

# *Cálculo de la corrección cuántica a la masa de defectos topológicos usando Mathematica*

**A. Alonso Izquierdo y M.A. González León**

En las últimas décadas, varios fenómenos físicos de notable importancia, descritos matemáticamente por ecuaciones en derivadas parciales no lineales, han sido explicados mediante el estudio de las soluciones clásicas de tipo onda solitaria (o más generalmente defectos topológicos) que dichas ecuaciones presentan. Cuando este tipo de sistemas es analizado desde el punto de vista cuántico, algunas de las magnitudes físicas (como por ejemplo la masa de las partículas descritas), se ven afectadas por pequeñas correcciones correspondientes a añadir a la magnitud clásica relativa los efectos de las excitaciones o fluctuaciones cuánticas de la partícula extensa. El cálculo de estas correcciones (a primer orden de aproximación) está asociado con la estimación de la traza de la raíz cuadrada del operador Hessiano sobre estas soluciones. En este trabajo deducimos una fórmula que nos permite el cálculo de la corrección cuántica a la masa a los defectos topológicos de tipo kink en cualquier modelo. La complejidad de las fórmulas encontradas exige el uso conjunto de esquemas basados en programación simbólica (utilizados para identificar las series que caracterizan las correcciones cuánticas) y de esquemas numéricos para encontrar finalmente una respuesta específica a nuestro objetivo inicial.

## ■ Corrección cuántica a la masa de defectos topológicos

### □ Introducción

En las últimas décadas se ha producido un gran avance en el estudio de propiedades novedosas que presentan muchos sistemas físicos no lineales, describiéndose fenómenos no explicados desde un punto de vista lineal. Desde un punto de vista histórico, en 1870 J.S. Russel descubrió las ondas solitarias, o solitones, en los canales de Edimburgo; se trataba de una onda de la superficie del agua que se movía con forma y velocidad constante. El tratamiento teórico de este fenómeno dió origen

al estudio de la ecuación KdV y al interés por sus soluciones no dispersivas, los solitones [1]. En este tipo de ecuaciones los términos dispersivos y los no lineales se combinan entre sí para dar lugar a una solución viajera estable que mantiene su forma, esto es, mantiene localizada su energía.

Muy pronto fue comprendido que este tipo de soluciones presentaba un gran interés en Física, puesto que la presencia de estas soluciones estables en ciertos modelos en teoría de campos ampliaba considerablemente las posibilidades del análisis, dando lugar a la explicación de fenómenos no comprendidos hasta entonces. De esta manera, en disciplinas tan dispares como la Física de Materia Condensada (superconductividad, ferromagnetismo), Cosmología (evolución del universo temprano) e incluso en Biología (propiedades de la cadena de ADN), se han producido grandes avances.

En el marco de la Física nuclear, donde los mesones resultan de la interpretación cuántica de ondas dispersivas se propuso una asimilación similar de la versión cuántica de las ondas solitarias con los bariones. De esta manera se hace necesario calcular las correcciones a los resultados clásicos, producto de la naturaleza cuántica de las propiedades físicas que han de ser medidas. En este trabajo, nos centraremos en particular en el cálculo de las correcciones cuánticas al valor de la masa clásica de una partícula descrita por este tipo de modelos.

## □ Concepto teórico de solución kink

Con el propósito de presentar de forma concisa y clara los resultados de este trabajo, así como centrarnos en los aspectos computacionales, restringiremos nuestro estudio al caso de modelos en teorías con un solo campo escalar en (1+1)-dimensiones espacio-temporales, si bien el trabajo general está desarrollado para casos más complejos [2,3].

Analizaremos, por tanto, un sistema físico descrito por el funcional de acción

$$S = \int \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi) \right) dx^2 \quad (1)$$

donde  $\varphi$  es una aplicación del espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,1}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $U(\varphi)$  es un término potencial no negativo que se anula (al menos) en dos puntos aislados. Las soluciones menos energéticas de este sistema corresponden al conjunto de ceros del potencial,  $\mathfrak{M} = \{\phi_0 \in \mathbb{R} : U(\phi_0) = 0\}$ , que darán lugar a los vacíos del sistema cuántico. Además, pueden presentarse soluciones de tipo onda solitaria, llamadas en este marco kinks [4] (en modelos similares, sobre el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$ , estas soluciones suelen denominarse vórtices, y monopolos en el caso de  $\mathbb{R}^{3,1}$ ). Los kinks son soluciones viajeras,  $\phi = \phi_K(z)$ , que verifican la ecuación

$$\frac{d^2 \phi_K}{dz^2} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\phi_K(z)) \quad \text{donde} \quad z = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2)$$

y que tienen su densidad de energía localizada, lo que requiere la verificación de las siguientes condiciones asintóticas

