paridad con autovalor $(-1)^{L+S}$. Sin embargo, para partículas indistinguibles deberemos hacer combinaciones de estados diferentes, pues la aplicación del operador de conjugación de carga nos llevará a otro estado diferente, es decir, no serán autovectores. En esta sección veremos cómo se transforma un mesón general cuando le aplicamos el operador de C -paridad.

En primer lugar, definiremos nuestro estado de mesón como,

$$|r_{12}JM; LSf_1\bar{f}_2\rangle = \sum_{M_L M_S} (LM_L SM_S | JM) R(r_{12}) Y_{LM_L}(\hat{r}_{12}) |s_1 s_2; SM_S\rangle |f_1 \bar{f}_2\rangle \quad (\text{C.1})$$

en una base de momento angular definida y con f_1 (\bar{f}_2) el sabor del quark (antiquark).

La transformación de C -paridad sobre dicho estado resulta,

$$C|r_{12}JM; LSf_1\bar{f}_2\rangle = \sum_{M_L M_S} (LM_L SM_S | JM) R(r_{12}) Y_{LM_L}(\hat{r}_{12}) |s_1 s_2; SM_S\rangle |\bar{f}_1 f_2\rangle \quad (\text{C.2})$$

pues sólo cambia quark por antiquark.

Para poder relacionarlo con el estado de mesón original debemos recuperar el orden correcto de partículas, y para ello aplicamos las propiedades de los armónicos esféricos y la base de momento angular,

$$\begin{aligned}
Y_{LM_L}(\hat{r}_{12}) &= Y_{LM_L}(-\hat{r}_{21}) = (-1)^L Y_{LM_L}(\hat{r}_{21}) \\
|s_1 s_2; SM_S\rangle &= (-1)^{S-s_1-s_2} |s_2 s_1; SM_S\rangle \\
|\bar{f}_1 f_2\rangle &= -|f_2 \bar{f}_1\rangle
\end{aligned} \tag{C.3}$$

donde el signo menos de la base de sabor viene de considerar fermiones.

Así pues,

$$\begin{aligned}
C|r_{12}JM; LSf_1\bar{f}_2\rangle &= (-1)^{L+S-s_1-s_2+1} \sum_{M_L M_S} (LM_L SM_S | JM) \times \\
&\quad \times R(r_{21}) Y_{LM_L}(\hat{r}_{21}) |s_2 s_1; SM_S\rangle |f_2 \bar{f}_1\rangle \\
&= (-1)^{L+S-s_1-s_2+1} |r_{21}JM; LSf_2\bar{f}_1\rangle
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Como caso particular, vemos que si los dos sabores son el mismo, $f_1 = f_2 = f$, entonces

$$C|rJM; LSf\bar{f}\rangle = (-1)^{L+S-s_1-s_2+1} |rJM; LSf\bar{f}\rangle$$

el estado es autoestado de C -paridad con autovalor $(-1)^{L+S}$ (ya que $s_1 = s_2 = s$ y $2s - 1$ es par). Con lo que recuperamos el resultado conocido para partículas indistinguibles.

Pasemos ahora a considerar un estado de dos mesones AB ,

$$\begin{aligned}
|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle &= \sum_{M_A, M_B, M, M_{AB}} (LM J_{AB} M_{AB} | J_T M_T) (J_A M_A J_B M_B | J_{AB} M_{AB}) \times \\
&\quad \times R_{AB}(r_{1234}) Y_{LM}(\hat{r}_{1234}) |r_{12} J_A M_A; L_A S_A f_1 \bar{f}_2\rangle \otimes |r_{34} J_B M_B; L_B S_B f_3 \bar{f}_4\rangle
\end{aligned} \tag{C.5}$$

como estado de dos mesones acoplado a un momento angular total, donde $r_{1234} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 - r_3 - r_4)$.

Al igual que antes, aplicando el operador de C -paridad obtenemos

$$\begin{aligned}
C|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle &= \sum_{M_A, M_B, M, M_{AB}} (LM J_{AB} M_{AB} | J_T M_T) (J_A M_A J_B M_B | J_{AB} M_{AB}) \times \\
&\quad \times R_{AB}(r_{1234}) Y_{LM}(\hat{r}_{1234}) C|r_{12} J_A M_A; L_A S_A \bar{f}_1 f_2\rangle \otimes C|r_{34} J_B M_B; L_B S_B \bar{f}_3 f_4\rangle
\end{aligned}$$

que utilizando el resultado anterior para un estado de mesón resulta,

$$\begin{aligned}
C|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle &= \sum_{M_A, M_B, M, M_{AB}} (LM J_{AB} M_{AB} | J_T M_T) (J_A M_A J_B M_B | J_{AB} M_{AB}) \times \\
&\quad \times R_{AB}(r_{1234}) Y_{LM}(\hat{r}_{1234}) (-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B} \times \\
&\quad \times |r_{21} J_A M_A; L_A S_A f_2 \bar{f}_1\rangle \otimes |r_{43} J_B M_B; L_B S_B f_4 \bar{f}_3\rangle
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Nuestro objetivo es obtener la ordenación $\{f_4\bar{f}_3f_2\bar{f}_1\}$ para poder invertir los mesones al estado BA . Podemos intercambiar los estados de mesón sin añadir una fase adicional, dado que necesitamos 4 intercambios fermiónicos, así

$$\begin{aligned} C|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle &= \sum_{M_A, M_B, M, M_{AB}} (LM J_{AB} M_{AB} | J_T M_T) (J_A M_A J_B M_B | J_{AB} M_{AB}) \times \\ &\times R_{AB}(r_{1234}) Y_{LM}(\hat{r}_{1234}) (-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B} \times \\ &\times |r_{43} J_B M_B; L_B S_B f_4 \bar{f}_3\rangle \otimes |r_{21} J_A M_A; L_A S_A f_2 \bar{f}_1\rangle \end{aligned} \quad (C.7)$$

y ahora, utilizando las propiedades de las funciones de onda radial y angular y la base de momento angular tendremos, como antes,

