UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales

TESIS DOCTORAL

LA MODELIZACIÓN DE VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE CONSTRUCTIVO DE LA GEOMETRÍA EN PRIMERO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA A PARTIR DE CABRI

Ana Belén Cabello Pardos

2013

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales

TESIS DOCTORAL

LA MODELIZACIÓN DE VAN HIELE EN EL APRENDIZAJE CONSTRUCTIVO DE LA GEOMETRÍA EN PRIMERO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA A PARTIR DE CABRI

Vº Bº Director

Vº Bº Directora

Prof. Dr. Ricardo López Fernández

Prof. Dra. Ana B. Sánchez García

Autora de la Tesis Doctoral

Ana Belén Cabello Pardos

2013

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y

de las Ciencias Experimentales

Facultad de Educación

Universidad de Salamanca

El Profesor Doctor Ricardo López Fernández, Profesor Titular de Universidad de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca y la Profesora Doctora. Ana B. Sánchez García, Profesora Ayudante Doctora de la Facultad de Educación de la Universidad de Salamanca,

CERTIFICAN:

Que la tesis titulada “La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la Geometría en Primero de la Educación Secundaria Obligatoria a partir de Cabri”, presentada para optar al grado de Doctor por Ana Belén Cabello Pardos, Licenciada en Matemáticas, ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, por lo que autorizamos la defensa de la tesis.

Y para que conste, expiden y firman la presente certificación

en Salamanca, a ____ de ___________ de 2013

Prof. Dr. Ricardo López Fernández   Prof. Dra. Ana B. Sánchez García

A mi familia, en especial a mi madre, Carmen y a Andrés

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que, de una u otra forma, han hecho posible la realización de esta Tesis durante estos años.

En primer lugar, agradezco a mis Directores de Tesis, los Profesores Doctores Ricardo López Fernández y Ana B. Sánchez García, su atención, orientación y disponibilidad.

A los Directores de los Institutos en los que se llevó a cabo la investigación y que facilitaron su realización, así como a los profesores y alumnos participantes, su colaboración.

A los Profesores Doctores Agustín de la Villa Cuenca, Pedro Morales Vallejo SJ, Santiago Canales Cano, de la Universidad Pontificia de Comillas en Madrid, su atención y colaboración en la validación de los instrumentos diseñados. A la Profesora Doctora Rina Hershkowitz, su ayuda con la bibliografía.

A mis compañeros del Instituto y de otros centros, Mª del Carmen Fernández Reina, Sonia Martín Gil, Mª Luisa Rioja Zarco, Trinidad Zaragoza Canales y Javier Jiménez Gómez, su desinteresada contribución en la realización de la fase experimental de la investigación.

A mis profesores de Bachillerato y de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Salamanca de quienes guardo un grato recuerdo. A mi amiga, la Profesora Doctora Ascensión Hernández Encinas, que me animó durante todos estos años. A Agustín, Enrique y Andrés, su más estrecha colaboración.

Si me olvidara de algunas personas que han estado a mi lado y me han brindado su apoyo, sería por fragilidad de mi memoria, no por ausencia de agradecimiento.

Finalmente quiero agradecer a mi familia el constante apoyo y ánimo. Con ellos he compartido las alegrías de los pequeños logros que han jalonado estos años de investigación. Andrés, mi madre Carmen, Enrique, Juan, Carmen, Fátima, Mª del Rosario, Marian, Sonsoles, Almudena, Loly, Antonio, Guillermo, Víctor, Paula, María, Pedro, Lucas, Gabriel y Diego.

Resumen

En la presente Tesis se expone una investigación sobre la implementación curricular del modelo de Van Hiele y la comprobación experimental de su eficacia. La propuesta consiste en aplicar el aspecto prescriptivo o metodológico de dicho modelo, partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos, de sus conocimientos previos y errores, utilizando el software de Geometría Dinámica Cabri, para constatar la significatividad del aprendizaje de la Geometría. De dicha experimentación se han obtenido prescripciones instructivas para la aplicación del modelo de Van Hiele insertada en la dinámica del aula.

Previamente se han estudiado las teorías sobre la comprensión de la Geometría y la formación del concepto geométrico y se han analizado las investigaciones realizadas con dichos marcos teóricos, determinando su viabilidad en el aula.

La innovación radica, por una parte, en el punto de partida para la aplicación del modelo, que consiste en el conocimiento de las imágenes conceptuales y errores de los alumnos. Para ello se han diseñado dos instrumentos metodológicos, el primero, un cuestionario de detección de errores (y de imágenes conceptuales) que sirve para medir el rendimiento en Geometría y, el segundo, unas unidades didácticas, basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y elaboradas teniendo en cuenta dichas imágenes conceptuales y errores, y utilizando el software de Geometría Dinámica Cabri.

Se han analizado dichos errores y las respuestas del grupo experimental a determinadas cuestiones, lo cual ha permitido, identificar el nivel de razonamiento de los alumnos y, establecer los criterios y prescripciones instructivas para la aplicación de dicho modelo, lo cual constituye el segundo aspecto innovador de la Tesis.

Palabras clave: Geometría, modelo de Van Hiele, implementación curricular, aprendizaje, cuestionario, unidades didácticas, errores, imágenes conceptuales, diseño cuasi-experimental.

Abstract

In this thesis we present an implementation and experimental validation of Van Hiele model. Their effectiveness has been proved. So, we will apply the prescriptive or methodological aspects of this model. The presented approach is based in the consideration from the beginning of the students' geometry background. In our proposal, the students' conceptual images have to be defined. As a tool, we propose the use of the dynamic geometry software Cabri. This tool will allow evaluating their previous knowledge and errors. Students will know the importance of geometry learning. From our experiments, prescriptions for implementing instructional Van Hiele model inserted in classroom dynamics are offered.

In this document the theories of understanding geometry and geometric concepts formation are presented. Different approaches in this theoretical framework are analyzed in detail. As a conclusion, its viability in the classroom is asserted.

Our proposal is an innovation in the starting point of the model implementation. A key role is assigned to the knowledge not only of conceptual images but also students' errors. For this purpose we have designed two methodological tools. First one is a questionnaire error detection (and conceptual images) used to measure performance in Geometry. Second one is some teaching units, based on the learning stages of the model. In the units, developed using the dynamic geometry software Cabri, the conceptual images and errors are considered.

There is a second innovation in this research. Student errors and experimental group answers to key geometry questions are analyzed. As a conclusion, students' reasoning level is identified. Now we can establish criteria and instructional requirements for the application of this model, which is the second innovative aspect of the thesis.

Keywords: Geometry, Van Hiele model, curricular implementation, learning, questionnaire, teaching units, errors, conceptual images, quasi-experimental design.

Índice General

Índice de Tablas

Índice de Ilustraciones

Índice de Ecuaciones

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción a la investigación y motivación por el tema.

Realizar una investigación en un área multisecular como es la Geometría tiene gran interés por la belleza de esta parte de las Matemáticas. Que dicho estudio sea en Didáctica de la Geometría, supone un reto en la propia tarea docente y los resultados de dicho trabajo son importantes por su repercusión en el aprendizaje de los alumnos y en la mejora de la enseñanza. Se inserta en esa herencia cultural que, según Rico y Sierra (2000), se transmite por medio del sistema educativo.

En el currículum y en las programaciones didácticas, la Geometría suele quedar relegada al final del temario, con el consiguiente riesgo de que, por falta de tiempo, no se contemple o se trate sin la temporalización adecuada. Una consecuencia inmediata es la deficiente comprensión geométrica detectada en los alumnos de Secundaria. Quizá, no solamente sea cuestionable el tiempo que se dedica a la Geometría, sino también la metodología empleada en su enseñanza, como se ha podido constatar en esta Tesis.

Nuestra preocupación, como profesores de Matemáticas, es incorporar a nuestra docencia aquellas aportaciones que se han producido en el campo de la Didáctica, y en concreto, de la enseñanza de la Geometría, e investigar y proponer modelos didácticos eficaces.

Esta investigación nace de un estudio riguroso de la bibliografía relacionada con las teorías sobre el aprendizaje matemático y en concreto las relacionadas con el aprendizaje de la Geometría, tal es el caso del modelo de Van Hiele en su doble aspecto descriptivo y prescriptivo. También se estudiaron los primeros proyectos realizados sobre dicho modelo en Estados Unidos y las investigaciones de los grupos españoles que, seguidamente, comenzaron a indagar y a proponer avances en el modelo de Van Hiele. En este sentido cabe citar a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), y al grupo de Valencia dirigido por el profesor Gutiérrez destacando los estudios de Jaime y Gutiérrez (1990), Jaime (1993), Corberán y otros (1994), Guillén (2004), Guillén, González y García, (2009), entre otros que se citan a lo largo de la Tesis. Se trataba de conocer las aportaciones de otros investigadores, los tipos de investigaciones elaboradas hasta el momento, las líneas de actuación planteadas, los posibles problemas y sus propuestas de solución, las distintas interpretaciones, etc.

Del mismo modo, se estudiaron otras teorías relacionadas con la comprensión de la Geometría y la formación de los conceptos geométricos y se analizó el software existente de Geometría Dinámica. Este proceso de análisis teórico propició una profunda reflexión sobre la relación existente entre tan diversas aportaciones y el diseño curricular del área de la Geometría en España y en la Comunidad de Madrid, que es donde se ha desarrollado la presente Tesis.

Tal reflexión, y la detección del problema de la comprensión de la Geometría en nuestros alumnos de 2º de ESO, condicionó que la investigación se centrara en la enseñanza de la Geometría en 1º de ESO, y en el análisis de su comprensión, diseñando un modelo que integra un componente teórico, como es el modelo de Van Hiele, y otro práctico, como es el software de Geometría Dinámica Cabri; en el que se han considerado los primeros proyectos realizados sobre el modelo de Van Hiele y las aportaciones de los otros estudios mencionados anteriormente.

Además, un instrumento importante de la elaboración de la Tesis han sido las contribuciones que para cualquier análisis de investigación aporta la Estadística, ciencia que permite validar de manera rigurosa los resultados obtenidos.

Así pues, los antecedentes referidos permitieron formular el objetivo fundamental de la Tesis que consiste en la implementación curricular del modelo de Van Hiele en el currículum de 1º de ESO y la comprobación experimental de su eficacia.

1.2. Planteamiento del problema.

El origen de este trabajo es el análisis de los resultados de los alumnos de 2º de ESO del Instituto en las pruebas externas de la Comunidad de Madrid. Los peores resultados eran los de Geometría, para sorpresa de las profesoras del Departamento pues, a priori, es la parte de las Matemáticas más intuitiva y visual. Ahí precisamente radicaba el problema.

Esta comprensión media en Geometría inferior a la supuesta, se observó durante tres cursos consecutivos y se decidió tratar el problema desde 1º de ESO.

Por otra parte, se aprecia una relación entre estos resultados y los obtenidos a nivel nacional donde se constata un deficiente rendimiento en Matemáticas, basta considerar el Informe PISA 2003 (INECSE, 2004), que fue la prueba especialmente dedicada a las Matemáticas, en el que España obtuvo el vigesimotercer puesto de un total de treinta países, mientras que Holanda (país de origen de Van Hiele) ocupa el 3º. Los resultados que obtuvo España en las pruebas de Matemáticas durante los años 2003, 2006 y 2009 son respectivamente, 485, 480 y 483; siendo los de Holanda en los mismos años, 538, 531 y 526.

Teniendo en cuenta esta situación, se decidió abordar el problema de la comprensión en Geometría desde el primer curso de ESO.

Se investigaron teorías vigentes relacionadas con el aprendizaje de Geometría tales como el modelo de los niveles de Van Hiele con sus fases de aprendizaje y las primeras investigaciones realizadas en Estados Unidos (Van Hiele, 1957, 1986; Usiskin, 1982; Hoffer, 1983; Mayberry, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988), y también las aportaciones de los grupos españoles y de la SEIEM (Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán y otros, 1994; Guillén, 2004; Guillén, González y García, 2009)

El estudio se centró en determinar el modo de desarrollar el modelo de Van Hiele en la impartición del currículum de Geometría en 1º de ESO. Es decir, concretar, en cada unidad didáctica, los contenidos de las fases de aprendizaje. Se trata, por tanto, de una implementación metodológica, en la que no se intenta determinar qué contenidos corresponden a cada nivel sino a cada fase de aprendizaje.

Se estudiaron otras investigaciones relacionadas con el aprendizaje de la Geometría, no solo con la comprensión, sino también con la formación del concepto. En este sentido, se consideró el modelo cognitivo sobre la formación de los conceptos geométricos "imagen del concepto-definición del concepto" basado en la visualización (Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983; Hershkowitz, 1987, 1989, 1990), la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993), el modelo cognitivo de Duval (1998), la teoría de las reglas intuitivas (Tirosh y Stavy, 1999; Stavy y otros, 2006), la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos (Tsamir, Tirosh y Levenson, 2008) y las consideraciones sobre los distractores de orientación (Burger y Shaughnessy, 1986; Azcárate, 1997), incorporando un programa de Geometría Dinámica para construir la Geometría, visualizarla y corregir los errores de comprensión.

Consultando la bibliografía, se constató que, aunque los estudios sobre el modelo de Van Hiele eran abundantes, no existían precedentes de una implementación curricular adaptada al actual sistema educativo. Las propuestas curriculares de aprendizaje de la Geometría basadas en el modelo de Van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán y otros, 1994) y otras investigaciones (Guillén, 2000; Guillén, González y García, 2009) sugirieron la detección de errores y el diseño de unidades didácticas con el actual currículum.

Se elaboró un cuestionario, a modo de fase de indagación del modelo de Van Hiele, para medir los conocimientos y los errores de comprensión en Geometría que tienen los alumnos al iniciar la Educación Secundaria Obligatoria, y su rendimiento después del estudio de la asignatura. En su diseño se tuvo en cuenta el currículum de la Comunidad de Madrid, los estándares o conocimientos esenciales de Matemáticas establecidos para la ESO y las indicaciones de las primeras investigaciones tales como los distractores de orientación mencionados anteriormente. La primera aplicación y el análisis psicométrico de los resultados, proporcionaron una segunda versión válida y fiable para el estudio. La aplicación de la versión definitiva del cuestionario, con 48 ítems, es la que se ha utilizado para esta Tesis.

La investigación tuvo un diseño metodológico de carácter cuasi-experimental con pre-test y post-test. Se eligieron dos grupos semejantes en el pre-test en los que impartía la asignatura la misma profesora. El grupo experimental utilizó las unidades didácticas elaboradas para la investigación, basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y apoyadas en el software de Geometría Dinámica (como elemento de interacción y de corrección de errores). El grupo de contraste[1] siguió la metodología tradicional, para medir la significatividad del aprendizaje.

También, en consonancia con la investigación de Usiskin (1982), se planteó la cuestión de realizar un contraste de hipótesis sobre el aprendizaje por razón de género, confrontando los resultados con los obtenidos en otras investigaciones y deseando obtener una conclusión en la línea aportada por Usiskin, como en efecto resultó.

1.3. Objetivos generales y específicos. Grado de innovación previsto.

Como se ha dicho anteriormente, el objetivo fundamental de la Tesis es la implementación curricular del modelo de Van Hiele en 1º de ESO y la comprobación experimental de su eficacia. Se plantea en tres objetivos generales y se puntualiza en varios objetivos específicos.

La innovación radica por una parte, en el enfoque de la aplicación del modelo de Van Hiele, partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y de sus errores y, por otra, en el diseño de un doble instrumento metodológico consistente, en un cuestionario de detección de errores (y de imágenes conceptuales) y de medición del rendimiento en Geometría y, en unas unidades didáctico-tecnológicas teniendo en cuenta dichos errores e imágenes, basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y elaboradas teniendo en cuenta las teorías sobre la comprensión y la formación del concepto geométrico más importantes en la actualidad.

1.3.1. Objetivos Generales.

La investigación tiene los siguientes objetivos generales:

[1] Denominación recomendada por la A.P.A. en caso de asignación no aleatoria.

1. Implementar la modelización teórica de Van Hiele a partir del aprendizaje constructivo a través de Cabri y realizar un proceso de experimentación exhaustivo en entornos reales de aula que permitan obtener resultados descriptivos en este ámbito.
2. Comprobar la eficacia de la enseñanza de la Geometría en primer curso de ESO con este modelo y el uso del software Cabri.
3. Establecer criterios y prescripciones instructivas a partir de la investigación realizada para desarrollar un programa de mejora de la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria basado en el modelo de Van Hiele, en el uso de Cabri y en la detección de errores de comprensión.

1.3.2. Objetivos Específicos.

Para lograr los objetivos generales, se concretaron objetivos específicos fácilmente medibles:

1. Estudiar el modelo de Van Hiele y las investigaciones realizadas sobre el mismo.
2. Estudiar las teorías sobre la formación del concepto geométrico basadas en la visualización de Vinner y Hershkowitz, los conceptos figurales de Fischbein, el modelo cognitivo de Duval, la teoría de las reglas intuitivas, la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos y los distractores de orientación.
3. Proponer un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría.
    - Elaborar el cuestionario y realizar su análisis psicométrico.
    - Determinar su valor como instrumento de medición del rendimiento.

4. Detectar los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO y determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género.
5. Determinar el modo concreto y específico de utilización del software geométrico para la subsanación de dichos errores.
    - Analizar del software de Geometría Dinámica.
    - Experimentar su utilización para la corrección de errores.
6. Desarrollar una instrumentalización curricular del modelo de Van Hiele en la didáctica de la Geometría de 1º de ESO. En concreto, elaborar unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
    - Proponer un desarrollo de las unidades didácticas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
    - Experimentar las unidades didácticas elaboradas a partir del modelo de Van Hiele y el software de Geometría Dinámica.
7. Determinar la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele.
8. Realizar una investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario, que permita identificar el nivel de razonamiento de los alumnos.

Esta exposición de objetivos, generales y específicos, y dentro de estos últimos, teóricos y metodológicos, detalla el grado de innovación previsto y concreta las aportaciones que se pretenden realizar con la investigación.

1.4. Situación actual de la Didáctica de las Matemáticas en España.

Partiendo de la enseñanza de las Matemáticas que se impartían en España en la primera mitad del siglo XX, se puede afirmar que en los años sesenta, la Geometría sufrió un declive debido a la influencia de la Matemática Moderna que otorgó el protagonismo a la teoría de conjuntos y a las estructuras algebraicas. Actualmente, la Geometría ha recuperado su importancia en el ámbito de la enseñanza.

Un cambio importante es la creciente consideración de la Didáctica de las Matemáticas como Ciencia. Aunque no aparece en la Nomenclatura Internacional de UNESCO para los campos de Ciencia y Tecnología, a partir del año 2000 figura en la clasificación de campos y materias de la American Mathematical Society (97-XX) (Guzmán, 2005). Prueba de su auge es la gran cantidad de literatura existente.

La institución clave en la organización y desarrollo de la Didáctica de la Matemática es la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, creada en 1996. Actualmente está constituida por 215 socios y se organiza en grupos de trabajo según diferentes líneas de investigación (Rico y Sierra, 2000).

Además de la SEIEM y de los departamentos universitarios, otros organismos se dedican a la investigación en Didáctica de las Matemáticas:

- El Centro de Investigación, Documentación y Evaluación (CIDE) ha promovido y financiado investigaciones sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación en Matemáticas.
- Las sociedades de profesores de Matemáticas, coordinadas por la Federación Española de Profesores de Matemáticas.
- La Real Sociedad Matemática Española.

En este campo de la Didáctica de las Matemáticas, los centros donde se desarrolla el estudio del aprendizaje de la Geometría y del modelo de Van Hiele son las universidades de

Valencia, Autónoma de Barcelona, La Rioja, La Coruña y País Vasco. El mayor desarrollo de investigaciones en el modelo de Van Hiele se ha encontrado en la Universidad de Valencia, con los profesores Ángel Gutiérrez, Adela Jaime y Gregoria Guillén.

En el capítulo siguiente se expondrá en detalle el desarrollo del modelo de Van Hiele, pero procede realizar en este momento una reseña sobre la relevancia de la investigación española, que ha sido de las primeras en tomar el testigo en cuanto se difundió dicho modelo.

El origen del modelo de Van Hiele es 1957, año en que Pierre y Dina Van Hiele leen sus Tesis Doctorales. Tras sucesivas investigaciones desarrollan este modelo que fue aplicado en el currículum en la Unión Soviética en los años sesenta y en Holanda en los setenta. En 1976 Wirszup pronunció una conferencia en Estados Unidos y desde allí se difundió el modelo. Se financiaron tres proyectos entre 1979 y 1982, publicando sus resultados en 1982, 1986 y 1988. En este mismo año se inicia la investigación en España.

Fue el Profesor Josep María Fortuny, de la Universidad de Barcelona, quien en 1988 inició una investigación sobre los niveles de Van Hiele, a la que se unieron los profesores Ángel Gutiérrez y Adela Jaime de la Universidad de Valencia. Este grupo es el que más ha investigado y desarrollado dicho modelo y sus publicaciones, desde 1990, pueden encontrarse en la página web del Profesor Ángel Gutiérrez, http://www.uv.es/gutierre/textos.html

1.5. Estructura de la Memoria.

La presente Memoria de investigación se estructura en siete capítulos, de los cuales el primero es introductorio, dos se dedican al Marco Teórico y Estudio del Arte, los tres siguientes constituyen el estudio empírico organizado en Metodología, Resultados y Discusión de los Resultados, y el último capítulo se refiere a las Conclusiones y Propuestas de trabajo futuro.

Este primer capítulo es una introducción y está dedicado a formular el problema, plantear la investigación y establecer los objetivos generales y específicos de la misma. Se expone la metodología utilizada para lograr dichos objetivos y se dan unas breves pinceladas sobre la situación de la didáctica de las Matemáticas en España.

El capítulo 2, bajo el título *"Marco Teórico. Análisis de los procesos de aprendizaje de la Geometría"*, describe el marco teórico en el que se inscribe la Tesis, exponiendo el modelo de Van Hiele, el modelo cognitivo sobre la formación del concepto geométrico de Vinner y Hershkowitz, la teoría de los conceptos figurales de Fischbein, el modelo cognitivo de Duval, la teoría de las reglas intuitivas, la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos para la formación de los conceptos geométricos. También se exponen las teorías del aprendizaje para fundamentar estas investigaciones sobre la Geometría dentro la Psicología de la Educación. Se analiza el software informático de Geometría Dinámica y la relación entre la Informática y la Geometría. Finalmente se hace un estudio del marco curricular de las Matemáticas en la ESO. Concluye el capítulo con la concreción del marco teórico en la presente investigación.

El capítulo 3, titulado *"Estado del Arte. Análisis del estado de la investigación sobre Geometría, el modelo de Van Hiele y Cabri en España"*, se dedica a presentar el Estado del Arte, es decir, las investigaciones sobre la Geometría, prestando especial atención a la contextualización en España. Se muestran algunas investigaciones, destacadas por su relevancia, desarrolladas con el modelo de Van Hiele, el modelo cognitivo de Vinner y Hershkowitz y el software de Geometría Dinámica. Finaliza el capítulo con un epígrafe de comentarios sobre dichos estudios.

En el capítulo 4, *"Metodología"*, se expone la metodología utilizada en la Tesis. Se detallan los objetivos, las hipótesis del estudio y el diseño de la investigación, mostrando la metodología de cada uno de los objetivos empíricos.

El capítulo 5, *"Resultados"*, presenta detalladamente los resultados obtenidos en cada uno de los objetivos.

En el capítulo 6, *"Discusión de los resultados"* se comenta cada uno de los resultados de la investigación, presentando una especial atención a los errores que persisten en la mayoría de los alumnos que estudia la Geometría con una metodología distinta a la propuesta en esta investigación.

Finalmente, en el capítulo 7 se exponen las conclusiones y propuestas de trabajo futuro, ya que, en el proceso de realización de la Tesis, se han identificado temas que supondrían un complemento de la presente investigación, pero que seguirlas habría supuesto salirse del tema.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO. ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA.

2.1. Introducción.

Desde 1970 se han producido continuos cambios en la enseñanza de las Matemáticas en España. Quizá la mayor transformación radica en el modo de entender cómo se construye el pensamiento matemático en el aula. El aprendizaje se concibe, actualmente, como un proceso activo y constructivo.

Sin embargo tanto los informes PISA 2003 (INECSE, 2004) (que fue la prueba especialmente dedicada a las Matemáticas), Sistema Estatal de indicadores de la Educación (INEE, 2010), Evaluación General de Diagnóstico (INEE, 2011), como el sentir social reflejan las carencias matemáticas en los alumnos. Algunos de los problemas actuales en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en general, y de la Geometría, en particular, se comentan en los apartados siguientes:

1. El escaso número de créditos de Matemáticas de los que se preparan para ser maestros de Primaria y de formación didáctica de los futuros profesores de Secundaria es un aspecto a tener en cuenta en los procesos de enseñanza de las Matemáticas (Sánchez y López, 2011; Rico, 2012).

Se citan, a continuación, algunos datos consultados en los planes de estudio de los grados de Maestro en Primaria y Matemáticas y del Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria de la Universidad de Salamanca, por ser donde se presenta esta Tesis.

- La formación inicial matemática de los maestros es un 7,5 % del total de créditos ECTS (USAL, 2012 a).
- El plan de estudios de la Facultad de Matemáticas se orienta a la investigación matemática superior sin apenas tener en cuenta aspectos relacionados con la Didáctica de las Matemáticas, tan solo un 2,5 % de créditos ECTS (USAL, 2012 b).
- Afortunadamente esta carencia se compensa con el Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en el que la formación en Didáctica de las Matemáticas supone un 70 % del total de créditos ECTS (USAL, 2012 c).

Resolver estos retos profesionales es algo que se puede esperar de la investigación en Didáctica de las Matemáticas (Rico, 2012; Sierra, 2011).

2. La precariedad de recursos informáticos en los centros escolares es una realidad con la que se encuentran a diario los docentes. Con frecuencia el aula de Informática de los centros está ocupada por las clases de Tecnología y apenas queda horario libre para el resto de las asignaturas del currículum.

   Lo anterior permite hacer hincapié en que si el modo de enseñar la Geometría en Educación Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato está demasiado vinculado al papel y lápiz en el caso del alumno, o a la pizarra y la tiza en el caso del profesor, la comprensión de la Geometría dependerá, en gran parte, de las habilidades de dibujo tanto de los alumnos como del profesor.

Quizá, por esta realidad de la enseñanza de la Geometría, si la enseñanza se centra en desarrollar capacidades deductivas y se omite la interacción (conjeturar, explorar), los alumnos tendrán dificultades para entender y aprender la materia.

3. Una realidad importante en las aulas es la atención a la diversidad. Desde Primaria, coexisten alumnos con distintas capacidades intelectuales en la misma aula. En Matemáticas la atención a la diversidad y la realización de adaptaciones curriculares, cobra especial relevancia. Los planes de estudio actuales prestan más atención a los alumnos con necesidades educativas especiales que a los alumnos con altas capacidades intelectuales. En este sentido se precisaría una formación adecuada del profesorado.

El análisis del contexto de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría efectuado en los párrafos anteriores propició un proceso de indagación sobre las teorías más representativas en el ámbito de estudio de esta Tesis, que ha permitido constatar la existencia de tres tipos de teorías complementarias que analizan el aprendizaje de la Geometría. Unas teorías ponen su énfasis en la comprensión de la Geometría, que se citan a continuación en orden cronológico, (Van Hiele, 1957, 1986; Usiskin, 1982; Hoffer, 1983; Mayberry, 1981, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993), otras, se centran en la formación del concepto geométrico (Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983; Hershkowitz, 1987, 1989, 1990; Fischbein, 1993), y otras analizan los procesos cognitivos (Duval, 1998; Jones, 1998; Torregosa y Quesada, 2007).

Estos planteamientos no son excluyentes, como se verá en detalle en el estudio de la visualización de Vinner y Hershkowitz (Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983; Hershkowitz, 1987, 1989, 1990). La importancia otorgada a estos lineamientos teóricos hizo que al planteamiento basado en el modelo de Van Hiele, se incorporara el enfoque del modelo de Vinner y Hershkowitz y el de Duval.

Este triple enfoque es el que se analiza en la exposición del marco teórico.

También se exponen las teorías relacionadas con el aprendizaje, como contexto y pretexto para relacionar el modelo de Van Hiele con la Gestalt o Psicología de la Forma y compararlo por contraposición con el constructivismo de Piaget.

2.2. Investigaciones sobre la comprensión de la Geometría: el modelo de Van Hiele.

La fecha clave es 1957. En este año el matrimonio holandés formado por Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof leen sus tesis doctorales. A partir de estas investigaciones y otros estudios posteriores desarrollan un modelo en el que explican cómo el alumno va recorriendo cinco niveles en su comprensión de la Geometría y en cada uno de ellos establecen unas fases que permiten analizar el aprendizaje de dicha materia. De esta manera se concreta cómo ayudar a los alumnos a mejorar la calidad de su razonamiento.

El modelo de Van Hiele consta, por tanto, de dos aspectos (Jaime y Gutiérrez, 1990): uno, descriptivo, en el que se establecen los niveles de pensamiento en los que progresa el razonamiento de los alumnos, y otro prescriptivo o metodológico, en el que plantea a los profesores las directrices para ayudar a los alumnos a progresar en los niveles de pensamiento y son las fases de aprendizaje. Esquemáticamente se resume en la siguiente tabla:

<table>
<tr><td rowspan="2">Modelo de Van Hiele</td><td>Aspecto descriptivo: Niveles de pensamiento</td></tr>
<tr><td>Aspecto prescriptivo: Fases de aprendizaje</td></tr>
</table>

Tabla 1. Modelo de Van Hiele

En los siguientes apartados se detallan ambos aspectos del modelo de Van Hiele, no obstante, a continuación se presenta un gráfico de dicho modelo.

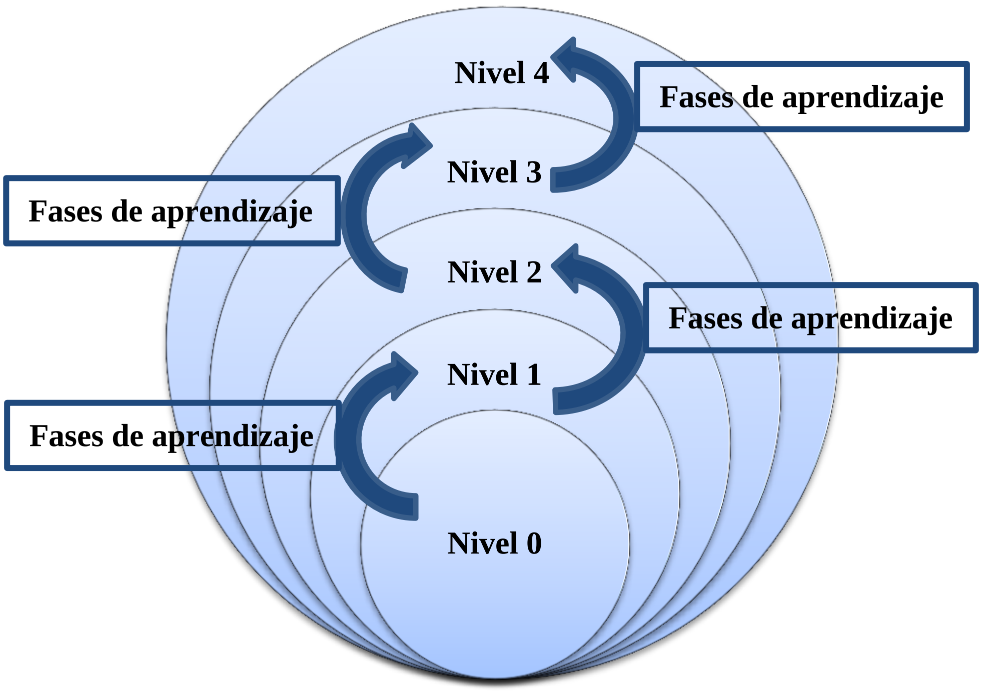


Ilustración 1. Aspecto descriptivo y prescriptivo del modelo de Van Hiele (1957). Elaboración propia

En estudios anteriores a la lectura de su Tesis, Pierre Van Hiele menciona dos aspectos relacionados con la importancia de los niveles de pensamiento en la comprensión de la Geometría: el primero hace referencia a los niveles de comprensión conceptual y el segundo está vinculado a los procesos de ordenación mental. Afirma que *"la consecución de niveles constituye la garantía de que el proceso de aprendizaje tendrá resultados duraderos"* (1957, pág. 89).

Van Hiele explica además, que la formación de la comprensión geométrica se produce por medio de tres estructuraciones: perceptiva, lingüística y lógica. Estas facetas en parte se complementan, pero a lo largo del proceso consecutivo, la siguiente absorbe a la anterior. Se puede afirmar que el lenguaje tiene la función de intermediario entre la estructuración perceptiva y la lógica (Van Hiele, 1957).

Teniendo en cuenta que el modelo de Van Hiele se enmarca en una concepción constructivista del aprendizaje informada por la Gestalt, Hoffer (1983) presenta los niveles de pensamiento comparando dicho aprendizaje con un proceso inductivo en el que va aumentando el grado de comprensión:

"*Los niveles de pensamiento que van unidos al aprendizaje de una materia particular son de naturaleza inductiva. En el nivel n-1 lo estudiado son ciertas versiones limitadas de los objetos. Algunas relaciones entre los objetos están establecidas de manera explícita; sin embargo existen otras relaciones posiblemente accesibles que no están explícitamente establecidas. En el nivel n los objetos estudiados son ahora los enunciados que fueron formulados explícitamente en el nivel n-1, además de aquellos enunciados que estaban solamente implícitos en el nivel n-1. En efecto, los objetos que hay en el nivel n consisten en extensiones de los objetos del nivel n-1*"

(Hoffer, 1983, pág. 206)

Con esta diferenciación de niveles se pretende identificar los obstáculos que tienen los alumnos tanto a nivel de conceptos como de lenguaje. Si un alumno que está pensando en el nivel n-1 se enfrenta a un problema que requiere pensamiento del nivel n, será incapaz de comprenderlo.

2.3. Niveles del modelo de Van Hiele.

En este epígrafe se presentan los niveles de Van Hiele según el estudio de varios autores (Hoffer, 1983; Mayberry, 1981, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993) y del propio Van Hiele en estudios posteriores a su Tesis doctoral (1986).

La caracterización de los niveles es la misma en todos los autores que han estudiado el modelo de Van Hiele. La diferencia radica en que unos llaman "nivel cero" al nivel básico, de reconocimiento o visualización y otros lo denominan "nivel uno". En la presente Tesis se ha acordado empezar por el nivel cero, siguiendo a tres de las cuatro primeras y principales investigaciones sobre dicho modelo (Mayberry, 1981, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988) y a otro autor que constituye una autoridad en el tema como es Hoffer (1983), que formaba parte del grupo de Burger y Shaughnessy. En cuanto a la descripción de los niveles se han considerado también a otros investigadores fundamentales en el panorama español (Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993).

Los niveles de pensamiento tienen una estructura recursiva, ya que en cada uno hay determinadas habilidades que están siendo utilizadas de manera implícita por los alumnos y cuyo uso se hace explícito en el nivel siguiente. De forma esquemática se presentan en la siguiente tabla los elementos explícitos e implícitos de cada nivel y a continuación se define cada uno de ellos:

NIVELES		**ELEMENTOS EXPLÍCITOS**	**ELEMENTOS IMPLÍCITOS**
N.0	Básico, de reconocimiento o visualización.	Elementos básicos del estudio: figuras y objetos.	Partes y propiedades de las figuras y objetos.
N.1	Análisis.	Partes y propiedades de las figuras y objetos.	Implicaciones entre propiedades de las figuras y objetos, es decir enunciados que relacionan las propiedades.
N.2	Deducción Informal, orden o clasificación.	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos.	Deducción formal de teoremas. Demostraciones.
N.3	Deducción.	Deducción formal de teoremas.	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos).
N.4	Rigor.	Relación entre los teoremas y entre los sistemas axiomáticos.	

Tabla 2. Niveles del modelo de Van Hiele basada en Jaime y Gutiérrez (1990)

Nivel 0: Básico, de reconocimiento o visualización.

Los objetos son los elementos básicos del estudio.

> *"Los alumnos reconocen las figuras por su apariencia global. Pueden decir triángulo, cuadrado, cubo y así sucesivamente, pero no identifican explícitamente las propiedades de las figuras"*
>
> (Hoffer, 1983, pág. 207)

Siguiendo a Burger y Shausghnessy (1986) los indicadores de este nivel son:

1. Usar propiedades imprecisas (cualidades) para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras.
2. Hacer referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras.
3. Incluir atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en la hoja.
4. Considerar cada figura como un objeto (es decir, no ser capaz de concebir una variedad infinita de tipos de figuras).
5. Clasificar las figuras de manera inconsistente, es decir, mediante propiedades que no poseen todas las figuras seleccionadas.
6. No ser capaz de usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura.

Las anteriores características permiten afirmar que este nivel es el más elemental del razonamiento geométrico, típico de la Educación Infantil y primeros cursos de Primaria, pero no es exclusivo de estas etapas. Cada vez que se presenta a los alumnos un concepto geométrico nuevo, pasan por dicho nivel aunque sea muy rápidamente.

Por ejemplo

> "*si le damos a un niño pequeño que se encuentra en el nivel 1* [básico] *de Van Hiele, un círculo, un triángulo y un cuadrado y le preguntamos en qué se diferencian estas figuras, seguramente su respuesta se referirá a la redondez, figuras más o menos puntiagudas, etc., pero no hablará de número de vértices ni de amplitud de ángulos. Es evidente que el niño reconoce los vértices (o su ausencia) como característica diferenciadora entre las figuras, pero no es consciente de ello y, por lo tanto, no los usa directamente. Con estudiantes mayores, esta situación no se da tan claramente.*

Ante la misma situación anterior, un niño de los últimos cursos de Primaria sí hablará de los ángulos, porque ya los ha estudiado, pero para él esos elementos son particulares de la figura que se está utilizando, pues carece por completo de la capacidad de generalización"

(Jaime y Gutiérrez, 1990, pág. 308)

Nivel 1: Análisis.

Los objetos son las propiedades que analizan los elementos básicos.

"Los alumnos analizan las propiedades de las figuras: "los rectángulos tienen las diagonales iguales", "un rombo tiene todos los lados iguales", pero no interrelacionan explícitamente las figuras o las propiedades"

(Hoffer, 1983, pág. 207)

Los indicadores de este nivel son los siguientes (Burger y Shaughnessy, 1986):

1. Comparar las figuras explícitamente por medio de las propiedades de sus componentes.
2. Prohibir inclusiones de clases entre los tipos generales de las figuras, tales como los cuadriláteros.
3. Clasificar las figuras por atributos simples, tales como propiedades de los lados, sin tener en cuenta ángulos, simetrías, etc.
4. Aplicar una lista de propiedades necesarias en lugar de determinar las propiedades suficientes para identificar figuras.
5. Realizar descripciones de tipos de figuras mediante el uso explícito de sus propiedades más que por los nombres de los tipos. Por ejemplo, en lugar de "rectángulo", mencionar la figura como "cuadrilátero con todos los ángulos rectos".

6. Rechazar explícitamente las definiciones de las figuras de los libros de texto a favor de la caracterización personal.
7. Tratar la Geometría como Física, al comprobar la validez de una proposición contando con una variedad de objetos y haciendo observaciones sobre ellos.
8. No comprender la demostración matemática.

En este nivel el alumno empieza a generalizar, con lo que inicia el razonamiento matemático, señalando qué figuras tienen una determinada propiedad matemática, pero siempre considerará las propiedades como independientes, sin ser capaz de establecer las relaciones entre propiedades equivalentes. Los alumnos reconocen los elementos de las figuras y son conscientes de que tienen propiedades.

> "*Los estudiantes han cambiado su forma de mirar las figuras geométricas, ya son conscientes de que pueden estar formadas por elementos y de que son portadoras de ciertas propiedades. Mientras que para un estudiante del nivel 1* [básico] *de Van Hiele un rectángulo es una figura reconocible porque tiene una determinada forma (como las puertas o los libros), para otro que se encuentre en el nivel de análisis, un rectángulo es un cuadrilátero con lados paralelos dos a dos, ángulos rectos, lados opuestos iguales, etc.; es decir, su respuesta a qué es un rectángulo será una lista de las propiedades que conoce*"
>
> (Jaime y Gutiérrez, 1990, pág. 308)

Un ejemplo para ilustrar este nivel:

> "*Si a partir de la manipulación de unos cuantos rombos, un estudiante del nivel de análisis descubre que las diagonales son perpendiculares, sabrá, sin necesidad de comprobarlo, que las diagonales de cualquier otro rombo que le presenten serán también perpendiculares*"
>
> (Jaime y Gutiérrez, 1990, pág. 309)

Nivel 2: Deducción informal, orden, clasificación.

Los objetos son enunciados que relacionan las propiedades.

> *"Los alumnos relacionan las figuras y sus propiedades: "todo cuadrado es un rectángulo" pero no establecen una sucesión de enunciados para justificar las observaciones"*
>
> (Hoffer, 1983, pág. 207)

Los indicadores de este nivel son (Burger y Shaughnessy, 1986):

1. Formar definiciones completas de los tipos de figuras.
2. Comprender las definiciones y aceptar y usar inmediatamente las definiciones de los conceptos nuevos.
3. Realizar referencias explícitas a las definiciones.
4. Aceptar formas equivalentes de definiciones.
5. Aceptar la ordenación parcial lógica entre los tipos de figuras y realizar inclusiones de clases.
6. Clasificar las figuras en base a atributos matemáticamente precisos.
7. Utilizar explícitamente los enunciados *"si…, entonces…"*.
8. Elaborar correctamente argumentos deductivos informales usando implícitamente formas lógicas como la regla de la cadena (si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces $p \rightarrow r$) y la ley de separación.
9. Confundir los papeles de axioma y teorema.

Por ejemplo, en este nivel los alumnos *"ya serán capaces de clasificar inclusivamente los diferentes cuadriláteros (los cuadrados son rombos y rectángulos, etc.) y podrán dar definiciones matemáticamente correctas*" (Jaime y Gutiérrez, 1990, pág. 310). La capacidad de razonamiento de los alumnos *“se limitará a hacer pequeñas deducciones, es decir, implicaciones simples”* (Jaime y Gutiérrez, 1990, pág. 310).

Los alumnos que razonan en este nivel no comprenden las demostraciones, creen que las demostraciones formales no son necesarias pues basta comprobarlas un número razonable de veces y desde luego, piensan que si se sabe que es verdad, no hay que demostrar nada.

Nivel 3: Deducción.

Los objetos son ordenaciones parciales o sucesiones de los enunciados.

> *“Los alumnos desarrollan sucesiones de enunciados para deducir un enunciado de otro, tales como mostrar como el postulado de las paralelas implica que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Sin embargo, no reconocen la necesidad del rigor ni entienden las relaciones entre otros sistemas deductivos”*
>
> (Hoffer, 1983, pág. 207)

Los indicadores del nivel son (Burger y Shaughnessy, 1986):

1. Clarificar cuestiones ambiguas y reformular problemas en un lenguaje preciso.
2. Realizar conjeturas frecuentes e intentar verificarlas deductivamente.
3. Tener confianza en la demostración como autoridad final para decidir la verdad de una proposición matemática.
4. Comprender los papeles de los componentes de un discurso matemático: axioma, definición, teorema, demostración.
5. Aceptar implícitamente los postulados de la Geometría Euclídea.

Es claro que, adquirido este nivel, tener un alto grado de razonamiento lógico implica una visión globalizadora de las Matemáticas.

Nivel 4: Rigor.

Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales. La Geometría se capta en forma abstracta.

> *"Los alumnos analizan varios sistemas deductivos con un alto grado de rigor comparable al enfoque de Hilbert sobre los fundamentos de la Geometría. Ellos entienden las propiedades de un sistema deductivo, como la coherencia, la independencia y la completitud de los postulados"*
>
> (Hoffer, 1983, pág. 207)

Burger y Shaughnessy (1986) no caracterizaron este nivel, por lo que en esta Tesis se han considerado los indicadores establecidos por Jaime (1993):

1. Trabajar en sistemas axiomáticos distintos al de la Geometría Euclídea.
2. Realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
3. Establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
4. Comprender la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

En su Tesis, Van Hiele no establece exactamente así los niveles de pensamiento, no habla del nivel cero sino de *"las experiencias espaciales preexistentes"* y de *"la traducción de las experiencias espaciales al lenguaje geométrico"*. En artículos posteriores y en su libro "Structure and insight" (Van Hiele, 1986) completa su exposición inicial.

Dado que se considera que el último nivel es inalcanzable para los estudiantes, generalmente se prescinde de él. Además, los estudios realizados señalan que los alumnos en la Educación Secundaria Obligatoria alcanzan como mucho los tres primeros niveles (Corberán y otros, 1994; Jaime y Gutiérrez, 1995). También hay que tener en cuenta que un alumno puede estar en un nivel para unos contenidos y en un nivel distinto para otros.

La siguiente tabla resume los indicadores de los tres primeros niveles de Van Hiele según Burger y Shaughnessy (1986), que son los utilizados en esta Tesis.

	NIVEL 0	**NVEL 1**	**NIVEL 2**
1	Usar propiedades imprecisas (cualidades) para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras.	Comparar las figuras explícitamente por medio de las propiedades de sus componentes.	Formar definiciones completas de los tipos de figuras.
2	Hacer referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras.	Prohibir inclusiones de clases entre los tipos generales de las figuras, tales como los cuadriláteros.	Comprender las definiciones y aceptar y usar inmediatamente las definiciones de los conceptos nuevos.
3	Incluir atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en la hoja.	Clasificar las figuras por atributos simples, tales como propiedades de los lados, sin tener en cuenta ángulos, simetrías, etc.	Realizar referencias explícitas a las definiciones.
4	Considerar cada figura como un objeto (es decir, no ser capaz de concebir una variedad infinita de tipos de figuras).	Aplicar una lista de propiedades necesarias en lugar de determinar las propiedades suficientes para identificar figuras.	Aceptar formas equivalentes de definiciones.
5	Clasificar las figuras de manera inconsistente, es decir, mediante propiedades que no poseen todas las figuras seleccionadas.	Realizar descripciones de tipos de figuras mediante el uso explícito de sus propiedades más que por los nombres de los tipos. Por ejemplo, en lugar de "rectángulo", mencionar la figura como "cuadrilátero con todos los ángulos rectos".	Aceptar la ordenación parcial lógica entre los tipos de figuras y realizar inclusiones de clases.
6	No ser capaz de usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura.	Rechazar explícitamente las definiciones de las figuras de los libros de texto a favor de la caracterización personal.	Clasificar las figuras en base a atributos matemáticamente precisos.
7		Tratar la Geometría como Física, al comprobar la validez de una proposición contando con una variedad de objetos y haciendo observaciones sobre ellos.	Utilizar explícitamente los enunciados *"si…, entonces…"*.
8		No comprender la demostración matemática.	Elaborar correctamente argumentos deductivos informales usando implícitamente formas lógicas como la regla de la cadena (si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces $p \rightarrow r$) y la ley de separación.
9			Confundir los papeles de axioma y teorema.

Tabla 3. Indicadores de los tres primeros niveles de Van Hiele según Burger y Shaughnessy (1986)

2.4. Principales características del modelo de Van Hiele.

En los estudios de Jaime y Gutiérrez (1990) y Jaime (1993) se analizan algunas propiedades del modelo de Van Hiele cuyo conocimiento es imprescindible para la comprensión y aplicación del mismo.

1. **Estructura jerárquica y secuencial del modelo.**

Esta propiedad significa que para alcanzar un nivel de razonamiento es necesario haber superado el nivel inferior, lo cual se ha visto claramente en la exposición de los niveles. Esta propiedad quedó clarificada desde los primeros estudios sobre el modelo de Van Hiele (Usiskin, 1982; Mayberry, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988).

En un pequeño porcentaje se pueden encontrar alumnos que no se ajusten a esta propiedad lo cual puede ser síntoma de alguna deficiencia en la metodología de asignación de niveles empleada (Jaime, 1993).

2. **A cada nivel de razonamiento corresponde un tipo de lenguaje específico.**

Las implicaciones que esto tiene en la actividad diaria en clase son importantes. Si un profesor quiere que los alumnos le comprendan, debe hablarles en su lenguaje, es decir, debe adaptarse al nivel de razonamiento de los estudiantes para, a partir de ahí, tratar de guiarles para que se produzca un avance hacia el nivel superior.

No se puede dar por supuesto que todos los alumnos entienden lo que el profesor dice. Por ejemplo, si propone realizar una demostración, tiene que tener en cuenta que la palabra *"demostrar"* carece de sentido para un alumno del nivel básico; uno del nivel de análisis entiende que *"demostrar"* es comprobar la afirmación en unos pocos casos; en el de clasificación, *"demostrar"* es utilizar razonamientos lógicos y en el nivel de deducción, la demostración cumple los requisitos usuales de rigor (Jaime, 1993).

3. Localidad de los niveles de razonamiento.

Esta propiedad se refiere a que un alumno puede razonar en diferentes niveles según distintos temas de la Geometría (Mayberry, 1981, 1983). Lo contrario sería la globalidad, es decir, un alumno razonaría en el mismo nivel en todos los campos geométricos.

4. El paso de un nivel de conocimiento al siguiente se produce de manera gradual.

Inicialmente Van Hiele (1986) opinaba que el paso de un nivel al siguiente se produce de forma discreta de manera que hay un momento en el que el alumno consigue un aprendizaje comprensivo que propicia el paso al siguiente nivel, pero esta hipótesis no explica el hecho de que a veces los alumnos razonan simultáneamente en dos niveles consecutivos.

Actualmente, produce mejores resultados la consideración de la continuidad en la adquisición de los niveles, estableciéndose un periodo de transición en el que combinará razonamientos de dos niveles consecutivos.

5. El progreso en los niveles se produce como resultado de la instrucción.

Van Hiele (1986) afirma que *"la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje"*. En este sentido discrepa de Piaget, el cual pone el énfasis en la maduración biológica más que en la instrucción para alcanzar el desarrollo intelectual.

2.5. Fases del aprendizaje.

La exposición de los niveles de comprensión da pautas para secuenciar los contenidos a la hora de elaborar las unidades didácticas del currículo de Geometría para un determinado curso o etapa. Es lo que se llama el aspecto prescriptivo del modelo y está constituido por las fases de aprendizaje.

El profesor es quien guía al alumno para que pase de un nivel al siguiente. Para ayudarle a diseñar el aprendizaje en cada nivel, se establecen cinco fases, es decir, cinco etapas de enseñanza para el progreso en el aprendizaje.

Como se ha indicado en el epígrafe anterior, Van Hiele expone la necesidad del aprendizaje para progresar en los niveles de pensamiento, argumentando que "*la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje*" (Van Hiele, 1986, pág. 50). En este sentido Van Hiele discrepa de Piaget al poner énfasis en el aprendizaje guiado más que en la maduración biológica.

En los niveles de comprensión, el protagonista es el alumno, pues es el sujeto de la adquisición de dichos niveles. En cambio, en las fases de aprendizaje, el protagonista es el profesor, que diseña el camino para que el alumno progrese en la comprensión de la Geometría. Dada la importancia de la conexión entre ambos procesos para el aprendizaje de la Geometría, se describe a continuación el desarrollo de las fases de aprendizaje siguiendo la exposición de Van Hiele (1986), Hoffer (1983) y De La Torre (2003).

En la siguiente ilustración se muestra, de manera gráfica, el aspecto prescriptivo o metodológico del modelo de Van Hiele, es decir, las fases de aprendizaje con las que el profesor guía al alumno en la adquisición de los niveles. A continuación se exponen cada una de dichas fases.

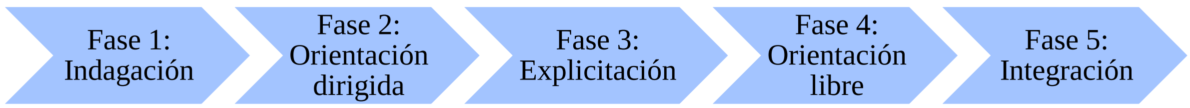


Ilustración 2. Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele (1957). Elaboración propia

Fase 1. Indagación.

> *"*[El profesor tiene] *un diálogo con los alumnos acerca de los objetos de la materia que se va a estudiar, lo que le permite conocer las interpretaciones que los alumnos les dan a las palabras. En esta fase se prepara el terreno conceptual para el estudio posterior"*
>
> (De La Torre, 2003, pág. 112)

Esta fase tiene dos objetivos:

1. Que el profesor conozca los conocimientos previos de los alumnos en el tema que se va a tratar y su nivel de razonamiento en el mismo.
2. Que los alumnos tomen contacto con el tema que van a tratar.

Se trata de determinar el punto de partida de los alumnos.

Muchas veces el nivel lo determina tanto la pregunta como la respuesta, es decir, se plantea una pregunta de un determinado nivel de modo que la respuesta puede corresponder a dicho nivel o a otro distinto.

Fase 2. Orientación dirigida.

> *"El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales éstos pueden tomar conciencia de los objetivos que se persiguen y se familiarizan con las estructuras características. La mayoría de las actividades en esta fase consisten en tareas de un solo paso en las que se les pide a los alumnos dar respuestas específicas"*
>
> (De La Torre, 2003, pág. 113)

Se trata de que los alumnos descubran, comprendan y aprendan los conceptos, propiedades, etc. que se están estudiando.

Fase 3. Explicitación.

> “[Los alumnos] *refinan el empleo de su vocabulario, construyendo ahora sobre experiencias previas. La intervención del profesor en esta fase debe restringirse a lo mínimo indispensable y orientarse a facilitar la expresión explícita de las opiniones de los alumnos con respecto a las estructuras intrínsecas del estudio. En esta fase los alumnos empiezan a formar el sistema de relaciones del estudio, a partir del cual podrán operar con eficacia en la solución de los problemas”*
>
> (De La Torre, 2003, pág. 113)

Son actividades semejantes a las de la fase anterior, que los alumnos desarrollan por sí mismos afianzando su comprensión.

Fase 4. Orientación libre.

> *“Los alumnos encuentran en esta fase tareas de múltiples pasos, así como otras que pueden llevarse a cabo por procedimientos diferentes”*
>
> (De La Torre, 2003, pág. 113)

Se trata de que puedan aplicar lo adquirido anteriormente, referido tanto a contenidos como al lenguaje necesario para exponerlo. Son actividades abiertas que pueden ser abordables de diferentes maneras o que pueden tener varias respuestas según la interpretación del enunciado.

> *“Esto les permite adquirir experiencia en el hallazgo de su manera propia de resolver las tareas. Los alumnos llegan a hacer explícitas muchas de las relaciones entre los objetos de estudio cuando se les estimula a orientarse por sí mismos en el campo de investigación”*
>
> (De La Torre, 2003, pág. 113)

Fase 5. Integración.

> *"Los alumnos revisan en esta fase los métodos que tienen a su disposición y lanzan una mirada de conjunto, con lo cual se busca que unifiquen los objetos y las relaciones y que los asimilen internamente en un nuevo dominio de pensamiento. La ayuda del profesor en esta fase consiste en proporcionar a los alumnos algunas vistas panorámicas de aquello que ellos ya conocen, teniendo cuidado de no presentarles ideas nuevas o discordantes"*
>
> (De La Torre, 2003, pág. 113)

Es decir, no se trabajan contenidos nuevos sino que se sintetizan los ya trabajados. Se trata de crear una red interna de contenidos aprendidos o mejorados. Consta de actividades de recuperación para los alumnos que tengan algún retraso y actividades de profundización con los alumnos de mejor rendimiento.

Van Hiele (1986) propone la utilización de problemas como herramientas de la enseñanza, desempeñando, en las diferentes fases del proceso de aprendizaje, diferentes funciones orientadas a la consecución de los objetivos de dichas fases.

Con esta exposición, el modelo de profesor que propugna Van Hiele es el de guía.

2.6. Primeras y principales investigaciones sobre el modelo de Van Hiele.

Como se ha dicho anteriormente, el modelo de Van Hiele tiene su origen en 1957, año en el que Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof leen sus tesis doctorales en Holanda. Como profesores de Matemáticas estaban preocupados por el rendimiento de sus alumnos en Geometría. Pierre Van Hiele, estudiando algunos trabajos de Piaget, formuló su sistema de niveles de pensamiento en Geometría (Hoffer, 1983, pág. 206).

> *"Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, muy pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la asignatura que yo podía*

explicar y explicar, y aun así los alumnos no lo entendían. Podía ver que ellos lo intentaban pero sin éxito. Especialmente al principio de la geometría, cuando se tiene que probar cosas muy simples, podía ver que ellos hacían todo lo posible, pero la materia parecía demasiado difícil. Pero como yo era un profesor inexperto, tenía que considerar la posibilidad de que fuera un mal profesor. Y esta última molesta posibilidad fue confirmada por lo que viene a continuación: De repente parecía que entendían la materia. Podían hablar de ella muy sensatamente. Pero muy a menudo decían: "No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicaste con tanta dificultad?" En los años siguientes cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades permanecían. Parecía que yo estaba hablando en un idioma distinto. Y considerando esta idea descubrí la solución, los distintos niveles de pensamiento"

(Van Hiele, 1986, pág. 39)

Este modelo se conoció muy pronto en la Unión Soviética y se utilizó como base para el desarrollo curricular de Matemáticas en la primera mitad de los años sesenta. También en los setenta se utilizó este modelo en Holanda.

Fue a raíz de la conferencia pronunciada por Wirszup en Estados Unidos en 1974, publicada en 1976 (Wirszup, 1976), cuando se empezó a investigar este modelo tanto en los Estados Unidos como en los países occidentales.

Se llevaron a cabo tres proyectos de investigación claves sobre el modelo de Van Hiele y hubo una cuarta investigación contemporánea, clave también en la comprensión de dicho modelo. Estos estudios abordan diferentes campos en los que la investigación es necesaria para entender mejor la estructura de pensamiento de los alumnos (Hoffer, 1983).

2.6.1. El Proyecto de Oregón: Evaluación del progreso de los alumnos en Geometría.

Desarrollado desde septiembre de 1979 a febrero de 1982 y financiado por la Fundación Nacional de Ciencias (National Science Foundation).

Componían el grupo William Burger (Director), Alan Hoffer, Bruce Mitchell y Michael Shaughnessy.

El objetivo era investigar el grado en el que el modelo de los niveles de Van Hiele permite acceder a la comprensión que tienen los alumnos de la Geometría.

> "*Este estudio fue emprendido para investigar las siguientes cuestiones:*
>
> *1) ¿Son útiles los niveles de Van Hiele para describir los procesos de pensamiento de los estudiantes en actividades de Geometría?*
>
> *2) ¿Pueden caracterizarse los niveles operativamente por la conducta del estudiante?*
>
> *3) ¿Puede desarrollarse un procedimiento de entrevistas para revelar niveles de razonamiento predominantes en actividades específicas de Geometría?"*
>
> (Burger y Shaughnessy, 1986, pág. 32)

Se elaboraron actividades experimentales, un guion de entrevista y un paquete de codificación para el análisis. El objetivo era que pudiera ser aplicado fácilmente por profesores e investigadores. Cada entrevista duró entre 40 y 90 minutos.

Entrevistaron a 45 alumnos de todos los niveles (entre ellos, dos alumnos universitarios) seleccionados por sus profesores con el criterio que tuvieran una habilidad media-alta. En las entrevistas se les proponían 8 actividades y se les permitía lápiz, papel, regla y compás. El material obtenido, que estaba compuesto por las entrevistas grabadas en audio, los dibujos y las notas de los entrevistadores, fue analizado posteriormente.

Las actividades estaban relacionadas con triángulos y cuadriláteros e implicaban dibujo, identificación, definición y clasificación y requerían el razonamiento informal y el formal.

Por diversas razones, en el estudio de las entrevistas observaron que los niveles parecían ser dinámicos, más que estáticos, pues a lo largo del razonamiento algunos alumnos parecían cambiar de nivel y otros mostraban niveles distintos para diversas actividades.

En las actividades de identificación y definición observaron que algunos atributos irrelevantes, como la orientación, se tenían en cuenta en la descripción de una figura. Consideraron que estas respuestas eran indicadoras del nivel 0. Asignaron el nivel 1 a la identificación de las figuras por sus propiedades.

En las actividades de clasificación encontraron razonamientos que utilizaban cualidades visuales de las figuras (fueron asignados al nivel 0). Otras respuestas utilizaban las propiedades de las figuras y se determinaron como indicadoras del nivel 1. Otras, que relacionaban varios tipos, fueron asignadas al nivel 2.

Obtuvieron como conclusión que las asignaciones de niveles no parecían estar estrictamente relacionadas con la edad ni con el curso. Establecieron, en base al análisis de estas entrevistas, unos indicadores de nivel.

Concluyeron así que las tres preguntas de su investigación podían ser contestadas afirmativamente.

2.6.2. El Proyecto de Brooklyn: Pensamiento geométrico entre los adolescentes en las escuelas del centro urbano.

Desarrollado desde noviembre de 1979 hasta enero de 1982 y subvencionado igualmente por la Fundación Nacional de las Ciencias. Formaban el equipo Dorothy Geddes (Directora), David Fuys, C. James Lovette y Rosamond Tischler.

El objetivo era determinar si el modelo de Van Hiele describe el aprendizaje de la Geometría y cómo dicho modelo se puede interpretar en el contexto curricular americano en 6º y 9º grado, que corresponden a los actuales niveles españoles de 6º de Primaria y 3º de

ESO. También evaluaron el contenido geométrico de varios libros de texto según el modelo de Van Hiele. Desarrollaron e implementaron tres unidades didácticas según los niveles de Van Hiele y las fases de aprendizaje.

> *"Había cuatro objetivos principales:*
>
> *1) Desarrollar y documentar un modelo de trabajo de los niveles de Van Hiele, basado en varias fuentes que el Proyecto había traducido del holandés al inglés.*
>
> *2) Caracterizar el pensamiento en Geometría de 6º y 9º grados, en términos de niveles, en particular, en qué niveles están los alumnos.*
>
> *3) Determinar si se puede formar a los profesores de los grados 6º y 9º para identificar los niveles de Van Hiele del pensamiento en Geometría de los alumnos y de los materiales curriculares de Geometría.*
>
> *4) Analizar el currículum actual de Geometría americano de los textos de los grados K a 8, a la luz del modelo de Van Hiele".*
>
> (Fuys, Geddes y Tischler, 1988, pág. 1)

El primer objetivo se logró analizando el material de Van Hiele publicado hasta el momento. Formularon un modelo de los niveles de Van Hiele detallado que fue examinado y validado por el propio Van Hiele, y los investigadores Alan Hoffer y William Burger.

En el segundo objetivo, se llevó a cabo un estudio clínico en varias fases. La primera fue el desarrollo y validación de tres unidades didácticas basadas en el modelo sobre "Propiedades de los cuadriláteros", "Relaciones de ángulos en los polígonos" y "Áreas de los cuadriláteros". La segunda fase consistió en varias sesiones (entre 6 y 8) de 45 minutos, que fueron grabadas, en las que 16 alumnos de 6º y otros 16 de 9º, trabajaron estas unidades con un entrevistador. La tercera y última fase fue el análisis de dichas entrevistas y síntesis de los resultados.

El tercer objetivo se desarrolló con una plantilla de 8 estudiantes de Magisterio y 5 profesores en activo. En las primeras sesiones, trabajaron algunas actividades de las unidades didácticas, se les explicó el modelo de Van Hiele, observaron y discutieron partes de las grabaciones de los alumnos haciendo las actividades y evaluaron materiales curriculares de Geometría de los grados K a 8 según los niveles de Van Hiele. Finalmente, evaluaron una muestra de materiales curriculares en términos de niveles de Van Hiele y se les mostraron secuencias de las grabaciones para decidir el nivel de Van Hiele que evidenciaban los alumnos.

El último objetivo de la investigación consistió en analizar el contenido geométrico de los libros de texto de tres editoriales ampliamente utilizados, a la luz del modelo de Van Hiele determinando los tópicos geométricos que se enseñan en cada grado (para medir la riqueza y la continuidad de la enseñanza), el nivel de Van Hiele en el que se encuentran los materiales de cada grado y si la presentación de los tópicos geométricos es consistente con los principios didácticos de Van Hiele.

Se constató la naturaleza jerárquica del modelo, los aspectos de lenguaje de cada nivel, y la naturaleza implícita-explícita de los niveles de pensamiento adyacentes.

2.6.3. El Proyecto de Chicago: Desarrollo cognitivo y rendimiento en Geometría de la Enseñanza Secundaria.

Desarrollado desde julio de 1979 hasta junio de 1982 y financiado por el Instituto Nacional de Educación (National Institute of Education). Formaban el equipo Zalman Usiskin (Director), Roberta Dees, Sharon Shenk.

Se diseñó el proyecto para abordar varias cuestiones relacionadas con esta teoría:

1) ¿Cómo se distribuyen los estudiantes de Geometría respecto al esquema de los niveles de Van Hiele?

2) ¿Qué cambios en los niveles de Van Hiele tienen lugar después de un año de estudio de Geometría?

3) ¿En qué medida están relacionados los niveles de Van Hiele con el rendimiento en Geometría?

4) ¿En qué medida los niveles de Van Hiele predicen el rendimiento en Geometría después de un año de estudio?

5) ¿Qué generalización puede hacerse respecto al nivel de Van Hiele y conocimientos de Geometría de los alumnos que no tuvieron éxito en su estudio de Geometría?

6) ¿En qué medida se está enseñando la Geometría de manera apropiada al nivel de Van Hiele de los alumnos?

7) ¿Hasta qué punto las clases de geometría en diferentes escuelas y marcos socio-económicos difieren en la adecuación del contenido del nivel de Van Hiele del alumno?

(Usiskin, 1982, págs. 1-2)

Participaron unos 2700 alumnos de Enseñanza Secundaria. El proyecto utilizó cuatro tests, tres de los cuales fueron de elaboración propia. Uno (P), de elección múltiple, sobre los prerrequisitos para estudiar la Geometría de Secundaria. Otro (V) también de respuesta múltiple, determinaba el nivel de Van Hiele según el mínimo nivel que se requería para responder correctamente. El tercero (Pr), sobre habilidad en las demostraciones. El cuarto test (A), comercial, de respuesta múltiple, sobre el rendimiento geométrico.

Al principio del curso académico, aplicaron los tests P y V. Se volvieron a aplicar al final del curso junto con los tests A y Pr.

Los componentes del equipo analizaron los resultados y establecieron correlaciones.

El aspecto de esta investigación que ha alcanzado mayor difusión ha sido el test diseñado para la evaluación de los alumnos. Se trata de una prueba para medir el nivel de Van Hiele, consta de 5 ítems de elección múltiple para cada nivel y se realiza en 35 minutos.

Es un instrumento muy sencillo y rápido para aplicarlo en grandes muestras, pero el problema que plantea es su validez y fiabilidad. Crowley (1989) se plantea la duda de si es posible determinar el nivel de Van Hiele con un test de elección múltiple. Otras críticas directas al test de Usiskin las han planteado Crowley (1990) y Wilson (1990) las cuales fueron replicadas por el propio Usiskin (Usiskin y Senk, 1990).

> *"Creemos que tanto nuestro Test de Geometría de Van Hiele, como la propia teoría de Van Hiele, podrían mejorarse, y animamos a realizar esfuerzos en ese sentido. En particular, hay una gran necesidad de un test de Geometría que sea consistente con algún modelo teórico de aprendizaje, con poder, al mismo tiempo, descriptivo y predictivo, que satisfaga las preocupaciones psicométricas tales como las planteadas por Wilson y Crowley, y fácil de administrar. Animamos a los investigadores, cuando diseñen tales instrumentos o critiquen los existentes, a intentar maximizar todas estas condiciones, y a no concentrarse exclusivamente en uno de ellos"*
>
> (Usiskin y Senk, 1990, pág. 245)

Aunque no es un test unánimemente aceptado, sin embargo sigue siendo utilizado por investigadores.

Jaime (1993) estudia un inconveniente importante que presenta la utilización de los ítems de elección múltiple y es que:

> "*no reflejan la razón por la cual un estudiante selecciona una de las opciones que se le presentan. Dado que los ítems deben estar asignados previamente a un nivel de razonamiento, surgen con frecuencia casos de estudiantes que eligen la respuesta*

correcta pero empleando un tipo de razonamiento que no corresponde al nivel establecido para ese ítem. Fuys ponía de relieve este hecho con el siguiente comentario a un ítem de elección múltiple parecido a alguno de los empleados por Usiskin (1982), del test que habíamos elaborado (...). En dicho ítem, asignado al nivel básico, de reconocimiento o visualización, se pedía identificar los rectángulos entre los siguientes cuadriláteros

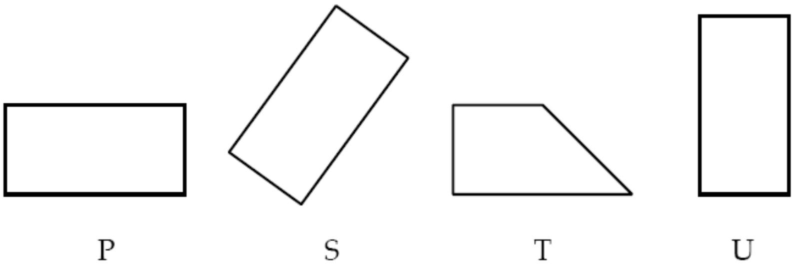


Ilustración 3. Cuadriláteros entre los que se pide identificar rectángulos, tomada de Jaime (1993)

Fuys comentaba que un estudiante podría elegir la respuesta C "los rectángulos son P, S y U" porque:

a) T no tiene forma de rectángulo (nivel 0).

b) T no es porque no tiene todos los ángulos rectos (nivel 1).

c) T es un trapecio y los trapecios no son rectángulos porque no tienen todas las propiedades necesarias de los rectángulos (nivel 2, un razonamiento informal).

Esta ha sido una de las razones por las que se ha puesto en duda la fiabilidad de los test de elección múltiple para evaluar el nivel de Van Hiele de razonamiento."

(Jaime, 1993, pág. 262)

A pesar de esto, tanto el test de Usiskin como el de Mayberry (que se presenta en el siguiente epígrafe) pueden ser utilizados como herramientas de diagnóstico si se utilizan en un formato abierto más que como un simple test de lápiz y papel, pidiendo a los alumnos que expliquen sus repuestas a las preguntas (Teppo, 1991).

La diferencia fundamental, a nivel operativo, entre estas tres investigaciones es que Usiskin utiliza un test escrito de elección múltiple para determinar el nivel de razonamiento de Van Hiele, mientras que Burger y Shaughnessy, por un lado y Fuys, Geddes y Tischler por otro, utilizan las entrevistas clínicas.

2.6.4. Los niveles de Van Hiele del pensamiento geométrico en estudiantes universitarios de Magisterio: la investigación de Joanne Mayberry.

Además de estos proyectos financiados para estudiar el modelo de Van Hiele, en la misma época, Mayberry (1981, 1983) analizó algunas de sus propiedades (jerarquía y localidad) en una investigación con alumnos universitarios de Magisterio. La parte experimental de la investigación se llevó a cabo con 19 alumnos universitarios de primer curso de Magisterio de la Universidad de Georgia en 1980.

Se eligieron siete conceptos geométricos comunes (cuadrados, triángulos rectángulos, triángulos isósceles, circunferencias, rectas paralelas, semejanza y congruencia) y, para cada uno de ellos, formularon cuestiones relativas a los cuatro primeros niveles de Van Hiele. Las cuestiones del nivel 4 eran generales e independientes de los tópicos. Estas preguntas fueron revisadas por 11 profesores de Matemáticas (incluido Van Hiele).

Con el análisis de Guttman se demostró que las tareas representativas de los niveles formaban una jerarquía. Además, con una prueba de consenso, se demostró que los alumnos estaban en diferentes niveles para los distintos conceptos. Estos dos resultados muestran, respectivamente, la jerarquía y la localidad de los niveles de Van Hiele.

Mayberry elaboró 128 cuestiones de las cuales, 14 eran representativas del nivel básico, 25 del nivel 1, 70 del nivel 2, 15 del nivel 3 y 4 del nivel 4, cuyas características se resumen en la siguiente tabla.

NIVEL	CUESTIÓN	CRITERIO DE ÉXITO
Nivel básico	Nombrar la figura	1 de 2
	Elegir ejemplos del concepto a partir de ejemplos y contraejemplos	
Nivel 1	Describir propiedades del concepto.	80%
Nivel 2	Dada una lista de propiedades y una figura, determinar qué propiedad tiene dicha figura.	65%
	Decidir si son verdad determinadas inclusiones de clases propuestas.	
	Determinar si son ciertas algunas relaciones.	
	Realizar implicaciones.	
Nivel 3	Justificar los pasos en una demostración	60%
	Dados los pasos de una demostración, determinar qué ha sido demostrado.	
	Realizar una demostración simple.	
Nivel 4	Dar razones para suponer una contradicción en una prueba indirecta	50%
	Distinguir entre axiomas y teoremas.	
	Deducir hechos a partir de afirmaciones sobre una geometría finita.	

Tabla 4. Cuestionario de Mayberry según el modelo de Van Hiele (Mayberry, 1983)

Cada participante respondió a las cuestiones en dos entrevistas de una hora de duración aproximadamente, que fueron grabadas.

Las respuestas se analizaron con una matriz de nivel por concepto. Para cada alumno se puntuó con un 1 si las respuestas a las preguntas se ajustaban a los criterios del nivel y 0 en caso contrario. Con 19 alumnos, 7 conceptos y 5 niveles, se tenían 665 puntuaciones.

Se realizó el análisis de Guttman, para decidir si los niveles de Van Hiele, medidos con las tareas elaboradas, formaban una jerarquía. Para cada concepto, la puntuación de cada alumno forma una quíntupla ordenada, con los valores 1 y 0 en cada coordenada. De los 32 posibles tipos de quíntuplas, solo podrían aparecer 6 si es cierta la hipótesis de la jerarquía: (1,0,0,0,0,0), (1,1,0,0,0,0), (1,1,1,0,0,0), (1,1,1,1,0,0), (1,1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1,1). Si una respuesta no se encuentra entre éstas se dice que está en error. El número de errores es el número de ceros que preceden al último 1, ya que la jerarquía implica la capacidad de responder correctamente en los niveles inferiores. Por ejemplo, (0, 0, 0, 1, 0) tiene tres errores. La medida de errores de la escala completa, es el coeficiente de reproducibilidad (Rep), siendo el valor 0,90 (o valores superiores) el estándar de escalabilidad.

La fórmula de dicho coeficiente es:

$$Rep = 1 - \frac{número\ total\ de\ errores}{número\ total\ de\ respuestas}$$

Ecuación 1. Coeficiente de reproducibilidad

Es la fracción de puntuaciones que están correctamente situadas en los patrones de respuesta.

Por tanto:

$$Rep = 1 - \frac{número\ total\ de\ errores}{número\ de\ niveles \cdot número\ de\ conceptos \cdot número\ de\ sujetos}$$

$$= 1 - \frac{número\ total\ de\ errores}{número\ de\ niveles \cdot 7 \cdot 19}$$

Ecuación 2. Coeficiente de reproducibilidad en la investigación de Mayberry (1983)

Utilizando 5 niveles, se obtuvo Rep_5 = 0,964, con los 4 primeros niveles, el resultado fue Rep_4 = 0,955, y con los 3 primeros niveles, Rep_3 = 0,96. Estos valores altos implican la aceptación de la jerarquía en los niveles de Van Hiele.

A continuación se detallan estos tres resultados:

En cada caso, el número total de errores, se obtiene a partir de la tabla de la investigación de Mayberry (1983, pág. 63) "Patrones de Respuesta, Errores y Consenso para los Conceptos de Geometría en cada estudiante" que aparece en la siguiente figura, en la cual se indica el número de errores que aparecen en cada patrón de respuesta erróneo.

Table 1

Response Patterns, Errors, and Consensus for Geometry Concepts by Each Student

Student no.	Squares	Right triangles	Isosceles triangles	Circles	Parallel lines	Similarity	Congruence	Consensus (%)
1	11000	10000	11000	11000	01000[a]	10000	10000	71
2	11000	10000	00000	11100	11100	11000	11100	43
3	10000	00000	00000	10000	00000	10000	11000	62
4	11000	11000	11100	11110	10000	10000	11000	52
5	11100	11000	01000[a]	11110	11000	10000	11000	62
6	11100	10000	11010[a]	11110	00000	10010[b]	11010[a]	43
7	10000	00000	00000	11000	00000	00000	10000	62
8	10100[a]	01000[a]	00000	11000	10000	10000	10000	52
9	11000	10000	11100	11100	10000	10000	11000	52
10	11100	01100[a]	11100	11110	10100[a]	10100[a]	11000	81
11	11000	00000	10000	11100	00000	10000	11100	33
12	11110	00000	10000	00000	01000[a]	10000	10100[a]	43
13	11110	11110	10010[b]	11110	11100	10110[a]	11110	91
14	11110	11100	10100[a]	11110	11110	10100[a]	11110	71
15	11110	11110	11100	11110	11100	11100	11100	71
16	11000	00000	00000	10000	00000	10100[a]	10000	43
17	11110	10110[a]	11110	11110	11100	11110	11110	91
18	11010[a]	11000	10000	11100	11100	11010[a]	11000	43
19	11100	10100[a]	11110	11110	01100[a]	11110	11110	71

[a] One error.
[b] Two errors.

Ilustración 4. Patrones de Respuesta, Errores y Consenso para los Conceptos de Geometría en cada estudiante (tomada de Mayberry, 1983)

Para hallar el coeficiente de reproducibilidad teniendo en cuenta tres niveles, Rep_3, se observa que el número de errores es 16. Aparecen marcados en amarillo en dicha tabla. Teniendo en cuenta cuatro niveles, el número de errores es la suma del anterior más los nuevos errores, que se muestran resaltados en azul. Son 6 nuevos patrones de los cuales en 2 hay 2 errores; por tanto 16 más 8 son 24 los errores para calcular Rep_4. Y el mismo número se tiene en cuenta al hallar Rep_5 ya que no aparecen nuevos patrones en error. Por tanto, las fórmulas en cada caso son:

$$Rep_3 = 1 - \frac{16}{3 \cdot 7 \cdot 19} = 0{,}96$$

Ecuación 3. Coeficiente de reproducibilidad en la investigación de Mayberry (1983) con tres niveles

$$Rep_4 = 1 - \frac{24}{4 \cdot 7 \cdot 19} = 0{,}955$$

Ecuación 4. Coeficiente de reproducibilidad en la investigación de Mayberry (1983) con cuatro niveles

$$Rep_5 = 1 - \frac{24}{5 \cdot 7 \cdot 19} = 0{,}964$$

Ecuación 5. Coeficiente de reproducibilidad en la investigación de Mayberry (1983) con cinco niveles

Por otra parte se estudió el consenso, es decir la falta de dispersión, acordando que para que la hipótesis de consenso de nivel entre los conceptos sea aceptada, el consenso debe ser al menos el 90% para el 90% de los estudiantes. Para cada alumno, se calculó el consenso entre los conceptos, obteniendo que solo 2 de los 19 alumnos alcanzaron el valor de 90% (como se observa en la figura anterior), por lo tanto se rechaza la hipótesis. Además, esta medida (el consenso) es independiente del tamaño de la muestra (Leik, 1966, pág. 86). Esto significa la localidad de los niveles de Van Hiele.

A continuación se explica detalladamente el proceso de obtención de dicho resultado, según la exposición de Mayberry (1983):

La fórmula de Leik (1966) mide hasta qué punto un conjunto de “encuestados” coinciden en sus “elecciones”, es decir, hasta qué punto hay consenso. Primero calcula la dispersión D y luego, evidentemente, el consenso o falta de dispersión es C = 1 – D.

$$D = \frac{2 \cdot \sum d_i}{m - 1}$$

Ecuación 6. Fórmula de la dispersión según Leik (1966)

Siendo

$d_i = F_i$ si $F_i \leq 0.50$, $d_i = 1-F_i$ en caso contrario

m = número de categorías

f_i = frecuencia de elecciones en la categoría i-ésima

n = número total de elecciones = $\sum f_i$

$F_i = (1/n) \sum f_j$, i, j = 1, 2, 3,… m; $j \leq i$

Mayberry utilizó la fórmula de Leik para medir el consenso en un grupo de conceptos para cada estudiante en base a los cuatro primeros niveles de Van Hiele, es decir midió hasta qué punto este conjunto de conceptos coincide en los niveles.

Se muestra con un ejemplo el cálculo del consenso en el estudiante número 4:

Student no.	Squares	Right triangles	Isosceles triangles	Circles	Parallel lines	Similarity	Congruence	Consensus (%)
1								
2								
3								
4	11000	11000	11100	11110	10000	10000	11000	52
5								

Ilustración 5. Patrones de Respuesta, Errores y Consenso para los Conceptos de Geometría en un estudiante determinaddo (tomada de Mayberry, 1983)

En este caso, m = 4, n = 7. El alumno 4 en el primer concepto ha alcanzado el nivel 1, en el segundo el nivel 1, en el tercero el nivel 2, en el cuarto el 3, en el quinto el 0, en el sexto el 0 y en el séptimo el 1. Por tanto, los niveles alcanzados, han sido 1, 1, 2, 3, 0, 0, 1.

niveles	**fi**	**Fi = frecuencia relativa acumulada**	**di**
0	2	2/7 = 0.286	0.286
1	3	5/7 = 0.714	1-0.714 = 0.286
2	1	6/7 = 0.857	1-0.857 = 0.143
3	1	1	0
	7		0.715

Tabla 4. Datos para analizar el consenso en el alumno nº 4 de la investigación de Mayberry (1983)

La dispersión para dicho alumno se obtiene aplicando la fórmula:

$$D = \frac{2 \cdot \sum d_i}{m-1} = \frac{2 \cdot 0.715}{3} = 0.477$$

Ecuación 7. Dispersión para el alumno número 4 de la investigación de Mayberry (1983)

Por tanto, el consenso obtenido para dicho alumno es:

$$C = 1 - D = 0.523$$

Ecuación 8. Consenso para el alumno número 4 de la investigación de Mayberry (1983)

Es decir, el consenso es del 52% para el estudiante número 4.

Un último comentario como colofón de este epígrafe y para enlazar con el siguiente, es señalar que Mayberry observó, al analizar el nivel básico, que 2 de los 19 alumnos encuestados tenían dificultades para reconocer un cuadrado con una orientación no estándar. También llegó a la conclusión de que para los alumnos es más difícil dar el nombre de un concepto que elegir un ejemplo del concepto en un conjunto de ejemplos y contraejemplos dados.

2.7. Modelo cognitivo "imagen del concepto-definición del concepto" sobre la formación del concepto geométrico (Vinner y Hershkowitz).

Esta aportación es muy relevante para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos geométricos y por esta razón, se describe en este apartado la investigación de los profesores S. Vinner y R. Hershkowitz, y sus colaboradores, que han permitido diseñar un modelo que explica los procesos cognitivos que se producen en la mente de los alumnos cuando aprenden conceptos matemáticos nuevos, en particular, los conceptos geométricos.

En psicología del aprendizaje, al abordar la formación de conceptos, se tratan dos asuntos. El primero consiste en definir la noción de concepto en sí mismo. Y el segundo es determinar si un concepto ha sido formado en la mente de una persona. Vinner y Hershkowitz (1983) afirman que en el caso de conceptos geométricos simples, no es necesario clarificar la noción de concepto y determinan su adquisición por dos aspectos: la identificación y la construcción.

2.7.1. Imagen del concepto y definición del concepto.

El elemento central del modelo cognitivo propuesto por Vinner y Hershkowitz (1980) es la distinción que se hace entre la imagen del concepto y la definición del mismo. Analizando estos dos componentes se intenta determinar si el alumno tiene formado el concepto geométrico.

- **Imagen del concepto.**

Para cada concepto, se denomina *"dibujo mental del concepto"* en un alumno, *"al conjunto de todos los dibujos que han sido asociados con el concepto en la mente de dicho alumno"* (Vinner y Hershkowitz, 1980, pág. 177). Aunque este concepto se debe originariamente a Vinner (1975), continuó el estudio con sus colaboradores y en esta Tesis se han seguido los estudios avanzados de dichos investigadores.

La palabra "dibujo" se entiende en sentido amplio e incluye cualquier representación visual del concepto, incluidos los símbolos (Vinner, 1983).

Además del dibujo mental del concepto, hay una serie de propiedades que están asociadas al concepto en la mente del alumno. Por ejemplo, un alumno ha podido asociar (incorrectamente) a la altura de un triángulo la propiedad de estar siempre dentro del triángulo, otro alumno ha podido asociar al triángulo (correctamente) la propiedad de que sus ángulos siempre suman 180º.

Se llama *"imagen del concepto"* en un alumno, *"al dibujo mental del concepto junto con las propiedades asociadas al concepto en la mente de dicho alumno"* (Vinner y Hershkowitz, 1980, pág. 177).

Tal y como se ha definido la imagen de un concepto, depende de la persona, pero, por no reiterarlo, no se va a mencionar en adelante y quedará claro por el contexto. En el modelo cognitivo propuesto por estos autores, se van a analizar estas imágenes conceptuales de los alumnos para determinar si tienen formados los conceptos geométricos correspondientes.

- **Definición del concepto.**

La *"definición del concepto"* es *"una definición verbal que explica con precisión el concepto"* (Vinner y Hershkowitz, 1980, pág. 177).