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_K(z) \in \mathfrak{M} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \phi_K}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

La ecuación diferencial (2) admite una integral primera evidente, que junto con las condiciones (3), permite caracterizar a los kinks como soluciones de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d \phi_K}{d z} = \sqrt{2 U(\phi_K)} \quad (4)$$

El computo de las correcciones cuánticas a este tipo de soluciones se basa en el estudio de la evolución temporal de las pequeñas perturbaciones sobre las mismas, que a su vez determina la estabilidad clásica y cuántica de dichas soluciones. Es bien conocido que si el problema de autovalores  $H\psi_n = \omega_n^2 \psi_n$  del operador diferencial hessiano  $H(\phi)$  asociado a la solución  $\phi(x)$

$$H(\phi) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(\phi(x)) \quad \text{con} \quad V(\phi) = \frac{d^2 U(\phi)}{d\phi^2} \quad (5)$$

posee un espectro de autovalores no negativos,  $\omega_r \in \mathbb{R}$ , entonces la solución será estable, mientras que en otro caso la solución es inestable y tenderá a decaer, bajo pequeñas perturbaciones, en otro tipo de soluciones.

## □ Marco teórico de la corrección cuántica a la masa de kinks

Los efectos cuánticos varían la masa clásica de las soluciones descritas previamente. La corrección a dicha magnitud puede ser evaluada mediante la aproximación de fase estacionaria asociada a la integral funcional

$$G_H[\phi(x, t)] = \int \mathcal{D}[\phi(x, t)] \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[\phi(x, t)]\right] \quad (6)$$

Tal y como se detalla en [4] dicha aproximación conduce a que la corrección cuántica a la masa del kink sea

$$M_Q = M_{cl} + \Delta M = M_{cl} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar \omega_n = M_{cl} + \frac{1}{2} \hbar \text{Tr}(H(\phi_K))^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

donde en el último miembro damos sentido a la expresión  $\frac{1}{2} \hbar \text{Tr}(H(\phi))^{\frac{1}{2}}$  como la suma de las raíces cuadradas de los autovalores  $\omega_r$  del operador diferencial hessiano sobre la solución  $\phi$ . Nótese que los autovalores nulos (modos ceros) no contribuyen a esta corrección [4]. Obviamente la respuesta que encontraríamos evaluando directamente (7) sería infinita, puesto que el operador  $H(\phi_K)$  es de tipo Schroedinger y es no acotado. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en Física el proceso de medida implica siempre a dos magnitudes que son comparadas. En este caso debemos comparar las magnitudes asociadas al kink con las correspondientes a la solución

menos energética del sistema físico, esto es, los vacíos o ceros del potencial. Este proceso es conocido como renormalización del punto cero. Hay que añadir a su vez, otro tipo de renormalización, el de la masa, mediante reglas bien establecidas en la teoría cuántica de campos, que introduce en (7) los conocidos contratérminos  $\tau_{ct}(\varphi)$  dependientes del sistema en estudio. En esencia se concluye que

$$\Delta M = \frac{1}{2} \hbar \left( \text{Tr} (H(\phi_K))^{\frac{1}{2}} - \text{Tr} (H(\phi_0))^{\frac{1}{2}} \right) + \tau_{ct}(\phi_K) - \tau_{ct}(\phi_0) \quad (8)$$

Es importante advertir que el paréntesis en (8) carece de significado si no prescribimos un procedimiento de cálculo para la diferencia entre trazas de operadores. El procedimiento natural es el basado en el método de corte en el número de modos, que consiste en restar los autovalores uno a uno desde el umbral

$$\text{Tr} (H(\phi_K))^{\frac{1}{2}} - \text{Tr} (H(\phi_0))^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n - \omega_{0n}). \quad (9)$$

El primer caso en que se logró evaluar la corrección cuántica a la masa de un kink correspondió al modelo  $\varphi^4$ , siguiendo la fórmula (8) que exige el conocimiento de los espectros de los operadores implicados. La respuesta encontrada viene dada por  $\Delta M = \hbar m \left( \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2}\pi} \right)$ , [5]. El segundo caso corresponde al soliton en el modelo Seno-Gordon, donde se encuentra que  $\Delta M = -\hbar m / \pi$ . Sin embargo, éstos constituyen los dos únicos éxitos en este tipo de cálculo, ya que en general el espectro de los operadores hessianos asociados a las soluciones de estos modelos es desconocida, lo cual impide la aplicación de la fórmula (8).