$$\begin{aligned} R_{AB}(r_{1234}) Y_{LM}(\hat{r}_{1234}) &= (-1)^L R_{BA}(r_{4321}) Y_{LM}(\hat{r}_{4321}) \\ (J_A M_A J_B M_B | J_{AB} M_{AB}) &= (-1)^{J_{AB}-J_A-J_B} (J_B M_B J_A M_A | J_{AB} M_{AB}) \end{aligned} \quad (C.8)$$

donde llamamos $R_{AB} \equiv R_{BA}$ y $J_{BA} \equiv J_{AB}$. Entonces podremos escribir,

$$\begin{aligned} C|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle &= \sum_{M_A, M_B, M, M_{BA}} (LM J_{BA} M_{BA} | J_T M_T) (J_B M_B J_A M_A | J_{BA} M_{BA}) \times \\ &\times R_{BA}(r_{4321}) Y_{LM}(\hat{r}_{4321}) (-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L} \times \\ &\times |r_{43} J_B M_B; L_B S_B f_4 \bar{f}_3\rangle \otimes |r_{21} J_A M_A; L_A S_A f_2 \bar{f}_1\rangle \end{aligned} \quad (C.9)$$

Por lo tanto llegamos a que la aplicación del operador de C-paridad al estado de dos mesones nos deja una fase

$$C|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle = (-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L} |BA; J_T M_T J_{BA} L\rangle$$

Podemos generalizar nuestra convención de C-paridad para todo tipo de moléculas mesónicas. Para construir autoestados de C-paridad bastará con hacer,

$$|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle_C = \mathcal{N} (A(q_1 \bar{q}_2) \bar{B}(q_3 \bar{q}_4) + c (-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L} B(q_4 \bar{q}_3) \bar{A}(q_2 \bar{q}_1)) \quad (C.10)$$

para mesones $|A(q_1 \bar{q}_2; J_A M_A, L_A S_A)\rangle$ y $|B(q_3 \bar{q}_4; J_B M_B, L_B S_B)\rangle$, con $\bar{J}_{AB} = \bar{J}_A + \bar{J}_B$ y siendo c el autovalor de la C-Paridad del estado. Definimos la normalización como $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ con la fase $\eta = c (-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L}$.

Con esto tendremos:

$$C|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle_C = c|AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle_C \quad (C.11)$$

luego realmente es autoestado del operador C con autovalor c .

Esta fase será importante a la hora de calcular elementos de matriz de interacción entre dos moléculas mesónicas diferentes. En ese caso, suponiendo una hamiltoniano \mathcal{H} tendremos,

$$\begin{aligned} \langle AB | \mathcal{H} | CD \rangle &= \mathcal{N}_i \mathcal{N}_f (\langle A\bar{B} | \mathcal{H} | C\bar{D} \rangle + \eta_i \langle B\bar{A} | \mathcal{H} | C\bar{D} \rangle) + \\ &+ \eta_f \langle A\bar{B} | \mathcal{H} | D\bar{C} \rangle + \eta_i \eta_f \langle B\bar{A} | \mathcal{H} | D\bar{C} \rangle) = \\ &= \frac{1+\eta_i\eta_f}{\sqrt{1+\eta_i^2}\sqrt{1+\eta_f^2}} \langle A\bar{B} | \mathcal{H} | C\bar{D} \rangle + \frac{\eta_i+\eta_f}{\sqrt{1+\eta_i^2}\sqrt{1+\eta_f^2}} \langle B\bar{A} | \mathcal{H} | C\bar{D} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

usando las igualdades entre elementos de matriz y suponiendo $\eta_i, \eta_f = \pm 1$. Podemos ver que, si el hamiltoniano conserva C -paridad, cosa que suele ser usual, los elementos de matriz entre estados con diferente fase serán cero.

Debemos comentar que en el *Particle Data Group* (PDG), los mesones también se definen como $q\bar{q}$, pero los antimesones son $\bar{q}q$. En esta convención, la fase obtenida no incluye $(-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B}$. Esta es la convención que utilizan en la Ref. [206], y es diferente de la nuestra.

C.2. Aplicación al caso DD^* : $X(3872)$

Veamos un caso particular en el que se muestre cómo la convención de C -paridad tiene que ser elegida con cuidado para no introducir fases adicionales. Como hemos dicho, en el PDG tendríamos que $D(c\bar{n})$ y $\bar{D}(\bar{c}n)$, mientras que nuestra convención será $\bar{D}(n\bar{c})$. Consideraremos DD^* en onda S . Dependiendo de la convención tomada tendremos los siguientes autoestados de C -paridad positiva,

$$\begin{aligned} C \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (D(c\bar{n})\bar{D}^*(n\bar{c}) - D^*(c\bar{n})\bar{D}(n\bar{c})) \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (D(c\bar{n})\bar{D}^*(n\bar{c}) - D^*(c\bar{n})\bar{D}(n\bar{c})) \\ C \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (D(c\bar{n})\bar{D}^*(\bar{c}n) + D^*(c\bar{n})\bar{D}(\bar{c}n)) \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (D(c\bar{n})\bar{D}^*(\bar{c}n) + D^*(c\bar{n})\bar{D}(\bar{c}n)) \end{aligned}$$

Con esta convención obtenemos el mismo signo para el intercambio de un pión que obtienen Thomas y Close [206]. Esto es posible ya que, aunque la convención de C -Paridad es diferente, los coeficientes de spin nos introducen un menos extra al tener que considerar diferentes diagramas, debido a la antisimetría de la función de onda de spin cero al intercambio de dos fermiones (esto se puede ver explícitamente en los coeficientes de spin del Apéndice B). Según la ordenación anterior, para nuestra convención el intercambio de un pión sería el diagrama (23), mientras que para Thomas y Close sería el diagrama (24).

Por lo tanto, una vez determinado el signo de la C -paridad para la $X(3872) = \frac{1}{\sqrt{2}}(D(c\bar{n})\bar{D}^*(n\bar{c}) - D^*(c\bar{n})\bar{D}(n\bar{c}))$ comprobaremos que este es correcto estudiando el caso del intercambio de un pión, y lo compararemos con el mismo de la Ref. [206].