En Geometría los conceptos son definidos verbalmente por medio de conceptos previos o bien son conceptos primarios. Vinner y Hershkowitz afirman que *"para manejar conceptos se necesita una imagen del concepto y no una definición"* y que *"las definiciones del concepto (en el caso de que el concepto haya sido presentado por medio de una definición) permanecerán inactivas o incluso se olvidarán"*; *"en la mente, casi siempre la imagen del concepto se evocará"* (Vinner y Hershkowitz, 1980, pág. 177). De esta manera otorgan mayor relevancia a la imagen del concepto que a la definición del mismo.

Cuando se habla de la formación del concepto, se entiende que se trata de la correcta formación del mismo. Por ejemplo, como se ha citado en el punto anterior, alguien podría pensar (erróneamente) que la altura de un triángulo está siempre dentro del triángulo o (correctamente) que los ángulos de un triángulo suman 180º. En el primer caso no se puede hablar de formación del concepto, pero en el segundo sí.

- **Modelo cognitivo.**

Vinner y Hershkowitz distinguen entre aprendizaje informal y formal de conceptos geométricos (1980).

En el primero, para manejar los conceptos, se necesita una imagen del concepto y no una definición. Las definiciones (en el caso en que el concepto sea introducido por una definición) suelen quedar inactivas o incluso olvidadas. Al leer o escuchar el nombre de un concepto se evoca la imagen del concepto (y no la definición).

En el aprendizaje formal, la situación es diferente. La definición del concepto es “parte del juego”. A los alumnos se les pide dar definiciones. La razón cognitiva para pedir a un alumno que formule una definición, debería ser la suposición de que las definiciones ayudan a formar las imágenes de los conceptos y también que son útiles para realizar algunas tareas cognitivas.

Para explicar los procesos cognitivos que suceden en la mente del alumno, se suponen dos celdas (no biológicas) en la estructura cognitiva, una para la imagen del concepto y otra para la definición del concepto, como aparece en la siguiente figura:

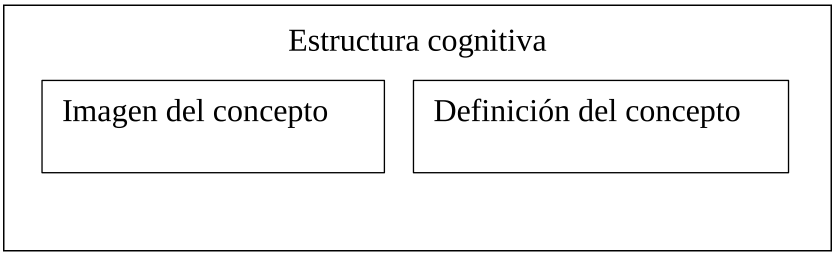


Ilustración 6. Estructura cognitiva según el modelo de Vinner y Hershkowitz (1980)

Vinner y Hershkowitz opinan que el modelo asumido de una manera implícita por muchos profesores para algunas tareas cognitivas es uno de estos dos:

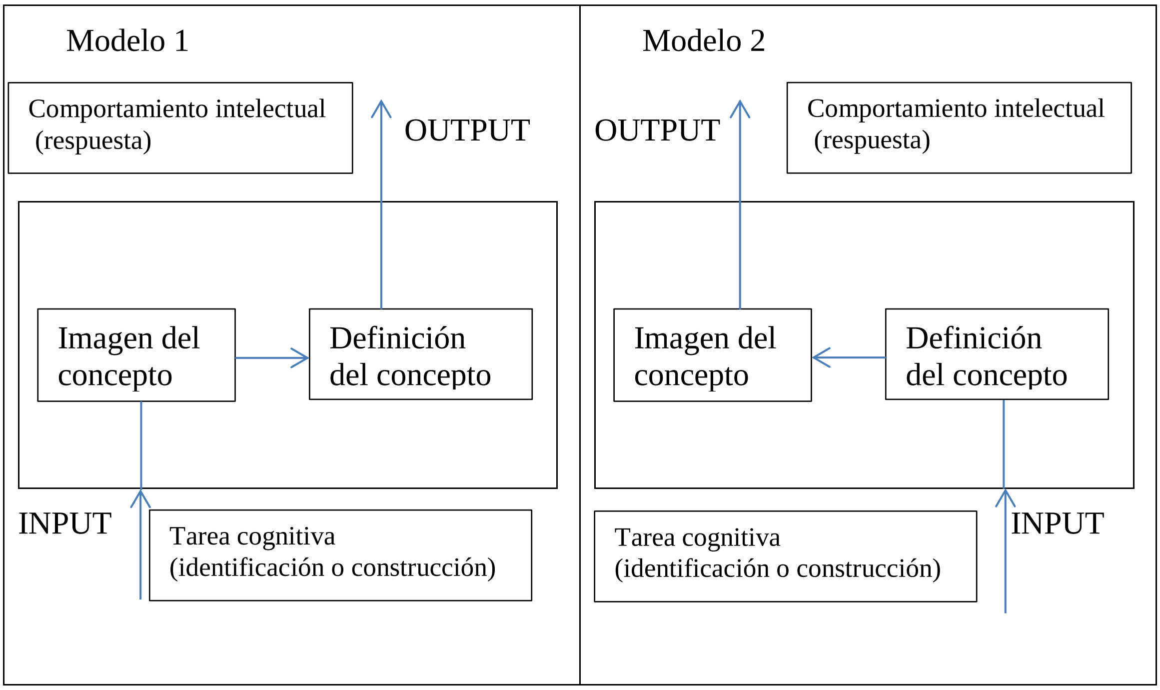


Ilustración 7. Modelos cognitivos implícitamente asumidos por muchos profesores en el aprendizaje de la Geometría, basado en Vinner y Hershkowitz (1980)

Consideran, dichos autores, que estos modelos no reflejan la realidad de los alumnos porque no se puede forzar una estructura cognitiva a usar definiciones, ni para formar imágenes ni para realizar una tarea cognitiva. Esto es así porque algunas definiciones son tan complicadas que no ayudan a crear dibujos mentales, por tanto no son útiles. Por otra parte, aunque otras definiciones son más sencillas para los alumnos, en el momento en que el profesor da ejemplos específicos, forman la imagen del concepto que es la que manejan, olvidando o dejando inactiva la definición.

Vinner y Hershkowitz opinan que el proceso cognitivo en la mente del alumno es más similar a lo siguiente:

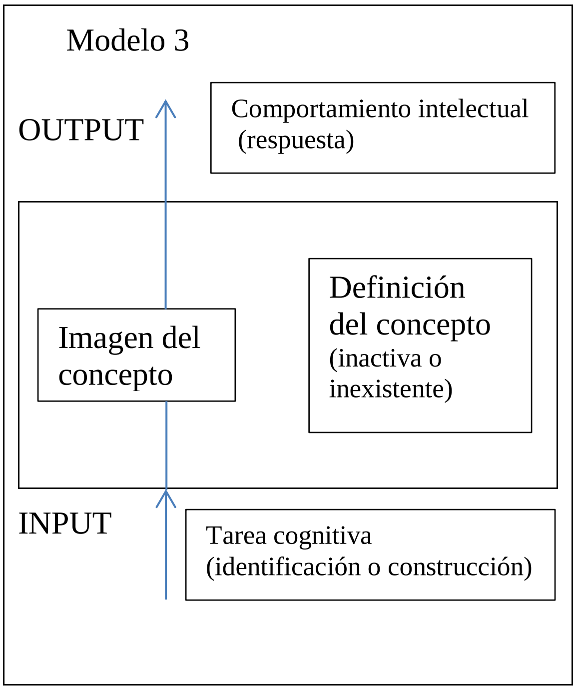


Ilustración 8. Proceso cognitivo en la mente del alumno según Vinner y Hershkowitz (1980)

- **Implicaciones en la enseñanza.**

Estos investigadores exponen una realidad con la que se han encontrado (Vinner y Hershkowitz, 1980). Al preguntar a los alumnos sobre algunos conceptos geométricos simples como ángulo recto, triángulo isósceles, altura en un triángulo, etc., a menudo se descubre que tienen imágenes erróneas de dichos conceptos. Estas imágenes pueden ser el resultado del conjunto específico de ejemplos que se ha dado a los alumnos. Probablemente hay una suposición (implícita) de que los alumnos deben utilizar las definiciones cuando se les pide una tarea cognitiva y por tanto, no es necesario dar muchos ejemplos diferentes, pero, como se afirmaba antes, esta suposición no se sustenta.

Por ejemplo analizaron que en algunos libros de texto los triángulos rectángulos (en total 10) aparecían siempre mostrando en posición horizontal uno de los lados que forman el ángulo recto. No sería una sorpresa que un alumno identificara solo como triángulos rectángulos los que están en esta posición.

En conclusión, dar una definición y algunos ejemplos no es suficiente para formar la imagen del concepto correcta.

Se concluye que conocer las imágenes de los conceptos que tienen los alumnos es muy importante para la enseñanza, ya que da al profesor una mayor comprensión de las causas de las respuestas de sus alumnos y también puede sugerir mejoras para la enseñanza y evitar la formación de imágenes de conceptos erróneas (Vinner y Hershkowitz, 1980).

2.7.2. Aspectos cognitivos de los procesos de aprendizaje de los conceptos geométricos básicos.

El objetivo de la investigación sobre la formación del concepto geométrico es observar el desarrollo de la imagen de dicho concepto. La definición proporciona el marco de referencia que sirve para confrontar dicho desarrollo, es decir, compararlo y examinarlo.

Para entender mejor cómo se construyen las imágenes de los conceptos y conocer cuáles son los factores que influyen en su desarrollo, se necesita, en primer lugar, un análisis de los conceptos y su estructura matemática. Esta línea de investigación de Hershkowitz (1990) es la que se sigue en el presente epígrafe.

El concepto tiene atributos relevantes (o críticos) e irrelevantes. Los primeros son los que deben tener todos los ejemplos del concepto. Los segundos son los que solo tienen algunos ejemplos del concepto.

La definición del concepto está formada por un conjunto mínimo de atributos relevantes suficientes para definirlo. Por tanto, la definición otorga un criterio para clasificar ejemplos y contraejemplos. Los contraejemplos que son relevantes para la formación de los conceptos (tanto para la investigación como para la enseñanza), son los que tienen algunos atributos relevantes.

En la siguiente figura se muestran estas relaciones entre los distintos elementos del concepto.

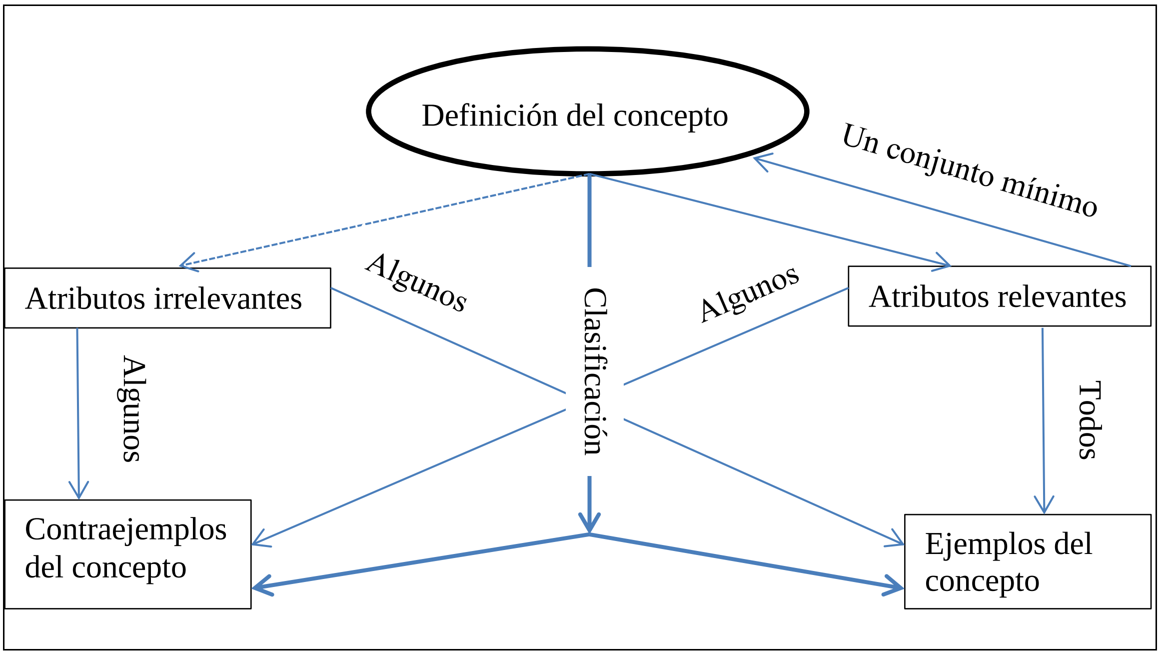


Ilustración 9. Relaciones entre los elementos del concepto según Hershkowitz (1990)

Una vez descrita la estructura matemática de los conceptos, se trata de describir los procesos cognitivos que caracterizan su formación. Está claro que el desarrollo cognitivo de la imagen del concepto no se puede expresar solo en términos de atributos, ejemplos y contraejemplos.

A continuación se presentan algunas de las características de este desarrollo que se han investigado.

- **El fenómeno del prototipo.**

Hershkowitz y sus colaboradores (1987) investigaron las imágenes de conceptos geométricos básicos en alumnos de edades comprendidas entre 10 y 14 años y en profesores. Los conceptos y tareas propuestas eran del nivel de Primaria.

La conclusión fue que cada concepto tiene uno o más ejemplos prototípicos que se aprenden al principio y, por tanto, existen en la mayoría de los sujetos. Incluso en “conceptos inventados” que eran presentados con una definición verbal pero sin ejemplos, tanto los profesores como los alumnos, propusieron en su mayoría los mismos ejemplos prototípicos (Hershkowitz, 1990).

Los prototipos son los ejemplos caracterizados por todos los atributos relevantes del concepto y por atributos no relevantes con fuertes características visuales. Por ejemplo, la posición vertical de un triángulo rectángulo, la altura interior en un triángulo, etc. (Hershkowitz, 1990).

Concluyeron que con los prototipos se producen dos tipos de razonamientos:

1) Tipo 1: El prototipo se usa como marco de referencia y el razonamiento visual se aplica a otros ejemplos.

   Por ejemplo, al construir la altura en un triángulo dado, los alumnos se equivocan y dibujan segmentos internos que no son alturas pues en el prototipo la altura es interior.

2) Tipo 2: El prototipo se usa como marco de referencia, pero el alumno basa su razonamiento en los propios atributos del prototipo y trata de imponerlos a otros ejemplos. Tienden a rechazar como ejemplos las figuras que no verifican dichas propiedades.

   Por ejemplo, si para un alumno el prototipo de cuadrilátero es el cuadrado, puede razonar que ninguna figura, salvo el cuadrado, es un cuadrilátero porque trata de imponer la condición de tener lados iguales y ángulos iguales.

El fenómeno de prototipo y los razonamientos prototípicos se producen en los procesos visuales. Como ya se ha dicho, los atributos irrelevantes tienen fuertes características visuales que actúan como distractores.

Sin embargo también existen procesos analíticos y lógicos que determinan otro tipo de razonamientos.

- **Las características analíticas.**

3) Tipo 3: Razonamiento analítico correcto. Este tipo de razonamiento también es común y se basa en los atributos relevantes del concepto.

   Ejemplo: un alumno puede decir que la figura mostrada no es un cuadrilátero porque no está cerrada y, por tanto, no es un polígono, y todo cuadrilátero es un polígono.

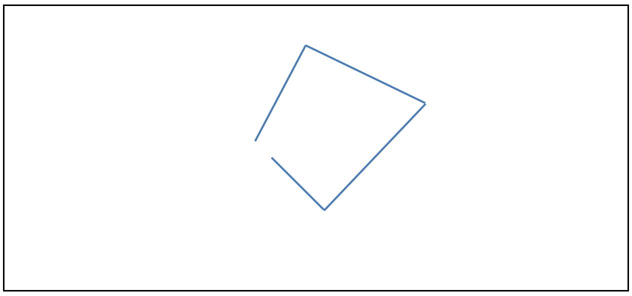


Ilustración 10. Figura propuesta para emitir un juicio (Hershkowitz, 1990)

Otras características de la formación de conceptos básicos son:

- **Orden jerárquico en la adquisición de ejemplos del concepto, común a toda la población y que progresa con la experiencia:**

  En el proceso de formación del concepto geométrico se empieza con ejemplos prototípicos y se continúa con otros, por procesos visuales o analíticos o ambos.

- **Hay tres tipos de patrones de conceptos erróneos:**

  a) Conceptos erróneos duraderos: Afectan tanto a alumnos como a profesores y estudiantes de Magisterio.

     Por ejemplo: la identificación de triángulos rectángulos no prototípicos.

  b) Conceptos erróneos que disminuyen con la adquisición del concepto: Esto es lo que se espera. Un ejemplo de esto es el tipo 2 de juicio prototípico.

  c) Conceptos erróneos que aumentan con la adquisición del concepto: Se desarrollan en el proceso de aprendizaje.

     Por ejemplo: la imagen del concepto "altura" como un segmento interior.

Dada la importancia de esta última característica y su relación con el modelo de Van Hiele, se expone detalladamente en un nuevo epígrafe.

2.7.3. Relación del modelo de Vinner y Hershkowitz con el modelo de Van Hiele: Detalle de la investigación.

En la investigación mencionada en el epígrafe anterior (Hershkowitz, 1987), los investigadores realizaron un amplio estudio de los conocimientos previos de los alumnos que inician la Secundaria en Israel y obtuvieron un rendimiento en Geometría mucho más bajo que en Aritmética lo cual resultaba sorprendente pues en los planes de estudio de Primaria se contemplaba una hora a la semana de Geometría intuitiva. Para entender la razón de este hecho, investigaron la adquisición de conceptos geométricos básicos en dos escuelas bien organizadas y en las que los profesores eran fiables. Participaron todos los alumnos de 5º grado a 8º, es decir, de 10 a 14 años. En total 518 alumnos, 118 de 5º, 145 de 6º, 126 de 7º y 129 de 8º. Además también se investigaron a 142 estudiantes de Magisterio y a 25 profesores en ejercicio.

Como se ha señalado anteriormente, las tareas correspondían al nivel de Primaria y consistían en identificación, dibujo y razonamiento con ejemplos básicos, sus características y algunas relaciones entre ellos.

A continuación se analiza la evolución del concepto erróneo a lo largo de las edades de la muestra, ejemplificándose con las actividades propuestas:

a. Conceptos erróneos que permanecen. Ejemplos prototípicos.

Cada concepto tiene un conjunto de atributos relevantes y un conjunto de ejemplos. Dentro de los ejemplos, hay unos “más populares”, que son los prototipos. Se puede afirmar que todos los ejemplos son matemáticamente iguales, pero son diferentes unos de otros psicológicamente. En la investigación (Hershkowitz, 1987) se observó que los patrones de comportamiento respecto a los ejemplos en tareas de identificación y construcción, son muy similares entre los grupos de alumnos, en los profesores, para chicos y chicas, etc.

Ejemplo: La tarea consistía en identificar todos los triángulos rectángulos en un conjunto de 10 triángulos. En la siguiente figura se muestra el porcentaje de respuestas correctas. Se observa el comportamiento de los alumnos de los grados 5º a 8º, de los estudiantes de Magisterio (PRE) y de los profesores en ejercicio (ST).

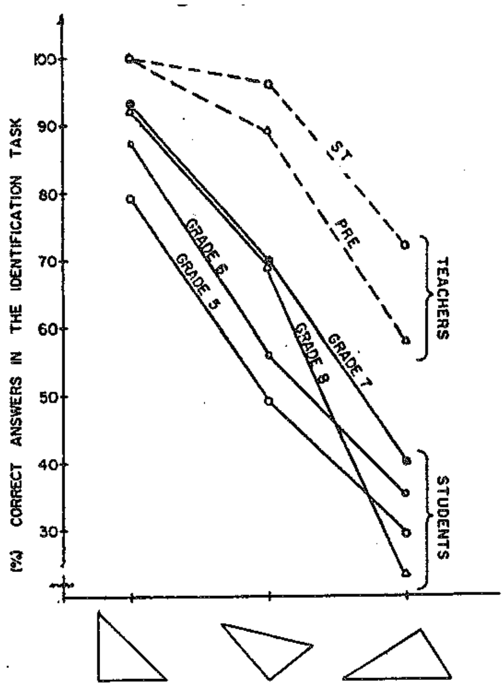


Ilustración 11. Respuestas correctas en la identificación de triángulos rectángulos (Hershkowitz, 1987)

En la investigación (Hershkowitz, 1987) se concluye que el comportamiento de todos, alumnos, estudiantes de Magisterio y profesores, es muy similar, aunque la dificultad va disminuyendo con la edad y la experiencia. Todos tienen dificultad en reconocer los triángulos cuyos lados perpendiculares no están en la posición horizontal y vertical del prototipo.

b. Conceptos erróneos que disminuyen con la adquisición del concepto.

Este es el patrón de comportamiento esperado.

Ejemplo: La tarea consistía en identificar cuadriláteros en un conjunto de figuras y para cada figura que no era un cuadrilátero, explicar el motivo.

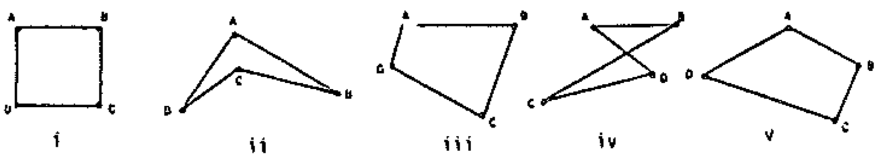


Ilustración 12. Identificación de cuadriláteros (Hershkowitz, 1987)

El concepto examinado es cuadrilátero. Los ejemplos y los atributos relevantes dependen de la definición que se adopte. La definición "un cuadrilátero es una figura de cuatro lados cerrada", incluye la figura iv, mientras que "una figura de cuatro lados cerrada cuyos lados no se cortan", no la incluye.

En el informe de la investigación (Hershkowitz, 1987) destacan varios resultados. Observan que hay una gran mejoría con la edad (del 5º al 7º grado) en la identificación de la figura v (cuadrilátero convexo) y de la figura ii (cuadrilátero cóncavo).

Por otra parte también se produce el fenómeno del prototipo, en dos sentidos. En todos los grados la mayoría de los alumnos identifica el cuadrado como cuadrilátero, pues es un ejemplo prototípico de cuadrilátero. Y también en todos los grados identifican la figura no cerrada iii y la figura iv con los lados que se cortan como contraejemplos de cuadriláteros.

Además se refleja una estructura jerárquica en la adquisición de los conceptos, utilizando la escala de Guttman. Es decir, si un alumno reconoce que una figura es un cuadrilátero (por ejemplo ii), entonces también reconoce los ejemplos más fáciles (v y i). También hay un número decreciente de alumnos que solo reconoce el cuadrado como cuadrilátero y un número creciente de alumnos que reconoce las tres figuras. Esto es también un patrón de conducta esperado.

En la siguiente figura se muestra el porcentaje de alumnos que identificaban cada ejemplo como cuadrilátero.

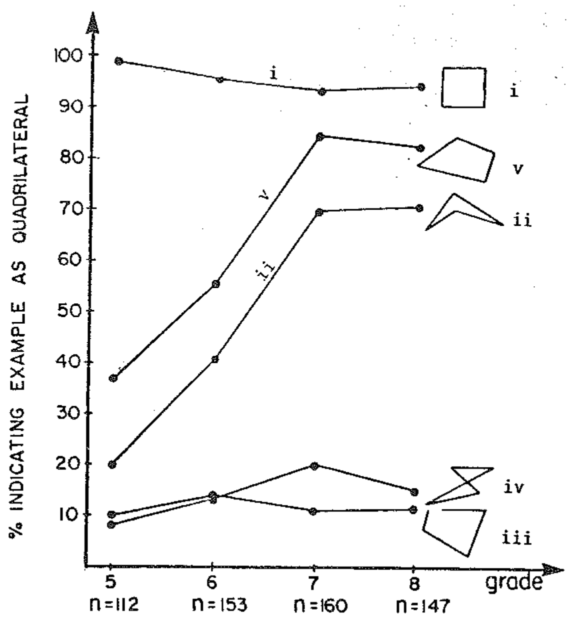


Ilustración 13. Porcentaje de alumnos que identifican cada ejemplo como cuadrilátero (Hershkowitz, 1987)

Analizan también el desarrollo en el razonamiento de los alumnos confrontando sus resultados con los niveles de pensamiento del modelo de Van Hiele. Entre las razones que dan los alumnos para decidir que una figura no es un cuadrilátero, hay varias categorías (Hershkowitz, 1987):

1) Razones basadas en la apariencia de la figura (nivel básico de Van Hiele).

   Por ejemplo, *"la figura ii no parece un cuadrilátero, parecen dos triángulos"*.

   Este tipo de razonamiento puede conducir a respuestas correctas o incorrectas.

2) No aceptan "dos etiquetas" para una figura.

   Por ejemplo: *"la figura i no es un cuadrilátero porque es un cuadrado"*.

   Este tipo de razonamiento generalmente conduce a una respuesta incorrecta.

3) Razones basadas en atributos no relevantes, generalmente atributos de un ejemplo prototípico.

Por ejemplo: *"ninguna de las figuras, excepto el cuadrado, es un cuadrilátero porque pueden tener lados iguales pero no tienen ángulos iguales"*, *"la figura i no es un cuadrilátero porque un cuadrilátero tiene cuatro lados desiguales".*

Estos razonamientos, utilizando atributos del prototipo, conducen a respuestas incorrectas.

4) Razones basadas en atributos relevantes.

Por ejemplo: *"la figura iii no es un cuadrilátero porque no está cerrada y por tanto no es un polígono, y todo cuadrilátero es un polígono"*.

Este tipo de razones generalmente conducen a respuestas correctas.

Hershkowitz (1987) considera que las dos últimas categorías reflejan el nivel de Van Hiele de análisis, porque los alumnos usan atributos (del concepto en 4 o del ejemplo en 3) en su razonamiento, obteniendo respuestas correctas o incorrectas según se basen en atributos relevantes o irrelevantes.

Incluso algunos razonamientos de la categoría 4 pueden reflejar el nivel de Van Hiele de deducción, orden o clasificación porque muestran cierta comprensión de las relaciones de inclusión (por ejemplo: *"...y todo cuadrilátero es un polígono"*).

c. Conceptos erróneos que aumentan con la adquisición del concepto.

Resulta sorprendente, pero ocurre, que un patrón erróneo aumente con la adquisición del concepto. A veces la respuesta de los alumnos en una tarea geométrica, no sigue el patrón esperado.

Ejemplo: Se pedía dibujar en cada triángulo la altura correspondiente al lado indicado. En la figura se muestra el porcentaje de aciertos en cada triángulo.

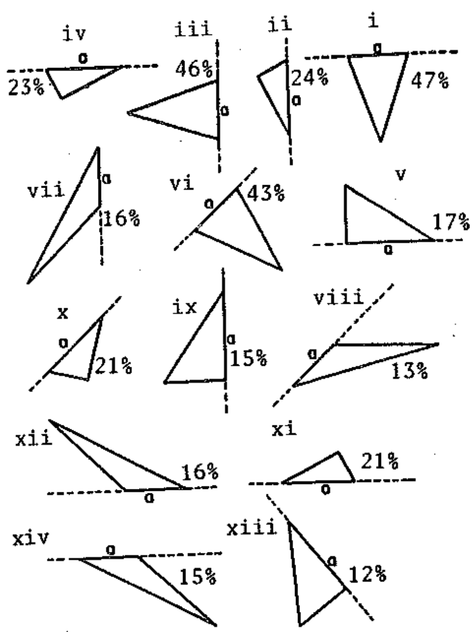


Ilustración 14. Porcentaje de alumnos que dibujan correctamente la altura del triángulo (Hershkowitz, 1987)

En este caso aparecen tipos de triángulos con diferentes orientaciones pero similares en porcentajes de acierto. Por ejemplo, el triángulo isósceles aparece en las figuras i, iii y vi con los porcentajes 47%, 46% y 43% respectivamente.

Analizando el porcentaje de respuestas correctas en cada uno de los tipos de triángulos, se puede concluir que, en este ejercicio, la orientación no es un factor que haya influido.

Por ejemplo, el triángulo obtusángulo aparece n las figuras vii, viii, xii y xiv siendo los porcentajes de acierto 16%, 13%, 16% y 15% respectivamente. El triángulo rectángulo de las figuras v, ix y xiii tiene como porcentajes 17%, 15% y 12%. Finalmente el escaleno[2] de las figuras ii, iv, x y xi tiene en cada caso los porcentajes de aciertos 24%, 23%, 21% y 21%.

Realizaron un análisis de las respuestas incorrectas según los atributos relevantes de la altura, es decir, (1) la perpendicular (2) desde el vértice opuesto (3) a un lado o a

[2] En realidad es un triángulo rectángulo más pequeño que el que aparece en las figuras v, ix y xiii. En la investigación del profesor Ángel Gutiérrez reseñada en el apartado 3.6. de la presente Tesis, aparece corregida la errata. Se explica en detalle en el apartado 3.9.

su extensión. Concluyeron que la mayoría de los alumnos tenían una imagen del concepto “altura” consistente en segmentos interiores al triángulo solamente. En el ejemplo prototípico del triángulo isósceles esto es cierto, pero en otro tipo de triángulos esta imagen del concepto altura, conduce a respuestas incorrectas.

En la siguiente figura se muestran las respuestas en los triángulos obtusángulos y triángulos rectángulos a lo largo de los cuatro grados.

El número de alumnos que no respondió a esta tarea fue muy alto en 5º y 6º, (es más, aumenta), pero luego desciende mucho en el grado 7º y en el 8º. La interpretación de la línea de “no respuesta” reflejaría la enseñanza, es decir, los alumnos empiezan a pensar que saben la respuesta. Pero la cuestión está en saber qué es lo que han aprendido.

El número de alumnos que responde correctamente va aumentando con el grado, como era de esperar, pero incluso en 8º es menor del 30% de los alumnos. Pero también aumenta el principal error de que la altura es un segmento interior del triángulo. El número de otros errores es relativamente constante en todos los grados y también bastante alto.

Antes del aprendizaje formal, la mayoría no responde y los que lo hacen no dan respuestas sistemáticas.

Después del aprendizaje, se detectan dos grupos: los que han formado el concepto correcto y los que han formado el error dominante, mientras que el número de los que producen otros errores, se mantiene constante. Lo que resulta sorprendente es que el grupo de los que han formado el error dominante es mayor que el grupo de los que han formado el concepto correctamente.

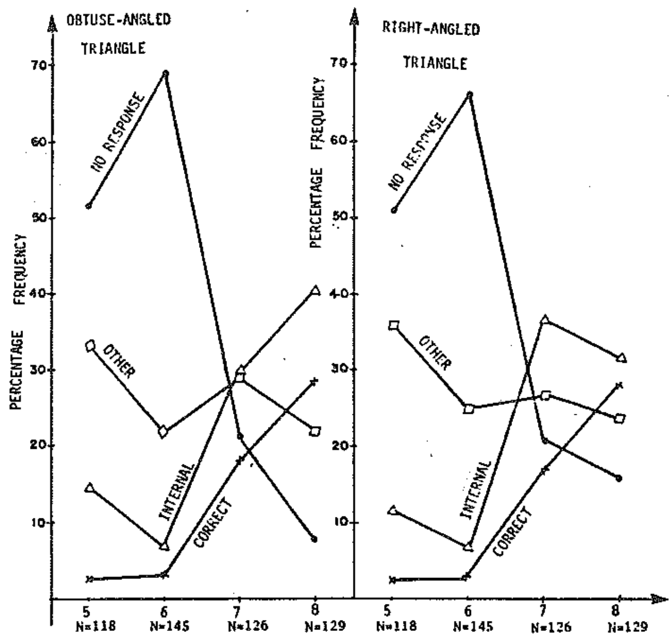


Ilustración 15. Porcentaje del tipo de respuestas en triángulos obtusángulos y rectángulos (Hershkowitz, 1987)

Analizando de manera conjunta estos tres tipos de patrones de conceptos erróneos, obtienen dos resultados de gran relevancia práctica por sus implicaciones didácticas:

1) Hay tres causas para la creación de prototipos:

- El efecto negativo de los lados de la página en la identificación de las figuras. Por ejemplo, en la identificación del triángulo rectángulo.
- Los métodos de enseñanza utilizados por los profesores y libros de texto que tienden a presentar las figuras en posición vertical-horizontal o no muestran alturas exteriores a un triángulo o coincidentes con un lado.
- La propia estructura matemática que llega a identificar un ejemplo de figura que tiene la mayoría de los atributos, por ejemplo el cuadrado como prototipo de los cuadriláteros.

2) El efecto de los ejemplos prototípicos en la formación de los conceptos:

- En el nivel básico de Van Hiele, los alumnos tienden a juzgar los ejemplos y contraejemplos comparándolos con el prototipo.
- En el nivel de análisis, el efecto del prototipo les lleva a equivocarse si razonan basándose en atributos no relevantes; solo los alumnos que se basan en atributos relevantes pueden alcanzar el siguiente nivel de Van Hiele.

2.7.4. Los ejemplos y los contraejemplos.

Un último comentario sobre la formación de conceptos geométricos se basa en la investigación de Tsamir, Tirosh y Levenson (2008). Como se ha expuesto en los epígrafes anteriores, los ejemplos tienen un doble papel en relación con los conceptos geométricos, ya que sirven para la formación del concepto y a la vez son el resultado de su adquisición. La pregunta que se plantean estas investigadoras es si los contraejemplos tienen la misma dualidad, es decir, si son necesarios para la formación del concepto y a la vez, el resultado de su adquisición.

Una de las funciones del concepto es permitir la identificación de ejemplos y contraejemplos de una categoría. Por tanto, los contraejemplos son el resultado de la adquisición del concepto, pero ¿son necesarios en su formación?

La construcción mental de un concepto comienza con imágenes visuales basadas en semejanzas de percepción con ejemplos, es decir, en propiedades características. Este discernimiento inicial puede conducir a una adquisición parcial del concepto. Después, en los ejemplos se analizan los atributos perceptibles y no perceptibles, llegando finalmente a un concepto basado en sus características definitorias. Este proceso ha sido descrito por Vinner y Herskowitz (1980) introduciendo los términos de *"imagen del concepto"* y *"definición del concepto"* y se ha presentado en los epígrafes anteriores.

Los profesores siempre han tratado de utilizar ejemplos y contraejemplos como forma de que la formación del concepto sea más rápida y más completa. En concreto, los contraejemplos sirven para clarificar los límites del concepto, por tanto, se puede decir que los contraejemplos son inherentes en su formación.

La siguiente cuestión que se plantea es si los ejemplos y los contraejemplos son igualmente efectivos en la formación de conceptos.

Como se ha dicho al mencionar los prototipos, un ejemplo prototípico es aquél que es intuitivamente aceptado como representativo del concepto. Los profesores saben que los ejemplos prototípicos son a la vez una ayuda y un obstáculo en la formación de conceptos. Por un lado, al ser fácilmente reconocibles, ayudan en su formación, pero, por otro lado, si se trabaja solo con prototipos, se puede tener una imagen limitada del concepto. De hecho, se ha constatado la tendencia de los alumnos a utilizar solo ejemplos prototípicos y a considerar otros ejemplos no prototípicos como contraejemplos.

Algunos estudios concluyen que la exposición excesiva de prototipos puede impedir la adquisición de conceptos más claros. Por ejemplo, Kellogg (1980) sugiere que los prototipos se forman cuando ciertos atributos no característicos de una figura aparecen frecuentemente en los ejemplos y los alumnos empiezan a asociarlos con ejemplos de la figura. Wilson (1986) aconseja el uso de contraejemplos para disminuir el efecto de los prototipos.

2.7.5. Los caminos cognitivos comunes (Common cognitive path, CCP).

Existen algunos enfoques en las teorías cognitivas que sugieren lo que se podría llamar caminos cognitivos en el aprendizaje. Este concepto ha sido analizado por Vinner y Hershkowitz (1980, 1983).

En este apartado se definen los caminos cognitivos comunes en el aprendizaje de conceptos geométricos, según dichos investigadores y se muestra un ejemplo.

Se consideran algunos aspectos o componentes de un concepto, A_1, A_2, A_3, etc. Por ejemplo, en un rectángulo, A_1 significa "rectángulo en posición horizontal, el lado horizontal es más largo que el vertical", A_2 es "rectángulo en posición vertical, el lado horizontal es más corto que el vertical", A_3 es "rectángulo inclinado" y A_4 es el aspecto de que "un cuadrado es un rectángulo".

Además se establece la condición de que "conocer A_i implica el conocimiento de A_k, para todo $k < i$".

En el ejemplo anterior, si una persona reconoce un rectángulo inclinado, también reconocerá uno en posición vertical, y otro en posición horizontal.

Entonces, si todos o "casi todos" los individuos de una población satisfacen la condición anterior, se dice que $\{A_1, A_2, A_3,\ldots\}$ es un camino cognitivo común para dicha población, CCP.

Como la expresión "casi todos" es un poco vaga, se necesita un parámetro estadístico para definirlo, que es la escala de Guttman.

A continuación se muestra un ejemplo de camino cognitivo común como resultado de una investigación realizada con 189 alumnos de 6º a 8º grado (Vinner y Hershkowitz, 1983). El enunciado es: "Entre la siguientes figuras, indica cuáles son cuadriláteros. Para cada figura que no sea un cuadrilátero, explica el motivo"

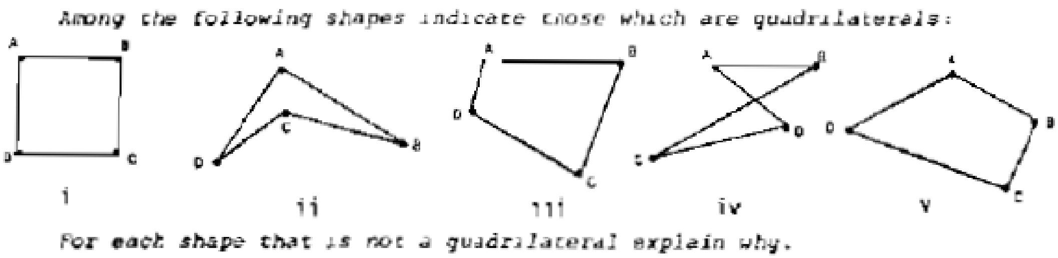


Ilustración 16. Item sobre la identificación de cuadriláteros para determinar un camino cognitivo común (Vinner y Hershkowitz, 1983)

El análisis de Guttman mostró que i → v → ii → iv es un camino cognitivo común seguido por 173 de 185 alumnos (4 no contestaron) con un coeficiente de reproducibilidad de 0.9338, que al ser superior a 0.90 indica que es una escala válida.

Una línea de investigación, que supondría otro proyecto distinto a la presente Tesis, consistiría en determinar la relación de los niveles de Van Hiele y los caminos cognitivos comunes. En este sentido sería interesante estudiar, entre otros, los trabajos de Nakahara (1995), Okazaki y Fujita (2007), Fujita y Jones (2007).

2.8. La teoría de los conceptos figurales de Fischbein.

Esta teoría fue publicada en 1993.

Sostiene que la Geometría trata con entidades mentales que poseen características conceptuales y figurales simultáneamente. Debido a esta doble naturaleza, llama a las figuras geométricas, conceptos figurales (Fischbein, 1993).

Concepto figural = figura geométrica	
Características conceptuales (definición)	Características figurales (imagen visual)

Tabla 5. Conceptos figurales de Fischbein

Una figura geométrica tiene propiedades intrínsecamente conceptuales pero no es un mero concepto. Es una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no tienen, es decir, incluye la representación mental espacial. Por ejemplo, una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno llamado centro, pero cuando lo afirmamos, tenemos una imagen visual de la circunferencia.

El razonamiento geométrico utiliza esas entidades mentales, los llamados conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales y que, al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales.

En el proceso de razonamiento, las imágenes y los conceptos interactúan permanentemente, además, las imágenes obtienen significados más generalizados y los conceptos se enriquecen ampliamente con sus connotaciones y su poder combinatorio.

Fischbein considera tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a las figuras geométricas: la definición, la imagen (basada en la experiencia perceptiva-sensorial) y el concepto figural.

El concepto figural es la realidad mental que maneja el razonamiento matemático en el campo de la Geometría.

La dificultad para aceptar la existencia de este tipo de entidades mentales está determinada por el esfuerzo intelectual para entender que las operaciones matemático-lógicas manipulan solo una versión purificada de la imagen.

Es decir, los conceptos figurales son el límite ideal de un proceso de fusión e integración entre las facetas lógicas y figurales.

Los rasgos figurales y conceptuales de un concepto figural dependen de dos sistemas con sus restricciones específicas, lo cual frecuentemente lleva a conflictos hasta una disolución del concepto figural en sus dos componentes básicos.

Se muestra un ejemplo. En un experimento (N=396) presentaron el siguiente teorema: “ABCD es un cuadrilátero y PQRS los puntos medios de sus lados. Demostrar que PQRS es un paralelogramo”.

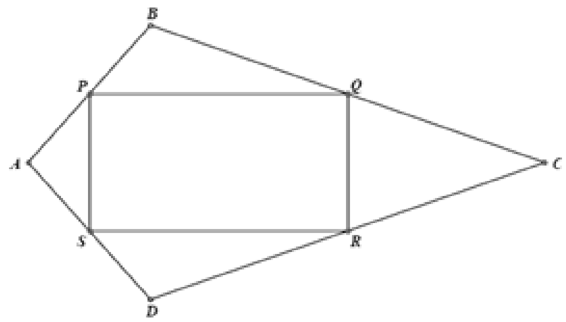


Ilustración 17. Formación de un paralelogramo uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero (Fischbein, 1993)

Se presentó la demostración a los sujetos y se les preguntó si estaban de acuerdo con que ésta era correcta. Para verificar si entendían que la demostración garantiza la validez universal del teorema, se les hicieron más preguntas.

Cerca del 40% de los alumnos estuvieron de acuerdo con la demostración, pero solo un 10% no necesitó más comprobaciones empíricas. Algunos alumnos opinaban que tenían que verificarlo para distintas categorías de cuadriláteros.

> *“Aunque el estudiante conozca la definición del paralelogramo (cuadrilátero con lados opuestos paralelos) puede volverse difícil para él ver las formas variadas correspondientes a esa definición, la misma Gestalt, la misma categoría de figuras. Un paralelogramo oblicuo, un rectángulo, un cuadrado son figuralmente tan diferentes que el efecto unificante del concepto común simplemente se desvanece. El mismo sujeto que acepta lo correcto de la prueba dada para apoyar la validez del teorema, puede afirmar que más verificaciones son necesarias, para cada categoría de cuadriláteros, a fin de alcanzar certeza.”*
>
> (Fischbein, 1993, pág. 151)

Se presentan a continuación algunos aspectos didácticos relacionados con la teoría de los conceptos figurales.

1) Enseñar al alumno a reaccionar ante situaciones conflictivas entre imagen y definición, enfatizando el predominio de la definición sobre la imagen.

La realidad es que existe una tendencia a olvidar la definición bajo la presión de restricciones figurales, lo cual es un obstáculo en el razonamiento.

Se debería insistir, en la enseñanza, en este tipo de situaciones conflictivas.

Por ejemplo, se pide a los estudiantes que tracen la altura desde el vértice B.

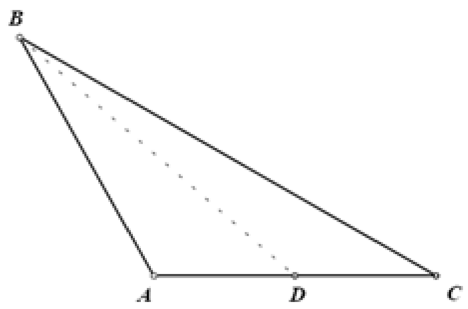


Ilustración 18. "Presunta" altura dibujada por algunos alumnos en un triángulo obtuso (Fischbein, 1993)

Algunos dibujan BD a pesar del hecho de que conocen la definición de altura de un triángulo. Deberían saber la definición y realizar el ejercicio correctamente, de acuerdo con la definición y no de acuerdo a lo que les parece que es impuesto por la imagen. Gráficamente les resulta extraño que la altura esté *"fuera del triángulo"*.

Este es un caso trivial pero muchos de estos ejemplos conflictivos se deberían usar sistemáticamente en clase para *enfatizar el predominio de la definición sobre la figura en el uso e interpretación del concepto figural* (Fischbein, 1993, pág. 155).

Con éste y otros ejemplos, se llega a la conclusión de que *el proceso de construcción de conceptos figurales en la mente del alumno no se puede considerar un efecto espontáneo de los cursos usuales de Geometría* (Fischbein, 1993, pág. 156).

"La integración de propiedades conceptuales y figurales en estructuras mentales unitarias, con el predominio de las limitaciones conceptuales sobre las figurales, no es un proceso natural. Debería constituir una preocupación continua, sistemática y principal para el profesor".

(Fischbein, 1993, pág. 156)

2) Utilizar el concepto de lugar geométrico para profundizar en el entendimiento de los conceptos figurales.

Además de las situaciones conflictivas, un segundo aspecto en relación con la formación de los conceptos figurales lo constituyen los lugares geométricos.

Es en el caso de los lugares geométricos donde la relación profunda e íntima entre los aspectos lógicos y figurales se aplica explícitamente.

Un lugar geométrico es una figura en la que todos los puntos cumplen una propiedad y todos los puntos a los que corresponde la propiedad pertenecen a la figura.

"Por ejemplo, la cualidad de una circunferencia para ser un concepto figural está determinada por una cierta relación métrica o algebraica. Todos los puntos de la circunferencia son equidistantes (radio, r) a un punto C (centro) y todos los puntos equidistantes de C están situados en la circunferencia. Se tiene $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$*. No es posible inventar propiedades de la circunferencia que no puedan ser derivadas de esta definición. Aun cuando la circunferencia es una imagen, su existencia y sus propiedades están impuestas por una definición abstracta y formal. Nada es verdadero figuralmente que no sea verdadero y demostrable conceptualmente y viceversa".*

(Fischbein, 1993, pág. 156)

Dicho brevemente, Fischbein expone que *"el uso sistemático de lugares geométricos con su naturaleza doble explícitamente establecida, representa una importante herramienta didáctica para ahondar en el entendimiento de la naturaleza de los conceptos figurales"* (Fischbein, 1993, pág. 156).

Como final de este epígrafe, se realiza un comentario de la relación entre la teoría de los conceptos figurales de Fischbein y el modelo de Van Hiele. En el nivel básico, de reconocimiento o visualización de Van Hiele, los alumnos no tienen formado el concepto figural, conocen solo imágenes, no informadas por el concepto, con atributos irrelevantes como la orientación en el plano; por eso se encuentran ante una situación conflictiva en la que el concepto pierde fuerza ante la imagen.

En el nivel de análisis, hay una mayor relación entre la imagen y la definición. Se empieza a formar el concepto figural en el nivel de deducción informal, orden o clasificación.

Se observa que el planteamiento de Fischbein coincide con el de Vinner y Hershkowitz, únicamente existe una diferencia de denominación.

2.9. La teoría de las reglas intuitivas.

En 1994 Fischbein escribió un libro titulado "Intuition in Science and Mathematics" en el que habla del conocimiento intuitivo. Dos de sus alumnas, Dina Tirosh y Ruth Stavy (1999), han seguido trabajando en el tema de la intuición desarrollando la teoría que se presenta en este apartado.

Se ha observado que en Matemáticas y en Ciencias, los alumnos reaccionan de manera similar a una amplia variedad de situaciones conceptualmente independientes pero que tienen algunas características comunes.

Su trabajo sugiere que muchas respuestas que ofrecen los alumnos como “concepciones alternativas” podrían interpretarse como una evolución de reglas intuitivas comunes. Es decir, proponen que hay unas reglas intuitivas para explicar y predecir el razonamiento de los alumnos.

Analizan estas respuestas y llegan a definir dos tipos de reglas intuitivas, que tiene gran interés por su carácter predictivo.

Se pueden enunciar estas reglas intuitivas: “Más A–más B” y “Igual A–igual B”, que se analizan a continuación.

Regla 1: Más A – más B

Ejemplo 1: Se les presentó a los alumnos dos vasos de agua caliente, uno conteniendo el doble de agua que el otro. Los alumnos afirmaron que el que tenía más agua estaba más caliente.

Se suele interpretar esta respuesta como una concepción alternativa de la temperatura.

Ejemplo 2: Se les presentó a los alumnos dos ángulos idénticos, uno con los lados más largos que el otro. Observaron que muchos niños entre 10 y 15 años argumentaban que *“el ángulo con los lados más largos, es mayor”*.

Esta respuesta se interpreta como una concepción alternativa de ángulo.

Dentro del contexto de las reglas intuitivas, se interpretan estas respuestas como una evolución de una fuente común que es la regla intuitiva “más A – más B”. Esta regla aparece en respuestas de los alumnos a tareas de comparación.

Explicación de la regla: Se les pide a los alumnos comparar dos objetos (o dos sistemas) que difieren en una magnitud A cuya diferencia es conocida, por ejemplo A1

$> A2$. Se comparan con respecto a la otra magnitud B que puede ser $B1 = B2$ o $B1 < B2$. Un número considerable de alumnos responde inadecuadamente con la regla "más A – más B", argumentando que $B1 > B2$.

Esta regla se activa por diferencias de percepción con respecto a A. Pero recientemente han observado que cuando $A1 = A2$ y $B1 \neq B2$, los alumnos a menudo afirman que $B1 = B2$. Las autoras afirman que estas respuestas se deben a otra regla intuitiva que es "igual A – igual B".

Regla 2: Igual A - Igual B

Se presenta un ejemplo que anteriormente se entendió como concepción alternativa en Matemáticas. Las autoras interpretan la respuesta como ejemplo del uso de la regla "igual A – igual B".

Ejemplo 1: Piaget, Inhelder y Szeminska propusieron a niños de 4 y 5 años comparar la longitud de una línea recta con la de otra línea ondulada. Las líneas tenían diferentes longitudes pero empezaban y terminaban en puntos que estaban a la misma distancia. El 84% de los niños contestaron incorrectamente que las líneas tenían igual longitud. Estos tres autores interpretaron esta respuesta en relación al desarrollo en los niños del concepto de longitud. Argumentaban que, en esta edad, la longitud de una línea es estimada solamente en términos de sus extremos sin referencia a su carácter rectilíneo.

Sin embargo se puede considerar esta respuesta como un caso en el que se activa la regla "igual A (distancia entre los puntos extremos) – igual B (longitud de las líneas)".

Las autoras muestran un experimento "preparado" para que apliquen la regla "igual A – igual B" y transcriben los razonamientos.

Ejemplo 2: Se consideran dos cubos (hexaedros) de diferentes tamaños. El cubo 1 más pequeño que el cubo 2. Se pregunta si la razón entre la superficie y el volumen del cubo 1 es mayor que / igual / menor que la razón entre la superficie y el volumen del cubo 2.

En este ejercicio, la razón del área y el volumen del cubo 1, es mayor que la razón en el cubo 2. La intuición es que a los estudiantes les influiría la identidad de las formas y afirmarían que "misma forma (cubo) – misma razón (área/volumen)". Esta tarea se incluyó en un estudio de 1996 en el que los estudiantes de los cursos correspondientes a 4º de ESO, 1º y 2º de Bachillerato. Como era de esperar, unos porcentajes considerables (41%, 45% y 55% respectivamente) argumentaron que la razón era la misma en los dos cubos.

Las explicaciones típicas eran:

"El cubo 1 y el cubo 2 tienen la misma forma geométrica, por tanto, la razón del área de la superficie y el volumen en ambos cubos es el mismo a pesar de su tamaño"

"El área y el volumen en el cubo 1 son proporcionalmente menores que en el cubo 2 y, por tanto, la razón es constante".

En su justificación, los estudiantes se referían explícitamente a la propiedad compartida de la forma. En la segunda afirmación, se integran esquemas formales tales como la proporción en un intento de apoyar el juicio.

Este ejemplo, y otros referidos a las ciencias que también han estudiado muestran el poder predictivo de la regla intuitiva "igual A – igual B".

Esta regla se activa en tareas de comparación por la presentación explícita de la igualdad en A, y también cuando no se da directamente pero se deduce lógicamente.

La conclusión de este estudio es la importancia que tiene la teoría de las reglas intuitivas en la enseñanza por su poder predictivo. Sugieren comenzar la enseñanza de un cierto tema con situaciones en las cuales se puede aplicar la regla “igual A – igual B”, después seguir con casos en los que no es aplicable y discutir las diferencias entre los dos tipos de situaciones insistiendo en la no aplicabilidad de la regla intuitiva en el segundo caso. Esto ayudaría a los alumnos a crear entornos de aplicación de las reglas intuitivas.

La aplicación en la presente Tesis consiste en determinar los casos en los que los alumnos se dejan llevar erróneamente por las reglas intuitivas.

2.10. El modelo cognitivo de Duval.

Un complemento de los modelos anteriormente descritos, lo constituye el modelo de Duval (Duval, 1995, 1998; Jones, 1998; Torregosa y Quesada, 2007), que estudia la Geometría desde un punto de vista cognitivo.

No se pretende en este epígrafe realizar un estudio exhaustivo sino exponer básicamente el punto de vista cognitivo de dicho modelo como elemento del Marco Teórico de la presente Tesis.

Duval (1998) propone que el razonamiento geométrico involucra tres tipos de procesos cognitivos:

- Procesos de visualización. Por ejemplo, se refiere a la representación visual de una proposición geométrica o la exploración heurística de una situación geométrica compleja.
- Procesos de construcción. Utilizando determinadas herramientas se crea un modelo que representa a los objetos matemáticos que se estudian. La acción

sobre dicho modelo produce resultados que están relacionados con dichos objetos.

- Procesos de razonamiento. Son procesos discursivos utilizados para la extensión del conocimiento, para la explicación o la demostración.

Duval considera que estos procesos se pueden realizar de forma separada. Por ejemplo, la visualización no depende necesariamente de la construcción (es decir, se puede acceder a las figuras independientemente de la manera en que hayan sido construidas). Es más, aunque la construcción conduzca a la visualización, los procesos de construcción dependen solamente de las conexiones entre las propiedades matemáticas y de las limitaciones de los instrumentos que se han utilizado. De manera similar, incluso si la visualización puede ser una ayuda para el razonamiento, a través, por ejemplo, de ayudar a encontrar una demostración, en muchos casos la visualización puede ser engañosa.

Sin embargo, Duval afirma que *"estos tres tipos de procesos están estrechamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en Geometría"* (Duval, 1998, pág. 38).

Esquematiza las conexiones entre estos tres tipos de procesos de la siguiente manera:

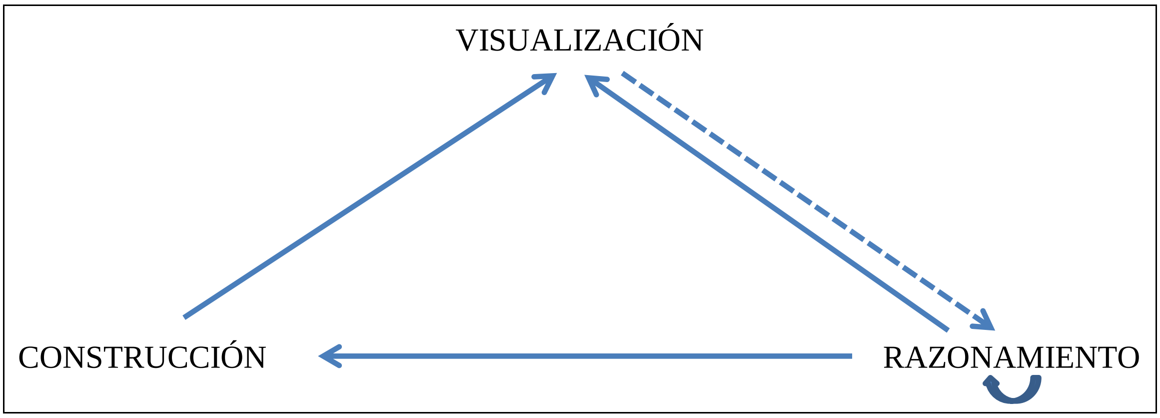


Ilustración 19. Interacciones cognitivas implicadas en la actividad geométrica (basada en Duval, 1998)

- La construcción ayuda a la visualización.
- El razonamiento apoya a la construcción y a la visualización.
- La visualización no siempre ayuda al razonamiento.
- El razonamiento puede realizarse independientemente de la construcción y la visualización.

La investigación de Duval se ha desarrollado con las siguientes premisas:

1. Los tres tipos de procesos deben desarrollarse de forma separada.
2. Es necesario en el currículum trabajar entre diferentes procesos de visualización y entre diferentes procesos de razonamiento, ya que existen varias formas de ver una figura y, de la misma manera, hay varias formas de razonar.
3. La coordinación de estos tres tipos de procesos solo puede darse realmente después de este trabajo de diferenciación.

En cuanto a la visualización, se plantea la pregunta metodológica de si es suficiente observar las imágenes para ver lo que ellas representan (1995). Como respuesta, analiza cuatro tipos de aprehensiones cognitivas que se realizan de una figura (Duval, 1995, Torregosa y Quesada, 2007).

- La aprehensión perceptiva es la identificación simple de una configuración, es decir, es lo que se reconoce a primera vista.

  Por ejemplo, la siguiente figura puede ser vista como el tablero de una mesa, un techo, o un rectángulo.

Ilustración 20. Rectángulo propuesto para ejemplificar la aprehensión perceptual

- La aprehensión secuencial es la acción cognitiva por la que se identifican las unidades figurativas. Se produce tanto en la construcción de la figura como al describir su construcción.

- La aprehensión discursiva es la acción cognitiva por la que la configuración identificada, se asocia con afirmaciones matemáticas. Este proceso puede darse de dos maneras, según se realice la transferencia, también llamada cambio de anclaje:

a) Del anclaje visual al discursivo.

Por ejemplo, el alumno que ve la siguiente figura, realiza la afirmación, "ABC es un triángulo rectángulo".

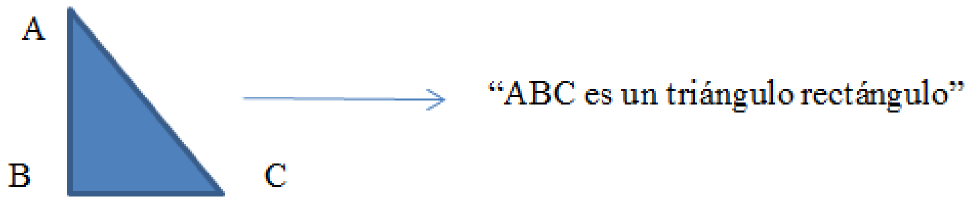


Ilustración 21. Cambio del anclaje visual al discursivo en la aprehensión discursiva del modelo de Duval (Basado en Torregosa y Quesada, 2007)

Para realizar la afirmación, el alumno ha identificado en el dibujo lo que caracteriza a un triángulo rectángulo.

b) Del anclaje discursivo al visual.

El alumno que lee la afirmación, es capaz de realizar un dibujo que cumple las características. Dicha representación no será la misma para todos los alumnos.

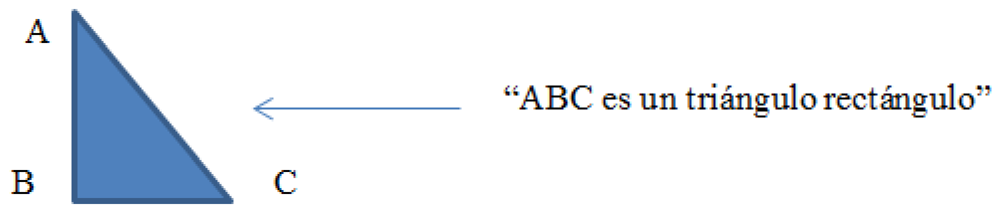


Ilustración 22. Cambio del anclaje discursivo al visual en la aprehensión discursiva del modelo de Duval (Basado en Torregosa y Quesada, 2007)

- La aprehensión operativa. El alumno realiza alguna operación en la configuración inicial, para resolver un problema geométrico.

Duval considera que la aprehensión operativa no funciona independientemente de las otras; es más, la aprensión perceptiva y la discursiva pueden oscurecer la aprehensión operativa. Considera que se necesita una enseñanza separada de cada tipo de aprehensión.

Siguiendo la recomendación de Duval, en la presente Tesis se ha comenzado trabajando la visualización de manera separada de los otros procesos, en concreto se ha estudiado la aprehensión discursiva, y se han considerado los procesos de construcción como apoyo a la visualización.

2.11. Relación del Marco Teórico que aborda el aprendizaje de la Geometría con las teorías del aprendizaje de referencia.

En este epígrafe se exponen las principales teorías del aprendizaje, para contextualizar los modelos que explican la comprensión en Geometría o la formación de los conceptos geométricos.

2.11.1. Teorías del aprendizaje.

Las teorías del aprendizaje son modelos que explican cómo se produce. Los modelos teóricos anteriores al siglo XX son de dos tipos (Santiuste, 2002):

a) Teorías mentalistas. Consideran que el hombre es un animal racional y el aprendizaje es un proceso de adiestramiento de la mente, entonces la mente del alumno actuará de una manera errónea o inadecuada hasta que sea instruida. El aprendizaje es, por tanto, el desarrollo de la mente.

b) Teorías de desarrollo natural. Sostienen que el hombre es bueno por naturaleza y tiende a su perfección, por tanto, si no tiene influjos nocivos, llegará de manera natural, a la instrucción, a la cultura y a la virtud.

En el siglo XX se da un nuevo enfoque al estudio del aprendizaje. Cronológicamente, tiene lugar primero con el conductismo o behaviorismo, seguido por el gestaltismo o teoría de la forma y después el cognitivismo.

1) Conductismo.

Entiende que el aprendizaje se produce por condicionamiento a través del modelo estímulo-respuesta. El conductismo ha sido desplazado en parte por los modelos cognitivos, pero ha constituido una propuesta de teoría psicológica sobre el aprendizaje basada en la experimentación. Un ejemplo de conductismo vigente es la instrucción conductual que se aplica en Educación Especial (Trianes y Gallardo, 2011).

2) Gestaltismo.

La Gestalt o Psicología de la Forma pretende subsanar deficiencias de las teorías conductistas (Santiuste, 2002).

Es una teoría para la cual tanto el campo perceptivo como el de la memoria, la inteligencia y la afectividad, se organizan en forma de conjuntos. La percepción de una totalidad no es la suma de los estímulos, sino que existe independientemente de la suma de dichos estímulos, es decir, no hay sensaciones aisladas, sino percepción de formas, de conjuntos estructurales. Es lo que los psicólogos de la Gestalt definen como “insight” que se puede traducir por comprensión. Es el aprendizaje con adquisición de comprensión. La diferencia entre el proceso del conductismo (estímulo-respuesta, ensayo y error, éxito y consolidación de la asociación) y la comprensión, es la rapidez con que la inteligencia interviene para superar una dificultad y encontrar la solución del problema.

El alumno, ante un problema que tiene que resolver, primero se hace cargo de la situación (“insight”) y luego llega a la solución. En alumno, de repente “ve” la solución del problema.

La noción fundamental de la teoría de la Gestalt es que no se puede comprender algo por el estudio de sus partes constitutivas sino por la captación de su totalidad.

El aprendizaje por comprensión, tiene las siguientes ventajas sobre el conductista:

a. Sustituye el binomio ensayo-error por una visión de la situación: el alumno debe comprender el problema y ordenar los elementos otorgándoles significado.
b. Lo que el alumno ha adquirido por comprensión es más permanente que si lo hubiera adquirido de memoria y sin comprensión.
c. La transferencia de la solución de unos problemas a otros es más fácil.

3) Cognitivismo.

También el cognitivismo subsana deficiencias del conductismo. Existen dos tipos de teorías cognitivas que se suceden cronológicamente. Las primeras entienden el aprendizaje como adquisición de conocimiento y las segundas, como construcción del conocimiento (Trianes y Gallardo, 2011).

a) Aprendizaje como adquisición de conocimiento.

En los años cincuenta y sesenta el aprendizaje es memorístico, es decir, se entiende como adquisición y almacenamiento de información o conocimientos.

El alumno tiene un papel de cierta pasividad, introduciendo en su memoria datos que luego se recuperan. No describe qué sucede en la mente desde que se recibe la instrucción hasta que se demuestra haber aprendido. Tampoco se considera la necesidad de una postura activa en el alumno de búsqueda de significados y de comprensión.

El hecho de entender el aprendizaje como procesamiento de información equiparando la situación a la de un ordenador, ha tenido logros pues ha proporcionado los fundamentos para una tecnología de la intervención cognitiva.

Modelo del procesamiento de la información de Gagné.

La teoría de Gagné (1965), se basa en un modelo de procesamiento de la información y en ella confluyen el conductismo y el cognitivismo. El proceso de aprendizaje describe el procesamiento de la información.

La información entra a través de los receptores y pasa al registro sensorial. De aquí, va a la memoria de corto plazo, donde se realiza una codificación conceptual. Luego, es transferida a la memoria de largo plazo, bien por una motivación externa, por relación con una información preexistente o por repetición interna. También puede ocurrir que no se produzca una codificación adecuada y desaparezca. Solo puede recuperarse la información que ha sido registrada. Si se produce un estímulo externo que haga necesaria la recuperación de la información, ésta pasará al generador de respuestas, que transformará la información en acción (Beltrán, Moraleda, Alcañiz, Calleja, y Santiuste, 1990).

Las aportaciones del modelo de Gagné son, por una parte, que considera el refuerzo como una motivación interna e informativa, mientras que para el conductismo, es externo y sancionador y, por otra, sienta las bases para el diseño de software educativo, ya que proporciona pautas secuenciales muy concretas.

b) Aprendizaje como construcción de conocimiento.

El aprendizaje escolar, a partir de los años setenta, se entiende como construcción de conocimiento.

Se analizan los procesos cognitivos del aprendizaje. La reestructuración que ocurre en la mente del alumno al asimilar conocimientos nuevos, es un cambio cualitativo en el que se organizan y se conciben de manera distinta e incluso de modifican los conocimientos anteriores.

Las teorías cognitivas actuales han desarrollado diversos modelos constructivos de aprendizaje.

Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel.

Ausubel (1978) diferencia los tipos de aprendizaje que se dan en el contexto escolar:

a. Aprendizaje receptivo y aprendizaje por descubrimiento: en cuanto al método de instrucción empleado (enseñanza).

b. Aprendizaje significativo y aprendizaje memorístico: en cuanto a la forma en la que se adquiere la información (aprendizaje).

   El aprendizaje significativo se produce cuando el nuevo contenido se relaciona sustancialmente con la estructura cognitiva del alumno modificándola. Es una teoría que vincula directamente los procesos de aprendizaje y la instrucción.

Tanto el aprendizaje receptivo como por descubrimiento, pueden ser significativos o memorísticos.

Ausubel afirma que la mayor parte del aprendizaje escolar es receptivo (memorístico o significativo). No niega la importancia del aprendizaje por descubrimiento ni lo motivador que puede resultar éste, pero considera que el dominio de la asignatura solo podrá adquirirse a través de la recepción. También considera que no puede esperarse que el alumno descubra, basándose en sus intereses, todos los contenidos del currículum (Trianes y Gallardo, 2011).

Novak lo esquematiza de la siguiente manera (1977):

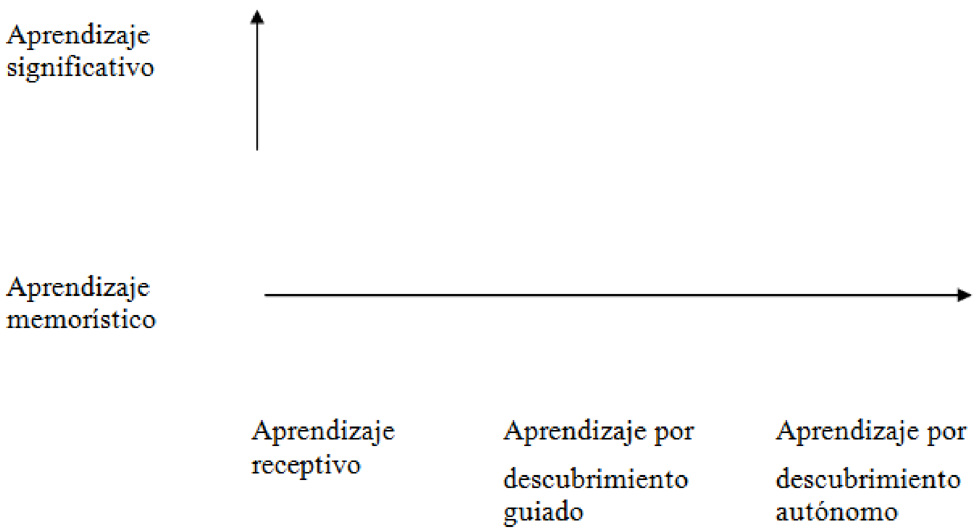


Ilustración 23. Aprendizaje receptivo y aprendizaje por descubrimiento como un continuo diferente del aprendizaje memorístico y del aprendizaje significativo (Novak, 1977) tomado de Trianes y Gallardo (2011)

Teoría del aprendizaje por descubrimiento (Bruner)

En este tipo de aprendizaje, el profesor no es la fuente principal de los conocimientos, incluso ante la equivocación del alumno, le conducirá a descubrir su error mediante preguntas que lo evidencien. Surge como reacción al aprendizaje memorístico (Beltrán y otros, 1990).

El aprendizaje por descubrimiento tiene dos características fundamentales:

1. El empleo de la inducción para enunciar un principio general. Es decir, se ponen ejemplos para que el alumno pueda inducir el principio general.
2. El aprendizaje por ensayo-error: el alumno ensaya soluciones a los problemas que se le plantean.

Este modelo presenta como ventajas un aprendizaje motivador, que favorece la maduración del alumno, hace valorar más la tarea y lo aprendido se puede transferir a otras situaciones, y como inconvenientes: exige mucho tiempo, en algunos estudiantes no existe la motivación inicial y los alumnos poco reflexivos pueden dar soluciones equivocadas (Beltrán y otros, 1990).

Constructivismo de Piaget

Para Piaget, el nivel de madurez, precede al aprendizaje. Por tanto, es necesario conocer la maduración del alumno, para proponerle los distintos aprendizajes.

Para este autor, el conocimiento surge de la interacción entre la persona y la realidad; es un proceso de construcción que se produce en dos momentos:

- La asimilación: se incluye lo externo en lo ya existente en uno mismo.
- La acomodación: se modifica lo existente en uno mismo para poder asumir lo externo.

Es decir, la persona a lo largo de su desarrollo, va construyendo, en esa interacción con la realidad determinadas estructuras organizadas en esquemas. Asimilar es incluir algo en los esquemas ya existentes. La acomodación se da cuando la aplicación del esquema a los datos produce inconsistencia, lo que lleva a modificar el esquema (Beltrán y Bueno, 1995).

2.11.2. Aplicación de las teorías de aprendizaje a la enseñanza de la Geometría.

El modelo de enseñanza de la Geometría en 1º de ESO que se propone en esta Tesis, se basa:

1. En la teoría de la Gestalt o Psicología de la Forma, que se refiere al aprendizaje con adquisición de comprensión. Relacionada con esta teoría se encuentra el modelo de Van Hiele, el modelo de Vinner y Hershkowitz, la teoría de los conceptos figurales de Fischbein y la teoría de las reglas intuitivas de Tirosh y Stavy.

2. La teoría del procesamiento de la información de Gagné. Por la utilización del software informático, en este caso del programa Cabri, en el diseño de las actividades.

3. El aprendizaje por descubrimiento de Bruner. Con la herramienta informática el alumno puede ensayar soluciones a los problemas que se le plantean, los descubre, no tiene que aprender nada de memoria.

4. El aprendizaje significativo de Ausubel. El profesor guía al alumno en una instrucción expositiva a través de las fases del aprendizaje del modelo de Van Hiele. El alumno va construyendo su conocimiento a través de las actividades mediante la práctica, la aplicación y la ejemplificación.

5. El constructivismo de Piaget: El alumno va construyendo a través de las actividades determinadas estructuras organizadas en esquemas. Cuando asimila algo lo incluye en los esquemas existentes. La acomodación se da cuando la aplicación del esquema a los datos produce inconsistencia, lo que lleva a modificar el esquema, sería pasar a un nuevo nivel.

Aunque Van Hiele tuvo una influencia inicial de Piaget, se separó después de sus teorías. Discrepan fundamentalmente en que Piaget se refiere al desarrollo de la persona, a la maduración biológica, para lograr el aprendizaje; mientras que Van Hiele propone las fases de aprendizaje para guiar al alumno en la adquisición de dicho aprendizaje. Otra diferencia es la importancia que Van Hiele otorga al lenguaje como indicador del aprendizaje.

2.12. El software de Geometría Dinámica.

En la presente Tesis, el programa de Geometría Dinámica Cabri ha sido un elemento fundamental en el diseño de las unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele.

En este epígrafe se presentan algunas de las herramientas informáticas más utilizadas en el aprendizaje de las Matemáticas y se analizan los programas de Geometría Dinámica.

2.12.1. Las TIC en el aprendizaje de las Matemáticas en general y la Geometría en particular.

Es un hecho que las Tecnologías de la Información y Comunicación se han incorporado a los procesos de enseñanza y aprendizaje en todas las asignaturas y en particular en Matemáticas. Actualmente, dependiendo de las Comunidades Autónomas y de los centros escolares, se pueden encontrar en las aulas TabletPc, pizarras digitales interactivas PDI, ordenadores fijos o portátiles, etc. con los que se pueden utilizar los recursos de Matemáticas, o bien, nada de esto.

En la legislación vigente en la Comunidad de Madrid (lugar donde se desarrolla esta Tesis), Real Decreto 23/2007, de 10 de mayo, artículo 5 (BOCM nº 126, martes 29 de mayo de 2007), se hace referencia a la contribución de cada una de las asignaturas para la adquisición de las competencias básicas que se recogen en el Anexo I del Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre (BOE nº 5, viernes 5 de enero de 2007), por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Se establece que la concreción del currículum en cada centro escolar se orientará a facilitar la adquisición de dichas competencias. Es decir, es preceptivo que se determine en cada asignatura la forma de lograr dichas competencias.

La cuarta competencia es la digital, que "*incluye utilizar las tecnologías de la información y la comunicación extrayendo su máximo rendimiento a partir de la comprensión de la naturaleza y modo de operar los sistemas tecnológicos, y del efecto que esos cambios tienen en el mundo personal* (…) *además de utilizarlas como herramientas para organizar la información, procesarla y orientarla para conseguir objetivos y fines de aprendizaje* (…)" (BOE nº 5, viernes 5 de enero de 2007).

En el desarrollo de la presente Tesis se ha podido disponer del aula de Tecnología con un ordenador para cada dos alumnos del grupo experimental y un ordenador con video proyector y pantalla blanca para el profesor. Los alumnos del grupo de contraste, estudiaron la Geometría en un aula tradicional.

2.12.1.1. Clasificación de los recursos TIC.

Hoy día se dispone de programas, páginas web de recursos y herramientas para la creación de aplicaciones, proporcionadas por las editoriales, las administraciones educativas o los propios profesores.

Según Godino, Batanero y Font (2003) los **recursos didácticos** se pueden clasificar en:

- **Ayudas al estudio**. Son recursos que realizan la función del profesor (organizan los contenidos, presentan problemas, ejercicios y pruebas de autoevaluación).

Son, por ejemplo, los manuales escolares, los libros de ejercicios, las pruebas de autoevaluación y los programas tutoriales de ordenador.

- **Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático**. Se trata de objetos físicos, materiales gráficos, etc., que pueden funcionar como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

Según esta clasificación, los recursos TIC centrados en el ordenador, se pueden dividir en dos grupos (Santandreu, 2004):

a) **Programas de aplicación instructiva**, cuyo contenido es el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se dividen en cuatro categorías:

- Tutoriales y programas de ejercitación que permiten tareas de reconocimiento, memorización y resolución de problemas.
- Tutoriales heurísticos, simulaciones, juegos heurísticos y entornos de programación.
- Programas no diseñados inicialmente para la enseñanza, pero que en la práctica se están utilizando para esta finalidad: procesadores de texto, hojas de cálculo, generadores de gráficos, paquetes estadísticos y bases de datos.
- Programas multimedia.

b) **Programas o herramientas para la información y la comunicación**. Aunque no tienen un contenido específico, permiten la conexión entre ordenadores y ofrecen posibilidades educativas en el área de Matemáticas. Entran en esta modalidad:

- los programas relacionados con el acceso a la información (a bases documentales y de información)
- y las aplicaciones telemáticas (programas para el uso de redes de comunicación o la telepresencia).

En cuanto a los tipos de programas o modalidades, se distinguen los siguientes (Santandreu, 2004):

- Los micromundos: Son sistemas compuestos por objetos primitivos, operaciones elementales y reglas para operar con estos objetos. Este entorno de aprendizaje está orientado al descubrimiento y resulta atractivo por su carácter interactivo. En esta categoría se encuentran programas como Cabri.
- Los sistemas de simulación: Son sistemas en los que se presentan situaciones en las que es posible observar el resultado al modificar determinados parámetros. Se utilizan, por ejemplo, en el estudio de la probabilidad.
- Sistemas tutoriales: Son sistemas en los que el alumno recibe instrucciones y guía pero no se basan en la evolución de su conocimiento.
- Programas de ejercitación y práctica: Permiten reforzar los conocimientos utilizando la técnica de la repetición.
- Lenguajes de programación: Ayudan a la exploración del desarrollo cognitivo. Por ejemplo, BASIC, Pascal, Lenguaje C, LOGO.
- La conexión entre ordenadores, ya sea para redes locales o a través de Internet ha abierto nuevas posibilidades en la enseñanza y el aprendizaje, tales como las clases virtuales, los entornos de trabajo colaborativos etc.

Esta clasificación no es excluyente sino que, en la práctica, un programa de enseñanza puede pertenecer a varias categorías.

La exposición anterior se sintetiza en la siguiente tabla:

TIPO DE APLICACIÓN UTILIZADA	**CATEGORÍA SEGÚN TAREA**	**TIPO DE PROGRAMA**
Instructivos	Memorización y práctica	Tutoriales
		Programas de ejercitación
	Comprensión	Tutoriales heurísticos
		Simulaciones
		Micromundos
		Lenguajes de programación
	Aplicación	Procesadores de texto
		Hojas de cálculo
		Paquetes estadísticos
		Bases de datos
	Multimedia	Hipermedia
		Enciclopedias
		Videojuegos
		Resolución de problemas
Información y Comunicación	Acceso a la información	Programas que permiten acceder a bases documentales y de información
	Aplicaciones telemáticas	Programas para el uso de redes de comunicación
		Telepresencia

Tabla 6. Aplicaciones informáticas de carácter didáctico tomado de Santandreu (2004)

Desde otro punto de vista, también se puede hablar de programas referidos a distintos temas de Matemáticas. En concreto, los programas dedicados a la Geometría permiten ver y manipular los objetos matemáticos y sus relaciones dentro de esquemas imposibles con el lápiz y el papel, por eso se denominan programas de Geometría Dinámica.

Se analizan los programas de Geometría Dinámica:

- Cabri (http://www.cabri.com): Es el más extendido quizá por su antigüedad como por sus versiones (Cabri II Plus y Cabri 3D). En 1985 Jean Marie Laborde inició el desarrollo de Cabri (*Cahier de Brouillon interactive*, cuaderno de dibujo interactivo) para facilitar el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría en dos dimensiones. Posteriormente se desarrolló esta versión y se amplió a la versión en tres dimensiones.

- GeoGebra. Es un programa de Geometría Dinámica plana. Permite también trabajar el Álgebra y el Cálculo. Es un software libre gratuito, con facilidad para exportar a Internet, funciona directamente desde Internet. Tiene el defecto de que no contempla animaciones automáticas, ni permite comprobar propiedades como paralelismo, perpendicularidad, etc.

- Cinderella. Es un programa de Geometría Dinámica programado en Java. Dispone de un comprobador automático de resultados, la posibilidad de realizar construcciones y visualizar en geometría esférica e hiperbólica. Además permite crear ejercicios interactivos en Internet gracias al lenguaje script CindyScript diseñado para este programa.

- GEUP, es un programa de Geometría interactivo. Dispone de un gran número de herramientas para crear formas geométricas y permite experimentar todo tipo de cálculos, problemas y propiedades de esas formas. Trabaja con lugares geométricos, transformaciones geométricas, geometría analítica, coordenadas rectangulares y polares, representa gráficamente funciones, etc. El problema que tiene es que no exporta a html, lo que dificulta su difusión.

- Geonext. Es un programa de Geometría Dinámica muy sencillo de utilizar. Carece de algunas utilidades como polígonos regulares, medida de áreas, etc. Puede ser muy útil para niveles iniciales de Geometría. Exporta a html. La dificultad que tiene es que aunque se instala en español, la ayuda está únicamente en alemán.

- Geometer's Sketchpad. Se utiliza para Geometría, Álgebra, Trigonometría y Cálculo. Es una herramienta de construcción y exploración dinámica de las Matemáticas. Se puede utilizar desde Primaria hasta el nivel universitario. Es compatible con la PDI Smart Board. Permite publicar actividades por Internet e integrar recursos disponibles en Internet.

En esta Tesis se decidió utilizar Cabri por ser el programa del que disponía el centro y tener una interfaz más amigable que otro software libre.

2.12.1.2. Utilización de los recursos TIC.

El modo concreto de utilizar los recursos TIC en el aula depende, como se ha dicho anteriormente, de la dotación informática disponible en el Centro educativo.

En este apartado se citan algunas iniciativas que se están llevando a cabo y que tienen gran impacto en el aula en la Comunidad de Madrid, que es donde se desarrolla esta Tesis y en la Comunidad de Castilla y León, donde se presenta.

- En relación con la Geometría destaca el proyecto conocido como **Infoymate** (http://www.infoymate.es) "Formación e Investigación sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en Matemáticas para la ESO y los Bachilleratos". Proyecto de la Dirección General de Ordenación Académica de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid y del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Madrid. Desarrollado por José María Arias Cabezas, Ildefonso Maza Sáez y César Sáenz de Castro. Su objetivo ha sido comprobar que la utilización de herramientas informáticas mejora sustancialmente la enseñanza y el aprendizaje en el área de Matemáticas en la ESO y los Bachilleratos. Este proyecto se ha extendido a la Comunidad de Castilla y León coordinado por José Manuel Arranz San José. También tiene proyección en Andalucía.

Según los propios profesores implicados en el proyecto se llega a la conclusión de que la calificación media del alumnado del grupo experimental se eleva sobre la calificación media del grupo de control de forma significativa.

Sin embargo en dicho proyecto no han tenido en cuenta, al menos explícitamente, el modelo de Van Hiele, que es lo que se pretende incorporar en esta Tesis.

- Entre otras iniciativas de actualidad destaca el proyecto Skoool.es de Intel y la Fundación Germán Sánchez Ruipérez que ya ha sido implementado en otros países y proporciona materiales educativos digitales de Matemáticas y otras áreas del currículum de ESO. Actualmente está en fase de desarrollo.
- El “Proyecto Intergeo”. Es un proyecto de la Unión Europea que tiene como objetivo impulsar la utilización de los materiales de Geometría Dinámica en las clases de Matemáticas.

  Es un proyecto en continuo crecimiento en el que se encuentran a disposición de los profesores los materiales creados por otros usuarios y evaluados por los profesionales que los han experimentado (González, Polo y Recio, 2009).

2.12.2. Cabri y la creación de micromundos para el aprendizaje de la Geometría.

Estos nuevos entornos matemáticos tienen como consecuencia una transformación del modo de aprender de los alumnos.

En estas nuevas situaciones de conocimiento se encuentran los micromundos computacionales. Un micromundo está compuesto de (Balacheff y Kaput, 1996):

a) Un conjunto de objetos primitivos y operaciones que se realizan sobre estos objetos, que permite la operación formal del micromundo.

b) Un dominio fenomenológico, que relaciona los objetos y las operaciones con los fenómenos que podemos apreciar a nivel de la pantalla. Este dominio determina el tipo de retroalimentación que se produce como consecuencia de las acciones y decisiones que toma el alumno durante la interacción.

Se puede decir que el micromundo evoluciona a medida que crece el conocimiento del estudiante.

Balacheff y Kaput (1996) destacan el impacto epistemológico de esta tecnología al poder manipular los objetos virtuales que aparecen en la pantalla.

El programa Cabri (*Cahier de Brouillon interactive*, cuaderno de dibujo interactivo) es un micromundo que se caracteriza por su sencillez de manejo. Se compone de unos pocos elementos básicos (puntos, líneas, etc.), sus transformaciones y combinaciones, y herramientas de medida y cálculo. El programa permite la manipulación de las construcciones realizadas desde los elementos que han servido de base. Tiene una versión para Geometría en dos dimensiones y una versión para trabajar la Geometría espacial, Cabri 3D. Además, el Proyecto Cabri-Java permite traducir las aplicaciones de Cabri al lenguaje Java y de esta manera poder ser difundidas en Internet.

Es uno de los primeros programas de Geometría Dinámica, que ha ido ampliando sus posibilidades. Es muy fácil de usar e intuitivo. Se decidió utilizarlo en esta Tesis porque es el que a los alumnos les resulta más fácil, pues Cabri tiene la presentación de un programa de Geometría sintética mientras que GeoGebra tiene una interfaz de Geometría analítica.