### □ Serie asintótica de la corrección cuántica a la masa de kinks

La imposibilidad de aplicar de forma general el procedimiento mencionado en la sección previa, originó un enorme trabajo en busca de otros métodos que permitieran, aun de forma aproximada, estimar la corrección cuántica a la masa de kinks, que en esencia supone estimar la diferencia de la traza de dos operadores diferenciales en el sentido definido previamente en (9). En este trabajo hemos desarrollado un método basado en la regularización mediante la función zeta generalizada. Así, presentando la definición de la función zeta generalizada de un operador cualquiera H como

$$\zeta_H(s) = \text{Tr} H^{-s} = \sum_n (\omega_n^2)^{-s} \quad (10)$$

podemos escribir la corrección cuántica (8) en la forma

$$\Delta M = \frac{\hbar}{2} \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[ \zeta_{H(\phi_K)}(s) - \zeta_{H(\phi_0)}(s) \right] + \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} \xi_{ct} \left[ \zeta_{H(\phi_0)}(s) \right] + \frac{\hbar}{4\pi} \langle V(\phi_K(x)) - V(\phi_0) \rangle \quad (11)$$

donde  $\langle f(x) \rangle$  denota el valor medio de la función  $f(x)$ . Para encontrar una expresión

que pueda ser computada de forma efectiva, usaremos la transformación de Mellin que liga la función zeta generalizada con la función del calor  $h_H(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta H}$ ,

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \beta^{s-1} h_H(\beta) d\beta \tag{12}$$

Puede demostrarse que  $h_H(\beta)$  es la traza de un núcleo integral  $K_H(x, y; \beta)$  que verifica la ecuación del calor:  $\left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) K_H(x, y; \beta) = 0$ , bajo la condición inicial:  $K_H(x, y; 0) = \delta(x - y)$ , [6]. Si ensayamos sobre las relaciones previas la factorización  $K_{H(\phi_K)}(x, y; \beta) = K_{H(\phi_0)}(x, y; \beta) A(x, y; \beta)$  y consideramos el desarrollo en serie  $A(x, y; \beta) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x, y) \beta^n$  donde para preservar las condiciones iniciales indicadas previamente se impone que  $A(x, y; 0) = 1$ , esto es,  $a_0(x, y) = 1$ , los coeficientes  $a_n(x, y)$  deben cumplir la siguiente ley de recurrencia

$$(n + 1) a_{n+1}(x, y) + (x - y) \frac{\partial a_{n+1}(x, y)}{\partial x} + (V(\phi_K(x)) - V(\phi_0)) a_n(x, y) = \frac{\partial^2 a_n(x, y)}{\partial x^2} \tag{13}$$

La evaluación de la función del calor  $h_H(\beta)$  exige evaluar el límite  $x \rightarrow y$  sobre la expresión (13), lo que representa un cálculo muy delicado puesto que tomar dicho límite directamente lleva a expresiones mal definidas. A tal efecto definiremos las magnitudes:

$${}^{(k)}A_n(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial^k a_n(x, y)}{\partial x^k} \tag{14}$$

Por definición se cumple que  $a_n(x, y) = {}^{(0)}A_n(x)$ , que corresponde a la información que precisamos en nuestro desarrollo previo. Además, sin presencia de ambigüedad alguna se verifica que  ${}^{(k)}A_0(x) = 0$ . A partir de estos coeficientes iniciales se puede obtener el resto simplemente aplicando la ley de recurrencia dada en la forma

$${}^{(k)}A_n(x) = \frac{1}{n + k} \left[ {}^{(k+2)}A_{n-1}(x) - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^j (V(\phi_K(x)) - V(\phi_0))}{\partial x^j} {}^{(k-j)}A_{n-1}(x) \right] \tag{15}$$

que se deduce por derivación reiterada en la ecuación (13). Teniendo en cuenta las expresiones indicadas, la corrección (11) puede aproximarse por la serie

$$\frac{\Delta M}{\hbar} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{8\pi} \sum_{n=2}^N c_n \cdot (V(\phi_0))^{-n+1} \cdot \gamma[n - 1, V(\phi_0)] \tag{16}$$

donde  $\gamma[a, b]$  es la función gamma incompleta,  $N$  es número máximo de sumandos considerado y  $c_n = \int_{-\infty}^\infty a_n(x, x) dx$  son conocidos como coeficientes de Seeley, [2].