Las funciones de onda de los mesones involucrados son

$$\begin{aligned}
|D\rangle &= R_D(r) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00 \right\rangle |c\bar{n}\rangle \\
|\bar{D}\rangle &= R_D(r) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00 \right\rangle |n\bar{c}\rangle \\
|D^*\rangle &= R_{D^*}(r) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 1M_S \right\rangle |c\bar{n}\rangle \\
|\bar{D}^*\rangle &= R_{D^*}(r) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 1M_S \right\rangle |n\bar{c}\rangle
\end{aligned} \tag{C.13}$$

con lo que $C|D\rangle = |\bar{D}\rangle$ y $C|D^*\rangle = -|\bar{D}^*\rangle$. Entonces, el estado de dos mesones será

$$\begin{aligned}
|D\bar{D}^*\rangle &= R_D(p_{12})R_{D^*}(p_{34}) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00 \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 1M_S \right\rangle |c\bar{n}n\bar{c}\rangle \\
|D^*\bar{D}\rangle &= R_{D^*}(p_{12})R_D(p_{34}) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 1M_S \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00 \right\rangle |c\bar{n}n\bar{c}\rangle
\end{aligned}$$

y aplicando la transformación de conjugación de carga,

$$\begin{aligned}
C|D\bar{D}^*\rangle &= R_D(p_{12})R_{D^*}(p_{34}) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00 \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 1M_S \right\rangle |\bar{c}n\bar{n}c\rangle \\
&= -R_{D^*}(p_{12})R_D(p_{34}) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 1M_S \right\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00 \right\rangle |\bar{c}n\bar{n}c\rangle = -|D^*\bar{D}\rangle
\end{aligned}$$

Así pues, tendremos dos autoestados de C -paridad diferentes,

$$\begin{aligned}
|\Psi_{D\bar{D}^*}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\bar{D}^*\rangle - |D^*\bar{D}\rangle) \\
|\Psi_{D\bar{D}^*}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\bar{D}^*\rangle + |D^*\bar{D}\rangle)
\end{aligned}$$

con los que $C|\Psi_{D\bar{D}^*}^+\rangle = |\Psi_{D\bar{D}^*}^+\rangle$ y $C|\Psi_{D\bar{D}^*}^-\rangle = -|\Psi_{D\bar{D}^*}^-\rangle$. Esto es cierto para el ordenamiento $q\bar{q}q\bar{q}$, que es el que hemos elegido.

Ahora consideraremos la parte central de intercambio de un pión (OPE) entre los quarks 2 y 3. En base de isospin viene dado por,

$$\begin{aligned}
V_{23}(q) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_q^2} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3) \frac{q^2}{q^2 + m^2} (\vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_3) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_q^2} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3) \left(1 - \frac{m^2}{q^2 + m^2} \right) (\vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_3)
\end{aligned} \tag{C.14}$$

multiplicando por deltas en todos los grados de libertad para el quark 1 y el antiquark 4. El sabor factoriza, y el valor esperado viene dado por $\langle \vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_3 \rangle = 2I(I+1) - 3$. Debemos de recordar que $V_{q\bar{q}}^\pi = -V_{q\bar{q}}^\pi$ sin modificar los coeficientes de spin-isospin por G -paridad. Dicho signo ya está incorporado en la expresión $V_{23}(q)$ anterior.

Por lo tanto, aplicando este potencial a los autoestados de C -paridad anteriores:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm | V_{23} | \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm \rangle &= (2I(I+1) - 3) \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_q^2} \frac{1}{3} \int d^3 p'_{12} d^3 p'_{34} d^3 p_{12} d^3 p_{34} \times \\
&\times \delta^3(p'_1 - p_1) \delta^3(p'_4 - p_4) \times \\
&\times \delta^3(p'_2 + p'_3 - p_2 - p_3) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q_{23}^2} \left(1 - \frac{m^2}{q_{23}^2 + m^2} \right) \times \\
&\times (R_D(p'_{12}) R_{D^*}(p'_{34}) R_D(p_{12}) R_{D^*}(p_{34}) \langle 01 | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 | 01 \rangle \mp \\
&\mp R_D(p'_{12}) R_{D^*}(p'_{34}) R_{D^*}(p_{12}) R_D(p_{34}) \langle 01 | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 | 10 \rangle) \quad (C.15)
\end{aligned}$$

Los elementos de matriz de spin son (ver Fig. B.3),

$$\begin{aligned}
\langle 01 | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 | 01 \rangle &= 0 \\
\langle 01 | \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 | 10 \rangle &= -1 \quad (C.16)
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm | V_{23} | \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm \rangle &= \pm (2I(I+1) - 3) \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_q^2} \frac{1}{3} \int d^3 p'_{12} d^3 p'_{34} d^3 p_{12} d^3 p_{34} \times \\
&\times \delta^3(p'_1 - p_1) \delta^3(p'_4 - p_4) \times \\
&\times \delta^3(p'_2 + p'_3 - p_2 - p_3) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q_{23}^2} \left(1 - \frac{m^2}{q_{23}^2 + m^2} \right) \times \\
&\times R_D(p'_{12}) R_{D^*}(p'_{34}) R_{D^*}(p_{12}) R_D(p_{34}) \quad (C.17)
\end{aligned}$$

Como sólo nos interesa ver el signo del pión podemos considerar que todos los quarks tienen masas iguales. Por lo tanto, las coordenadas de los quarks en términos de las coordenadas de Jacobi (Ec. A.14) se simplifican,

$$\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= \vec{p}_{12} + \frac{1}{2} \vec{P}_{12} \\
\vec{p}_2 &= -\vec{p}_{12} + \frac{1}{2} \vec{P}_{12} \\
\vec{p}_3 &= \vec{p}_{34} + \frac{1}{2} \vec{P}_{34} \\
\vec{p}_4 &= -\vec{p}_{34} + \frac{1}{2} \vec{P}_{34} \quad (C.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{23} &= \vec{p}_{34} - \vec{p}_{12} \\
\vec{p}_{23} &= -\frac{1}{2}(\vec{p}_{12} + \vec{p}_{34}) + \frac{1}{2} \vec{P}
\end{aligned}$$