2.13. Marco curricular.

Los estándares o conocimientos esenciales de Matemáticas para los tres primeros cursos de ESO en la Comunidad de Madrid se establecen en la Resolución de 30 de septiembre de 2009 (BOCM nº 250, 2009). Dicha publicación surge del estudio de los resultados obtenidos desde el año 2006 tanto en la Prueba de Evaluación de Diagnóstico de 2º de ESO, como de la prueba CDI de Conocimientos y Destrezas Indispensables de 3º de ESO.

Según se afirma en dicha Resolución, dichos estándares *"han de entenderse … como una concreción del currículo en cuanto a los conocimientos que el alumno debe dominar en cada momento… y… servirán de referencia … para la mejora de las programaciones didácticas…"*

Como se ha mencionado anteriormente, en dichas pruebas de Diagnóstico de 2º de ESO, las medias de las puntuaciones obtenidas por los alumnos del Instituto fueron 5.81, 5.83 y 5.36, siendo los resultados en Geometría 5.244, 5.55 y 4.576 durante los cursos 2006/07, 07/08 y 08/09 respectivamente. El análisis de estos datos tuvo como consecuencia el planteamiento expuesto en la presente Tesis. Al publicarse, al curso siguiente, los estándares de Matemáticas se diseñó la metodología de la investigación con este marco curricular. De los 37 estándares propuestos en Geometría, se seleccionaron 15 relacionados con los objetos básicos y consistentes en actividades de identificación (*"Identificar parejas de ángulos…"*), clasificación (*"Clasificar los triángulos según…"*) y conocimiento (*"Conocer que la suma de los ángulos de un triángulo…"*).

En la siguiente tabla se muestran los 37 estándares según aparecen en la Resolución y se marcan en negrita los que se han seleccionado en el estudio.

ESTÁNDARES DE GEOMETRÍA EN 1º DE ESO
68. Reconocer en un dibujo rectas que sean aproximadamente paralelas o perpendiculares.
69. Trazar desde un punto la perpendicular y la paralela (en este caso, siempre que el punto sea exterior) a una recta dada.
70. Medir, dada una recta y un punto exterior, la distancia del punto a la recta.
71. Medir la distancia entre dos rectas paralelas.
72. Distinguir entre recta, semirrecta y segmento, y nombrarlos adecuadamente.
73. Identificar parejas de ángulos de interés en geometría: Opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, alternos internos, alternos externos y correspondientes, y conocer sus propiedades.
74. Definir y trazar la mediatriz de un segmento y conocer la propiedad común a todos los puntos de la mediatriz.
75. Definir y trazar la bisectriz de un ángulo y conocer la propiedad común a todos los puntos de la bisectriz.
76. Definir las alturas de un triángulo y trazarlas con precisión, comprobando que se cortan siempre en un punto.
77. Definir las bisectrices de un triángulo y trazarlas con precisión.
78. Comprobar que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, conocer su nombre y dibujar la circunferencia inscrita al triángulo.
79. Definir las mediatrices de un triángulo y trazarlas con precisión.
80. Comprobar que las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto, conocer su nombre y dibujar la circunferencia circunscrita al triángulo.
81. Clasificar los triángulos atendiendo a la igualdad de sus lados o de sus ángulos.
82. Clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos.
83. Conocer que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° y utilizar el resultado para resolver problemas geométricos.

ESTÁNDARES DE GEOMETRÍA EN 1º DE ESO
84. Justificar que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre 180°.
85. Conocer la fórmula del área de un triángulo y aplicarla midiendo alturas y lados.
86. Construir triángulos a partir de algunos de sus elementos (lados y ángulos).
87. Dominar la terminología básica referente a polígonos en general: Lados, vértices, ángulos y diagonales.
88. Nombrar los elementos de un polígono y el propio polígono, tomando como referencia las letras asignadas a cada uno de sus vértices.
89. Clasificar los cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos.
90. Clasificar los paralelogramos y conocer sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.
91. Construir cuadriláteros a partir de algunos de sus elementos.
92. Demostrar, utilizando triángulos, que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° y utilizar el resultado para resolver problemas geométricos.
93. Conocer y aplicar la fórmula del área de un paralelogramo.
94. Calcular áreas de polígonos por descomposición en figuras simples: Triángulos, rectángulos, paralelogramos, etcétera.
95. Calcular perímetros de polígonos.
96. Trazar circunferencias de centro y radio conocidos.
97. Definir circunferencia y círculo como conjuntos de puntos que cumplen determinados requisitos de distancias a un punto dado.
98. Calcular longitudes de circunferencia y áreas de círculos.
99. Reconocer y nombrar con propiedad partes de la circunferencia y del círculo, como arco y sector circular.

ESTÁNDARES DE GEOMETRÍA EN 1º DE ESO
100. Calcular la longitud de un arco y el área de un sector circular, conocido en cada caso el ángulo central correspondiente.
101. Dibujar polígonos regulares, dados el número de lados y la circunferencia que pasa por los vértices del polígono.
102. Descubrir simetrías axiales en figuras sencillas y familiares, y trazar el o los ejes.
103. Descubrir simetrías en la naturaleza y en las construcciones del hombre.
104. Dibujar, dada una figura sencilla en una cuadrícula, su figura simétrica respecto de un eje que sigue una de las líneas de la cuadrícula.

Tabla 7. Estándares de Geometría en 1º de ESO para la Comunidad de Madrid (BOCM nº 250, 2009)

Además también se tuvieron en cuenta los estándares de Geometría establecidos para Segundo Ciclo y Tercer Ciclo de Primaria en la Resolución de 20 de diciembre de 2005 (BOCM nº 2, 2006), que fueron elaborados en base a los resultados obtenidos en la prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables realizada a todos los alumnos de 6º de Primaria de la Comunidad de Madrid en 2005.

De los 19 estándares establecidos en Segundo Ciclo, se seleccionaron 5 según el criterio anterior para tenerlos en cuenta en la investigación.

ESTÁNDARES DE GEOMETRÍA EN SEGUNDO CICLO DE PRIMARIA
73. Relacionar el concepto de ángulo con el de giro.
74. Relacionar el ángulo recto con los ángulos que forman dos rectas perpendiculares (los cuatro ángulos que se forman son iguales).
75. Comparar ángulos con el ángulo recto y clasificarlos en agudos, rectos, obtusos, llanos, mayores de 180° y completos.
76. Reconocer el grado como unidad de medida de ángulos.
77. Medir ángulos con el transportador.
78. Reproducir un ángulo dado, utilizando regla y transportador.
79. Distinguir los conceptos de recta, semirrecta y segmento.
80. Distinguir las posiciones relativas de rectas en el plano: Paralelas, secantes (perpendiculares y oblicuas).
81. Dibujar, a mano alzada y con regla, la recta que pasa por un punto dado y es paralela o perpendicular a otra recta dada.
82. Reconocer, de entre una serie de líneas cerradas, aquellas que son polígonos y nombrarlos atendiendo al número de sus lados o vértices.
83. Identificar y caracterizar los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 8 lados.
84. Dibujar a mano alzada triángulos equiláteros, cuadrados y rectángulos.
85. Reproducir figuras poligonales sencillas, utilizando la regla graduada y el transportador.
86. Reconocer los elementos básicos relacionados con la circunferencia (centro, radio, diámetro, cuerda, arco,...).
87. Trazar circunferencias con centro y radio determinados.
88. Distinguir, de entre una serie de cuerpos geométricos, reales o dibujados, aquellos que son poliedros o cuerpos redondos.
89. Distinguir, de entre una serie de poliedros, reales o dibujados, aquellos que son prismas o pirámides.
90. Reconocer en el entorno cuerpos geométricos: Cubos, prismas, pirámides, esferas, conos, cilindros.
91. Contar las caras, aristas y vértices de un poliedro.

Tabla 8. Estándares de Geometría en 2º Ciclo de Primaria para la Comunidad de Madrid (BOCM nº2, 2006)

De Tercer Ciclo, se seleccionaron 8 para tenerlos en cuenta en la investigación.

ESTÁNDARES DE GEOMETRÍA EN TERCER CICLO DE PRIMARIA
87. Asociar el concepto de ángulo con el de giro.
88. Clasificar los distintos tipos de ángulos.
89. Medir la amplitud de un ángulo dado, utilizando el transportador.
90. Trazar por un punto dado las rectas paralela y perpendicular a una recta dada, tanto a mano alzada como con regla y escuadra o cartabón.
91. Descubrir y enunciar cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero.
92. Distinguir los conceptos de lado, vértice, perímetro y área en un polígono.
93. Identificar y nombrar polígonos, atendiendo al número de lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,...).
94. Identificar y dibujar las tres alturas de un triángulo dado.
95. Clasificar los triángulos, atendiendo a la longitud de los lados y a la amplitud de los ángulos.
96. Nombrar los distintos tipos de cuadriláteros.
97. Descubrir simetrías axiales en figuras sencillas y familiares, y trazar el eje.
98. Dibujar, dada una figura sencilla en una cuadrícula, la figura simétrica cuando el eje de simetría es horizontal o vertical.
99. Reproducir una figura sencilla, utilizando la regla, el compás y el transportador.
100. Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular).
101. Distinguir, dada una serie de cuerpos geométricos, reales o dibujados, los que son poliedros y los que son cuerpos redondos, nombrando conos, cilindros y esferas.
102. Distinguir, dada una serie de poliedros, reales o dibujados, los que son prismas o pirámides.
103. Identificar, en un cuerpo geométrico, las aristas o caras que son paralelas o perpendiculares.
104. Distinguir los conceptos de perímetro y de área.
105. Calcular el perímetro de figuras geométricas sobre una trama tomando como unidad el segmento base de la trama.
106. Calcular perímetros y áreas a partir de croquis previamente dibujados por los alumnos.
107. Hallar el área de figuras dibujadas sobre una cuadrícula tomando como unidad la superficie de un cuadrado mínimo de la misma.
108. Conocer las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y aplicarlas a figuras de dimensiones dadas.

Tabla 9. Estándares de Geometría en 3er Ciclo de Primaria para la Comunidad de Madrid (BOCM nº 2, 2006)

2.14. Concreción del marco teórico.

Una vez presentado el Marco Teórico de la Tesis, procede exponer cómo se han concretado los distintos aspectos.

Conviene recordar que en la investigación desarrollada en esta Tesis el objetivo no es propiamente determinar el nivel de Van Hiele de los alumnos sino diseñar un modo efectivo de aplicación del modelo de Van Hiele que permita a los alumnos avanzar en la comprensión de la Geometría. Para conseguir dicha efectividad, la clave está en la detección de los errores, considerando este término en toda su amplitud, y en el conocimiento de las imágenes conceptuales.

De los tres proyectos mencionados en el párrafo 2.6, quizá sea el de Burger y Shaughnessy (1986) el que haya establecido más claramente los indicadores de cada uno de los niveles de Van Hiele. Son los que se han utilizado en la presente investigación.

Dicho proyecto se basaba en entrevistas realizadas de manera individual a cada alumno. Teniendo en cuenta que cada entrevista duró entre 40 y 90 minutos, se concluye que este procedimiento no es viable si se desea integrar en la dinámica del aula, aunque su intención era que resultase fácilmente aplicable por los profesores e investigadores.

De todos modos, tanto la caracterización de los niveles como la tipología de las actividades propuestas a los alumnos se tuvieron en cuenta en esta Tesis en el diseño del cuestionario y su interpretación. En concreto, se plantearon actividades de identificación de figuras afectadas por atributos irrelevantes como la orientación en el plano para determinar si el alumno razona en el nivel 0 y también se diseñaron actividades de identificación de cuadriláteros para saber si el alumno *"prohíbe inclusiones de clases* *entre los tipos generales de figuras tales como los cuadriláteros"* y así determinar si razona en el nivel 1.

Un ejemplo de actividad propuesta (Burger y Shaughnessy, 1986, pág. 35) era identificar y definir los siguientes cuadriláteros:

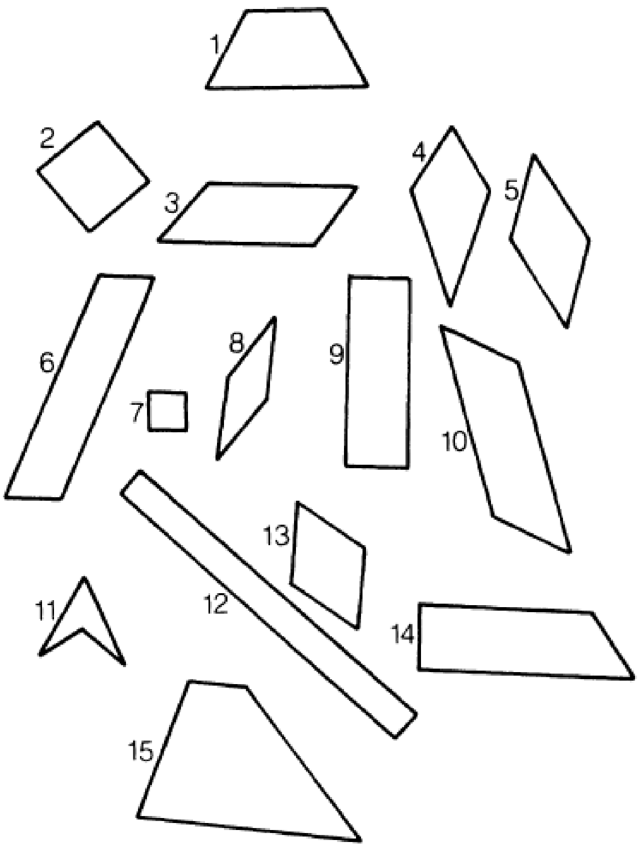


Ilustración 24. Actividad propuesta por Burger y Shaughnessy (1986) para identificar cuadriláteros

Del proyecto de Fuys, Geddes y Tischler (1988) se tomó la idea del desarrollo y validación de unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele diseñadas según el actual currículum.

En este proyecto también se realizaron entrevistas personalizadas, de 45 minutos lo cual resulta incompatible con el tiempo que se dispone para la enseñanza.

En el proyecto de Usiskin (1982) la caracterización de los niveles comienza con el número 1 y termina en el 5, en vez de numerarlos del 0 al 4 como en las otras dos investigaciones y en la de Mayberry (1981, 1983).

La aportación de la investigación de Usiskin (1982) es la aplicación por escrito de un cuestionario, lo cual, dejando a un lado cuestiones de validez y fiabilidad todavía discutibles teniendo en cuenta que es un test que sigue dando resultados válidos en investigación, sugiere su utilización como herramienta de diagnóstico, que es lo que se ha realizado en esta Tesis con el cuestionario diseñado.

También sugirió la realización de un contraste de hipótesis para analizar las diferencias en el aprendizaje por razón de género, llegando a la misma conclusión que Usiskin, es decir, que no hay diferencias significativas entre chicas y chicos cuando el contenido de los ítems de las pruebas ha sido enseñado y aprendido en clase (Usiskin, 1982; Senk y Usiskin, 1983).

Usiskin (1982) afirma que *"históricamente, en pruebas no relacionadas con el aprendizaje escolar, los niños han destacado sobre las niñas en razonamiento espacial y en resolución de problemas".* Otros estudios también han concluido que si los tests incluyen ítems que no se han enseñado de forma explícita, entonces aparecen diferencias significativas (Fennema, Peterson, Carpenter y Lubinski, 1990).

De estos dos últimos proyectos se tomó la idea de analizar el actual currículum de Geometría y los estándares curriculares de la Comunidad de Madrid, a la luz del modelo de Van Hiele y determinar si se está enseñando de manera apropiada al nivel de los alumnos.

La investigación de Mayberry (1981, 1983) se desarrolló también con entrevistas (dos reuniones de una hora de duración), de lo que se hace el mismo comentario que en los casos anteriores sobre la inviabilidad de su aplicación en el aula. En esta investigación también se denominan los niveles de Van Hiele comenzando con el 0.

De la investigación de Mayberry (1981, 1983) se tomó, en continuidad con la idea de Burger y Shaughnessy (1986), la sugerencia de nombrar figuras como indicador del nivel básico.

El modelo cognitivo "imagen del concepto-definición del concepto" de Vinner y Hershkowitz (Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983; Hershkowitz, 1987, 1989, 1990), aportó varias sugerencias:

En primer lugar, y la más importante, es la importancia de conocer las imágenes conceptuales de los alumnos, en concreto en tareas de identificación de figuras geométricas básicas.

Después analizar los prototipos y los juicios analíticos. También se determinaron patrones de conceptos erróneos.

En el mismo sentido se concretó el modelo de Fischbein (1993), que determinó la hipótesis de que los alumnos, cuando empiezan 1º de ESO, de la mayoría de los conceptos geométricos, no tienen formado el concepto figural; conocen solo imágenes no informadas por el concepto. La utilización de ejemplos y contraejemplos propuesta por Tsamir, Tirosh y Levenson (2008), se concretó en el desarrollo de las unidades didácticas.

Siguiendo la recomendación de Duval (1995, 1998), en la presente Tesis se comenzó trabajando la visualización de manera separada de los otros procesos cognitivos y se consideraron los procesos de construcción (en las unidades didácticas) como apoyo a la visualización. Como herramienta de construcción se utilizó el software geométrico.

El estudio de los programas de Geometría Dinámica permitió concluir que Cabri era el más aconsejable para la investigación, si bien los resultados no parecen vinculados al software elegido.

El contenido curricular del cuestionario diseñado para la investigación se basó en los estándares de Geometría establecidos en la Comunidad de Madrid desde Segundo Ciclo de Primaria hasta 1º de ESO, habiendo sido seleccionados los mencionados a continuación. Inicialmente se eligieron más de los que aquí se presentan, pero tras la primera versión del cuestionario y su análisis psicométrico, se redujeron a los aquí expuestos. Estos mismos estándares se tuvieron en cuenta en el desarrollo de las unidades didácticas.

- De Segundo Ciclo de Primaria:

    Estándar 74: Relacionar el ángulo recto con los ángulos que forman dos rectas perpendiculares (los cuatro ángulos que se forman son iguales).

    Estándar 75: Comparar ángulos con el ángulo recto y clasificarlos en agudos, rectos, obtusos, llanos, mayores de 180º y completos.

    Estándar 80: Distinguir las posiciones relativas de rectas en el plano: paralelas, secantes (perpendiculares y oblicuas).

    Estándar 83: Identificar y caracterizar los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 8 lados.

    Estándar 86: Reconocer los elementos básicos relacionados con la circunferencia (centro, radio, diámetro, cuerda, arco,…).

- De Tercer Ciclo de Primaria:

    Estándar 88: Clasificar los distintos tipos de ángulos.

Estándar 91: Descubrir y enunciar cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero.

Estándar 92: Distinguir los conceptos de lado, vértice, perímetro y área en un polígono.

Estándar 93: Identificar y nombrar polígonos, atendiendo al número de lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,…).

Estándar 95: Clasificar los triángulos atendiendo a la longitud de los lados y a la amplitud de los ángulos.

Estándar 96: Nombrar los distintos tipos de cuadriláteros.

Estándar 100: Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular).

Estándar 108: Conocer las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y aplicarlas a figuras de dimensiones dadas.

- De Primero de ESO:

Estándar 68: Reconocer en un dibujo rectas que sean aproximadamente paralelas o perpendiculares.

Estándar 72: Distinguir entre recta, semirrecta y segmento y nombrarlos adecuadamente.

Estándar 73: Identificar parejas de ángulos de interés en geometría: Opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, alternos internos, alternos externos y correspondientes, y conocer sus propiedades.

Estándar 74: Definir y trazar la mediatriz de un segmento y conocer la propiedad común a todos los puntos de la mediatriz.

Estándar 75: Definir y trazar la bisectriz de un ángulo y conocer la propiedad común a todos los puntos de la bisectriz.

Estándar 81: Clasificar los triángulos atendiendo a la igualdad de sus lados o de sus ángulos.

Estándar 82: Clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos.

Estándar 83: Conocer que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º y utilizar el resultado para resolver problemas geométricos.

Estándar 85: Conocer la fórmula del área de un triángulo y aplicarla midiendo alturas y lados.

Estándar 87: Dominar la terminología básica referente a polígonos en general: lados, vértices, ángulos y diagonales.

Estándar 88: Nombrar los elementos de un polígono y el propio polígono, tomando como referencia las letras asignadas a cada uno de sus vértices.

Estándar 89: Clasificar los cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos.

Estándar 90: Clasificar los paralelogramos y conocer sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

Estándar 93: Conocer y aplicar la fórmula del área de un paralelogramo.

Estándar 99: Reconocer y nombrar con propiedad partes de la circunferencia y del círculo, como arco y sector circular.

La teoría de las reglas intuitivas (Stavy, y otros, 2006) se utilizó en la primera versión del cuestionario, pero los ítems relacionados con dicha teoría fueron eliminados debido a la excesiva dificultad que suponía para los alumnos, lo cual corrobora la necesidad planteada en esta Tesis de comenzar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, analizando y trabajando la visualización.

CAPÍTULO 3. ESTADO DEL ARTE. ANÁLISIS DEL ESTADO DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE GEOMETRÍA, EL MODELO DE VAN HIELE Y CABRI ESPECIALMENTE EN ESPAÑA.

3.1. Grado de adquisición del nivel de Van Hiele, nueva metodología de asignación de niveles y habilidades consideradas en cada nivel de razonamiento.

El grupo de España que, por lo se ha indagado en la realización de la presente Tesis, más y mejor ha estudiado y desarrollado el modelo de Van Hiele, se encuentra en la Universidad de Valencia, siendo el director el Profesor Ángel Gutiérrez.

En 1988 el profesor Josep María Fortuny inició una investigación sobre los niveles de Van Hiele en Geometría espacial a la que se unieron los profesores Ángel Gutiérrez y Adela Jaime (Gutiérrez, 2001).

Los métodos conocidos de asignación de los niveles de Van Hiele no les resultaban satisfactorios porque se veían obligados a codificar respuestas demasiado diferentes en el mismo nivel. Además, algunos estudiantes mostraban niveles de razonamiento diferentes en las sucesivas respuestas al mismo problema por lo que no parecía razonable asignarles un nivel basándose en una respuesta sin considerar las demás.

Entonces propusieron dos características en la interpretación del modelo de Van Hiele (Gutiérrez, 2001):

1. *"La transición de un nivel al siguiente puede ser lenta, larga en el tiempo, y por tanto, observable y evaluable"*.
2. El modelo tiene una estructura jerárquica, pero hay que reconocer la realidad escolar y asumir que *"es posible que comience a desarrollarse un nivel de razonamiento antes que el nivel anterior esté completamente desarrollado"*.

Esto se justificó de la siguiente forma: considerando que cada nivel está integrado por varias habilidades necesarias para adquirirlo (describir, clasificar, definir, demostrar) y que la enseñanza potencia más unas habilidades que otras, resulta que los alumnos desarrollan más las primeras y antes de que se complete la adquisición de un nivel, ya ha comenzado la del siguiente (Jaime y Gutiérrez, 1994, 1995).

Con esta nueva interpretación del modelo de Van Hiele, definieron el concepto de *"grado de adquisición"* del nivel y aportaron una metodología de asignación diferente a la usada hasta ese momento.

Jaime (1993, pág. 265) explica en su Tesis la formación de dicho concepto. Para determinar el nivel de Van Hiele en un test de elección múltiple, a cada ítem se le asocia un nivel de razonamiento y la respuesta puede estar bien o mal, pero no se conoce cómo ha razonado el alumno. En las preguntas abiertas, se puede obtener más información sobre el razonamiento.

Considerando que un nivel de razonamiento se adquiere de manera progresiva, se puede hablar de un proceso gradual que va desde la adquisición nula hasta la adquisición completa (Jaime, 1993):

1. **Adquisición nula**: *"No se emplean las características del nivel"*.

2. **Adquisición baja**: *"Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos. Es frecuente el abandono del trabajo en este nivel para recurrir al razonamiento de nivel inferior"*.

3. **Adquisición intermedia**: *"El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, ante situaciones que resultan complicadas, se produce un retroceso de nivel, con un intento posterior de retorno al nivel superior. Hay, por tanto, saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento"*.

4. **Adquisición alta**: *"El nivel habitual de trabajo es éste y se produce con muy poca frecuencia el retroceso de nivel, aunque sucede alguna vez. Asimismo, en ocasiones se hace un uso inadecuado de las herramientas propias de este nivel de razonamiento"*.

5. **Adquisición completa**: *"Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento"*.

Jaime (1993, pág. 266) establece unos límites razonables para los diferentes grados de adquisición, basados en las experiencias realizadas, lo cual es subjetivo y no afecta al concepto de grado de adquisición propuesto.

Adquisición	Nula	Baja	Intermedia	Alta	Completa
Límites en %	[0%, 15%]	(15%, 40%)	[40%, 60%]	(60%,85%)	[85%,100%]

Tabla 10. Grados de adquisición de los niveles de Van Hiele basada en Jaime (1993)

Para cuantificar dicha adquisición, hay que tener en cuenta que un ítem de respuesta libre puede ser contestado en distintos niveles de Van Hiele, y por lo tanto es la respuesta, y no el enunciado del ítem, lo que determina la asignación del nivel.

Los tipos de respuesta que se pueden obtener según las características de "*nivel de razonamiento*" y *"corrección matemática"* son los siguientes (Jaime, 1993):

Tipo	Características
Tipo 1	*"Ítems sin respuesta, con respuestas no codificables, o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores".*
Tipo 2	*"Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada".*
Tipo 3	*"Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres aunque no contienen errores matemáticos".*
Tipo 4	*"Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos de transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas".*
Tipo 5	*"Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos".*
Tipo 6	*"Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.".*
Tipo 7	*"Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado".*

Tabla 11. Tipos de respuesta a los ítems de respuesta libre basada en Jaime (1993)

La metodología propuesta para asignar el nivel de Van Hiele a un alumno supone, en primer lugar, evaluar las respuestas. El procedimiento consiste en (Jaime, 1993):

1. *"Determinar el nivel de razonamiento en el que se ha respondido".*

2. *"Analizar la calidad de la respuesta desde la perspectiva del nivel que se considera, teniendo en cuenta tanto su precisión matemática como el empleo del nivel de razonamiento en cuestión"*.

El esquema global es el siguiente:

Tipos de respuesta		Incorrectas		Correctas		
		Incompletas	Bastante completas	Incompletas	Bastante completas	Completas
Nivel de Van Hiele	Alto		**5**		**6**	**7**
	Medio		**4**		**4**	
	Bajo	**2**		**3**		

Tabla 12. Tipos de respuesta (nivel de Van Hiele y corrección matemática) basada en Jaime (1993)

Una vez que el alumno ha contestado al test, para determinar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele, se tienen en cuenta los siguientes pasos:

1) Ponderación de cada tipo de respuesta.

Jaime (1993, pág. 269), propone la siguiente tabla de ponderaciones basada en las experimentaciones realizadas:

Tipo de respuesta	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación en %	0	20	25	50	75	80	100

Tabla 13. Ponderación de los tipos de respuesta según Jaime (1993)

2) La codificación de cada una de las respuestas del alumno al test.

3) El rango de los niveles de Van Hiele en los que se puede contestar cada ítem (pueden ser dos o tres). Se debe ponderar la respuesta en todos los niveles. Si la respuesta se puede contestar en los niveles $N1 \leq N \leq N2$ y lo ha contestado en el nivel N, entonces se le da un 100% al nivel N1, un 0% al nivel N2 y el valor correspondiente al tipo de respuesta en el nivel N.

Por ejemplo, si un ítem se puede contestar en los niveles 2, 3 y 4 y el estudiante ha dado una respuesta del tipo 5 en el nivel 3, entonces la ponderación correspondiente será, 100% en el nivel 2, 75% en el nivel 3 y 0% en el nivel 4.

4) Los ítems que pueden contestarse en cada nivel de razonamiento. Para calcular el grado de adquisición de ese nivel: se hace la media aritmética de las ponderaciones asignadas a todos los ítems que pueden contestarse en ese nivel.

Por ejemplo si hay 3 ítems que pueden ser contestados en el nivel 2 y las ponderaciones de dichos ítems en ese nivel son 0%, 20% y 50%, entonces se hace (0%+ 20%+ 50%):3= 23,3% que corresponde a una adquisición baja.

Este cálculo se hace para cada nivel de razonamiento, con lo cual el resultado final es un conjunto de cuatro valores correspondientes a los distintos grados de adquisición de los cuatro niveles de Van Hiele.

Una última consideración sobre las aportaciones de la Tesis de Jaime (1993) es la determinación de los tipos de test para evaluar el nivel de razonamiento de los alumnos. Proponen dos aspectos para determinar qué test utilizar:

- Tipo de test:

    Oral o escrito.

    Con ítems de respuesta libre o de elección múltiple.

- Elección de los ítems que deben formar el test.

    Niveles de razonamiento a los que están asociados.

    Número de ítems del test.

    Número de ítems asociados a cada nivel de razonamiento.

Analizando las investigaciones realizadas hasta el momento sobre el modelo de Van Hiele, considera que los ítems de respuesta libre son los que permiten identificar mejor el nivel de Van Hiele de razonamiento de los alumnos. Con este tipo de ítems, las entrevistas son la forma de obtener información más amplia. El inconveniente que tienen las entrevistas frente a los test escritos es que con ellas se obtiene información de un menor número de estudiantes.

Respecto a los ítems concretos que deben integrar un test (cantidad, contenidos, objetivos, etc.) afirma que es una dificultad inherente a cualquier test. En concreto en el diseño de test para medir el nivel de razonamiento geométrico, es un tema abierto todavía.

En la Tesis de Jaime (1993) se realiza una propuesta de enseñanza de las isometrías del plano, unidad didáctica que actualmente corresponde a 3º de ESO.

La evaluación del nivel del razonamiento de Van Hiele mediante el grado de adquisición, supone una relevante aportación al modelo, que ha sido ampliamente difundida (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Jaime y Gutiérrez, 1994; Gutiérrez y Jaime, 1995,1998).

3.2. Propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Secundaria basada en el modelo de Van Hiele.

En este epígrafe se comenta el informe "Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele" (Corberán, y otros, 1994).

Comienza con una descripción del modelo de Van Hiele como marco para fundamentar el desarrollo de las unidades didácticas y la metodología utilizada.

Participaron 128 alumnos de cinco institutos de Valencia, de 14 y 15 años, de primer curso de Formación Profesional y del antiguo Bachillerato, es decir, el actual 3º de ESO. Las unidades diseñadas se refieren a *“Generalidades de Polígonos, Triángulos y Cuadriláteros”* (Corberán, y otros, 1994, pág. 34).

Los objetivos planteados en dichas unidades son de dos tipos: los primeros están relacionados con las habilidades de razonamiento (los niveles de Van Hiele) y los segundos, con el aprendizaje de los conocimientos geométricos.

1. Objetivos relacionados con las habilidades de razonamiento:

   a) Para adquirir el nivel de Análisis:

      “Analizar los elementos componentes de un polígono.

      Construir polígonos a partir de una propiedad dada.

      Agrupar polígonos atendiendo a sus características.

      Asociar propiedades a tipos de polígonos”.

(Corberán, y otros, 1994, pág. 34)

   b) Para adquirir el nivel de Deducción Informal, Orden o clasificación:

      “Establecer relaciones entre propiedades.

      Establecer relaciones entre conceptos.

      Realizar clasificaciones (inclusivas-exclusivas).

      Demostrar de un modo informal diferentes proposiciones.

      Formalizar definiciones.

      Comprender la estructura de una demostración de varios pasos.

      Entender la generalización como herramienta de razonamiento matemático.

Iniciar a los alumnos en el razonamiento deductivo".

(Corberán, y otros, 1994, pág. 34)

2. Objetivos relacionados con el aprendizaje geométrico:

"Conocer y utilizar adecuadamente los elementos de un polígono: Lados, vértices, ángulos interiores y exteriores, diagonales interiores y exteriores.

Conocer y utilizar adecuadamente los elementos de un triángulo: Lados, vértices, ángulos, alturas, medianas, mediatrices y bisectrices.

Conocer los diferentes tipos de triángulos y cuadriláteros y nombrarlos adecuadamente.

Adquirir los conceptos de: Polígono, polígono cóncavo, polígono convexo, polígono regular, equilátero, equiángulo, y, en particular, los relativos a cuadriláteros y triángulos.

Usar adecuadamente el vocabulario geométrico básico.

Construir polígonos.

Utilizar correctamente diferentes instrumentos de medida de longitudes y ángulos".

(Corberán, y otros, 1994, pág. 35)

Afirman que no existe una metodología determinada para poner en práctica el modelo de Van Hiele. El equipo de profesores que realizó esta investigación optó por tener en cuenta en el desarrollo de las unidades didácticas, las dos componentes del modelo (los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje).

En dicho trabajo se deja constancia de que, por experiencias previas del equipo investigador, la mayoría de los estudiantes (entre 14 y 16 años) están en los dos primeros niveles de Van Hiele, es decir el básico, de reconocimiento o visualización y el de análisis), mientras que solo unos pocos llegarán al tercero, de deducción informal, orden o clasificación (Corberán, y otros, 1994, pág. 21).

Las unidades didácticas fueron diseñadas en los niveles de análisis y clasificación, aunque su puesta en práctica hizo notar que la mayoría de los alumnos no seguían de manera sistemática las actividades de razonamiento que superaban el nivel de análisis.

Para evaluar el nivel de Van Hiele de los estudiantes, se utilizaron dos tests equivalentes, escritos, de respuesta libre. El modo de corrección de los tests es el que se ha indicado en el epígrafe anterior, determinando el tipo de respuesta y el grado de adquisición de cada nivel de Van Hiele.

Entre las conclusiones señalan:

> *"Casi todos nuestros alumnos han logrado un notable incremento en sus grados de adquisición de los niveles 1 y 2* [básico y de análisis] *de Van Hiele después de haber trabajado con las unidades de enseñanza experimentales. Además, algunos de ellos han obtenido un moderado incremento en el grado de adquisición del nivel 3* [nivel de deducción]. *Todo ello nos lleva a la conclusión de que hemos tenido éxito en nuestro trabajo de diseño de dichas unidades".*

> *"Aunque se han obtenido buenos resultados con las unidades de enseñanza, éstos no son tan buenos como pretendíamos pues… nuestro objetivo era que la mayoría de nuestros estudiantes adquirieran completamente el nivel 2* [Análisis] *e iniciaran la adquisición del nivel 3* [Deducción informal, Orden o Clasificación]. *Esto corrobora la afirmación de que el proceso de adquisición de los niveles 1 y 2* [Básico, de Reconocimiento o Visualización y Análisis]

puede ser rápido en estudiantes de Enseñanza Secundaria, pero el proceso de adquisición del nivel 3 [Deducción informal, Orden o Clasificación], *es decir el inicio del desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico formal, es lento, puede durar varios cursos y debe realizarse de manera coordinada en todas las áreas de las Matemáticas".*

(Corberán, y otros, 1994, pág. 126)

3.3. Test de Geometría de Wu (Wu's Geometry Test, WGT) para estudiar los conceptos geométricos en el nivel básico de Van Hiele en alumnos de Primaria.

En este epígrafe se presenta la experiencia realizada en Taiwan con alumnos de Primaria (Wu y Ma, 2005). El objetivo es explorar los conceptos geométricos que tienen los alumnos en el nivel básico, de reconocimiento o visualización de Van Hiele.

Participaron 5581 alumnos (2717 chicas y 2864 chicos), aleatoriamente seleccionados en 25 escuelas, siendo respectivamente 910, 912, 917, 909, 920 y 1013 el número de alumnos de primero a sexto grado.

Se diseñó un instrumento, válido y fiable, el test WGT basado en los descriptores de los niveles de Van Hiele y en los ejemplos de respuestas del Proyecto de Fuys, Geddes y Tishler (1988), sobre los tres primeros niveles. Se utilizaron los criterios de Usiskin (1982) para determinar la consecución del nivel de Van Hiele. Consta de 25 cuestiones de respuesta múltiple para el nivel básico, 20 para el segundo nivel y 25 para el tercero. Se centra en tres conceptos básicos, el triángulo, el cuadrilátero y la circunferencia o el círculo.

Las 25 preguntas del primer nivel se clasificaron en nueve tipos según sus atribuciones geométricas. Se presenta el esquema en la siguiente tabla:

	Triángulo	Cuadrilátero	Circunferencia
Tipo 1: Identificación de figuras abiertas y cerradas	Q1	Q2	Q3
Tipo 2: Identificación de figuras convexas y cóncavas	Q4	Q5	Q6
Tipo 3: Identificación de líneas rectas y curvas	Q7	Q8	Q9
Tipo 4: Identificación de una figura girada	Q10	Q11	Q12
Tipo 5: Identificación de figuras de diferentes tamaños	Q13	Q14	Q15
Tipo 6: Identificación de figuras extremadamente obtusas	Q16	Q17	
Tipo 7: Identificación de figuras anchas y estrechas	Q18	Q19	
Tipo 8: Identificación de la anchura de la línea de contorno	Q20	Q21	Q22
Tipo 9: Identificación de figuras rellenas y vacías	Q23	Q24	Q25

Tabla 14. Tipo y distribución de las preguntas del primer nivel de Van Hiele en el cuestionario de Wu WGT (basado en Wu y Ma, 2005)

A continuación se muestran algunos ejemplos de las preguntas, obtenidas de la investigación mencionada (Wu y Ma, 2005).

- Ejemplo de pregunta del tipo 4 (Identificación de figuras giradas)

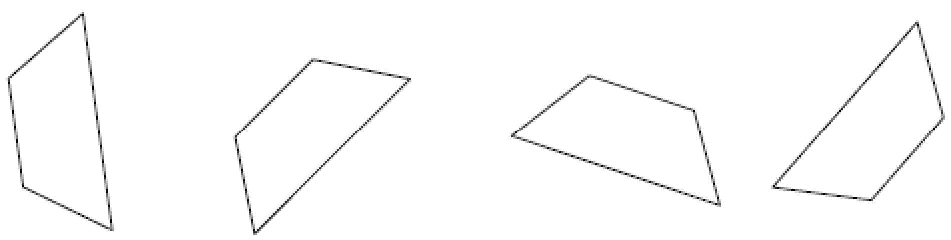


Ilustración 25. Ejemplo de identificación de figuras giradas. Tomada de Wu y Ma (2005)

- Ejemplo de pregunta del tipo 6 (Identificación de figuras extremadamente obtusas)

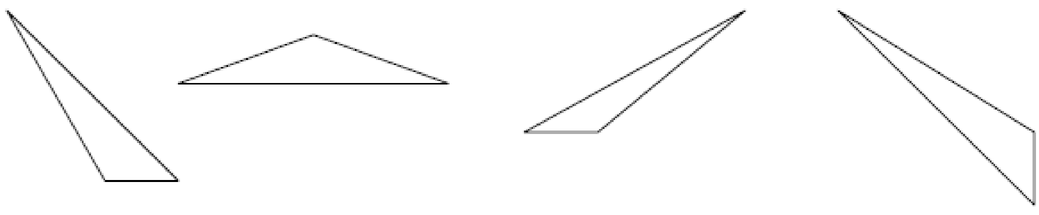


Ilustración 26. Ejemplo de identificación de figuras extremadamente obtusas. Tomada de Wu y Ma (2005)

- Ejemplo de pregunta del tipo 7 (Identificación de figuras anchas y estrechas)

Ilustración 27. Ejemplo de identificación de figuras anchas y estrechas. Tomada de Wu y Ma (2005)

El objetivo de la investigación (Wu y Ma, 2005) era determinar el porcentaje de aciertos en cada figura geométrica y en cada tipo.

Lo más fácil fue la identificación en la circunferencia (85,14%), después en el triángulo (75,88%) y finalmente en el cuadrilátero (71,49%).

En cuanto a los tipos de preguntas, lo más fácil es identificar las líneas rectas y curvas. Lo más difícil es identificar figuras extremadamente obtusas.

La siguiente tabla muestra los porcentajes de aciertos de cada tipo de pregunta:

	Porcentaje de aciertos totales
Tipo 3: Identificación de líneas rectas y curvas	93,42
Tipo 2: Identificación de figuras convexas y cóncavas	85,46
Tipo 8: Identificación de la anchura de la línea de contorno	84,14
Tipo 9: Identificación de figuras rellenas y vacías	81,74
Tipo 4: Identificación de una figura girada	78,92
Tipo 1: Identificación de figuras abiertas y cerradas	73,40
Tipo 5: Identificación de figuras de diferentes tamaños	68,09
Tipo 7: Identificación de figuras anchas y estrechas	58,56
Tipo 6: Identificación de figuras extremadamente obtusas	54,85

Tabla 15. Porcentajes de aciertos en los tipos de preguntas del cuestionario WGT, basada en Wu y Ma (2005)

Dado que, en relación con las figuras, la mayor dificultad se encuentra en la identificación en el cuadrilátero, se muestran los porcentajes de aciertos en cada tipo de pregunta, observando que la dificultad se encuentra en la identificación de figuras extremadamente obtusas, seguido de la identificación de figuras anchas y estrechas y, a continuación los obstáculos se deben al tamaño y a la orientación.

	Cuadrilátero Porcentaje de aciertos
Tipo 3: Identificación de líneas rectas y curvas	88,37
Tipo 9: Identificación de figuras rellenas y vacías	88,30
Tipo 8: Identificación de la anchura de la línea de contorno	84,32
Tipo 2: Identificación de figuras convexas y cóncavas	74,91
Tipo 1: Identificación de figuras abiertas y cerradas	71,24
Tipo 4: Identificación de una figura girada	66,71
Tipo 5: Identificación de figuras de diferentes tamaños	66,53
Tipo 7: Identificación de figuras anchas y estrechas	59,22
Tipo 6: Identificación de figuras extremadamente obtusas	43,85

Ilustración 28. Porcentajes de aciertos en los tipos de preguntas relativas al cuadrilátero del cuestionario WGT de Wu, basada en Wu y Ma (2005)

Concluyen el estudio afirmando que aunque han identificado el concepto más fácil para los alumnos, así como el más difícil, lo importante es investigar la razón subyacente a dicho resultado. Su interés es investigar por qué los alumnos de Primaria tienen dificultad en identificar las figuras extremadamente obtusas, conjeturando que quizá sea por la escasa aparición en los libros de texto.

El test diseñando WGT, no solo consta de las 25 cuestiones que se han planteado para estudiar la visualización de los alumnos de Primaria, sino que lo forman también otros ítems para analizar el segundo nivel de Van Hiele y el tercero (Wu y Ma, 2006).

En el último epígrafe de este capítulo se realiza el comentario de este apartado, así como de los otros.

3.4. La aplicación del modelo de Van Hiele al estudio de la Geometría del espacio.

El desarrollo del modelo de Van Hiele en la Geometría del espacio es la línea de investigación dominante en la profesora Gregoria Guillén de la Universidad de Valencia.

Sus aportaciones fundamentales son la caracterización los descriptores de cada uno de los niveles de Van Hiele en el estudio de la Geometría tridimensional (Guillén, 1996, 1997), la elaboración de actividades según este modelo (Guillén, 1997), el estudio de los errores de comprensión (Guillén, 2000), el desarrollo de las habilidades de razonamiento consideradas en cada nivel (Guillén, 2004), el análisis de la Geometría de tres dimensiones en los libros de texto escolares de Primaria y Secundaria (Guillén, González, y García, 2009).

Otras investigaciones sobre el modelo de Van Hiele en Geometría espacial, que se pueden citar, se deben al profesor Gutiérrez (1992).

3.5. Líneas actuales de investigación sobre el modelo de Van Hiele.

En las primeras décadas de difusión del modelo de Van Hiele, fue objeto de estudio en sí. Hoy día, dicho modelo está aceptado y se considera como marco de referencia.

A nivel internacional, existen diversos aspectos de investigación que se pueden sintetizar en los siguientes temas (Gutiérrez, 1998):

1) Desarrollo de herramientas fiables y validadas para determinar los niveles de razonamiento de los alumnos.

Un problema con el que se encuentran los investigadores, es la escasez de dichos instrumentos. Por eso una línea de investigación consiste en validar tests existentes, o en desarrollar nuevos tests.

2) Caracterización de los niveles de Van Hiele en áreas específicas de la Geometría.

   El modelo se desarrolló inicialmente en el estudio de los polígonos, posteriormente se caracterizaron en el campo de las isometrías y en la Geometría en tres dimensiones.

3) Ampliación del marco teórico de Van Hiele con teorías compatibles tales como la propuesta de "camino cognitivo usual" en la adquisición de conceptos matemáticos, el modelo formado por la terna "definición del concepto, imagen del concepto y elección de ejemplos del mismo", o la taxonomía SOLO.

4) El diseño curricular. Existen precedentes en el currículum soviético de los años 60, el holandés de los años 70 y los estándares curriculares del NCTM. Ejemplos de propuestas curriculares se han citado en epígrafes anteriores.

3.6. Aplicación del modelo de formación del concepto geométrico de Vinner y Hershkowitz en estudiantes de Magisterio.

En el capítulo anterior se ha presentado el modelo teórico de Vinner y Hershkowitz explicativo de los procesos cognitivos que ocurren en los estudiantes al estudiar conceptos geométricos. Los profesores Ángel Gutiérrez y Adela Jaime, de la Universidad de Valencia, se han basado en dicho modelo y en una investigación de los autores mencionados, para realizar un estudio similar en estudiantes de Magisterio (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Además de las investigaciones expuestas anteriormente, Vinner y Hershkowitz estudiaron la comprensión del concepto altura de un triángulo y analizaron si la presencia de la definición formal en el test influía en la respuesta de los sujetos. Llevaron a cabo esta investigación con 189 alumnos de edades comprendidas entre 11 y 14 años, es decir de 6º grado a 8º. Concluyeron que parecía tener influencia y detectaron que se producían algunos errores aunque se presentase la definición, si bien no llegaron a analizar este hecho en profundidad.

Los profesores Ángel Gutiérrez y Adela Jaime aplicaron el test de Vinner y Hershkowitz a 190 estudiantes de Magisterio de la Universidad de Valencia para obtener información sobre los tipos de errores cometidos y sobre los efectos de proporcionar la definición o la enseñanza inmediatamente antes de su aplicación.

- Influencia de la presencia de la definición en el test: Se realizó la prueba en tres grupos y concluyeron que la definición proporcionó a los alumnos una ayuda para mejorar su comprensión del concepto de altura, mejorando su imagen conceptual o permitiéndoles utilizar a la vez ésta y la definición formal proporcionada.

- Influencia de la enseñanza. Un cuarto grupo trabajó durante una hora semanal con Cabri. El tema de los triángulos se dedicó a construir los segmentos y puntos notables de los triángulos y a verificar sus propiedades características. Una de ellas consistió en analizar la posición interior o exterior de los segmentos en función del tipo de triángulo. Los resultados de este grupo son notablemente mayores a los de los otros grupos.

  Es decir, la influencia de la enseñanza previa es mayor que la presencia de la definición en el test.

- Análisis de los errores. El error más frecuente es la confusión entre altura y mediana. Los errores detectados son debidos a que los alumnos tienen unas imágenes conceptuales muy pobres basadas en ejemplos prototípicos, sin considerar las tres alturas de un triángulo, alturas en posición distinta a la vertical, o alturas sobre las prolongaciones de los lados. Y también han llegado a la conclusión de que la causa de los errores está en el desconocimiento de los conceptos básicos que integran el concepto de altura de un triángulo.

3.7. Diseño de un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri aplicado a la enseñanza de la Geometría en la ESO.

En octubre del año 2000 Jesús Murillo Ramón presenta la Tesis dirigida por el Dr. Josep María Fortuny (Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona) titulada “Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO” (Murillo, 2000).

El objetivo planteado es el diseño de dicho entorno interactivo de aprendizaje y el análisis de las interacciones que se producen, con el fin de establecer si éstas influyen de manera significativa en la adquisición personal del conocimiento y en el desarrollo de habilidades.

El espacio donde desarrollaron la investigación fue en la clase del “Taller de Matemáticas” de 4º curso de la ESO en el IES “Batalla de Clavijo” de Logroño, donde el profesor utilizaba como recurso didáctico el programa Cabri. El soporte técnico del entorno interactivo consiste en una red local que comunica todos los ordenadores de la clase y con conexión a la página Web de la Universidad de La Rioja. Cada alumno dispone de una cuenta de correo electrónico con clave de acceso a dicha página en la que se encuentran las actividades con Cabri, y con la que puede acceder al foro así como comunicarse mediante correo electrónico con el tutor y los compañeros.

En la Tesis describe el entorno interactivo contextualizado en lo que llama Ecosistema de aprendizaje de Geometría, es decir las relaciones entre cuatro componentes: profesor, alumno, conocimiento y medio. Establece, además, doce indicadores para evaluar la efectividad de las interacciones (el estado en el que se encontraba el alumno antes y después de la interacción). Realiza un análisis detallado con cinco alumnos.

Las aportaciones en cuanto a los objetivos planteados son:

1. El establecimiento de una red electrónica como medio de instrucción.
2. El diseño de actividades con Cabri que han despertado en los alumnos el interés por la Geometría.
3. Las interacciones que se producen influyen de manera significativa en la adquisición personal del conocimiento y en el desarrollo de habilidades.

Valorando la calidad de dichas actividades, lo cual supone un material excelente, resulta ilustrativo el análisis de casos que se lleva a cabo con un grupo de alumnos.

Los criterios de selección de los cinco alumnos de la clase han sido:

- Que hayan participado de forma regular en el fórum.
- Que sean representativos de los diversos niveles de la clase.

El valor de las conclusiones está ligado a la evaluación cualitativa que se realiza y al tipo de cuestionarios y calidad del seguimiento establecido. En este sentido hay que decir que el autor expone detalladamente el seguimiento realizado, evalúa cada uno de los aspectos del entorno interactivo y recaba también información de los propios alumnos mediante un cuestionario.

Aunque el autor no menciona los niveles de conocimiento de Van Hiele sin embargo, sin mencionarlo, sí está en la línea de los conceptos figurales de Fischbein (1993).

> *"Otro aspecto a tener en cuenta es el de considerar la Geometría como ciencia del espacio, que supone centrar los aspectos geométricos en el análisis figural de los objetos que configuran el espacio y el de la geometría como visualización, que es el que nos permite visualizar formas, figuras, conceptos, etc. La configuración figural expresa la imagen de la forma que tenemos en la mente a diferencia de la representación gráfica que es un modelo arbitrario de expresar esta imagen en un soporte físico de la forma, de los objetos que organizan el espacio"* (Murillo, 2000, pág. 50).

3. 8. La integración de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas en la ESO y los Bachilleratos: El Proyecto Infoymate.

Un trabajo de notable calidad y rigor científico es el proyecto del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Madrid y de la Dirección General de Ordenación Académica de la Comunidad de Madrid "Formación e Investigación sobre el uso de las TIC en Matemáticas para la ESO y los Bachilleratos" que se encuentra en la dirección www.infoymate.es (Arias, Maza, Sáenz de Castro, García, y Cebeira, 2005).

Primero se desarrolló un proyecto piloto en el curso 2001/02. Durante el curso 2002/03 se desarrolló en 19 centros con 55 profesores y 1822 alumnos. En el curso 2003/04 se generalizó a 68 centros con 214 profesores y 5421 alumnos.

Este proyecto está en diferentes fases de desarrollo en las siguientes comunidades autónomas: Madrid, Castilla y León, Andalucía, Castilla la Mancha, Asturias, Aragón y Extremadura.

Con este proyecto pretenden *"evaluar la aportación que supone la incorporación de las TIC al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la ESO y en los Bachilleratos"* (Arias, Maza y otros, 2005, pág. 1).

Esta investigación sigue una metodología cuantitativa y se basa en un diseño experimental. Aborda un tema relevante y controvertido dentro de la educación matemática, la utilización de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas, que cuenta con seguidores y detractores; si bien es cierto que considerando las razones de ambas propuestas, se puede llegar a un punto de encuentro que exponen en el siguiente decálogo de buenas prácticas:

1. *"Elegirás una teoría para que te guíe en la práctica.*
2. *Sacarás partido de las potencialidades del medio informático.*
3. *Combinarás las tareas informáticas con las no informáticas.*
4. *Utilizarás el ordenador partiendo de aprendizajes específicos.*
5. *Introducirás el ordenador en el área.*
6. *Harás trabajar a los alumnos en grupo.*
7. *No dejarás que el ordenador te sustituya.*
8. *Enunciarás con claridad los objetivos curriculares.*
9. *Formarás a los profesores antes de que enseñen a los alumnos.*
10. *Nunca olvidarás que el ordenador es una máquina".*

(Arias, Maza y otros, págs. 35-37)

Según las palabras de los autores el objetivo de la investigación es "*construir y evaluar un buen ejemplo de integración curricular de la herramienta informática en la enseñanza de las Matemáticas en la ESO y los Bachilleratos*" (Arias, Maza y otros, 2005, pág. 43).

La investigación se desarrolló en dos fases. Primero se diseñó la enseñanza en sus aspectos conceptuales y prácticos. La segunda fase fue la experimentación de la propuesta que se llevó a cabo con un grupo experimental y un grupo de control y con un diseño de post-test, para evaluar la experiencia.

Una de las hipótesis de investigación es que esta metodología apoyada en los asistentes matemáticos mejora el aprendizaje de los alumnos. Además conjeturaban que esta mejora es independiente del nivel educativo del alumno.

Para contrastar esta hipótesis se estableció un diseño experimental clásico con dos grupos, uno experimental y otro de control. Como variable se tomó la metodología de enseñanza (experimental y tradicional respectivamente) y como variable dependiente el rendimiento.

Ambos grupos realizaron la misma prueba tradicional. Además el grupo experimental realizó una prueba utilizando el ordenador; la evaluación de este grupo suma un 20% de la prueba con el ordenador y un 80% de la prueba tradicional.

Los resultados indican que el rendimiento global es significativamente superior en el grupo experimental. La calificación media del grupo experimental es 24,39% superior al grupo de control. Por grupos también fue significativamente superior (con distintos porcentajes según los cursos).

El trabajo expuesto en la presente Tesis enlaza con esta línea de investigación, considerando además, el modelo de Van Hiele.

3.9. Discusión, análisis, comentarios críticos.

Como puede observarse por la cronología de las citas, el grupo de investigadores de Valencia formado por los profesores Ángel Gutiérrez, Adela Jaime y Gregoria Guillén, además del profesor Josep María Fortuny, enlaza inmediatamente con las primeras y principales investigaciones sobre el modelo de Van Hiele, lo cual los define como pioneros de la investigación sobre dicho modelo en España.

En esta Tesis se han considerado, de este grupo (Jaime, 1993), el análisis de las respuestas, para analizar las preguntas abiertas del cuestionario que se ha diseñado.

De la propuesta curricular de Corberán y otros (1994), se tuvieron en cuenta los objetivos relacionados con el aprendizaje geométrico (conocer los elementos de un polígono, conocer los distintos tipos de triángulos, cuadriláteros, y nombrarlos adecuadamente, usar adecuadamente el vocabulario geométrico básico) en el diseño del cuestionario.

En esta propuesta curricular afirman que no existe metodología determinada para poner en práctica el modelo de Van Hiele y que han utilizados los dos componentes, lo cual supone, en primer lugar, determinar el nivel de Van Hiele de los alumnos, que no es el mismo para todos los de la clase. En la presente Tesis se ha optado por partir del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y sus errores, y teniendo en cuenta el currículum de Matemáticas y los estándares curriculares, diseñar las unidades didácticas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Además este grupo ha investigado también con el modelo de formación del concepto geométrico de Vinner y Hershkowitz. Se ha mostrado que el test de Hershkowitz (1987) tiene una errata en el dibujo, subsanada en Gutiérrez (1996).

En la siguiente imagen se muestra a la izquierda el test de Hershkowitz y a la derecha el de Gutiérrez. Puede observarse que la figura ii corresponde con la 2, la iv con 4, x con 10 y xi con 11. En el gráfico de la izquierda los triángulos son rectángulos, pero en los de la derecha no lo son.

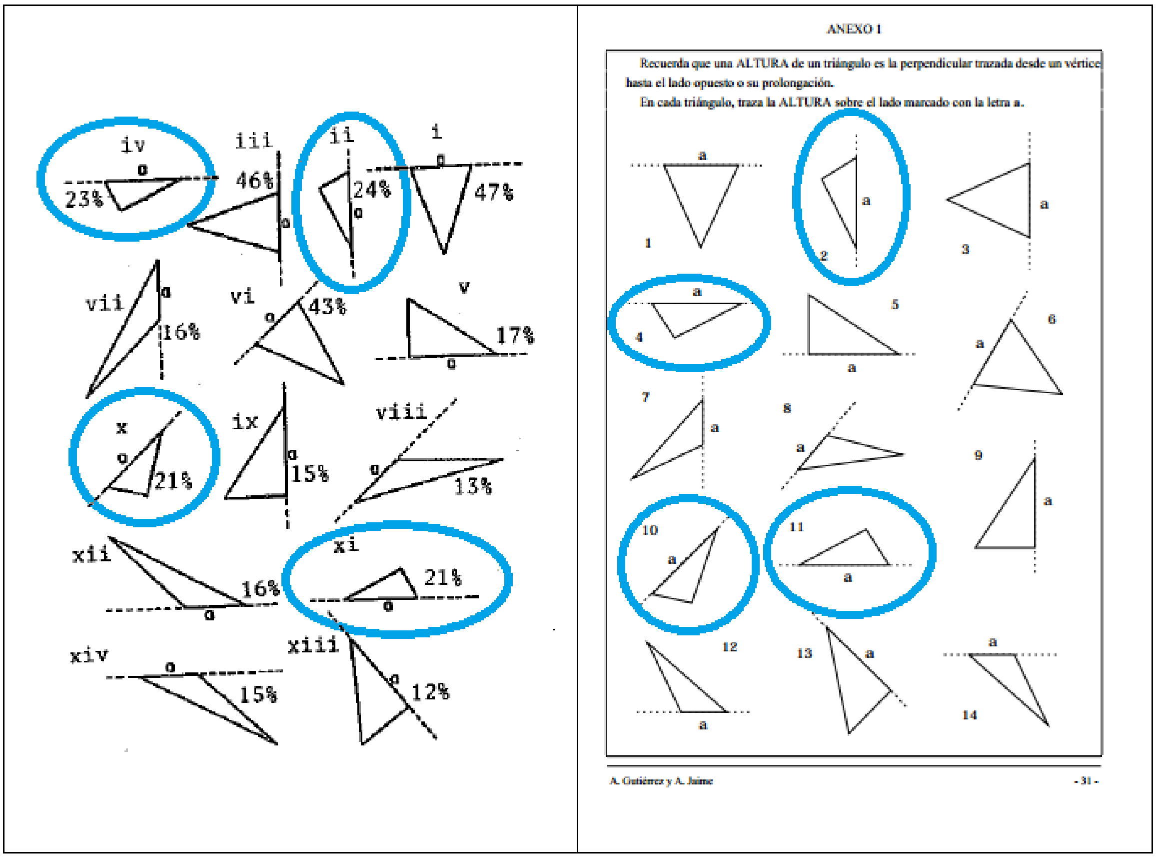


Ilustración 29. Comparación del test de Hershkowitz (1987) y de Gutiérrez (1996) sobre las alturas de un triángulo

Corroboran también que el problema no está solo en los distractores de orientación sino en el fenómeno del prototipo y en el desconocimiento de los subconceptos de un concepto.

Además del test de Jaime (1993), en este capítulo se he presentado otro instrumento diseñado, el test WGT (Wu y Ma, 2005, 2006), Es un test escrito que se compone de cuestiones de elección múltiple. Resulta un test válido y fiable de difusión internacional, que no ha sufrido las críticas de las que fue objeto el de Usiskin.

En la búsqueda bibliográfica no se ha podido acceder a dicho test completo, lo cual sería interesante para continuar analizando la investigación.

Lo que no queda claro en la publicación es si dicho cuestionario fue aplicado antes o después de impartir Geometría, por lo que no se puede saber si los resultados mostrados reflejan la situación inicial o la posterior al estudio. Por otra parte, en cuanto a la muestra, resulta un poco amplia ya que abarca seis grados y, lógicamente, los conocimientos de un alumno de seis años no son los mismos que los de once, por lo que la información resulta demasiado general.

En la presente Tesis también se ha diseñado un cuestionario válido y fiable, en el mismo sentido que el mostrado en la investigación (Wu y Ma, 2005) para analizar la visualización de los alumnos de 1º de ESO.

Las investigaciones de Murillo (2000), por un lado, y de Arias y Maza (2005) por otro, suponen un precedente en la incorporación de un software de Geometría Dinámica en el diseño de las unidades didácticas, con distinta amplitud pues en el primer estudio la experiencia se llevó a cabo en un solo Instituto con un diseño de estudio de casos, mientras que en el segundo, se realizó un proyecto con una metodología cuantitativa y un diseño experimental. Ambas propuestas han sido incorporadas, con sus lógicas adaptaciones, a la presente Tesis.

En la revisión bibliográfica de la presente Tesis no se han encontrado investigaciones que propongan el diseño curricular en Geometría partiendo del reconocimiento de conceptos, como es este caso, por lo que este objetivo parece relevante.

Como afirma Lawrie (1997), para enseñar a los alumnos en su nivel de comprensión, primero hay que determinarlo y, para ello, se necesita un instrumento seguro. Analiza los métodos de asignación del nivel de Van Hiele de Mayberry (1981, 1983) y el de Gutiérrez, Jaime y Fortuny (Jaime, 1993) concluyendo que tiene más ventajas aplicar este último. Por una parte, consume mucho tiempo aplicar este instrumento diseñado para determinar el nivel de Van Hiele de los alumnos y, por otra, da una información detallada y precisa de la capacidad del alumno para trabajar en cada uno de los niveles de Van Hiele. Estas dos características, convierten al test de Gutiérrez, Jaime y Fortuny (Jaime, 1993) en un excelente instrumento de investigación, pero no es adecuado para su utilización en el aula.

En la presente Tesis se ha diseñado un cuestionario que permite conocer las imágenes conceptuales de los alumnos y sus errores, para que a partir de ello, se pueda aplicar el aspecto metodológico del modelo de Van Hiele, es decir, las fases de aprendizaje.

Tiene la ventaja de que es fácil de administrar, no lleva mucho tiempo a los alumnos (menos de cincuenta minutos), su corrección es relativamente fácil y proporciona valiosa información a los profesores para enseñar la asignatura.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA.

4.1. Introducción.

La metodología utilizada en esta investigación refleja la concepción que se tiene de la práctica docente. El quehacer del profesor de Matemáticas es un compromiso con la mejora de la educación matemática realizado en el aula. Esto supone en primer lugar, reflexionar, después, investigar y analizar, y finalmente, proponer y actuar de manera permanente, estando estas actividades fuertemente interrelacionadas.

Como se ha comentado en el primer capítulo, el origen de esta Tesis es la detección del reiterado bajo rendimiento de los alumnos de 2º de ESO del Instituto en Geometría en las pruebas externas de la Comunidad de Madrid. La identificación del problema y la reflexión sobre el mismo originó el presente proyecto de trabajo.

En este caso, el planteamiento ha sido mejorar la enseñanza de la Geometría en 1º de ESO aplicando avances metodológicos y aportando un nuevo modelo que integra varios aspectos:

1. El modelo de los niveles de Van Hiele y las fases de aprendizaje.
2. El modelo de formación del concepto geométrico de Vinner y Hershkowitz, relacionado con la teoría de los conceptos figurales de Fischbein, y el modelo de

Duval, las propuestas de utilización de ejemplos y contraejemplos en la enseñanza, la teoría de las reglas intuitivas y las aportaciones sobre los distractores de orientación de varios autores (mencionados en el capítulo 2), lo cual permite, por una parte, detectar los errores de los alumnos y, por otra, predecir y guiar el tipo de razonamiento empleado.

3. La utilización de Cabri como herramienta de aprendizaje y de construcción de la Geometría.

Inicialmente se realizó un análisis tanto de los procesos de aprendizaje de la Geometría, estudiando por una parte, el modelo de los niveles de conocimiento de Van Hiele con sus fases de aprendizaje, el modelo cognitivo "imagen del concepto-definición del concepto" de Vinner y Hershkowitz, la teoría de los conceptos figurales de Fischbein, el modelo cognitivo de Duval, la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos, la teoría de las reglas intuitivas, las aportaciones sobre los distractores de orientación, y por otra parte, también se analizaron las herramientas informáticas en dicho aprendizaje. Después se realizó una indagación del desarrollo actual de estas líneas en España.

Con esto se diseñó el desarrollo metodológico, elaborando unas unidades didácticas de 1º de ESO estructuradas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos en esta materia.

4.2. Justificación.

Como se ha comentado en el Capítulo 1, el origen de este trabajo es el análisis de los resultados de los alumnos del Instituto en las pruebas externas de la Comunidad de Madrid. Los peores resultados eran los de Geometría, para sorpresa de las profesoras del Departamento, pues a priori, es la parte de las Matemáticas más intuitiva y visual. Ahí precisamente radicaba el problema.

En las pruebas de Diagnóstico de 2º de ESO, las medias de las puntuaciones obtenidas por los alumnos del Instituto fueron 5.81, 5.83 y 5.36, siendo los resultados en Geometría 5.244, 5.55 y 4.576 durante los cursos 06/07, 07/08 y 08/09 respectivamente

Esta comprensión media en Geometría inferior a la supuesta, observada durante tres cursos consecutivos, motivó a tratar el problema de la comprensión en Geometría desde 1º de ESO.

Se analizaron las teorías que abordan la comprensión de la Geometría tales como el modelo de Van Hiele con sus fases de aprendizaje (Van Hiele, 1957,1986; Usiskin, 1982; Hoffer, 1983; Mayberry, 1981, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1994; Gutiérrez y Jaime, 1998; Corberán y otros, 1994; Guillén, 1996, 1997, 2000, 2004; Guillén, González y García, 2009; Gutiérrez, 1992, 2001; De La Torre, 2003; Wu y Ma, 2005, 2006) y las que tratan de la formación del concepto geométrico como son el modelo cognitivo "imagen del concepto-definición del concepto" de Vinner y Hershkowitz (Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983; Hershkowitz, 1987, 1989, 1990) , la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993) y el modelo cognitivo de Duval (Duval, 1995, 1998; Jones, 1998; Torregosa y Quesada, 2007). Estas teorías se complementan, como se ejemplifica en esta investigación. También se estudiaron las propuestas de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos (Tsamir, Tirosh y Levenson, 2008), la teoría sobre las reglas intuitivas (Stavy y otros, 2006) y las aportaciones sobre los distractores de orientación (Azcárate, 1997).

Como se ha visto en el Capítulo 2, la idea del modelo de Van Hiele, es muy sencilla, pero el desarrollo de las unidades didácticas según este modelo no es tan fácil como parece.

Se planteó la aplicación de este modelo a la enseñanza de la Geometría utilizando un software de Geometría Dinámica de manera que los alumnos pudieran ellos mismos construir la Geometría y experimentar. La elección del programa, Cabri, estuvo determinada por ser ampliamente conocido por los profesores y disponer de licencia en el Centro.

Se elaboró un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos en Geometría, teniendo en cuenta el currículum y los estándares o conocimientos esenciales de 1º de ESO en la Comunidad de Madrid y las aportaciones del estudio de los proyectos iniciales sobre el modelo de Van Hiele reflejadas en el capítulo del Marco Teórico.

También se diseñaron unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele que fueron validadas y posteriormente aplicadas en un grupo de alumnos. En su diseño se tuvieron en cuenta los precedentes indicados en los capítulos anteriores, en concreto, las propuestas curriculares de aprendizaje de la Geometría basadas en el modelo de Van Hiele (Fuys, Geddes, y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, y otros, 1994) y otras investigaciones (Guillén, 2000; Guillén, González, y García, 2009) que sugirieron la detección de errores y su consideración en el diseño de dichas unidades con el actual currículum.

Estas unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele, elaboradas considerando las imágenes conceptuales de los alumnos, los errores detectados y utilizando un software geométrico para su corrección, fueron validadas por expertos en Geometría y Didáctica de las Matemáticas. El programa de Geometría Dinámica de las unidades se utilizó, además, para amortiguar el efecto de los distractores de orientación en la formación del concepto geométrico, y para fomentar el trabajo de los alumnos con contraejemplos reduciendo también los efectos de los prototipos. Como afirma Duval (1998), el proceso de construcción favorece al proceso de visualización.

Se eligió una muestra de 137 alumnos de 1º de ESO, que respondieron al cuestionario antes y después de estudiar la Geometría y se identificaron los conocimientos y errores de los alumnos en el momento anterior al estudio de la asignatura, los conocimientos que se mantienen, los errores que se corrigen y los que persisten a pesar del estudio de la Geometría. Se midió el rendimiento de los alumnos y se realizó un contraste de hipótesis sobre el aprendizaje en función del género, resultando que no existen diferencias significativas.

Además, se realizó una investigación basada en un diseño metodológico cuasi-experimental. Se eligieron dos grupos semejantes en el pre-test en los que impartía clase la misma profesora. El grupo experimental utilizó las unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y apoyadas en un software de Geometría Dinámica. El grupo de contraste siguió la metodología tradicional, consistente en seguir la secuenciación del libro y utilizar la pizarra y la tiza en las explicaciones. Se aplicó el cuestionario antes y después del estudio de la asignatura y, en este caso, resultaron diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo experimental.

La investigación se enmarca en los primeros niveles de Van Hiele, prestando especial atención a la visualización. Se analizan las imágenes conceptuales de los alumnos, partiendo de la hipótesis de que al comenzar 1º de ESO, en muchos conceptos geométricos, no tienen formado el concepto figural, poseen imágenes no informadas por el concepto, afectadas por atributos irrelevantes como la orientación en el plano. Con la enseñanza, esta situación conflictiva se resuelve, aunque depende, de manera significativa, de la metodología empleada.

El diseño y la prueba de un modelo de enseñanza de la Geometría en 1º de ESO, supone un programa de mejora de la didáctica de este bloque en Secundaria. Es una propuesta fundamentada metodológicamente pues incluye el soporte teórico, el práctico y la evaluación (incluso la anticipación a los posibles errores).

En las páginas de esta Tesis se transmite que la filosofía del modelo de Van Hiele supera la escuela piagetiana y se apuesta por la difusión y la incorporación de este modelo al quehacer educativo.

4.3. Objetivos de la investigación.

En este epígrafe se expone la finalidad de la Tesis y se presenta la secuenciación de objetivos generales y específicos planteados.

4.3.1. Finalidad.

La finalidad de la Tesis es la implementación curricular del modelo de Van Hiele en el currículum de 1º de ESO y la comprobación experimental de su eficacia.

Es decir, se trata de probar que la transición al pensamiento formal en Geometría se realiza de manera más efectiva teniendo en cuenta el modelo de Van Hiele, apoyado por el modelo de formación del concepto geométrico de Vinner y Hershkowitz, la teoría de los conceptos figurales de Fischbein, la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos, la teoría de las reglas intuitivas, las consideraciones sobre los distractores de orientación y usando el software informático Cabri.

Esto supone:

1. Diseñar un modelo de enseñanza de la Geometría en 1º de ESO fundamentado en el marco teórico descrito en el punto anterior.
2. Probar la eficacia de dicho modelo.

4.3.2. Objetivos.

La investigación tiene los siguientes objetivos generales:

1. Implementar la modelización teórica de Van Hiele a partir del aprendizaje constructivo a través de Cabri y realizar un proceso de experimentación exhaustivo en entornos reales de aula que permitan obtener resultados descriptivos en este ámbito.
2. Comprobar la eficacia de la enseñanza de la Geometría en primer curso de ESO con este modelo y el uso del software Cabri.
3. Establecer criterios y prescripciones instructivas a partir de la investigación realizada para desarrollar un programa de mejora de la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria basado en el modelo de Van Hiele, en el uso de Cabri y en la detección de errores de comprensión.

Para lograr los objetivos generales, se concretaron objetivos específicos fácilmente medibles:

1. Estudiar el modelo de Van Hiele y las investigaciones realizadas sobre el mismo.
2. Estudiar las teorías sobre la formación del concepto geométrico basadas en la visualización de Vinner y Hershkowitz, los conceptos figurales de Fischbein, el modelo cognitivo de Duval, la teoría de las reglas intuitivas, la propuesta de

utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos y los distractores de orientación.

3. Proponer un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría.
   - Elaborar el cuestionario y realizar su análisis psicométrico.
   - Determinar su valor como instrumento de medición del rendimiento.
4. Detectar los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO y determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género.
5. Determinar el modo concreto y específico de utilización del software geométrico para la subsanación de dichos errores.
   - Analizar del software de Geometría Dinámica.
   - Experimentar su utilización para la corrección de errores.
6. Desarrollar una instrumentalización curricular del modelo de Van Hiele en la didáctica de la Geometría de 1º de ESO. En concreto, elaborar unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
   - Proponer un desarrollo de las unidades didácticas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
   - Experimentar las unidades didácticas elaboradas a partir del modelo de Van Hiele y el software de Geometría Dinámica.
7. Determinar la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele.

8. Realizar una investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario, que permita identificar el nivel de razonamiento de los alumnos.

Esta exposición de objetivos muestra el grado de innovación previsto y las aportaciones que se pretenden realizar con la investigación.

4.4. Hipótesis.

Con los objetivos propuestos se plantean las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1: El rendimiento de los alumnos en Geometría mejora si se establece una docencia basada en el conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y en la detección de errores, desarrollada con una metodología diseñada según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, y apoyada en un software de Geometría Dinámica.

Hipótesis 2: El rendimiento de los alumnos en Geometría no depende del género.

Hipótesis 3: A pesar del estudio de la asignatura, los alumnos mantienen errores en la visualización y reconocimiento de objetos geométricos desde Segundo Ciclo de Primaria, lo cual supone que el diseño curricular o la metodología empleada no son las adecuadas.

4.5. Diseño de la investigación.

En la investigación se han diseñado dos instrumentos, un cuestionario de medición del rendimiento en Geometría y unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

Ambos instrumentos han sido aplicados y se han analizado sus resultados permitiendo obtener conclusiones.

Este proceso es el que se expone detalladamente en los siguientes subepígrafes.

4.5.1. Fases del estudio y enfoque metodológico.

La investigación se ha desarrollado en varias fases:

a. Primera fase (teórica):

   Se realizaron consultas bibliográficas de fuentes para el desarrollo del estado del tema. Además se llevó a cabo un análisis del software existente en Geometría.

b. Segunda fase (metodológica):

   Esta etapa se ha desarrollado en varios apartados.

   - Diseño de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos en Geometría.
   - Análisis psicométrico de los resultados.
   - Elaboración de la segunda versión del cuestionario.
   - Aplicación previa a la docencia.
   - Análisis psicométrico de los resultados.
   - Detección de errores.

c. Tercera fase (metodológica):

   - Desarrollo y validación de las unidades didácticas según las fases del modelo de Van Hiele.
   - Aplicación del cuestionario después de la instrucción.

d. Cuarta fase (metodológica): Análisis cuantitativo y cualitativo.

- Sobre una muestra grande se realizó una encuesta que permitió analizar inicialmente los conceptos que poseen los alumnos para confirmar los tipos de errores intuitivos.
- Sobre esta muestra se seleccionó un grupo experimental y un grupo de contraste y se analizaron las diferencias con SPSS.
- Se realizó una investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario.

Esta exposición de la secuenciación de fases y enfoque metodológico se esquematiza gráficamente a continuación:

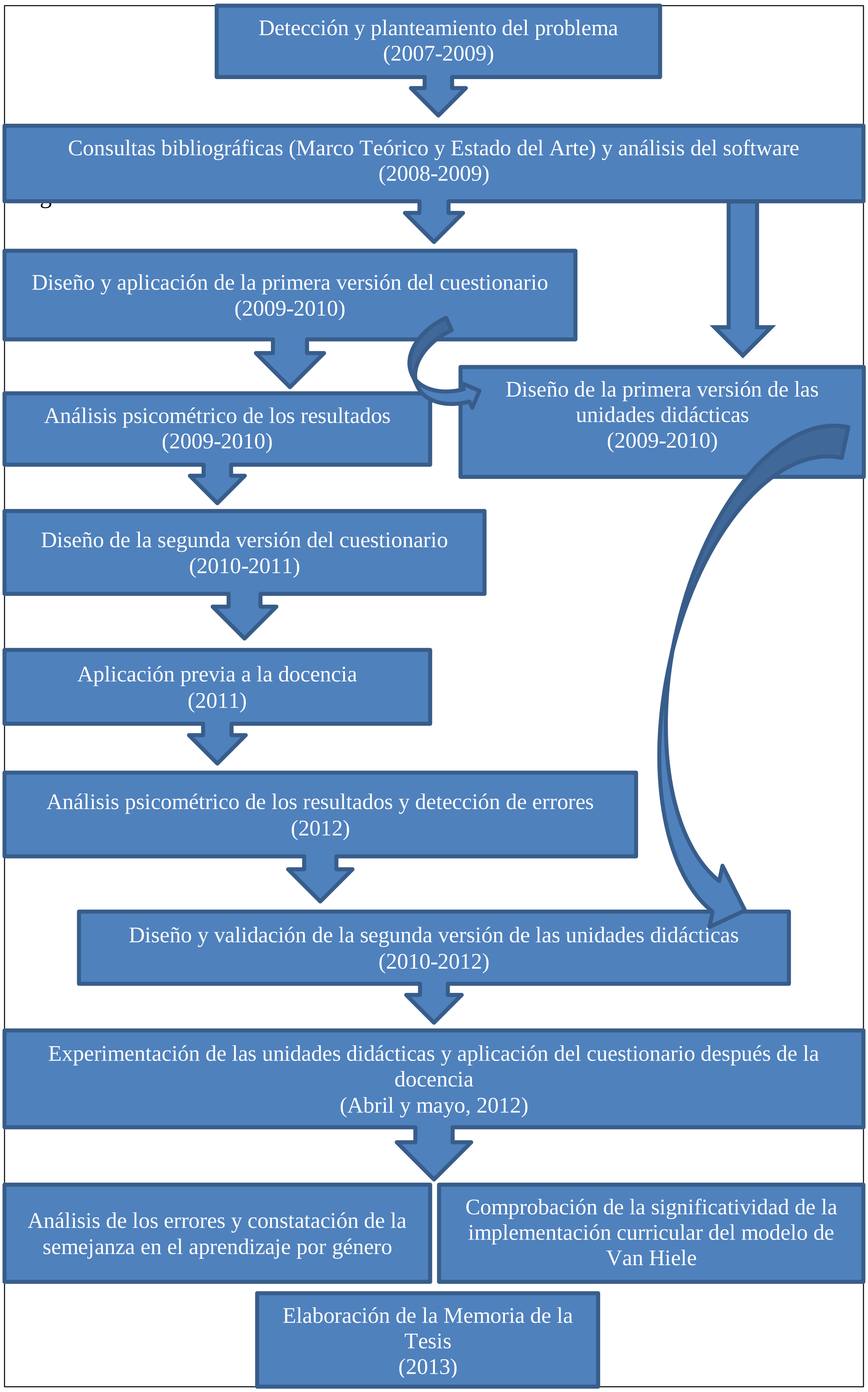


Ilustración 30. Fases del estudio y enfoque metodológico de la Tesis

4.5.2. Variables.

Los contrastes se realizaron en función de las siguientes variables:

a) Variables personales del alumno: Género.

Se trata de contrastar si el modelo propuesto es más efectivo en los chicos o en las chicas, o no depende de esta variable.

Se utilizó esta variable porque la mayoría de los estudios la relacionan con el rendimiento en Matemáticas. En los estudios citados en el capítulo 2 (Usiskin, 1982; Senk y Usiskin, 1983) obtuvieron que no hay diferencias significativas por razón de género en el aprendizaje de Geometría.

b) Variables escolares del alumno: Pertenencia al grupo experimental o de contraste según el modelo de instrucción (con la misma profesora).

Se trata de contrastar si el modelo es más eficaz en un curso o en otro, o no hay diferencia significativa.

La variable contrastada, en ambos casos, fue el aprendizaje.

4.5.3. Diseño metodológico.

La investigación consta de una primera parte teórica que consiste en el estudio y análisis del Marco Teórico y del Estado del Arte, que comprende los dos primeros capítulos de esta Tesis, y una segunda parte metodológica, constituida por los siguientes capítulos.

La parte metodológica, a su vez, se divide en dos investigaciones simultáneas. Para ello, se elaboró un cuestionario para medir los conocimientos y los errores de comprensión que tienen los alumnos al iniciar la Educación Secundaria Obligatoria, su aprendizaje y comprobar la eficacia del modelo de Van Hiele. En su diseño se tuvieron en cuenta las otras teorías mencionadas. La primera aplicación y el análisis psicométrico de los resultados, proporcionaron una segunda versión válida y fiable para el estudio. La aplicación de la versión mejorada del cuestionario, con 48 ítems, es la utilizada para la consecución de los objetivos de la Tesis.

La primera parte de la investigación consistió en analizar los resultados de los alumnos a los que se les suministró el cuestionario antes y después de estudiar la Geometría. Se analizaron, por una parte, los conocimientos y los errores que mostraban los alumnos en el momento anterior al estudio de la asignatura y, por otra, los conocimientos que se mantienen, los errores que persisten a pesar de estudiar la Geometría, y los que se corrigen con su estudio. Se midió el rendimiento de los alumnos y se realizó un contraste de hipótesis sobre el aprendizaje en función del género, resultando que no existen diferencias significativas.

La segunda parte de la investigación está basada en un diseño metodológico cuasi-experimental. Se eligieron dos grupos semejantes en el pre-test en los que impartía docencia la misma profesora. El grupo experimental utilizó unas unidades didácticas elaboradas para la investigación, basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y apoyadas en el software de Geometría Dinámica Cabri. El grupo de contraste[3] siguió la metodología tradicional. Se aplicó el cuestionario a ambos grupos antes y después del estudio de la asignatura y, en este caso, resultaron diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo experimental.

4.5.4. Muestra.

Durante el curso 2009/10 se elaboró la primera versión del cuestionario que fue aplicada a una muestra de 177 alumnos de 1º de ESO de dos Institutos. Se eligió el

[3] Denominación recomendada por la A.P.A. en caso de asignación no aleatoria.

propio Instituto y otro más para completar el tamaño necesario de la muestra. A partir del análisis psicométrico de estos resultados, se elaboró una segunda versión que se aplicó en diciembre de 2011 a 151 alumnos de 1º de ESO de dos Institutos. Nuevamente se realizó el análisis psicométrico de los resultados y esta fue la versión que se consideró definitiva para la investigación.

INSTITUTO	Nº ALUMNOS	CHICAS	CHICOS	NC
IES Joaquín Araújo. Fuenlabrada	81	41	40	0
IES Dolores Ibarruri. Fuenlabrada	96	49	45	2
	177	90	85	2

Tabla 16.Muestra de la primera versión del cuestionario

INSTITUTO	Nº ALUMNOS	CHICAS	CHICOS	NC
IES Joaquín Araújo. Fuenlabrada	111	55	56	0
IES Alfonso Moreno. Brunete	40	18	22	0
	151	73	78	0

Tabla 17. Muestra de la segunda versión del cuestionario

La muestra de alumnos que respondieron al cuestionario antes y después de estudiar la Geometría fue de 137 alumnos, durante el curso 2011/12. Esta es la muestra utilizada en la Tesis.

INSTITUTO	Nº ALUMNOS	CHICAS	CHICOS	NC
IES Joaquín Araújo. Fuenlabrada	103	53	50	0
IES Alfonso Moreno. Brunete	34	15	19	0
	137	68	69	0

Tabla 18. Muestra de alumnos que respondieron al pre-test y post-test en la segunda versión del cuestionario

4.5.5. Instrumentos.

Los instrumentos que se diseñaron y utilizaron para llevar a cabo la investigación han sido:

- Cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos en Geometría (Anexo 7).
- Unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele (Anexo 19).

4.6. Implementación de la investigación.

La presente Tesis consta de dos objetivos teóricos, cinco metodológicos y uno mixto, en parte teórico y en parte metodológico.

El primer objetivo teórico, *Estudiar el modelo de Van Hiele y las investigaciones realizadas sobre el mismo*, se ha desarrollado en los capítulos 2 y 3.

El segundo, *Estudiar las teorías sobre la formación del concepto geométrico basadas en la visualización de Vinner y Hershkowitz, los conceptos figurales de Fischbein, el modelo cognitivo de Duval, la teoría de las reglas intuitivas, la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos y los distractores de orientación*, también ha sido desarrollado en el capítulo 2.

El objetivo que es en parte teórico y en parte metodológico consiste en *Determinar el modo concreto y específico de utilización del software geométrico para la subsanación de dichos errores* (a los que se refiere en el objetivo metodológico 2).

La parte teórica, *Analizar el software de Geometría Dinámica*, ha sido realizada en el capítulo 2.

La parte metodológica, *Experimentar su utilización para la corrección de errores*, se desarrolla junto con la implementación de las unidades didácticas en el objetivo metodológico 3.

Los objetivos metodológicos se exponen en el siguiente subepígrafe.

4.6.1. Objetivos metodológicos.

Las propuestas curriculares de aprendizaje de la Geometría basadas en el modelo de Van Hiele que se encontraron (Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán y otros, 1994), y otras investigaciones que utilizaban el modelo de Van Hiele de manera alternativa, utilizando la taxonomía SOLO (Huerta, 1999) o bien a partir de ideas erróneas (Guillén, 2000) se consideraron de gran importancia y aportaron la idea de la detección de errores como parte de la fase de indagación del modelo de Van Hiele, aspecto que permitió adaptar el marco teórico a la realidad de las aulas en las que se desarrolló el estudio.