## Implementación en Mathematica

En esta sección describimos el código del programa utilizado para estimar la corrección cuántica a la masa de un kink, cuando se le proporciona como inputs el potencial  $U(y)$  del sistema físico, los vacíos y el número máximo de coeficientes a incluir en la serie asintótica. El programa se basa en la definición de tres funciones que llamamos **tk1num**, **coeficientesdeseeley** e **integracoeficientes**, las cuales mostramos a continuación. La función **tk1num**

```
tk1num[var1_, var2_, var3_, anchura_] :=
Module[{var4, var5, sol1, sol2, tk1p, tk1m, ph1, t1},
(
var4[ph1_] = var1 /. {y -> ph1};
var5[ph1_] = Simplify[PowerExpand[ $\sqrt{2 \text{ var4}[ph1]}$ ]];
sol1 = NDSolve[{ $\partial_x t1[x] + \text{var5}[t1[x]] == 0$ ,
t1[0] ==  $\frac{\text{var2} + \text{var3}}{2}$ }, t1, {x, 0, anchura / 2}];
tk1p[x_] = Evaluate[t1[x] /. sol1][[1]];
sol2 = NDSolve[{ $\partial_x t1[x] - \text{var5}[t1[x]] == 0$ ,
t1[0] ==  $\frac{\text{var2} + \text{var3}}{2}$ }, t1, {x, 0, anchura / 2}];
tk1m[x_] = Evaluate[t1[x] /. sol2][[1]];
Return[If[x > 0, tk1p[x], tk1m[-x]]];
);
```

proporciona una aproximación numérica de la solución kink y para su uso deben especificarse cuatro variables, el potencial  $U(y)$  (*var1*), el primer y segundo vacío (*var2*, *var3*) y la anchura espacial (*anchura*) donde generar dicha solución.

La función **coeficientesdeseeley** proporciona los coeficientes de Seeley empleados en la serie asintótica (16) hasta el término especificado en el cuarto argumento por la variable *k8max*. Los tres primeros argumentos se refieren de nuevo al potencial y a los vacíos utilizados.

```
coeficientesdeseeley[var1_, var2_, var3_, k8max_] :=
Module[{var4, var5, tomax, d1, v, v0, oper,
f6, x7, coeficientes, alfa, coa, k8, co},
(
var4[ph1_] = var1 /. {y -> ph1};
var5[ph1_] = Simplify[PowerExpand[ $\sqrt{2 \text{ var4}[ph1]}$ ]];
coeficientes = {};
```

```

v[x_] = Simplify[(∂ph1,ph1 var4[ph1]) /. {ph1 → ph1[x]}];
v0[x_] = Simplify[(∂ph1,ph1 var4[ph1]) /. {ph1 → var2}];
d1[fun_] :=
  Simplify[(∂x fun) /. {ph1'[x] → var5[ph1[x]}];
oper[fu8_, n1_] := Simplify[
  Nest[f6, x7, n1] /. {f6 -> d1, x7 -> fu8}];
tomax = 2 k8max;
For[alfa = 0, alfa < tomax + 0.5,
  coa[0, alfa] = 0; alfa++; coa[0, 0] = 1;
  co[k5_, alfa_] := Simplify[

$$\frac{1}{k5 + alfa} \left( \text{coa}[k5 - 1, alfa + 2] - \sum_{r5=0}^{alfa} \text{Binomial}[alfa, r5] \text{oper}[v[x] - v0[x], r5] \text{coa}[k5 - 1, alfa - r5] \right)$$
];
  For[k8 = 1, k8 < k8max + 0.5, tomax = tomax - 2;
    For[alfa = 0, alfa < tomax + 0.5,
      coa[k8, alfa] = co[k8, alfa];
      If[alfa == 0, coeficientes =
        Append[coeficientes, coa[k8, 0]];
      alfa++];
    k8++]; Return[coeficientes] ]];

```

Esta función usa de forma explícita las leyes de recurrencia (15). Hay que tener en cuenta que el número de coeficientes a calcular simbólicamente es  $(1 + k8max)^2$ . Así, por ejemplo, para considerar 20 términos en (16), deben calcularse 441 coeficientes [2]. En ámbitos más generales la situación es incluso más complicada, para los vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen, el número de coeficientes requeridos para nuestro cálculo es  $4/3 (1 + k8max)(1 + 2 k8max)(3 + 2 k8max)$ , de forma que 20 términos en (16) exigen el cálculo de 49364 coeficientes previos [7]. La potencia de cálculo de Mathematica permite que la respuesta pueda ser obtenida en un periodo de tiempo asequiblemente pequeño. El algoritmo ha sido modificado para acelerar éste y evitar los errores del cálculo de derivadas de una solución numérica, mediante la incorporación de reglas que eliminan simbólicamente las derivadas empleando las ecuaciones (4).