Con esto, simplificando las deltas de conservación y realizando alguna integral llegamos a,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm | V_{23} | \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm \rangle &= \pm(2I(I+1) - 3)V(Q) \int d^3p_{12} d^3p_{34} R_D(p_{12} - \frac{1}{2}(P'_{12} - P_{12})) \times \\ &\times R_{D^*}(p_{34} + \frac{1}{2}(P'_{34} - P_{34})) R_{D^*}(p_{12}) R_D(p_{34}) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

donde hemos llamado,

$$V(q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g_{ch}^2}{4m_q^2} \frac{1}{3} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \left(1 - \frac{m^2}{q^2 + m^2} \right)$$

Si ahora tomamos las funciones de onda radiales como gaussianas con el mismo rango β

$$R_D(p) = R_{D^*}(p) = \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^{3/4} e^{-\frac{p^2}{4\beta}}$$

y realizamos la integral, sencilla por ser ahora analítica, llegamos al resultado,

$$\langle \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm | V_{23} | \Psi_{D\bar{D}^*}^\pm \rangle = \pm(2I(I+1) - 3)V(Q)e^{-\frac{Q^2}{16\beta}}$$

Obtenemos el resultado que esperábamos. Es decir, al igual que en la Ref. [206], tenemos que el potencial de intercambio de un pión es atractivo para $I = 0$ y repulsivo para $I = 1$ para $C = +$ y viceversa para $C = -$. Como debe de ser, el resultado final no depende de la convención tomada, con tal de que el cálculo se realice con cuidado, tomando las fases y los ordenamientos correctamente.

C.3. Convención de C -Paridad para el potencial 3P_0

Sabemos con total seguridad que el modelo 3P_0 conserva C -Paridad, pues se construyó el potencial de transición para que así fuese. Por lo tanto, debe darnos el signo correcto para la convención tomada anteriormente. En esta sección lo comprobaremos explícitamente.

De la expresión del potencial de transición de Bonnaz [85], para una reacción del tipo $M \rightarrow AB$,

$$\langle AB | \mathcal{T} | M \rangle = \delta^{(3)}(\vec{K}_0) \mathcal{M}_{M \rightarrow AB} \quad (\text{C.20})$$

deducimos que si cambiamos el mesón A por el B se obtiene la misma amplitud, apareciendo una fase,

$$\mathcal{M}_{M \rightarrow BA} = (-1)^{1+S_M+S_A+S_B+J_{AB}+J_A+J_B} \mathcal{M}_{M \rightarrow AB} \quad (\text{C.21})$$

Por lo tanto, para un estado de C -paridad definida $|\Psi_C\rangle \equiv |AB; J_T M_T J_{AB} L\rangle_C$, según la ecuación C.10, tendremos:

$$\langle \Psi | \Upsilon | M \rangle = \delta^{(3)}(\vec{K}_0) \mathcal{M}_{M \rightarrow \Psi} \quad (\text{C.22})$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{M \rightarrow \Psi} &= \mathcal{M}_{M \rightarrow AB} + c(-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L} \mathcal{M}_{M \rightarrow BA} = \\ &= (1 + \phi) \mathcal{M}_{M \rightarrow AB} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

con L el momento relativo entre los dos mesones y donde la fase total ϕ viene dada por

$$\begin{aligned} \phi &= c(-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L} \cdot (-1)^{1+S_M+S_A+S_B+J_{AB}+J_A+J_B} = \\ &= (-1)^{1+L_M+L_A+L_B+L} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

donde hemos usado que $c = (-1)^{L_M+S_M}$, ya que M es un autoestado de C -paridad y el 3P_0 la conserva. Para que la interferencia sea constructiva y tengamos acoplamiento no nulo necesitamos que $\phi = 1$.

Afortunadamente, podemos comprobar que $\phi = 1$ siempre, por conservación de la paridad P . Efectivamente, la paridad inicial será la del mesón M , es decir $P_M = (-1)^{L_M}$, más la paridad intrínseca del par $q\bar{q}$ creado por el vértice 3P_0 , que es $P_{3P_0} = -1$, por ser fermiones. En el estado final tendremos las paridades intrínsecas de los mesones A y B , es decir, $P_A = (-1)^{L_A}$ y $P_B = (-1)^{L_B}$, más la paridad del estado de dos mesones AB , que es $P_{AB} = (-1)^L$. Por lo tanto, el cómputo global de la paridad nos da,

$$\begin{aligned} P_{ini} &= P_M \cdot P_{3P_0} = (-1)^{1+L_M}, \\ P_{fin} &= P_A \cdot P_B \cdot P_{AB} = (-1)^{L_A+L_B+L} \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

y se debe cumplir que $P_{ini} = P_{fin}$. Como vemos,

$$\phi = P_{ini} \cdot P_{fin} = P_{ini}^2 = 1 \quad (\text{C.26})$$

Luego la interferencia siempre será constructiva si se conservan todos los números cuánticos J^{PC} entre estados iniciales y finales.

C.4. Casos particulares

Mostraremos ahora en la Tabla C.1 la combinación correcta de C -paridad para los casos más interesantes de estados mesón-mesón, en onda relativa S o mezcla $S - D$, que son las más probables de formar un estado ligado.

| Estado mesónico | J^P | c | η | $ AB\rangle = \mathcal{N} (AB\rangle + \eta BA\rangle)$ |
|-----------------|-----------------|----------|--------|--|
| DD | 0^+ | $+$ | | $ DD\rangle$ |
| $D\bar{D}^*$ | 1^+ | \pm | \mp | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}\rangle \mp D\bar{D}^*\rangle)$ |
| $D^*\bar{D}^*$ | $0^+, 1^+, 2^+$ | $(-1)^J$ | | $ D^*\bar{D}^*\rangle$ |
| $DD_1(^1P_1)$ | 1^- | \pm | \mp | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D\bar{D}_1\rangle \mp D_1\bar{D}\rangle)$ |
| $DD_1(^3P_1)$ | 1^- | \pm | \pm | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D\bar{D}_1\rangle \pm D_1\bar{D}\rangle)$ |
| $D^*D_1(^1P_1)$ | 0^- | | \pm | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_1\rangle \pm D_1\bar{D}^*\rangle)$ |
| | 1^- | \pm | \mp | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_1\rangle \mp D_1\bar{D}^*\rangle)$ |
| | 2^- | | \pm | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_1\rangle \pm D_1\bar{D}^*\rangle)$ |
| $D^*D_1(^3P_1)$ | 0^- | | \mp | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_1\rangle \mp D_1\bar{D}^*\rangle)$ |
| | 1^- | \pm | \pm | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_1\rangle \pm D_1\bar{D}^*\rangle)$ |
| | 2^- | | \mp | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_1\rangle \mp D_1\bar{D}^*\rangle)$ |
| DD_0 | 0^- | \pm | \pm | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D\bar{D}_0\rangle \pm D_0\bar{D}\rangle)$ |
| D^*D_0 | 1^- | \pm | \mp | $\frac{1}{\sqrt{2}} (D^*\bar{D}_0\rangle \mp D_0\bar{D}^*\rangle)$ |

Cuadro C.1: Convención de C -paridad para estados mesón-mesón particulares, con $\eta = c(-1)^{L_A+S_A+L_B+S_B+J_{AB}-J_A-J_B+L}$.