Se comenzó con la elaboración de un cuestionario a modo de fase de indagación del modelo de Van Hiele de la Geometría del curso, teniendo en cuenta los distractores de orientación ya mencionados en los capítulos 2 y 3. Como siempre que se investiga en Matemáticas con alumnos, se planteó la cuestión de realizar un contraste de hipótesis sobre la comprensión en Geometría por razón de género. La utilización del programa de Geometría Dinámica fue consecuencia del análisis de los errores.

La investigación está planteada con cinco objetivos metodológicos:

1. Proponer un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría.
    - Elaborar el cuestionario y realizar el análisis psicométrico de los resultados.
    - Determinar su valor como instrumento de medición del rendimiento.
2. Detectar los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO. Determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje entre chicos y chicas.

3. Desarrollar una instrumentalización curricular del modelo de Van Hiele en la didáctica de la Geometría de 1º de ESO. En concreto, elaborar unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.
    - Proponer un desarrollo de unidades didácticas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y un software de Geometría Dinámica para la corrección de errores.
    - Experimentar las unidades didácticas elaboradas a partir del modelo de Van Hiele y del software de Geometría Dinámica.
4. Determinar la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele.

    (Experimentación de las unidades didácticas elaboradas a partir de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y un software de Geometría Dinámica).
5. Realizar una investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario, que permita identificar el nivel de razonamiento de los alumnos.

4.6.2. Desarrollo metodológico de los objetivos.

Se expone la metodología empleada en cada uno de los objetivos de la investigación.

4.6.2.1. Metodología para la consecución del primer objetivo (Proponer un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría).

Se diseñó un cuestionario teniendo en cuenta el currículum de 1º de ESO y los estándares o conocimientos esenciales establecidos para la Comunidad de Madrid desde Segundo Ciclo de Primaria hasta 1º de ESO, basado en los dos primeros niveles de Van

Hiele, para analizar la visualización de los alumnos, es decir, indagar en sus imágenes conceptuales partiendo de la hipótesis de que al comenzar el curso no tienen formado el concepto figural y conocen solo imágenes no informadas por el concepto, afectadas por atributos irrelevantes como la orientación.

En la elaboración de dicho cuestionario, se tuvieron en cuenta los precedentes de instrumentos diseñados, tanto entrevistas como cuestionarios, como los de Usiskin (1982), Burger y Shaughnessy (1986), Fuys, Geddes y Tischler (1988), Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), Jaime (1993), Mayberry (1981, 1983), Wu y Ma (2005) y las observaciones que sobre ellos se han realizado Crowley (1990), Teppo (1991), Usiskin y Senk (1990), Wilson (1990), Lawrie (1997).

Dichas observaciones han sido comentadas han sido en detalle en los capítulos 2 y 3 por lo que no procede realizarlos nuevamente en este epígrafe.

Una primera versión del cuestionario, con 96 ítems, fue aplicada a una muestra de 177 alumnos (Cabello, López y Sánchez, 2010; Cabello, Sánchez y López, 2012 a). Del análisis psicométrico se obtuvo una segunda versión, con 48 ítems (y dos ítems más de respuesta abierta), válida y fiable para la investigación, la cual fue utilizada por 151 alumnos antes de estudiar Geometría y por 144 alumnos después de estudiarla. La muestra que respondió al cuestionario en ambos momentos fue de 137 alumnos y es la que se utilizó para la investigación.

La siguiente tabla muestra el contenido del cuestionario definitivo de 48 ítems.

	CONTENIDO	**ÍTEMS**
1	Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano	1a, 1b, 1c, 1d
2	Reconocimiento de los tipos de ángulos	2a, 2b, 2c, 2d
3	Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos	3a, 3b, 3c
4	Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)	4a, 4b, 4c
5	Clasificación de los triángulos según los lados	5a, 5b, 5c
6	Clasificación de los triángulos según los ángulos	6a, 6b, 6c, 6d
7	Identificación de la mediatriz de un segmento	7
8	Identificación de la bisectriz de un ángulo	8
9	Identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos	9a, 9b, 9c, 9d
10	Identificación de paralelogramos y sus áreas	10a1, 10b1, 10c1, 10a2, 10b2, 10c2
11	Identificación de los elementos de un polígono regular	11a, 11b, 11c, 11d
12	Identificación de los elementos de la circunferencia	12a, 12b, 12c, 12d
13	Reconocimiento de figuras circulares	13a, 13b, 13c, 13d
14	Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura	14
15	Identificación de ternas pitagóricas	15

Tabla 19. Contenido del cuestionario de medición del rendimiento en Geometría

4.6.2.2. Metodología para la consecución del segundo objetivo (Detectar los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO. Determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje entre chicos y chicas).

Se consideró la muestra de 137 alumnos que respondieron al pre-test y al post-test calculándose el porcentaje de aciertos de cada ítem. La interpretación del índice de facilidad según Yela (1987), sugirió la idea de identificar el error en el ítem interpretado como muy difícil, difícil o de dificultad media, estableciendo como límite el 54% de aciertos.

Esta interpretación es subjetiva, pero parece lógico considerar que no hay error en los ítems considerados fáciles o muy fáciles.

Con este criterio, calculando previamente el porcentaje de aciertos en todos los ítems del pre-test y del post-test, se catalogaron todos los ítems en tres grupos.

a. Conocimientos en el pre-test que se mantienen en el post-test.

   Este grupo está determinado por los ítems en los que no hay error ni en pre-test ni en el pos-test.

b. Errores en el pre-test que se corrigen en el post-test.

   Formado por los ítems en los que hay error en el pre-test pero no en el post-test.

c. Errores en el pre-test que persisten en el post-test.

   Constituido por los ítems en los que hay error tanto en el pre-test como en el post-test.

De esta manera quedaban detectados los errores tanto al inicio como al final del estudio de la Geometría y su evolución.

Para realizar el contraste de hipótesis en el aprendizaje por razón de género, se comprobó la semejanza de ambos grupos en el pre-test (prueba t de Student para muestras independientes, α=0,01). Se calculó para cada alumno la puntuación de cambio llamada aprendizaje (nota del post-test – nota del pre-test) y con la prueba t de Student para muestras independientes (Morales, 2011c), resultó que no existen diferencias significativas por razón de género (α=0,01)[4], por lo que se concluye que las chicas y los chicos son semejantes en su aprendizaje de la Geometría.

[4] En la investigación se utilizó el nivel de significación más estricto (0,01) para garantizar el rigor en los resultados.

4.6.2.3. Metodología para la consecución del tercer objetivo (Desarrollar una instrumentalización curricular del modelo de Van Hiele en la didáctica de la Geometría de 1º de ESO. En concreto, elaborar unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y utilizando el software de Geometría Dinámica).

Se elaboraron unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, teniendo en cuenta los errores detectados en el pre-test sobre las imágenes conceptuales de los alumnos y utilizando el software geométrico Cabri como ayuda para la corrección de los mismos.

Estas unidades didácticas son las que aparecen en el Anexo 19.

En el diseño de estas unidades, se tuvieron en cuenta los antecedentes de Fuys, Geddes y Tischler (1988), Jaime (1993) y Corberán, y otros (1994), que habían desarrollado unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele. Se consideró, además, el modo de utilización del software de Geometría Dinámica para la corrección de errores y para la construcción como ayuda de la visualización.

Se realizó una primera versión de las unidades a partir de los resultados obtenidos en la primera versión del cuestionario. Estas unidades fueron validadas por un grupo de profesores expertos en Geometría y en Didáctica de las Matemáticas, obteniendo una segunda versión que es la utilizada en la investigación.

4.6.2.4. Metodología para la consecución del cuarto objetivo (Determinar la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele).

El diseño de la investigación fue cuasi-experimental por razones organizativas. Como los grupos estaban constituidos, se eligieron dos de ellos en los que impartía docencia la misma profesora y se comprobó que eran semejantes, es decir, sin diferencias significativas en el pre-test. Se determinó un grupo de contraste, que siguió una metodología tradicional, y un grupo experimental, que utilizó las unidades didácticas elaboradas.

Concluida la experiencia, ambos grupos respondieron al cuestionario. Se calculó para cada alumno el valor del aprendizaje, y la prueba t de Student para muestras independientes, reflejó diferencias significativas favorables al grupo experimental.

4.6.2.5. Metodología para la consecución del quinto objetivo (Realizar una investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos del grupo experimental a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario, que permita identificar el nivel de razonamiento de los alumnos).

Como se ha indicado en el epígrafe sobre la metodología para la consecución del segundo objetivo, se consideró la muestra de 137 alumnos que respondieron al pre-test y al post-test y se catalogaron todos los ítems del cuestionario en tres grupos, cuantificando los porcentajes de acierto.

Se analizaron las respuestas de los alumnos del grupo experimental en dichos ítems en los que se habían identificado errores no corregidos en el post-test y dos respuestas abiertas que tenía el cuestionario haciendo referencia precisamente a dos ítems en los que existía este tipo de error y se trató de identificar las posibles causas de error o su origen y de determinar el nivel de razonamiento empleado.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS.

Una vez expuesta la metodología empleada para la consecución de cada objetivo, se detallan los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

5.1. Diseño de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría.

Antes de exponer el proceso de elaboración del cuestionario y su análisis psicométrico, se presenta el contenido del mismo relacionado con los estándares o conocimientos esenciales establecidos en la Comunidad de Madrid desde Segundo Ciclo de Primaria hasta 1º de ESO.

En la siguiente tabla se muestra el contenido de cada ítem relacionado con el estándar correspondiente.

CONTENIDO	ESTÁNDARES		
	2º CICLO PRIMARIA	3er CICLO PRIMARIA	1º ESO
1. Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano	74 y 80		68
2. Reconocimiento de los tipos de ángulos	75	88	
3. Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos			73
4. Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)		91	73 y 83
5. Clasificación de los triángulos según los lados		95	81
6. Clasificación de los triángulos según los ángulos		95	82
7. Identificación de la mediatriz de un segmento			74
8. Identificación de la bisectriz de un ángulo			75
9. Identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos		93 y 96	89
10. Identificación de paralelogramos y sus áreas		96 y 108	90 y 93
11. Identificación de los elementos de un polígono regular		92	87 y 88
12. Identificación de los elementos de la circunferencia	86	100	99
13. Reconocimiento de figuras circulares		100	99
14. Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura		108	85
15. Identificación de ternas pitagóricas			

Tabla 20. Contenido del cuestionario de medición del rendimiento en Geometría según los estándares de la Comunidad de Madrid

5.1.1. Primera versión del cuestionario.

Durante el curso 2009/10 se elaboró la primera versión del cuestionario que debía ser aplicada y analizada (Anexo 1). Inicialmente constaba de 96 variables (en el análisis psicométrico se eliminaron la mitad y quedó en 48, más dos ítems de respuesta abierta) y se aplicó a una muestra de 177 alumnos de dos Institutos. Después se realizó el estudio psicométrico y el análisis de los resultados (Cabello, López y Sánchez, 2010; Cabello, Sánchez y López, 2012 a).

De acuerdo con Tejedor (1988) uno de los problemas de la Pedagogía es la obtención de métodos adecuados de medida para valorar dimensiones o características de los fenómenos educativos. Siendo conscientes de la complejidad que entraña la construcción de un instrumento que evalúe la adquisición de conceptos geométricos, se optó por el diseño de un cuestionario como instrumento de medida porque permite recoger y cuantificar la información de manera sencilla (Bisquerra, 2009).

Para la redacción de los ítems del cuestionario piloto, se tuvieron en cuenta las especificaciones de Blaxter, Hughes y Tight (2000) y las fases de elaboración indicadas por Spector (1992).

a. Tamaño de la muestra.

En primer lugar procede decir que la muestra utilizada, como suele ser frecuente en estudios de Pedagogía y Psicología, fue incidental pues es la que se tuvo a disposición de la investigación en el momento en que se desarrolló (Pereda, 1987). Se pretendía que la muestra participante de la prueba piloto tuviera características semejantes a las de la muestra de la segunda fase de la investigación.

Para determinar el número de alumnos necesarios para construir y analizar un instrumento de medición, llevar a cabo un análisis de fiabilidad y factorial, se adoptó la síntesis y el criterio del profesor Morales (2011d) asumiendo que la muestra era suficiente. Nunnally (1978) propone al menos cinco sujetos por ítem para hacer bien su análisis y para el análisis factorial recomienda utilizar una muestra diez veces mayor que el número de ítems. Este criterio es compartido por Afifi y Clark (1990). De hecho, es lo más extendido para la realización de un análisis factorial a la hora de establecer la validez de constructo (Argibay, 2006). Otros autores (Guilford, 1954; Kline, 1986,

1994) consideran que es suficiente una muestra menor (dos o tres veces el número de ítems) con tal de que el número de sujetos no sea muy inferior a 200.

La recomendación mínima es utilizar muestras de al menos 150 o 200 sujetos aunque los ítems sean pocos y el número de individuos de la muestra sea al menos el doble del número de variables.

Por tanto, la muestra de 177 alumnos es suficiente para el estudio pues cumple las condiciones requeridas.

INSTITUTO	Nº ALUMNOS	MUJERES	HOMBRES	NC
IES Joaquín Araújo. Fuenlabrada	81	41	40	0
IES Dolores Ibarruri. Fuenlabrada	96	49	45	2
	177	90	85	2

Tabla 21. Muestra de la primera versión del cuestionario

b. Valoración del cuestionario por una comisión de expertos.

Previamente a la aplicación, el cuestionario había sido sometido a la valoración de expertos en Metodología de la Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Después de realizar la prueba, las profesoras aplicadoras actuaron también como grupo de expertos para analizar su contenido aportando observaciones que sirvieron para eliminar algunos ítems (Anexo 2).

La finalidad del grupo de expertos es valorar el grado de adecuación de cada ítem al atributo que se pretende medir (Millman y Greene, 1989). Esta es la vía más usual para apreciar la calidad del contenido, especialmente en ámbitos educativos (Prieto y Muñiz, 2000; Prieto y Delgado, 2010). Tal y como indican Groves, Fowler, Couper, Lepkoski, Singer y Tourangeau (2004), el “experto” es definido a través del propósito del instrumento. Por esta razón se recurrió a un grupo de expertos en los contenidos sobre los que el instrumento versa, con el fin de que evaluaran los ítems, instrucciones y diseño del mismo. Una vez analizado el contenido de los ítems, y en función de las indicaciones del grupo de expertos, se procedió a eliminar algunos de ellos, y a modificar la forma o el contenido de otros. También se procedió al análisis cognitivo de los ítems, para conocer las estrategias que los alumnos utilizarían para responder a los mismos.

Los procedimientos anteriores, por sí solos, no son suficientes (Visser, Krosnick, y Lavrakas, 2000), por lo que en el proceso de validación del instrumento, se realizaron los análisis que se presentan en los siguientes apartados.

c. Índice de facilidad de los ítems para la muestra del estudio.

Se suele denominar “índice de dificultad” a la proporción o porcentaje de aciertos del ítem en la muestra que se utiliza, pero, por coherencia con la fórmula, y siguiendo a varios autores, se decidió llamarlo “índice de facilidad” (Yela, 1987; Lukas, 1998; Muñiz, 2003; Morales, 2011a).

El estudio del índice de facilidad de los ítems, junto con la valoración de expertos, permitió disponer de un cuestionario de 48 ítems claros, bien redactados y con un amplio rango de índices de facilidad que otorgaban al cuestionario una calificación casi de dificultad media, deseable para medir el aprendizaje de los alumnos (Anexo 3).

La siguiente tabla muestra la interpretación de dicho índice según Yela (1987):

DENOMINACIÓN	ÍNDICE DE FACILIDAD
Muy difícil	Entre 0,05 y 0,24
Difícil	Entre 0,25 y 0,44
Dificultad media	Entre 0,45 y 0,54
Fácil	Entre 0,55 y 0,74
Muy fácil	Entre 0,75 y 0,95

Tabla 22. Interpretación del índice de facilidad de un ítem según Yela (1987)

d. Índice de discriminación de los ítems.

Se realizó el estudio del índice de discriminación de los 48 ítems, siguiendo el criterio de los mismos autores, obteniendo que 32 de 48 ítems discriminan satisfactoriamente a los alumnos, lo cual es bastante aceptable en un pre-test (Anexo 4).

e. Estudio de la fiabilidad o consistencia interna.

Con las 48 variables se calculó la fiabilidad (grado de precisión de la medida) de los resultados del cuestionario, es decir, su consistencia interna mediante el alfa de Cronbach, obteniendo un valor de 0,938 (Anexo 5).

Cronbach (1960) afirma que solo aquellos tests que tienen por lo menos un coeficiente de fiabilidad de 0,90 deberían ser usados con propósitos educativos. Nunnally (1978) propone un valor mínimo de 0,70. Webb (1983), revisando los trabajos de otros autores, propone la interpretación del coeficiente de fiabilidad que se muestra en la siguiente tabla.

VALOR DEL COEFICIENTE	SIGNIFICADO
0,80 o menos	Pobre
Entre 0,81 y 0,84	Moderado
Entre 0,85 y 0,90	Normal
Entre 0,91 y 0,93	Bueno
Entre 0,94 y 0,99	Casi perfecto

Tabla 23. Interpretación del coeficiente de fiabilidad según Webb (1983)

De este estudio se concluye que los resultados tienen una fiabilidad muy alta.

Finalmente, conviene advertir que es pertinente calcular el coeficiente de fiabilidad para cada muestra (Morales, 2007), por ello, cada vez que se aplica el cuestionario a una muestra de alumnos, se calcula dicho coeficiente.

f. Validez.

Como explican algunos autores (Lukas, 1998; Muñiz, 2003), con los datos del test se pretende hacer ciertas inferencias que son las que se validan.

Tradicionalmente se define la validez como el grado en que un test mide lo que pretende medir. Esta definición se matiza y precisa en validez de contenido, criterio y constructo.

La validez de contenido está garantizada por el estudio realizado por los jueces y por el análisis exploratorio explicado anteriormente, que han tenido como resultado los datos de 48 variables en 177 alumnos.

La validez de criterio es la más utilizada. Hace referencia a la relación que existe entre las puntuaciones obtenidas en el instrumento y un criterio que ha demostrado lo que el test pretende medir. En esta primera muestra de alumnos no se incluyó, pero en la aplicación de la versión definitiva del cuestionario se tuvo en cuenta, adoptando como criterio la nota obtenida por los alumnos en la primera evaluación. La validez de criterio en ese momento hace sospechar la validez de la primera aplicación.

La validez de constructo es el nivel más importante de validación (Cronbach, 1980, 1982, 1988; Guion, 1977; Messik, 1995; Morales, 2011b; Tenopyr, 1977; Thurstone, 1931, 1947). Consiste en determinar el grado en que la prueba mide el rasgo (constructo) teórico al que se refiere. Se suele realizar un análisis factorial, pues analiza la estructura del constructo que se pretende medir.

Se realizaron dos contrastes para analizar la pertinencia de la aplicación del análisis factorial (García, Gil y Gómez, 2000; Pérez, 2009). El primero es la prueba de esfericidad de Bartlett, que permite contrastar la existencia de correlación entre las variables. Como el *p*-valor obtenido es 0.000, se concluye que existe correlación significativa entre las variables. El segundo, es la medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin, KMO. Valores de KMO por debajo de 0,5 no son aceptables y se consideran los datos inadecuados a un modelo de análisis factorial. Cuanto más cerca estén de 1, mejor es la adecuación. Se considera excelente una adecuación para valores de KMO próximos a 0,9 como es en este caso, en el que resultó KMO=0,840.

Se obtuvieron 13 factores que explican el 73,516% de la varianza. La matriz de componentes rotados, con rotación Varimax con Kaiser, muestra más claramente la estructura (Anexo 6).

Según este estudio se determinaron los factores siguientes:

Factor 1: Clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos.

Factor 2: Identificación de polígonos irregulares, cuadriláteros no paralelogramos y del romboide.

Factor 3: Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos.

Factor 4: Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos).

Factor 5: Reconocimiento de los tipos de ángulos.

Factor 6: Identificación de los elementos de la circunferencia.

Factor 7: Reconocimiento de figuras circulares (difíciles): sector, segmento y trapecio circular.

Factor 8: Determinación del área de un polígono.

Factor 9: Identificación de los elementos de un polígono regular.

Factor 10: Identificación de paralelogramos (fáciles): cuadrado y rectángulo.

Factor 11: Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano.

Factor 12: Identificación de la mediatriz y de la bisectriz.

Factor 13: Reconocimiento de figuras circulares (fáciles): círculo y corona circular.

(No incluye la identificación de las ternas pitagóricas).

Esta estructura clara y lógica es lo que permite afirmar la validez de constructo.

5.1.2. Segunda versión del cuestionario. Aplicación previa al estudio de Geometría.

A partir del estudio del cuestionario anterior se elaboró una segunda versión con los 48 ítems (Anexo 7). En diciembre de 2011 se aplicó a 151 alumnos de 1º de ESO de dos Institutos, siendo la muestra suficiente para el estudio (Morales, 2011d).

INSTITUTO	Nº ALUMNOS	MUJERES	HOMBRES	NC
IES Joaquín Araújo. Fuenlabrada	111	55	56	0
IES Alfonso Moreno. Brunete	40	18	22	0
	151	73	78	0

Tabla 24. Muestra de la segunda versión del cuestionario

El índice de facilidad del cuestionario (IF=0,47) indica una dificultad media en esta muestra (Yela, 1987) (Anexo 8).

Se calculó el alfa de Cronbach obteniendo un valor de 0,951 (Anexo 9), lo cual significa que los resultados tienen una fiabilidad muy alta (Webb, 1983).

La validez de contenido está avalada por el estudio realizado en la primera aplicación del cuestionario.

Tomando como criterio la nota obtenida en la asignatura de Matemáticas en la primera evaluación se obtuvo un coeficiente de correlación de Pearson de 0,604 (N=151, Sig=0,000) lo cual se considera muy aceptable en toda la literatura consultada

(Prieto y Muñiz, 2000; Muñiz, 2005; Bisquerra, 2009) y supone la validez de criterio (Anexo 10).

Se realizaron los dos contrastes pertinentes obteniendo el *p*-valor 0,000 para la prueba de esfericidad de Bartlett y el valor KMO=0,854. El análisis factorial con trece factores, que explican el 76,081% de la varianza, proporcionó una estructura similar a la anterior (Anexo 11).

Factor 1: Clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos.

Determinación del área de un triángulo.

Factor 2: Reconocimiento de figuras circulares.

Factor 3: Identificación de los elementos de un polígono regular y de la circunferencia.

Factor 4: Identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos.

Factor 5: Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos).

Factor 6: Identificación de paralelogramos (cuadrado, rectángulo y romboide).

Factor 7: Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano: secantes y perpendiculares.

Factor 8: Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos.

Factor 9: Reconocimiento de los tipos de ángulos: rectos y llanos.

Factor 10: Reconocimiento de los tipos de ángulos: agudos y obtusos.

Reconocimiento de rectas paralelas.

Factor 11: Identificación de la mediatriz y la bisectriz.

Factor 12: Determinación del área de un polígono.

Factor 13: Identificación de las ternas pitagóricas.

5.1.3. Segunda versión del cuestionario. Aplicación posterior al estudio de Geometría.

La muestra estuvo formada por 144 alumnos. Se obtuvo un valor del alfa de Cronbach de 0,950 (Anexo 12), que indica una fiabilidad muy alta (Webb, 1983).

También se calculó el índice de facilidad, IF= 0,66 (Anexo 13), lo cual significa que el cuestionario resulta fácil después del estudio de la Geometría (Yela, 1987).

5.1.4. Segunda versión del cuestionario. Aplicación anterior y posterior al estudio de Geometría, en la muestra de 137 alumnos.

Esta muestra es la que se utilizó para realizar el análisis de los errores. Tanto en el pre-test, como en el post-test, se obtuvo un alfa de Cronbach de 0,947, que supone una fiabilidad muy alta (Webb, 1983). El índice de facilidad del pre-test fue 0,48 lo que indica una dificultad media (Yela, 1987), y en el post-test, 0,67 lo que significa que el cuestionario resulta fácil (Anexo 14).

El incremento de facilidad ha sido del 39%. Esta diferencia es lo que determina su valor como instrumento de medición del rendimiento.

INSTITUTO	Nº ALUMNOS	MUJERES	HOMBRES	NC
IES Joaquín Araújo. Fuenlabrada	103	53	50	0
IES Alfonso Moreno. Brunete	34	15	19	0
	137	68	69	0

Tabla 25. Muestra de alumnos que respondieron al pre-test y post-test en la segunda versión del cuestionario

5.2. Detección de los errores de comprensión de nuestros alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO. Determinación de que no existen diferencias significativas en el aprendizaje entre chicos y chicas.

Se consideró la muestra de 137 alumnos.

5.2.1. Detección de errores.

Teniendo en cuenta la interpretación del índice de facilidad de Yela (1987), se adoptó el criterio de considerar que hay error cuando el ítem es muy difícil, difícil o de dificultad media, pues no parece lógico ni coherente hablar de error en un ítem fácil o muy fácil.

La siguiente tabla sintetiza la detección del error en cada uno de los ítems en el pre-test y en el post-test.

CONTENIDO	% ACIERTOS PRE-TEST	PRE-TEST	% ACIERTOS POST-TEST	POST-TEST
Reconocimiento de rectas secantes (1a)	46,7	Error	70,1	
Reconocimiento de rectas paralelas (1b)	95,6		97,8	
Reconocimiento de rectas perpendiculares giradas (1c)	43,8	Error	43,1	Error
Reconocimiento de rectas perpendiculares (1d)	50,4	Error	70,8	
Reconocimiento de un ángulo agudo (2a)	96,4		97,8	
Reconocimiento de un ángulo obtuso (2b)	97,8		97,1	
Reconocimiento de un ángulo llano (2c)	90,5		96,4	
Reconocimiento de un ángulo recto (2d)	92,0		97,8	
Reconocimiento de ángulos suplementarios (3a)	21,9	Error	60,6	
Reconocimiento de ángulos consecutivos (3b)	38,7	Error	74,5	
Reconocimiento de ángulos complementarios (3c)	43,8	Error	62,0	
Determinación de un ángulo por semejanza de triángulos (4a)	53,5	Error	68,6	
Determinación de un ángulo por semejanza de triángulos (4b)	46,0	Error	70,1	
Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos. (4c)	17,5	Error	40,1	Error
Clasificación de triángulos según sus lados: escaleno girado (5a)	52,6	Error	62,8	
Clasificación de triángulos según sus lados: equilátero girado (5b)	59,1		69,3	

CONTENIDO	% ACIERTOS PRE-TEST	PRE-TEST	% ACIERTOS POST-TEST	POST-TEST
Clasificación de triángulos según sus lados: isósceles girado (5c)	59,9		74,5	
Clasificación de triángulos según sus ángulos: rectángulo girado (6a)	27,0	Error	56,2	
Clasificación de triángulos según sus ángulos: acutángulo girado (6b)	29,9	Error	59,9	
Clasificación de triángulos según sus ángulos: obtusángulo girado (6c)	38,7	Error	78,8	
Clasificación de triángulos según sus ángulos: acutángulo girado (6d)	29,9	Error	60,6	
Identificación de la mediatriz de un segmento (7)	87,6		89,1	
Identificación de la bisectriz de un ángulo (8)	85,4		86,9	
Identificación de un pentágono irregular (9a)	19,0	Error	50,4	Error
Identificación de un trapecio isósceles girado (9b)	19,7	Error	51,8	Error
Identificación de un trapecio rectángulo girado (9c)	14,6	Error	27,7	Error
Identificación de un trapezoide (9d)	23,4	Error	34,3	Error
Identificación de un cuadrado girado (10a1)	67,2		88,3	
Identificación de un rectángulo girado (10b1)	88,3		94,2	
Identificación de un romboide (10c1)	39,4	Error	68,6	
Área del cuadrado girado (10a2)	46,0	Error	81,8	
Área del rectángulo girado (10b2)	46,7	Error	74,5	
Área del romboide (10c2)	19,7	Error	46,0	Error
Elementos de un polígono regular: identificación de la apotema (11a)	0,0	Error	40,9	Error
Elementos de un polígono regular: identificación del lado (11b)	53,3	Error	77,4	
Elementos de un polígono regular: identificación del radio (11c)	19,0	Error	39,4	Error
Elementos de un polígono regular: identificación del centro (11d)	46,7	Error	69,3	
Elementos de la circunferencia: identificación del centro (12a)	54,0	Error	69,3	
Elementos de la circunferencia: identificación del diámetro (12b)	62,8		67,9	

CONTENIDO	% ACIERTOS PRE-TEST	PRE-TEST	% ACIERTOS POST-TEST	POST-TEST
Elementos de la circunferencia: identificación de una cuerda (12c)	29,9	Error	54,0	Error
Elementos de la circunferencia: identificación del radio (12d)	67,2		77,4	
Figuras circulares: identificación de un círculo (13a)	85,4		94,9	
Figuras circulares: identificación de un sector circular (13b)	38,0	Error	40,9	Error
Figuras circulares: identificación de un segmento circular (13c)	30,7	Error	48,9	Error
Figuras circulares: identificación de una corona circular (13d)	81,0		90,5	
Figuras circulares: identificación de un trapecio circular (13e)	27,0	Error	40,9	Error
Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura	34,3	Error	76,6	
Identificación de ternas pitagóricas	2,9	Error	24,1	Error

Tabla 26. Errores en el pre-test y en el post-test

Con estos resultados, se estableció la evolución de la comprensión en Geometría, en tres apartados.

a. Conocimientos en el pre-test que se mantienen en el post-test.

- Reconocimiento de rectas paralelas.
- Reconocimiento de tipos de ángulos: agudo, obtuso, llano, recto.
- Clasificación de los triángulos según los lados: equilátero e isósceles.
- Identificación de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo.
- Identificación del cuadrado y del rectángulo.
- Identificación de elementos de la circunferencia: diámetro y radio.
- Reconocimiento de figuras circulares: círculo y corona circular.

b. Errores en el pre-test que se corrigen en el post-test.

- Reconocimiento de rectas secantes y perpendiculares.

- Reconocimiento de ángulos suplementarios, consecutivos y complementarios.
- Determinación de un ángulo por semejanza de triángulos.
- Clasificación de los triángulos según los lados: escaleno.
- Clasificación de los triángulos según sus ángulos.
- Identificación del romboide.
- Identificación del área del cuadrado y del rectángulo.
- Identificación de los elementos de un polígono regular: lado y centro.
- Identificación de los elementos de la circunferencia: centro.
- Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura.

c. Errores en el pre-test que persisten en el post-test.

- Reconocimiento de rectas perpendiculares giradas.
- Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos.
- Identificación de un pentágono irregular, trapecios y trapezoide.
- Identificación del área del romboide.
- Identificación de los elementos de un polígono regular: apotema y radio.
- Identificación de los elementos de la circunferencia: cuerda.
- Reconocimiento de figuras circulares: sector, segmento y trapecio circular.
- Identificación de las ternas pitagóricas.

5.2.2. Errores detectados en el pre-test y que persisten en el post-test.

A continuación, por su relevancia en la obtención de conclusiones generales sobre el alumnado, se muestran los errores detectados en el pre-test y que no han sido corregidos en el post-test.

Estos errores se analizan después en el grupo experimental y en el de contraste.

- **Error 1: No reconocer las rectas perpendiculares giradas.**

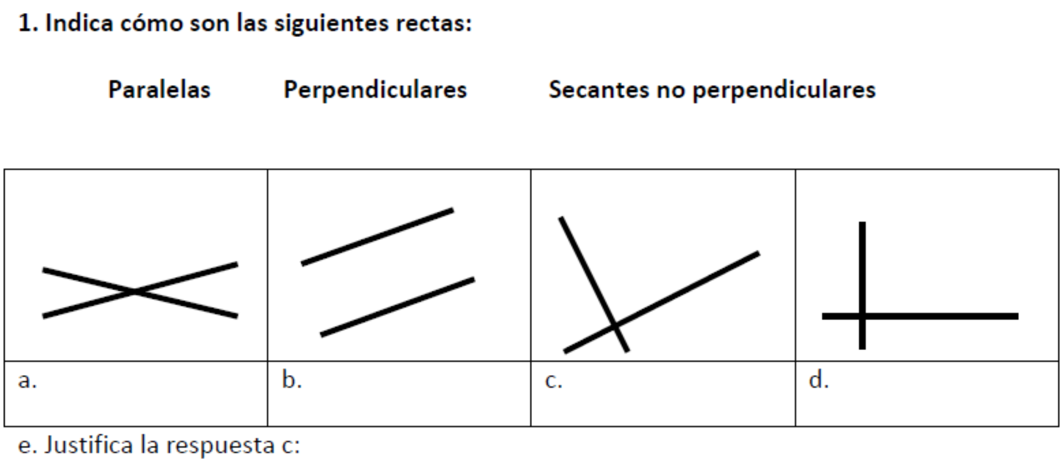


Ilustración 31. Tarea relativa al reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano

Con el término “error” se engloba, en este análisis, tanto la no respuesta (ns/nc), como el error propiamente dicho, lo cual incluye las contestaciones no precisas por ser demasiado generales y no corresponder al enunciado, y otras respuestas que inventan los alumnos.

Más de la mitad de los alumnos no reconoce las rectas perpendiculares giradas antes de estudiar la Geometría. De hecho, en el pre-test el porcentaje de aciertos es 43,8%. Después del estudio de la asignatura, siguen sin reconocerlo y el porcentaje incluso disminuye ligeramente al 43,1%.

Rectas perpendiculares giradas (ítem 1c)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	43,8	43,1
Errores (%)	56,2	56,9

Tabla 27. Aciertos y errores en el ítem "Rectas perpendiculares giradas" (1c)

Error en el ítem 1c	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	16,1	12,4
Error propiamente dicho (%)	40,1	44,5
	56,2	56,9

Tabla 28. Error en el ítem "Rectas perpendiculares giradas" (1c)

Analizando las respuestas erróneas del post-test se observa que 57 alumnos (41,6%) han respondido “no perpendiculares”, 4 (2,9%) han dado respuestas sin sentido (paralelas, paralelas no secantes, secantes no paralelas) y 17 (12,4%) lo han dejado en blanco.

La tabla muestra las 78 respuestas erróneas de los alumnos con una observación sobre el posible error. De los que dicen “no perpendiculares”, coinciden en porcentaje (2,2%) los que han aprendido los conceptos al revés, tienen el error de orientación o el del punto medio. El 1,5% da justificaciones sin sentido. El 8% da justificaciones correctas que no corresponden a la imagen. Finalmente el 25,5% de los alumnos no justifica la respuesta. El 2,9% da respuestas sin sentido y el 12,4% no responde.

	Cód	1c	1e (Justificación)	Observación del posible error
1	1045	NP	Es exactamente que la d pero inclinada. *(a = perpendicular y d = no perpendicular)*	Conceptos aprendidos al revés
2	1047	NP	Porque forman cuatro ángulos rectos. *(a no contesta y d = secante no perpendicular)*	Conceptos aprendidos al revés
3	10419	NP	Porque es igual que la d pero el dibujo girado. *(a = perpendicular y d = no perpendicular)*	Conceptos aprendidos al revés
4	10511	NP	No son perpendiculares porque para ser perpendiculares necesitan que se crucen por el medio.	Error del punto medio
5	10519	NP	Porque no pasa por el centro del segmento.	Error del punto medio
6	10510	NP	Porque no se cruzan en el medio.	Error del punto medio
7	11710	NP	Porque no está recto.	Error de orientación
8	10512	NP	Son secantes no perpendiculares porque no están rectas.	Error de orientación
9	1056	NP	Porque si dibujas una línea, su perpendicular tiene que estar justamente encima de la otra recta, no inclinada.	Error de orientación
10	1051	NP	Porque si se juntan forman cuatro ángulos rectos. *(a y d bien)*	No tiene sentido
11	1066	NP	Porque no son paralelas.	No tiene sentido
12	1172	NP	No forman un ángulo de 90 grados.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
13	10320	NP	Porque las dos líneas tienen que formar ángulos rectos.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
14	1178	NP	Porque se juntan en un punto *(a y d bien)*	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
15	1015	NP	Porque tienen un mismo punto pero no son perpendiculares ya que no dividen el plano en cuatro partes iguales.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
16	10217	NP	Porque se cortan en un punto y no forman cuatro partes iguales.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen

	Cód	1c	1e (Justificación)	Observación del posible error
17	10319	NP	Porque se cruzan en un punto.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
18	10522	NP	Sus ángulos no forman 90 grados.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
19	10219	NP	Son secantes no perpendiculares porque son secantes pero no son exactamente perpendiculares.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
20	1068	NP	Porque se encuentran en un punto.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
21	11812	NP	Porque se cortan y no son perpendiculares.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
22	11813	NP	Se juntan en un punto diferente formando un ángulo agudo.	Respuesta correcta no correspondiente a la imagen
23	1039	NP		
24	10215	NP		
25	1021	NP		
26	10213	NP		
27	10310	NP		
28	10314	NP		
29	10316	NP		
30	10422	NP		
31	10514	NP		
32	10610	NP		
33	1176	NP		

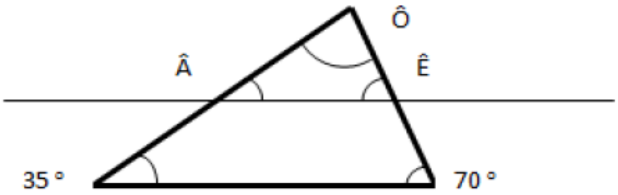
	Cód	1c	1e (Justificación)	Observación del posible error
34	11713	NP		
35	11718	NP		
36	11725	NP		
37	1183	NP		
38	1185	NP		
39	1023	NP		
40	10216	NP		
41	10420	NP		
42	10424	NP		
43	1054	NP		
44	1171	NP		
45	1173	NP		
46	1184	NP		
47	11814	NP		
48	1035	NP		
49	1038	NP		
50	10315	NP		
51	10317	NP		
52	10513	NP		
53	1061	NP		
54	1062	NP		
55	1067	NP		
56	11715	NP		

	Cód	1c	1e (Justificación)	Observación del posible error
57	1187	NP		
58	1014	Paralela.		
59	1031	Paralelas no secantes.		
59	1052	Paralelas.	Porque forman un ángulo de 90 grados.	
60	11726	Secante no paralela.		
61	1065		Porque no se cortan en ningún punto.	
62	10211			
63	1037			
64	10311			
65	10313			
66				
67	10611			
68	1179			
69	1181			
70	1186			
71	1189			
72	1059			
73	1063			
74	1188			
75	1034			
76	1036			
77	10321			
78	1182			

Tabla 29. Respuestas de los alumnos al ítem "Rectas perpendiculares giradas" (1c) en el post-test

Error 2: No saber determinar un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos.

4. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos Â, Ê y Ô.



a. El ángulo Â mide:	b. El ángulo Ê mide:	c. El ángulo Ô mide:

d. Justifica la respuesta c:

Ilustración 32. Tarea relativa a la determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)

En el ítem 4c se pedía a los alumnos hallar el ángulo de un triángulo conociendo los otros dos. El porcentaje de aciertos en el pre-test fue 17,5% y en el post-test 40,1%, siendo los errores 82,5% y 59,9% respectivamente, con lo que se observa una mejoría, pero no la suficiente.

En las siguientes tablas se detallan los aciertos y errores.

Suma de los ángulos de un triángulo (ítem 4c)	**Pre-test**	**Post-test**
Aciertos (%)	17,5	40,1
Errores (%)	82,5	59,9

Tabla 30. Aciertos y errores en el ítem "Suma de los ángulos de un triángulo" (4c)

Error en el ítem 4c	**Pre-test**	**Post-test**
No repuesta (%)	24,8	14,6
Error propiamente dicho (%)	57,7	45,3
	82,5	59,9

Tabla 31.Error en el ítem "Suma de los ángulos de un triángulo" (4c)

Analizando las respuestas en el post-test se observa que de los 62 alumnos (45,3%) que contesta erróneamente, 36 (58%) no justifica sus afirmaciones y 26 (42%) sí lo hacen.

En la siguiente tabla se muestran las respuestas, que son comentadas en el siguiente capítulo.

RESP.	**FREC.**	**JUSTIFICACIONES**
255º	1	Porque si A mide 35 grados y E 70 grados pues faltan 255 grados para llegar a 360 grados.
180º	1	
150º	2	Porque le faltan 150 grados para llegar a 360 grados.
		Porque sumando todos los otros ángulos el resultado es 210. (140+70=210), 210 +150=360 que es el resultado que se obtiene de todos los ángulos.
145º	1	70 – 35= 35, 180-35=145
106º	1	Porque un ángulo obtuso.
105º	9	Tienes que sumar el ángulo A y el E para que te dé el ángulo O
		Porque es la suma del ángulo A y el ángulo E.
		Me da 105 grados porque he sumado 70 más 35.
		Porque el ángulo A más el ángulo E es 105 grados.
		Sumando 35 más 70
		Porque si juntas el ángulo A y el ángulo E te da el ángulo O. 35+70=105.
		Porque la suma de los ángulos de un triángulo tienen que medir 180 grados.
		Es la suma de 35 y 70.
95º	1	Porque es un ángulo obtuso y los ángulos obtusos miden más de 90 grados.
92º	1	

RESP.	FREC.	JUSTIFICACIONES
90º	7	El ángulo O es un ángulo recto y mide 90 grados.
		El O es un ángulo recto que mide 90 grados.
85º	2	Mide 85 grados porque es un poco menor que 90 grados.
80º	11	Porque es el mismo ángulo que el E.
		El ángulo mide 80 grados aproximadamente porque es agudo.
		Como un triángulo tiene tres lados, si esos tres lados se suman da 180 grados y como se sabía lo que medían el ángulo A y el ángulo E, solo había que hacer dos operaciones, una suma y una resta.
70º	8	180-35+75=180-110=70.Un triángulo siempre forma 180 grados.
65º	1	
60º	2	35+25=60
55º	1	
45º	6	Porque la suma de todos los ángulos es de 180 grados en un triángulo, por lo que si un ángulo mide 90 grados, para sumar 180 grados los otros dos tienen que ser iguales.
		70-25=45
40º	1	Porque cuanto más grande sea el ángulo menos grados.
35º	1	
30º	3	
20º	1	Es un ángulo obtuso.
0.9	1	

Tabla 32. Respuestas al ítem "Suma de los ángulos de un triángulo" (4c) y su justificación (4d)

Error 3: No identificar el pentágono irregular, trapecios y trapezoides.

9. Escribe los nombres de los siguientes polígonos:

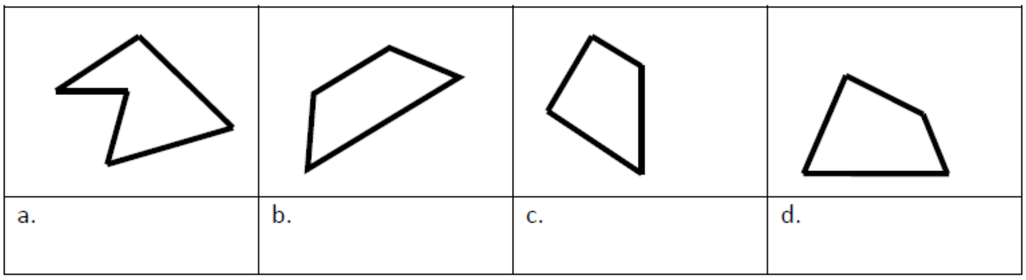


Ilustración 33. Tarea relativa a la identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos

El análisis de este error se realiza por una parte, en el caso del pentágono irregular y, por otra, en el caso de los trapecios y el trapezoide.

En el caso del **pentágono irregular (ítem 9a)**, el porcentaje de aciertos fue 19% en el pre-test y 50,4% en el post-test; con lo que el error fue 81% en el pre-test y 49,6% en el post-test. Se observa que, aunque persiste el error, éste ha disminuido considerablemente.

Pentágono irregular (ítem 9a)	**Pre-test**	**Post-test**
Aciertos (%)	19,0	50,4
Error (%)	81,0	49,6

Tabla 33. Aciertos y errores en el ítem "Pentágono irregular" (9a)

Error en el ítem 9a	**Pre-test**	**Post-test**
No repuesta (%)	65,0	31,4
Error propiamente dicho (%)	16,0	18,2
	81,0	49,6

Tabla 34. Error en el ítem "Pentágono irregular" (9a)

A continuación se muestran las respuestas del post-test. De los errores propiamente dichos (18,2%), lo más frecuente es la confusión con el trapezoide (8%).

RESPUESTA A “PENTÁGONO IRREGULAR”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	43	31,4
no paralelogramo	1	,7
polígono	1	,7
trapezoide	11	8,0
trapezoide irregular	3	2,2
cuadrado	1	,7
polígono regular	2	1,5
hexágono	1	,7
romboide	1	,7
estrellado	1	,7
quintógono	1	,7
hexágono irregular	1	,7
pentágono trapezoide	1	,7
Total	68	49,6

Tabla 35. Respuestas al ítem "Pentágono irregular" (9a)

En el caso del **trapecio isósceles (ítem 9b)** el porcentaje de aciertos en el pre-test fue el 19,7% y en el post-test 51,8%, por lo que los porcentajes de errores fueron 80,3% en el pre-test y 48,1% en el post-test. Por tanto, ha habido mejoría. De todos modos, al ser el prototipo de trapecio, se esperaba un acierto mayor.

Trapecio isósceles (ítem 9b)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	19,7	51,8
Error (%)	80,3	48,1

Tabla 36. Aciertos y errores en el ítem "Trapecio isósceles" (9b)

Error en el ítem 9b	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	54,0	22,6
Error propiamente dicho (%)	26,3	25,5
	80,3	48,1

Tabla 37. Error en el ítem "Trapecio isósceles" (9b)

A continuación se muestran las respuestas del post-test. El error más frecuente es confundirlo con el trapezoide (8%). Se ha considerado error denominarlo cuadrilátero, ya que se pedía el nombre del polígono y no su clasificación.

RESPUESTA A “TRAPECIO ISÓSCELES”	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE**
ns/nc	31	22,6
trapezoide	11	8,0
cuadrángulo de cuatro lados	1	,7
cuadrado	2	1,5
trapecio regular	1	,7
romboide	3	2,2
cuadrilátero	11	8,0
trapecio triangular	1	,7
cuadrilátero irregular	1	,7
rectángulo irregular	1	,7
rectángulo	1	,7
cuadrangular	1	,7
trapezoide isósceles	1	,7
Total	66	48,2

Tabla 38. Respuestas al ítem "Trapecio isósceles" (9b)

El caso del **trapecio rectángulo** (ítem 9c) ya no es el prototipo de trapecio y se nota un mayor porcentaje de no respuesta (33,6%) y de errores (38,7%) respecto del ejemplo anterior.

Trapecio rectángulo (ítem 9c)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	14,6	27,7
Error (%)	85,4	72,3

Tabla 39. Aciertos y errores en el ítem "Trapecio rectángulo" (9c)

Error en el ítem 9c	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	58,4	33,6
Error propiamente dicho (%)	27,0	38,7
	85,4	72,3

Tabla 40. Error en el ítem "Trapecio rectángulo" (9c)

Las respuestas del post-test se muestran en la siguiente tabla. El mayor error, nuevamente, es la confusión con el trapezoide (15,3%).

RESPUESTA A “TRAPECIO RECTÁNGULO”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	46	33,6
trapezoide	21	15,3
romboide	3	2,2
cuadrángulo cuatro lados	1	,7
cuadrado	2	1,5
cuadrilátero	18	13,1
cuadrangular	1	,7
cuadrilátero paralelogramo	1	,7
trapezoide regular	1	,7
trapecio isósceles	1	,7
trapecio equilátero	1	,7
trapecio recto	1	,7
polígono regular	1	,7
trapezoide rectángulo	1	,7
Total	99	72,3

Tabla 41. Respuestas al ítem "Trapecio rectángulo" (9c)

El análisis de las respuestas al ítem de identificación del **trapezoide (ítem 9d)** divide a los alumnos en tres grupos casi iguales: los que aciertan (34,3%), los que cometen algún tipo de error (32,9%) y los que no responden (32,8%), lo que sugiere que se haya contestado aleatoriamente.

Trapezoide (ítem 9d)	**Pre-test**	**Post-test**
Aciertos (%)	23,4	34,3
Error (%)	76,6	65,6

Tabla 42. Aciertos y errores en el ítem "Trapezoide" (9d)

Error en el ítem 9d	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	56,9	32,8
Error propiamente dicho (%)	19,7	32,8
	76,6	65,6

Tabla 43. Error en el ítem "Trapezoide" (9d)

Se muestran las respuestas en la siguiente tabla. El error más frecuente es confundirlo con el trapecio (6,6%).

RESPUESTA A "TRAPEZOIDE"	**FRECUENCIA**	**PORCENTAJE**
ns/nc	45	32,8
trapecio	9	6,6
romboide	2	1,5
cuadrángulo cuatro lados	1	,7
trapecio escaleno	6	4,4
cuadrado	2	1,5
cuadrilátero irregular	3	2,2
trapezoide escaleno	2	1,5
cuadrilátero	15	10,9
trapecio irregular	1	,7
trapecio isósceles	2	1,5
cuadrangular	1	,7
cuadrilátero escaleno	1	,7
Total	90	65,7

Tabla 44. Respuestas al ítem "Trapezoide" (9d)

Error 4: Desconocer el área del romboide

10. Completa la tabla.

Dibujo	Nombre del polígono	Área del polígono
	c1	c2

Ilustración 34. Tarea relativa a la identificación de paralelogramos y sus áreas

En el caso del área del romboide (ítem 10c2), el porcentaje de aciertos pasa del 19,7% en el pre-test al 46,0% en el post-test y el error desciende del 80,3% en el pre-test al 54,0% en el post-test.

Área del romboide (ítem 10c2)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	19,7	46,0
Error (%)	80,3	54,0

Tabla 45. Aciertos y errores en el ítem "Área del romboide" (10c2)

Error en el ítem 10c2	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	51,8	24,8
Error propiamente dicho (%)	28,5	29,2
	80,3	54,0

Tabla 46. Error en el ítem "Área del romboide" (10c2)

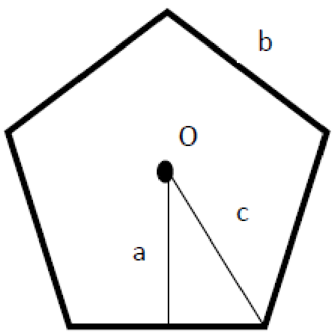
Se muestran, en la siguiente tabla, las respuestas de los alumnos. El mayor error consiste en aplicar la fórmula del triángulo (13,9%).

RESPUESTA A “BASE X ALTURA”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	34	24,8
$\frac{b \cdot h}{2}$	19	13,9
$lado \cdot lado$	8	5,8
$\frac{B \cdot b \cdot h}{2}$	1	,7
$\frac{(B+b) \cdot h}{2}$	3	2,2
$\frac{(D \cdot d) \cdot h}{2}$	1	,7
$\frac{(D \cdot d)}{2}$	3	2,2
$b - a$	1	,7
$\frac{l + l \cdot l + l}{2}$	1	,7
40	1	,7
$A \cdot B \cdot C \cdot D$	1	,7
$l^2 \cdot b^2$	1	,7
Total	74	54,0

Tabla 47. Respuestas al ítem "Área del romboide" (10c2)

Error 5: No identificar la apotema y el radio en un polígono regular.

11. Completa.



En un polígono regular:

a. El segmento **a** se llama.................................

b. El segmento **b** se llama.................................

c. El segmento **c** se llama...................................

d. El punto **O** se llama...

Ilustración 35. Tarea relativa a la identificación de los elementos de un polígono regular

Estos dos errores relativos a los elementos de un polígono regular tienen una frecuencia de aparición muy similar. A continuación se muestra el análisis detallado de las respuestas en cada caso.

No identificar la apotema en un polígono regular (ítem 11a)

La apotema es desconocida para el 21,9% de los alumnos y no es identificada correctamente para el 37,2%. En total, más de la mitad de los alumnos (59,1%) desconoce este elemento, lo cual no deja de ser sorprendente ya que se utiliza en el cálculo de áreas de los polígonos regulares, tema que se aborda en 1º de ESO. Sin embargo, considerando que en el pre-test el porcentaje de aciertos fue 0,0%, es un resultado muy aceptable.

Apotema (ítem 11a)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	0,0	40,9
Error (%)	100,0	59,1

Tabla 48. Aciertos y errores en el ítem "Apotema" (11a)

Error en el ítem 11a	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	66,0	21,9
Error propiamente dicho (%)	71,0	37,2
	100,0	59,1

Tabla 49. Error en el ítem "Apotema" (11a)

Las respuestas en el post-test se muestran en la siguiente tabla. El error más frecuente es llamarla “radio” (21,2%). Sin embargo, en el análisis del radio, éste no es llamado apotema.

RESPUESTA A “APOTEMA”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	30	21,9
radio	29	21,2
altura	5	3,6
diámetro	5	3,6
mediatriz	5	3,6
hipotenusa	3	2,2
arco	1	,7
área	1	,7
radio/altura	2	1,5
Total	81	59,1

Tabla 50. Respuestas al ítem "Apotema" (11a)

No identificar el radio en un polígono regular (ítem 11c)

El radio de un polígono regular es desconocido para más de un tercio de los alumnos (36,5%) y está mal identificado para el 24,1%.

Radio de un polígono regular (ítem 11c)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	19,0	39,4
Error (%)	81,0	60,6

Tabla 51. Aciertos y errores en el ítem "Radio de un polígono regular" (11c)

Error en el ítem 11c	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	58,4	36,5
Error propiamente dicho (%)	22,6	24,1
	81,0	60,6

Tabla 52. Error en el ítem "Radio de un polígono regular" (11c)

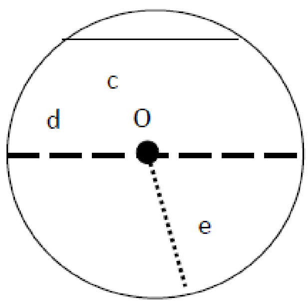
A continuación se muestran las respuestas de los alumnos. El error más frecuente denominarlo diagonal (18%). Solo un 2,2% lo denomina apotema.

RESPUESTA A “RADIO”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	50	36,5
área	1	,7
apotema	3	2,2
perímetro	1	,7
diagonal	18	13,1
vértice	1	,7
cuerda	1	,7
línea	1	,7
diámetro	1	,7
cateto	1	,7
hipotenusa	1	,7
semirrecta	1	,7
altura	1	,7
radio/altura	1	,7
arco	1	,7
Total	83	60,6

Tabla 53. Respuestas al ítem "Radio de un polígono regular" (11c)

Error 6: No identificar la cuerda en una circunferencia.

12. Completa los elementos de la circunferencia:



a. El punto **O** se llama ……………………………….

b. El segmento **d** se llama ……………………………….

c. El segmento **c** se llama ……………………………….

d. El segmento **e** se llama ……………………………….

Ilustración 36. Tarea relativa a la identificación de los elementos de la circunferencia

En el caso de la identificación de la cuerda de una circunferencia (ítem 12c), el error disminuye del 70,0% en el pre-test al 45,9% en el post-test y el acierto pasa del 29,9% al 54,0%.

Cuerda de una circunferencia (ítem 12c)	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	29,9	54,0
Error (%)	70,0	45,9

Tabla 54. Aciertos y errores en el ítem "Cuerda de una circunferencia" (12c)

Se observa un mayor descenso de la no respuesta, pues pasa del 35,0% al 18,2%, que del error, que decrece del 35,0% al 27,7 %.

Error en el ítem 12c	Pre-test	Post-test
No repuesta (%)	35,0	18,2
Error propiamente dicho (%)	35,0	27,7
	70,0	45,9

Tabla 55. Error en el ítem "Cuerda de una circunferencia" (12c)

Las respuestas de la identificación de la cuerda en una circunferencia, son muy variadas. El error más frecuente es denominarla “arco” (18,2%).

RESPUESTA A “CUERDA”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	25	18,2
arco y cuerda	1	,7
arco	25	18,2
circunferencia	1	,7
sector circular	1	,7
segmento	1	,7
radio	1	,7
secante	2	1,5
círculo	1	,7
diagonal	1	,7
recta	2	1,5
área	1	,7
cadena	1	,7
Total	63	45,7

Tabla 56. Respuestas al ítem "Cuerda de una circunferencia" (12c)

Error 7: No reconocer las figuras circulares: sector circular, segmento circular y trapecio circular.

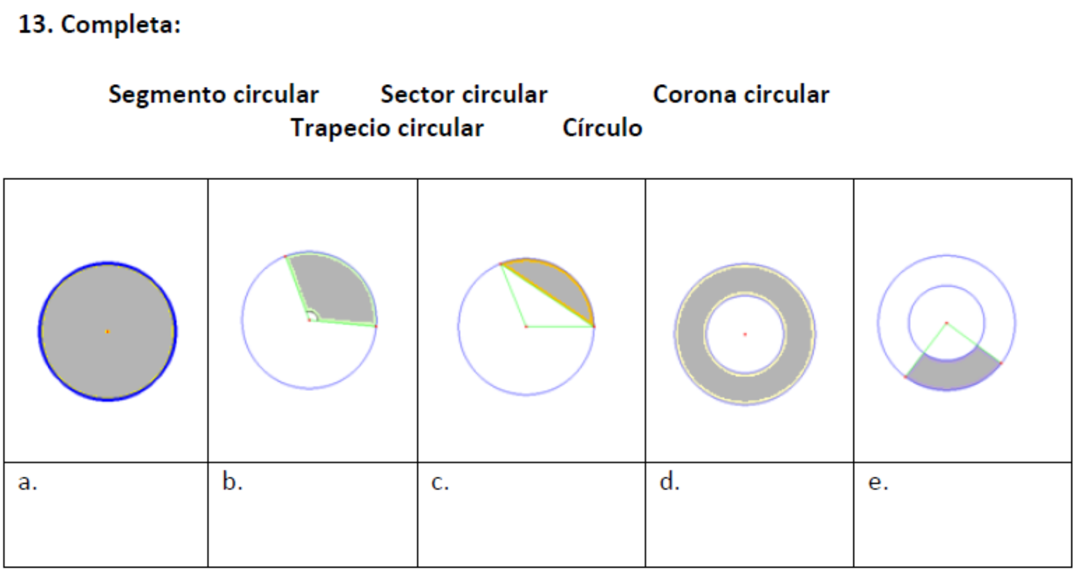


Ilustración 37. Tarea relativa al reconocimiento de figuras circulares

Las figuras circulares conocidas por los alumnos desde Primaria son el círculo y la corona circular. A pesar de que en 1º de ESO se trabaja con el sector, el segmento y el trapecio circular, sin embargo, al terminar el curso, siguen sin ser reconocidas por la mayoría de los alumnos.

Se observa que los porcentajes de error en el pre-test son altos y desiguales; en el post-test, aunque disminuyen un poco siguen siendo altos pero bastante similares.

	Sector circular (13b)		Segmento circular (13c)		Trapecio circular (13e)	
	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
Aciertos (%)	38,0	40,9	30,7	48,9	27,0	40,9
Error (%)	62,0	59,1	69,4	51,1	73,0	59,1

Tabla 57. Aciertos y errores en los ítems" Sector circular" (13b), "Segmento circular" (13c) y "Trapecio circular" (13e)

La no respuesta es baja en el pre-test y más en el post-test, lo cual tiene su explicación pues se proporcionaban los nombres de las figuras circulares. Los porcentajes de error propiamente dicho, sugieren que se ha respondido al azar.

	Error en 13b		Error en 13c		Error en 13e	
	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
No respuesta (%)	14,6	4,4	13,9	5,1	13,1	5,8
Error propiamente dicho (%)	47,4	54,7	55,5	46,0	59,9	53,3
	62,0	59,1	69,4	51,1	73,0	59,1

Tabla 58. Error en los ítems "Sector circular" (13b), "Segmento circular" (13c) y "Trapecio circular" (13e)

A continuación se muestran las respuestas en cada caso.

Al sector circular lo llaman trapecio circular y segmento circular (51,8%).

RESPUESTA A “SECTOR CIRCULAR”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	6	4,4
segmento circular	30	21,9
sector circular	56	40,9
corona circular	3	2,2
trapecio circular	41	29,9
arco	1	,7
Total	137	100,0

Tabla 59. Respuestas al ítem "Sector circular" (13b)

Al segmento circular lo denominan trapecio circular y sector circular (43%).

RESPUESTA A “SEGMENTO CIRCULAR”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	7	5,1
segmento circular	68	49,6
sector circular	28	20,4
corona circular	3	2,2
trapecio circular	31	22,6
Total	137	100,0

Tabla 60. Respuestas al ítem "Segmento circular" (13c)

Al trapecio circular lo llaman sector circular y segmento circular (51,1%).

RESPUESTA A “TRAPECIO CIRCULAR”	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	8	5,8
segmento circular	31	22,6
sector circular	39	28,5
corona circular	3	2,2
trapecio circular	56	40,9
Total	137	100,0

Tabla 61. Respuestas al ítem "Trapecio circular" (13e)

Error 8: No identificar las ternas pitagóricas.

15. Indica cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5 **b. 6, 8, 10** **c. 5, 6, 7**

Ilustración 38. Tarea relativa a la identificación de ternas pitagóricas

En este ítem se pide a los alumnos que identifiquen tres números como las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. La mayoría de los alumnos responde erróneamente pues selecciona solamente una de las tres posibilidades, sin hacer ningún cálculo. El 24,1% de los alumnos, es decir, aproximadamente la cuarta parte, responde correctamente aplicando el teorema de Pitágoras.

RESPUESTA A "(3,4,6) Y (6,8,10)"	FRECUENCIA	PORCENTAJE
ns/nc	18	13,1
error	86	62,8
acierto	33	24,1
Total	137	100,0

Tabla 62. Respuestas al ítem "Identificación de ternas pitagóricas" (15)

5.2.3. Comparación por género.

En primer lugar se comprobó que no existían diferencias significativas en el pre-test por género. Se calificó el test en una escala de 0 a 10. La puntuación media de las chicas fue 4,8163 (N=68, s=1,79433) y la de los chicos 4,8521 (N=69, s=2,01648). Se utilizó la prueba t de Student para muestras independientes, resultando que no hay diferencias significativas en la puntuación del pre-test por razón de género (0,913>0,01), (Anexo 15).

Para cada alumno se calculó el aprendizaje y se compararon las puntuaciones obtenidas por las chicas y los chicos mediante la prueba t de Student. La media del aprendizaje para las chicas fue 1,7707 (N=68, s=1,19464) y para los chicos 1,9323

(N=69, s=1,37545), resultando que no existen diferencias significativas en el aprendizaje (0,464>0,01), (Anexo 16).

5.3. Implementación curricular del modelo de Van Hiele en la Geometría de 1º de ESO.

La implementación curricular ha consistido en la elaboración de las unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele que aparecen en el Anexo 19. En esta exposición se detalla también cómo se ha experimentado la utilización del software geométrico para la corrección de errores.

Se realizó una primera versión de las unidades a partir de los resultados obtenidos en la primera versión del cuestionario. Estas unidades fueron validadas por un grupo de profesores expertos en Geometría y en Didáctica de las Matemáticas, obteniendo una segunda versión que es la utilizada en la investigación. En dichas unidades se han tenido en cuenta los errores detectados en el pre-test sobre las imágenes conceptuales de los alumnos y se ha utilizado un software geométrico.

El resultado son cinco unidades didácticas diseñadas según el currículum de la Comunidad de Madrid y los estándares establecidos desde Segundo Ciclo de Primaria hasta 1º de ESO. A continuación se expone la secuenciación y su diseño.

- **Unidad 1:** ***"Elementos básicos de la Geometría del plano. Relaciones de paralelismo y perpendicularidad".***

  Esta unidad se divide en dos apartados y ambos tienen la misma estructura pues están diseñadas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

  El **primer apartado** *"Punto, recta, semirrecta, segmento, ángulo"*, trata de los elementos básicos de la Geometría del plano.

Se habían detectado dos errores. Por una parte, que los alumnos en general no verbalizan cuando tienen que justificar sus respuestas y, por otra, que se confunden ante objetos afectados por distractores de orientación. Por este motivo, en el desarrollo de la unidad, los objetos no están con la orientación habitual, se pide a los alumnos mover y manipular los objetos en la ventana de trabajo de Cabri y además, verbalizar sus justificaciones.

También se ha tenido en cuenta el estándar 72 de 1º de ESO *"Distinguir entre recta, semirrecta y segmento, y nombrarlos adecuadamente"*. En la primera versión de las unidades didácticas también se detectó el error de que los alumnos no los distinguían. Por eso se ha abordado el tema con más detalle que en el libro de texto habitual.

En la fase de indagación, "Recordando", se presentan dichos elementos con una orientación no estándar, es decir, aparecen inclinados. Se trata de que los alumnos recuerden los nombres de los objetos.

En la fase de orientación dirigida, *"Paso a paso"*, después de una breve introducción, necesaria en este caso para la presentación del programa informático, consiste en la realización guiada de unos ejercicios con Cabri en los que el alumno se familiariza con los objetos del trabajo.

Los ejercicios planteados han sido:

1. Dibuja un punto A.
2. Dibuja una recta r.
3. Dibuja una semirrecta s.
4. Dibuja un segmento AB.

5. Dibuja un ángulo.

Todos estos ejercicios se presentan a los alumnos con una orientación distinta a la habitual.

En la fase de explicitación, *"Ahora tú"*, se presentan a los alumnos actividades semejantes a las de la fase anterior para que afiancen su comprensión. Estas actividades las realizan ellos solos o en parejas pero sin apenas ayuda del profesor.

En la fase de orientación libre, los alumnos encuentran ejercicios de varios pasos. Se trata de que puedan aplicar lo adquirido tanto a contenidos como al lenguaje necesario para exponerlo.

Por ejemplo, se plantea a los alumnos el ejercicio:

Ejercicio 3.

- **Dibuja una semirrecta s que pase por un punto P.**
- **Mueve la semirrecta y verás que obtienes todas las semirrectas que pasan por P.**
- **¿Cuántas podrías dibujar?**

....

Ilustración 39. Ejemplo de ejercicio de la fase de orientación libre del apartado 1 de la unidad 1

La fase de integración, "Repaso y profundización de lo aprendido", consta de actividades de refuerzo y de ampliación.

El planteamiento de los ejercicios depende de los errores detectados. En este caso, como se ha mencionado en los párrafos anteriores, se habían detectado dos: uno era la falta de verbalización (no son capaces de emitir una frase que justifique su respuesta) y el otro era debido a la influencia de los distractores de orientación. Por eso se plantearon las siguientes actividades:

Ejercicio 1. Representa un punto A y cinco rectas que pasen por ese punto.

¿Cuántas rectas pueden pasar por el punto A? Justifica tu respuesta.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

....

....

....

Ilustración 40. Ejercicio 1 de la fase de integración del apartado 1 de la unidad 1

Ejercicio 3. Dibuja segmentos horizontales, verticales y oblicuos. Haz lo mismo con rectas y semirrectas.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

Segmento horizontal	Segmento vertical	Segmento oblicuo
Recta horizontal	Recta vertical	Recta oblicua
Semirrecta horizontal	Semirrecta vertical	Semirrecta oblicua

Ilustración 41. Ejercicio 3 de la fase de integración del apartado 1 de la unidad 1

El **segundo apartado** se titula *“Longitud de un segmento. Amplitud de un ángulo. Rectas paralelas, secantes y perpendiculares”*.

No se había detectado ninguna dificultad en la medición del segmento ni del ángulo. Aparte de los dos errores mencionados anteriormente, se había detectado error en el reconocimiento de las rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas. Esto resulta sorprendente pues es uno de los contenidos esenciales de Segundo Ciclo de Primaria, en concreto es el estándar 80, *“Distinguir las posiciones relativas de rectas en el plano: paralelas, secantes (perpendiculares y oblicuas)”*.

En la fase de indagación, “Recordando”, se pide a los alumnos reconocer las distintas posiciones de las rectas. (La identificación de la medida del segmento y del ángulo es bastante trivial).

En la fase de orientación dirigida, *“Paso a paso”*, después de unos ejercicios para aprender a dibujar con Cabri, segmentos de longitudes determinadas y ángulos de amplitudes dadas, se ofrece una recta en posición no habitual y se enseña a los alumnos a dibujar con Cabri, rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Además se pide que en las rectas perpendiculares midan el ángulo para que comprueben que “aunque estén giradas, el ángulo mide 90º”.

A continuación se muestra un ejercicio dirigido:

Ejercicio 6. Dibuja dos rectas perpendiculares r y s. (Forman un ángulo recto).

- Dibuja una recta r.
- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular".
- Haz clic en la recta r y luego en otro punto por el que quieres que pase la recta s.
- Nómbrala (s).
- Comprueba que el ángulo es de 90 grados: (Marcar el ángulo y Medida de ángulo).

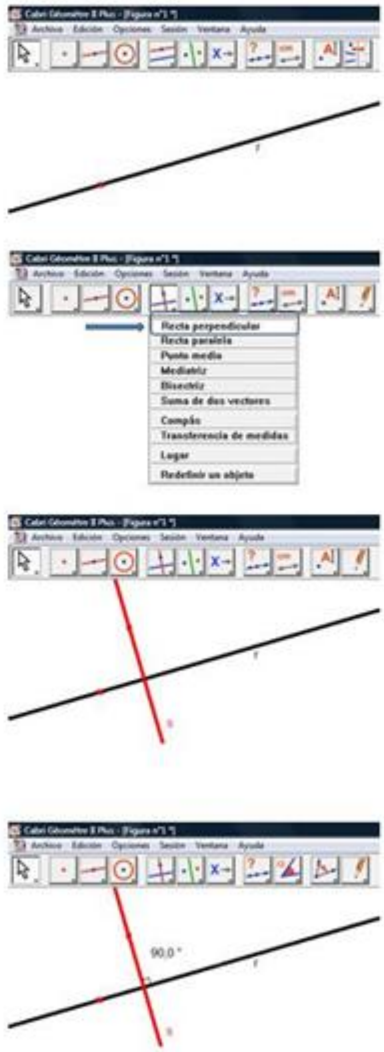


Ilustración 42. Ejemplo de ejercicio de la fase de orientación dirigida del apartado 2 de la unidad 1

En la fase de explicitación, *"Ahora tú"*, se presentan a los alumnos actividades semejantes a las de la fase anterior para que afiancen su comprensión. Se propone un ejercicio nuevo por cada uno resuelto en la fase anterior, de similares características. Estas actividades las realizan ellos solos o en parejas pero sin apenas ayuda del profesor.

En la fase de orientación libre, los alumnos encuentran ejercicios de varios pasos. Se trata de que puedan aplicar lo adquirido tanto a contenidos como al lenguaje necesario para exponerlo y guiar al alumno en la corrección de los errores detectados.

Por ejemplo, en este caso una dificultad está en reconocer rectas secantes y perpendiculares, y otra en verbalizar sus justificaciones, por eso se plantea a los alumnos el ejercicio:

Ejercicio 5.

- **Dibuja una recta r.**
- **Dibuja una recta secante s (que no sea perpendicular a r).**
- **Mide uno de los ángulos que forman las rectas.**
- **Mueve una de las rectas, ¿qué ocurre con el ángulo?**

....

....

Ilustración 43. Ejemplo de ejercicio de la fase de orientación libre del apartado 2 de la unidad 1

La fase de integración, "Repaso y profundización de lo aprendido", consta de actividades de refuerzo y de ampliación. El planteamiento de los ejercicios, como se ha dicho, depende de los errores detectados.

Al finalizar la unidad se presentan unos ejercicios de evaluación para que los alumnos sean conscientes de sus aprendizajes.

- **Unidad 2: *"Estudio de los ángulos".***

Esta unidad se divide en tres apartados y todos se estructuran según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

El **primer apartado** *"Tipos de ángulos"*, no ofrece ninguna dificultad pues no se identificó error en ninguno de los ítems con este contenido, por lo que no se detalla su diseño. Se corresponde con el estándar 75 de Segundo Ciclo de Primaria (*"Comparar ángulos con el ángulo recto y clasificarlos en agudos, rectos, obtusos, llanos, mayores de 180º y completos"*) y con el 88 de Tercer Ciclo de Primaria (*"Clasificar los distintos tipos de ángulos"*).

Sin embargo, en el **segundo apartado** *"Posición relativa de dos ángulos"*, que se corresponde con el estándar 73 de 1º de ESO (*"Identificar parejas de ángulos por su interés en Geometría: opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, alternos internos, alternos externos y correspondientes y conocer sus propiedades"*), se había detectado error, pues los alumnos no reconocen los ángulos consecutivos, suplementarios y complementarios.

En la fase de indagación, "Recordando", se pide a los alumnos reconocer las distintas posiciones de los pares de ángulos.

En la fase de orientación dirigida, *"Paso a paso"*, se guía a los alumnos en el dibujo con Cabri, de ángulos consecutivos, complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice. Se dibujan, además, con una orientación distinta a la habitual para corregir la influencia de los distractores de orientación.

En la fase de explicitación, *"Ahora tú"*, se presentan a los alumnos actividades semejantes a las de la fase anterior para que afiancen su comprensión. Se propone un ejercicio nuevo por cada uno resuelto en la fase anterior, de similares características.

En la fase de orientación libre, los alumnos encuentran ejercicios de varios pasos. Se trata de guiar al alumno en la corrección de los errores detectados. Por eso, en este caso se plantean los ejercicios en sentido contrario a la fase anterior. Es decir, en la fase de explicitación se pedía a los alumnos dibujar dos ángulos que sumaran 90º y se les preguntaba por el nombre; ahora, partiendo de un ángulo recto, y trazando una semirrecta, tienen que comprobar que se forman dos ángulos que son complementarios y además manipular la recta para comprobar que se forman más ángulos complementarios. Lo mismo con los otros pares de ángulos.

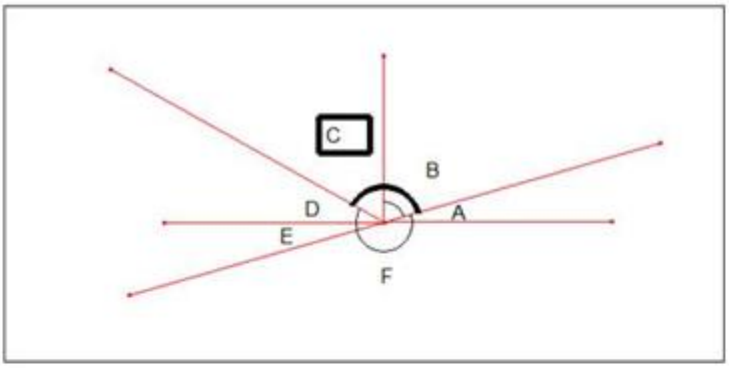
Ejercicio 1.

- **Dibuja un ángulo recto.**
- **Divídelo en dos por una semirrecta.**
- **Mide cada uno de ellos y comprueba sumándolos, que son complementarios. Arrastra la semirrecta y verás que varía la medida de los ángulos y siguen siendo complementarios.**

Ilustración 44. Ejemplo de ejercicio de la fase de orientación libre del apartado 2 de la unidad 2

En la fase de integración, *"Repaso y profundización de lo aprendido"*, el planteamiento de los ejercicios, como se ha dicho, depende de los errores detectados. Por eso, en este caso, se les presenta una figura con seis ángulos y se pide identificar parejas de ángulos.

Ejercicio. En la siguiente figura:



Indica cómo son:

a) A y E ....

b) A y B ....

c) E y F ....

d) A y C ....

Ilustración 45. Ejercicio de la fase de integración del apartado 2 de la unidad 2

El **tercer apartado** *"Operaciones con ángulos"*, no ofrece ninguna dificultad pues no se identificó error en ninguno de los ítems con este contenido, por lo que no se detalla su diseño.

Al finalizar la unidad se presentan unos ejercicios de evaluación para que los alumnos sean conscientes de sus aprendizajes.

- **Unidad 3: *"Triángulos".***

Esta unidad se divide en tres apartados y todos se estructuran según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. El primero es *"Clasificación de los triángulos. Suma de los ángulos de un triángulo"*, el segundo *"Rectas y puntos notables en un triángulo"*, y el tercero, *"Teorema de Pitágoras"*.

En el **primer apartado** *"Clasificación de los triángulos. Suma de los ángulos de un triángulo"*, se habían detectado varios errores. Los alumnos no reconocen el triángulo escaleno ni identifican los triángulos según sus ángulos y no saben aplicar la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo para determinar el valor de un ángulo conociendo los otros dos.

Sorprenden estos errores pues son conocimientos esenciales de Tercer Ciclo de Primaria; de hecho, aparecen recogidos en los estándares 91 *"Descubrir y enunciar cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo y de un cuadrilátero" y* 95 *"Clasificar los triángulos atendiendo a la longitud de los lados y a la amplitud de los ángulos".*

Tiene mucha importancia corregirlos ya que también son conocimientos esenciales de 1º de ESO, que aparecen recogidos en los estándares 81, *"Clasificar los triángulos atendiendo a la igualdad de sus lados o de sus ángulos"*, 82 *"Clasificar los triángulos según las medidas de sus ángulos"* y 83 *"Conocer que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º y utilizar el resultado para resolver problemas geométricos".*

Por este motivo, en la fase de indagación, *"Recordando"*, se plantean dos ejercicios. En el primero se presentan cuatro triángulos y tienen que clasificar cada uno de ellos según los lados y después según los ángulos. En el segundo, simplemente se pregunta si recuerdan cuánto vale la suma de los ángulos de un triángulo.

En la fase de orientación dirigida, *"Paso a paso"*, se enseña a los alumnos a dibujar un triángulo en Cabri, a medir sus ángulos y a comprobar que la suma es 180º. Manipulando el triángulo comprueban que la amplitud de los ángulos varía pero la suma siempre es 180º[5]. Otros ejercicios que se realizan en esta fase es la construcción de los distintos tipos de triángulos y la comprobación de su clasificación con Cabri. Finalmente, se muestra una tabla a los alumnos para que vean que cada triángulo admite dos clasificaciones: tiene un nombre si se miran sus lados y otro si se miran sus ángulos.

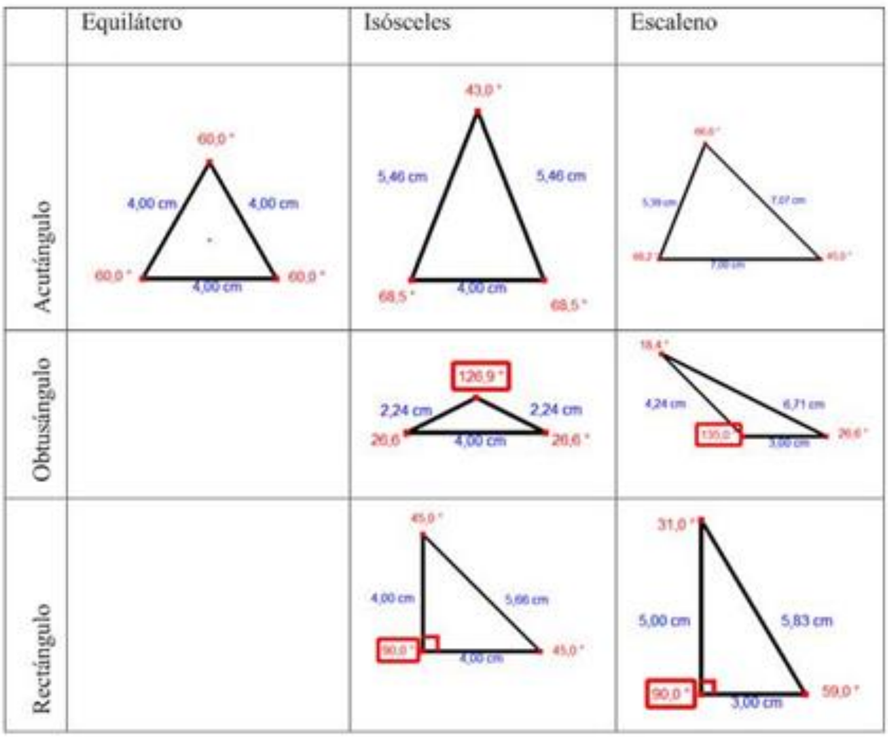


Ilustración 46. Esquema sobre la doble clasificación de los triángulos presentada en la fase de orientación dirigida del apartado 1 de la unidad 3

En la fase de explicitación, *"Ahora tú"*, realizan ejercicios similares a los de la fase anterior.

5 Pareció que con un ejercicio de recordatorio era suficiente pero luego se comprobó que no.

En la siguiente fase, de orientación libre, los alumnos encuentran su modo propio de realizar las tareas. Se trata de que puedan aplicar lo adquirido anteriormente. Se plantean actividades de construcción de triángulos y luego se pide que clasifiquen el triángulo obtenido, según los lados y los ángulos.

En la fase de integración, *"Repaso y profundización de lo aprendido"*, el planteamiento de los ejercicios, como se ha dicho, depende de los errores detectados. Por eso, en este caso, además de los ejercicios de construcción, se plantea un pequeño test para que apliquen el cuadro síntesis de las clasificaciones de los triángulos según los lados y los ángulos.

Ejercicio 3.

- **Dibuja en Cabri un triángulo con dos ángulos de 65º y 70º y el lado común de 3 cm**
- **Clasifícalo según los lados………………………………………………………**
- **Clasifícalo según los ángulos…………………………………………………..**

Ejercicio 4.

- **Dibuja en Cabri un triángulo con los ángulos 35º y 100º y el lado común de 3 cm.**
- **Clasifícalo según los lados………………………………………………………**
- **Clasifícalo según los ángulos…………………………………………………..**

Ilustración 47. Ejemplos de ejercicios de la fase de integración del apartado 1 de la unidad 3

Ejercicio 5.

Completa con verdadero (V) o falso (F):

- **Un triángulo equilátero es siempre acutángulo….**
- **Un triángulo isósceles puede ser acutángulo….**
- **Un triángulo isósceles puede ser obtusángulo….**
- **Un triángulo escaleno puede ser acutángulo….**
- **Un triángulo escaleno puede ser obtusángulo….**

Ilustración 48. Test propuesto en la fase de integración del apartado 1 de la unidad 3

En el **segundo apartado** *"Rectas y puntos notables en un triángulo"*, no se había identificado error en ninguno de los ítems con este contenido, por lo que no se detalla su diseño. El diseño de la fase de integración se realizó a base de problemas.

El **tercer apartado**, *"Teorema de Pitágoras"*, es un tema nuevo para los alumnos de 1º de ESO, sin embargo algunos habían oído hablar de él. En el cuestionario se había presentado un ítem con un planteamiento más aritmético que geométrico, pues se pedía reconocer qué ternas determinaban las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Se había detectado error pues casi nadie lo había respondido correctamente.

La fase de indagación se omitió por ser un tema nuevo.

En la fase de orientación dirigida, *"Paso a paso"*, se realizó una presentación del triángulo rectángulo, sus elementos y el teorema, con una demostración de carácter visual como es la demostración de Perigal. Los ejercicios fueron de dos tipos de planteamiento, aritmético y geométrico.

Ejercicio 1.

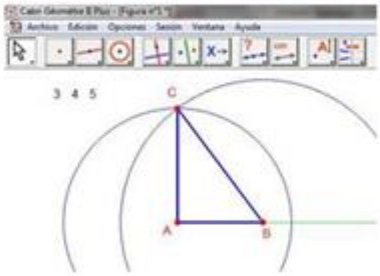
- **Comprueba que los números 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica.**

Tenemos que probar que $a^2 = b^2 + c^2$ siendo a el número mayor, es decir que

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$

Ilustración 49. Ejercicio de tipo aritmético planteado en la fase de orientación dirigida del apartado 3 de la unidad 3

- **Construye el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.**
- Construimos el triángulo de lados 3, 4 y 5 cm. como ya sabemos empezando por el número 3.



- Después oculta lo que no sea el triángulo.
- Para comprobar que es rectángulo, en la barra de herramientas selecciona medida de ángulo y haz clic en C, luego en A y finalmente en B. Verás que el ángulo de vértice A mide 90º.

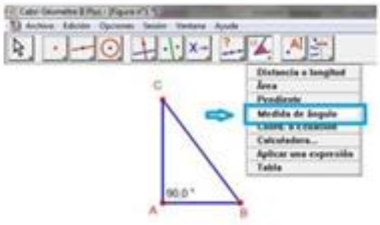


Ilustración 50. Ejercicio de tipo geométrico planteado en la fase de orientación dirigida del apartado 3 de la unidad 3

En la fase de explicitación, "Ahora tú", se plantean ejercicios similares a los de la fase anterior.

Ejercicio 1.

- **Comprueba que los números 5, 12 y 13 forman una terna pitagórica.**

- **Construye el triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 cm.**

Ilustración 51. Ejemplo de ejercicio planteado en la fase de explicitación del apartado 3 de la unidad 3

En la fase de orientación libre se plantean ejercicios para que los alumnos encuentren su manera propia de resolver las tareas. A continuación se presentan dos ejemplos:

Ejercicio 1.

Averigua cuáles de las siguientes ternas de longitudes forman un triángulo rectángulo:

a) 3, 4, 5	**b) 5, 6, 7**
c) 6, 8, 10	**d) 9, 12, 15**

Ejercicio 2.

En un triángulo rectángulo isósceles, calcula la longitud de la hipotenusa si los catetos miden 4 cm.

Ilustración 52. Ejemplos de ejercicios planteados en la fase de orientación libre del apartado 3 de la unidad 3

En la fase de integración, *"Repaso y profundización de lo aprendido"*, se plantean ejercicios para que los alumnos sinteticen los contenidos trabajados[6]. Se plantearon actividades de ampliación y profundización.