La siguiente función, **integracoeficientes**, permite finalmente extraer el valor numérico de los coeficientes de Seeley empleados en (16), realizando una integración numérica en un intervalo con anchura especificada por el usuario en el último argumento de dicha función, *anchura*.

```

integracoeficientes[var1_, var2_, var3_, k8max_,
  anchura_] := Module[{coef, coef1, densi, tk1, a = {}, k8},

```

```
(tk1[x_] = tk1num[var1, var2, var3, anchura];
coef = coeficientesdeseeley[var1, var2, var3, k8max];
For[k8 = 1, k8 < k8max + 0.5, a =
Append[a, NIntegrate[coef[[k8]] /. {ph1[x] → tk1[x]},
{x, -anchura / 2, anchura / 2}]; k8++]; Return[a]]];
```

La presentación de los resultados de las funciones precedentes puede realizarse de manera muy elegante mediante el uso de la sentencia `Manipulate`,

```
Manipulate[
Which[w == "Potential", resu1[potential, vacuum1, vacuum2],
w == "Kink", resu2[potential, vacuum1, vacuum2, anchura],
w == "Hessian Well",
resu3[potential, vacuum1, vacuum2, anchura],
w == "Sealey Coef and Quantum Correction",
resu4[potential, vacuum1, vacuum2, k8max, anchura]],
{{potential, 1 / 2 (y^2 - 1)^2, "Potential Term V(y)"},
{{vacuum1, -1, "First Vacuum"}},
{{vacuum2, 1, "Second Vacuum"}},
{{k8max, 10, "Max. Number de coef."}},
{{anchura, 20, "Kink Width"}}, Delimiter,
{{w, "Potential", "Estudies:"}, {"Potential", "Kink",
"Hessian Well", "Sealey Coef and Quantum Correction"}},
Setter}, ControlType → InputField, FrameLabel →
{{"", ""}, {"", Style["Quantum Correction to Kinks",
Large, RGBColor[0.7, 0, 0], Bold]}}
```

que nos muestra un cuadro de diálogo donde podemos introducir los inputs del problema, la expresión del potencial  $U(y)$  (usando como variable la letra  $y$ ), los vacíos, la anchura para visualizar el kink y el número máximo de términos a considerar en (16). Los resultados son presentados al pulsar cuatro pestañas, que llaman a las funciones **resu1**, **resu2**, **resu3** y **resu4**, indicadas abajo. La primera función representa gráficamente la  $U(y)$ , especificando la posición de los vacíos. Si los valores de los vacíos especificados no son coherentes, se proporciona un mensaje de advertencia. La función **resu2** presenta gráficamente la solución del kink obtenida numéricamente con la anchura asociada al sistema físico especificado por el potencial. Por otra parte la función **resu3** es utilizada para presentar gráficamente el término potencial  $V(\phi_K(x))$  que aparece en el operador Hessiano (5). Aquí se compara si la tendencia a infinito en cada extremo de la recta real es igual, pues en otro caso la corrección cuántica no es aplicable. En esta circunstancia se envía un mensaje de advertencia.

```
resu1[var1_, var2_, var3_] :=
Module[{var4, fig1, fig2}, (var4[ph1_] = var1 /. {y → ph1};
If[{var4[var2], var4[var3]} ≠ {0, 0},
Return["The specified vacua are invalid"];
fig1 = Plot[var4[ph1], {ph1, var2 - 0.8 Abs[var2],
var3 + 0.8 Abs[var3]}, PlotStyle ->
{RGBColor[0, 0.7, 0], Thickness[0.007]},
```



```

Frame → False, FrameLabel →
  Text[Style["Potential Term", Medium, Bold]],
ImagePadding → All]; fig2 = Graphics[{PointSize[.03],
  RGBColor[0, 0, 1], Point[{var2, var4[var2]}],
  Point[{var3, var4[var3]}]}]; Show[fig1, fig2]]];

resu2[var1_, var2_, var3_, anchura_] :=
Module[{fig1, fig2, tk1, var4},
  (tk1[x_] = tk1num[var1, var2, var3, anchura];
  var4[ph1_] = var1 /. {y → ph1};
  If[{var4[var2], var4[var3]} ≠ {0, 0},
    Return["The specified vacua are invalid"];
  fig1 = Plot[tk1[x], {x, -anchura / 2, anchura / 2},
    PlotRange →
      {var2 - 0.3 Abs[var2], var3 + 0.3 Abs[var3]},
    PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.007]},
    ImagePadding → 25]; fig2 = Plot[{var2, var3},
  {x, -anchura / 2, anchura / 2}, PlotRange →
    {var2 - 0.3 Abs[var2], var3 + 0.3 Abs[var3]},
    PlotStyle → { {RGBColor[0, 0, 1], Dashing[{0.02]},
      Thickness[0.002]}, {RGBColor[0, 0, 1],
      Dashing[{0.02}], Thickness[0.002]}}];
  Show[fig1, fig2]]];

resu3[var1_, var2_, var3_, anchura_] :=
Module[{var4, fig1, tk1, vhess, ph1},
  (var4[ph1_] = var1 /. {y → ph1};
  If[{var4[var2], var4[var3]} ≠ {0, 0},
    Return["The specified vacua are invalid"];
  tk1[x_] = tk1num[var1, var2, var3, anchura]; vhess[x_] =
  Simplify[(∂ph1, ph1 var4[ph1]) /. {ph1 → tk1[x]}];
  fig1 = Plot[vhess[x], {x, -anchura / 2, anchura / 2},
    PlotRange → All, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1],
      Thickness[0.007]}, ImagePadding → 25];
  Show[fig1]]];