Bibliografía

- [1] E. Fermi and C. Yang, Phys. Rev. **76**, 1739 (1949).
- [2] S. Sakata, Progress of Theoretical Physics **16**, 686 (1956).
- [3] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).
- [4] R. Machleidt, K. Holinde, and C. Elster, Physics Reports **149**, 1 (1987).
- [5] E. L. Lomon, Phys. Rev. D **26**, 576 (1982).
- [6] P. González and E. L. Lomon, Phys. Rev. D **34**, 1351 (1986).
- [7] B. C. Pearce and B. K. Jennings, Nuclear Physics A **528**, 655 (1991).
- [8] R. Büttgen, K. Holinde, A. Müller-Groeling, J. Speth, and P. Wyborny, Nuclear Physics A **506**, 586 (1990).
- [9] A. Müller-Groeling, K. Holinde, and J. Speth, Nuclear Physics A **513**, 557 (1990).
- [10] D. Lohse, J. Durso, K. Holinde, and J. Speth, Nuclear Physics A **516**, 513 (1990).
- [11] P. D. Barnes et al., Physics Letters B **229**, 432 (1989).
- [12] P. D. Barnes et al., Physics Letters B **189**, 249 (1987).
- [13] P. D. Barnes et al., Nuclear Physics A **526**, 575 (1991).
- [14] P. D. Barnes et al., Phys. Rev. C **62**, 055203 (2000).
- [15] J. Haidenbauer, K. Holinde, V. Mull, and J. Speth, Physics Letters B **291**, 223 (1992).
- [16] B. Bassalleck et al., Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms **214**, 167 (2004), low Energy Antiproton Physics (LEAP'03).
- [17] J. Haidenbauer, K. Holinde, V. Mull, and J. Speth, Phys. Rev. C **46**, 2158 (1992).

- [18] M. A. Alberg, E. M. Henley, L. Wilets, and P. D. Kunz, *Physics of Atomic Nuclei* **57**, 1608 (1994), [arXiv:nucl-th/9312006](#).
- [19] F. Fernandez, A. Valcarce, U. Straub, and A. Faessler, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **19**, 2013 (1993).
- [20] A. Valcarce, H. Garcilazo, F. Fernández, and P. González, *Reports on Progress in Physics* **68**, 965 (2005).
- [21] A. Valcarce, P. González, F. Fernández, and V. Vento, *Physics Letters B* **367**, 35 (1996).
- [22] J. Vijande, F. Fernández, and A. Valcarce, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **31**, 481 (2005).
- [23] D. R. Entem and F. Fernández, *Phys. Rev. C* **73**, 045214 (2006).
- [24] J. D. Bjorken, *The November Revolution: A Theorist Reminisces* (World Scientific, New York, 2003).
- [25] T. Barnes and S. Godfrey, *Phys. Rev. D* **69**, 054008 (2004).
- [26] E. J. Eichten, K. Lane, and C. Quigg, *Phys. Rev. D* **69**, 094019 (2004).
- [27] C. Meng and K.-T. Chao, *Phys. Rev. D* **75**, 114002 (2007).
- [28] J. L. Rosner, *Phys. Rev. D* **74**, 076006 (2006).
- [29] M. B. Voloshin and L. B. Okun, *JETP Lett.* **23**, 333 (1976).
- [30] M. Bander, G. L. Shaw, P. Thomas, and S. Meshkov, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 695 (1976).
- [31] A. De Rújula, H. Georgi, and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 317 (1977).
- [32] A. V. Manohar and M. B. Wise, *Nuclear Physics B* **399**, 17 (1993).
- [33] N. A. Törnqvist, *Physics Letters B* **590**, 209 (2004).
- [34] F. E. Close and P. R. Page, *Physics Letters B* **578**, 119 (2004).
- [35] C.-Y. Wong, *Phys. Rev. C* **69**, 055202 (2004).
- [36] E. Braaten and M. Kusunoki, *Phys. Rev. D* **69**, 114012 (2004).
- [37] T.-W. Chiu and T.-H. Hsieh, *Physics Letters B* **646**, 95 (2007).

- [38] I. Bigi, L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, and V. Riquer, *Phys. Rev. D* **72**, 114016 (2005).
- [39] L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa, and V. Riquer, *Phys. Rev. D* **72**, 031502 (2005).
- [40] D. Horn and J. Mandula, *Phys. Rev. D* **17**, 898 (1978).
- [41] F. E. Close, *Physics Letters B* **342**, 369 (1995).
- [42] C. McNeile, C. Michael, and P. Pennanen, *Phys. Rev. D* **65**, 094505 (2002).
- [43] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 598 (1964).
- [44] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [45] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [46] H. D. Politzer, *Physics Reports* **14**, 129 (1974).
- [47] C. Nash, *Relativistic Quantum Fields. Von C. Nash, 223 Seiten, Academic Press London 1978.*, vol. 11 (WILEY-VCH Verlag, 1980).
- [48] K. D. Born, E. Laermann, N. Pirch, T. F. Walsh, and P. M. Zerwas, *Phys. Rev. D* **40**, 1653 (1989).
- [49] G. S. Bali, *Physics Reports* **343**, 1 (2001).
- [50] D. Dyakonov and V. Petrov, *Physics Letters B* **147**, 351 (1984).
- [51] A. De Rújula, H. Georgi, and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **12**, 147 (1975).
- [52] D. V. Shirkov and I. L. Solovtsov, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1209 (1997).
- [53] A. M. Badalian and Y. A. Simonov, *Phys. Atom. Nucl.* **60**, 630 (1997).
- [54] A. C. Mattingly and P. M. Stevenson, *Phys. Rev. D* **49**, 437 (1994).
- [55] A. M. Badalian and D. S. Kuzmenko, *Phys. Rev. D* **65**, 016004 (2001).
- [56] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52**, 1083 (1937).
- [57] U. Straub, Z.-Y. Zhang, K. Bräuer, A. Faessler, S. Khadkikar, and G. Lübeck, *Nuclear Physics A* **483**, 686 (1988).
- [58] J. Segovia, A. M. Yasser, D. R. Entem, and F. Fernández, *Phys. Rev. D* **78**, 114033 (2008).