La unidad finaliza con unos ejercicios de evaluación de los aprendizajes.

- **Unidad 4: *"Los polígonos y la circunferencia".***

Esta unidad se divide en tres apartados estructurados según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. El primero es *"Los polígonos: los cuadriláteros"*, el segundo *"Los polígonos: elementos de un polígono regular"* y el tercero, *"La circunferencia"*.

[6] A la vista de los resultados del post-test habría sido necesario plantear más actividades de refuerzo.

En estos contenidos se habían detectado varios errores, tales como no identificar un pentágono irregular, el trapecio isósceles, el trapecio rectángulo, el trapezoide y el romboide. También había error en la identificación de los elementos de un polígono regular (apotema, lado, radio y centro) y en los de la circunferencia, en concreto, el centro y la cuerda. De las figuras circulares había error en la identificación del sector circular, segmento circular y trapecio circular.

Algunos de estos contenidos corresponden a los estándares de Primaria y por tanto, resulta sorprendente que haya error al comenzar 1º de ESO.

Entre los estándares de Segundo Ciclo de Primaria se citan el 83 *"Identificar y caracterizar los polígonos regulares de 3, 4 5, 6 y 8 lados"* y 86 *"Reconocer los elementos básicos relacionados con la circunferencia (centro, radio, diámetro, cuerda, arco, etc.)".*

Los estándares que han trabajado en Tercer Ciclo de Primaria son el 92 *"Distinguir los conceptos de lado, vértice, perímetro y área en un polígono"*, 93 *"Identificar y nombrar polígonos atendiendo al número de lados (triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos…"*, 96 *"Nombrar los distintos tipos de cuadriláteros"*, 100 *"Dibujar circunferencias y caracterizar los elementos básicos tanto de la circunferencia como del círculo (radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular)".*

Tiene mucha importancia corregir estos errores porque son conocimientos esenciales de 1º de ESO, que aparecen recogidos en los estándares 87 *"Dominar la terminología básica referente a polígonos en general: lados, vértices, ángulos y diagonales"*, 88 *"Nombrar los elementos de un polígono y el propio polígono, tomando como referencia las letras asignadas a cada uno de sus vértices"*, 89 *"Clasificar los cuadriláteros atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos"*, 90 *"Clasificar los* *paralelogramos y conocer sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales"* y 99 *"Reconocer y nombrar con propiedad partes de la circunferencia y del círculo, como arco y sector circular"*.

En el **primer apartado** de esta unidad es *"Los polígonos: los cuadriláteros"*, teniendo en cuenta los errores mencionados, comienza la fase de indagación, *"Recordando"*, con un ejercicio de identificación de polígonos, para detectar exactamente dónde está el error.

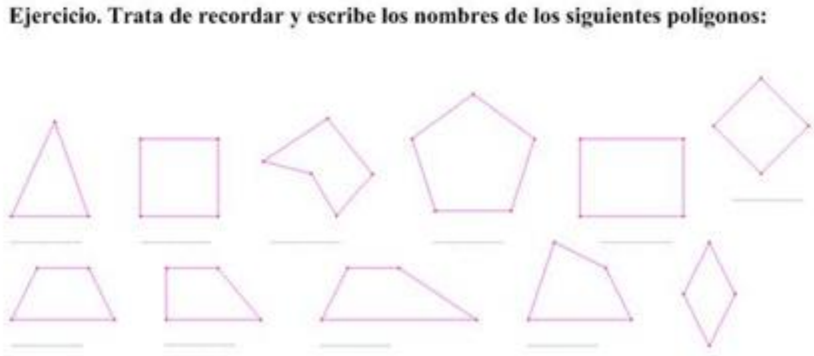
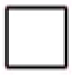
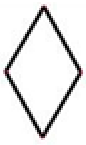
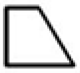
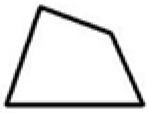


Ilustración 53. Ejercicio de la fase de indagación del apartado 1 de la unidad 4

En la fase de orientación dirigida, "Paso a paso", se empieza desde el principio, con un poco de teoría, definiendo polígono y presentando detalladamente los cuadriláteros mediante un esquema. A continuación, se procede a la construcción con Cabri de todos los cuadriláteros, siendo conscientes de que el desarrollo de la habilidad de la construcción (o del dibujo) redunda en la mejor identificación de la figura.

En la siguiente tabla puedes ver los nombres de los cuadriláteros clasificados por sus lados:

Cuadriláteros	Paralelogramos	lados paralelos dos a dos	Cuadrado	
			Rectángulo	
			Rombo	
			Romboide	
	Trapecios (*)	2 lados paralelos	Trapecio isósceles	
			Trapecio rectángulo	
			Trapecio escaleno	
	Trapezoides	0 lados paralelos	Trapezoide	

(*) Los trapecios se obtienen cortando un triángulo de manera paralela a la base.

Ilustración 54. Esquema de cuadriláteros presentado en la fase de orientación dirigida del apartado 1 de la unidad 4

En la fase de explicitación, "Ahora tú", se proponen ejercicios similares.

Ejercicio 1. Dibuja un cuadrado de lado 5.

Ejercicio 2. Dibuja un rectángulo de lados 4 y 6.

Ejercicio 3. Dibuja un rombo de diagonales 6 y 9.

Ejercicio 4. Dibuja un romboide de lados 6 y 5 y altura 3.

Ejercicio 5. Dibuja un trapecio isósceles de base 6, altura 1 y de lados iguales que midan 2 cm.

Ejercicio 6. Dibuja un trapecio rectángulo de base 6, altura 1 y lado no paralelo a la altura, de 2 cm.

Ejercicio 7. Dibuja un trapecio escaleno de base 7, altura 1 y lados no paralelos de 2 y 4 cm.

Ejercicio 8. Dibuja un trapezoide.

Ilustración 55. Ejercicios de la fase de explicitación del apartado 1 de la unidad 4

La fase de orientación libre[7] consta de dos ejercicios en los que los alumnos tienen que aplicar propiedades y trabajar con las figuras construidas.

Ejercicio 1. En los cuadriláteros del ejercicio anterior, comprueba que los cuatro ángulos suman 360°.

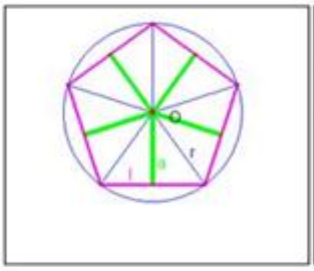
Ejercicio 2. Dibuja un rombo de lado 5 cm. (Realiza aquí los cálculos previos)

Ilustración 56. Ejemplo de ejercicio de la fase de orientación libre del apartado 1 de la unidad 4

Concluye el apartado con la fase de integración en la que nuevamente se pide a los alumnos la identificación de los polígonos. De esta manera pueden ser conscientes de su aprendizaje y, si es necesario, repetir alguno de los ejercicios de las fases anteriores.

En el **segundo apartado**, *"Los polígonos: elementos de un polígono regular"*, la fase de indagación, "Recordando", consiste en un ejercicio de identificación de dichos elementos.

Ejercicio. Trata de recordar cómo se llaman los elementos de un polígono regular y completa:



En un polígono regular:

El punto O se llama: ....

El segmento a se llama: ....

El segmento r se llama: ....

El segmento l se llama: ....

Ilustración 57. Ejercicio de la fase de indagación del apartado 2 de la unidad 4

Como en el apartado anterior, la fase de orientación dirigida "Paso a paso" comienza con un poco de teoría en la que se presentan dichos elementos. Luego se

[7] Analizando posteriormente los resultados, habría sido necesario dedicar esta fase a la construcción de las mismas figuras con una orientación distinta a la habitual.

realizan ejercicios de construcción de polígonos regulares a partir del radio y se miden algunos elementos (lado, apotema y ángulo central)[8].

En la fase de explicitación, "Ahora tú", se plantean ejercicios similares.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un hexágono regular de radio 3 cm.**
- **Mide el lado, la apotema y el ángulo central.**

Ejercicio 2.

- **Dibuja un pentágono regular de 4 cm. de radio.**
- **Mide el lado, la apotema y el ángulo central.**

Ejercicio 3. Calcula el ángulo central en los siguientes polígonos:

- **Octógono regular.**
- **Eneágono regular.**

Ilustración 58. Ejercicios de la fase de explicitación del apartado 2 de la unidad 4

En la fase de orientación libre se plantean ejercicios para que los alumnos encuentren su manera propia de resolver las tareas. En la fase de integración "Repaso y profundización de lo aprendido", se plantearon solo actividades de profundización[9].

Ejercicio 1.

- **¿Cuánto mediría el ángulo central de un polígono regular de 18 lados?**

- **Entonces, ¿podrías dibujarlo?**
- **Mira a ver si Cabri te permite dibujarlo.**
- **¿A qué conclusión llegas sobre la relación de la medida del ángulo central con la posibilidad de dibujar el polígono?**

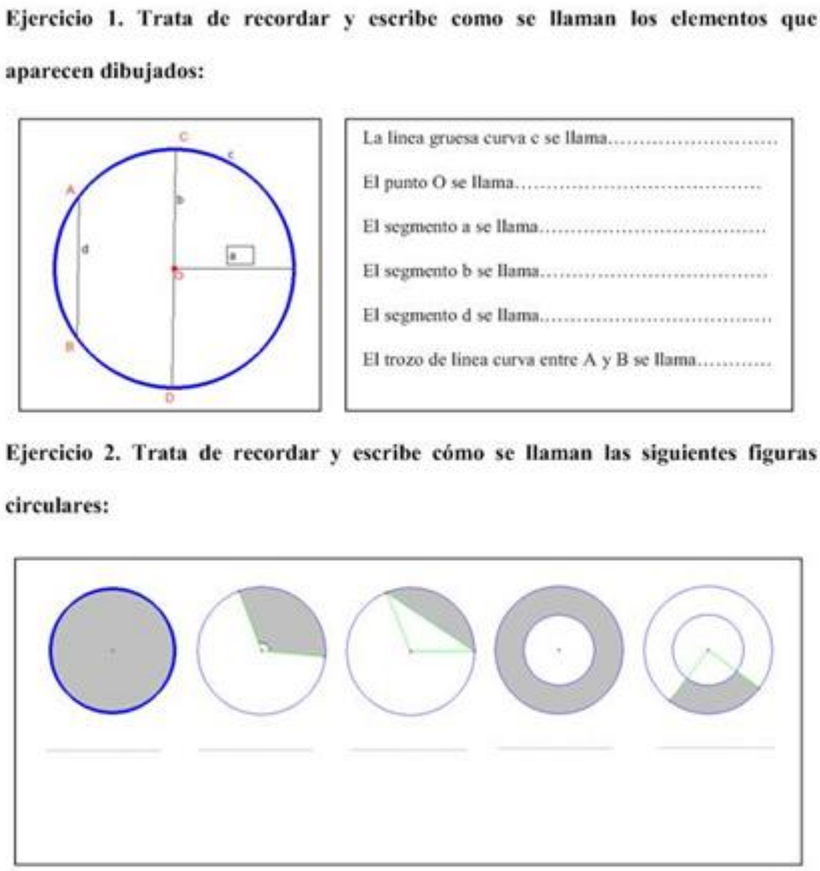
  ....

  ....

Ilustración 59. Ejemplo de ejercicio de la fase de integración del apartado 2 de la unidad 4

[8] También se llegó a la conclusión de que se insistió poco en la identificación del radio en un polígono regular.
[9] Analizando los resultados se vio que habría sido conveniente plantear más actividades de repaso.

El **tercer apartado**, *"La circunferencia"*, empieza con la fase de indagación, *"Recordando"*, en la que se pide a los alumnos que identifiquen los elementos de la circunferencia y las figuras circulares. Algunos los conocen, otros no los han visto; de esta manera son conscientes de lo que tienen que aprender.



Ejercicio 1. Trata de recordar y escribe como se llaman los elementos que aparecen dibujados:

La línea gruesa curva c se llama.............................

El punto O se llama...

El segmento a se llama....................................

El segmento b se llama....................................

El segmento d se llama.....................................

El trozo de línea curva entre A y B se llama............

Ejercicio 2. Trata de recordar y escribe cómo se llaman las siguientes figuras circulares:

Ilustración 60. Ejercicios de la fase de indagación del apartado 3 de la unidad 4

En la fase de orientación dirigida, *"Paso a paso"*, después de un poco de teoría sobre la circunferencia, sus elementos, el círculo y las figuras circulares, se realizan ejercicios de construcción.

En la fase de explicitación, "Ahora tú", se plantean ejercicios similares a los de la fase anterior.

En este caso no se plantearon ejercicios en la fase de orientación libre.

En la fase de integración, "Repaso y profundización de lo aprendido", se repitió el mismo ejercicio de la fase de indagación para que los alumnos fueran conscientes de la consecución de los objetivos del apartado.

Finaliza la unidad con unos ejercicios de evaluación de los aprendizajes.

- **Unidad 5:** ***"Perímetros y áreas".***

Esta unidad se divide en dos apartados estructurados según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. El primero es *"Perímetros y áreas de polígonos"*, el segundo *"Longitud de la circunferencia. Área del círculo"*.

Se había detectado error en el conocimiento de la fórmula del área del cuadrado, rectángulo y romboide y en el cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura.

Sorprende este error pues en uno de los estándares de Tercer Ciclo de Primaria, en concreto el 108 *"Conocer las fórmulas del área del triángulo y del paralelogramo y aplicarlas a figuras de dimensiones dadas"*. Es importante corregir este error ya que en los estándares de 1º de ESO, se contemplan dos referidos a dichos conceptos, el 85 *"Conocer la fórmula del área del triángulo y aplicarla midiendo alturas y lados"* y el 93 *"Conocer y aplicar la fórmula del área de un paralelogramo"*.

En el **primer apartado**, *"Perímetros y áreas de polígonos"*, la fase de indagación "Recordando", comienza con un ejercicio sencillo en el que se pide calcular el perímetro y el área de un cuadrado de lado determinado.

La fase de orientación dirigida, *"Paso a paso"*, comienza con un poco de teoría, presentando las figuras, sus perímetros y áreas y explicando cómo se obtienen las fórmulas. Después se realizan ejercicios de cálculo del perímetro y área de las figuras, utilizando las herramientas de Cabri "Perímetro" y "Área" y también aplicando la fórmula y comprobándolo con la herramienta "Calculadora".

En la fase de explicitación, *"Ahora tú"*, se proponen ejercicios similares a los de la fase anterior.

Ejercicio 1. Calcula el perímetro y el área de un triángulo de lados 4, 5 y 6. (Dibujado en la unidad 3, apartado 2, fase 3, ejercicio 2).

Ejercicio 2. Calcula el perímetro y el área de un cuadrado de 5 cm. de lado. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 1).

Ejercicio 3. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo de lados 4 y 6 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 2).

Ejercicio 4. Calcula el perímetro y el área de un rombo de diagonales 6 y 9 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 3).

Ejercicio 5. Calcula el perímetro y el área de un romboide de lados 6 y 5 cm. y altura 3 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 4).

Ejercicio 6. Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles de base 6 cm., lados iguales de 2 cm. y altura 1 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 5).

Ejercicio 7. Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular de 3 cm. de radio. (Dibujado en la unidad 4, apartado 2, fase 3, ejercicio 1).

Ilustración 61. Ejercicios de la fase de explicitación del apartado 1 de la unidad 5

En la fase de orientación libre, se proponen distintos tipos de ejercicios para que los alumnos encuentren su manera propia de realizar las tareas. Son actividades de múltiples pasos en las que aplicar todo lo adquirido anteriormente, referido tanto a contenidos como al lenguaje necesario para expresarlo.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un triángulo de lados 6, 7 y 8 cm.**
- **Calcula su perímetro y su área teniendo en cuenta distintas alturas.**

  El perímetro es……………………………………………………………………

  El área calculada con la altura sobre el lado de 6 cm es……………………….

  El área calculada con la altura sobre el lado de 7 cm es……………………….

  El área calculada con la altura sobre el lado de 8 cm es……………………….

- **¿Qué relación tienen las áreas obtenidas con las tres alturas?**

  ………………………………………………………………………………………

Ejercicio 2.

- **Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo de base 6 cm, altura 3 cm y lado no paralelo a la altura de 4 cm.**

  (Está dibujado en la Unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 6).

  El perímetro es……………………………………………………………………..

  El área es…………………………………………………………………………..

- **Calcula el perímetro y el área de un trapecio escaleno de base 6 cm, altura 1 cm. y lados no paralelos de 2 y 3 cm.**

  (Está dibujado en la Unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 7).

  El perímetro es……………………………………………………………………..

  El área es…………………………………………………………………………..

- **La fórmula del área, ¿es distinta para cada tipo de trapecio o es igual para todos?**

  ……………………………………………………………………………………

Ilustración 62. Ejercicios de la fase de orientación libre del apartado 1 de la unidad 5

En la fase de integración, *"Repaso y profundización de lo aprendido"*, se proponen ejercicios de refuerzo y otros de ampliación para que sinteticen lo aprendido.

El siguiente apartado no se detalla ya que no se había detectado ningún error y puede consultarse en el Anexo 19.

Finaliza la unidad con unos ejercicios de evaluación de los aprendizajes.

En el siguiente cuadro se muestra el esquema de los errores detectados en cada unidad mediante la aplicación del pre-test y la metodología de corrección seguida en las unidades didácticas.

	ERRORES DETECTADOS	METODOLOGÍA DE CORRECCIÓN
Unidad 1	No identifican los objetos afectados por distractores de orientación.	Se dibujan los objetos con una orientación distinta a la habitual y se pide mover y manipular los objetos en la ventana de trabajo de Cabri.
	No verbalizan cuando se les pide justificar sus respuestas.	Se pide a los alumnos justificar sus respuestas.
	No reconocen rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas.	Se dibuja una recta en posición no habitual y se enseña a los alumnos a dibujar con Cabri, rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Además se pide que en las rectas perpendiculares midan el ángulo para que comprueben que “aunque estén giradas, el ángulo mide 90º”.
Unidad 2	No reconocen los ángulos consecutivos, complementarios y suplementarios.	Se realizan los ejercicios en dos direcciones. Por ejemplo: 1) Se pide a los alumnos dibujar dos ángulos que sumaran 90º y se les pregunta por el nombre. 2) Partiendo de un ángulo recto, y trazando una semirrecta, tienen que comprobar que se forman dos ángulos que son complementarios y además manipular la recta para comprobar que se forman más ángulos complementarios. Lo mismo con los otros pares de ángulos.
Unidad 3	No saben aplicar la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo para determinar el valor de un ángulo conociendo los otros dos.	Se dibuja el triángulo en Cabri, se miden los ángulos y se aplica la fórmula de la suma. Manipulando el triángulo comprueban que la amplitud de los ángulos varía pero la suma siempre tiene el mismo valor.
	No reconocen el triángulo escaleno ni identifican los triángulos según sus ángulos.	Se realiza la construcción de los distintos tipos de triángulos, la identificación según ambas clasificaciones y la comprobación con Cabri.
Unidad 4	No identifican un pentágono irregular, el trapecio isósceles, el trapecio rectángulo, el trapezoide y el romboide.	Se procede a la construcción con Cabri de todas estas figuras geométricas.
	No identifican los elementos de un polígono regular (apotema, lado, radio y centro).	Se procede a la construcción con Cabri de los polígonos regulares y a la medición de sus elementos.
	No identifican los elementos de la circunferencia, en concreto, el centro y la cuerda. De las figuras circulares no identifican el sector circular, segmento circular y trapecio circular.	Se procede a la construcción con Cabri de la circunferencia, sus elementos, el círculo y las figuras circulares.
Unidad 5	No conocen la fórmula del área del cuadrado, rectángulo y romboide. No saben calcular el área de un triángulo conociendo la base y la altura.	Se procede a la obtención de las fórmulas de las áreas de las figuras a partir de otras figuras de áreas conocidas (cuadrado y rectángulo). Después en todos los ejercicios se utiliza la herramienta de Cabri “Área” y se comprueba aplicándo la fórmula.

Tabla 63. Errores detectados y metodología de corrección en el diseño de las unidades didácticas

5.4. Significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele.

La puntuación del pre-test en el grupo de contraste fue 5,5669 (N=18, s=1,50227) y en el grupo experimental 5,5556 (N=21, s=1,52572). Se realizó la prueba t de Student para muestras independientes, resultando que no existen diferencias significativas entre ambos grupos en el pre-test (0,981>0,01), (Anexo 17).

Después, cada grupo siguió su metodología; el grupo experimental utilizó las unidades descritas en el epígrafe anterior y el grupo de contraste siguió la metodología habitual consistente en el seguimiento del temario del libro y la utilización de la pizarra y la tiza por parte de la profesora. Al finalizar el estudio de la Geometría, ambos grupos respondieron nuevamente al cuestionario y se calculó para cada alumno el aprendizaje.

La media del aprendizaje para el grupo de contraste fue 1,4006 y para el grupo experimental 2,4702. La prueba t de Student para muestras independientes determinó que existen diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo que siguió la metodología experimental (0,006<0,01), (Anexo 18).

Además se calculó el tamaño del efecto utilizando la fórmula de Cohen (1988), para cuantificar, de manera más interpretable, la diferencia en el aprendizaje entre los dos grupos, obteniendo el valor d=0,9357>0,80, lo que significa, según la interpretación de Cohen, que la diferencia es grande (Morales, 2011c).

5.5. Investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos del grupo experimental a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario, que permita identificar el nivel de razonamiento de los alumnos.

Analizando el porcentaje de aciertos a los ítems del post-test en el grupo experimental, de la misma manera que se ha procedido en el apartado 5.2.1, se detectó error tan solo en 5 ítems.

De estos ítems, hay uno, el 4c sobre la determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos, que va acompañado de otro ítem, el 4d, en el que se pide la justificación de la respuesta. Además se muestran también las respuestas al ítem 1c y 1d sobre la identificación de rectas perpendiculares giradas. De esta manera se pueden analizar de manera conjunta los razonamientos de los alumnos en las dos respuestas abiertas disponibles en el cuestionario. Esto se realizará en el capítulo siguiente, ya que en este epígrafe solo se muestran los resultados.

A continuación se indica el ítem y el porcentaje de aciertos en el post-test:

CONTENIDO	% ACIERTOS POST-TEST
Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c)	52,4%
Identificación de un trapecio rectángulo girado (9c)	42,9%
Identificación de un trapezoide (9d)	52,4%
Elementos de un polígono regular: identificación del radio (11c)	52,4%
Identificación de las ternas pitagóricas (15)	38,1%

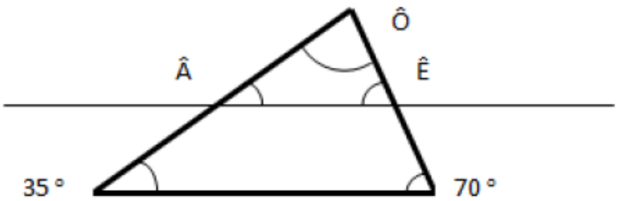
Tabla 64. Errores detectados en el pre-test y que persisten en el post-test en el grupo experimental

Teniendo en cuenta que el límite para determinar el error está en el 54%, se puede decir que 3 errores están casi corregidos y solo faltan 2 por corregir.

Se trata de ver cuáles son las respuestas de los alumnos en dichos ítems.

a) Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).

4. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos Â, Ê y Ô.



a. El ángulo Â mide:	b. El ángulo Ê mide:	c. El ángulo Ô mide:

d. Justifica la respuesta c:

Ilustración 63. Tarea relativa a la determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)

En la siguiente tabla se muestran las respuestas de los alumnos al ítem 4c.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
ns/nc	2	9,5
75º (correcta)	11	52,4
80º	2	9,5
30º	1	4,8
106º	1	4,8
255º	1	4,8
95º	1	4,8
180º	1	4,8
105º	1	4,8
Total	21	100,0

Tabla 65. Respuestas al ítem "Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos" (4c) en el grupo experimental

A continuación se analiza también la justificación de la respuesta. En primer lugar se califica la verbalización de la respuesta correcta (75º). Se observa que 10 alumnos de los 11 que han respondido correctamente, justifican también correctamente su respuesta.

CÓDIGO POS-TEST	RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA	CALIFICACIÓN DE LA JUSTIFICACIÓN
1042	75º	Porque un triángulo tiene 180 grados y sumando A más E te da 105 grados y la diferencia de 105 grados a 180 grados es lo que mide O.	Correcta
1044	75º	Porque todos los ángulos juntos tienen que formar 180 grados.	Correcta
1045	75º	He restado 180 - 105= 75. El resultado siempre tiene que dar 180.	Correcta
1046	75º	Porque la suma de los tres ángulos debe sumar 180 grados. 35+70=105, 180-105=75.	Correcta
1047	75º	La suma tiene que ser 180 grados y si restamos 70+35 a 180 nos queda 75.	Correcta
1048	75º	Porque los tres ángulos de un triángulo forman 180 grados, con lo cual si sumamos los dos primeros y el total se lo restamos a 180 grados da 75 grados.	Correcta
1049	75º	70+35=105, 180-105=75.	Correcta
10410	75º	Los triángulos forman un grado de 180 grados, si sumamos 35 y 70 nos sale 105 y le añadimos 75 para formar 180.	Correcta
10414	75º	Porque se le resta a 180 la suma de los otros dos ángulos.	Correcta
10417	75º	Porque todos los lados deben sumar 360 y si sumamos A y E que son lo mismo que B y F y a 360 le restamos la suma nos salen 75.	Incorrecta
10418	75º	La suma de todos los ángulos de un triángulo vale 180 grados.35+70= 105, 180-105=75.	Correcta

Tabla 66. Justificación de la respuesta correcta al ítem 4c en el grupo experimental

Hay dos alumnos que no responden ni justifican. Son los que tienen códigos 10413 y 10424 en el post-test.

Los dos alumnos que responden 80º (10415 y 10420) no justifican la respuesta. Tampoco lo hace el alumno que responde 30º (10422). Ni el que responde 180º (10421).

El alumno que responde 106º (1043) justifica la respuesta diciendo “porque un ángulo obtuso”. El mismo error comete el alumno que responde 95º (10419) al decir “Porque es un ángulo obtuso y los ángulos obtusos miden más de 90 grados”.

El alumno que responde 255º (10411) justifica “Porque si A mide 35 grados y E 70 grados pues faltan 255 grados para llegar a 360 grados”. Comete el error de pensar que la suma de los ángulos de un triángulo es 360º en vez de 180º.

El que responde 105º (10423) justifica “Porque es la suma del ángulo A y el ángulo E”.

b) Identificación de un trapecio rectángulo girado (9c).

9. Escribe los nombres de los siguientes polígonos:

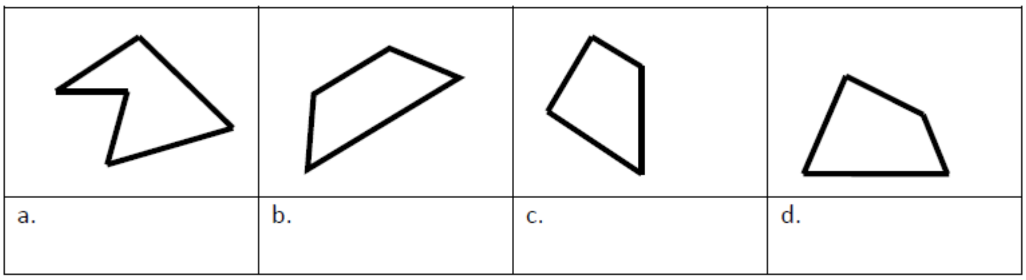


Ilustración 64. Tarea relativa a la identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos

En este caso solamente 9 alumnos de 21 (42,9%) responden correctamente, siendo el error más frecuente la confusión con el trapezoide, el cual ha sido cometido por 6 alumnos (28,6%). La no respuesta se ha dado en 3 casos (14,3%) y ha habido otros 3 errores sin relevancia (14,3%), romboide, trapecio equilátero y trapecio recto, pudiendo considerarse este último un lapsus de terminología.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	3	14,3
trapecio (rectángulo)	9	42,9
trapezoide	6	28,6
romboide	1	4,8
trapecio equilátero	1	4,8
trapecio recto	1	4,8
Total	21	100,0

Tabla 67. Respuestas al ítem "Identificación de un trapecio rectángulo girado" (9c) en el grupo experimental

c) Identificación de un trapezoide (9d).

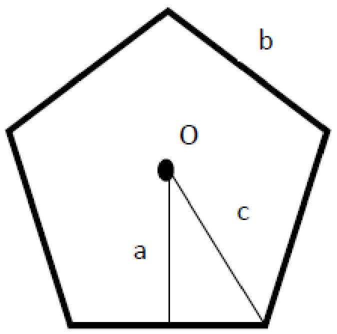
El trapezoide es reconocido por 11 alumnos de 21 (52,4%). La no respuesta se da en 4 casos (19%) y los errores cometidos son denominarlo trapecio o trapecio escaleno, cada uno en 3 casos (14,3%).

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	4	19,0
trapezoide	11	52,4
trapecio	3	14,3
trapecio escaleno	3	14,3
Total	21	100,0

Tabla 68. Respuestas al ítem "Identificación de un trapezoide" (9d) en el grupo experimental

d) Elementos de un polígono regular: identificación del radio (11c).

11. Completa.



En un polígono regular:

a. El segmento **a** se llama.................................

b. El segmento **b** se llama.................................

c. El segmento **c** se llama....................................

d. El punto **O** se llama..

Ilustración 65. Tarea relativa a la identificación de los elementos de un polígono regular

En este ítem 11 alumnos de 21 (52,4%), han respondido correctamente.

De los otros casos, lo más habitual ha sido la no respuesta de 6 alumnos (28,6%), seguido de otras respuestas sin relevancia, por aparecer solo una vez cada una de ellas (4,8%), diagonal, cateto, hipotenusa, semirrecta.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
ns/nc	6	28,6
radio	11	52,4
diagonal	1	4,8
cateto	1	4,8
hipotenusa	1	4,8
semirrecta	1	4,8
Total	21	100,0

Tabla 69. Respuestas al ítem "Identificación del radio de un polígono regular" (11c) en el grupo experimental

e) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

15. Indica cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5 **b. 6, 8, 10** **c. 5, 6, 7**

Ilustración 66. Tarea relativa a la identificación de ternas pitagóricas

En este caso la mayoría de los alumnos, casi dos tercios, responde erróneamente porque solo señalan una de las tres posibles respuestas sin realizar ningún cálculo. En cambio 8 alumnos de 21 (38,1%) responden correctamente realizando los cálculos relativos al teorema de Pitágoras.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
error	13	61,9
acierto	8	38,1
Total	21	100,0

Tabla 70. Respuestas al ítem "Identificación de las ternas pitagóricas" (15) en el grupo experimental

f) Identificación de las rectas perpendiculares giradas (1c).

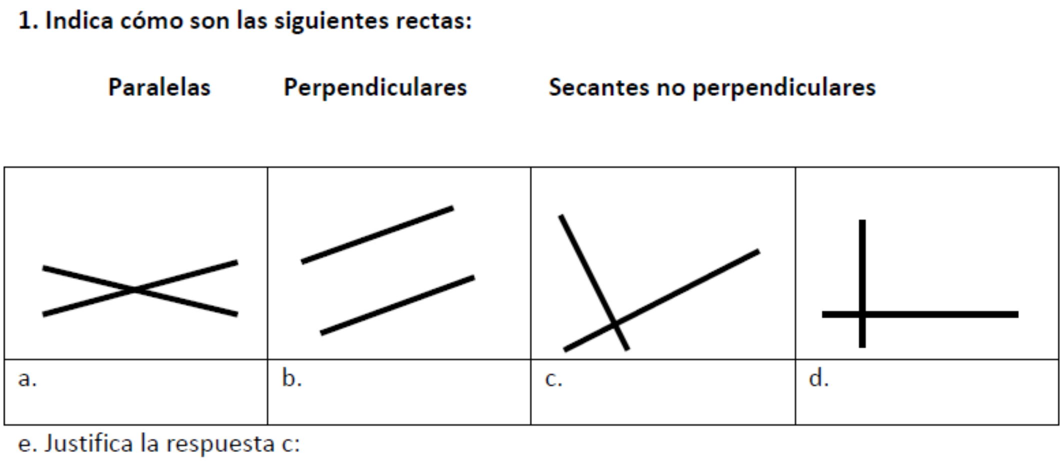


Ilustración 67. Tarea relativa al reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano

Todos los alumnos han respondido al ítem. El porcentaje de aciertos ha sido muy elevado (71,4%), por lo que se puede concluir que en este ítem no hay error.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
error	6	28,6
acierto	15	71,4
Total	21	100,0

Tabla 71. Respuestas al ítem "Identificación de las rectas perpendiculares giradas" (1c) en el grupo experimental

A continuación se muestran las justificaciones a las respuestas de los alumnos, lo cual constituye el ítem 1e.

Se presentan en primer lugar las justificaciones de las respuestas correctas. Se observa que 9 de 15 (60%) justifica la respuesta correctamente, mientras que 6 (40%) no da ninguna justificación.

CÓDIGO POS-TEST	RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA	CALIFICACIÓN DE LA JUSTIFICACIÓN
1042	Perpendiculares.	Son perpendiculares porque forman cuatro ángulos rectos.	Correcta
1043	Perpendiculares.	Son perpendiculares porque hacen un ángulo recto.	Correcta
1044	Perpendiculares.		Sin respuesta
1046	Perpendiculares.	Porque forman un ángulo de 90 grados.	Correcta
1048	Perpendiculares.	Porque al cruzarse forman cuatro ángulos de 90 grados.	Correcta
1049	Perpendiculares.	Son perpendiculares porque al cruzarse forman un ángulo de 90 grados.	Correcta
10410	Perpendiculares.	Porque las dos líneas forman ángulos de 90 grados.	Correcta
10411	Perpendiculares.		Sin respuesta
10413	Perpendiculares.	Porque es la misma figura que la d pero está girada.	Correcta
10414	Perpendiculares.	Son perpendiculares porque al cruzarse forman cuatro ángulos de 90 grados.	Correcta
10415	Perpendiculares.		Sin respuesta
10417	Perpendiculares.	Aunque esté inclinada, si lo medimos con el transportador cada ángulo va a ser de 90 grados.	Correcta
10418	Perpendiculares.		Sin respuesta
10421	Perpendiculares.		Sin respuesta
10423	Perpendiculares.		Sin respuesta

Tabla 72. Justificación de la respuesta correcta al ítem 1c en el grupo experimental

En segundo lugar se muestran las justificaciones de las respuestas incorrectas. Se observa que 3 alumnos de 6 (50%) han aprendido los conceptos al revés y los otros no justifican la respuesta.

CÓDIGO POS-TEST	RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA	CALIFICACIÓN DE LA JUSTIFICACIÓN
1045	No perpendiculares.	Es exactamente que la d pero inclinada. *(d mal)*	Concepto aprendido al revés
1047	No perpendiculares.	Porque forman cuatro ángulos rectos	Concepto aprendido al revés
10419	No perpendiculares.	Porque es igual que la d pero el dibujo girado.	Concepto aprendido al revés
10420	No perpendiculares.		
10422	No perpendiculares.		
10424	No perpendiculares.		

Tabla 73. Justificación de la respuesta incorrecta al ítem 1c en el grupo experimental

CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

Se discuten los resultados de cada uno de los objetivos de la investigación. Previamente es necesario realizar un comentario sobre la generalizabilidad de los resultados.

Como se ha comentado en el capítulo anterior, la muestra utilizada para la investigación es de tipo incidental, por lo que no tiene sentido hablar de representatividad de la muestra sino, como en todo estudio de diseño, de replicabilidad o capacidad de generalización (Molina, Castro, Molina, y Castro, 2011). En este sentido, los resultados obtenidos en esta investigación son generalizables pues consisten en una metodología basada en la detección de imágenes conceptuales y de errores y en la implementación curricular a partir de dichos datos, diseñada según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

6.1. Discusión de la propuesta del cuestionario diseñado para medir el rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría.

Los resultados obtenidos en la versión definitiva del cuestionario aplicada a 151 alumnos, muestran que los datos del cuestionario son válidos y fiables para el estudio. A continuación se presentan los datos que corroboran esta afirmación.

Los datos son fiables ya que el valor del coeficiente α de Cronbach (α=0,951) indica una fiabilidad muy alta (Webb, 1983).

Además son válidos en los tres aspectos con que se determina la validez de los resultados.

En primer lugar, el análisis factorial presenta una estructura clara y lógica que permite afirmar la validez de constructo. Proporciona 13 factores que explican el 76,081% de la varianza. Se podía haber extraído menos factores, pero, de esta manera es conceptualmente más claro.

En segundo lugar, la validez de contenido se garantiza por el estudio de los jueces.

Finalmente, la validez de criterio está avalada por el coeficiente de correlación de Pearson obtenido (r=0,604), lo cual en toda la literatura de análisis estadístico es interpretado como muy aceptable en términos de validez.

Además, el cuestionario tiene una dificultad media (IF=0,47), lo cual es deseable pues pretende medir el rendimiento de los alumnos.

En la muestra de la investigación (N=137), formada por los alumnos que respondieron al cuestionario antes y después del estudio de la Geometría, se obtuvo el valor del coeficiente α de Cronbach α=0,947 en el pre-test y en el post-test, lo que indica una fiabilidad muy alta de los resultados. El índice de facilidad del pre-test (IF=0,48) supone una dificultad media y el del post-test (IF=0,67) significa que el cuestionario resulta fácil después del aprendizaje. Esta diferencia (39%) determina su valor como instrumento de medición del rendimiento.

Analizando la correlación entre las variables “nota en el pre-test” y “nota en el post-test” se obtuvo un coeficiente de correlación de Pearson de r=0,792, lo cual supone una relación positiva y fuerte entre las variables. El diagrama de dispersión, la recta de regresión y el cuadrado del coeficiente de correlación se muestran en el siguiente gráfico:

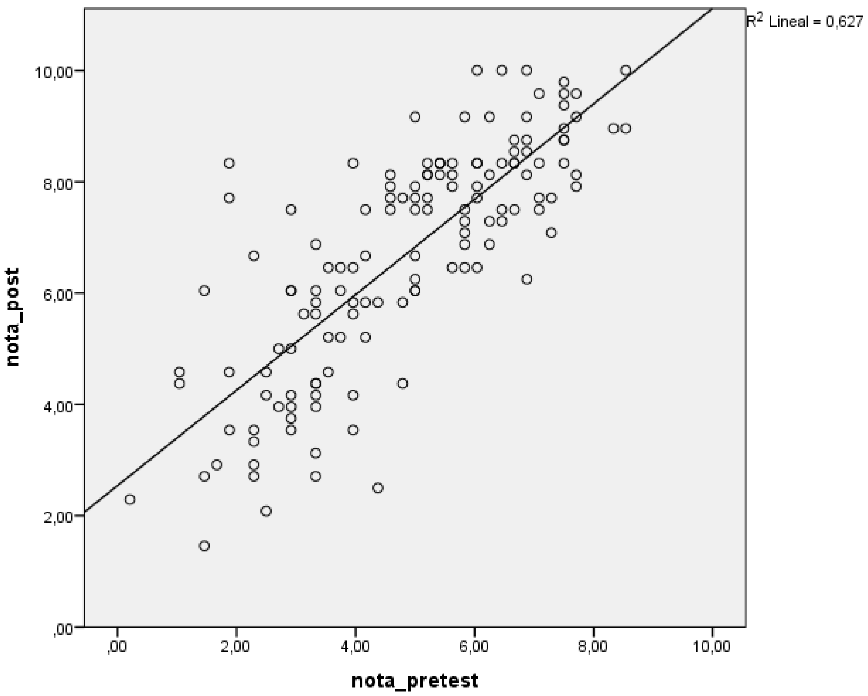


Ilustración 68. Recta de regresión de la nota del post-test sobre la nota del pre-test (N=137)

6.2. Discusión de la detección de los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO y de la determinación de que no existen diferencias significativas en el aprendizaje entre chicos y chicas.

En este epígrafe se presenta de forma separada la discusión de cada uno de los dos resultados considerados.

6.2.1. Discusión de la detección de los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO.

En esta fase se consideró la muestra de 137 alumnos. Con la interpretación del índice de facilidad de Yela (1987), se clasificaron los ítems y se estudió su variación después del estudio de la Geometría.

Se estableció la evolución de la comprensión en Geometría, en tres apartados.

a. Conocimientos en el pre-test que se mantienen en el post-test.

- Reconocimiento de rectas paralelas.
- Reconocimiento de tipos de ángulos: agudo, obtuso, llano, recto.
- Clasificación de los triángulos según los lados: equilátero e isósceles.
- Identificación de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo.
- Identificación del cuadrado y del rectángulo.
- Identificación de elementos de la circunferencia: diámetro y radio.
- Reconocimiento de figuras circulares: círculo y corona circular.

b. Errores en el pre-test que se corrigen en el post-test.

- Reconocimiento de rectas secantes y perpendiculares.
- Reconocimiento de ángulos suplementarios, consecutivos y complementarios.
- Determinación de un ángulo por semejanza de triángulos.
- Clasificación de los triángulos según los lados: escaleno.
- Clasificación de los triángulos según sus ángulos.
- Identificación del romboide.
- Identificación del área del cuadrado y del rectángulo.
- Identificación de los elementos de un polígono regular: lado y centro.
- Identificación de los elementos de la circunferencia: centro.
- Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura.

c. Errores en el pre-test que persisten en el post-test.

- Reconocimiento de rectas perpendiculares giradas.

- Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos.
- Identificación de un pentágono irregular, trapecios y trapezoide.
- Identificación del área del romboide.
- Identificación de los elementos de un polígono regular: apotema y radio.
- Identificación de los elementos de la circunferencia: cuerda.
- Reconocimiento de figuras circulares: sector, segmento y trapecio circular.
- Identificación de las ternas pitagóricas.

A continuación, por su relevancia en la obtención de conclusiones generales sobre el alumnado, se realizan unos comentarios sobre los errores no corregidos.

Error 1: No reconocer las rectas perpendiculares giradas.

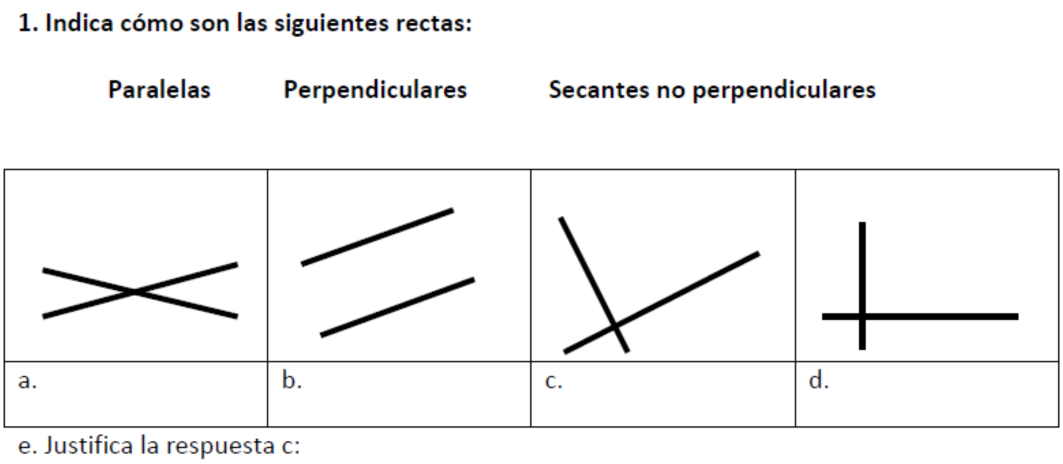


Ilustración 69. Tarea relativa al reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano

El análisis de este error constituye un caso sorprendente pues se puede decir que, globalmente, no ha habido aprendizaje.

Más de la mitad de los alumnos no reconoce las rectas perpendiculares giradas antes de estudiar la Geometría. De hecho, el porcentaje de aciertos es 43,8%. Después del estudio de la asignatura, siguen sin reconocerlo y el porcentaje incluso disminuye ligeramente al 43,1%.

Se supone que el distractor de orientación es fuerte en este caso, pero el análisis de las respuestas del post-test no permite corroborar dicha hipótesis. Además, se ha encontrado otro distractor visual ya que para algunos alumnos la imagen del concepto "rectas perpendiculares" está formada por dos segmentos cortados por el punto medio.

Analizando las respuestas erróneas del post-test se tiene que 57 alumnos han respondido "no perpendiculares", 4 han dado respuestas sin sentido y 17 lo han dejado en blanco.

De los 57 alumnos que han contestado "no perpendiculares" (41,6%), se observa que 3 (2,2%) han aprendido los conceptos al revés, otros 3 (2,2%) han cometido el error del punto medio y también 3 (2,2%) han tenido el error de orientación (pensar que no son perpendiculares porque están inclinadas). Sin embargo 11 (8%) dan una respuesta correcta pero que no se corresponde a la imagen. Así por ejemplo, un alumno responde "no perpendiculares" y justifica "porque no forman un ángulo de 90º". Ahora bien, ¿cuál es el motivo para realizar dicha afirmación?, ¿el distractor de orientación?, ¿el error del punto medio?, ¿otros?, eso no se puede decidir con las respuestas de los alumnos. Además hay 2 alumnos (1,5%) que dan dos respuestas sin sentido ("Porque no son paralelas". "Porque si se juntan forman cuatro ángulos rectos"). A pesar de esto, lo más significativo es que hay 35 alumnos (25,5%) que no verbalizan nada, por lo que no se puede atisbar ni el más mínimo indicio de por dónde puede ir el error. Esta falta de estructuración lingüística refleja el bajo grado de adquisición del nivel.

Las respuestas sin sentido que han dado 4 alumnos (2,9%) son "paralela" o "paralelas", "paralelas no secantes" o "secantes no paralelas". Resulta totalmente absurdo.

Como se ha mencionado anteriormente, además hay 17 alumnos (12,4%) que no dan ninguna respuesta, lo cual resulta sorprendente pues a priori no es un concepto tan complicado.

En resumen, se presenta la siguiente tabla:

Resultados del post-test	Porcentaje	Observación sobre el posible error
Aciertos	43,1 %	
NP	2,2 %	Conceptos aprendidos al revés
	2,2 %	Error del punto medio
	2,2 %	Error de orientación
	8 %	Justificación correcta que no se corresponde con la imagen
	1,5 %	Justificación sin sentido
	25,5 %	No verbaliza
Respuestas sin sentido	2,9 %	
No respuesta	12,4 %	

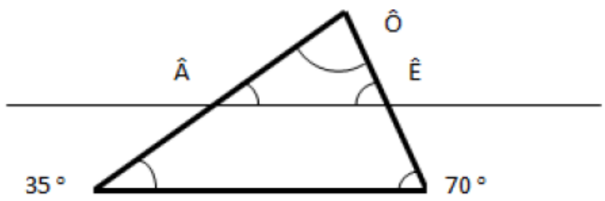
Tabla 74. Resumen del análisis del error persistente de no reconocer las rectas perpendiculares giradas (N=137)

Este error no se produce en el grupo experimental, después del estudio de la Geometría, pues el porcentaje de aciertos es 71,4%, en cambio en el grupo de contraste sí que aparece el error ya que dicho porcentaje es 38,9%. Curiosamente antes del estudio de la asignatura la situación era mejor en el grupo de contraste pues los porcentajes de aciertos eran de 47,6% en el experimental y 66,7% en el de contraste.

Por tanto se concluye que es necesario diseñar una estrategia para conseguir la visualización de las rectas perpendiculares giradas, que en la presente Tesis ha sido la experimentación de las unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele y del software de Geometría Dinámica para la corrección de errores, como se ha explicado en el capítulo anterior al exponer el diseño de dichas unidades.

Error 2: No saber determinar un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos.

4. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos Â, Ê y Ô.



a. El ángulo Â mide:	b. El ángulo Ê mide:	c. El ángulo Ô mide:

d. Justifica la respuesta c:

Ilustración 70. Tarea relativa a la determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)

En el ítem 4c se pedía a los alumnos hallar el ángulo de un triángulo conociendo los otros dos. El porcentaje de aciertos en el pre-test fue 17,5% y en el post-test 40,1%, siendo los errores 82,5% y 59,9% respectivamente, con lo que se observa una mejoría aunque no la suficiente. En primer lugar se esperaba un resultado mejor en el pre-test pues la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo es conocida en Primaria y, por otra parte, también se esperaba un resultado mejor en el post-test ya que también se ha trabajado en el curso. Quizá el motivo haya sido que se les pedía hallar tres ángulos (dos por semejanza y uno por la propiedad de la suma) y no lo han sabido reconocer.

Analizando las respuestas en el post-test se observa que de los 62 alumnos (45,3%) que contesta erróneamente, 36 no justifica sus afirmaciones y los 26 que sí lo hacen reflejan las siguientes concepciones:

3 piensan que la suma de los ángulos de un triángulo es 360º, 5 aciertan en que la suma es 180º pero hacen mal el planteamiento o las operaciones, 7 suman los otros dos ángulos, 3 piensan que es un ángulo obtuso y dan valores aproximados, 2 razonan lo mismo pero con el ángulo agudo, 2 dicen que es un ángulo recto y 4 dan otras respuestas aisladas. Por lo tanto 15, razonan sobre la suma y 7 sobre el tipo de ángulo.

Como resumen, se presenta la siguiente tabla:

Resultados del post-test	Porcentaje	Observación sobre el posible error
Aciertos	40,1 %	
Errores	2,2 %	Pensar que la suma de los ángulos de un triángulo es 360º
	3,6 %	Hacer mal el planteamiento o las operaciones
	5,1 %	Sumar los otros dos ángulos
	2,2 %	Pensar que es un ángulo obtuso y dar valores aproximados
	1,5 %	Pensar que es un ángulo agudo y dar valores aproximados
	1,5 %	Pensar que es un ángulo recto
	2,9 %	Respuestas aisladas
	4 %	
No respuesta	14,6%	

Tabla 75. Resumen del análisis del error persistente de no saber determinar un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (N=137)

Este error está casi corregido en el grupo experimental ya que el porcentaje de aciertos es 52,4% y sí aparece en el grupo de contraste pues dicho tanto por ciento es solo el 27,8%. En el experimental se ha producido un importante aprendizaje pues se pasa del 14,3% al 52,4% mientras que en el de contraste, se mantiene el tanto por ciento.

De la misma manera que al comentar el error anterior, se concluye que hace falta realizar un planteamiento para que los alumnos adquieran este concepto. Como se ha comentado en el capítulo anterior, los alumnos del grupo experimental tuvieron pocos ejercicios propuestos para afianzar este concepto.

Error 3: No identificar el pentágono irregular, trapecios y trapezoides.

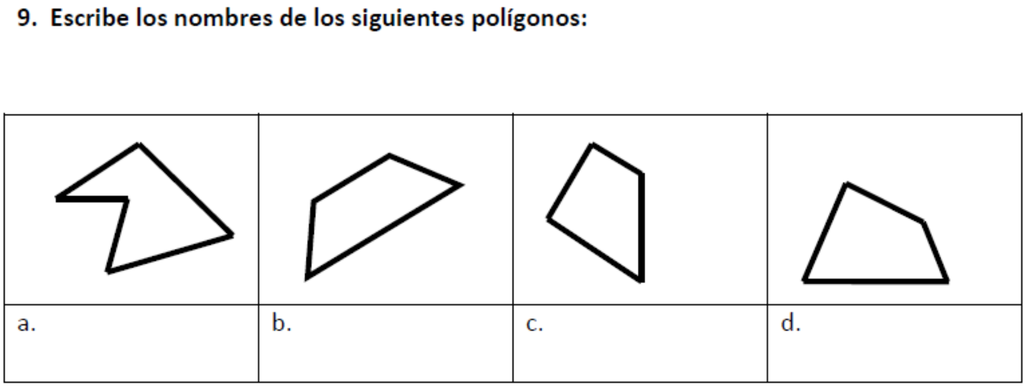


Ilustración 71. Tarea relativa a la identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos

La discusión de los resultados se realiza por una parte, en el caso del pentágono irregular y, por otra, en el caso de los trapecios y el trapezoide.

En ambos casos destaca el elevado porcentaje de no respuesta (ns/nc), lo cual supone que son muchos los alumnos que no reconocen dichas figuras.

En el caso del **pentágono irregular (ítem 9a)**, el porcentaje de aciertos fue 19% en el pre-test y 50,4% en el post-test; con lo que el error fue 81% en el pre-test y 49,6% en el post-test. Se observa que, aunque persiste el error, éste ha disminuido considerablemente.

A continuación se analizan las respuestas del post-test:

El porcentaje de no respuesta es muy elevado (31,4%), es decir, el pentágono irregular es desconocido casi para un tercio de los alumnos, lo cual puede ser debido a que, en la enseñanza, no se ha trabajado suficientemente con polígonos irregulares y cóncavos. De todos modos dicho porcentaje ha mejorado pues en el pre-test fue el 65,0%.

De los errores propiamente dichos (18,2%) lo más frecuente es la confusión con el trapezoide (8%). Si se considera, además, la respuesta “trapezoide irregular”, entonces el error de confundir el pentágono irregular con el trapezoide, se produce en el 10,2% de los casos. La respuesta “polígono” se ha considerado como error ya que estaba indicado en el enunciado “Escribe los nombres de los siguientes polígonos”. Podría ser correcta la respuesta “no paralelogramo”, pero no se ha considerado como tal pues no constituye el nombre del polígono y es muy genérica.

Las otras respuestas alternativas son muy variadas y, algunas, sin sentido (2,1%), “quintógono”, “pentágono trapezoide”, “estrellado”. Los alumnos que responden “cuadrado”, “hexágono”, “romboide”, “polígono regular”, “hexágono irregular” (4,3%), reflejan una gran confusión o desconocimiento y sería necesario trabajar con ellos de manera más individualizada.

Para subsanar este error, convendría, en primer lugar, trabajar más con polígonos irregulares y cóncavos y además, incidir en la distinción entre pentágonos irregulares y trapezoides.

En el caso del **trapecio isósceles (ítem 9b)** el porcentaje de aciertos en el pre-test fue el 19,7% y en el post-test 51,8%, por lo que los porcentajes de errores fueron 80,3% en el pre-test y 48,1% en el post-test. Con estos resultados se observa que ha habido una gran mejoría.

El trapecio isósceles es el prototipo de trapecio, por lo que cabría esperar que fuera ampliamente conocido y, sin embargo, el 22,6% de los alumnos ha dejado la respuesta en blanco. En este caso el porcentaje de errores propiamente dichos (25,6%) es muy similar al de no respuesta.

En el post-test, el error más frecuente es confundirlo con el trapezoide (8%). Se ha considerado error la respuesta “cuadrilátero” o “cuadrilátero irregular” por las razones expuestas anteriormente.

Se destaca también el porcentaje (4,2%) de respuestas absurdas tales como “cuadrángulo de cuatro lados”, “trapecio triangular”, “trapecio regular”, “rectángulo irregular”, “cuadrangular” o “trapezoide isósceles”, que reflejan la falta de estructuración lingüística mencionada por Van Hiele.

También en este caso hay alumnos (4,4%) que muestran una gran confusión con figuras geométricas muy básicas (“cuadrado”, “romboide”, “rectángulos”). Como se ha indicado antes, estos alumnos necesitarían una atención muy personalizada.

Aunque poco más de la mitad de los alumnos (51,8%) reconoce la figura, casi la mitad (48,1%) no sabe nombrarla correctamente, fundamentalmente por confundirla con el trapezoide o denominarla cuadrilátero o cuadrilátero irregular. Antes de realizar ninguna conclusión, conviene considerar el error en el trapecio rectángulo y en el trapezoide.

El caso del **trapecio rectángulo** (ítem 9c) ya no es el prototipo de trapecio y se nota un mayor porcentaje de no respuesta (33,6%) y de errores (38,7%) respecto del ejemplo anterior.

El mayor error, nuevamente, es la confusión con el trapezoide (15,3%). Como en los casos anteriores se ha dado como no correcta la respuesta “cuadrilátero” (18%).

Igual que en el ejemplo anterior, un 4,2% de los alumnos proporciona respuestas absurdas como “cuadrángulo de cuatro lados”, “cuadrangular”, “cuadrilátero paralelogramo”, “trapezoide regular”, “trapecio recto”, “trapezoide rectángulo”, lo cual refleja una falta de estructuración lingüística en la adquisición de estos conceptos.

En este caso la confusión con otras figuras geométricas supone el 5,8% de los casos con respuestas como "romboide", "cuadrado", "trapecio isósceles", "trapecio equilátero", "polígono regular".

El análisis de las respuestas al ítem de identificación del **trapezoide (ítem 9d)** divide a los alumnos en tres grupos casi iguales: los que aciertan (34,3%), los que cometen algún tipo de error (32,9%) y los que no responden (32,8%).

La no respuesta disminuye del pre-test al post-test lo cual es reflejo de la enseñanza, pero el concepto no se ha adquirido correctamente como lo muestra el aumento de errores propiamente dichos.

El error más frecuente es confundirlo con el trapecio (6,6%). También en este caso se ha considerado como no correcta la respuesta "cuadrilátero" (10,9%), o "cuadrilátero irregular" (2,2%).

Las respuestas absurdas tienen un porcentaje muy similar a los casos anteriores (4,3%) como son "cuadrángulo de cuatro lados", "trapezoide escaleno", "trapecio irregular", "cuadrangular", "cuadrilátero escaleno". Y se hace la misma valoración que en los ejemplos antes mencionados.

En este caso, el porcentaje de alumnos que muestran confusión con respecto a las figuras geométricas básicas, es un poco superior (8,9%), con respuestas como "romboide", "trapecio escaleno", "cuadrado", o "trapecio isósceles".

Analizando de manera conjunta las respuestas a los ítems relativos a los trapecios y trapezoides se observa que los alumnos no los distinguen y tienden o bien a denominarlos de manera genérica como cuadriláteros o a confundirlos entre sí. Esto sería admisible en Primaria pero no en 1º de ESO.

Por tanto, en la enseñanza se debería incidir inicialmente, como señala Mayberry (1981, 1983), en aprender a nombrar las figuras.

En este caso en el grupo experimental persiste el error de no identificar el trapecio rectángulo y el trapezoide, mientras que en el grupo de contraste solo persiste la falta de reconocimiento del trapecio rectángulo.

Error 4: Desconocer el área del romboide

10. Completa la tabla.

Dibujo	Nombre del polígono	Área del polígono
	c1	c2

Ilustración 72. Tarea relativa a la identificación de paralelogramos y sus áreas

En el ítem de escribir el área del romboide (ítem 10c2), el porcentaje de aciertos pasa del 19,7% en el pre-test al 46,0% en el post-test y el error desciende del 80,3% en el pre-test al 54,0% en el post-test.

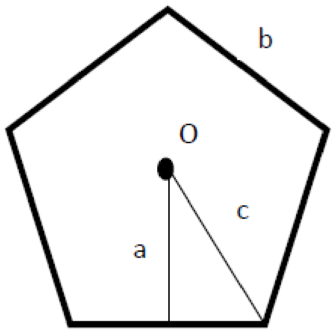
Lo más significativo en este análisis es que aunque el porcentaje de errores propiamente dichos, prácticamente se mantiene constante (28,5% en el pre-test y 29,2% en el post-test), sin embargo la no respuesta disminuye considerablemente como efecto de la enseñanza (51,8% en el pre-test y 24,8% en el post-test).

Analizando las respuestas del post-test se observa que el mayor error es aplicar la fórmula del triángulo (13,9%). De hecho, como se verá en el epígrafe siguiente, es el único error que permanece en el grupo experimental, aunque hay que señalar que no se trata de un error persistente en dicho grupo. El siguiente error es aplicar la fórmula del cuadrado, que viene a ser una modificación de la fórmula del rectángulo (5,8%). Después hay un conjunto de errores que denotan la confusión con el área del trapecio y del rombo (5,8%). Los siguientes errores son fórmulas absurdas.

Para corregirlo se deben realizar más ejercicios en los que se deje claro que en el área del romboide "no hay que dividir entre 2" y practicar en la obtención del área del romboide a partir del rectángulo formado.

Error 5: No identificar la apotema y el radio en un polígono regular.

11. Completa.



En un polígono regular:

a. El segmento **a** se llama…………………………….

b. El segmento **b** se llama…………………………….

c. El segmento **c** se llama……………………………….

d. El punto **O** se llama…………………………………….

Ilustración 73. Tarea relativa a la identificación de los elementos de un polígono regular

Estos dos errores relativos a los elementos de un polígono regular tienen una frecuencia de aparición muy similar. A continuación se muestra el análisis detallado de las respuestas en cada caso.

No identificar la apotema en un polígono regular (ítem 11a)

La apotema es desconocida para el 21,9% de los alumnos y no es identificada correctamente para el 37,2%. En total, más de la mitad de los alumnos (59,1%) desconoce este elemento, lo cual no deja de ser sorprendente ya que se utiliza en el cálculo de áreas de los polígonos regulares, tema que se aborda en 1º de ESO. Sin embargo, considerando que en el pre-test el porcentaje de aciertos fue 0,0%, es un resultado muy aceptable.

La notable disminución de la no respuesta es reflejo de la enseñanza. El porcentaje de error es corregido casi a la mitad.

El error más frecuente es denominarla “radio” (21,2%), sin embargo en el análisis del radio, éste no es llamado apotema. Los otros errores se producen en el 16% de los casos, pero ninguno con especial incidencia, salvo las denominaciones de “altura”, “diámetro” y “mediatriz”, cada una de ellas con una frecuencia de 3,6%. Sorprende la respuesta “hipotenusa” (2,2%), pues fijándose en el triángulo que forma con el radio, sería en todo caso el cateto. Las otras respuestas, “arco”, “área”, “radio/altura” (2,9%) carecen de sentido.

Para corregir este error sería necesario realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas.

No identificar el radio en un polígono regular (ítem 11c)

El radio de un polígono regular es desconocido para más de un tercio de los alumnos (36,5%) y está mal identificado para el 24,1%.

Se observa que aunque el porcentaje de error disminuye del pre-test (81,0%) al post-test (60,6%), sin embargo, el porcentaje de los errores propiamente dichos se mantiene prácticamente igual.

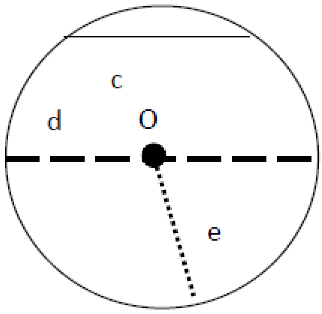
El error más frecuente denominarlo diagonal (18%). Solo un 2,2% lo denomina apotema y el resto de errores, son casos aislados que no muestran ningún dato relevante.

Como en el caso anterior, para corregir este error sería necesario realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas y, en concreto, diferenciarlo de la diagonal.

En el grupo experimental se da este último error aunque está casi corregido.

Error 6: No identificar la cuerda en una circunferencia.

12. Completa los elementos de la circunferencia:



a. El punto **O** se llama ………………………………

b. El segmento **d** se llama ………………………………

c. El segmento **c** se llama ………………………………

d. El segmento **e** se llama ………………………………

Ilustración 74. Tarea relativa a la identificación de los elementos de la circunferencia

En el caso de la identificación de la cuerda de una circunferencia (ítem 12c), el error disminuye del 70,0% en el pre-test al 45,9% en el post-test y el acierto pasa del 29,9% al 54,0%.

Se observa un mayor descenso de la no respuesta, pues pasa del 35,0% al 18,2%, que del error, que decrece del 35,0% al 27,7 %.

Las respuestas de la identificación de la cuerda en una circunferencia, son muy variadas. La no respuesta representa el 18,2% de los casos y en el mismo porcentaje se encuentra el error más frecuente, que es denominarla “arco”. El resto de los errores (27,5%) son de lo más diverso y no aportan ningún dato relevante, salvo que quizá hayan contestado al azar por decir algo.

Este error podría corregirse realizando más práctica de diferenciación de la cuerda y el arco, además de los ejercicios de identificación de los elementos de la circunferencia y demás figuras geométricas.

Este error no se da en el grupo experimental, pero sí en el de contraste.

Error 7: No reconocer las figuras circulares: sector circular, segmento circular y trapecio circular.

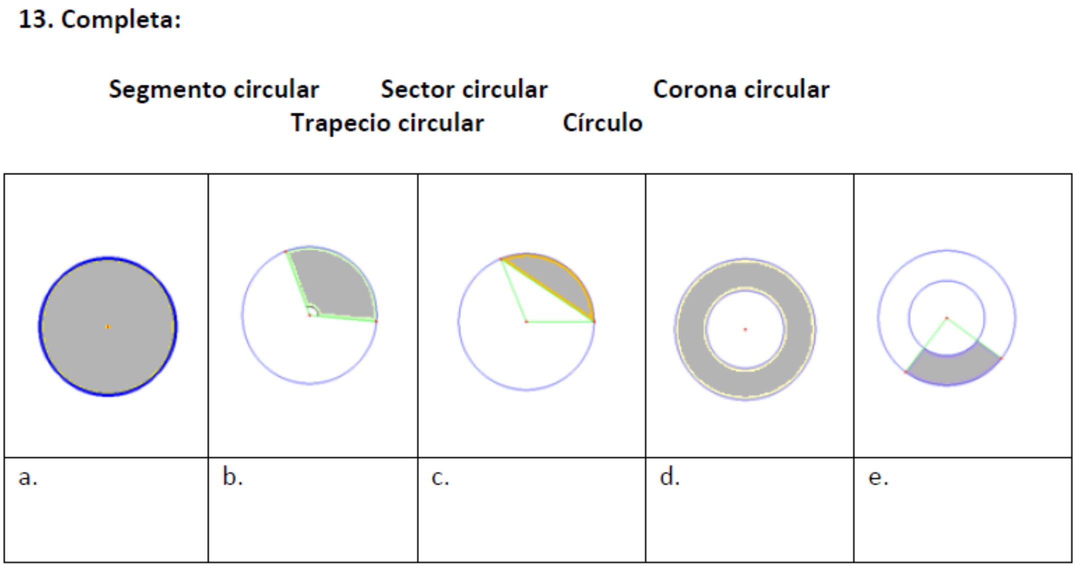


Ilustración 75. Tarea relativa al reconocimiento de figuras circulares

Las figuras circulares conocidas por los alumnos desde Primaria son el círculo y la corona circular. A pesar de que en 1º de ESO se trabaja con el sector circular, el segmento circular y el trapecio circular, sin embargo, al terminar el curso, siguen sin ser reconocidas por la mayoría de los alumnos.

Se observa que los porcentajes de error en el pre-test son altos y desiguales, sin embargo en el post-test, aunque disminuyen un poco siguen siendo altos pero bastante similares.

La no respuesta es baja en el pre-test y más en el post-test, lo cual tiene su explicación pues se proporcionaban los nombres de las figuras circulares.

Los porcentajes de error propiamente dicho, sugieren que se ha respondido al azar.

Analizando de manera conjunta las respuestas de cada uno de los ítems, que aparecen en las siguientes tablas, se llega a la conclusión de que los alumnos tienen estos tres conceptos confusos y mezclados:

- Al sector circular lo llaman trapecio circular y segmento circular (51,8%).
- Al segmento circular lo denominan trapecio circular y sector circular (43%).
- Al trapecio circular lo llaman sector circular y segmento circular (51,1%).

Estos porcentajes de error sugieren que se ha trabajado muy poco con estas figuras circulares, con lo que la solución es inmediata.

Este error no persiste en el grupo experimental, pero sí en el de contraste.

Error 8: No identificar las ternas pitagóricas.

15. Indica cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5 **b. 6, 8, 10** **c. 5, 6, 7**

Ilustración 76. Tarea relativa a la identificación de ternas pitagóricas

Solamente el 24,1% de los alumnos, es decir, aproximadamente la cuarta parte, responde correctamente sabiendo que tienen que aplicar el teorema de Pitágoras. Se considera que esta tarea supone un grado de comprensión en Geometría que realmente la mayoría de los alumnos no tienen.

Este error persiste en el grupo experimental y en el de contraste.

6.2.2. Discusión de la determinación de que no existen diferencias significativas en el aprendizaje entre chicos y chicas.

La prueba t de Student mostró que no existen diferencias significativas ni en los conocimientos previos ni en el aprendizaje entre chicas y chicos.

Este resultado está en consonancia, como se ha comentado en el capítulo 2, con otros estudios en la misma dirección. Es decir, si la prueba versa sobre contenidos que han sido enseñados y aprendidos en clase, no hay diferencias significativas (Usiskin, 1982; Senk y Usiskin, 1983). Lo cual no quiere decir que, en una clase, no se puedan apreciar diferencias por género.

6.3. Discusión de la implementación curricular del modelo de Van Hiele en la Geometría de 1º de ESO.

La implementación curricular del modelo de Van Hiele ha consistido, como ya se ha comentado en el apartado 5.3, en la elaboración de las unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y utilizando el software de Geometría Dinámica Cabri, que aparecen en el Anexo 19.

En dicho Anexo se presentan las unidades validadas por el grupo de profesores expertos en Geometría y Didáctica de las Matemáticas. En su diseño se tuvieron en cuenta los errores detectados en el pre-test sobre las imágenes conceptuales de los alumnos y se utilizó el software geométrico Cabri.

El resultado son cinco unidades didácticas diseñadas según el currículum de la Comunidad de Madrid y los estándares establecidos desde Segundo Ciclo de Primaria hasta 1º de ESO.

En este epígrafe se realizan comentarios sobre dichas unidades, algunos de los cuales ya han sido apuntados al presentar su diseño en el apartado 5.3. Expresamente se realizan las referencias al grupo experimental ya que fue el que las experimentó y, por tanto, resulta oportuno realizar los comentarios referidos a él.

En cada uno de los apartados de las unidades se apuntan los errores detectados, que son los que el profesor tiene que tener presentes en todo momento durante el desarrollo de las distintas fases, pues el objetivo es su corrección.

Sorprende que algunos de los errores detectados correspondan a contenidos esenciales de Segundo Ciclo de Educación Primaria, por ejemplo, el reconocimiento de las rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas. No se puede partir de la hipótesis de que los alumnos tienen adquiridos todos los conceptos trabajados en 3º y 4º de Primaria.

Otros errores corresponden a contenidos de Tercer Ciclo de Primaria, que no han adquirido, como por ejemplo, la clasificación de los triángulos según los lados y los ángulos o la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. Se realiza el mismo comentario que en el párrafo anterior.

La metodología empleada en la corrección de errores se ha basado en la construcción utilizando la herramienta informática.

- **Comentarios sobre la fase de indagación: abordarla siempre.**

Las unidades comienzan con la fase de indagación sobre lo que se va a tratar en el apartado correspondiente. Excepto que sea un tema completamente nuevo para los alumnos, conviene abordarlo para que sean conscientes de lo que se va a tratar.

- **Comentarios sobre la fase de orientación dirigida: plantear varios ejercicios sobre cada error detectado y realizar actividades de construcción.**

En la fase de orientación dirigida se puede comenzar, si es necesario, con un poco de teoría.

Además, conviene plantear varios ejercicios sobre cada error detectado y no solo uno.

Por ejemplo, en la unidad de triángulos, pareció que con un ejercicio para recordar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, era suficiente para que los alumnos del grupo experimental aprendieran esta propiedad y se comprobó en el post-test que el error estaba casi corregido pero no totalmente. (El porcentaje de aciertos es 52,4% y el límite para determinar su corrección es 54%). Además no se planteó ningún ejercicio similar a éste en la fase siguiente.

Tampoco se trabajó suficientemente la identificación del radio de un polígono regular y esto se notó de la misma manera en el post-test del grupo experimental pues el error estaba casi corregido pero no totalmente.

Otro ejemplo, esta vez con resultado positivo, lo constituye el caso del reconocimiento de las rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas, en el que se trabajó el error que había sido detectado y en el grupo experimental se consiguió corregirlo. La metodología consistió en presentar una recta en posición no habitual y enseñar a los alumnos a dibujar con Cabri, rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Además se pedía que en las rectas perpendiculares midieran el ángulo para comprobar que “aunque estén giradas, el ángulo mide 90º”.

En esta fase se plantean actividades guiadas de construcción. Por ejemplo, en el tema de cuadriláteros, se procede a la construcción con Cabri de todos ellos, siendo conscientes de que, como afirma Duval (1998) el desarrollo de la habilidad de la construcción (o del dibujo) redunda en la mejor visualización e identificación de la figura.

Conviene que se dibujen, además, con una orientación distinta a la habitual para corregir la influencia de los distractores de orientación.

- **Comentarios sobre la fase de explicitación: proponer un ejercicio nuevo por cada uno resuelto en la fase anterior, de similares características.**

Es importante que en la fase de explicitación las actividades sean similares a las planteadas en la fase de orientación libre, para que los alumnos realicen por su cuenta lo que previamente han realizado guiados, afianzando así su comprensión, porque en esta fase construyen sobre las experiencias previas. Se aconseja proponer un ejercicio nuevo por cada uno resuelto en la fase anterior, de similares características.

(Se ha puesto un ejemplo en los comentarios de la fase anterior).

- **Comentarios sobre la fase de orientación libre: en las actividades de construcción proponer una orientación distinta a la habitual.**

En la fase de orientación libre, los alumnos encuentran ejercicios de varios pasos. Se trata de que puedan aplicar lo adquirido tanto a contenidos como al lenguaje necesario para exponerlo y guiar al alumno en la corrección de los errores detectados. El planteamiento de los ejercicios depende, no hay que olvidarlo, de los errores detectados.

Si en las dos fases anteriores era importante la construcción, en esta cobra especial relevancia. Se ha podido comprobar, en el tema de los cuadriláteros, que habría sido necesario realizar más actividades a la construcción de polígonos y cuadriláteros con una orientación distinta a la habitual, en lugar de aplicar las propiedades de los cuadriláteros.

De los cuatro errores que había en el grupo experimental correspondientes a los ítems (9a, 9b, 9c y 9d) se corrigieron dos de ellos (9a, 9b) siendo 66,7% y 71,4% los porcentajes de aciertos respectivos, uno quedó casi corregido (9d) siendo el acierto 52,4%, y uno quedó sin corregir (9c) con el 42,9% de aciertos.

- **Comentarios sobre la fase de integración: atender a la doble dimensión, en especial a la de refuerzo.**

La fase de integración, “Repaso y profundización de lo aprendido”, consta de actividades de refuerzo y de ampliación. El planteamiento de los ejercicios, como se ha dicho, depende de los errores detectados.

Es importante, en esta fase, atender a la doble dimensión, es decir tanto al refuerzo, como a la ampliación. Por ejemplo, en el apartado del teorema de Pitágoras, se plantearon solamente actividades de ampliación y a la vista de los resultados en el post-test del grupo experimental, se concluyó que habría sido necesario realizar más actividades de refuerzo. El dato es que solo acertaron el ítem referido a las ternas pitagóricas el 38,1% de los alumnos, siendo el límite para determinar la corrección del error, el 54%.

En el apartado de los elementos de un polígono regular, tampoco se plantearon actividades de refuerzo, solo de ampliación y, habría sido necesario plantear más actividades de refuerzo pues, como ya se ha comentado, en el post-test los alumnos del grupo experimental siguen con el error (casi corregido, pero no totalmente) de no identificar el radio de un polígono regular.

La actividad de refuerzo puede plantearse ofreciendo nuevamente a los alumnos la tarea propuesta en la fase de indagación para confrontar los resultados al inicio y al final del estudio del apartado correspondiente. De esta manera pueden ser conscientes de su aprendizaje y, si es necesario, repetir alguno de los ejercicios de las fases anteriores.

Al finalizar cada unidad se presentan unos ejercicios de evaluación para que los alumnos sean conscientes de sus aprendizajes.

6.4. Discusión de la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele.

Para medir la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele, se eligieron dos grupos semejantes en el pre-test en los que impartía la asignatura la misma profesora. El grupo experimental siguió dicha metodología y el de contraste utilizó la tradicional. Se obtuvieron diferencias significativas favorables al grupo experimental. Además, el cálculo del tamaño del efecto permitió concluir que la diferencia en el aprendizaje es grande, es decir, tiene gran relevancia práctica.

Para determinar más el sentido de esta gran relevancia práctica del modelo de Van Hiele se analizaron los errores en el pre-test que persisten en el post-test, en el grupo experimental, para determinar de manera más concreta qué errores se han corregido con el modelo de Van Hiele y qué errores han quedado pendientes de subsanar.

Aunque el grupo experimental y el de contraste eran semejantes en el pre-test, sin embargo de los 14 errores considerados, el experimental los tenía todos mientras que el de contraste tenía solo 12.

En el post-test, el experimental ha corregido 9 errores, mientras que el de contraste solo ha corregido 4.

Además, teniendo en cuenta que el límite para determinar el error está en un 54% de aciertos, se observa que de los 5 errores que persisten en el grupo experimental, 3 de ellos casi están corregidos mientas que 2 quedan por corregir. En el grupo de contraste, de los 8 errores que persisten, solo 3 están casi corregidos mientras que 5 están todavía pendientes de corregir.

Los errores que no se ha conseguido corregir con esta metodología experimental son:

- Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).
- Identificación del trapecio rectángulo girado (9c).
- Identificación de un trapezoide (9d).
- Identificación del radio de un polígono regular (11c).
- Identificación de las ternas pitagóricas (15).

De estos cinco errores, como se acaba de comentar, hay 3 que están casi corregidos (4c, 9d y 11c) ya que tienen un porcentaje de aciertos de 52,4% y en esta Tesis se ha adoptado que el error existe hasta el 54% de aciertos. En cambio solo reconocen el trapecio rectángulo girado (9c) el 42,9% y solo identifican correctamente las ternas pitagóricas (15) el 38,1% de los alumnos del grupo experimental. Aunque se ha corregido bastante pues se partía, respectivamente, del 14,3% y 4,8% de aciertos, sin embargo no se puede decir que hayan sido subsanados.

		Error en el grupo experimental					Error en el grupo de contraste			
		% aciertos pre-test		**% aciertos post-test**			**% aciertos pre-test**		**% aciertos post-test**	
Error 1	1c	47,6	Error	71,4			66,7		55,6	
Error 2	4c	14,3	Error	52,4	Error		27,8	Error	27,8	Error
Error 3	9a	9,5	Error	66,7			16,7	Error	66,7	
	9b	33,3	Error	71,4			50,0	Error	55,6	
	9c	23,8	Error	42,9	Error		11,1	Error	38,9	Error
	9d	33,3	Error	52,4	Error		38,9	Error	55,6	
Error 4	10c2	14,3	Error	66,7			27,8	Error	50,0	Error
Error 5	11a	0,0	Error	61,9			0,0	Error	61,1	
	11c	4,8	Error	52,4	Error		38,9	Error	38,9	Error
Error 6	12c	52,4	Error	81,0			22,2	Error	50,0	Error
Error7	13b	47,6	Error	57,1			66,7		61,1	
	13c	42,9	Error	66,7			38,9	Error	44,4	Error
	13e	42,9	Error	81,0			33,3	Error	50,0	Error
Error 8	15	4,8	Error	38,1	Error		0,0	Error	33,3	Error

Tabla 76. Comparación de los errores en el pre-test y post-test entre el grupo experimental y el de contraste

Las propuestas para la corrección de estos errores con la implementación curricular de Van Hiele, se han realizado en el capítulo anterior, si bien, como algunos persisten, está claro que, como en toda investigación de diseño, es necesario incluir dichas propuestas en la siguiente aplicación, para determinar si con ello se corrige o tratar de identificar otras causas.

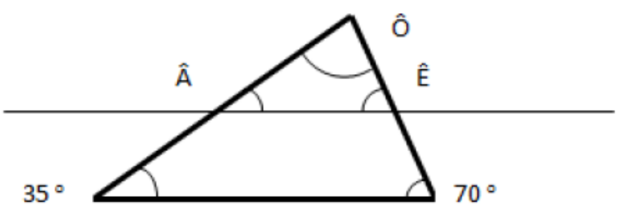
6.5. Discusión de los resultados de la investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos del grupo experimental a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario que permita identificar el nivel de razonamiento de los alumnos.

Una vez obtenidos los resultados de las respuestas de los alumnos a todos los ítems del cuestionario, incluidas las dos preguntas abiertas, se identificó el grupo de los que no han cometido ninguno de los errores considerados (aunque hayan cometido otros). Resultan 6 alumnos y curiosamente son 3 chicas y 3 chicos.

A continuación se expone la discusión de las respuestas de cada uno de los 5 ítems en los que persiste el error y además de las dos respuestas abiertas, realizando un comentario sobre el posible nivel de razonamiento de los alumnos.

- **Discusión de los resultados de la determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).**

4. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos Â, Ê y Ô.



a. El ángulo Â mide:	b. El ángulo Ê mide:	c. El ángulo Ô mide:

d. Justifica la respuesta c:

Ilustración 77. Tarea relativa a la determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)

Como se ha comentado, este error está casi corregido pues es acertado por 11 alumnos de 21, que constituyen el 52,4%.

En el ítem 4d se pedía justificar la respuesta.

Los 11 alumnos (1042, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 10410, 10414, 10417, 10418) han verbalizado su respuesta. Todos razonan utilizando la propiedad de la suma. Estarían en el nivel de pensamiento de Análisis. Solamente hay un alumno (10417), que aunque razona utilizando la propiedad, comete el error de pensar que la suma es 360º en vez de 180º *"Porque todos los lados deben sumar 360 y si sumamos A y E que son lo mismo que B y F y a 360 le restamos la suma nos salen 75".* El resultado le da bien porque lo ha restado dos veces.

Este mismo argumento utiliza un alumno que responde incorrectamente. El alumno que responde 255º (10411) justifica *"Porque si A mide 35 grados y E 70 grados pues faltan 255 grados para llegar a 360 grados".* Comete el error de pensar que la suma de los ángulos de un triángulo es 360º en vez de 180º. Aunque cometan el error razonan según la propiedad, es decir están razonando en el nivel de Análisis de Van Hiele.

El alumno que responde 105º (10423) justifica *"Porque es la suma del ángulo A y el ángulo E"*, nuevamente se equivoca en el valor pero razona en el nivel 1 de Van Hiele.

Hay dos alumnos que tienen un razonamiento visual y además incorrecto. El alumno que responde 106º (1043) justifica la respuesta diciendo *"Porque un ángulo obtuso".* El mismo error comete el alumno que responde 95º (10419) al decir *"Porque es un ángulo obtuso y los ángulos obtusos miden más de 90 grados"*.

Hay 6 alumnos de los que no se puede realizar ningún comentario sobre su razonamiento ya que no verbalizan nada. Los dos alumnos que no responden ni justifican son los que tienen códigos 10413 y 10424 en el post-test. Los dos alumnos que responden 80º (10415 y 10420) no justifican la respuesta. Tampoco lo hace el alumno que responde 30º (10422). Ni el que responde 180º (10421).

A continuación se analizan las respuestas del ítem 1c y la justificación de la misma en el ítem 1e.

- **Discusión de los resultados de la identificación de las rectas perpendiculares giradas (1c).**

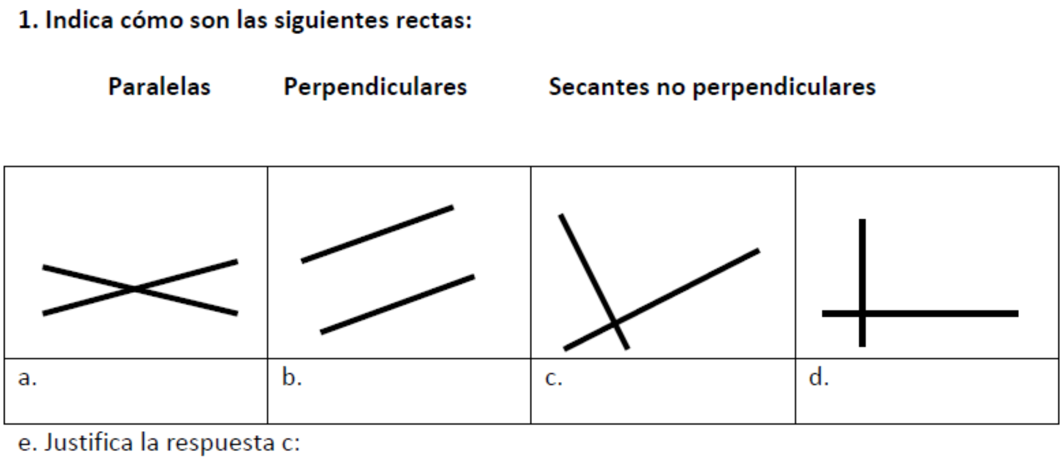


Ilustración 78. Tarea relativa al reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano

Todos los alumnos han respondido al ítem. La ausencia de no respuesta es muy significativo pues indica que los alumnos creen que saben la respuesta. El porcentaje de aciertos (71,4%), indica que en este ítem no hay error.

De los 15 alumnos que han respondido correctamente, 9 han verbalizado también correctamente la justificación (1042, 1043, 1046, 1048, 1049, 10410, 10413, 10414, 10417) y 6 (1044, 10411, 10415, 10418, 10421, 10423) no han justificado nada. De los 9, 8 razonan utilizando la propiedad de que forman ángulos rectos (1042, 1043, 1046, 1048, 1049, 10410, 10414, 10418), por lo que se puede pensar que razonan en el niel 1 de Van Hiele. Solo un alumno (10413) utiliza un razonamiento visual, propio del nivel 0.