```

Finalmente la función **resu4** proporciona el resumen de los cálculos para los que hemos desarrollado el programa, proporcionando gráficamente en forma de barras el valor de los coeficientes de Seeley  $c_n$  que aparecen en la serie (16) y a su vez el valor de la suma de ésta, que proporciona la estimación de la corrección cuántica a la solución kink del sistema físico que queremos obtener.

```

resu4[var1_, var2_, var3_, k8max_, anchura_] :=
Module[{var4, fig1, fig2, a, corr, vhess1, res},
  (
    var4[ph1_] = var1 /. {y → ph1};

```

```

If[{var4[var2], var4[var3]} ≠ {0, 0},
  Return["The specified vacua are invalid"]];
vhess1 = Simplify[(∂ph1,ph1 var4[ph1]) /.
  {ph1 → {var2, var3}}];
If[vhess1[[1]] - vhess1[[2]] ≠ 0, Return[
  "The specified vacua have different masses"]; a =
  integracoeeficientes[var1, var2, var3, k8max, anchura];
fig1 = ListPlot[a, Filling → Axis, FillingStyle →
  {Blue}, PlotMarkers → {Automatic, Medium},
  PlotRange → All, GridLines → Automatic];
corr =  $\frac{-1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{8\pi} \left( \sum_{n=2}^{k8max} (a[[n]] \text{vhess1}[[1]]^{-n+1} \right. \\ \left. (\text{Gamma}[n-1] - \text{Gamma}[n-1, \text{vhess1}[[1]]) \right)$ ;
res = StringJoin["ΔM=", ToString[corr]];
fig2 = Graphics[Text[Style[res, Large, Bold, Red],
  Scaled[{0.7, 0.95}]]]; Show[fig1, fig2]

```

## ■ Bibliografía

- [1] P.G. Drazin y R.S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [2] A. Alonso, W. García, M.A. González y J. Mateos, "Generalized zeta functions and one-loop corrections to quantum kink masses," *Nuclear Physics B*, **635**, 2002 pp.525–557.
- [3] A. Alonso, W. García, M.A. González y J. Mateos, "Semi-classical Mass of Quantum k-component topological kinks" *Nuclear Physics B*, **638**, 2002 pp.378–404.
- [4] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Amsterdam: North Holland, 1982.
- [5] R.F. Dashen, B. Hasslacher, y A. Neveu, *Physical Review D*, **10**, 1974 pp. 4130.
- [6] P.B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Inc, 1984.
- [7] A. Alonso, W. García, M. de la Torre y J. Mateos, "One-loop mass shift formula for kinks and self-dual vortices," *Journal of Physics A: mathematical and general*, **30**, 2006 pp. 6463–6471.

## Sobre los autores

**A. Alonso Izquierdo**  
Universidad de Salamanca

**M.A. González León**  
Universidad de Salamanca