- [59] E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **51**, 223 (2003).
- [60] L. Micu, *Nuclear Physics B* **10**, 521 (1969).
- [61] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène, and J. C. Raynal, *Phys. Rev. D* **8**, 2223 (1973).
- [62] G. Busetto and L. Oliver, *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **20**, 247 (1983).
- [63] R. Kokoski and N. Isgur, *Phys. Rev. D* **35**, 907 (1987).
- [64] T. Barnes, F. E. Close, P. R. Page, and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **55**, 4157 (1997).
- [65] T. Barnes, N. Black, and P. R. Page, *Phys. Rev. D* **68**, 054014 (2003).
- [66] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Phys. Rev. D* **17**, 3090 (1978).
- [67] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, *Phys. Rev. D* **21**, 203 (1980).
- [68] E. S. Ackleh, T. Barnes, and E. S. Swanson, *Phys. Rev. D* **54**, 6811 (1996).
- [69] T. Barnes, *Journal of Physics: Conference Series* **9**, 127 (2005).
- [70] Y. S. Kalashnikova, *Phys. Rev. D* **72**, 034010 (2005).
- [71] T. Barnes and E. S. Swanson, *Phys. Rev. C* **77**, 055206 (2008).
- [72] E. van Beveren, C. Dullemond, and G. Rupp, *Phys. Rev. D* **21**, 772 (1980).
- [73] G. Rupp, E. v. Beveren, and M. D. Scadron, *Phys. Rev. D* **65**, 078501 (2002).
- [74] E. van Beveren and G. Rupp, *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints* (2003), [arXiv:hep-ph/0304105](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0304105).
- [75] N. A. Törnqvist, *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **68**, 647 (1995).
- [76] N. A. Törnqvist and M. Roos, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1575 (1996).
- [77] M.P. Locher, V.E. Markushin, and H.Q. Zheng, *Eur. Phys. J. C* **4**, 317 (1998).
- [78] V.E. Markushin, *Eur. Phys. J. A* **8**, 389 (2000).
- [79] M. Boglione and M. R. Pennington, *Phys. Rev. D* **65**, 114010 (2002).

- [80] E. J. Eichten, K. Lane, and C. Quigg, *Phys. Rev. D* **73**, 014014 (2006).
- [81] B.-Q. Li, C. Meng, and K.-T. Chao, *Phys. Rev. D* **80**, 014012 (2009).
- [82] G. E. Brown and A. D. Jackson, *The Nucleon-Nucleon Interaction* (North Holland/American Elsevier, 1976).
- [83] A. Le Yaouanc, L. Oliver, O. Pène, and J.-C. Raynal, *Phys. Rev. D* **9**, 1415 (1974).
- [84] W. Roberts, B. Silvestre-Brac, and C. Gignoux, *Phys. Rev. D* **41**, 182 (1990).
- [85] R. Bonnaz and B. Silvestre-Brac, *Few-Body Systems* **27**, 163 (1999).
- [86] L. A. Blanco, *Generalización de un modelo de quarks al sector mesónico* (Universidad de Salamanca, 2001).
- [87] J. R. Taylor, *Scattering Theory* (John Wiley & Sons, 1972).
- [88] M. I. Haftel and F. Tabakin, *Nuclear Physics A* **158**, 1 (1970).
- [89] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, 1986).
- [90] P. A. Grassi, B. A. Kniehl, and A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 389 (2001).
- [91] S.-K. Choi et al. (Belle Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **91**, 262001 (2003).
- [92] Baru, V., Hanhart, C., Kalashnikova, Yu. S., Kudryavtsev, A. E., and Nefediev, A. V., *Eur. Phys. J. A* **44**, 93 (2010).
- [93] V. Baru, J. Haidenbauer, C. Hanhart, Y. Kalashnikova, and A. Kudryavtsev, *Physics Letters B* **586**, 53 (2004).
- [94] Y. C. Tang and R. E. Brown, *Phys. Rev. C* **4**, 1979 (1971).
- [95] H. Nishioka, S. Saito, H. Kanada, and T. Kaneko, *Progress of Theoretical Physics* **63**, 438 (1980).
- [96] M. LeMere, Y. Fujiwara, Y. C. Tang, and Q. K. K. Liu, *Phys. Rev. C* **26**, 1847 (1982).
- [97] D. R. Thompson and Y. C. Tang, *Phys. Rev.* **179**, 971 (1969).
- [98] H. Jacobs, K. Wildermuth, and E. J. Wurster, *Physics Letters B* **29**, 455 (1969).
- [99] H. Kanada, T. Kaneko, and Y. C. Tang, *Nuclear Physics A* **380**, 87 (1982).
- [100] H. Kanada, T. Kaneko, and Y. C. Tang, *Nuclear Physics A* **389**, 285 (1982).