De los 6 alumnos que responden erróneamente, 3 justifican la respuesta mostrando que tienen los conceptos aprendidos al revés. De ellos 2 utilizan argumentos visuales correspondientes al nivel 0 de Van Hiele (1045, 10419) y el otro (1047) utiliza la propiedad, razonando en el nivel 1 de Van Hiele. Los otros 3 alumnos que no justifican su respuesta son 10420, 10422 y 10424.

- **Discusión de los resultados de la identificación de las ternas pitagóricas (15).**

15. Indica cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5 **b. 6, 8, 10** **c. 5, 6, 7**

Ilustración 79. Tarea relativa a la identificación de ternas pitagóricas

De los 8 alumnos que responden correctamente, solo hay dos que simplemente señalan la respuesta correcta (1043 y 1048), y los otros 6 responden aplicando el teorema de Pitágoras en cada caso (1046, 10410, 10414, 10417, 10418 y 10423). Se puede afirmar que estos seis alumnos razonan en el primer nivel de Van Hiele. De los dos primeros no se dispone de más elementos para juzgar sobre su razonamiento.

Los demás alumnos señalan una de las tres ternas, sin explicar nada. De estos alumnos no se puede concluir nada sobre su razonamiento.

- **Discusión de los resultados de la identificación de un trapecio rectángulo girado (9c).**

9. Escribe los nombres de los siguientes polígonos:

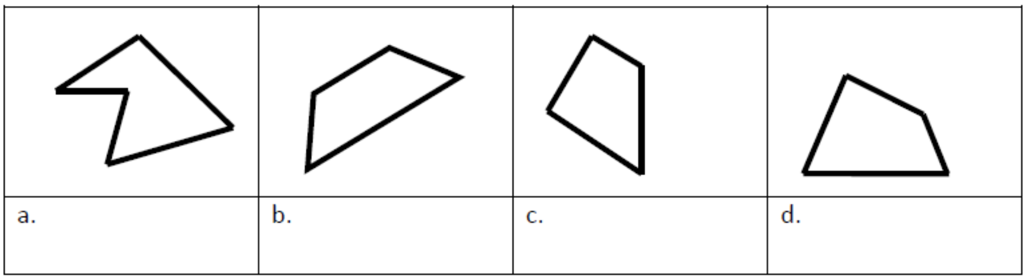


Ilustración 80. Tarea relativa a la identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos

En este caso solamente 9 alumnos de 21 (42,9%) responden correctamente. Estos alumnos son los que tienen códigos 1042, 1043, 1046, 1048, 1049, 10410, 10414, 10417, 10418. De estos, hay 6 que también han respondido correctamente en las cuestiones anteriores (4c, 1c y 15). Son los de códigos 1046, 1048, 10410, 10414, 10417 y 10418.

El error más frecuente es la confusión con el trapezoide, el cual ha sido cometido por 6 alumnos (28,6%), con los códigos 1044, 1045, 10413, 10419, 10421 y 10422.

La no respuesta se ha dado en 3 casos (14,3%), que son los alumnos que tienen códigos 10415, 10420 y 10424.

Ha habido otros 3 errores sin relevancia (14,3%), romboide (10411), trapecio equilátero (1047) y trapecio recto (10423), pudiendo considerarse este último un lapsus de terminología.

- **Discusión de los resultados de la identificación de un trapezoide (9d).**

El trapezoide es reconocido por 11 alumnos de 21 (52,4%). Son los que tienen códigos 1042, 1044, 1045, 1046, 1048, 1049, 10410, 10413, 10414, 10417, 10418. En esta lista se encuentran los seis mencionados en el ítem anterior.

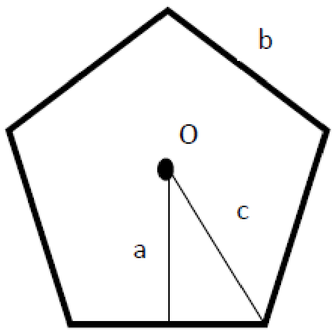
La no respuesta se da en 4 casos (19%) que corresponden a los alumnos de códigos 10411, 10415, 10420 y 10424.

Los errores cometidos son denominarlo trapecio (10419, 10421, 10422) o trapecio escaleno (1043, 1047, 10423).

La única observación adicional que se hace es que solo hay dos alumnos que confunden trapecio con trapezoide (10421 y 10422). Lo cual no es representativo.

- **Discusión de los resultados de la identificación del radio de un polígono regular (11c).**

11. Completa.



En un polígono regular:

a. El segmento **a** se llama.................................
b. El segmento **b** se llama.................................
c. El segmento **c** se llama.....................................
d. El punto **O** se llama..

Ilustración 81.Tarea relativa a la identificación de los elementos de un polígono regular

En este ítem 11 alumnos de 21 (52,4%), han respondido correctamente. Son los de códigos 1046, 1047, 1048, 10410, 10411, 10414, 10417, 10418, 10421, 10422 y 10423. Nuevamente entre estos se encuentran los 6 alumnos mencionados.

De los otros casos, lo más habitual ha sido la no respuesta de 6 alumnos (28,6%), 1042, 1043, 1045, 10415, 10420 y 10424.

Las otras respuestas aparecen solo una vez cada una de ellas, diagonal (1044), cateto (1049), hipotenusa (10413), semirrecta (10419).

En la tabla que se presenta a continuación, se muestran las respuestas de los alumnos del grupo experimental a las cuestiones planteadas en estos 5 ítems en los que persistía el error y además las respuestas de los ítems 1c y 1e. Se realizan algunos comentarios sobre el tipo de respuesta (si es correcta o incorrecta) y se propone en qué nivel de Van Hiele están razonando los alumnos. Finalmente se realiza la observación del número de errores (de los 5 que se están tratando) que mantienen estos alumnos, llegando a la conclusión de que solo hay 6 alumnos del grupo experimental que han corregido estos errores, lo cual supone casi un tercio de la clase (28,6%).

Cód. post-test	**1c**	**1e (justificación)**		**4c**	**4d (justificación)**		**9c Trapecio rectángulo**	**9d Trapezoide**	**11c Radio polígono regular**	**15 Ternas pitagóricas**	**Nº de errores de los 5**	**Nivel**
1042	P	Son perpendiculares porque forman cuatro ángulos rectos.	*Correcta* *N1*	75º	Porque un triángulo tiene 180 grados y sumando A más E te da 105 grados y la diferencia de 105 grados a 180 grados es lo que mide O.	*Correcta* *N1*	Correcta	Correcta	Ns/nc	Señala una	2	
1043	P	Son perpendiculares porque hacen un ángulo recto.	*Correcta* *N1*	106º	Porque un ángulo obtuso	*Incorrecta N0*	Correcta	Trapecio escaleno	Ns/nc	Correcta: Señala a y b	3	
1044	P			75º	Porque todos los ángulos juntos tienen que formar 180 grados.	*Correcta* *N1*	Trapezoide	Correcta	Diagonal	Señala una	3	
1045	NP	Es exactamente que la d pero inclinada. *(d mal)*	*Concepto aprendido al revés*	75º	He restado 180 - 105= 75. El resultado siempre tiene que dar 180.	*Correcta* *N1*	Trapezoide	Correcta	Ns/nc	Señala una	3	
1046	P	Porque forman un ángulo de 90 grados.	*Correcta* *N1*	75º	Porque la suma de los tres ángulos debe sumar 180 grados. 35+70=105, 180-105=75.	*Correcta* *N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	N1

Cód. post-test	**1c**	**1e (justificación)**		**4c**	**4d (justificación)**		**9c Trapecio rectángulo**	**9d Trapezoide**	**11c Radio polígono regular**	**15 Ternas pitagóricas**	**Nº de errores de los 5**	**Nivel**
1047	NP	Porque forman cuatro ángulos rectos	*Concepto aprendido al revés*	75º	La suma tiene que ser 180 grados y si restamos 70+35 a 180 nos queda 75.	*Correcta N1*	Trapecio equilátero	Trapecio escaleno	Correcta	Señala una	3	
1048	P	Porque al cruzarse forman cuatro ángulos de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque los tres ángulos de un triángulo forman 180 grados, con lo cual si sumamos los dos primeros y el total se lo restamos a 180 grados da 75 grados.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta: Señala a y b	0	N1
1049	P	Son perpendiculares porque al cruzarse forman un ángulo de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	70+35=105, 180-105=75.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Cateto	Señala una	2	
10410	P	Porque las dos líneas forman ángulos de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Los triángulos forman un grado de 180 grados, si sumamos 35 y 70 nos sale 105 y le añadimos 75 para formar 180.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	N1

Cód. post-test	**1c**	**1e (justificación)**		**4c**	**4d (justificación)**		**9c Trapecio rectángulo**	**9d Trapezoide**	**11c Radio polígono regular**	**15 Ternas pitagóricas**	**Nº de errores de los 5**	**Nivel**
10411	P		*Sin respuesta*	255º	Porque si A mide 35 grados y E 70 grados pues faltan 255 grados para llegar a 360 grados	*Incorrecta N1*	Romboide	Ns/nc	Correcta	Señala una	4	
10413	P	Porque es la misma figura que la d pero está girada.	*Correcta N0*	Ns/nc		*Sin respuesta*	Trapezoide	Correcta	Hipotenusa	Señala una	4	
10414	P	Son perpendiculares porque al cruzarse forman cuatro ángulos de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque se le resta a 180 la suma de los otros dos ángulos.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	N1
10415	P		*Sin respuesta*	80º		*Sin respuesta*	Ns/nc	Ns/nc	Ns/nc	Señala una	5	
10417	P	Aunque esté inclinada, si lo medimos con el transportador cada ángulo va a ser de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque todos los lados deben sumar 360 y si sumamos A y E que son lo mismo que B y F y a 360 le restamos la suma nos salen 75.	*Incorrecta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	N1

Cód. post-test	**1c**	**1e (justificación)**		**4c**	**4d (justificación)**		**9c Trapecio rectángulo**	**9d Trapezoide**	**11c Radio polígono regular**	**15 Ternas pitagóricas**	**Nº de errores de los 5**	**Nivel**
10418	P		*Sin respuesta*	75º	La suma de todos los ángulos de un triángulo vale 180 grados.35+70= 105, 180-105=75.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	N1
10419	NP	Porque es igual que la d pero el dibujo girado.	*Concepto aprendido al revés*	95º	Porque es un ángulo obtuso y los ángulos obtusos miden más de 90 grados	*Incorrecta N0*	Trapezoide	Trapecio	Semirrecta	Señala una	5	
10420	NP			80º		*Sin respuesta*	Ns/nc	Ns/nc	Ns/nc	Señala una	5	
10421	P		*Sin respuesta*	180º		*Sin respuesta*	Trapezoide	Trapecio	Correcta	Señala una	4	
10422	NP		*Sin respuesta*	30º		*Sin respuesta*	Trapezoide	Trapecio	Correcta	Señala una	4	
10423	P		*Sin respuesta*	105º	Porque es la suma del ángulo A y el ángulo E	*Incorrecta N1*	Trapecio recto	Trapecio escaleno	Correcta	Correcta	3	
10424	NP		*Sin respuesta*	Ns/nc		*Sin respuesta*	Ns/nc	Ns/nc	Ns/nc	Señala una	5	

Tabla 77. Respuestas de los alumnos del grupo experimental a los 5 ítems en los que persiste el error y además al ítem 1c

Finalmente, se realizan unos comentarios finales sobre estos seis alumnos que han corregido los 5 errores que globalmente se mantienen en el grupo experimental.

Son tres chicas y tres chicos.

Alumno 1046: Se le asigna el nivel 1 de Van Hiele porque razona utilizando las propiedades. En el post-test obtiene la puntuación de 10.

Alumna 1048: Se le asigna el nivel 1 de Van Hiele porque razona utilizando las propiedades. En el post-test obtiene la puntuación de 10.

Alumno 10410: Se le asigna el nivel 1 de Van Hiele porque razona utilizando las propiedades. En el post-test obtiene la puntuación de 9,17.

Los errores que ha cometido en el post-test son:

- Confunde ángulos complementarios y suplementarios.
- Ha clasificado como acutángulo un triángulo rectángulo (girado).
- Ha aplicado "base x altura" como fórmula del área del triángulo

Alumno 10414: Se le asigna el nivel 1 de Van Hiele porque razona utilizando las propiedades. En el post-test obtiene la puntuación de 10.

Alumna 10417: Se le asigna el nivel 1 de Van Hiele porque razona utilizando las propiedades. En el post-test obtiene la puntuación de 9,79.

Los errores que ha cometido en el post-test son:

- Ha llamado "circuncentro" al centro del polígono regular, lo cual no deja de tener su lógica.

Alumna 10418: Se le asigna el nivel 1 de Van Hiele porque razona utilizando las propiedades. En el post-test obtiene la puntuación de 9,17.

Los errores que ha cometido en el post-test son:

- Ha clasificado como acutángulo un triángulo rectángulo (girado).
- Ha llamado “trapecio” al romboide.
- Confunde segmento circular con sector circular.

Código post-test	**1c**	**1e (justificación)**		**4c**	**4d (justificación)**		**9c**	**9d**	**11c**	**15**	**Nº de errores de los 5**	**Nivel**
1046	P	Porque forman un ángulo de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque la suma de los tres ángulos debe sumar 180 grados. 35+70=105, 180-105=75.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	*N1*
1048	P	Porque al cruzarse forman cuatro ángulos de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque los tres ángulos de un triángulo forman 180 grados, con lo cual si sumamos los dos primeros y el total se lo restamos a 180 grados da 75 grados.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	*N1*
10410	P	Porque las dos líneas forman ángulos de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Los triángulos forman un grado de 180 grados, si sumamos 35 y 70 nos sale 105 y le añadimos 75 para formar 180.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	*N1*
10414	P	Son perpendiculares porque al cruzarse forman cuatro ángulos de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque se le resta a 180 la suma de los otros dos ángulos.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	*N1*
10417	P	Aunque esté inclinada, si lo medimos con el transportador cada ángulo va a ser de 90 grados.	*Correcta N1*	75º	Porque todos los lados deben sumar 360 y si sumamos A y E que son lo mismo que B y F y a 360 le restamos la suma nos salen 75.	*Incorrecta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	*N1*
10418	P		*Sin respuesta*	75º	La suma de todos los ángulos de un triángulo vale 180 grados.35+70= 105, 180-105=75.	*Correcta N1*	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	0	*N1*

Tabla 78. Respuestas de los 6 alumnos del grupo experimental que han los 5 ítems en los que persiste el error

Analizando los 5 errores mencionados en los otros alumnos, se observa que los que tienen 2, 3 o 4, obtienen buena puntuación en el post-test. De algunos se podría decir que razonan en el nivel 1, aunque tengan errores, y a veces razonen en el nivel 0. De otros no se tienen elementos para juzgar.

- Tienen dos errores:

  Alumno 1042 (puntuación en el post-test 9,58)

  Alumna 1049 (puntuación en el post-test 9,58)

  Viendo la tabla de las respuestas del grupo experimental, se puede concluir que razonan en el nivel 1.

- Tienen tres errores:

  Alumno 1043 (puntuación en el post-test 8,13)

  Alumna 1044 (puntuación en el post-test 8,13)

  Alumno 1045 (puntuación en el post-test 6,88)

  Alumno 1047 (puntuación en el post-test 8,33)

  Alumno 10423 (puntuación en el post-test 8,54)

  Viendo la tabla de las respuestas del grupo experimental, se puede concluir que razonan en los niveles 0 y 1.

- Tienen cuatro errores:

  Alumna 10411 (puntuación en el post-test 8,13)

  Alumna 10413 (puntuación en el post-test 7,92)

  Alumna 10421 (puntuación en el post-test 8,13)

  Alumna 10422 (puntuación en el post-test 6,04)

Viendo la tabla de las respuestas del grupo experimental, se puede concluir que razonan en los niveles 0 y 1.

- Tienen cinco errores:

Alumna 10415 (puntuación en el post-test 6,88)

Alumna 10419 (puntuación en el post-test 6,04)

Alumna 10420 (puntuación en el post-test 4,17)

Alumna 10424 (puntuación en el post-test 3,96)

La alumna 10415 no verbaliza cuando se pide justificar. De los 5 errores, 3 son sin respuesta, por lo que no se puede concluir nada sobre su razonamiento.

La alumna 10419 utiliza justificaciones claramente visuales, por lo que razona claramente en el nivel 0 de Van Hiele.

Caso aparte lo constituyen las otras dos alumnas. Sus respuestas en el post-test se distribuyen de manera casi igual:

La alumna 10420, no da respuesta en el 33% de los ítems, responde erróneamente en el 25% y correctamente en el 42%.

La alumna 10424, no da respuesta en el 33% de los ítems, responde erróneamente en el 27% y correctamente en el 40%.

En estas dos alumnas se observa una gran deficiencia en la comprensión de la Geometría.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.

Una vez concluida la presentación de los resultados y expuesto el análisis de los mismos, se realizan las conclusiones relativas a los objetivos de esta Tesis y se plantean propuestas de trabajo futuro.

7.1. Conclusiones por objetivos específicos.

A continuación se muestra que se han conseguido cada uno de los objetivos específicos planteados en la Tesis.

Primera conclusión: Se ha presentado un estudio pormenorizado del modelo de Van Hiele y de las investigaciones realizadas sobre el mismo, desde los primeros proyectos que se llevaron a cabo, prestando especial atención al desarrollo de dicho modelo en España por su carácter de pionero en dichos estudios.

Segunda conclusión: Se ha abordado no solo la comprensión en Geometría, sino también las teorías sobre la formación del concepto geométrico basadas en la visualización de Vinner y Hershkowitz, los conceptos figurales de Fischbein, el modelo cognitivo de Duval, la teoría de las reglas intuitivas, la propuesta de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos y los distractores de orientación. Estos distintos acercamientos a lo que ocurre en la mente del alumno cuando aprende Geometría, constituyen un marco útil para que los profesores puedan enseñar de una manera más eficaz.

La reflexión que se hace de estas dos primeras conclusiones es que se ha presentado un amplio estudio sobre el modelo de Van Hiele, tanto por el contenido de dicho modelo como por la presentación que se hace de las primeras investigaciones sobre el mismo y de implementaciones relevantes, completado con otras teorías sobre formación del concepto geométrico. Este estudio puede llegar a ser de gran utilidad a profesionales, profesores e investigadores que deseen conocer dicha teoría sobre la comprensión de la Geometría.

Tercera conclusión: Se ha logrado diseñar un cuestionario válido y fiable para medir el rendimiento, conocer las imágenes conceptuales y los errores de comprensión en Geometría, el cual consta además de unas cuestiones abiertas que, junto con el análisis de los errores, permiten conocer el nivel de razonamiento de los alumnos, de una manera relativamente sencilla y compaginable con la dinámica del aula.

Dicho cuestionario permite aplicar el modelo de Van Hiele de manera correcta, es decir, partiendo de sus conocimientos previos y también de los errores y dificultades de comprensión de los alumnos, algunos inimaginables por los profesores.

También se ha determinado su valor como instrumento de medición del rendimiento de los alumnos en Geometría.

Este cuestionario tiene una gran relevancia práctica pues permite detectar los errores de comprensión de los alumnos al inicio del estudio de la Geometría y poder orientar la enseñanza a la corrección de dichos errores. Dicha situación inicial dependerá de los centros educativos y no será la misma en todos ellos ni en todas las promociones de alumnos.

Cuarta conclusión: Se han detectado los errores de comprensión de los alumnos al principio y al final del estudio de la Geometría en 1º de ESO y se ha determinado que no existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género. Es más, del análisis de los resultados se puede inferir que no existen diferencias significativas ni en los conocimientos iniciales ni en el aprendizaje por razón de género.

En concreto, las conclusiones de este estudio sobre los errores persistente son las siguientes:

- **Sobre el error 1:** no reconocer las rectas perpendiculares giradas.

Un error persistente a pesar del estudio de la Geometría es no reconocer las rectas perpendiculares giradas. En esta Tesis se ha constatado que es necesario diseñar una estrategia para conseguir la visualización de las rectas perpendiculares giradas que, en concreto, ha sido la experimentación de las unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele y del software de Geometría Dinámica para la corrección de errores, como se ha explicado al exponer el diseño de dichas unidades.

- **Sobre el error 2:** no determinar el valor de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos.

Otro error persistente es no saber determinar el valor de un ángulo de un triángulo cuando se conocen los otros dos. También en esta Tesis se ha visto que hace falta realizar un planteamiento para que los alumnos adquieran este concepto. Este error existe también en el grupo experimental tras el estudio de la Geometría porque tuvieron pocos ejercicios propuestos para afianzar este concepto.

- **Sobre el error 3:** no identificar el pentágono irregular, los trapecios y el trapezoide.

Tampoco identifican el pentágono irregular, los trapecios y trapezoide, porque en la enseñanza, no se ha trabajado suficientemente con polígonos irregulares y cóncavos.

Para subsanar este error, convendría, en primer lugar, trabajar más con polígonos irregulares y cóncavos y además, incidir en la distinción entre pentágonos irregulares y trapezoides.

En segundo lugar, analizando de manera conjunta las respuestas a los ítems relativos a los trapecios y trapezoides se observa que los alumnos no los distinguen y tienden, o bien a denominarlos de manera genérica como cuadriláteros o a confundirlos entre sí. Esto sería admisible en Primaria pero no en 1º de ESO, por lo que hay que incidir en la enseñanza en aprender a nombrar cada figura.

- **Sobre el error 4:** no reconocer el área del romboide.

Desconocen también el área del romboide y aplican el área del triángulo. Para corregirlo se deben realizar más ejercicios en los que se deje claro que en el área del romboide “no hay que dividir entre 2” y practicar en la obtención del área del romboide a partir del rectángulo formado.

- **Sobre el error 5:** no identificar la apotema y el radio de un polígono regular.

Confunden la apotema de un polígono regular con el radio. Para corregir este error sería necesario realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas.

Desconocen el radio o lo denominan diagonal. Como en el caso del a apotema, para corregir este error sería preciso realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas y, en concreto, diferenciarlo de la diagonal.

- **Sobre el error 6:** no identificar la cuerda de una circunferencia.

No identifican la cuerda en una circunferencia o la confunden con el arco. Este error podría corregirse realizando más práctica de diferenciación de la cuerda y el arco, además de los ejercicios de identificación de los elementos de la circunferencia y demás figuras geométricas.

- **Sobre el error 7:** no identificar el sector circular, el trapecio circular y el segmento circular.

De las figuras circulares solo reconocen el círculo y la corona circular, es decir, lo mismo que en Primaria. Siguen sin reconocer el sector circular, el trapecio circular y el segmento circular, confundiendo dichos elementos entre sí, porque se ha trabajado poco con estos tres objetos.

- **Sobre el error 8:** no identificar las ternas pitagóricas.

La tarea de identificación de ternas pitagóricas supone un grado de comprensión en Geometría que realmente la mayoría de los alumnos no tienen por lo que es necesario idear una estrategia que guíe al alumno en su comprensión.

Quinta conclusión: Se ha determinado el modo concreto y específico de utilización del software geométrico para corregir los errores detectados. Para ello, primero se analizó del software de Geometría Dinámica y se experimentó su utilización para la corrección de errores.

Sexta conclusión: Se ha desarrollado una instrumentalización curricular del modelo de Van Hiele en la didáctica de la Geometría de 1º de ESO, mediante el diseño de unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Esta propuesta curricular se ha experimentado con resultados satisfactorios.

La segunda gran contribución práctica de esta investigación es la instrumentalización curricular del modelo de Van Hiele en la didáctica de la Geometría en 1º de ESO a través de las unidades didácticas secuenciadas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele y en las que se utiliza el software de Geometría Dinámica. Como se ha mencionado, en la elaboración de dichas unidades se tuvieron en cuenta los errores de comprensión que habían sido detectados en la aplicación del cuestionario.

Estas unidades didácticas han sido utilizadas por un grupo de alumnos y se ha podido comprobar la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele. En concreto se ha constatado que con este modelo se corrigen casi todos los errores de comprensión detectados.

Sorprende que algunos de los errores detectados en el cuestionario utilizado como base para la elaboración de las unidades, correspondan a contenidos esenciales de Segundo Ciclo de Primaria, por ejemplo, el reconocimiento de las rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas. No se puede partir de la hipótesis de que los alumnos tienen adquiridos todos los conceptos trabajados en 3º y 4º de Primaria.

Otros errores corresponden a contenidos de Tercer Ciclo de Primaria, que no han adquirido, como por ejemplo, la clasificación de los triángulos según los lados y los ángulos o la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. Se realiza el mismo comentario que en el párrafo anterior.

Las conclusiones obtenidas del proceso de elaboración, experimentación y evaluación de las unidades son las siguientes:

- **Fase de indagación:** abordarla siempre.

Las unidades comienzan con la fase de indagación sobre lo que se va a tratar en el apartado correspondiente. Excepto que sea un tema completamente nuevo para los alumnos, conviene abordarlo para que sean conscientes de lo que se va a tratar.

- **Fase de orientación dirigida:** plantear varios ejercicios sobre cada error detectado y realizar actividades de construcción.

En la fase de orientación dirigida se puede comenzar, si es necesario, con un poco de teoría.

Además, conviene plantear varios ejercicios sobre cada error detectado y no solo uno.

Es conveniente que se dibujen, además, con una orientación distinta a la habitual para corregir la influencia de los distractores de orientación.

- **Fase de explicitación:** proponer un ejercicio nuevo por cada uno resuelto en la fase anterior, de similares características.

Es importante que en la fase de explicitación las actividades sean similares a las planteadas en la fase de orientación libre, para que los alumnos realicen por su cuenta lo que previamente han realizado guiados, afianzando así su comprensión, porque en esta fase, construyen sobre las experiencias previas. Se aconseja proponer un ejercicio nuevo por cada uno resuelto en la fase anterior, de similares características.

- **Fase de orientación libre:** en las actividades de construcción proponer una orientación distinta a la habitual.

El planteamiento de los ejercicios depende, no hay que olvidarlo, de los errores detectados.

- **Fase de integración:** atender a la doble dimensión, en especial a la de refuerzo.

Es importante, en esta fase, atender a la doble dimensión, es decir tanto al refuerzo, como a la ampliación.

Por ejemplo, en el apartado del teorema de Pitágoras, se plantearon solamente actividades de ampliación y a la vista de los resultados en el post-test del grupo experimental, se concluyó que habría sido necesario realizar más actividades de refuerzo.

En el apartado de los elementos de un polígono regular, tampoco se plantearon actividades de refuerzo, solo de ampliación y, habría sido necesario plantear más actividades de refuerzo pues, como ya se ha comentado, en el post-test los alumnos del grupo experimental siguen con el error (casi corregido, pero no totalmente) de no identificar el radio de un polígono regular.

En todas las fases conviene tener presente cuáles son los errores que se van a corregir y cuál es la metodología que se va a utilizar, si es necesario, ayudándose de una tabla, como se ha ejemplificado en esta propuesta.

Séptima conclusión: Como se ha dicho en la cuarta conclusión, no se han detectado diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género, pero sí se ha constatado que existen diferencias significativas favorables a la metodología basada en el modelo de Van Hiele y con gran relevancia práctica.

De los 8 errores mencionados anteriormente, que se dividen en 14, en el grupo experimental se corrigen 9, 3 están casi corregidos y 2 quedan pendientes de corregir, mientras que en el grupo de contraste, que solo tenía 12 de los 14 errores, se corrigen 4, 3 están casi corregidos y 5 quedan pendientes de corregir.

Octava conclusión: De la investigación cualitativa de las respuestas de los alumnos a determinadas preguntas planteadas en el cuestionario, se concluye que solo 6 alumnos de 21, es decir, casi un tercio de los alumnos que han seguido la metodología experimental, razona correctamente tanto en el nivel Básico, de Reconocimiento o Visualización como en el nivel de Análisis del modelo de Van Hiele, lo cual corrobora la necesidad de comenzar trabajando la visualización tanto de las figuras geométricas como de los elementos de las figuras.

7.2. Conclusiones por objetivos generales.

Con este detalle de la consecución de los objetivos específicos, está claro que también se han alcanzado los objetivos generales, es decir:

- Se ha realizado una implementación curricular del modelo de Van Hiele a partir del aprendizaje constructivo a través de Cabri y se ha realizado un proceso de experimentación exhaustivo en entornos reales de aula que han permitido obtener resultados descriptivos en este ámbito.
- Se ha comprobado la eficacia de la enseñanza de la Geometría en primer curso de ESO con este modelo y el uso del software Cabri.
- Se han establecido criterios y prescripciones instructivas a partir de la investigación realizada para desarrollar un programa de mejora de la enseñanza de la Geometría en 1º de ESO basado en el modelo de Van Hiele, en el uso de Cabri y en la detección de errores de comprensión.

7.3. Conclusiones por hipótesis de trabajo.

Se puede afirmar la veracidad de las tres hipótesis de trabajo planteadas:

- El rendimiento de los alumnos en Geometría mejora si se establece una docencia basada en el conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y en la detección de errores, desarrollada con una metodología diseñada según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, y apoyada en un software de Geometría Dinámica.
- El rendimiento de los alumnos en Geometría no depende del género.
- A pesar del estudio de la asignatura, los alumnos mantienen errores en la visualización y reconocimiento de objetos geométricos desde Segundo Ciclo de Primaria, lo cual supone que el diseño curricular o la metodología empleada no son las adecuadas.

7.4. Conclusiones sobre la finalidad de la Tesis.

Se ha realizado la implementación curricular del modelo de Van Hiele en el currículum de 1º de ESO y la comprobación experimental de su eficacia, como era la finalidad de esta Tesis.

7.5. Propuestas de trabajo futuro.

Varias son las líneas de investigación que se podrían seguir después de este estudio.

Sería interesante, por ejemplo, iniciar una nueva línea consistente en investigar la relación del modelo de Van Hiele con los caminos cognitivos comunes, determinar dichos caminos y su relación con el modelo de Van Hiele.

Pero más coherente con el estudio iniciado es, continuar con la implementación curricular a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria, o bien, seguir analizando la visualización en los alumnos durante esta etapa.

También sería interesante reproducir esta investigación pero con estudiantes del Grado de Educación Primaria, ya que son ellos los que van a enseñar la Geometría en los primeros años de escolarización.

BIBLIOGRAFÍA.

Afifi, A. A., y Clark, V. (1990). *Computer-aided multivariate analysis.* New York: Chapman y Hall.

Argibay, J. C. (2006). Técnicas psicométricas. Cuestiones de validez y confiabilidad. *Subjetividad y Procesos Cognitivos, 8*, 15-33.

Arias, J., Maza, I., Sáenz de Castro, C., García, I., y Cebeira, R. (2005). *Formación e investigación sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en Matemáticas para la ESO y los Bachilleratos.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1978). *Educational Psychology.* New York: Holt.

Azcárate, C. (1997). Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma, 25*, 23-30.

Balacheff, N., y Kaput, J. (1996). Computer-based Learning Environments in Mathematics. En A. Bishop, M. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, y C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education* (págs. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Beltrán, J., y Bueno, J. (1995). *Psicología de la Educación.* Barcelona: Boixareu Universitaria.

Beltrán, J., Moraleda, M., Alcañiz, E., Calleja, F., y Santiuste, V. (1990). *Psicología de la Educación.* Madrid: Eudema Universidad.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Blaxter, L., Hughes, C., y Tight, M. (2000). *Cómo se hace una investigación.* Barcelona: Gedisa.

BOCM nº 126, martes 29 de mayo de 2007. (29 de Mayo de 2007). *DECRETO 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Obtenido de http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/curriculo_secundaria_madrid.pdf

BOCM nº 2, martes 3 de enero de 2006. (3 de enero de 2006). *RESOLUCIÓN de 20 de diciembre de 2005, de la Dirección General de Ordenación Académica, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de LCL y de Matemáticas, para los diferentes ciclos de la Ed. Primaria en la Comunidad de Madrid.* Obtenido de http://www.bocm.es/boletin/CM_Boletin_BOCM/20060103_B/00200.PDF

BOCM nº 250, m. 2. (21 de octubre de 2009). *RESOLUCIÓN de 30 de septiembre de 2009.* Obtenido de http://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2009/10/21/2009-10-21_16102009_0142.pdf

BOE nº 5, viernes 5 de enero de 2007. (5 de enero de 2007). *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Obtenido de http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf

Burger, W., y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17 (1),* 31-48.

Cabello, A. B., López, R., y Sánchez, A. B. (2010). El modelo de Van Hiele aplicado a la Geometría en primero de ESO. En M. Contreras, O. Monzó, y L. Puig, *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (págs.

309-315). Valencia: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

Cabello, A. B., Sánchez, A. B., y López, R. (2012 b). Aplicación de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría. En *I Simposio Internacional de Enseñanza de las Ciencias (ISIEC 2012).* Vigo: (Pendiente de edición).

Cabello, A., Sánchez, A., y López, R. (2012 a). Elaboración de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría. En E. Martín, M. Rubio, y J. Urquiza, *Actas de las III Jornadas de Innovación y TIC Educativas JITICE* (págs. 163-166). Madrid.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences.* New York: Accademic Press.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele.* Madrid: M.E.C.

Cronbach, L. J. (1960). *Essentials of psychological testing.* New York: Harper y Row.

Cronbach, L. J. (1980). Validity on parole: How can we go straight? En W. B. Schrader, *New directions for testing and measurement, planning achievement: Progress over a decade.* San Francisco: Jossey Bass.

Cronbach, L. J. (1982). *Designing evaluations of educational and social programs.* San Francisco: Jossey Bass.

Cronbach, L. J. (1988). Internal consistency of tests: Analyses old and new. *Psichometrika, 53 (1)*, 63-70.

Crowley, M. L. (1989). *The design and evaluation of an instrument for assesing mastery van Hiele levels of thinking about quadrilaterals.* Ann Arbor: Univ. Microfilms.

Crowley, M. L. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the van Hiele geometry test. *Journal for Research in Mathematics Education, 21 (3),* 238-241.

De La Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de van Hiele. *Lecturas matemáticas,24*, 99-121.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland, y J. Mason, *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (págs. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. En C. Mammana, y V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study* (págs. 37-51). Dordrecht: Kluwer.

Ebel, R. L. (1965). *Measuring educational achievement.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Ebel, R. L., y Frisbie, D. A. (1986). *Essentials of educational measurement.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Fennema, E., Peterson, P. L., Carpenter, T. P., y Lubinski, C. (1990). Teacher attribute and beliefs about girls, boys and mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 55-69.

Fischbein, E. (1993). La teoría de los conceptos figurales. *Educational Studies in Mathematics, 24 (2),* 139-162.

Fujita, T., y Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education, 9*, 3-20.

Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph nº3*, 1-196.

Gagne, R. M. (1965). *The conditions of learning.* New York: Holt.

García, E., Gil, J., y Gómez, G. (2000). *Análisis Factorial.* Madrid: Hespérides.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Godino, *Matemáticas y su Didáctica para Maestros* (págs. 7-121). Granada: Proyecto Edumat-Maestros.

González, M. J., Polo, I., y Recio, T. (2009). El Proyecto Intergeo. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo*, Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM.* Santander.

Groves, R., Fowler, F., Couper, M., Lepkoski, J., Singer, E., y Tourangeau, R. (2004). *Survey methodology.* New Jersey: John Wiley y Sons.

Guilford, J. P. (1954). *Psychometric Methods.* New York: McGraw-Hill.

Guillén, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in threedimensional geometry. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology Mathematics Education* (págs. 43-50). Valencia: Universidad de Valencia.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Valencia: Universidad de Valencia.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de los conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias, 18 (1)*, 35-53.

Guillén, G. (2004). El modelo de van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16 (3)*, 103-125.

Guillén, G., González, E., y García, M. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo, *Actas del XIII Simposio de la SEIEM* (págs. 247-258). Santander.

Guion, R. M. (1977). Content validity: Three years of talk-what´s the action? *Public Personnel Management, 6*, 407-414.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology 18*, 31-48.

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. *Encuentro de Investigación en Educación Matemática TIEM-98.* Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans. Obtenido de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf

Gutiérrez, A. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos existentes no son útiles. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas, y J. D. Godino, *V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 85-94). Almería.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the student's reasoning in geometry. *Proceedings of the 19th PME Conference 3*, 11-18.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Gimenez, S. LLinares, y M. V. Sánchez, *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática* (págs. 143-170). Granada: Comares.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics 20 (2 y 3)*, 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An allternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journall for Research in Mathematics Education 22 (3)*, 237-251.

Guzmán, M. (2005). Textos de Miguel de Guzmán. Monografía 02. *Suma*.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when "a little learning is a dangerous thing". *Prodeedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Vol. III* (págs. 238-251). Ithaca, New York: Cornell University.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry-Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, Volume 1, Number 1,* 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects on learning Geometry. En P. Nesher, y J. Kilpatrik, *Mathematics and cognition* (págs. 70-95). Cambridge: Cambridge UP.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. En R. Lesh, y M. Landau, *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes* (págs. 205-227). New York: Academic Press.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las Ciencias 17, 2*, 291-309.

INECSE. (2004). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los resultados en España.* Madrid: M.E.C.

INEE. (2010). *Sistema Estatal de indicadores de la educación. Edición 2010.* Obtenido de http://www.mecd.gob.es/inee/sistema-indicadores/indicadores-ediciones-anteriores.html

INEE. (2011). *Evaluación General de Diagnóstico 2010. Educación Secundaria Obligatoria. Segundo curso. Informe de resultados.* Obtenido de http://www.mecd.gob.es/inee/publicaciones/evaluacion-diagnostico.html

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares, y M. Sánchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla: Alfar.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings ot the 18th PME Conference 3*, 41-48.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1995). Guidelines for Teaching Plane Isometries in Secondary School. *The Mathematics Teacher, 88 (7)*, 591-597.

Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 18 (1 y 2)*, 29-34.

Kellogg, R. (1980). Feature frequency and hypothesis testing in the acquisition of rule-governed concepts. *Memory y Cognition, 8*, 297–303.

Kline, P. (1986). *A Handbook of Test Construction.* New York: Methuen.

Kline, P. (1994). *An Easy Guide to Factor Analysis.* Newbury: Sage.

Lawrie, C. (1997). An Evaluation of Two Coding Systems in Determining Van Hiele Levels. *Proceedings of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia,* 294-301.

Leik, R. K. (1966). A measure of ordinal consensus. *Pacific Sociological Review, 9*, 85-90.

Lukas, J. F. (1998). *Análisis de ítems y de tests con ITEMAN.* Lejona: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Mayberry, J. (1981). *An Investigation of the Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Doctoral Dissertation. University microfilms nº 8123078.* University of Georgia.

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14 (1)* , 58-69.

Messik, S. (1995). Standards of validity and the validity of standards in performance assessment. *Educational Measurement: Issues and Practice, 15*, 5-12.

Millman, J., y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn, *Educational measurement* (págs. 335-336). London: Macmillan.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29 (1),* 75-88.

Morales, P. (2007). *La fiabilidad de los tests y escalas.* Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Morales, P. (2011a). *Análisis de ítems en las pruebas objetivas.* Obtenido de http://www.upcomillas.es/personal/peter/otrosdocumentos/analisisitemspruebasobjetivas.pdf

Morales, P. (2011b). *Análisis factorial en la construcción e interpretación de tests, escalas y cuestionarios.* Obtenido de http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/AnalisisFactorial.pdf

Morales, P. (2011c). *Diseños que se pueden aplicar mediante el contraste de medias.* Obtenido de http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/DiseñosMedias.pdf

Morales, P. (2011d). *Tamaño necesario de la muestra: ¿Cuántos sujetos necesitamos?* Obtenido de http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/TamañoMuestra.pdf

Muñiz, J. (2003). *Teoría clásica de los tests.* Madrid: Pirámide.

Muñiz, J. (2005). Utilización de los tests. En J. Muñiz, A. M. Fidalgo, E. García-Cueto, R. Martínez, y R. Moreno, *Análisis de los ítems* (págs. 133-172). Madrid: La Muralla.

Murillo, J. (2000). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO.* Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Nakahara, T. (1995). Children's construction process of the concepts of basic quadrilaterals in Japan. *Proceedings of the 19th PME Conference, 3*, 27-34.

Novak, J. D. (1977). *A Theory of Education.* New York: Cornell University Press.

Nunnally, J. C. (1978). *Psychometric Theory.* New York: McGraw-Hill.

Okazaki, M., y Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion. *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 41-48.

Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología.* Madrid: Pirámide.

Pérez, C. (2009). *Técnicas estadísticas multivariantes con SPSS.* Madrid: Garceta.

Prieto, G., y Delgado, A. (2010). Fiabilidad y Validez. *Papeles del Psicólogo, 31 (1),* 67-74.

Prieto, G., y Muñiz, J. (2000). Un modelo para la evaluación de los tests utilizados en España. *Papeles del psicólogo, 77,* 65-72.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39-63.

Rico, L., y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En J. Carrillo Yáñez, y L. Contreras, *Matemática española en los albores del siglo XXI* (págs. 77-131). Huelva: Hergué.

Sánchez, A. B., y López, R. (2011). La transferencia del aprendizaje algorítmico en el origen de los errores. *Revista de Educación, 328*, 429-445.

Santandreu, M. M. (2004). Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de Matemáticas. *Comunicación y Pedagogía, 200*, 65-70.

Santiuste, V. (2002). Historia y formación de la Psicología del Aprendizaje. En VVAA, *Formación de profesores de Educación Secundaria* (págs. 193-206). Madrid: Univesidad Complutense.

Senk, S., y Usiskin, Z. (1983). Geometry Proof Writing: A New View of Sex Differences in Mathematics Ability. *American Journal of Education, 91 (2),* 187-201.

Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, métodos y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29 (2)*, 173-198.

Spector, P. E. (1992). *Summated rating scale construction.* Newbury Park: LEA.

Stavy, R., Babai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Lin, F. L., y McRobbie, C. (2006). Are intuitive rules universal? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*, 417-436.

Tejedor, F. J. (1988). El soporte estadístico en la investigación educativa. En I. Dendaluce, *Aspectos metodológicos de la investigación educativa* (págs. 228-244). Madrid: Narcea.

Tenopyr, M. L. (1977). Content-construct confusion. *Personnel Psychology, 30*, 47-54.

Teppo, A. (1991). Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. *The Mathematics Teacher, 84 (3)*, 210-221.

Thurstone, L. L. (1931). Multiple Factor Analysis. *Psychological Review, 38*, 406-427.

Thurstone, L. L. (1947). *Multiple Factor Analysis.* Chicago, IL: University of Chicago Press.

Tirosh, D., y Stavy, R. (1999). Intuitive rules: a way to explain and predict students´reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 51-66.

Torregosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (2)*, 275-300.

Trianes, M., y Gallardo, J. (2011). *Psicología de la educación y del desarrollo en contextos escolares.* Madrid: Pirámide.

Tsamir, P., Tirosh, D., y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 81-95.

USAL. (2012 a). *Grado en Maestro de Educación Primaria. Guías académicas 2012-2013.* Obtenido de http://www.usal.es/webusal/files/GradoMaestroEducacionPrimaria_Salamanca2012-2013.pdf

USAL. (2012 b). *Grado en Matemáticas.* Obtenido de http://fciencias.usal.es/files/GuiaAcademicaGMAT2012-2013_revisada.pdf

USAL. (2012 c). *Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.* Obtenido de http://www.usal.es/webusal/files/GUÍAACADÉMICA202012-13.pdf

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry.* Chicago: CDASSG Project.

Usiskin, Z., y Senk, S. (1990). Evaluating a test of van Hiele levels: a response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education, 21 (3),* 242-245.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría.* Utrecht: Universidad Real de Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education.* New York: Academic Press.

Vinner, S. (1975). The Naive Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 339-350.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science an d Technology Vol 14*, 293-305.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science an d Technology Vol 14*, 293-305.

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus, *Proceedings og the 4th PME International Conference* (págs. 177-184).

Visser, P., Krosnick, J., y Lavrakas, P. (2000). Survey Research. En H. Reis, y C. Judd, *Handbook of research methods in social and personality psychology* (págs. 223-252). Cambridge: Cambridge University Press.

Webb, M. (1983). A scale for evaluating standarized reading tests, with results for Nelson-Denny, Iowa and Standford. *Journal of Reading*, *26*, 424-429.

Wilson, M. (1990). Measuring a Van Hiele geometry sequence: A reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21 (3)*, 230-237.

Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 130–139.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En J. L. Martin, y D. A. Bradbard, *Space and Geometry* (págs. 75-97). Columbus: ERIC.

Wu, D. B., y Ma, H. L. (2005). A study of the geometric concepts of Elementary School students ar Van Hile Level One. En H. L. Chick, y J. L. Vincent, *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (págs. 329-336). Melbourne: PME.

Wu, D. B., y Ma, H. L. (2006). The distributions of Van Hiele levels of geometricc thinking among 1st through 6th graders. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková, *Proceedings of the 30th Conferenceof the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5* (págs. 409-416). Praga: PME.

Yela, M. (1987). *Introducción a la teoría de los tests.* Madrid: Facultad de Psicología. Universidad Complutense.

ANEXOS

Anexo 1: Primera versión del cuestionario.

CUESTIONARIO DE PRIMERO

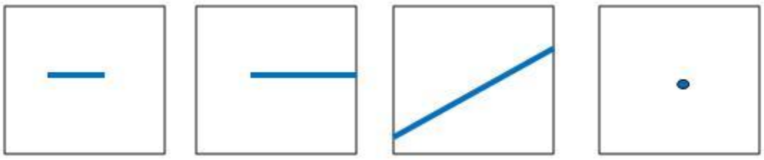
Cod:
1

Centro:
Identificación del alumno:
Curso: Grupo: Fecha:

Indica lo que proceda. Marca con una X. Chica [ ] Chico [ ]
Edad:
Si has repetido algún curso indícalo. Primaria: ……… Secundaria: ……….

1. Pon el nombre correspondiente:
   - punto
   - recta
   - semirrecta
   - segmento.

   (Si algo no sabes escribe *no sé*)



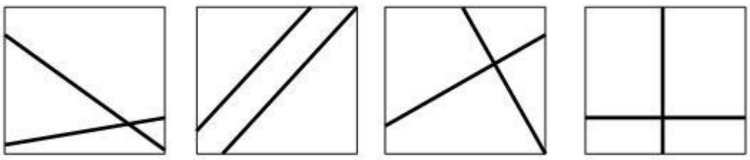
a………………………… b……………………………. c………………………… d…………………………….

Explica la a:

Explica la c:

2. Indica cómo son las siguientes rectas:
   - Paralelas
   - secantes no perpendiculares
   - secantes perpendiculares

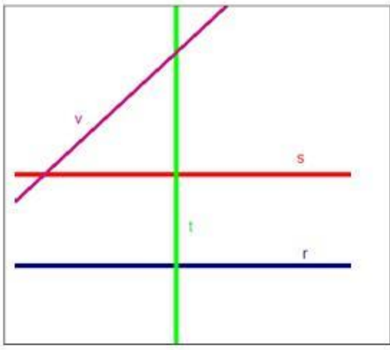
   (Si algo no sabes escribe *no sé*)



a………………………… b………………………… c………………………… d…………………………

Explica la c:

3. Observa el gráfico de la izquierda y completa el de la derecha utilizando las siguientes palabras:
    - secante que es perpendicular
    - secante que no es perpendicular
    - paralela (Si algo no sabes escribe *no sé*)



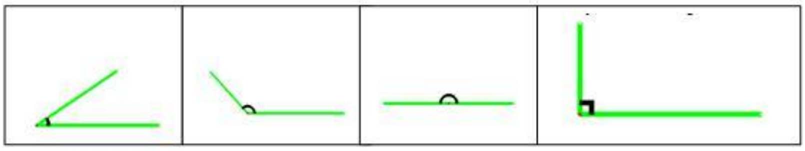
a) La recta **s** es.................................
....a la recta **r**.

b) La recta **t** es....................................
.... a la recta **r**.

c) La recta **v** es...................................
.... a la recta **r**

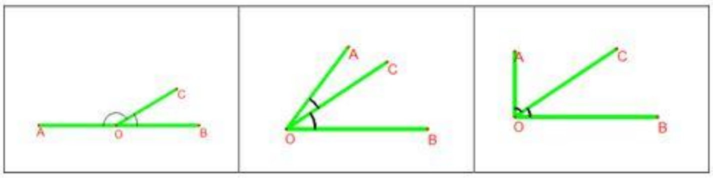
4. Indica de qué tipo es cada uno de los siguientes ángulos:
    - Agudo
    - Recto
    - Obtuso
    - Llano

    (Si algo no sabes escribe *no sé*)



a ------------------------ b---------------------- c--------------------- d-----------------------

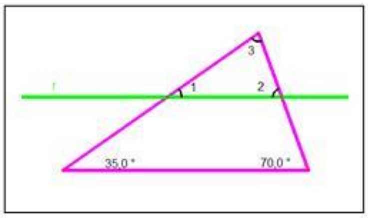
5. Indica cómo son estos pares de ángulos. (Si algo no sabes escribe *no sé*)



a-------------------------------- b------------------------------- c---------------------------------

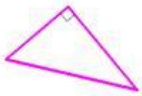
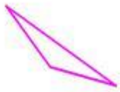
- Dos ángulos consecutivos.
- Dos ángulos complementarios.
- Dos ángulos suplementarios.

6. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos 1, 2 y 3.

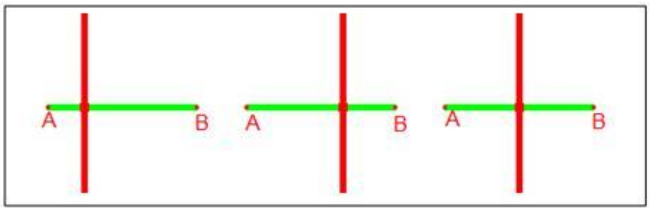


a. El ángulo 1 mide........... b. El ángulo 2 mide......... c. El ángulo 3 mide...............

7. Clasifica los siguientes triángulos. (Si algo no sabes escribe *no sé*)

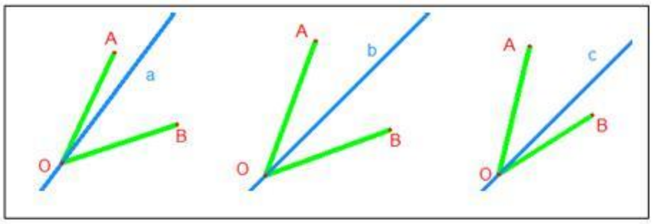
				
Según sus lados	a1	b1	c1	d1
Según sus ángulos	a2	b2	c2	D2

8. Cuál de las siguientes rectas es la mediatriz del segmento AB. Si no lo sabes, escribe *no sé.*



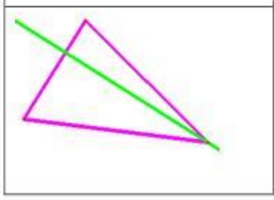
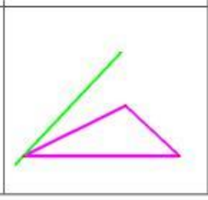
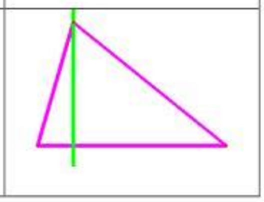
a............................... b............................ c................................

9. Cuál de las siguientes rectas es la bisectriz del ángulo AOB. Si no lo sabes, escribe *no sé*.



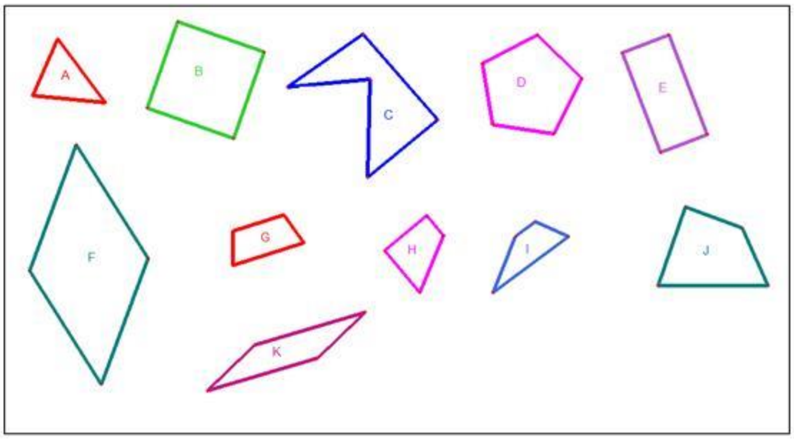
a...................................... b................................. c..

10. ¿En qué caso se ha dibujado la altura del triángulo? ¿Por qué?

a	b	c
		

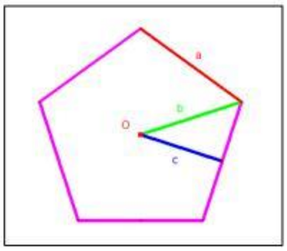
d...

11. Escribe los nombres de los siguientes polígonos:



A	E	I
B	F	J
C	G	K
D	H	

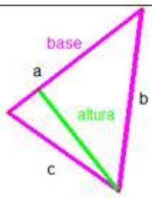
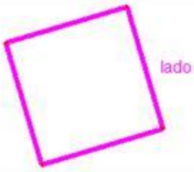
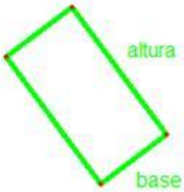
12. Completa. (Si algo no sabes escribe *no sé*).

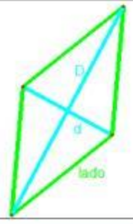
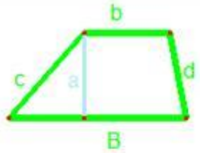
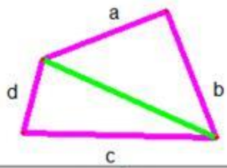
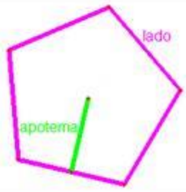


En un polígono regular

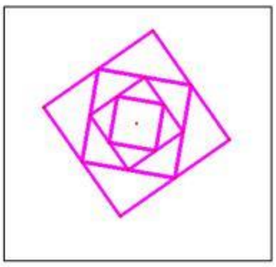
a. El segmento a se llama……………………………
b. El segmento b se llama……………………………
c. El segmento c se llama……………………………
d. El punto O se llama…………………………………

13. Completa la tabla. (Si algo no sabes escribe *no sé*).

Nombre del Polígono	**Dibujo**	**Perímetro del polígono**	**Área del polígono**
a1		a2	a3
b1		b2	b3
c1		c2	c3

Nombre del Polígono	Dibujo	Perímetro del polígono	Área del polígono
d1		d2	d3
e1		e2	e3
f1		f2	f3
g1		g2	g3
h1		h2	h3

14. Se tiene la siguiente sucesión de cuadrados de mayor a menor:

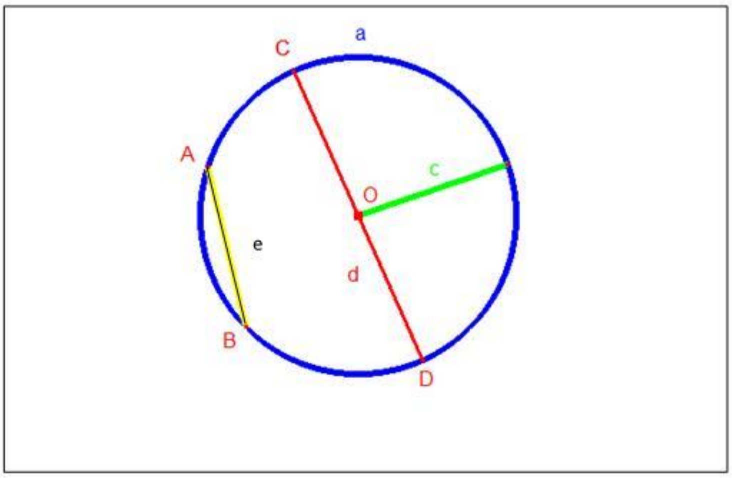


a. ¿Qué relación tienen los perímetros?
....
....
b. ¿Por qué?
....
....

15. En la sucesión de cuadrados anterior,

a. ¿qué relación tienen las áreas?...
....
b. ¿Por qué?..
....

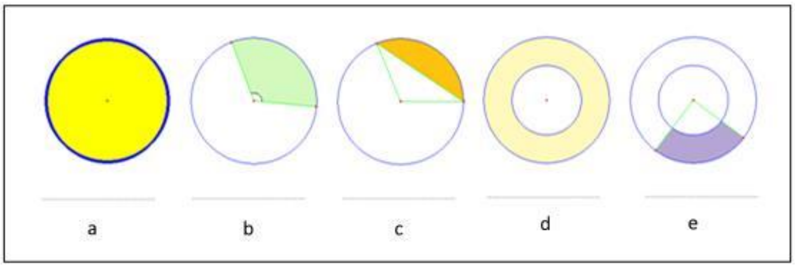
16. Completa. (Si algo no sabes escribe *no sé*).



a. La línea **a** se llama ....
b. El punto **O** se llama..
c. El segmento **c** se llama...
d. El segmento **d** se llama...
e. El segmento **e** se llama...
f. La parte de línea azul **a** comprendida entre **A** y **B** (por la izquierda, por ejemplo) se llama..
g. La parte de línea azul **a** comprendida entre **C** y **D** (da igual por la izquierda o por la derecha) se llama..

17. Completa. (Si algo no sabes escribe *no sé*).

   - Segmento circular.
   - Sector circular.
   - Corona circular.
   - Trapecio circular.
   - Círculo.



a.. d...

b.. e...

c..

18. Resuelve:

   a. Calcula el área de un cuadrado de 100 cm de perímetro.

   b. Queremos construir una cometa en forma de pentágono regular de 50 cm de lado y 30 cm de apotema. ¿Cuánta tela necesitamos?

c. Calcula el área de un triángulo de 5 cm de base y 8 cm de altura.

19. Determina cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5   b. 6, 8, 10   c. 5, 6, 7

20. Resuelve: El perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia es de 20 cm. Calcula el diámetro de la circunferencia. (Puedes dejar el resultado indicado con una raíz cuadrada)

Anexo 2: Informe de los jueces de la primera versión del cuestionario.

El grupo de profesores que valida la primera versión del cuestionario, realiza las siguientes observaciones:

1. Los ítems 1a, 1b y 1c están mal redactados ya que no hay consenso en la respuesta verdadera.
2. El ítem 1d no es relevante.
3. El alumno tiene más claridad en el enunciado si en vez de pedirle “Explica la a” se le pide “Justifica la respuesta a”
4. Las preguntas 2 y 3 se repiten.
5. En el ítem 7c1 no hay consenso en cuanto a la respuesta pues no se aprecia claramente.
6. El contenido referido al ítem 10 no lo han estudiado los alumnos en Primaria (solo trazan una altura).
7. En las preguntas 11 y 13 se repiten varios ítems.
8. En la pregunta 13, si se quiere preguntar perímetros, sería mejor proporcionarles las medidas necesarias.
9. Los ítems 14 y 15 son de un nivel un poco alto para los alumnos de 1º de ESO.
10. El ítem 16a no está claro.
11. En los ítems 16f y 16g hace referencia a un color azul que no aparece en la fotocopia.

12. En la pregunta 18 se hace referencia a áreas que ya se han preguntado en el apartado 13. Si se desea incluir un problema sencillo de áreas entonces no se pregunta en otro ítem solo el área.

13. El problema 20 quizá sea muy difícil para 1º de ESO.

14. El cuestionario carece de algún dato que pueda utilizarse como criterio para determinar la validez de criterio.

Anexo 3: Índice de facilidad de los ítems de la primera versión del cuestionario.

Inicialmente el cuestionario constaba de 96 ítems. Se eliminaron algunos ítems por las siguientes razones:

a. 1a, 1b, 1c: mal redactados.
b. 1d: no es relevante.
c. 1e, 1f, 2e, 10b, 14b, 15b: preguntas abiertas y por tanto son objeto de un estudio aparte.

Es decir, se hizo el cálculo para 86 ítems.

Se calculó el índice de facilidad de cada ítem, IF, y se interpretó según la tabla de Yela (1987). Los valores inferiores a 0,05 se eliminaron, siguiendo el criterio de dicho autor. No resultó ninguno superior a 0,95.

Con este criterio se eliminaron los ítems 10a, 13f3, 13g3, 13h3, 14a, 15a, 16g, 18b y 20. Con lo que en este momento se disponía de 77 ítems.

Se eliminaron también otros ítems mal redactados, según la comisión de expertos. Son los ítems: 7c1, 16a, 16f. (También el 16g pero ya está eliminado por su IF muy bajo). El número de ítems estaba en este momento en 74.

Además los ítems 13*letra*2, es decir, todos los correspondientes a perímetros eran todos difíciles o muy difíciles, siendo 0,33 la puntuación máxima y se decidió eliminarlos teniendo en cuenta además la opinión de los expertos. Se procedió de esta manera con los ítems 13a2, 13b2, 13c2, 13d2, 13e2, 13f2, 13g2 y 13h2, siendo ahora 66 el número de ítems.

Se analizaron los ítems repetidos. En algunos casos los índices de facilidad eran muy parecidos y en otros muy distintos. En cuanto a los primeros, se decidió mantener los que tenían una redacción más clara. Por tanto se eliminaron los ítems 3a, 3b y 3c.

Se analizaron las repeticiones de los ítems de las preguntas 11 y 13*letra*1. Al eliminar algunos de estos se tuvo que hacer lo mismo con otro ítem 13*letra*3. En este sentido se eliminaron los ítems 11a, 13a1, 13a3, 11b, 18a, 11d, 13 h1, 11e, 11f, 13d1, 13d3, 11i, 13f1, 13g1, 11k.

Con este análisis resultó un cuestionario de 48 ítems claros y sin repeticiones.

Se presenta una tabla resumen de los ítems y su índice de facilidad:

	2a	2b	2c	2d			
IF	0,71	0,93	0,48	0,61			
	Fácil	Muy fácil	Dif media	Fácil			
	4a	4b	4c	4d			
IF	0,93	0,90	0,88	0,88			
	Muy fácil	Muy fácil	Muy fácil	Muy fácil			
	5a	5b	5c				
IF	0,55	0,54	0,53				
	Fácil	Dif media	Dif media				
	6a	6b	6c				
IF	0,31	0,33	0,21				
	Difícil	Difícil	Muy difícil				
	7a1	7b1	7d1				
IF	0,27	0,33	0,38				
	Difícil	Difícil	Difícil				
	7a2	7b2	7c2	7d2			
IF	0,19	0,20	0,27	0,23			
	Muy difícil	Muy difícil	Difícil	Muy difícil			
	8						
IF	0,55						
	Fácil						
	9						
IF	0,57						
	Fácil						
	11c	11g	11h	11j			
IF	0,24	0,24	0,10	0,15			
	Muy difícil	Muy difícil	Muy difícil	Muy difícil			

	12a	12b	12c	12d			
IF	0,42	0,12	0,11	0,21			
	Difícil	Muy difícil	Muy difícil	Muy difícil			
	13b1	13b3	13c1	13c3	13e1	13e3	
IF	0,64	0,34	0,62	0,33	0,14	0,07	
	Fácil	Difícil	Fácil	Difícil	Muy difícil	Muy difícil	
	16b	16c	16d	16e			
IF	0,25	0,39	0,21	0,17			
	Difícil	Difícil	Muy difícil	Muy difícil			
	17a	17b	17c	17d	17e		
IF	0,76	0,33	0,30	0,67	0,25		
	Muy fácil	Difícil	Difícil	Fácil	Difícil		
	18c						
IF	0,22						
	Muy difícil						
	19						
IF	0,05						
	Muy difícil						

Tabla 79. Índice de facilidad de los ítems de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Con estas 48 variables, la media de los índices de facilidad es 0,40, es decir, es un test difícil, casi de dificultad media, lo cual es deseable pues se aplicará después de estudiar la Geometría de 1º de ESO y permitirá medir el aprendizaje de los alumnos.

Anexo 4: Índice de discriminación de los ítems de la primera versión del cuestionario.

Se calculó el índice de discriminación de cada ítem (Lukas, 1998). Para ello se consideraron dos grupos, uno formado por el 25% de los alumnos con mejor puntuación en los 48 ítems y el otro formado por el mismo porcentaje de los de peor puntuación. Resultaron dos grupos de 44 alumnos.

Se calculó el índice de discriminación de cada ítem por la fórmula $D = p_s - p_i$

Siendo p_s la proporción de acierto de los alumnos pertenecientes al primer grupo (superior) y p_i lo análogo para el grupo inferior.

Ebel (1965), y Ebel y Frisbie (1986) proponen la siguiente tabla para interpretar los valores del índice de discriminación:

VALOR DE D	INTERPRETACIÓN
Entre 1 y 0,40	El ítem funciona satisfactoriamente
Entre 0,39 y 0,30	El ítem apenas necesita revisión
Entre 0,29 y 0,20	El valor de D está en límite y necesita revisión
Menor que 0,20	El ítem debe ser eliminado o revisado completamente

Tabla 80. Interpretación del índice de discriminación de un ítem (Ebel, 1965; Ebel y Frisbie, 1986)

Según esto, se analizó el índice de discriminación de cada uno de los 48 ítems, resultando que 32 son satisfactorios. Se analizaron los demás y se realizaron las modificaciones oportunas para elaborar la segunda versión del cuestionario.

Ítem	2a	2b	2c	2d	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a1	7b1	7d1	7a2	7b2	7c2	7d2
Aciertos S	38	43	30	38	44	44	44	43	39	36	37	23	23	19	29	37	39	29	30	34	32
Aciertos I	18	36	13	7	40	35	29	28	10	11	6	2	4	1	0	0	2	0	0	0	0
D	0,45	0,16	0,39	0,70	0,09	0,20	0,34	0,34	0,66	0,57	0,70	0,48	0,43	0,41	0,66	0,84	0,84	0,66	0,68	0,77	0,73
Interpretación	Sat	Elim	Bien	Sat	Elim	Rev	Bien	Bien	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat
Ítem	8	9	11c	11g	11h	11j	11k	12a	12b	12c	12d	13b1	13b3	13c1	13c3	13e1	13e3	13f1	16b	16c	16d
Aciertos S	40	41	21	27	15	19	24	38	10	16	28	40	33	40	33	15	7	12	28	33	23
Aciertos I	12	11	5	2	0	0	6	4	1	0	1	10	1	11	1	1	0	1	1	3	1
D	0,64	0,68	0,36	0,57	0,34	0,43	0,41	0,77	0,20	0,36	0,61	0,68	0,73	0,66	0,73	0,32	0,16	0,25	0,61	0,68	0,50
Interpretación	Sat	Sat	Bien	Sat	Bien	Sat	Sat	Sati	Rev	Bien	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Bien	Elim	Rev	Sat	Sat	Sat
Ítem	16e	17a	17b	17c	17d	17e	18c	19													
Aciertos S	20	40	27	23	39	20	23	6													
Aciertos I	1	24	4	3	17	2	1	0													
D	0,43	0,36	0,52	0,45	0,50	0,41	0,50	0,14													
Interpretación	Sat	Bien	Sat	Sat	Sat	Sat	Sat	Elim													

Tabla 81. Índice de discriminación de los ítems de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Anexo 5: Coeficiente de fiabilidad (alfa de Cronbach) de la primera versión del cuestionario.

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	177	100,0
	Excluidos(a)	0	,0
	Total	177	100,0

a Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Tabla 82. Resumen del procesamiento de casos para calcular el coeficiente de fiabilidad de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,938	48

Tabla 83. Coeficiente de fiabilidad (Alfa de Cronbach) de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
rectas secantes 2a	47,18	320,706	,345	,938
rectas paralelas 2b	46,83	326,971	,256	,938
rectas perpendiculares giradas 2c	47,40	321,161	,347	,938
rectas perpendiculares 2d	47,27	316,494	,518	,937
ángulo agudo 4a	46,82	328,251	,197	,939
ángulo obtuso 4b	46,84	326,748	,309	,938
ángulo llano 4c	46,87	325,489	,378	,938
ángulo recto 4d	46,87	325,352	,389	,938
ángulos suplementarios 5a	47,34	316,850	,496	,937
ángulos consecutivos 5b	47,34	318,000	,452	,937
ángulos complementarios 5c	47,37	317,109	,484	,937
semejanza triángulo 6a	47,85	317,516	,398	,938
semejanza triángulo 6b	47,86	318,061	,370	,938
suma ángulos triángulo 6c	47,98	317,892	,428	,938
clasificación según lados (escaleno) 7a1	48,03	311,369	,597	,936

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
clasificación según lados (equilátero)7b1	47,92	308,232	,677	,936
clasificación según lados (isósceles) 7d1	47,87	307,375	,676	,936
clasificación según ángulos (rectángulo) 7a2	48,13	311,421	,656	,936
clasificación según ángulos (acutángulo) 7b2	48,12	310,503	,679	,936
clasificación según ángulos (obtusángulo) 7c2	48,04	308,754	,683	,936
clasificación según ángulos (acutángulo) 7d2	48,11	310,108	,664	,936
mediatriz 8	47,55	313,533	,481	,937
bisectriz 9	47,51	312,695	,515	,937
polígono (pentágono) irregular 11c	48,12	318,798	,360	,938
trapecio isósceles (girado) 11g	48,06	313,031	,560	,937
trapecio rectángulo (girado) 11h	48,32	315,581	,600	,936
trapezoide 11j	48,20	315,262	,549	,937
elementos polígono regular: lado 12a	47,77	309,849	,596	,936
elementos polígono regular: radio 12b	48,32	319,060	,435	,937
elementos polígono regular: apotema 12c	48,31	316,931	,528	,937
elementos polígono regular: centro 12d	48,12	311,844	,618	,936
cuadrado (girado) b1	47,45	313,090	,483	,937
área cuadrado (girado) b3	47,95	311,577	,547	,937
rectángulo (girado) c1	47,49	312,978	,481	,937
área rectángulo (girado) 13c3	47,98	311,585	,550	,937
romboide 13e1	48,32	318,526	,435	,937
área romboide13e3	48,53	322,967	,354	,938
elementos circunferencia: centro 16b	47,99	313,699	,539	,937
elementos circunferencia: radio 16c	47,77	312,040	,546	,937
elementos circunferencia: diámetro 16d	48,12	315,832	,482	,937
elementos circunferencia: cuerda 16e	48,24	318,114	,424	,938
circulo 17a	46,98	325,261	,322	,938
sector circular 17b	47,41	323,528	,388	,938
segmento circular 17c	47,45	324,930	,315	,938

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
corona circular 17d	47,07	322,859	,432	,938
trapecio circular 17e	47,50	325,149	,321	,938
problema área triángulo 18c	48,07	317,796	,405	,938
ternas pitagóricas 19	48,42	322,007	,394	,938

Tabla 84. Alfa de Cronbach de la primera versión del cuestionario, si se elimina cada uno de los ítems (muestra de 177 alumnos)

Anexo 6: Análisis factorial de los resultados de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos).

KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer Olkin.		,840
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	5995,838
	gl	1128
	Sig.	,000

Tabla 85. Medida KMO y prueba de Bartlett de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Comunalidades

	Inicial	Extracción
rectas secantes 2a	1,000	,790
rectas paralelas 2b	1,000	,522
rectas perpendiculares giradas 2c	1,000	,689
rectas perpendiculares 2d	1,000	,663
ángulo agudo 4a	1,000	,656
ángulo obtuso 4b	1,000	,735
ángulo llano 4c	1,000	,764
ángulo recto 4d	1,000	,680
ángulos suplementarios 5a	1,000	,829
ángulos consecutivos 5b	1,000	,837
ángulos complementarios 5c	1,000	,835
semejanza triángulo 6a	1,000	,910
semejanza triángulo 6b	1,000	,928
suma ángulos triángulo 6c	1,000	,812
clasificación según lados (escaleno) 7a1	1,000	,671
clasificación según lados (equilátero)7b1	1,000	,697
clasificación según lados (isósceles) 7d1	1,000	,762
clasificación según ángulos (rectángulo) 7a2	1,000	,834
clasificación según ángulos (acutángulo) 7b2	1,000	,858
clasificación según ángulos (obtusángulo) 7c2	1,000	,853

	Inicial	Extracción
clasificación según ángulos (acutángulo) 7d2	1,000	,854
mediatriz 8	1,000	,857
bisectriz 9	1,000	,842
polígono (pentágono) irregular 11c	1,000	,583
trapecio isósceles (girado) 11g	1,000	,647
trapecio rectángulo (girado) 11h	1,000	,695
trapezoide 11j	1,000	,676
elementos polígono regular: lado 12a	1,000	,666
elementos polígono regular: radio 12b	1,000	,589
elementos polígono regular: apotema 12c	1,000	,658
elementos polígono regular: centro 12d	1,000	,760
cuadrado (girado) b1	1,000	,926
área cuadrado (girado) b3	1,000	,899
rectángulo (girado) c1	1,000	,926
área rectángulo (girado) 13c3	1,000	,900
romboide 13e1	1,000	,627
área romboide13e3	1,000	,499
elementos circunferencia: centro 16b	1,000	,683
elementos circunferencia: radio 16c	1,000	,718
elementos circunferencia: diámetro 16d	1,000	,762
elementos circunferencia: cuerda 16e	1,000	,601
circulo 17a	1,000	,766
sector circular 17b	1,000	,636
segmento circular 17c	1,000	,739
corona circular 17d	1,000	,716
trapecio circular 17e	1,000	,780
problema área triángulo 18c	1,000	,581
ternas pitagóricas 19	1,000	,380

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Tabla 86. Comunalidades en la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	12,846	26,762	26,762	12,846	26,762	26,762	6,019	12,540	12,540
2	3,201	6,668	33,430	3,201	6,668	33,430	3,011	6,272	18,813
3	2,679	5,582	39,012	2,679	5,582	39,012	2,807	5,848	24,661
4	2,473	5,151	44,163	2,473	5,151	44,163	2,795	5,822	30,483
5	2,390	4,978	49,141	2,390	4,978	49,141	2,768	5,768	36,250
6	1,916	3,992	53,133	1,916	3,992	53,133	2,711	5,647	41,897
7	1,810	3,772	56,905	1,810	3,772	56,905	2,416	5,033	46,930
8	1,649	3,435	60,340	1,649	3,435	60,340	2,368	4,933	51,863
9	1,462	3,047	63,387	1,462	3,047	63,387	2,289	4,770	56,632
10	1,307	2,723	66,110	1,307	2,723	66,110	2,212	4,608	61,240
11	1,289	2,685	68,794	1,289	2,685	68,794	2,173	4,527	65,767
12	1,166	2,429	71,223	1,166	2,429	71,223	1,917	3,993	69,760
13	1,101	2,293	73,516	1,101	2,293	73,516	1,803	3,756	73,516
14	,930	1,938	75,454						
15	,902	1,879	77,333						
16	,805	1,678	79,011						
17	,770	1,604	80,615						
18	,717	1,495	82,109						
19	,700	1,457	83,567						
20	,618	1,288	84,855						
21	,593	1,236	86,091						
22	,566	1,179	87,270						
23	,512	1,066	88,336						
24	,484	1,009	89,345						
25	,472	,983	90,328						
26	,416	,866	91,193						
27	,369	,769	91,963						
28	,363	,757	92,720						
29	,346	,722	93,442						
30	,314	,653	94,095						
31	,292	,609	94,704						
32	,272	,567	95,271						
33	,264	,551	95,822						
34	,255	,531	96,353						
35	,247	,514	96,867						
36	,211	,441	97,307						
37	,185	,385	97,693						
38	,170	,353	98,046						
39	,159	,332	98,378						
40	,142	,295	98,674						
41	,140	,291	98,965						
42	,127	,264	99,228						

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
43	,100	,208	99,437						
44	,092	,191	99,628						
45	,071	,147	99,775						
46	,048	,100	99,875						
47	,034	,070	99,945						
48	,026	,055	100,000						

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Tabla 87. Análisis factorial de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

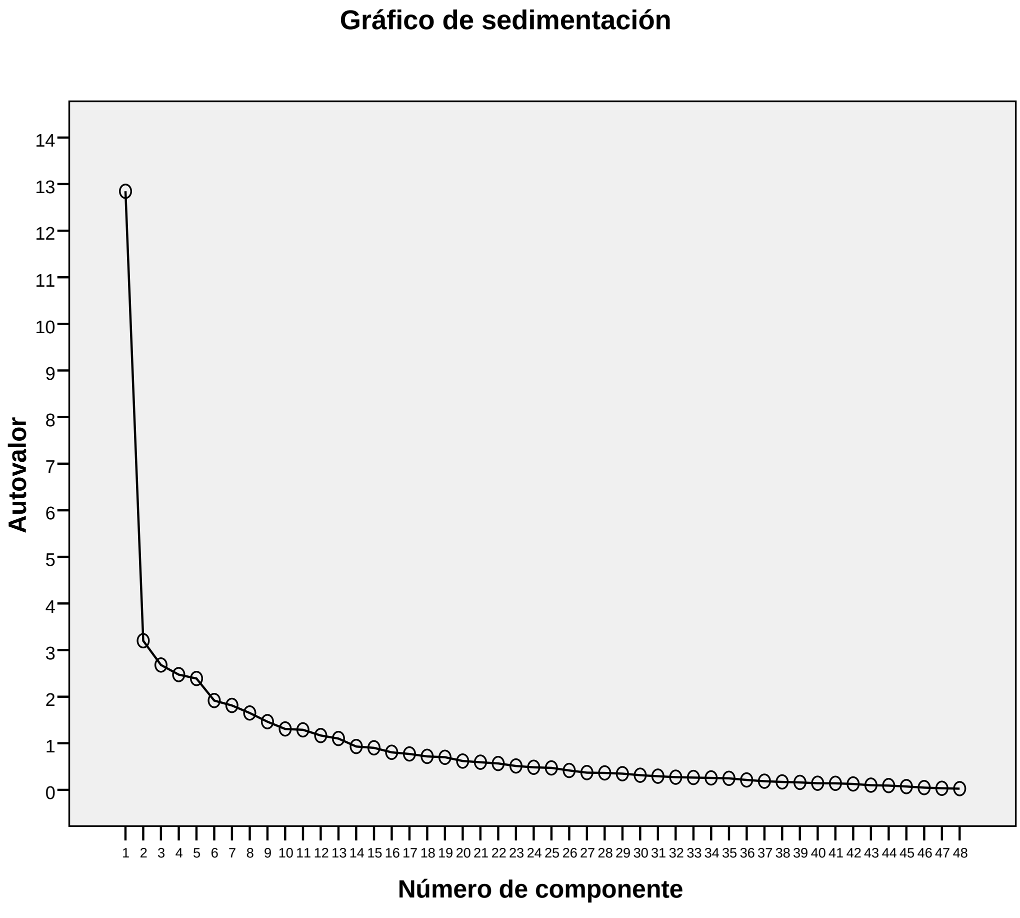


Ilustración 82. Gráfico de sedimentación de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Matriz de componentes rotados(a)

	Componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
clasificación según ángulos (acutángulo) 7b2	,875												
clasificación según ángulos (obtusángulo) 7c2	,859												
clasificación según ángulos (acutángulo) 7d2	,858												
clasificación según ángulos (rectángulo) 7a2	,858												
clasificación según lados (isósceles) 7d1	,736												
clasificación según lados (equilátero)7b1	,722												
clasificación según lados (escaleno) 7a1	,713												
trapecio rectángulo (girado) 11h		,669											
romboide 13e1		,669											
trapezoide 11j		,658											
trapecio isósceles (girado) 11g		,653											
polígono (pentágono) irregular 11c		,538											
ángulos consecutivos 5b			,854										
ángulos suplementarios 5a			,835										
ángulos complementarios 5c			,809										
ternas pitagóricas 19													
semejanza triángulo 6b				,939									
semejanza triángulo 6a				,919									
suma ángulos triángulo 6c				,831									
ángulo obtuso 4b					,814								
ángulo llano 4c					,790								
ángulo agudo 4a					,756								
ángulo recto 4d					,729								
elementos circunferencia: diámetro 16d						,791							
elementos circunferencia: radio 16c						,699							
elementos circunferencia: centro 16b						,676							
elementos circunferencia: cuerda 16e						,664							
trapecio circular 17e							,847						
segmento circular 17c							,808						
sector circular 17b							,705						

	Componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
área cuadrado (girado) b3								,851					
área rectángulo (girado) 13c3								,851					
área romboide13e3		,435						,444					
elementos polígono regular: radio 12b									,634				
elementos polígono regular: centro 12d									,630				
elementos polígono regular: lado 12a									,628				
elementos polígono regular: apotema 12c									,619				
rectángulo (girado) c1										,894			
cuadrado (girado) b1										,884			
rectas secantes 2a											,848		
rectas perpendiculares giradas 2c											,723		
rectas perpendiculares 2d											,613		
rectas paralelas 2b											,491		
mediatriz 8												,802	
bisectriz 9												,785	
circulo 17a													,763
corona circular 17d													,729
problema área triángulo 18c								,445					,491

Método de extracción: Análisis de componentes principales.
Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.
a La rotación ha convergido en 8 iteraciones.

Tabla 88. Matriz de componentes rotados para determinar los factores en el Análisis factorial de la primera versión del cuestionario (muestra de 177 alumnos)

Anexo 7: Segunda versión del cuestionario (versión definitiva): Cuestionario de medición del rendimiento en Geometría para alumnos de 1º de ESO.

CUESTIONARIO DE MEDICICIÓN DEL RENDIMIENTO EN GEOMETRÍA

PARA ALUMNOS DE 1º DE ESO

Instrucciones

Vas a realizar un cuestionario sobre Geometría de quince preguntas y dispones de 50 minutos para contestar.

Escribe con bolígrafo azul o negro.

No es necesario que utilices instrumentos de dibujo.

Lee atentamente las preguntas antes de contestar.

El resultado no va a influir en la nota de la evaluación, por lo que no tiene ningún sentido que copies de tus compañeros o les ayudes. Lo realizáis para que los profesores sepamos cómo estáis en Geometría.

Muchas gracias por tu colaboración.

CUESTIONARIO DE PRIMERO

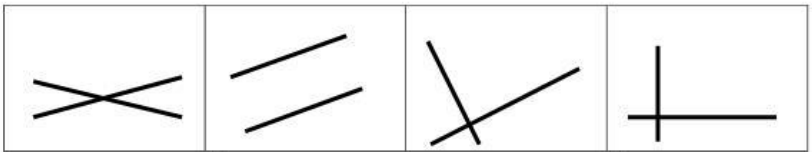
Cod:

1

Centro:	Fecha:
Nombre del alumno:	
Curso: Grupo: Nota Matemáticas 1ª evaluación:	
Indica lo que proceda. Marca con una X. Chica [ ]	Chico [ ]
Edad:	
Si has repetido algún curso indica cuál. Si no has repetido, déjalo en blanco: Primaria: ……… Secundaria: ………	

1. Indica cómo son las siguientes rectas:

Paralelas **Perpendiculares** **Secantes no perpendiculares**

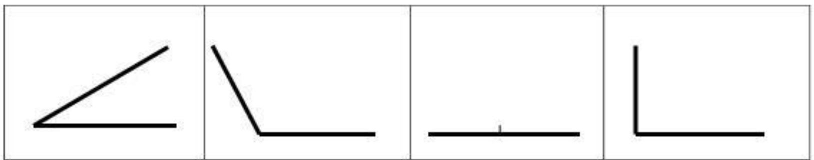


a.	b.	c.	d.

e. Justifica la respuesta c:

2. Indica de qué tipo es cada uno de los siguientes ángulos:

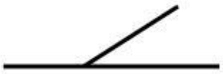
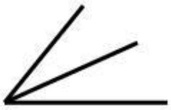
Agudo **Recto** **Obtuso** **Llano**



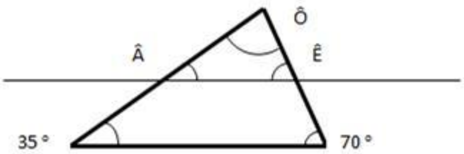
a.	b.	c.	d.

3. Indica cómo son estos pares de ángulos.

Consecutivos **Complementarios** **Suplementarios**

		
a.	b.	c.

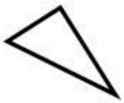
4. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos Â, Ê y Ô.



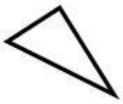
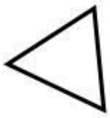
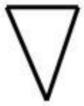
a. El ángulo Â mide:	b. El ángulo Ê mide:	c. El ángulo Ô mide:

d. Justifica la respuesta c:

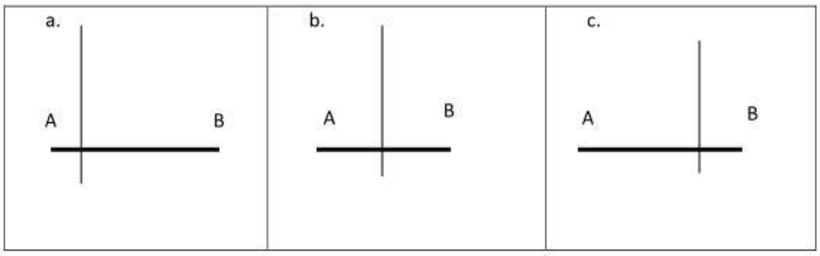
5. Clasifica los siguientes triángulos según los lados:

		
a.	b.	c.

6. Clasifica los siguientes triángulos según los ángulos:

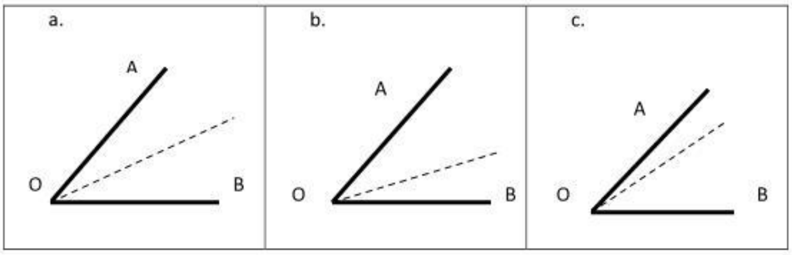
			
a.	b.	c.	d.

7. ¿Cuál de las siguientes rectas es la mediatriz del segmento AB? Indica si es "a", "b" o "c".



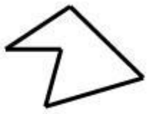
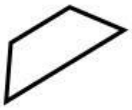
La respuesta correcta es:

8. ¿Cuál de las siguientes rectas es la bisectriz del ángulo AOB? Indica si es "a", "b" o "c".

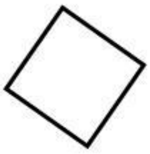
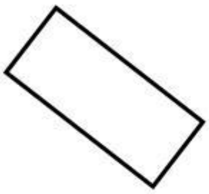
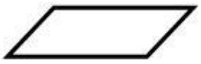


La respuesta correcta es:

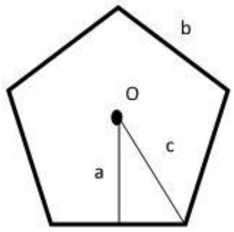
9. Escribe los nombres de los siguientes polígonos:

			
a.	b.	c.	d.

10. Completa la tabla.

Dibujo	Nombre del polígono	Área del polígono
	a1	a2
	b1	b2
	c1	c2

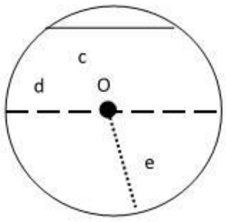
11. Completa.



En un polígono regular:

a. El segmento **a** se llama...................................
b. El segmento **b** se llama...................................
c. El segmento **c** se llama.......................................
d. El punto **O** se llama...

12. Completa los elementos de la circunferencia:



a. El punto **O** se llama ....
b. El segmento **d** se llama ....
c. El segmento **c** se llama ....
d. El segmento **e** se llama ....

13. Completa:

Segmento circular **Sector circular** **Corona circular**
Trapecio circular **Círculo**

				
a.	b.	c.	d.	e.

14. Calcula el área de un triángulo de 5 cm de base y 8 cm de altura.

15. Indica cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5 b. 6, 8, 10 c. 5, 6, 7

Anexo 8: Índice de facilidad de los ítems de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos).

Ítem	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4a
% aciertos	47	94	43,7	49	96	96,7	90,1	92,1	21,2	37,7	43,7	51,7
Ítem	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	7	8	9a
% aciertos	45	15,9	51	57	57,6	27,2	29,1	37,7	28,5	86,1	82,8	19,9
Ítem	9b	9c	9d	10a1	10b1	10c1	10a2	10b2	10c2	11a	11b	11c
% aciertos	18,5	13,9	23,2	65,6	86,1	40,4	45	45	19,9	0	51,7	18,5
Ítem	11d	12a	12b	12c	12d	13a	13b	13c	13d	13e	14	15
% aciertos	45,7	51	60,9	29,1	64,9	83,4	36,4	29,8	80,1	25,8	33,1	2,6

Tabla 89. Porcentaje de aciertos de cada ítem de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos) para determinar la facilidad de dicho cuestionario

El índice de facilidad es 0,47.

Anexo 9: Coeficiente de fiabilidad (alfa de Cronbach) de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos).

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	151	100,0
	Excluidos(a)	0	,0
	Total	151	100,0

a Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Tabla 90. Resumen del procesamiento de los casos para determinar el coeficiente de fiabilidad de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos)

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,951	48

Tabla 91. Coeficiente de fiabilidad (Alfa de Cronbach) de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos)

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
rectas secantes 1a	57,12	349,039	,472	,950
rectas paralelas 1b	56,60	357,856	,216	,951
rectas perpendiculares (giradas) 1c	57,26	348,820	,389	,951
rectas perpendiculares 1d	57,13	349,231	,430	,950
ángulo agudo 2a	56,58	357,379	,328	,951
ángulo obtuso 2b	56,57	358,140	,247	,951
ángulo llano 2c	56,64	355,473	,379	,951
ángulo recto 2d	56,62	355,851	,383	,951
ángulos suplementarios 3a	57,41	356,004	,177	,951
ángulos consecutivos 3b	57,24	359,183	,013	,952
ángulos complementarios 3c	57,19	354,112	,223	,951
semejanza triángulo 4a	57,21	343,124	,564	,950
semejanza triángulo 4b	57,28	342,535	,594	,949
suma ángulos triángulo 4c	57,66	348,361	,454	,950
clasificación según lados (escaleno) 5a	57,26	338,700	,680	,949

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
clasificación según lados (equilátero) 5b	57,21	335,515	,763	,948
clasificación según lados (isósceles) 5c	57,19	339,325	,652	,949
clasificación según ángulos (rectángulo) 6a	57,58	341,818	,613	,949
clasificación según ángulos (acutángulo) 6b	57,62	340,650	,615	,949
clasificación según ángulos (obtusángulo) 6c	57,50	338,958	,643	,949
clasificación según ángulos (acutángulo) 6d	57,64	338,566	,688	,949
mediatriz 7	56,74	350,780	,429	,950
bisectriz 8	56,80	348,947	,455	,950
polígono (pentágono) irregular 9a	57,98	344,073	,506	,950
trapecio isósceles (girado) 9b	57,89	342,082	,597	,949
trapecio rectángulo (girado) 9c	57,98	344,300	,557	,950
trapezoide 9d	57,87	340,991	,591	,949
cuadrado (girado) a1	57,01	347,560	,439	,950
rectángulo (girado) b1	56,80	345,694	,550	,950
romboide c1	57,52	342,451	,504	,950
área cuadrado (girado) a2	57,47	335,877	,691	,949
área rectángulo (girado) b2	57,48	334,798	,720	,949
área romboide c2	57,87	341,582	,605	,949
elementos polígono regular: apotema 11a	58,02	349,780	,524	,950
elementos polígono regular: lado 11b	57,40	336,002	,664	,949
elementos polígono regular: radio 11c	57,95	345,191	,481	,950
elementos polígono regular: centro 11d	57,46	337,916	,629	,949
elementos circunferencia: centro 12a	57,33	337,196	,676	,949
elementos circunferencia: diámetro 12b	57,18	339,974	,604	,949
elementos circunferencia: cuerda 12c	57,60	340,468	,630	,949
elementos circunferencia: radio	57,19	338,285	,619	,949

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
12d				
círculo 13a	56,81	346,863	,526	,950
sector circular 13b	57,33	347,090	,473	,950
segmento circular 13c	57,39	345,453	,572	,950
corona circular 13d	56,84	344,575	,612	,949
trapecio circular 13e	57,42	348,671	,465	,950
problema área triángulo 14	57,56	341,822	,566	,950
ternas pitagóricas 15	57,85	350,890	,447	,950

Tabla 92. Alfa de Cronbach de la segunda versión del cuestionario, si se elimina cada uno de los ítems (muestra de 151 alumnos)

Anexo 10: Validez de criterio (segunda versión del cuestionario).

Correlaciones

		nota_del_test	prim_eval
nota_del_test	Correlación de Pearson	1	,604(**)
	Sig. (bilateral)		,000
	N	151	151
prim_eval	Correlación de Pearson	,604(**)	1
	Sig. (bilateral)	,000	
	N	151	151

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Tabla 93. Coeficiente de correlación de Pearson entre la note del cuestionario y la nota de la primera evaluación, para determinar la validez de criterio

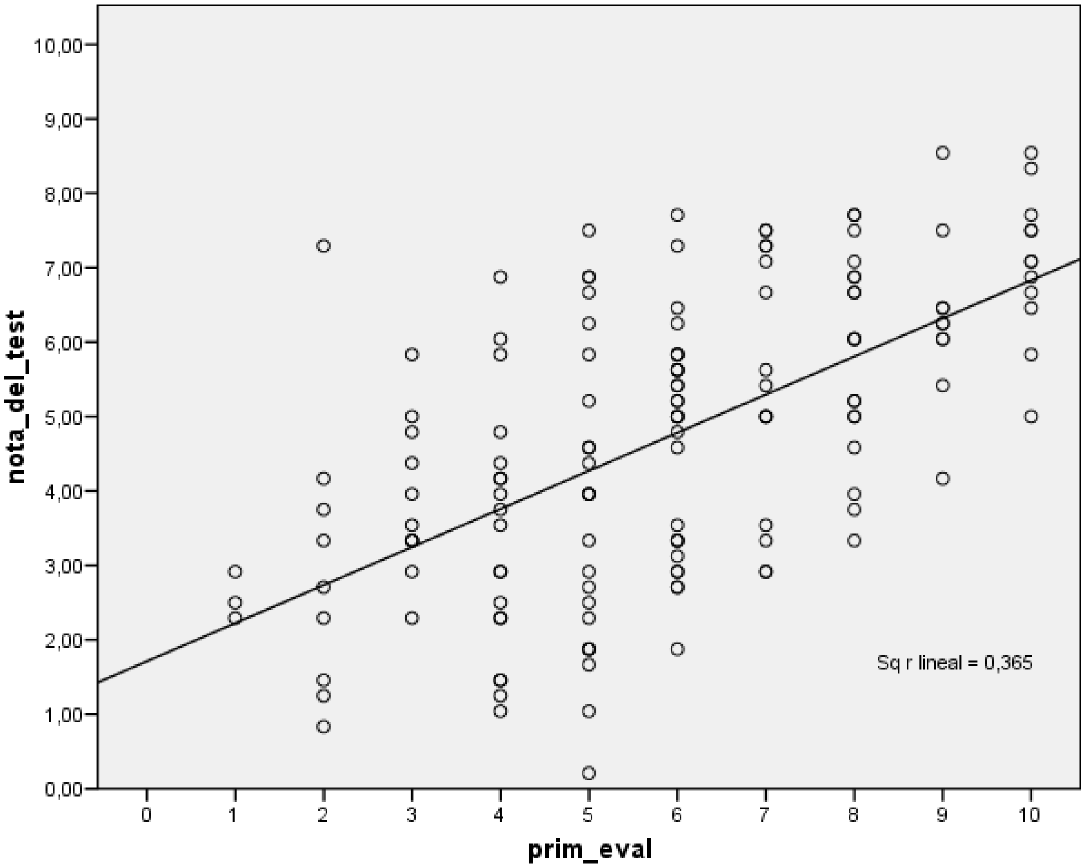


Ilustración 83. Recta de regresión de la nota del cuestionario sobre la nota de la primera evaluación

Anexo 11: Análisis factorial segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos).

KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		,854
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	5333,841
	gl	1128
	Sig.	,000

Tabla 94. Medida KMO y prueba de Bartlett de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos)

Comunalidades

	Inicial	Extracción
rectas secantes 1a	1,000	,731
rectas paralelas 1b	1,000	,660
rectas perpendiculares (giradas) 1c	1,000	,711
rectas perpendiculares 1d	1,000	,757
ángulo agudo 2a	1,000	,798
ángulo obtuso 2b	1,000	,791
ángulo llano 2c	1,000	,905
ángulo recto 2d	1,000	,919
ángulos suplementarios 3a	1,000	,834
ángulos consecutivos 3b	1,000	,760
ángulos complementarios 3c	1,000	,714
semejanza triángulo 4a	1,000	,921
semejanza triángulo 4b	1,000	,896
suma ángulos triángulo 4c	1,000	,711
clasificación según lados (escaleno) 5a	1,000	,759
clasificación según lados (equilátero) 5b	1,000	,785
clasificación según lados (isósceles) 5c	1,000	,797
clasificación según ángulos (rectángulo) 6a	1,000	,704
clasificación según ángulos (acutángulo) 6b	1,000	,806
clasificación según ángulos (obtusángulo) 6c	1,000	,768

	Inicial	Extracción
clasificación según ángulos (acutángulo) 6d	1,000	,773
mediatriz 7	1,000	,832
bisectriz 8	1,000	,832
polígono (pentágono) irregular 9a	1,000	,741
trapecio isósceles (girado) 9b	1,000	,661
trapecio rectángulo (girado) 9c	1,000	,790
trapezoide 9d	1,000	,838
cuadrado (girado) a1	1,000	,744
rectángulo (girado) b1	1,000	,775
romboide c1	1,000	,552
área cuadrado (girado) a2	1,000	,858
área rectángulo (girado) b2	1,000	,871
área romboide c2	1,000	,730
elementos polígono regular: apotema 11a	1,000	,691
elementos polígono regular: lado 11b	1,000	,688
elementos polígono regular: radio 11c	1,000	,694
elementos polígono regular: centro 11d	1,000	,759
elementos circunferencia: centro 12a	1,000	,707
elementos circunferencia: diámetro 12b	1,000	,751
elementos circunferencia: cuerda 12c	1,000	,659
elementos circunferencia: radio 12d	1,000	,714
círculo 13a	1,000	,831
sector circular 13b	1,000	,750
segmento circular 13c	1,000	,764
corona circular 13d	1,000	,824
trapecio circular 13e	1,000	,745
problema área triángulo 14	1,000	,614
ternas pitagóricas 15	1,000	,605

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Tabla 95. Comunalidades en la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos)

Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	15,133	31,527	31,527	15,133	31,527	31,527	4,887	10,182	10,182
2	3,559	7,414	38,941	3,559	7,414	38,941	4,084	8,507	18,689
3	2,874	5,987	44,928	2,874	5,987	44,928	4,053	8,443	27,132
4	2,123	4,423	49,350	2,123	4,423	49,350	3,954	8,238	35,370
5	2,044	4,258	53,608	2,044	4,258	53,608	2,480	5,166	40,537
6	1,726	3,595	57,203	1,726	3,595	57,203	2,325	4,844	45,380
7	1,578	3,288	60,491	1,578	3,288	60,491	2,291	4,772	50,153
8	1,553	3,234	63,725	1,553	3,234	63,725	2,249	4,685	54,837
9	1,416	2,949	66,674	1,416	2,949	66,674	2,153	4,486	59,324
10	1,291	2,689	69,364	1,291	2,689	69,364	2,137	4,452	63,776
11	1,219	2,540	71,904	1,219	2,540	71,904	2,096	4,366	68,142
12	1,090	2,271	74,175	1,090	2,271	74,175	2,011	4,189	72,331
13	,915	1,907	76,081	,915	1,907	76,081	1,800	3,750	76,081
14	,843	1,757	77,839						
15	,790	1,647	79,485						
16	,688	1,434	80,919						
17	,655	1,364	82,283						
18	,631	1,314	83,597						
19	,616	1,284	84,881						
20	,555	1,157	86,038						
21	,546	1,137	87,175						
22	,469	,978	88,153						
23	,456	,951	89,104						
24	,432	,900	90,004						
25	,387	,806	90,810						
26	,371	,774	91,584						
27	,356	,741	92,325						
28	,343	,714	93,039						
29	,330	,688	93,727						
30	,314	,653	94,381						
31	,272	,567	94,947						
32	,263	,548	95,495						
33	,240	,501	95,996						
34	,224	,466	96,462						
35	,215	,448	96,909						
36	,205	,427	97,336						
37	,172	,359	97,695						
38	,167	,349	98,044						
39	,148	,309	98,353						
40	,144	,300	98,653						
41	,132	,276	98,929						
42	,106	,220	99,149						
43	,102	,213	99,362						
44	,090	,188	99,549						

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
45	,066	,138	99,688						
46	,057	,119	99,807						
47	,053	,110	99,917						
48	,040	,083	100,000						

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

Tabla 96. Análisis factorial de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos)

Matriz de componentes rotados(a)

	Componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
clasificación según ángulos (acutángulo) 6b	,837												
clasificación según ángulos (acutángulo) 6d	,736												
clasificación según ángulos (obtusángulo) 6c	,731												
clasificación según ángulos (rectángulo) 6a	,719												
clasificación según lados (escaleno) 5a	,520												,411
clasificación según lados (isósceles) 5c	,476												
clasificación según lados (equilátero) 5b	,447					,408							
problema área triángulo 14	,423												
trapecio circular 13e		,813											
sector circular 13b		,790											
círculo 13a		,767											
corona circular 13d		,756											
segmento circular 13c		,736											
elementos polígono regular: centro 11d			,703										
elementos circunferencia: diámetro 12b			,682										
elementos polígono regular: apotema 11a			,671										
elementos circunferencia: radio 12d			,662										
elementos polígono regular: lado 11b			,634										
elementos circunferencia: centro 12a			,629										
elementos polígono regular: radio 11c			,553	,527									
trapezoide 9d				,803									

	Componente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
trapecio rectángulo (girado) 9c				,796									
polígono (pentágono) irregular 9a				,747									
trapecio isósceles (girado) 9b				,690									
semejanza triángulo 4a					,864								
semejanza triángulo 4b					,837								
suma ángulos triángulo 4c					,661								
cuadrado (girado) a1						,718							
rectángulo (girado) b1						,677							
romboide c1						,439							
rectas secantes 1a							,778						
rectas perpendiculares 1d							,743						
rectas perpendiculares (giradas) 1c							,612						
ángulos suplementarios 3a								,880					
ángulos consecutivos 3b								,808					
ángulos complementarios 3c								,716					
ángulo recto 2d									,914				
ángulo llano 2c									,891				
ángulo obtuso 2b										,842			
ángulo agudo 2a										,753			
rectas paralelas 1b										,712			
mediatriz 7											,833		
bisectriz 8											,804		
área cuadrado (girado) a2	,442											,693	
área rectángulo (girado) b2	,467											,662	
área romboide c2	,402											,527	
ternas pitagóricas 15													,615
elementos circunferencia: cuerda 12c													,554

Método de extracción: Análisis de componentes principales.
Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.
a La rotación ha convergido en 17 iteraciones.

Tabla 97. Matriz de componentes rotados para determinar los factores en el Análisis factorial de la segunda versión del cuestionario (muestra de 151 alumnos)

Anexo 12: Coeficiente de fiabilidad (alfa de Cronbach) del post-test (muestra de 144 alumnos).

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	144	100,0
	Excluidos(a)	0	,0
	Total	144	100,0

a Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Tabla 98. Resumen del procesamiento de los casos para determinar el coeficiente de fiabilidad del post-test (muestra de 144 alumnos)

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,950	48

Tabla 99. Coeficiente de fiabilidad (Alfa de Cronbach) del post-test (muestra de 144 alumnos)

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
rectas secantes 1a	72,30	279,889	,360	,949
rectas paralelas 1b	71,99	285,434	,217	,950
rectas perpendiculares (giradas) 1c	72,67	273,315	,573	,948
rectas perpendiculares 1d	72,30	280,211	,324	,950
ángulo agudo 2a	72,00	285,105	,246	,950
ángulo obtuso 2b	72,01	285,112	,219	,950
ángulo llano 2c	72,01	284,797	,246	,950
ángulo recto 2d	72,00	285,245	,221	,950
ángulos suplementarios 3a	72,38	282,376	,235	,950
ángulos consecutivos 3b	72,24	283,836	,164	,950
ángulos complementarios 3c	72,34	283,527	,168	,950
semejanza triángulo 4a	72,42	275,308	,456	,949
semejanza triángulo 4b	72,40	275,639	,443	,949
suma ángulos triángulo 4c	72,72	274,541	,497	,949
clasificación según lados (escaleno) 5a	72,53	270,041	,632	,948

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
clasificación según lados (equilátero) 5b	72,41	270,509	,687	,948
clasificación según lados (isósceles) 5c	72,38	270,643	,654	,948
clasificación según ángulos (rectángulo) 6a	72,55	274,389	,497	,949
clasificación según ángulos (acutángulo) 6b	72,60	269,374	,607	,948
clasificación según ángulos (obtusángulo) 6c	72,34	271,079	,641	,948
clasificación según ángulos (acutángulo) 6d	72,60	268,326	,646	,948
mediatriz 7	72,13	280,012	,420	,949
bisectriz 8	72,16	277,534	,507	,949
polígono (pentágono) irregular 9a	72,79	268,152	,602	,948
trapecio isósceles 9b	72,69	269,249	,614	,948
trapecio rectángulo 9c	73,04	268,698	,671	,948
trapezoide 9d	72,97	267,027	,698	,947
cuadrado (girado) a1	72,11	281,988	,322	,950
rectángulo (girado) b1	72,08	280,603	,405	,949
romboide c1	72,40	272,550	,595	,948
área cuadrado (girado) a2	72,30	272,323	,594	,948
área rectángulo (girado) b2	72,37	270,948	,633	,948
área romboide c2	72,76	268,573	,651	,948
elementos polígono regular: apotema 11a	72,80	270,162	,615	,948
elementos polígono regular: lado 11b	72,37	269,213	,680	,948
elementos polígono regular: radio 11c	72,95	271,012	,513	,949
elementos polígono regular: centro 11d	72,46	268,362	,699	,948
elementos circunferencia: centro 12a	72,46	269,956	,642	,948
elementos circunferencia: diámetro 12b	72,49	267,678	,701	,947
elementos circunferencia: cuerda 12c	72,64	269,169	,658	,948
elementos circunferencia: radio 12d	72,38	269,720	,648	,948
círculo 13a	72,06	281,927	,363	,949

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
sector circular 13b	72,62	277,119	,464	,949
segmento circular 13c	72,56	276,095	,496	,949
corona circular 13d	72,11	280,239	,416	,949
trapecio circular 13e	72,64	276,106	,501	,949
problema área triángulo 14	72,31	272,286	,632	,948
ternas pitagóricas 15	72,88	273,811	,607	,948

Tabla 100. Alfa de Cronbach del post-test, si se elimina cada uno de los ítems (muestra de 144 alumnos)

Anexo 13: Índice de facilidad del post-test (muestra de 144 alumnos).

Ítem	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4a
% aciertos	70,1	97,9	42,4	71,5	97,2	96,5	95,8	97,2	59,7	72,9	63,2	68,1
Ítem	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	7	8	9a
% aciertos	70,1	40,3	61,1	67,4	72,2	54,9	59	76,4	59,7	88,2	86,8	50
Ítem	9b	9c	9d	10a1	10b1	10c1	10a2	10b2	10c2	11a	11b	11c
% aciertos	51,4	27,1	34	88,2	93,8	68,1	80,6	74,3	45,1	40,3	76,4	38,9
Ítem	11d	12a	12b	12c	12d	13a	13b	13c	13d	13e	14	15
% aciertos	68,1	67,4	66,7	52,1	75,7	94,4	41	47,9	89,6	40,3	76,4	23,6

Tabla 101. Porcentaje de aciertos de cada ítem del post-test (muestra de 144 alumnos) para determinar la facilidad de dicho cuestionario

El índice de facilidad es 0,66.

Anexo 14: Coeficiente de fiabilidad (alfa de Cronbach) e índice de facilidad del pre-test y del post-test en la muestra del estudio (137 alumnos).

a) Análisis de fiabilidad en el pre-test.

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	137	100,0
	Excluidos(a)	0	,0
	Total	137	100,0

a Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Tabla 102. Resumen del procesamiento de los casos para determinar el coeficiente de fiabilidad del pre-test (muestra de 137 alumnos)

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,947	48

Tabla 103. Coeficiente de fiabilidad (Alfa de Cronbach) del pre-test (muestra de 137 alumnos)

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
rectas secantes 1a	58,15	324,155	,466	,946
rectas paralelas 1b	57,61	333,373	,131	,948
rectas perpendiculares (giradas) 1c	58,28	323,514	,397	,947
rectas perpendiculares 1d	58,13	324,836	,405	,947
ángulo agudo 2a	57,60	332,227	,311	,947
ángulo obtuso 2b	57,58	333,333	,194	,948
ángulo llano 2c	57,66	330,021	,401	,947
ángulo recto 2d	57,64	330,231	,413	,947
ángulos suplementarios 3a	58,43	330,968	,160	,948
ángulos consecutivos 3b	58,26	333,883	,006	,949
ángulos complementarios 3c	58,21	329,492	,194	,948
semejanza triángulo 4a	58,21	318,800	,544	,946
semejanza triángulo 4b	58,28	318,235	,579	,946

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
suma ángulos triángulo 4c	58,64	323,836	,434	,947
clasificación según lados (escaleno) 5a	58,26	314,324	,676	,945
clasificación según lados (equilátero) 5b	58,20	311,939	,742	,945
clasificación según lados (isósceles) 5c	58,18	315,013	,646	,945
clasificación según ángulos (rectángulo) 6a	58,59	318,126	,581	,946
clasificación según ángulos (acutángulo) 6b	58,62	316,531	,596	,946
clasificación según ángulos (obtusángulo) 6c	58,50	315,149	,620	,945
clasificación según ángulos (acutángulo) 6d	58,62	314,193	,679	,945
mediatriz 7	57,74	327,107	,390	,947
bisectriz 8	57,78	325,584	,416	,947
polígono (pentágono) irregular 9a	59,02	319,227	,511	,946
trapecio isósceles (girado) 9b	58,91	317,204	,589	,946
trapecio rectángulo (girado) 9c	59,00	319,500	,545	,946
trapezoide 9d	58,90	316,387	,584	,946
cuadrado (girado) a1	58,00	324,941	,364	,947
rectángulo (girado) b1	57,78	323,113	,493	,946
romboide c1	58,55	317,955	,495	,946
área cuadrado (girado) a2	58,46	311,544	,692	,945
área rectángulo (girado) b2	58,46	310,236	,728	,945
área romboide c2	58,88	316,604	,615	,946
elementos polígono regular: apotema 11a	59,04	325,057	,502	,946
elementos polígono regular: lado 11b	58,39	312,180	,649	,945
elementos polígono regular: radio 11c	58,96	320,675	,463	,947
elementos polígono regular: centro 11d	58,47	312,384	,651	,945
elementos circunferencia: centro 12a	58,31	313,097	,663	,945
elementos circunferencia: diámetro 12b	58,16	316,430	,581	,946

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
elementos circunferencia: cuerda 12c	58,61	315,901	,622	,945
elementos circunferencia: radio 12d	58,17	314,920	,589	,946
círculo 13a	57,80	323,311	,499	,946
sector circular 13b	58,33	322,031	,481	,946
segmento circular 13c	58,39	321,005	,558	,946
corona circular 13d	57,85	320,778	,586	,946
trapecio circular 13e	58,42	324,114	,443	,947
problema área triángulo 14	58,55	316,558	,583	,946
ternas pitagóricas 15	58,85	326,381	,418	,947

Tabla 104. Alfa de Cronbach del pre-test, si se elimina cada uno de los ítems (muestra de 137 alumnos)

b) Análisis de fiabilidad en el post-test.

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	137	100,0
	Excluidos(a)	0	,0
	Total	137	100,0

a Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Tabla 105. Resumen del procesamiento de los casos para determinar el coeficiente de fiabilidad del post-test (muestra de 137 alumnos)

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,947	48

Tabla 106. Coeficiente de fiabilidad (Alfa de Cronbach) del post-test (muestra de 137 alumnos)

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
rectas secantes 1a	72,91	263,072	,402	,947
rectas paralelas 1b	72,60	269,110	,234	,948
rectas perpendiculares (giradas) 1c	73,27	257,110	,581	,946

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
rectas perpendiculares 1d	72,91	263,154	,374	,947
ángulo agudo 2a	72,60	269,007	,256	,948
ángulo obtuso 2b	72,61	269,005	,221	,948
ángulo llano 2c	72,61	268,665	,253	,947
ángulo recto 2d	72,60	269,154	,225	,948
ángulos suplementarios 3a	72,97	266,117	,244	,948
ángulos consecutivos 3b	72,83	267,817	,157	,948
ángulos complementarios 3c	72,96	266,910	,196	,948
semejanza triángulo 4a	73,01	259,632	,445	,947
semejanza triángulo 4b	73,00	259,441	,455	,947
suma ángulos triángulo 4c	73,32	258,381	,509	,946
clasificación según lados (escaleno) 5a	73,10	255,166	,608	,946
clasificación según lados (equilátero) 5b	72,98	255,801	,666	,945
clasificación según lados (isósceles) 5c	72,95	255,975	,629	,946
clasificación según ángulos (rectángulo) 6a	73,12	259,771	,453	,947
clasificación según ángulos (acutángulo) 6b	73,19	254,493	,580	,946
clasificación según ángulos (obtusángulo) 6c	72,91	256,542	,612	,946
clasificación según ángulos (acutángulo) 6d	73,18	253,400	,623	,946
mediatriz 7	72,72	264,543	,402	,947
bisectriz 8	72,76	261,699	,510	,946
polígono (pentágono) irregular 9a	73,39	252,592	,599	,946
trapecio isósceles (girado) 9b	73,28	253,926	,603	,946
trapecio rectángulo (girado) 9c	73,64	252,969	,669	,945
trapezoide 9d	73,56	251,513	,693	,945
cuadrado (girado) a1	72,72	265,587	,341	,947
rectángulo (girado) b1	72,67	265,207	,376	,947
romboide c1	72,99	257,228	,584	,946
área cuadrado (girado) a2	72,89	256,981	,575	,946
área rectángulo (girado) b2	72,97	255,249	,629	,946
área romboide c2	73,36	252,498	,658	,945

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
elementos polígono regular: apotema 11a	73,39	255,018	,594	,946
elementos polígono regular: lado 11b	72,95	254,475	,657	,945
elementos polígono regular: radio 11c	73,55	255,720	,493	,947
elementos polígono regular: centro 11d	73,04	253,403	,685	,945
elementos circunferencia: centro 12a	73,04	255,035	,614	,946
elementos circunferencia: diámetro 12b	73,08	252,663	,679	,945
elementos circunferencia: cuerda 12c	73,22	253,716	,647	,945
elementos circunferencia: radio 12d	72,96	254,624	,630	,946
círculo 13a	72,65	266,450	,338	,947
sector circular 13b	73,21	262,050	,430	,947
segmento circular 13c	73,14	260,900	,471	,947
corona circular 13d	72,70	264,976	,383	,947
trapecio circular 13e	73,23	260,485	,496	,946
problema área triángulo 14	72,91	255,948	,661	,945
ternas pitagóricas 15	73,47	258,368	,595	,946

Tabla 107. Alfa de Cronbach del post-test, si se elimina cada uno de los ítems (muestra de 137 alumnos)

c) Índice de facilidad en el pre-test.

Ítem	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4a
% aciertos	46,7	95,6	43,8	50,4	96,4	97,8	90,5	92	21,9	38,7	43,8	53,5
Ítem	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	7	8	9a
% aciertos	46	17,5	52,6	59,1	59,9	27	29,9	38,7	29,9	87,6	85,4	19
Ítem	9b	9c	9d	10a1	10b1	10c1	10a2	10b2	10c2	11a	11b	11c
% aciertos	19,7	14,6	23,4	67,2	88,3	39,4	46	46,7	19,7	0	53,3	19
Ítem	11d	12a	12b	12c	12d	13a	13b	13c	13d	13e	14	15
% aciertos	46,7	54	62,8	29,9	67,2	85,4	38	30,7	81	27	34,3	2,9

Tabla 108. Porcentaje de aciertos de cada ítem del pre-test (muestra de 137 alumnos) para determinar la facilidad de dicho cuestionario

El índice de facilidad es 0,48.

d) Índice de facilidad en el post-test.

Ítem	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4a
% aciertos	70,1	97,8	43,1	70,8	97,8	97,1	96,4	97,8	60,6	74,5	62	68,6
Ítem	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	6d	7	8	9a
% aciertos	70,1	40,1	62,8	69,3	74,5	56,2	59,9	78,8	60,6	89,1	86,9	50,4
Ítem	9b	9c	9d	10a1	10b1	10c1	10a2	10b2	10c2	11a	11b	11c
% aciertos	51,8	27,7	34,3	88,3	94,2	68,6	81,8	74,5	46	40,9	77,4	39,4
Ítem	11d	12a	12b	12c	12d	13a	13b	13c	13d	13e	14	15
% aciertos	69,3	69,3	67,9	54	77,4	94,9	40,9	48,9	90,5	40,9	76,6	24,1

Tabla 109. Porcentaje de aciertos de cada ítem del post-test (muestra de 137 alumnos) para determinar la facilidad de dicho cuestionario

El índice de facilidad es 0,67.

Anexo 15: Comparación por género (N=137 alumnos) en el pre-test. Prueba t de Student.

Estadísticos de grupo

	sexo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
nota_pretest	chica	68	4,8163	1,79433	,21760
	chico	69	4,8521	2,01648	,24276

Tabla 110. Estadísticos de grupo (media y desviación típica) para determinar si existen diferencias significativas en el pre-test por razón de género (muestra de 137 alumnos)

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									99% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Superior	Inferior
nota_ pretest	Se han asumido varianzas iguales	2,390	,124	-,110	135	,913	-,03580	,32628	-,88829	,81669
	No se han asumido varianzas iguales			-,110	133,621	,913	-,03580	,32600	-,88769	,81608

Tabla 111. Prueba t de Student para muestras independientes para determinar que no existen diferencias significativas en el pre-test por razón de género

Anexo 16: Comparación por género (N=137 alumnos) en el aprendizaje. Prueba t de Student.

Estadísticos de grupo

	sexo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
aprendizaje	chica	68	1,7707	1,19464	,14487
	chico	69	1,9323	1,37545	,16559

Tabla 112. Estadísticos de grupo (media y desviación típica) para determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género (muestra de 137 alumnos)

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									99% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Superior	Inferior
apren-dizaje	Se han asumido varianzas iguales	1,086	,299	-,734	135	,464	-,16161	,22024	-,73704	,41382
	No se han asumido varianzas iguales			-,735	132,909	,464	-,16161	,22001	-,73658	,41336

Tabla 113. Prueba t de Student para muestras independientes para determinar que no existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género

Anexo 17: Comparación del grupo experimental y de contraste en el pre-test. Prueba t de Student.

Estadísticos de grupo

	grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
nota_pretest	B	18	5,5669	1,50227	,35409
	D	21	5,5556	1,52572	,33294

Tabla 114. Estadísticos de grupo (media y desviación típica) para determinar si existen diferencias significativas en el pre-test por razón de pertenencia al grupo experimental o de contraste

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									99% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Superior	Inferior
nota_ pretest	Se han asumido varianzas iguales	,082	,777	,023	37	,981	,01139	,48663	-1,31001	1,33278
	No se han asumido varianzas iguales			,023	36,258	,981	,01139	,48603	-1,30985	1,33263

Tabla 115. Prueba t de Student para muestras independientes para determinar que no existen diferencias significativas en el pre-test por razón de pertenencia al grupo experimental o de contraste

Anexo 18: Comparación del grupo experimental y de contraste en el aprendizaje. Prueba t de Student.

Estadísticos de grupo

	grupo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
aprendizaje	B	18	1,4006	1,33661	,31504
	D	21	2,4702	,94622	,20648

Tabla 116. Estadísticos de grupo (media y desviación típica) para determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de pertenencia al grupo experimental o de contraste

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									99% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Superior	Inferior
apren-dizaje	Se han asumido varianzas iguales	,317	,577	-2,915	37	,006	-1,06959	,36691	-2,06590	-,07328
	No se han asumido varianzas iguales			-2,840	30,032	,008	-1,06959	,37668	-2,10538	-,03380

Tabla 117. Prueba t de Student para muestras independientes para determinar que existen diferencias significativas en el aprendizaje por razón de pertenencia al grupo experimental o de contraste

Anexo 19: Unidades didácticas.

Unidades didácticas de Geometría de 1º de ESO

Basadas en el modelo de van Hiele

02/04/2012

IES Joaquín Araújo (Fuenlabrada) Madrid
Ana Belén Cabello Pardos

UNIDAD 1.

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA DEL PLANO. RELACIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD.

En este tema estudiaremos dos cosas:

1) Los elementos básicos de la Geometría del plano: puntos, segmentos, rectas, semirrectas y ángulos.

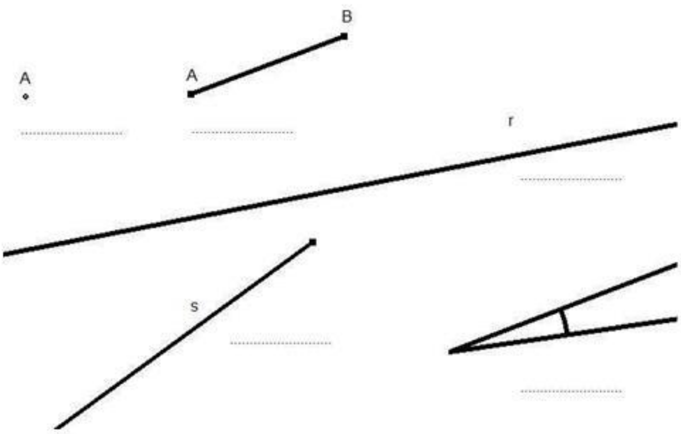
2) Las posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Para ello, en primer lugar, tratarás de recordar lo que ya sabes de cursos anteriores.

1.1. <u>PUNTO, RECTA, SEMIRRECTA, SEGMENTO, ÁNGULO.</u>

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

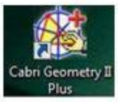
Sin pasar a la página siguiente y sin fijarte en tus compañeros, trata de recodar los nombres de los siguientes objetos y escríbelos:



FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Introducción:

Ahora vamos a empezar a trabajar la Geometría con el programa Cabri que tienes instalado en el ordenador. Lo puedes reconocer por el icono:



Si haces doble clic en él, aparece el archivo en el que vamos a trabajar. La barra de herramientas del programa es la siguiente:

Haciendo clic en cada una de las herramientas, aparecen varias opciones, que vamos a ir utilizando poco a poco y que puedes consultar en este cuadro:

Realizamos los siguientes ejercicios:

Abre una carpeta en tu pen-drive para la unidad 1, luego abre una subcarpeta y ponle como nombre la fecha del día en que haces los ejercicios. Guarda en ella cada archivo como Unidad1_Apartado1_Fase1_Ejercicio 1, etc.

Ejercicio 1. Dibuja un punto A.

- En la barra de herramientas, selecciona "Punto" y haz clic en el lugar que quieras de la ventana de trabajo.

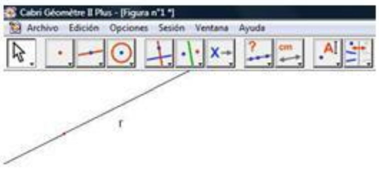
- Ahora vamos a poner una etiqueta. Para dar nombre al punto, selecciona "Nombrar", haz clic cerca del punto y escribe "A" (con mayúscula).

- Después, con el "Apuntador" puedes mover esta etiqueta alrededor del punto A.

Ejercicio 2. Dibuja una recta r.

- En la barra de herramientas selecciona "Recta" y haz clic en dos puntos de la ventana de trabajo.

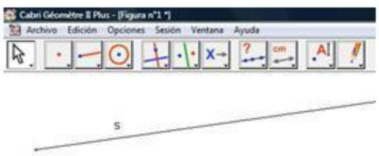
- Ahora vamos a poner una etiqueta. Para dar nombre a la recta, selecciona "Nombrar", haz clic cerca de la recta y escribe "r" (con minúscula).



Ejercicio 3. Dibuja una semirrecta s.

- En la barra de herramientas selecciona "Semirrecta" y haz clic en dos puntos de la ventana de trabajo.

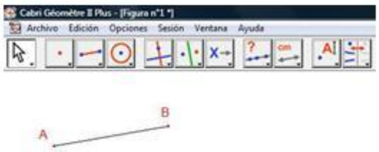
- Para dar nombre a la semirrecta, selecciona "Nombrar", haz clic cerca de la semirrecta y escribe "s" (con minúscula).



Ejercicio 4. Dibuja un segmento AB.

- En la barra de herramientas selecciona "Segmento" y haz clic en dos puntos de la ventana de trabajo.

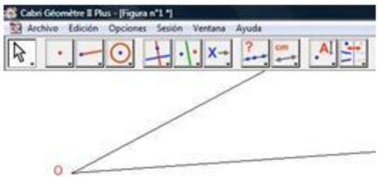
- Para dar nombre al segmento, selecciona "Nombrar", haz clic cerca de cada uno de los extremos y escribe "A" y "B" en dichos puntos (con mayúscula).



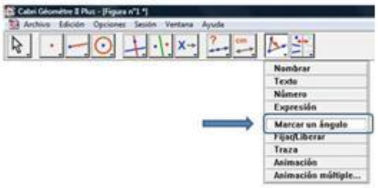
Ejercicio 5. Dibuja un ángulo.

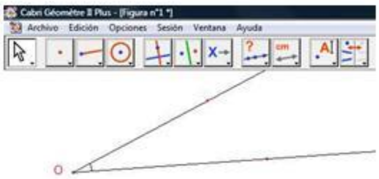
- En la barra de herramientas selecciona "Semirrecta" y haz clic en dos puntos.

- En la barra de herramientas selecciona "Nombrar" y llama O al punto inicial de la semirrecta.
- Dibuja, de la misma manera, otra semirrecta con origen en dicho punto O.



- Para marcar el ángulo (que aparezca el *arquito*), en la barra de herramientas selecciona "Marcar un ángulo", haz clic en un punto de una semirrecta, en el origen O y en un punto de la otra semirrecta.





FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

En este apartado vas a realizar unos ejercicios similares a los que acabamos de hacer.

Ejercicio 1. Dibuja un punto P.

Ejercicio 2. Dibuja una recta t.

Ejercicio 3. Dibuja una semirrecta n.

Ejercicio 4. Dibuja un segmento MN.

Ejercicio 5. Dibuja un ángulo con origen en un punto Q y marca el ángulo.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un punto M.**
- **Nómbralo.**
- **Muévelo por la ventana de trabajo.**

Recuerda que para moverlo tienes que hacer clic en el "Apuntador".

Ejercicio 2.

- **Dibuja un segmento MN. Nómbralo.**
- **Arrastra uno de los extremos (con el Apuntador) y verás como el segmento se transforma en otro segmento de distinta longitud.**
- **Dibuja una recta r que pase por N.**
- **Mueve la recta (con el Apuntador) y verás que el punto N permanece fijo.**
- **Dibuja otras rectas que pasen por N. ¿Cuántas podrías dibujar?**

……………………………………………………………………………………..

Ejercicio 3.

- **Dibuja una semirrecta s que pase por un punto P.**
- **Mueve la semirrecta y verás que obtienes todas las semirrectas que pasan por P.**
- **¿Cuántas podrías dibujar?**

…………………………………………………………………………………………

Ejercicio 4.

- **Dibuja un ángulo con centro en un punto O.**
- **Marca el ángulo.**
- **Mueve una semirrecta y verás cómo el ángulo varía su amplitud.**

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1. Representa un punto A y cinco rectas que pasen por ese punto.

¿Cuántas rectas pueden pasar por el punto A? Justifica tu respuesta.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Ejercicio 2. Representa dos puntos A y B y dibuja una recta que pasa por ellos.

¿Cuántas rectas pueden pasar por A y B a la vez? Justifica tu respuesta.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Ejercicio 3. Dibuja segmentos horizontales, verticales y oblicuos. Haz lo mismo con rectas y semirrectas.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

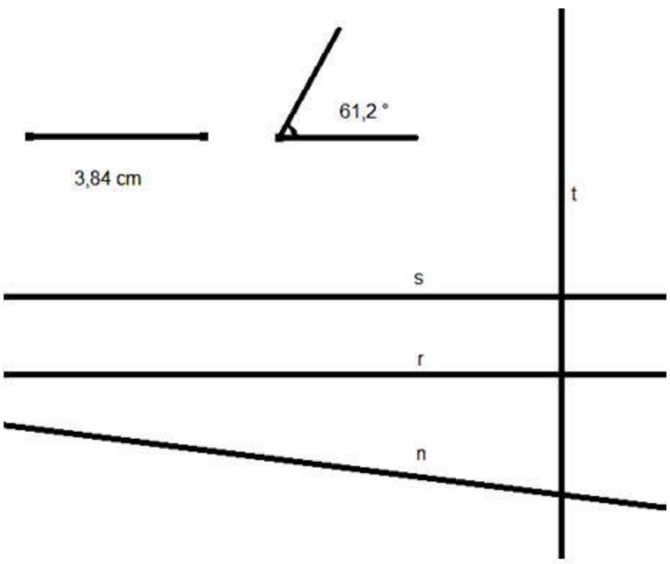
Segmento horizontal	Segmento vertical	Segmento oblicuo
Recta horizontal	Recta vertical	Recta oblicua
Semirrecta horizontal	Semirrecta vertical	Semirrecta oblicua

Ejercicio 4. Dibuja ángulos en distintas posiciones.

1.2. LONGITUD DE UN SEGMENTO. AMPLITUD DE UN ÁNGULO. RECTAS PARALELAS, SECANTES Y PERPENDICULARES.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

Sin fijarte en tus compañeros, trata de completar lo que se te pide:

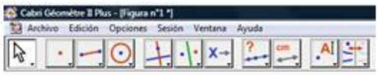


- El segmento tiene………………….. cm de longitud.
- El ángulo tiene………………… grados de amplitud.
- Las rectas r y s son …………………………………..
- Las rectas r y t son …………………………………..
- Las rectas s y t son …………………………………..
- Las rectas n y t son ………………………………….

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

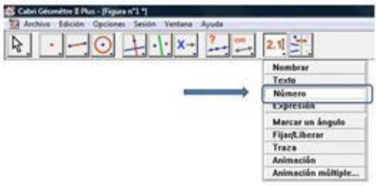
Ejercicio 1. Dibuja un segmento AB y mide su longitud.

- Dibuja el segmento y nómbralo.
- En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en el segmento.

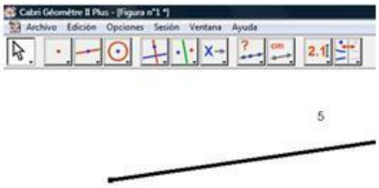


Ejercicio 2. Dibuja un segmento AB de 5 cm.

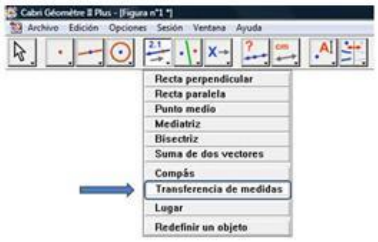
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 5.



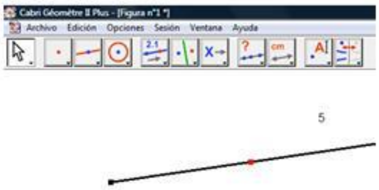
- Dibuja una semirrecta.



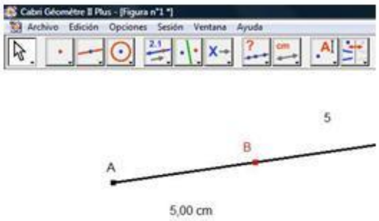
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas".



- Haz clic en la medida que has escrito (5) y en la semirrecta. Te aparecerá un punto en la semirrecta.



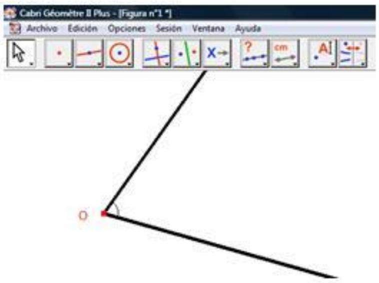
- Comprueba que la distancia de ese punto al origen de la semirrecta es 5 cm: en la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en cada uno de los extremos.



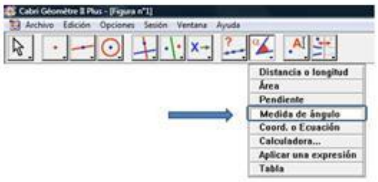
- Nombra los puntos. Son los **extremos del segmento**.

Ejercicio 3. Dibuja un ángulo y mide su amplitud.

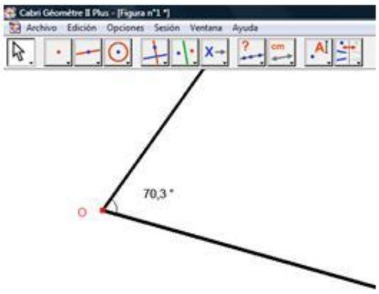
- Dibuja un ángulo.
- Nombra el vértice del ángulo, O.
- Marca el ángulo.



- En la barra de herramientas selecciona “Medida de ángulo”.

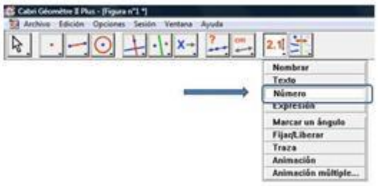


- Haz clic en la marca del ángulo. Te aparecerá la medida del ángulo en grados.

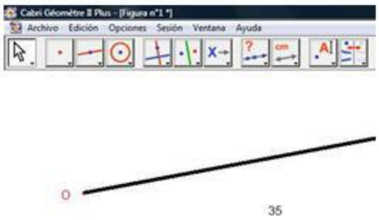


Ejercicio 4. Dibuja un ángulo de 35º.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 35.

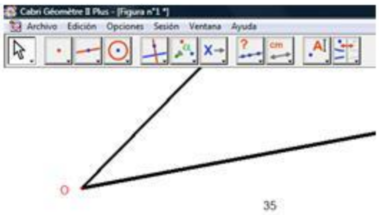


- Dibuja una semirrecta de origen un punto O.

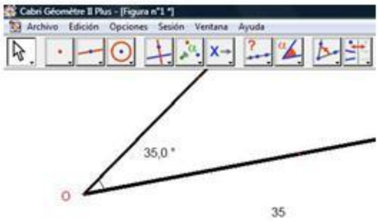


- En la barra de herramientas selecciona "Rotación".

- Haz clic en la semirrecta, en el punto O y en el número 35.

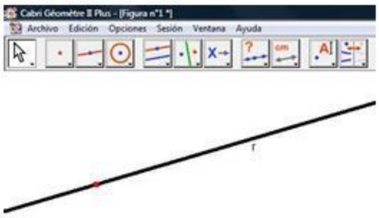


- Compruébalo (marca el ángulo y mídelo).



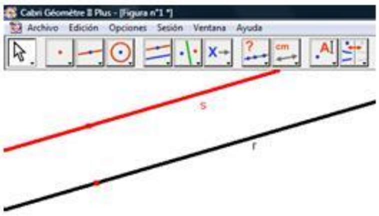
Ejercicio 5. Dibuja dos rectas paralelas r y s.

- Dibuja una recta r.



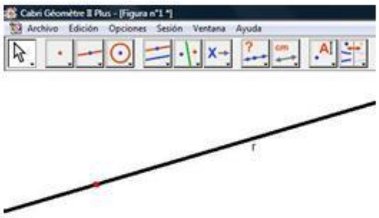
- En la barra de herramientas selecciona “Recta paralela”.

- Haz clic en la recta r y luego en un punto que no esté en r.
- Nómbrala como s.

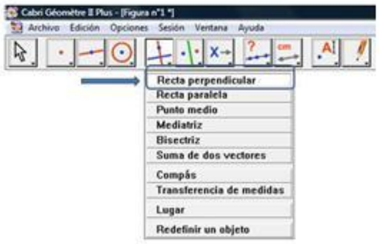


Ejercicio 6. Dibuja dos rectas perpendiculares r y s. (Forman un ángulo recto).

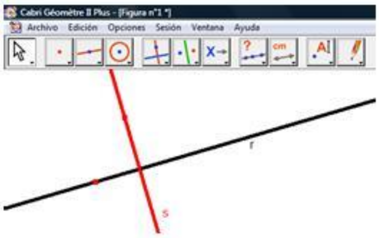
- Dibuja una recta r.



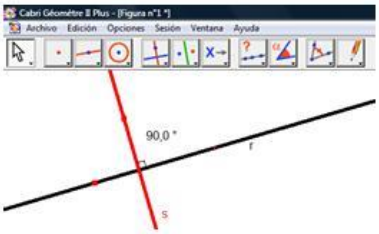
- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular".



- Haz clic en la recta r y luego en otro punto por el que quieres que pase la recta s.
- Nómbrala (s).

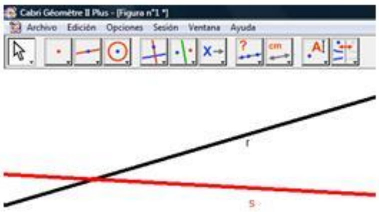


- Comprueba que el ángulo es de 90 grados: (Marcar el ángulo y Medida de ángulo).



Ejercicio 7. Dibuja dos rectas secantes r y s (se cortan en un punto pero no tienen que ser necesariamente perpendiculares).

- Dibuja una recta r.
- Dibuja una recta s que se corte con r.
- Nómbralas.
- Comprueba que el ángulo no es de 90 grados: (Marcar el ángulo y Medida de ángulo).



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

En este apartado vas a realizar unos ejercicios similares a los que acabamos de hacer.

Ejercicio 1. Dibuja un segmento PQ y mide su longitud.

Ejercicio 2. Dibuja un segmento de 2,5 cm.

Ejercicio 3. Dibuja un ángulo y mide su amplitud.

Ejercicio 4. Dibuja un ángulo de 92º.

Ejercicio 5. Dibuja dos rectas paralelas t y n.

Ejercicio 6. Dibuja dos rectas perpendiculares t y n.

Ejercicio 7. Dibuja dos rectas secantes t y n (se cortan en un punto pero no tienen que ser necesariamente perpendiculares).

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un segmento PQ.**
- **Mide su longitud.**
- **Arrastra uno de los extremos.**
- **¿Qué observas respecto a la longitud?**

…………………………………………………………………………………………………

Ejercicio 2.

- **Dibuja un ángulo**
- **Mide su amplitud.**
- **Arrastra una de las semirrectas.**
- **¿Qué observas respecto a la medida del ángulo?**

…………………………………………………………………………………………………

Ejercicio 3.

- **Dibuja una recta t**
- **Dibuja una recta paralela n.**
- **Mueve la recta t. ¿Qué ocurre con la recta n?**

…………………………………………………………………………………………………

- **Si movemos el punto de la recta t que hemos utilizado para dibujarla, ¿Qué posición tiene la recta t respecto a n?**

…………………………………………………………………………………………………

Ejercicio 4.

- **Dibuja una recta t.**
- **Traza una perpendicular n.**
- **Halla la amplitud de los ángulos que forman las rectas. ¿Qué resultado obtienes?**

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

- **Si mueves la recta t, ¿qué ocurre con los ángulos?**

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

Ejercicio 5.

- **Dibuja una recta r.**
- **Dibuja una recta secante s (que no sea perpendicular a r).**
- **Mide uno de los ángulos que forman las rectas.**
- **Mueve una de las rectas, ¿qué ocurre con el ángulo?**

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1. ¿Cuántos puntos pueden tener en común dos rectas distintas? Haz un dibujo para cada una de las posibilidades.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

Ejercicio 2. Dibuja tres puntos A, B y C que no estén en línea recta, y las rectas que pasan por cada dos de ellos:

a) **¿Cuántas rectas hay?**

b) **¿Cómo son las rectas, secantes o paralelas?**

c) **¿Pueden ser perpendiculares en algún caso?**

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Ejercicio 3. Dibuja una recta r y un punto A exterior a ella. ¿Cuántas rectas pasan por el punto A que sean paralelas a la recta dada? Dibújalas.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego dibújalo aquí utilizando la regla).

....

....

Ejercicio 4. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las tres en punto?

....

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD CON CABRI

1. Dibuja un punto y nómbralo.
2. Dibuja una recta y nómbrala.
3. Dibuja una semirrecta y nómbrala.
4. Dibuja un segmento y nómbralo.
5. Dibuja un ángulo, márcalo y nómbralo.
6. Dibuja un segmento de 7,5 cm de longitud.
7. Dibuja un ángulo de 92º de amplitud.
8. Dibuja dos rectas paralelas r y s.
9. Dibuja dos rectas perpendiculares t y n.
10. Dibuja dos rectas secantes que no sean perpendiculares u y v.

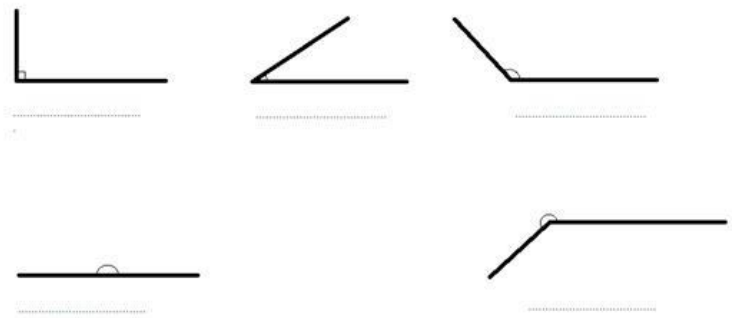
UNIDAD 2.

ESTUDIO DE LOS ÁNGULOS.

2.1. TIPOS DE ÁNGULOS.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

Trata de recordar los nombres de los siguientes ángulos, según su forma, y escríbelos:

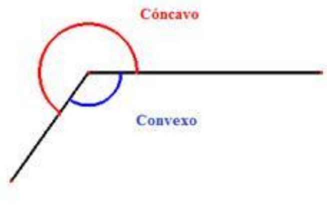


FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

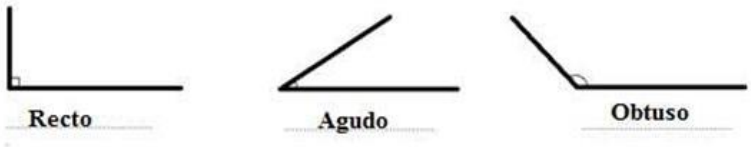
Los ángulos pueden ser convexos o cóncavos:

- Convexo: si mide menos de 180º
- Cóncavo: si mide más de 180º
- Llano: si mide 180º



Un ángulo convexo puede ser:

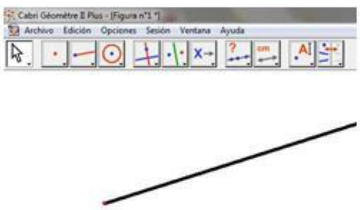
- Recto: si mide 90º
- Agudo: si mide menos de 90º
- Obtuso: si mide más de 90º



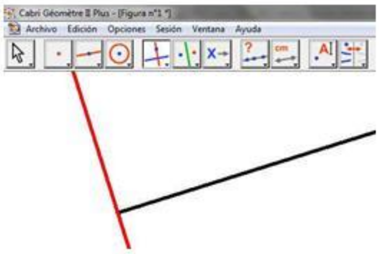
Ejercicio 1. Dibuja un ángulo recto.

Un ángulo recto es el que mide 90º (está formado por dos rectas perpendiculares).

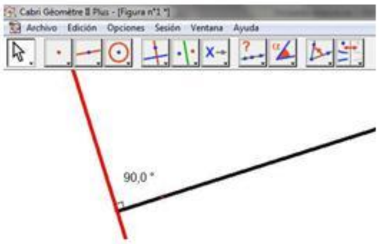
- En la barra de herramientas selecciona "Semirrecta" y haz clic en un punto.



- Ahora selecciona "Recta perpendicular" de la barra de herramientas y traza una recta perpendicular a la semirrecta pasando por el punto.



- En la barra de herramientas selecciona "Marcar un ángulo" y haz clic en la semirrecta, en el punto y en la recta.



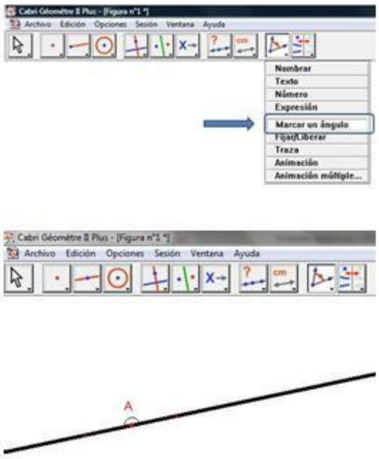
- En la barra de herramientas selecciona "Medida de ángulo", haz clic en la marca de ángulo y comprueba que mide 90º.

Ejercicio 2. Dibuja un ángulo llano.

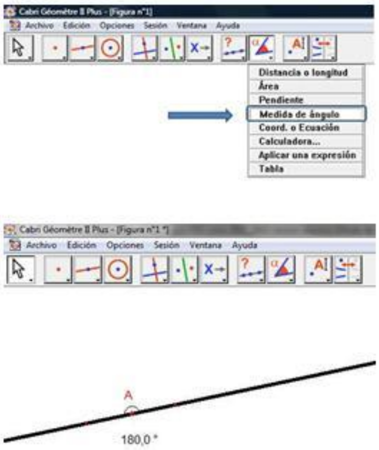
Un ángulo llano es el que mide 180º.

- En la barra de herramientas selecciona "Recta" y haz clic en un punto de dicha recta. Llámalo A.

- En la barra de herramientas selecciona "Marcar un ángulo" y haz clic en un punto de la recta a la derecha del punto A, en el punto A y en otro punto de la recta a la izquierda del punto A.

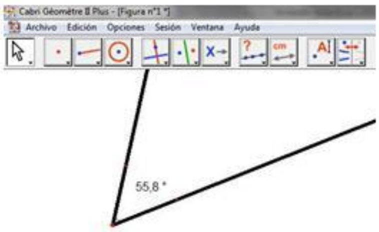


- También en la barra de herramientas selecciona "Medida de ángulo" y comprueba que la medida es de 180º.



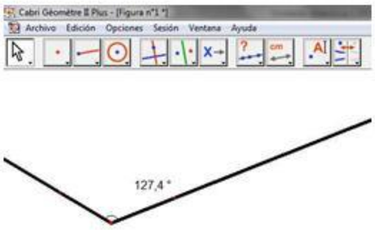
Ejercicio 3. Dibuja un ángulo de menos de 90º. Se llama ángulo agudo.

(No es necesario dar indicaciones pues es muy sencillo)



Ejercicio 4. Dibuja un ángulo de más de 90º. Se llama ángulo obtuso.

(No es necesario dar indicaciones pues es muy sencillo)

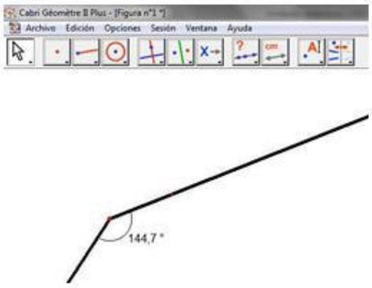


Ejercicio 5. Dibuja un ángulo de menos de 180º. Se llama ángulo convexo.

(Sirven los dos ejercicios anteriores).

Ejercicio 6. Dibuja un ángulo de más de 180º. Se llama ángulo cóncavo.

Fíjate que con el apuntador puedes coger la marca del ángulo y pasándola por el vértice del ángulo puedes obtener otro ángulo (lo que le falta para completar 360º).



Observación: Cabri no considera la orientación del ángulo; siempre toma la medida positiva, que es en sentido contrario a las agujas del reloj.

FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Dibuja un ángulo de 90º. ¿Cómo se llama? ………………….

Ejercicio 2. Dibuja un ángulo de 180º. ¿Cómo se llama? ………………..

Ejercicio 3. Dibuja un ángulo de 45º. ¿Cómo se llama? ………………….

Ejercicio 4. Dibuja un ángulo de 105º. ¿Cómo se llama? ………………….

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un ángulo de 35º.**
- **Indica si es agudo, obtuso, convexo o cóncavo.**

....

- **¿Puede ser varias cosas a la vez?**

....

Ejercicio 2.

- **Dibuja un ángulo de 95º.**
- **Indica si es agudo, obtuso, convexo o cóncavo.**

....

- **¿Puede ser varias cosas a la vez?**

....

Ejercicio 3.

- **Dibuja un ángulo de 185º.**
- **Indica si es agudo, obtuso, convexo o cóncavo.**

....

- **¿Puede ser varias cosas a la vez?**

....

Ejercicio 4.

- **Dibuja un ángulo de 275º.**
- **Indica si es agudo, obtuso, convexo o cóncavo.**

....

- **¿Puede ser varias cosas a la vez?**

....

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego completa)

- **Dibuja un ángulo y mídelo.**
- **Arrastra un lado para obtener ángulos agudos, obtusos, convexos y cóncavos.**

He dibujado un ángulo agudo que mide…………… grados y uno obtuso que mide…………… grados. Uno convexo de…………… grados y uno cóncavo de…………… grados.

Ejercicio 2.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego completa)

- **Dibuja un ángulo convexo y agudo.**
- **Mídelo y completa:**

El ángulo convexo y agudo que he dibujado mide…………… grados.

Ejercicio 3.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego completa)

- **Dibuja un ángulo convexo y obtuso.**
- **Mídelo y completa:**

El ángulo convexo y obtuso que he dibujado mide…………… grados.

Ejercicio 4.

(Haz el ejercicio en Cabri y luego completa)

- **Dibuja un ángulo cóncavo y mayor de 270º.**
- **Mídelo y completa:**

El ángulo cóncavo que he dibujado mide…………… grados.

Ejercicio 5.

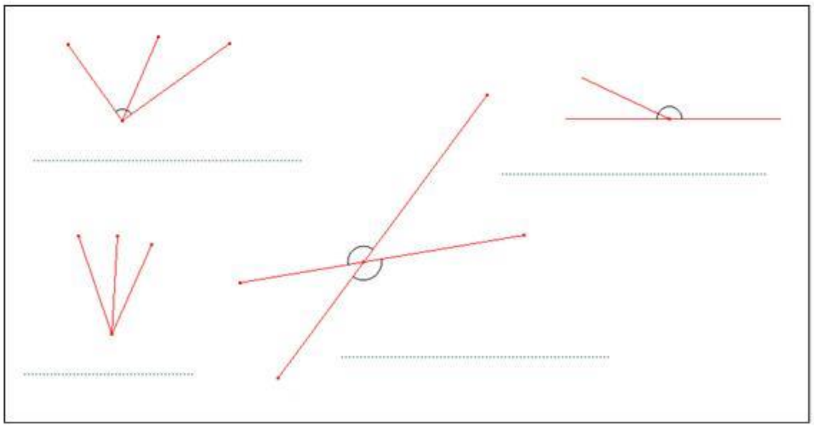
Un ángulo agudo: ¿puede ser cóncavo?.......................... ¿y convexo? ....

Un ángulo obtuso: ¿puede ser cóncavo?......................... ¿y convexo? ....

2.2. POSICIÓN RELATIVA DE DOS ÁNGULOS.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

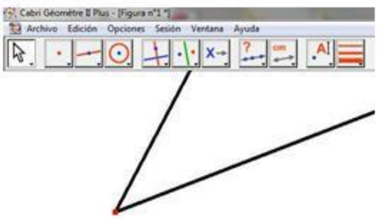
Trata de recordar y escribe cómo se llaman estos pares de ángulos.



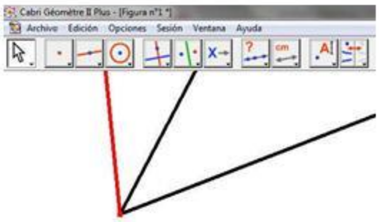
FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Ejercicio 1. Dibuja dos ángulos consecutivos (tienen un lado común).

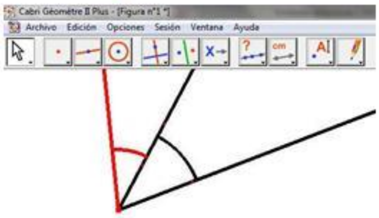
- En la barra de herramientas selecciona Semirrecta, haz clic en un punto (que será el vértice del ángulo) y en otro punto de la ventana de trabajo. Repite lo mismo (haciendo clic en el mismo vértice) para tener un ángulo.



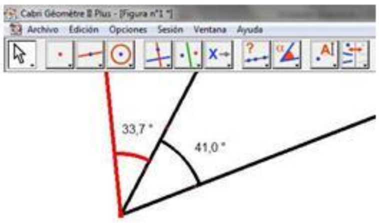
- Tomando la segunda semirrecta, vuelve a hacer lo mismo para tener otro ángulo con un lado en común con el anterior.



- En la barra de herramientas selecciona "Marcar un ángulo" y marca los dos ángulos.

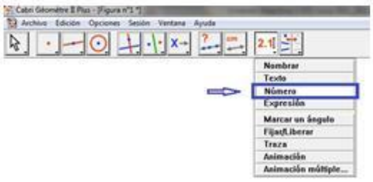


- Luego selecciona "Medida de un ángulo" y mide cada uno de ellos.

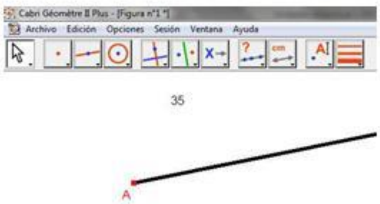


Ejercicio 2. Dibuja dos ángulos complementarios (suman 90º). Por ejemplo 35º y 55º.

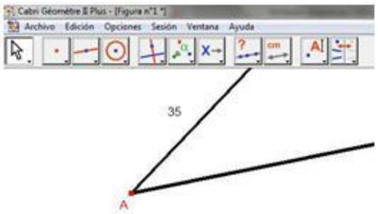
- En la barra de herramientas selecciona "Número", haz clic en la ventana de trabajo y escribe 35.



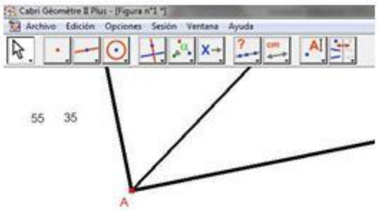
- En la barra de herramientas, selecciona "Semirrecta" y haz clic en un punto A.



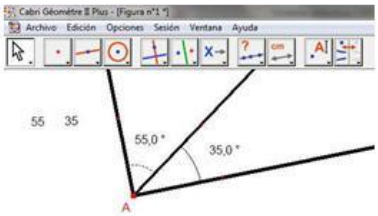
- En la barra de herramientas selecciona “Rotación” y haz clic en la semirrecta, en el punto A y en el número 35. Verás que aparece una nueva semirrecta.



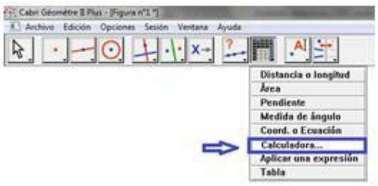
- Ahora escribe 55 y con esta nueva semirrecta repite el proceso.



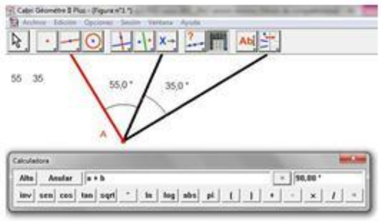
- En la barra de herramientas selecciona “Medida de ángulo” y comprueba que los ángulos miden 35º y 55º.



- Comprueba que la suma es 90º. En la barra de herramientas, selecciona “Calculadora”.

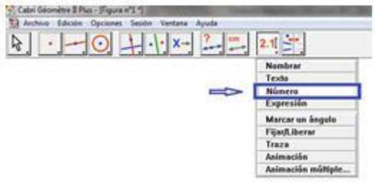


- Estando el cursor activo en la calculadora, haz clic en una de las medidas y verás que aparece en la calculadora el valor a. Pulsa la tecla + y a continuación haz clic en la otra medida y verás que aparece en la calculadora el valor b. Si pulsas "=" aparece el valor 90º.

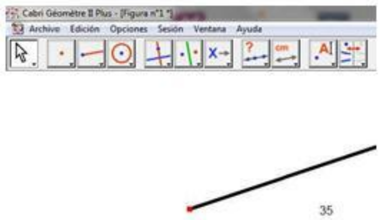


Ejercicio 3. Dibuja dos ángulos suplementarios (suman 180º). Por ejemplo 35º y 145º.

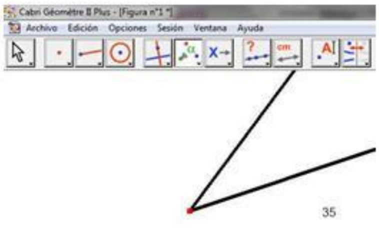
- En la barra de herramientas selecciona "Número", haz clic en la ventana de trabajo y escribe 35.



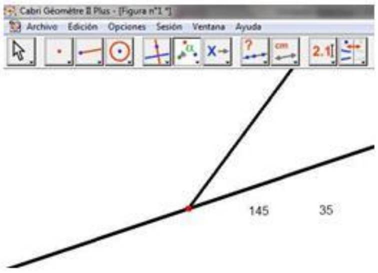
- En la barra de herramientas, selecciona "Semirrecta" y haz clic en un punto A.



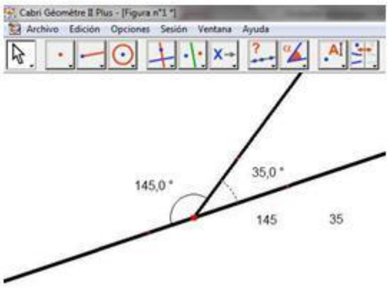
- En la barra de herramientas selecciona "Rotación" y haz clic en la semirrecta, en el punto A y en el número 35. Verás que aparece una nueva semirrecta.



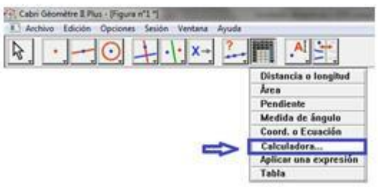
- Ahora escribe 145 y con esta nueva semirrecta repite el proceso.



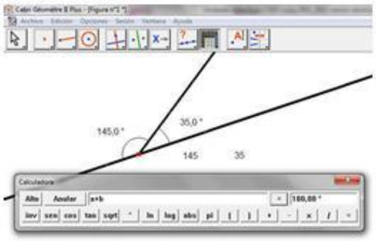
- En la barra de herramientas selecciona "Medida de ángulo" y comprueba que los ángulos miden 35º y 145º.



- Comprueba que la suma es 90º. En la barra de herramientas, selecciona "Calculadora".



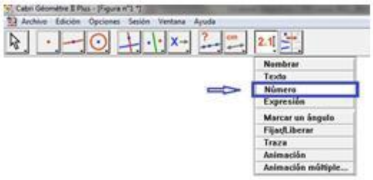
- Estando el cursor activo en la calculadora, haz clic en una de las medidas y verás que aparece en la calculadora el valor a. Pulsa la tecla + y a continuación haz clic en la otra medida y verás que aparece en la calculadora el valor b. Si pulsas "=" aparece el valor 180º.



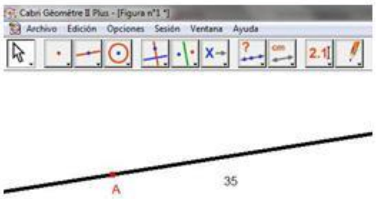
Ejercicio 4. Dibuja dos ángulos opuestos por el vértice. Por ejemplo de amplitud 35º.

Ángulos **opuestos por el vértice** son aquellos que tienen el vértice común y los lados de uno son la prolongación de los lados del otro. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

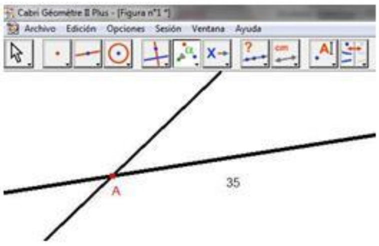
- En la barra de herramientas selecciona "Número", haz clic en la ventana de trabajo y escribe 35.



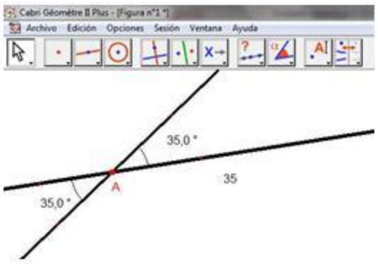
- En la barra de herramientas, selecciona "Recta" y haz clic en un punto A.



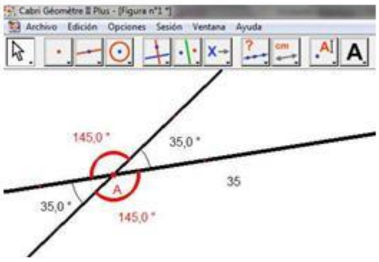
- En la barra de herramientas selecciona "Rotación" y haz clic en la recta, en el punto A y en el número 35. Verás que aparece una nueva recta.



- En la barra de herramientas selecciona "Medida de ángulo" y comprueba que los ángulos opuestos por el vértice miden 35º.



- Fíjate, además, que los otros dos ángulos que se forman son también opuestos por el vértice y, por tanto, son también iguales.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Dibuja dos ángulos consecutivos.

Ejercicio 2. Dibuja dos ángulos que sumen 90º. Se llaman…………………………..

Ejercicio 3. Dibuja dos ángulos que sumen 180º. Se llaman…………………………

Ejercicio 4. Dibuja dos ángulos opuestos por el vértice que midan 45º. Comprueba que son iguales.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un ángulo recto.**
- **Divídelo en dos por una semirrecta.**
- **Mide cada uno de ellos y comprueba sumándolos, que son complementarios. Arrastra la semirrecta y verás que varía la medida de los ángulos y siguen siendo complementarios.**

Ejercicio 2.

- **Dibuja un ángulo llano.**
- **Divídelo en dos por una semirrecta.**
- **Mide cada uno de ellos y comprueba sumándolos, que son suplementarios. Arrastra la semirrecta y verás que varía la medida de los ángulos y siguen siendo suplementarios.**

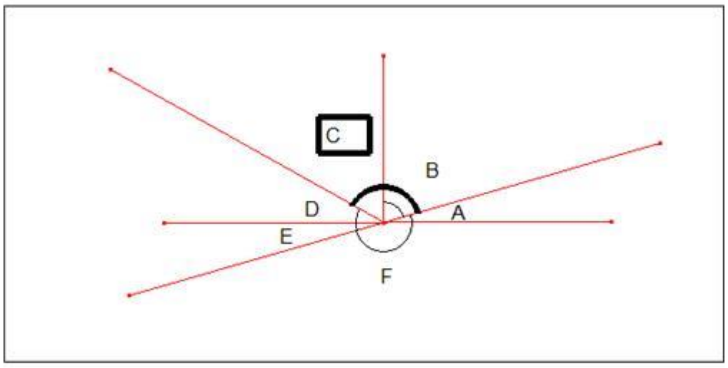
Ejercicio 3.

- **Dibuja dos rectas secantes.**
- **Marca dos ángulos opuestos por el vértice.**
- **Mídelos.**
- **Arrastra una de las rectas y verás que varía la medida de los ángulos y siguen siendo iguales.**

Ejercicio 4. Dibuja dos ángulos consecutivos, uno de ellos de 25º y el otro de 45º.

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio. En la siguiente figura:



Indica cómo son:

a) **A y E** …………………………………………………………………………

b) **A y B** …………………………………………………………………………

c) **E y F** …………………………………………………………………………

d) **A y C** …………………………………………………………………………

2.3. OPERACIONES CON ÁNGULOS.

FASE 1. INDAGACIÓN.

En Primaria has visto las unidades sexagesimales y la suma y resta de ángulos.

Ejercicio 1. Completa:

1º =…..'

1' =…..''

Ejercicio 2. Realiza las siguientes operaciones:

	32º	41'	40''		62º	39'	48''
+	15º	18'	12''	-	45º	34'	33''

	32º	32'	29''		86º	39'
+	15º	43'	34''	-	58º	57'

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

Un **grado** es lo que mide un ángulo que se obtiene al dividir la circunferencia en 360 partes iguales. Se escribe 1º.

Un **minuto** es lo que mide un ángulo que se obtiene al dividir en 60 partes iguales un ángulo de un grado. Es decir, un grado tiene 60 minutos. Se escribe 1º = 60'.

Un **segundo** es lo que mide un ángulo que se obtiene al dividir en 60 partes iguales un ángulo de un minuto. Es decir, un minuto tiene 60 segundos. Se escribe 1' = 60".

Ejercicio 1. Realiza la suma de ángulos 36º 45' 23'' + 28º 52' 41''.

- Primero hacemos la suma por unidades, es decir, sumamos grados con grados, minutos con minutos y segundos con segundos.

	36º	45'	23''
+	28º	52'	41''
	64º	97'	64''

- Si hemos obtenido más de sesenta segundos, podemos obtener algún minuto más ya que 60'' = 1'.

64'' = 60''+ 4'' = 1' 4''

Entonces tendríamos 64º 98' 4''.

- De la misma manera, si hemos obtenido más de sesenta minutos, podemos obtener algún grado más ya que 60' =1º.

98' = 60' + 38' = 1º + 38'

Entonces, se tiene que la suma final es:

65º 38' 4''

En resumen:

	36º 45' 23''
+	28º 52' 41''
	64º 97' 64''
	+ 1'- 60''
	64º 98' 4''
	+ 1º- 60'
	65º 38' 4''

Ejercicio 2. Realiza la resta de ángulos 36º 45' 23'' - 28º 52' 41''.

- Primero lo que hacemos es escribir los ángulos de manera que en cada unidad, el minuendo sea mayor que el sustraendo.

	36º **45' 23''**
-	28º **52' 41''**

(Aquí no ocurre)

- Como 45' = 44 '+ 1' entonces 45'= 44' + 60''. Sumamos los 60'' a los 23''que tenemos y en total tenemos 83''. Por tanto de momento la resta es:

	36º **44' 83''**
-	28º **52' 41''**

- Ahora como 36º = 35º + 1º = 35º + 60', le sumamos los 60' a los 44' que tenemos y entonces hay 104'. Con lo cual la resta que tenemos que hacer es:

$$\begin{array}{rrrr} & 35^{\circ} & \mathbf{104'} & \mathbf{83''} \\ - & \underline{28^{\circ}} & \underline{\mathbf{52'}} & \underline{\mathbf{41''}} \end{array}$$

- Ahora hacemos la resta por unidades.

$$\begin{array}{rrrr} & 35^{\circ} & 104' & 83'' \\ - & 28^{\circ} & 52' & 41'' \\ \hline & 7^{\circ} & 52' & 42'' \end{array}$$

El resultado de la resta es 7º 52' 42".

Ejercicio 3. Realiza la multiplicación de un ángulo por un número (36º45'23'') x 2.

- Para multiplicar un ángulo por un número, se hace la multiplicación por unidades y luego, se consigue que no haya más de 60 segundos ni de 60 minutos.

$$(36^{\circ}\ 45'\ 23'') \times 2 = 72^{\circ}\ 90'\ 46''$$

- Como 90' = 60' + 30' = 1º + 30', lo que hacemos es sumar el grado a los que ya tenemos y nos queda: 73º 30' 46"

$$\begin{array}{l} 72^{\circ}\ 90'\ 46'' \\ \underline{+1^{\circ}\text{-}60'} \\ 73^{\circ}\ 30'\ 46'' \end{array}$$

El resultado de la multiplicación es 73º 30' 46".

Ejercicio 4. Realiza la división de un ángulo por un número, (35º 45' 23''):2.

- Para dividir un ángulo por un número se empieza dividiendo los grados. El resto de grados se pasa a minutos y se suma con los minutos que tenemos. Luego se dividen los minutos y el resto se pasa a segundos y se suma con los segundos que tenemos y se dividen:

```
35º   45'   23''   |2
1º→   60'          17º  52'  41"

      105'
        1' → 60"
             83"
              1"
```

Entonces el resultado de dividir 35º 45' 23'' entre 2, da como cociente 17º 52' 41" y como resto 1".

Se puede comprobar que dividendo = divisor x cociente + resto.

(17º 52' 41") x 2 = 34º 104' 82"

34º 104' 82" +1" = 34º 104' 83" = 34º 105' 23" = 35º 45' 23"

FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1.

27º 15' 18''+ 25º 28' 27'' =

Ejercicio 2.

27º 28' 27''- 25º 15' 18'' =

Ejercicio 3.

27º 45' 38''+ 35º 28' 47'' =

Ejercicio 4.

87º 27' 18'' - 35º 46' 23'' =

Ejercicio 5.

(27º 45' 38'') x 3 =

Ejercicio 6.

(27º 45' 36''):3 =

Ejercicio 7.

(28º 47' 12''):3 =

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Se forman parejas de alumnos y cada uno pone los enunciados a su compañero.

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

EJERCICIOS DE REFUERZO:

Ejercicio 1.

17º 16' 28''+ 20º 24' 17'' =

Ejercicio 2.

27º 28' 27''- 20º 10' 18'' =

Ejercicio 3.

27º 45' 38''+ 35º 26' 48'' =

Ejercicio 4.

85º 28' 18'' - 30º 45' 22'' =

Ejercicio 5.

(26º 40' 38'') x 2 =

Ejercicio 6.

(26º 40’ 38’’):2 =

Ejercicio 7.

(28º 47’ 12’’):2 =

Ejercicio 8.

(27º 55’ 58’’) x 3

Ejercicio 9.

(29º 55’ 38’’):3 =

EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN:

Ejercicio 1.

- **Calcula el ángulo complementario y el suplementario de 30º 28’ 32”.**
- **El doble y la mitad de 30º 28’ 32”.**

Ejercicio 2.

- **Dibuja en Cabri dos rectas secantes que formen un ángulo de 30º.**
- **Calcula mentalmente cuánto miden cada uno de los otros ángulos que forman.**
- **Escribe aquí el resultado. Compruébalo en Cabri.**

Ejercicio 3.