- [101] H. Kanada, T. Kaneko, H. Nishioka, and S. Saito, *Progress of Theoretical Physics* **63**, 842 (1980).
- [102] P. G. Ortega, D. R. Entem, and F. Fernández, *Physics Letters B* **696**, 352 (2011).
- [103] B. Holzenkamp, K. Holinde, and J. Speth, *Nuclear Physics A* **500**, 485 (1989).
- [104] K. D. Paschke et al. (PS185 Collaboration), *Phys. Rev. C* **74**, 015206 (2006).
- [105] B. Bassalleck et al. (PS185 Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **89**, 212302 (2002).
- [106] D. R. Entem, F. Fernández, and A. Valcarce, *Phys. Rev. C* **62**, 034002 (2000).
- [107] M. Coupland, E. Eisenhandler, W. R. Gibson, P. I. P. Kalmus, and A. Astbury, *Physics Letters B* **71**, 460 (1977).
- [108] T. Kamae et al., *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1439 (1980).
- [109] W. Brückner et al., *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **335**, 217 (1990).
- [110] D. Cutts et al., *Phys. Rev. D* **17**, 16 (1978).
- [111] R. A. Kunne et al., *Nuclear Physics B* **323**, 1 (1989).
- [112] E. Eisenhandler et al., *Nuclear Physics B* **113**, 1 (1976).
- [113] C. Daum et al., *Nuclear Physics B* **6**, 617 (1968).
- [114] J. Z. Bai et al. (BES Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **91**, 022001 (2003).
- [115] A. Datta and P. J. O'Donnell, *Physics Letters B* **567**, 273 (2003).
- [116] C. Chao-Hsi and P. Hou-Rong, *Communications in Theoretical Physics* **43**, 275 (2005).
- [117] G.-J. Ding and M.-L. Yan, *Phys. Rev. C* **72**, 015208 (2005).
- [118] B. Loiseau and S. Wycech, *Phys. Rev. C* **72**, 011001 (2005).
- [119] A. Sibirtsev, J. Haidenbauer, S. Krewald, U.-G. Meißner, and A. W. Thomas, *Phys. Rev. D* **71**, 054010 (2005).
- [120] M. Augsburger et al., *Nuclear Physics A* **658**, 149 (1999).
- [121] D. Gotta et al., *Nuclear Physics A* **660**, 283 (1999).
- [122] E. Klempt, F. Bradamante, A. Martin, and J.-M. Richard, *Physics Reports* **368**, 119 (2002).

- [123] T. L. Trueman, Nuclear Physics **26**, 57 (1961).
- [124] B. R. Holstein, Phys. Rev. D **60**, 114030 (1999).
- [125] A. Manohar and H. Georgi, Nuclear Physics B **234**, 189 (1984).
- [126] S. H. Hwang et al. (LEPS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **108**, 092001 (2012).
- [127] J. Haidenbauer, K. Holinde, and J. Speth, Phys. Rev. C **46**, 2516 (1992).
- [128] B. Jayet et al., Il Nuovo Cimento A Series 11 **45**, 371 (1978), cited By (since 1996) 4.
- [129] B. Y. Oh et al., Nuclear Physics B **51**, 57 (1973).
- [130] J. Badier, A. Bonnet, P. Briandet, and B. Sadoulet, Physics Letters B **25**, 152 (1967).
- [131] P. D. Barnes et al., Phys. Rev. C **54**, 2831 (1996).
- [132] X. Artru et al., Physics Reports **470**, 1 (2009).
- [133] P. D. Barnes et al., Physics Letters B **246**, 273 (1990).
- [134] J. Richard, in *Low Energy Antiproton Physics* (2005), vol. 796 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 102–107, [arXiv:nuc1-th/0508061](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0508061).
- [135] P. D. Barnes et al., Physics Letters B **402**, 227 (1997).
- [136] P. G. Ortega, J. Segovia, D. R. Entem, and F. Fernández, Phys. Rev. D **81**, 054023 (2010).
- [137] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **71**, 071103 (2005).
- [138] D. Acosta et al. (CDF II Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 072001 (2004).
- [139] V. M. Abazov et al. (D0 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **93**, 162002 (2004).
- [140] K. Abe, ArXiv High Energy Physics - Experiment e-prints (2005), [arXiv:hep-ex/0505038](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0505038).
- [141] A. Abulencia et al. (CDF Collaboration), Phys. Rev. Lett. **96**, 102002 (2006).
- [142] A. Abulencia et al. (CDF Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 132002 (2007).
- [143] G. Gokhroo et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **97**, 162002 (2006).

- [144] P. del Amo Sanchez et al. (The BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **82**, 011101 (2010).
- [145] C. Hanhart, Y. S. Kalashnikova, A. E. Kudryavtsev, and A. V. Nefediev, Phys. Rev. D **85**, 011501 (2012).
- [146] C. Amsler et al., Physics Letters B **667**, 1 (2008), review of Particle Physics.
- [147] E. S. Swanson, Physics Reports **429**, 243 (2006).
- [148] J. Vijande, E. Weissman, N. Barnea, and A. Valcarce, Phys. Rev. D **76**, 094022 (2007).
- [149] E. Hiyama, H. Suganuma, and M. Kamimura, Progress of Theoretical Physics Supplement **168**, 101 (2007).
- [150] M. Voloshin, Physics Letters B **579**, 316 (2004).
- [151] M. Suzuki, Phys. Rev. D **72**, 114013 (2005).
- [152] C. Hanhart, Y. S. Kalashnikova, A. E. Kudryavtsev, and A. V. Nefediev, Phys. Rev. D **76**, 034007 (2007).
- [153] D. Gamermann and E. Oset, Eur. Phys. J. A **33**, 119 (2007).
- [154] D. Gamermann and E. Oset, Phys. Rev. D **80**, 014003 (2009).
- [155] Y. Dong, A. Faessler, T. Gutsche, and V. E. Lyubovitskij, Phys. Rev. D **77**, 094013 (2008).
- [156] E. S. Swanson, Physics Letters B **588**, 189 (2004).
- [157] E. S. Swanson, Physics Letters B **598**, 197 (2004).
- [158] S.-K. Choi et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **94**, 182002 (2005).
- [159] B. Aubert et al. (The BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **102**, 132001 (2009).
- [160] S.-K. Choi et al. (The Belle Collaboration), Phys. Rev. D **84**, 052004 (2011).
- [161] K. Abe, ArXiv High Energy Physics - Experiment e-prints (2005), [arXiv:hep-ex/0505037](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0505037).
- [162] N. Brambilla et al., ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints (2004), [arXiv:hep-ph/0412158](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0412158).

- [163] V. Bhardwaj, K. Trabelsi, J. B. Singh, S.-K. Choi, S. L. Olsen, I. Adachi, K. Adamczyk, D. M. Asner, V. Aulchenko, T. Aushev, et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **107**, 091803 (2011).
- [164] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **77**, 011102 (2008).
- [165] T. Aushev et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. D **81**, 031103 (2010).
- [166] Y. S. Kalashnikova and A. V. Nefediev, Phys. Rev. D **80**, 074004 (2009).
- [167] T. Aushev, N. Zwahlen, and for the Belle Collaboration, ArXiv e-prints (2008), 0810.0358v2.
- [168] S. Uehara et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **96**, 082003 (2006).
- [169] K. Abe et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 082001 (2007).
- [170] P. Pakhlov et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **100**, 202001 (2008).
- [171] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **101**, 082001 (2008).
- [172] S. Uehara et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **104**, 092001 (2010).
- [173] N. Brambilla et al., Eur.Phys.J. **C71**, 1534 (2011), hep-ph/1010.5827.
- [174] N. Isgur, R. Kokoski, and J. Paton, Phys. Rev. Lett. **54**, 869 (1985).
- [175] F. E. Close and P. R. Page, Nuclear Physics B **443**, 233 (1995).
- [176] P. R. Page, E. S. Swanson, and A. P. Szczepaniak, Phys. Rev. D **59**, 034016 (1999).
- [177] X. Liao and T. Manke (2002), hep-lat/0210030.
- [178] X. Liu and S.-L. Zhu, Phys. Rev. D **80**, 017502 (2009).
- [179] I. Peruzzi et al., Phys. Rev. Lett. **39**, 1301 (1977).
- [180] R. H. Schindler et al., Phys. Rev. D **21**, 2716 (1980).
- [181] N. E. Adam et al. (CLEO Collaboration), Phys. Rev. Lett. **96**, 082004 (2006).
- [182] T. E. Coan et al. (CLEO Collaboration), Phys. Rev. Lett. **96**, 182002 (2006).
- [183] M. Ablikim et al., Physics Letters B **668**, 263 (2008).
- [184] G. Pakhlova et al. (The Belle Collaboration), Phys. Rev. D **77**, 011103 (2008).
- [185] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **76**, 111105 (2007).

- [186] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. D **79**, 092001 (2009).
- [187] C. Z. Yuan et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **99**, 182004 (2007).
- [188] B. Aubert et al. (BaBar) (2008), [hep-ex/0808.1543](#).
- [189] T. Barnes, S. Godfrey, and E. S. Swanson, Phys. Rev. D **72**, 054026 (2005).
- [190] M. Voloshin (2012), [hep-ph/1201.1222](#).
- [191] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90**, 242001 (2003).
- [192] D. Besson et al. ((CLEO Collaboration)), Phys. Rev. D **68**, 032002 (2003).
- [193] P. Krokovny et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **91**, 262002 (2003).
- [194] Y. Mikami et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **92**, 012002 (2004).
- [195] B. Aubert et al. (BABAR) (2006), [hep-ex/0607084](#).
- [196] V. Balagura et al. (The Belle Collaboration), Phys. Rev. D **77**, 032001 (2008).
- [197] J. Segovia, A. M. Yasser, D. R. Entem, and F. Fernández, Phys. Rev. D **80**, 054017 (2009).
- [198] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 012001 (2007).
- [199] R. Mizuk et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. **98**, 262001 (2007).
- [200] X.-G. He, X.-Q. Li, X. Liu, and X.-Q. Zeng, The European Physical Journal C - Particles and Fields **51**, 883 (2007).
- [201] J. He and X. Liu, Phys. Rev. D **82**, 114029 (2010).
- [202] Y. Dong, A. Faessler, T. Gutsche, and V. E. Lyubovitskij, Phys. Rev. D **81**, 014006 (2010).
- [203] S. Capstick and N. Isgur, Phys. Rev. D **34**, 2809 (1986).
- [204] L. A. Copley, N. Isgur, and G. Karl, Phys. Rev. D **20**, 768 (1979).
- [205] C. Chen, X.-L. Chen, X. Liu, W.-Z. Deng, and S.-L. Zhu, Phys. Rev. D **75**, 094017 (2007).
- [206] C. E. Thomas and F. E. Close, Phys. Rev. D **78**, 034007 (2008).

Cuando uno se propone empezar su Tesis Doctoral sabe que va a tener que dedicarle mucho tiempo y esfuerzo. Normalmente la primera idea que se tiene sobre dicho esfuerzo es menor que el que realmente hay que aplicar para poder realizar el proyecto con éxito. Afortunadamente la ilusión te mantiene motivado y te dirige hacia tus objetivos. Además, siempre te sorprenden la cantidad de experiencias y enseñanzas que vas adquiriendo en el proceso.

Por supuesto, una sola persona no puede realizar un proyecto de esta magnitud sin ayuda. Por fortuna, tengo la suerte de contar con mucha gente siempre dispuesta a darme su apoyo. Este trabajo se lo dedico a todos ellos:

En primer lugar, me gustaría mencionar a mis directores, David Rodríguez Entem y Francisco Fernández. Ellos me acogieron en el Grupo de Física Nuclear y me dieron la oportunidad de emprender este viaje. Sin su inestimable ayuda, consejos y paciencia a la hora de resolver mis dudas, este trabajo no sería posible.

Me llevo un grato recuerdo de mis compañeros, aquéllos con los que compartí lugar de trabajo, tiempo libre, dudas, logros... Los descansos, con sus cafés, pinchos y conversaciones siempre eran un entorno ideal para despejar la mente y, cuando menos te lo esperabas, dar con la solución a aquel problema que te rondaba la cabeza.

No puedo olvidar a mi familia. Aunque no tienen muy claro de qué trata la Tesis, me han apoyado desde el principio. Siempre me han animado y se han mostrado interesados por cómo iba avanzando, poco a poco, hasta el final. Gran parte del mérito os pertenece.

Por último, pero no menos importante, quiero hacer una mención muy especial a Beatriz. Si alguien conoce de primera mano lo que significa este trabajo para mí, sin duda es ella. Muchas cosas han cambiado desde que empezamos a andar juntos, y siempre ha estado ahí para darme su consejo, apoyo y cariño. Espero poder compensarte con creces toda la ayuda que me has brindado.