- **Dibuja (en papel) dos rectas secantes que formen un ángulo de 83º 28' 15" (Haz un dibujo aproximado).**
- **Calcula cuánto mide cada uno de los otros ángulos que forman.**

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD CON CABRI Y EN PAPEL

1. Dibuja un ángulo recto. Calcula su amplitud.
2. Dibuja un ángulo agudo. Calcula su amplitud.
3. Dibuja un ángulo obtuso. Calcula su amplitud.
4. Dibuja un ángulo llano. Calcula su amplitud.
5. Dibuja un ángulo cóncavo. Calcula su amplitud.
6. Dibuja un ángulo convexo. Calcula su amplitud.
7. Dibuja dos ángulos complementarios. Calcula la amplitud de cada uno.
8. Dibuja dos ángulos suplementarios. Calcula la amplitud de cada uno.
9. Calcula 27º 45' 37'' + 36º 28' 26''
10. Calcula 86º 27' 18'' – 37º 46' 23''
11. Calcula (23º 35' 58'') x 3
12. Calcula (84º 47 ' 28''):5
13. Calcula el ángulo complementario y el suplementario de 23º 12' 48''
14. Dibuja dos rectas secantes que formen un ángulo de 60º. Calcula mentalmente cuánto miden cada uno de los otros ángulos que forman.
15. Dibuja dos rectas secantes que formen un ángulo de 83º 28' 15" (Haz un dibujo aproximado) ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos que forman?

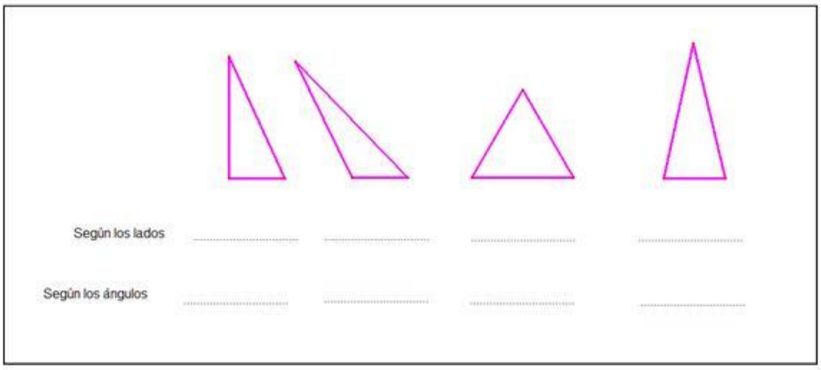
UNIDAD 3.

TRIÁNGULOS.

3.1. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS. SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO

Ejercicio 1. Indica cómo es cada uno de estos triángulos según sus lados y luego según sus ángulos.



Ejercicio 2. ¿Recuerdas cuánto vale la suma de los ángulos de un triángulo?……………………….

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

Los triángulos se clasifican según sus **ángulos**: **acutángulo**, **rectángulo** y **obtusángulo**.

- Acutángulo: los tres ángulos agudos.
- Rectángulo: un ángulo recto.
- Obtusángulo: un ángulo agudo.

Los triángulos se clasifican según sus **lados**: **equilátero**, **isósceles** y **escaleno**.

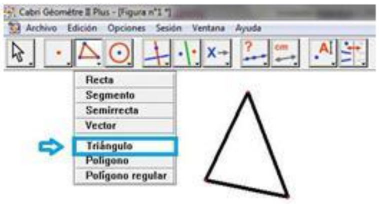
- Equilátero: los tres lados iguales.

- Isósceles: dos lados iguales.
- Escaleno: los tres lados distintos.

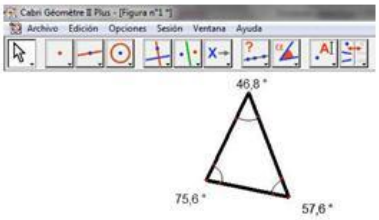
Primero vamos a aprender a dibujar triángulos con CABRI de varias formas, dependiendo de los datos que nos den:

Ejercicio 1. Dibuja un triángulo y comprueba que la suma de sus ángulos es 180º.

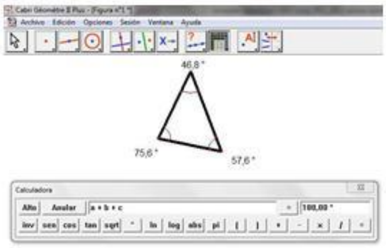
- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" y haz clic en tres puntos que serán los vértices del triángulo.



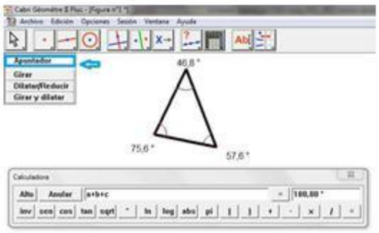
- En la barra de herramientas selecciona "Marcar un ángulo" y después "Medida de ángulo" y marca los tres ángulos del triángulo.



- En la barra de herramientas seleccionamos "Calculadora" y teniendo el cursor activo hacemos clic en una medida de ángulo (aparecerá "a"), luego pulsamos la tecla "+",clic en la segunda medida (aparecerá "b"), otra vez "+",clic en la tercera medida (aparecerá "c") y pulsamos el signo "=" y el resultado (180º).



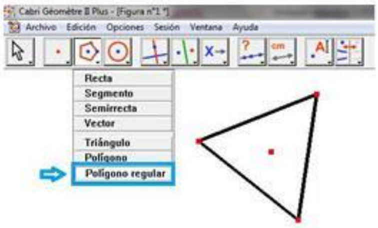
- En la barra de herramientas selecciona "Apuntador", mueve alguno de los vértices y verás que aunque los ángulos varían su amplitud, la suma es siempre 180º



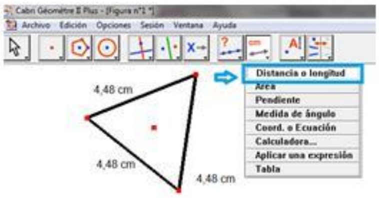
Construcción de un triángulo conociendo los tres lados:

Ejercicio 2. Dibuja un triángulo equilátero (con los tres lados iguales).

- En la barra de herramientas selecciona "Polígono regular", haz clic en un punto que será el centro del polígono y en otro punto. Desplaza el apuntador hacia la derecha hasta que aparezca el triángulo.



- En la barra de herramientas seleccionamos "Distancia o longitud" y hallamos la distancia entre cada par de puntos haciendo clic en ellos. Comprobamos que son iguales.

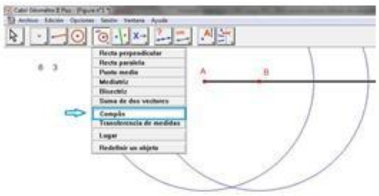


Ejercicio 3. Dibuja un triángulo isósceles (dos lados iguales) de lados 6, 6 y 3.

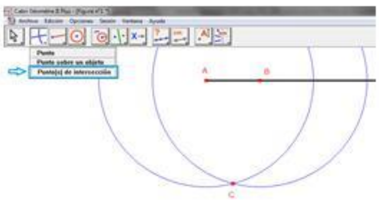
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe los números 6 y 3.

- Dibuja una semirrecta de origen un punto que llamamos A. En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas", haz clic en el número 3 y en la semirrecta, aparece un punto. Llámalo B.

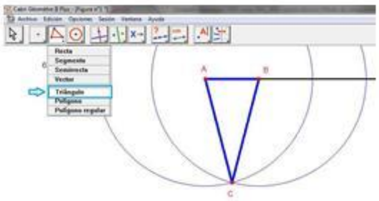
- En la barra de herramientas selecciona "Compás", haz clic en el número 6 y en el punto A. Lo mismo con el punto B. Aparecen dos circunferencias que se cortan en un punto.



- En la barra de herramientas selecciona "Punto de intersección", márcalo y nómbralo C.

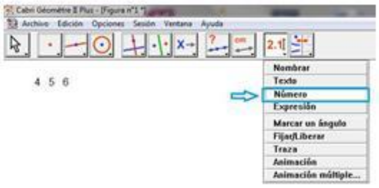


- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" para dibujar el triángulo isósceles de vértices A, B y C.



Ejercicio 4. Dibuja un triángulo escaleno (los lados son distintos) de lados de 4, 5 y 6 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe los números 4, 5 y 6.

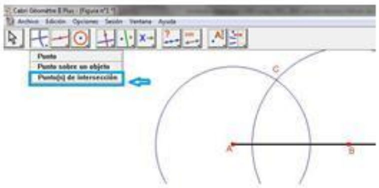


- Dibuja una semirrecta de origen un punto que llamamos A. En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas", haz clic en un número, por ejemplo el mayor, 6 y en la semirrecta, aparece un punto. Llámalo B.

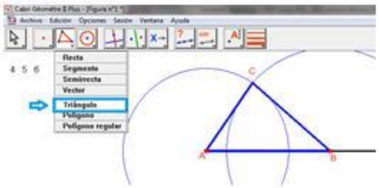
- En la barra de herramientas selecciona "Compás", haz clic en el número 4 y en el punto A. Lo mismo con el número 5 y el punto B. Aparecen dos circunferencias que se cortan en un punto.

- Observación: la longitud del lado mayor debe medir menos que la suma de los otros dos lados, para que las circunferencias puedan cortar.

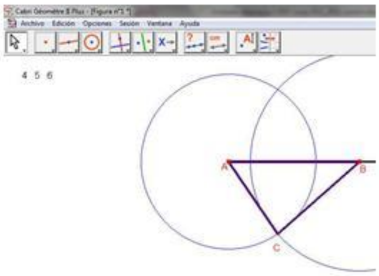
- En la barra de herramientas selecciona "Punto de intersección", márcalo y nómbralo C.



- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" para dibujar el triángulo escaleno de vértices A, B y C.



- Fíjate que, como las circunferencias se cortan en dos puntos, también podríamos coger el otro punto para formar el triángulo. Es simétrico del anterior.

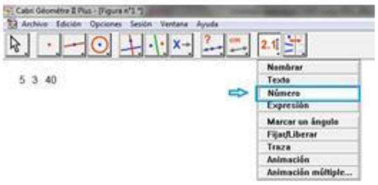


Con esto hemos visto la clasificación de los triángulos según sus lados: equilátero, isósceles y escaleno.

Construcción de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo que forman:

Ejercicio 5. Dibuja un triángulo de lados 5 y 3 cm y ángulo formado por ambos lados, de 40º.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe los números 5, 3 y 40.

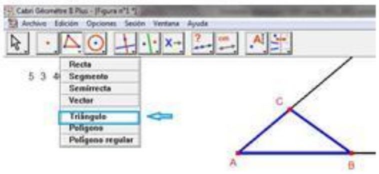


- Dibuja una semirrecta de origen un punto que llamamos A. En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas", haz clic en un número, por ejemplo el mayor, 5 y en la semirrecta, aparece un punto. Llámalo B.

- En la barra de herramientas selecciona "Rotación" y haz clic en el número 40, en la semirrecta y en el punto A. Verás que aparece una nueva semirrecta con origen el punto A. (El ángulo que forman las semirrectas es de 40º).

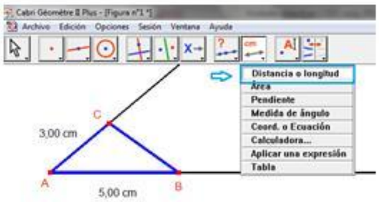
- Selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 3 y en la nueva semirrecta. Aparece un punto que llamamos C.

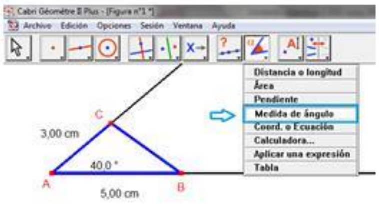
- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" y haz clic en los puntos A, B, C para formar el triángulo de vértices ABC.



- Para comprobar que está bien construido.

En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en A y B y comprueba que mide 5 cm. De la misma manera en A y C y comprueba que mide 3 cm. En la barra de herramientas haz clic en "Medida de ángulo" y haz clic en B, luego en A y finalmente en C. Verás que mide 40º.





- Puedes comprobar que este triángulo es obtusángulo porque el ángulo C mide más de 90º (104,5º).

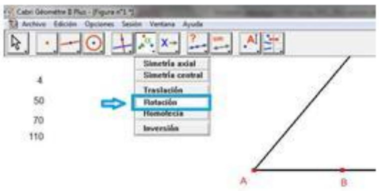
Construcción de un triángulo conociendo un lado y los dos ángulos contiguos:

Ejercicio 6. Dibuja un triángulo con un lado de 4 y ángulos de 50º y 70º.

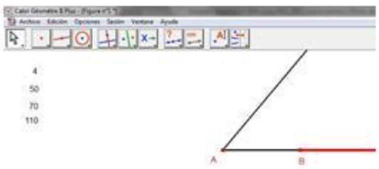
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe los números 4, 50, 70 y el suplementario de 70 que es 110.

- Dibuja una semirrecta de origen un punto que llamamos A. En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas", haz clic en el número 4 y en la semirrecta, aparece un punto. Llámalo B.

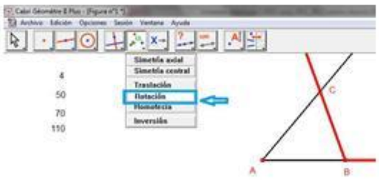
- En la barra de herramientas selecciona "Rotación" y haz clic en el número 50, en la semirrecta y en el punto A. Verás que aparece una nueva semirrecta con origen el punto A. (El ángulo que forman las semirrectas es de 50º).



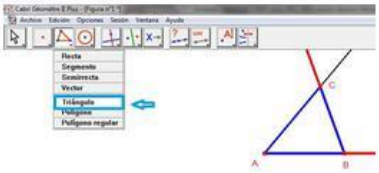
- En la barra de herramientas selecciona "Semirrecta" y dibuja una semirrecta con origen el punto B y mismo sentido que en el caso anterior.



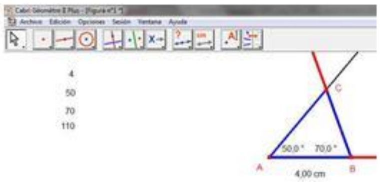
- En la barra de herramientas selecciona "Rotación" y haz clic en el número 110, en la semirrecta y en el punto B. Verás que aparece una nueva semirrecta con origen el punto B. Aparece un punto que llamamos C.



- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" y haz clic en los puntos A, B, C para formar el triángulo de vértices ABC.



- Para comprobar que está bien construido.



Selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en A y B y comprueba que mide 4 cm.

Selecciona "Medida de ángulo" y haz clic en B, luego en A y finalmente en C. Verás que mide 50º. Selecciona "Medida de ángulo" y haz clic en A, luego en B y finalmente en C. Verás que mide 70º.

- Puedes comprobar que es acutángulo pues los tres ángulos son agudos.

Conclusión de los ejercicios:

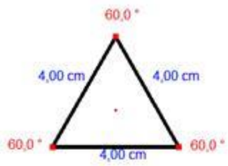
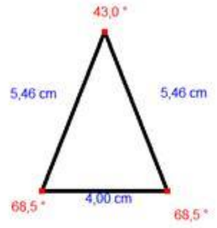
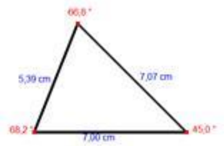
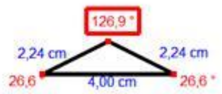
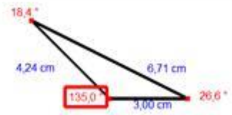
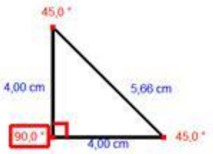
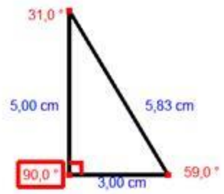
Estas construcciones nos sirven para determinar la igualdad de triángulos:

Dos triángulos son iguales si los lados y los ángulos de uno son iguales, respectivamente, a los del otro.

De la construcción de triángulos se deducen los siguientes **criterios de igualdad de triángulos**:

a) Dos triángulos son iguales si tienen los tres lados respectivamente iguales.
b) Dos triángulos son iguales si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.
c) Dos triángulos son iguales si tienen un lado y los dos ángulos contiguos respectivamente iguales.

A continuación puedes ver algunos ejemplos en este cuadro síntesis:

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Obtusángulo			
Rectángulo			

FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 3 cm.

Ejercicio 2. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 3 cm y 3 cm.

Ejercicio 3. Dibuja un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 3 cm y 4 cm.

Ejercicio 4. Construye un triángulo cuyos lados sean 3 cm y 4 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 70º.

Ejercicio 5. Dibuja un triángulo con un lado de 3 cm y dos ángulos en los extremos de dicho lado de 70º y 80º.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **¿Es posible dibujar un triángulo cuyos lados sean 12 cm, 4 cm y 6 cm? (Ayúdate del programa Cabri).**

  ………..

- **Justifica tu respuesta.**

  ………………………………………………………………………………………

Ejercicio 2.

- **¿Es posible dibujar un triángulo con los ángulos de 120º y 70º y el lado de 5 cm? (Ayúdate del programa Cabri).**

  ………..

- **Justifica tu respuesta.**

  ………………………………………………………………………………………

Ejercicio 3.

- **Dibuja en Cabri un triángulo con dos ángulos de 65º y 70º y el lado común de 3 cm**
- **Clasifícalo según los lados**…………………………………………………………
- **Clasifícalo según los ángulos**……………………………………………………..

Ejercicio 4.

- **Dibuja en Cabri un triángulo con los ángulos 35º y 100º y el lado común de 3 cm.**
- **Clasifícalo según los lados**…………………………………………………………
- **Clasifícalo según los ángulos**……………………………………………………..

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1.

- **Piensa dos números que sean la medida de dos lados y un número que sea la medida del ángulo formado por esos lados, para que el triángulo resultante sea acutángulo.**
- **Constrúyelo.**
- **Clasifícalo según sus lados:………………………………**

Ejercicio 2.

- **Piensa dos números que sean la medida de dos lados y un número que sea la medida del ángulo formado por esos lados, para que el triángulo resultante sea obtusángulo.**
- **Constrúyelo.**
- **Clasifícalo según sus lados:………………………………**

Ejercicio 2.

- **Piensa dos números que sean medida de dos lados y un número que sea la medida del ángulo formado por esos dos lados, para que el triángulo resultante sea rectángulo.**
- **Constrúyelo.**

Ejercicio 3.

- **Piensa un número como medida de un lado, para que el triángulo resultante sea equilátero.**
- **Constrúyelo.**
- **¿Cuánto valen los ángulos?**
- **Un triángulo equilátero, ¿puede ser obtusángulo? ¿por qué? ……………………………………………………………………………………………**

Ejercicio 4.

- **Piensa un número para la medida de dos lados de un triángulo y un número para la medida del ángulo formado por dichos lados.**
- **Constrúyelo.**
- **¿Qué tienen en común los otros dos ángulos?...**
- **Clasifícalo según sus lados:………………………………**

Ejercicio 5.

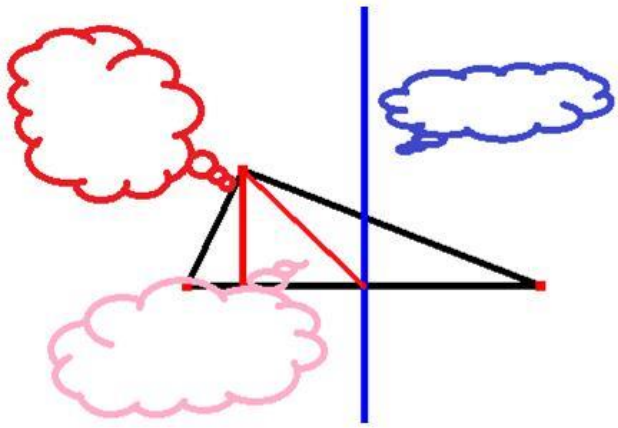
Completa con verdadero (V) o falso (F):

- **Un triángulo equilátero es siempre acutángulo….**
- **Un triángulo isósceles puede ser acutángulo….**
- **Un triángulo isósceles puede ser obtusángulo….**
- **Un triángulo escaleno puede ser acutángulo….**
- **Un triángulo escaleno puede ser obtusángulo….**

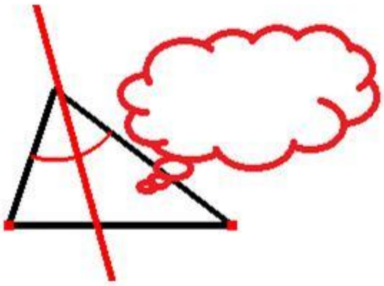
3.2. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO

Ejercicio 1. Trata de recordar y escribe cómo se llaman las rectas que aparecen en este triángulo.



Ejercicio 2. Trata de recordar y escribe cómo se llama la recta que aparece en este triángulo.



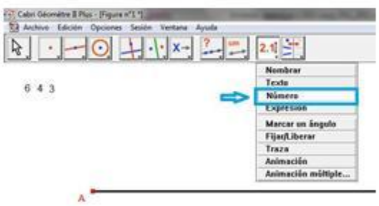
FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría: Definición 1.

- En un triángulo la **mediana** es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
- Las **tres medianas** de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro**. El baricentro divide a la mediana en dos segmentos de manera que uno es el doble del otro. La distancia del baricentro al vértice es doble de la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto.

  Etimológicamente es el centro de gravedad del triángulo.

Ejercicio 1. Construye un triángulo cuyos lados sean 6, 4 y 3 cm. Dibuja en él las medianas y señala el baricentro. Comprueba que el baricentro divide a las medianas en dos segmentos y que uno es el doble del otro.

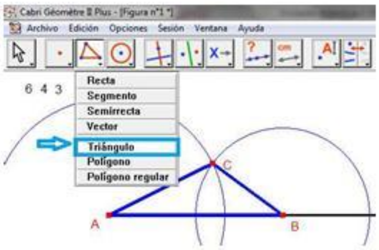


- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 6, 4 y 3.
- Luego dibuja una semirrecta con origen un punto A.

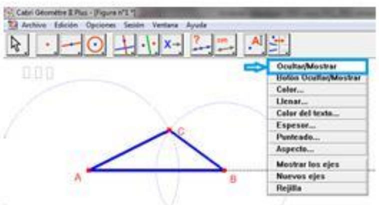
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 6 y en la semirrecta. Aparecerá un punto que llamamos B.

- En la barra de herramientas selecciona "Compás" y haz clic en el número 4 y en el punto A. Aparecerá una circunferencia con centro el punto A y radio 4.
- De la misma manera haz clic en el número 3 y en B.
- Ambas circunferencias se cortan en un punto que llamamos C.

- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" y haz clic en los vértices A, B y C y obtenemos el triángulo ABC.

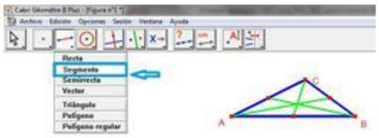


- Selecciona "Ocultar/Mostrar" y haz clic en los objetos que queremos ocultar para que sólo aparezca el triángulo.

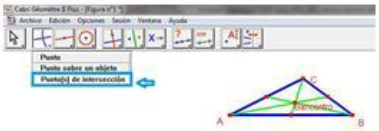


- En la barra de herramientas selecciona "Punto medio" y haz clic en cada uno de los lados. Verás que aparece un punto.

- En la barra de herramientas selecciona "Segmento" y haz clic en cada uno de los vértices y en el punto medio del lado opuesto. Ya tienes trazadas las tres medianas.



- Como ves, las tres medianas se cortan en un punto. En la barra de herramientas selecciona "Punto de intersección" y llámalo "Baricentro".



- Para comprobar que la distancia del baricentro al vértice es el doble que la distancia del baricentro al punto medio, en la barra de herramientas seleccionamos "Distancia o longitud" y hacemos clic en el vértice y en el baricentro y luego en el baricentro y el punto medio.

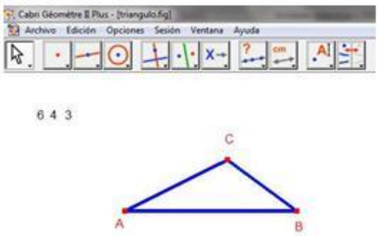
- En la barra de herramientas seleccionamos "Calculadora" y hacemos clic en esta última distancia, la multiplicamos por 2 y verás que se obtiene la primera distancia. (Los posibles errores en las centésimas se deben a las aproximaciones).

Un poco de teoría: Definición 2.

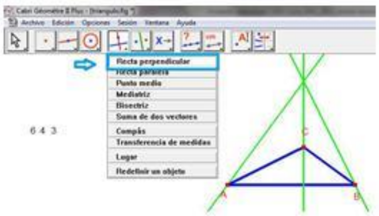
- En un triángulo la **altura** es la recta perpendicular a cada lado desde el vértice opuesto.
- Las **tres alturas** de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro**.

Ejercicio 2. Construye un triángulo cuyos lados sean 6, 4 y 3 cm. Dibuja en él las alturas y señala el ortocentro.

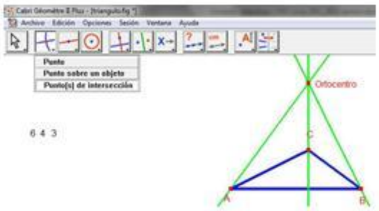
- Como en el ejercicio anterior construimos un triángulo de lados 6, 4 y 3 cm.



- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular" y haz clic en un lado y en el vértice opuesto.
- Así con los tres vértices.



- Observas que, en este caso, una altura corta al lado del triángulo y las otras dos no cortan a los lados sino a sus prolongaciones.
- En la barra de herramientas selecciona "Punto de intersección" y haz clic en el punto de intersección de las alturas. Nómbralo como Ortocentro.

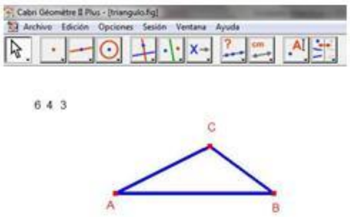


Un poco de teoría: Definición 3.

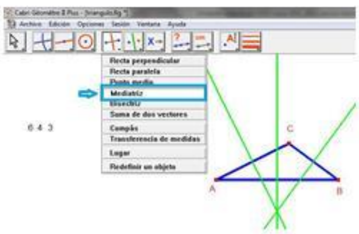
- En un triángulo la **mediatriz** es la recta perpendicular a cada lado por su punto medio.
- Las **tres mediatrices** de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro**. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita, es decir, que pasa por los tres vértices.

Ejercicio 3. Construye un triángulo cuyos lados sean 6, 4 y 3 cm. Dibuja en él las mediatrices y señala el circuncentro. Comprueba que el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.

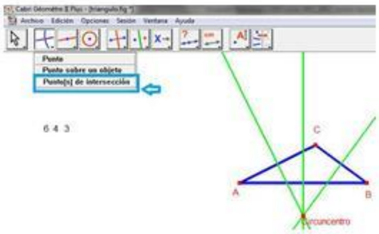
- Como en el ejercicio anterior construimos un triángulo de lados 6, 4 y 3 cm.



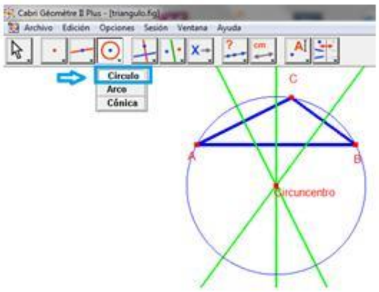
- En la barra de herramientas selecciona "Mediatriz" y haz clic en cada uno de los lados. Aparecen las tres mediatrices.



- En la barra de herramientas selecciona "Punto de intersección" y haz clic en dicho punto. Nómbralo como circuncentro. En este caso el circuncentro también se encuentra fuera del triángulo.



- Para comprobar la propiedad del circuncentro, en la barra de herramientas selecciona "Círculo" y haz clic en el circuncentro y en uno de los vértices. Verás que la circunferencia resultante pasa por los tres vértices.

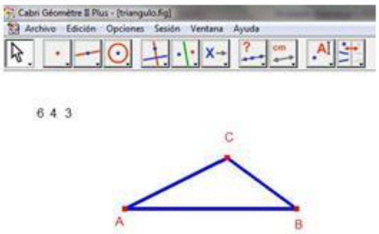


Un poco de teoría: Definición 4.

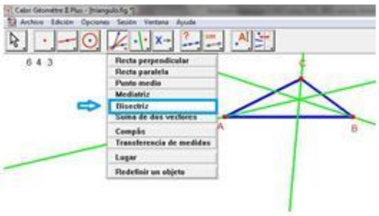
- En un triángulo la **bisectriz** es la recta que divide el ángulo en dos partes iguales.
- Las **tres bisectrices** de un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro**. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Ejercicio 4. Construye un triángulo cuyos lados sean 6, 4 y 3 cm. Dibuja en él las bisectrices y señala el incentro. Comprueba la propiedad del incentro.

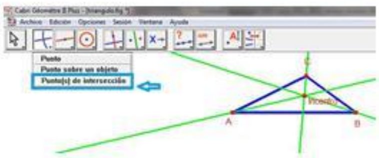
- Como en el ejercicio anterior construimos un triángulo de lados 6, 4 y 3 cm.



- En la barra de herramientas selecciona "Bisectriz" y dibuja las tres bisectrices.

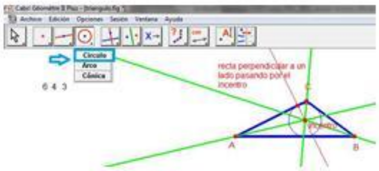


- Para dibujar la del ángulo A, haz clic en C, luego en A y luego en B.
- Para dibujar la del ángulo B, haz clic en A, luego en B y luego en C.
- Para dibujar la del ángulo C, haz clic en B, luego en C y luego en A.
- En la barra de herramientas selecciona "Punto de intersección" y haz clic en el punto de corte de las tres bisectrices. Márcalo como Incentro.



- En la barra de herramientas seleccionamos "Recta perpendicular" y hacemos clic en un lado y en el incentro. Esta recta corta al lado en un punto. La distancia de este punto al incentro es el radio de la circunferencia inscrita.

- En la barra de herramientas seleccionamos "Circulo" y hacemos clic en el incentro y en el punto de corte de un lado con la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el incentro. Obtenemos la circunferencia inscrita.



Un esquema de lo que hemos visto:

	Rectas notables	Puntos notables
Lados	Medianas	Baricentro
	Alturas	Ortocentro
	Mediatrices	Circuncentro
Ángulos	Bisectrices	Incentro

Las medianas, alturas y mediatrices se obtienen a partir de los lados del triángulo. Las bisectrices que se obtienen a partir de los ángulos del triángulo. Todas estas rectas se llaman rectas notables y los puntos en los que se cortan, se llaman puntos notables.

FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1.

Traza las medianas y marca el baricentro en:

a) Un triángulo acutángulo de lados 4, 5 y 6 cm.

b) Un triángulo obtusángulo de lados 3, 4 y 7 cm.

c) Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.

d) Indica en cada caso qué posición ocupa el baricentro en relación al triángulo.

....

....

Ejercicio 2. Traza las alturas y marca el ortocentro en:

a) Un triángulo acutángulo de lados 4, 5 y 6 cm.

b) Un triángulo obtusángulo de lados 3, 4 y 7 cm.

c) Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.

d) Indica en cada caso qué posición ocupa el ortocentro en relación al triángulo.

....

....

Ejercicio 3. Traza las mediatrices y marca el circuncentro en:

a) Un triángulo acutángulo de lados 4, 5 y 6 cm.

b) Un triángulo obtusángulo de lados 3, 4 y 7 cm.

c) Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.

d) Indica en cada caso qué posición ocupa el circuncentro en relación al triángulo.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Ejercicio 4. Traza las bisectrices y marca el incentro en:

a) **Un triángulo acutángulo de lados 4, 5 y 6 cm.**

b) **Un triángulo obtusángulo de lados 3, 4 y 7 cm.**

c) **Un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.**

d) **Indica en cada caso qué posición ocupa el incentro en relación al triángulo.**

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un triángulo acutángulo de lados 4, 5 y 6 cm.**
- **Traza en él las medianas, alturas y mediatrices.**
- **Marca los puntos en los que se cortan cada uno de los tipos de rectas notables.**
- **Oculta las rectas.**
- **¿En qué posición se encuentran estos tres puntos entre sí?**

  …………..……………………………………………………………………

- **La recta que se forma se denomina recta de Euler.**

Ejercicio 2.

- **Haz lo mismo con un triángulo obtusángulo de lados 3, 4 y 7 cm.**
- **La recta que se forma se denomina recta de Euler.**

Ejercicio 3.

- **Haz lo mismo con uno rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.**
- **La recta que se forma se denomina recta de Euler.**

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un triángulo y traza las medianas, alturas, mediatrices y bisectrices.**
- **Dibuja el punto de corte de cada uno de los tipos de rectas. (Oculta después las rectas)**
- **¿Cuáles puedes unir con una recta?**

  ………………………………………………………………………………………

- **Mueve el triángulo para comprobar que siempre es así.**

Ejercicio 2.

- **Tres pueblos quieren construir un hospital para atender a los vecinos. Para ello deciden instalarlo en un lugar equidistante de los tres. ¿Qué tendrán que hacer para calcular el lugar donde construir el hospital?**

  ………………………………………………………………………………………

- **Haz un dibujo para explicarlo.**

Ejercicio 3.

- **Tres hermanos viven, cada uno en su casa, en una finca común y quieren poner un merendero que esté a la misma distancia de las tres casas. Explica qué tienen que hacer para construir el merendero.**

  ………………………………………………………………………………………

- **Haz un dibujo para explicarlo.**

Ejercicio 4.

- **Los hermanos deciden colocar un techo triangular en el merendero, a modo de sombrilla, con un mástil fijo en el medio y clavado en el suelo. Las dimensiones del techo son 3, 4 y 5 m. Explica cómo pueden calcular la unión del techo con el mástil de manera que el techo quede horizontal.**

  ………………………………………………………………………………………

- **Haz un dibujo para explicarlo.**

Ejercicio 5.

- **Finalmente desde cada casa deciden trazar un camino perpendicular a la verja que une las otras dos casas –donde colocarán una puerta de salida-. En el cruce de los tres caminos van a colocar un lugar de intercambio de libros. Cada uno, cuando sale de su casa, va a dicho lugar, a depositar o coger un libro, y luego sale por la puerta de la verja opuesta.**
- **¿Cómo calculas el punto de encuentro?**

  ………………………………………………………………………………………

- **Haz un dibujo para explicarlo.**

Ejercicio 6.

- **En el merendero los hermanos quieren hacer una barbacoa y colocar una chimenea que tenga corte transversal triangular de lados 0,10 m.**
- **¿Cuál es el diámetro de la tubería más amplia que pueden introducir en la chimenea para la salida de humos?**

  ………………………………………………………………………………………

- **Haz un dibujo para explicarlo.**

3.3. TEOREMA DE PITÁGORAS.

FASE 1. INDAGACIÓN.

Prescindimos de esta fase ya que no han estudiado previamente dicho teorema.

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

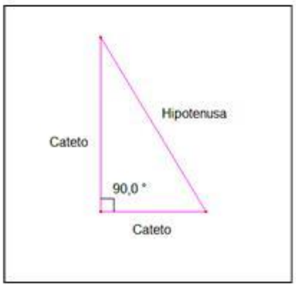
Ya sabemos que un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto. Los lados del triángulo rectángulo se llaman:

- Catetos: los lados que forman el ángulo recto.
- Hipotenusa: el lado opuesto al ángulo recto.

Fíjate que la hipotenusa es siempre mayor que cada uno de los catetos.

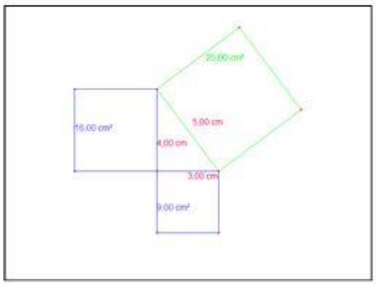
Un triángulo rectángulo puede ser:

- Isósceles: si tiene los dos catetos iguales
- Escaleno: si tiene los dos catetos distintos
- Nunca puede ser equilátero.



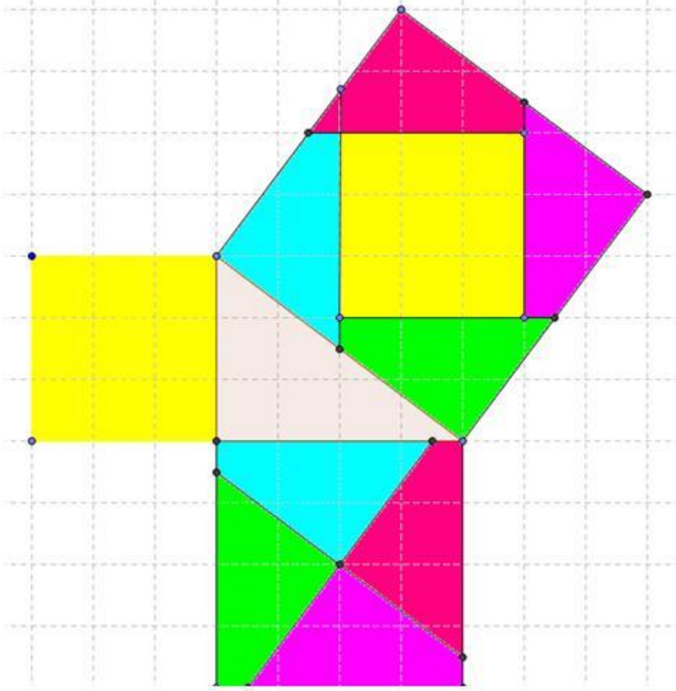
Teorema de Pitágoras: En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Intepretación: La interpretación geométrica del teorema de Pitágoras es que el área del cuadrado que se construye sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los catetos.



Si la hipotenusa es a y los catetos son b y c, entonces el teorema es $a^2 = b^2 + c^2$.

Hay muchas demostraciones. Nosotros vamos a ver la **demostración de Perigal**.



Puedes ver la demostración y hacer la comprobación como si fuera un puzzle:

- Dibujamos un triángulo rectángulo con el cateto mayor en la base y en cada lado trazamos un cuadrado.
- Calculamos el centro del cuadrado de abajo.
- Por el centro trazamos una paralela a la hipotenusa y una perpendicular. Tenemos entonces dividido el cuadrado en cuatro partes.
- Calculamos el punto medio de cada uno de los lados del cuadrado de la hipotenusa y por ellos trazamos rectas verticales y horizontales como se indica en la figura:
- En el punto medio de la hipotenusa trazamos vertical, y vamos hacia la derecha intercalando horizontal y vertical.
- Vemos entonces que en el centro nos queda un cuadrado como el del cateto menor y lo demás se rellena como se ve en la imagen.
- Eso quiere decir que el cuadrado de la hipotenusa es la suma del cuadrado de un cateto y del cuadrado del otro cateto.

Terna pitagórica: Una terna pitagórica son tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras. Así, dados tres números, forman un triángulo rectángulo si el cuadrado del mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

Ejercicio 1.

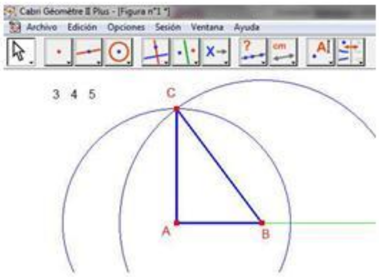
- **Comprueba que los números 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica.**

Tenemos que probar que $a^2 = b^2 + c^2$ siendo a el número mayor, es decir que

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16$$

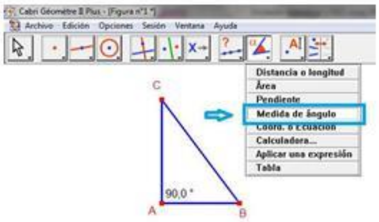
- **Construye el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm.**

- Construimos el triángulo de lados 3, 4 y 5 cm. como ya sabemos empezando por el número 3.



- Después oculta lo que no sea el triángulo.

- Para comprobar que es rectángulo, en la barra de herramientas selecciona medida de ángulo y haz clic en C, luego en A y finalmente en B. Verás que el ángulo de vértice A mide 90º.



Ejercicio 2.

- **Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm.**

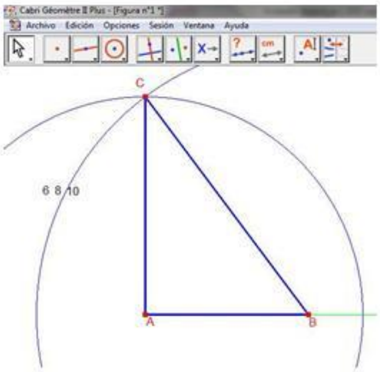
Tenemos que hallar a sabiendo que $a^2 = b^2 + c^2$ siendo b y c los números que nos dan

$$a^2 = 6^2 + 8^2$$
$$a^2 = 36 + 64 = 100$$
$$a = 10$$

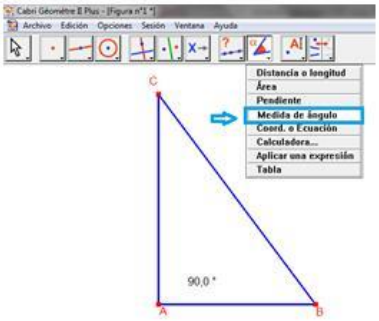
- **Construye dicho triángulo rectángulo.**

- Construimos el triángulo de lados 6, 8 y 10 cm. como ya sabemos empezando por el número 6.

- Después oculta lo que no sea el triángulo.



- Para comprobar que es rectángulo, en la barra de herramientas selecciona medida de ángulo y haz clic en C, luego en A y finalmente en B. Verás que el ángulo de vértice A mide 90º.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1.

- **Comprueba que los números 5, 12 y 13 forman una terna pitagórica.**

- **Construye el triángulo rectángulo de lados 5, 12 y 13 cm.**

Ejercicio 2.

- **Calcula la longitud de la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 y 15 cm.**

- **Construye dicho triángulo rectángulo.**

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

Averigua cuáles de las siguientes ternas de longitudes forman un triángulo rectángulo:

a) 3, 4, 5	**b) 5, 6, 7**
c) 6, 8, 10	**d) 9, 12, 15**

Ejercicio 2.

En un triángulo rectángulo isósceles, calcula la longitud de la hipotenusa si los catetos miden 4 cm.

Ejercicio 3.

Halla la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 cm y el otro cateto 12 cm.

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1. Halla la diagonal de un rectángulo de lados de 3 y 4 cm.

Ejercicio 2. Halla la diagonal de un cuadrado de lado 6 cm.

Ejercicio 3. Halla la altura de un triángulo equilátero de 4 cm. de lado.

Ejercicio 4. ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo?

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD CON CABRI Y PAPEL.

1. Dibuja un triángulo equilátero, otro isósceles y otro escaleno.
2. Dibuja un triángulo rectángulo, uno acutángulo y otro obtusángulo.
3. Dibuja un triángulo de lados 6 y 4 cm y un ángulo de 30º.
4. Dibuja un triángulo de lado a = 5 cm y ángulos B = 60º y C = 40º.
5. Dibuja un triángulo de lados a = 6 cm, b = 5 cm, c = 4 cm y dibuja la mediana relativa al lado a.
6. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 5 cm y el lado desigual mide 6 cm.
7. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 4 cm y 5 cm y dibuja la circunferencia circunscrita. ¿Dónde está el circuncentro?
8. Calcula la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm respectivamente. (Con papel)
9. Determina si los números 3, 4 y 5 determinan un triángulo rectángulo. ¿Y los números 5, 6 y 7? (Con papel)
10. Una veleta está sobre un poste de 8 m de alto y se sujeta con tres cables que van desde el extremo superior a un punto del suelo que está a 2m de la base del poste. ¿Cuánto miden los cables? (Con papel)
11. Dibuja un triángulo cualquiera y sus medianas. Halla el baricentro y mide las longitudes de los segmentos que determina el baricentro sobre cada una de las medianas. ¿Qué deduces?
12. Dibuja la recta de Euler de un triángulo.

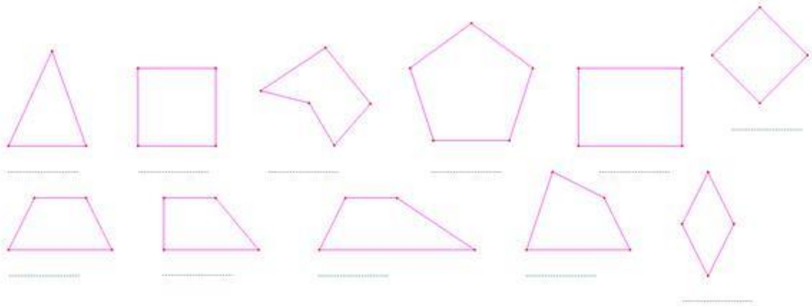
UNIDAD 4.

LOS POLÍGONOS Y LA CIRCUNFERENCIA.

4.1. LOS POLÍGONOS: LOS CUADRILÁTEROS.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

Ejercicio. Trata de recordar y escribe los nombres de los siguientes polígonos:



FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

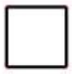
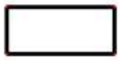
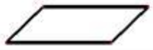
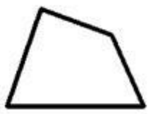
Definición de polígono: Un polígono es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada, es decir, limitada por segmentos.

Vamos a estudiar polígonos convexos, que son los que tienen todos sus ángulos convexos (menos de 180º). En la fase anterior aparece un polígono no convexo (en la primera fila, el tercero empezando por la izquierda).

Atendiendo al número de lados, los polígonos se llaman:

3	4	5	6	7	8	9	10	12
triángulo	cuadrilátero	pentágono	hexágono	heptágono	octógono	eneágono	decágono	dodecágono

En la siguiente tabla puedes ver los nombres de los cuadriláteros clasificados por sus lados:

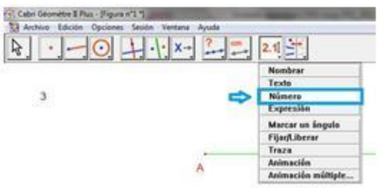
Cuadriláteros	Paralelogramos	lados paralelos dos a dos	Cuadrado	
			Rectángulo	
			Rombo	
			Romboide	
	Trapecios (*)	2 lados paralelos	Trapecio isósceles	
			Trapecio rectángulo	
			Trapecio escaleno	
	Trapezoides	0 lados paralelos	Trapezoide	

(*) Los trapecios se obtienen cortando un triángulo de manera paralela a la base.

Realizamos la construcción de los cuadriláteros.

Ejercicio 1. Dibuja un cuadrado de lado 3 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 3. Luego dibuja una semirrecta con origen un punto A.



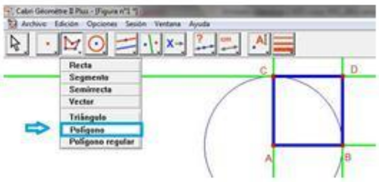
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 3 y en la semirrecta. Verás que aparece un nuevo punto B.

- En la barra de herramientas selecciona "Compás" y haz clic en el número 3 y en el punto A. Aparece una circunferencia con centro A y radio 3.

- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular" y haz clic en la semirrecta y en A. Verás que aparece una recta perpendicular que corta a la circunferencia en un punto. Llámalo C.

- Dibuja una recta perpendicular a la semirrecta en el punto B. En la barra de herramientas selecciona "Recta paralela" y haz clic en la semirrecta y en el punto C. Marca el punto de corte de estas dos rectas que has dibujado D.

- En la barra de herramientas selecciona “Polígono” y haz clic en los vértices. Ya tienes dibujado el cuadrado.

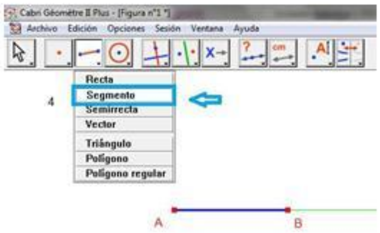


Ejercicio 2. Dibuja un rectángulo de lados 3 y 5 cm.

Se hace igual que en el caso anterior escribiendo los números 3 y 5.

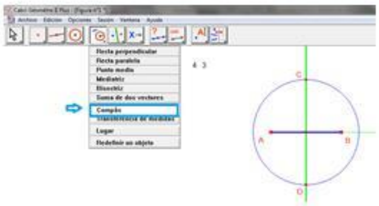
Ejercicio 3. Dibuja un rombo de diagonales 4 y 6 cm.

- En la barra de herramientas selecciona “Número” y escribe 4. Luego dibuja una semirrecta con origen un punto A. Selecciona “Transferencia de medidas” y haz clic en el número 4 y en la semirrecta. Aparece un nuevo punto, B. Selecciona “Segmento” y haz clic en los puntos A y B.

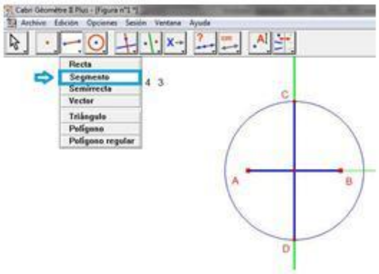


- En la barra de herramientas selecciona “Mediatriz” y haz clic en el segmento dibujado.
- Marca el punto de intersección

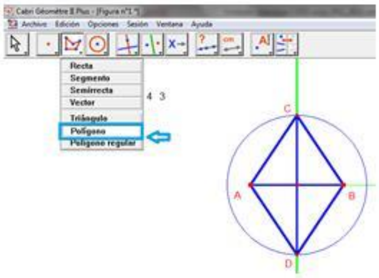
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 3 (la mitad de la otra diagonal). Selecciona "Compás" y haz clic en el número 3 y en el punto de intersección. Aparece una circunferencia que corta a la mediatriz en dos puntos. Márcalos como C y D.



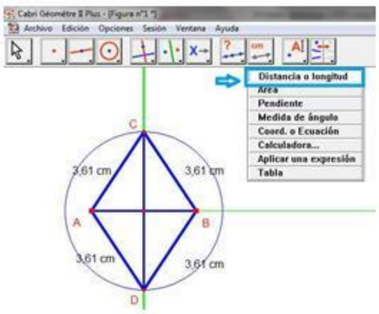
- En la barra de herramientas selecciona "Segmento" y haz clic en los puntos C y D para tener la segunda diagonal.



- En la barra de herramientas selecciona "Polígono" y haz clic en los vértices en el orden ADBCA y aparece el rombo.

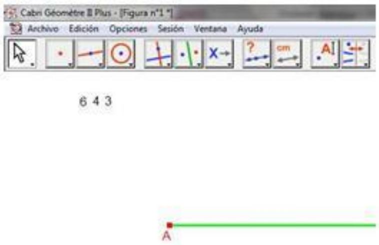


- Para comprobar que los lados del rombo son iguales, en la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en cada pareja de vértices consecutivos.

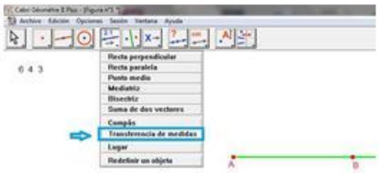


Ejercicio 4. Dibuja un romboide de lados 6 y 4 cm. y de altura 3 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 6, 4 y 3. Luego dibuja una semirrecta con origen en un punto que llamamos A.



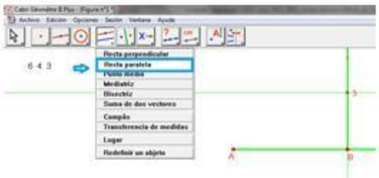
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 6 y en la semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos B.



- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular" y haz clic en la semirrecta y en un punto, por ejemplo en B. Dibuja una semirrecta, sobre esta recta, con origen en B.

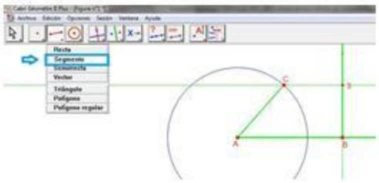
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 3 y en esta semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos 3.

- En la barra de herramientas selecciona "Recta paralela" y haz clic en la semirrecta inicial y en el punto que hemos llamado 3.



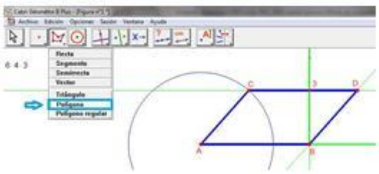
- En la barra de herramientas selecciona "Compás" y haz clic en el número 4 y en el punto A. Aparece una circunferencia que corta a la última recta dibujada en un punto que llamamos C.

- Selecciona "Segmento" y une A y C.



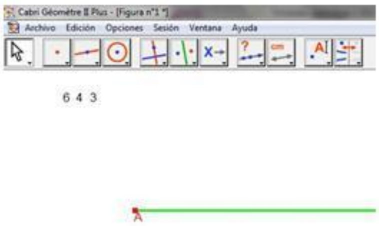
- En la barra de herramientas selecciona "Recta paralela" y haz clic en el segmento y en el punto B. Aparece una recta que corta a la recta paralela en un punto que llamamos D.

- En la barra de herramientas selecciona "Polígono" y haz clic en A, B, D, C, A. Aparece el romboide.

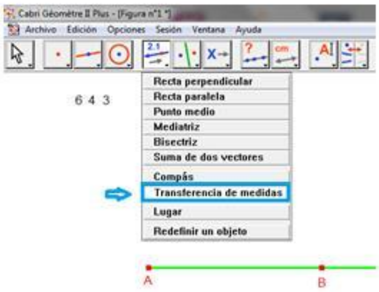


Ejercicio 5. Dibuja un trapecio isósceles de base 6 cm, lados iguales de 4 cm y de altura 3 cm.

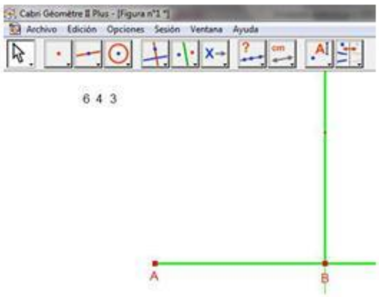
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 6, 4 y 3. Luego dibuja una semirrecta con origen en un punto que llamamos A.



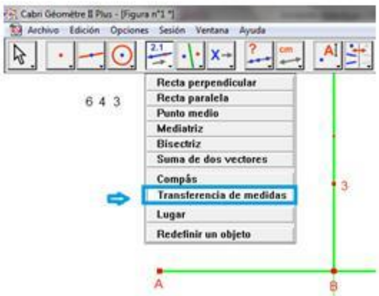
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 6 y en la semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos B.



- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular" y haz clic en la semirrecta y en un punto, por ejemplo en B. Dibuja una semirrecta, sobre esta recta, con origen en B.

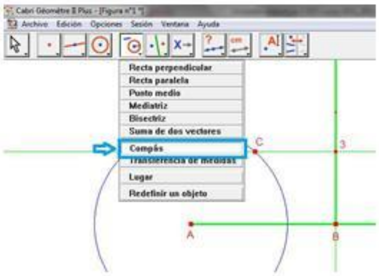


- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 3 y en esta semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos 3.

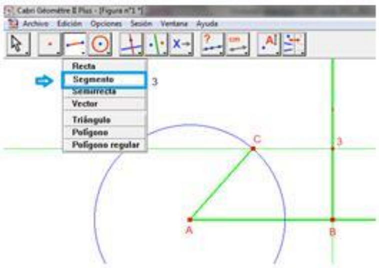


- En la barra de herramientas selecciona "Recta paralela" y haz clic en la semirrecta inicial y en el punto que hemos llamado 3.

- En la barra de herramientas selecciona "Compás" y haz clic en el número 4 y en el punto A. Aparece una circunferencia que corta a la última recta dibujada en un punto que llamamos C.

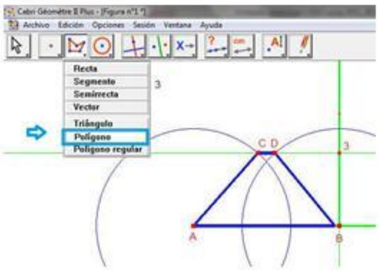


- Selecciona "Segmento" y une A y C.



- Luego selecciona "Compás" y haz clic en 4 y en el punto B. La circunferencia corta a la recta que pasa por 3 en un punto que llamamos D.

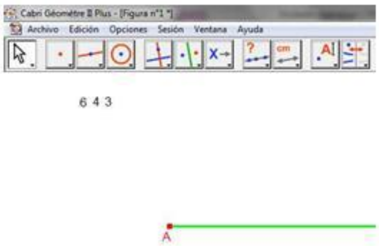
- En la barra de herramientas selecciona "Polígono" y haz clic en A, B, D, C, A y aparece el trapecio isósceles.



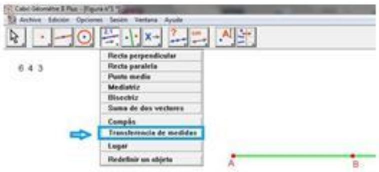
- Por construcción es isósceles, ya que tiene dos lados iguales.

Ejercicio 6. Dibuja un trapecio rectángulo de base 6 cm, altura 3 cm y lado no paralelo a la altura de 4 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 6, 4 y 3. Luego dibuja una semirrecta con origen en un punto que llamamos A.



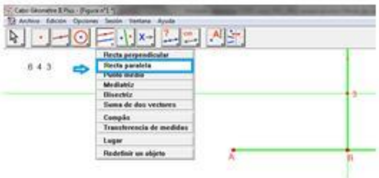
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 6 y en la semirrecta. Aparece un punto que llamamos B.



- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular" y haz clic en la semirrecta y en un punto, por ejemplo en B. Dibuja una semirrecta, sobre esta recta, con origen en B.

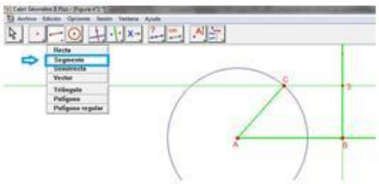
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 3 y en esta semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos 3.

- En la barra de herramientas selecciona "Recta paralela" y haz clic en la semirrecta inicial y en el punto que hemos llamado 3.

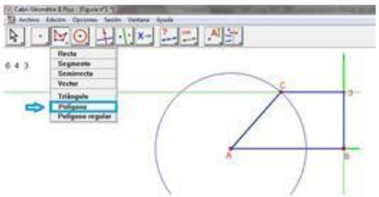


- En la barra de herramientas selecciona "Compás" y haz clic en el número 4 y en el punto A. Aparece una circunferencia que corta a la última recta dibujada en un punto que llamamos C.

- Selecciona "Segmento" y une A y C.

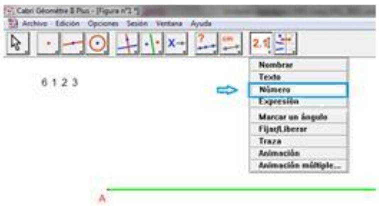


- En la barra de herramientas selecciona "Polígono" y haz clic en los vértices A, B, 3, C, A y obtenemos el trapecio rectángulo. El ángulo recto está en B.



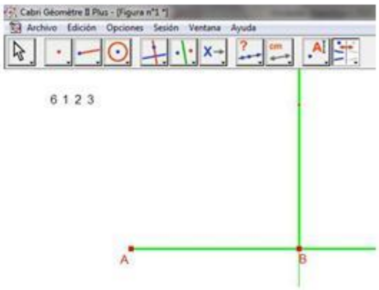
Ejercicio 7. Dibuja un trapecio escaleno de base 6 cm, altura 1 cm. y lados no paralelos de 2 y 3 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 6, 1, 2 y 3. Luego dibuja una semirrecta con origen en un punto A.



- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 6 y en la semirrecta. Aparece un punto que llamamos B.

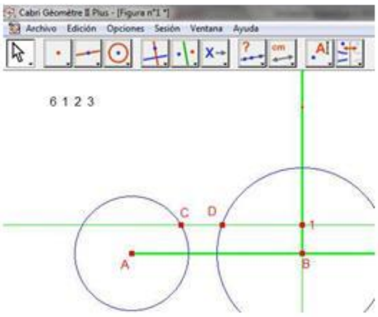
- En la barra de herramientas selecciona "Recta perpendicular" y haz clic en la semirrecta y en un punto, por ejemplo en B. Dibuja una semirrecta, sobre esta recta, con origen en B.



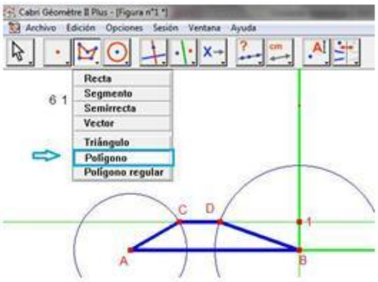
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 1 y en esta semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos 1.

- En la barra de herramientas selecciona "Recta paralela" y haz clic en la semirrecta inicial y en el punto 1. Aparece una recta paralela a la base.

- En la barra de herramientas selecciona "Compás" y haz clic en el número 2 y en el vértice A. Aparece una circunferencia que corta a la recta recién dibujada en un punto que llamamos C. Hacemos lo mismo con el número 3 y el vértice B y aparece una circunferencia que corta a la recta en un punto que llamamos D.

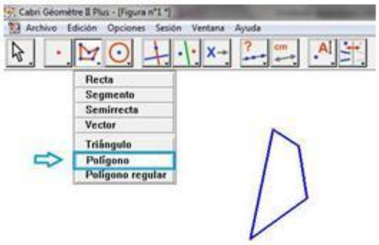


- En la barra de herramientas seleccionamos "Polígono" y hacemos clic en los vértices A, B, D, C, A y obtenemos el trapecio escaleno.



Ejercicio 8. Dibuja un trapezoide.

- En la barra de herramientas selecciona "Polígono" y haz clic en cuatro puntos para obtener un polígono de cuatro lados que no tenga ningún par de lados paralelos.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Dibuja un cuadrado de lado 5.

Ejercicio 2. Dibuja un rectángulo de lados 4 y 6.

Ejercicio 3. Dibuja un rombo de diagonales 6 y 9.

Ejercicio 4. Dibuja un romboide de lados 6 y 5 y altura 3.

Ejercicio 5. Dibuja un trapecio isósceles de base 6, altura 1 y de lados iguales que midan 2 cm.

Ejercicio 6. Dibuja un trapecio rectángulo de base 6, altura 1 y lado no paralelo a la altura, de 2 cm.

Ejercicio 7. Dibuja un trapecio escaleno de base 7, altura 1 y lados no paralelos de 2 y 4 cm.

Ejercicio 8. Dibuja un trapezoide.

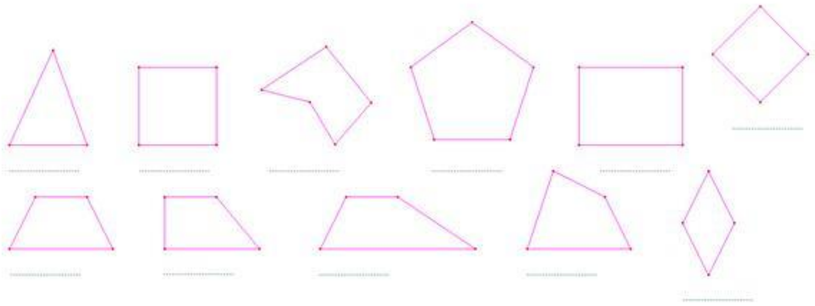
FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1. En los cuadriláteros del ejercicio anterior, comprueba que los cuatro ángulos suman 360º.

Ejercicio 2. Dibuja un rombo de lado 5 cm. (Realiza aquí los cálculos previos)

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1. Después de estudiar los polígonos, escribe los nombres de los cuadriláteros que aparecen.

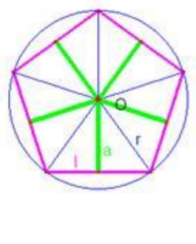


Ejercicio 2. Dibuja un rombo de lado 10 cm. (Realiza aquí los cálculos previos)

4.2. LOS POLÍGONOS: ELEMENTOS DE UN POLÍGONO REGULAR.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

Ejercicio. Trata de recordar cómo se llaman los elementos de un polígono regular y completa:



En un polígono regular:

El punto O se llama: …………………………………..

El segmento a se llama: ………………………………

El segmento r se llama: ………………………………

El segmento l se llama: ……………………………….

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

Los elementos característicos de los polígonos regulares son:

Centro O: punto interior del polígono que está a igual distancia de todos los vértices.

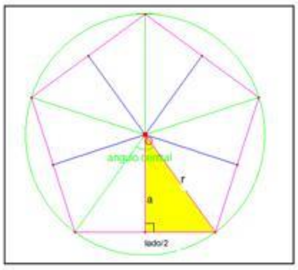
Radio r: segmento que une el centro con un vértice.

Lado l: es el segmento que une dos vértices consecutivos.

Diagonal d: es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

Apotema a: segmento perpendicular al lado que une el centro con el punto medio del lado.

Ángulo central: es el ángulo que forman dos radios consecutivos del polígono.



Observa que en todos los polígonos regulares se puede dibujar un triángulo rectángulo con la apotema, la mitad del lado y el radio. Por tanto se cumple, $r^2 = a^2 + \left(\frac{\text{lado}}{2}\right)^2$

Observa también que podemos calcular la amplitud del ángulo central de un polígono de n lados, amplitud del ángulo central $= \frac{360^{\circ}}{n}$

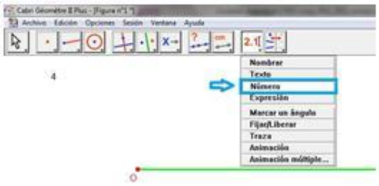
En este caso es $\frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$

Según el número de lados los polígonos se denominan:

3	4	5	6	7	8	9	10	12
triángulo	cuadrilátero	pentágono	hexágono	heptágono	octógono	eneágono	decágono	dodecágono

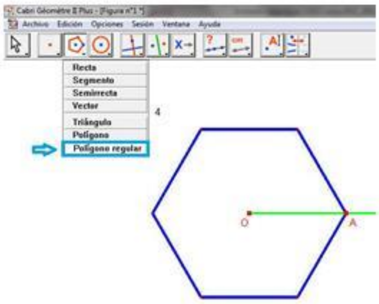
Ejercicio 1. Dibuja un hexágono regular de 4 cm de radio.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 4. Dibuja una semirrecta con origen un punto que llamamos O.



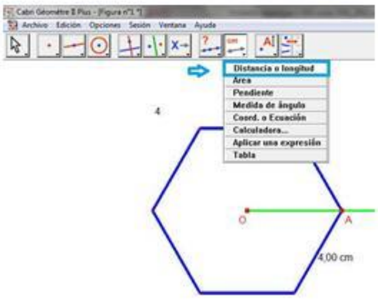
- En la barra de herramientas selecciona "Transferencia de medidas" y haz clic en el número 4 y en la semirrecta. Aparece un nuevo punto que llamamos A.

- En la barra de herramientas selecciona "Polígono regular" y haz clic en el punto O y en el punto A. Aparece una circunferencia y un polígono regular centrado en O con un número entre llaves {n}. Haz el giro hasta que aparezca el número {6}. Vuelve a hacer clic y ya está dibujado el hexágono.

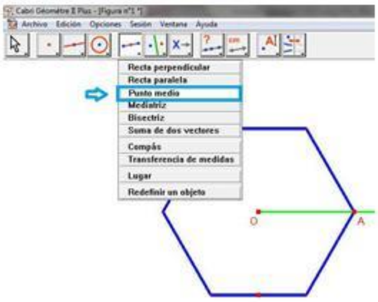


Ejercicio 2. En el hexágono anterior, mide el lado, la apotema y el ángulo central.

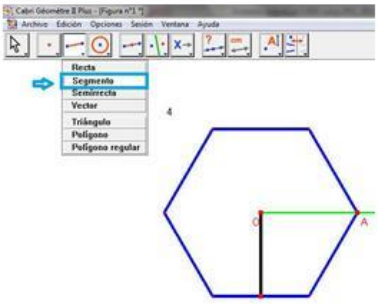
- En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en dos vértices consecutivos. Aparece la medida del lado que, en el hexágono, coincide con el radio.



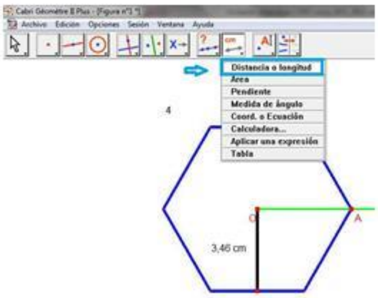
- En la barra de herramientas selecciona "Punto medio" y haz clic en cualquiera de los lados del hexágono. Aparece el punto medio de dicho lado.



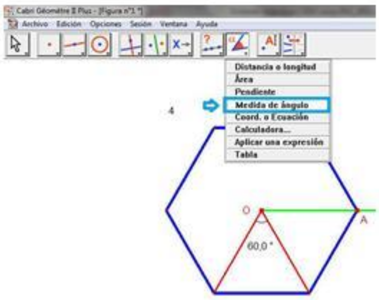
- Selecciona "Segmento" y haz clic en el punto O y en el punto medio que has dibujado. Es la apotema.



- Selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en la apotema. Aparece su medida, que en este caso es 3,46.

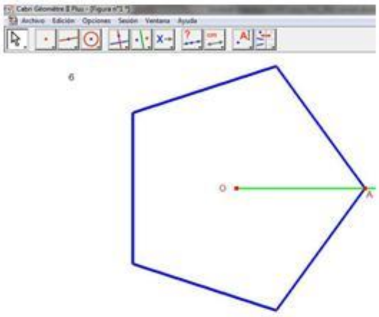


- En la barra de herramientas selecciona "Segmento" y haz clic en el centro O y en un vértice y, otra vez en el centro O y en otro vértice consecutivo. Aparecen dos radios. Selecciona "Medida de ángulo" y haz clic en un vértice, en el centro y en el otro vértice. Aparece la medida del ángulo, que en el hexágono es siempre 60º.



Ejercicio 3. Dibuja un pentágono regular de radio 6 cm.

De manera análoga al caso anterior.

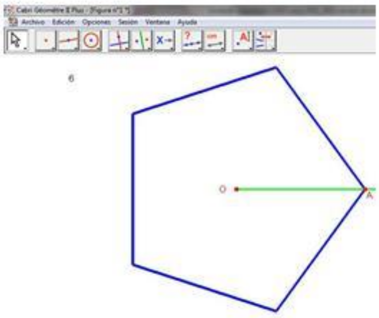


Ejercicio 4. En el pentágono anterior, mide el lado, la apotema y el ángulo central.

De manera análoga al caso anterior.

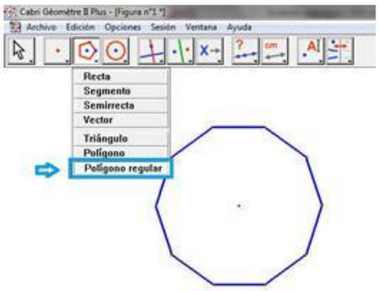
En el pentágono el lado no coincide con el radio.

El ángulo central del pentágono siempre mide 72º.

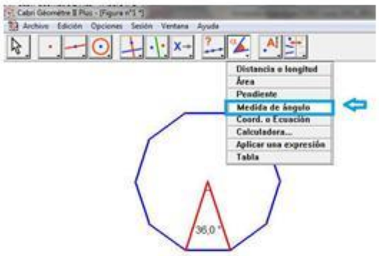


Ejercicio 4. Calcula el ángulo central en los siguientes polígonos:

a) Decágono regular



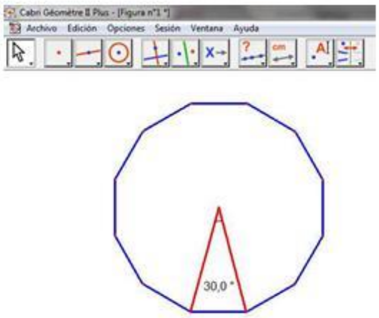
- En la barra de herramientas selecciona "Polígono regular" y haz clic en dos puntos de la ventana de trabajo. Aparece una circunferencia y un número entre llaves. Gira hasta que aparezca el número 10.



- En la barra de herramientas selecciona "Segmento" y haz clic en el centro y en un vértice y, otra vez en el centro y otro vértice consecutivo. Selecciona "Medida de ángulo" y haz clic en un vértice, en el centro y en el otro vértice. Aparece el número esperado 360:10=36.
- Con el apuntador puedes manipular el polígono y ves que la medida del ángulo no varía.

b) Dodecágono regular

- De manera análoga al caso anterior.
- Aparece la medida de ángulo esperada 360:12=30.
- Con el apuntador puedes manipular el polígono y ves que la medida del ángulo no varía.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un hexágono regular de radio 3 cm.**
- **Mide el lado, la apotema y el ángulo central.**

Ejercicio 2.

- **Dibuja un pentágono regular de 4 cm. de radio.**
- **Mide el lado, la apotema y el ángulo central.**

Ejercicio 3. Calcula el ángulo central en los siguientes polígonos:

- **Octógono regular.**
- **Eneágono regular.**

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1. Cuánto mide el ángulo central en cada uno de estos polígonos regulares:

a. **Triángulo…………**

b. **Cuadrado………..**

c. **Pentágono………..**

d. **Hexágono………..**

e. **Octógono………..**

f. **Eneágono………..**

Dibújalos y compruébalo.

Ejercicio 2. Dibuja las diagonales de los polígonos del ejercicio anterior. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular?..

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1.

- **¿Cuánto mediría el ángulo central de un polígono regular de 18 lados?**

- **Entonces, ¿podrías dibujarlo?**
- **Mira a ver si Cabri te permite dibujarlo.**
- **¿A qué conclusión llegas sobre la relación de la medida del ángulo central con la posibilidad de dibujar el polígono?**

  ....

  ....

Ejercicio 2.

- **¿Cuánto mediría el ángulo central de un heptágono?**

- **Entonces, ¿podrías dibujarlo?**
- **Mira a ver si Cabri te permite dibujarlo.**
- **¿A qué conclusión llegas sobre la relación de la medida del ángulo central con la posibilidad de dibujar el polígono?**

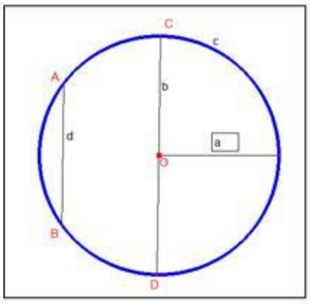
  ....

  ....

4.3. LA CIRCUNFERENCIA.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

Ejercicio 1. Trata de recordar y escribe como se llaman los elementos que aparecen dibujados:



La línea gruesa curva c se llama...........................

El punto O se llama.......................................

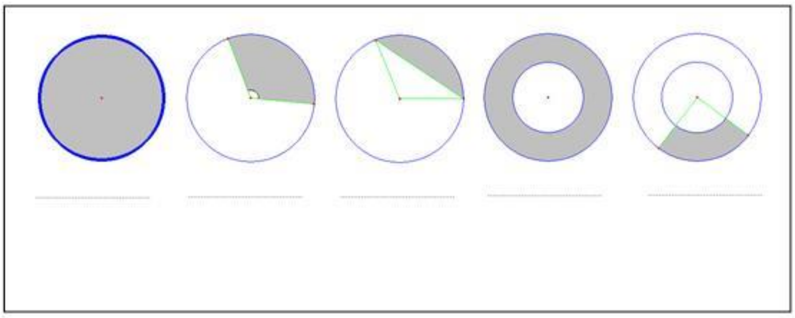
El segmento a se llama...................................

El segmento b se llama...................................

El segmento d se llama....................................

El trozo de línea curva entre A y B se llama...........

Ejercicio 2. Trata de recordar y escribe cómo se llaman las siguientes figuras circulares:



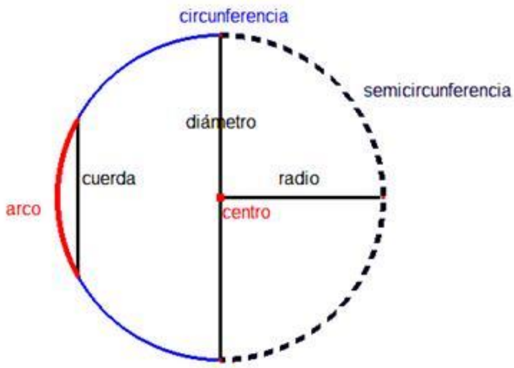
FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría sobre la circunferencia:

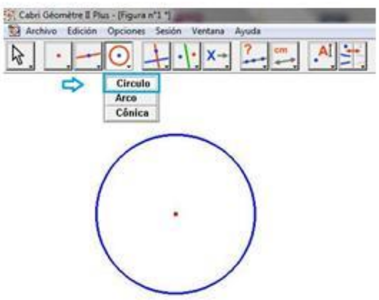
Una **circunferencia** es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia de un punto interior llamado **centro**.

Los elementos de la circunferencia:

- **Centro**: punto interior a la circunferencia tal que la distancia a cualquier punto de la circunferencia es la misma.
- **Radio**: segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.
- **Diámetro**: segmento que tiene por extremos dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro. El diámetro es el doble del radio.
- **Cuerda**: es el segmento que une dos puntos de la circunferencia. La cuerda mayor es el diámetro.
- **Arco**: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Semicircunferencia**: cada una de las partes en que un diámetro divide a una circunferencia, es decir, media circunferencia.



Ejercicio 1. Dibuja una circunferencia.



- En la barra de herramientas selecciona "Círculo" y haz clic en un punto que será el centro de la circunferencia y luego en otro punto de la pantalla.
- Fíjate que Cabri llama círculo a la circunferencia.

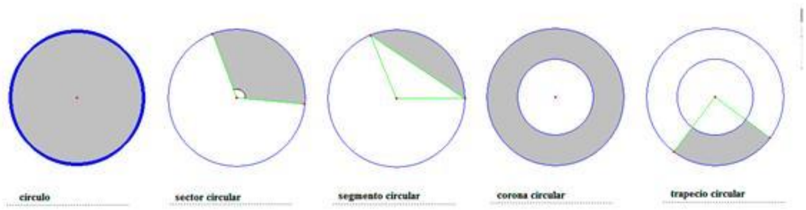
Ejercicio 2. Dibuja una circunferencia de radio 3 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 3.
- Luego selecciona "Compás" y haz clic en el número y en un punto de la pantalla. Aparece la circunferencia de radio 3.

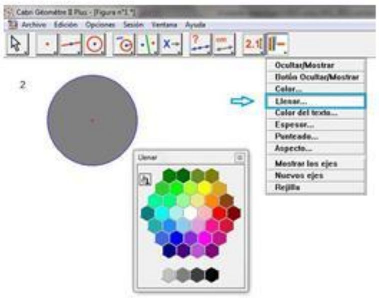
Un poco de teoría sobre las formas planas relacionadas con el círculo:

- **Círculo**: es la parte del plano limitada por una circunferencia. El centro y el radio del círculo son el centro y el radio de la circunferencia.
- **Sector circular**: es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco correspondiente.
- **Segmento circular**: es la parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco de circunferencia correspondiente.
- **Corona circular**: es la parte del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas.
- **Trapecio circular**: es la parte de corona circular comprendida entre dos radios.

Gráficamente:

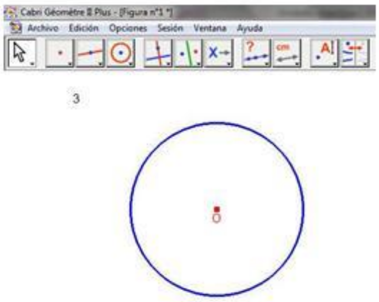


Ejercicio 3. Dibuja un círculo de 2 cm de radio.

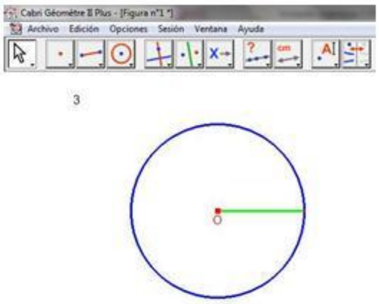


- En la barra de herramientas selecciona "Número". Escribe 2. Selecciona "Compás" y haz clic en el número y en un punto de la pantalla. Aparecerá la circunferencia.
- Selecciona "Llenar", elige el color que quieras y haz clic en la circunferencia. Aparecerá el círculo.

Ejercicio 4. Dibuja un arco, en una circunferencia de 3 cm de radio, con ángulo de 60º.

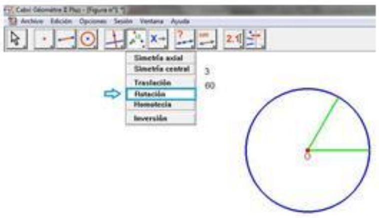


- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 3. Luego selecciona "Compás" y haz clic en el número y en un punto de la pantalla. Aparecerá la circunferencia.

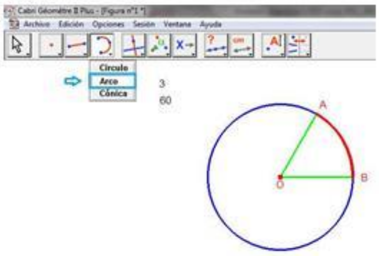


- En la barra de herramientas selecciona "Segmento" y dibuja un segmento con origen el centro de la circunferencia y otro punto de la misma.

- Selecciona "Número" y escribe 60. Selecciona "Rotación" y haz clic en el número 60, en el segmento y en el punto O.

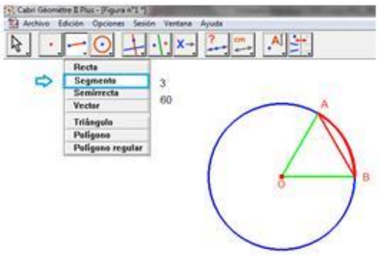


- Selecciona "Nombrar" y nombra los puntos de intersección de la circunferencia con los dos segmentos, A y B.
- Selecciona "Arco" y haz clic en A, en un punto intermedio entre A y B y en B. Aparecerá el arco de amplitud 60º.

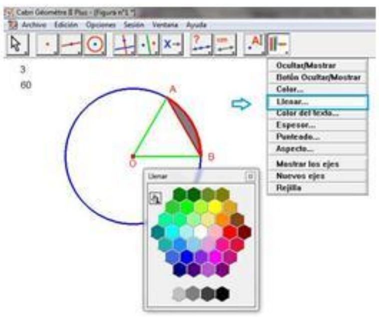


Ejercicio 5. Construye un segmento circular en una circunferencia de 3 cm de radio y con ángulo de 60º.

- En la barra de herramientas selecciona segmento y une los puntos A y B del ejercicio anterior.

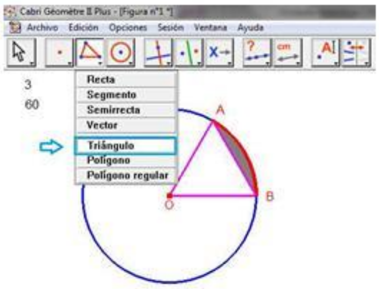


- Selecciona "Llenar", selecciona el color y haz clic en el arco. Aparece el segmento circular.

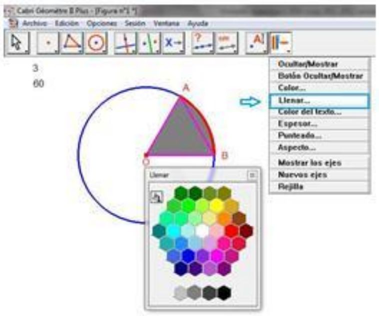


Ejercicio 6. Dibuja un sector circular en una circunferencia de 3 cm de radio y con ángulo de 60º.

- En la barra de herramientas selecciona "Triángulo" y haz clic en los puntos O, A, B. Aparece un triángulo.

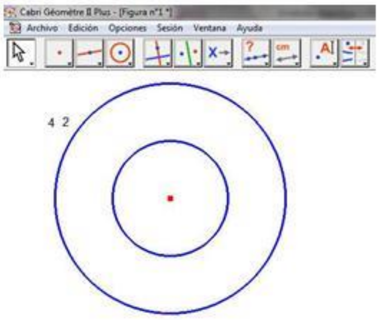


- Selecciona "Llenar", elige el mismo color que antes y haz clic en el triángulo.

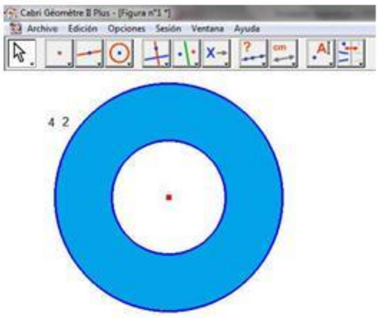


Ejercicio 7. Construye una corona circular cuyos radios midan 4 y 2 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe los números 4 y 2. Selecciona "Compás" y haz clic en el número 4 y en un punto de la pantalla. Luego haz clic en el número 2 y en el mismo punto de la pantalla.

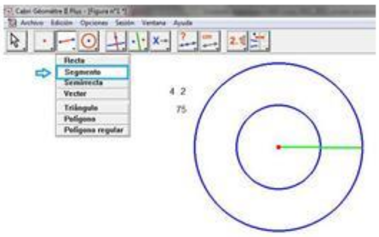


- En este caso Cabri no nos permite llenar la corona circular. Utilizando el programa Paint vemos claramente la corona circular dibujada.

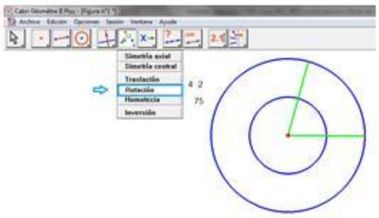


Ejercicio 8. Dibuja un trapecio circular en una corona circular cuyos radios midan 4 y 2 cm y con ángulo de 75º.

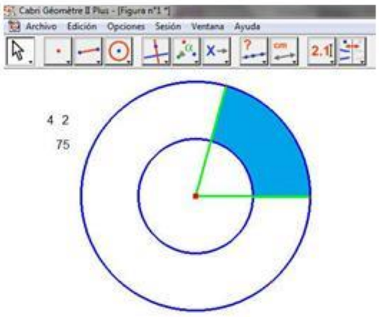
- Utilizamos la corona anterior.
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 75.



- Selecciona "Segmento" y dibuja un segmento que una el centro de las circunferencias con un punto de la circunferencia exterior.
- Selecciona "Rotación" y haz clic en el número 75, en el segmento y en el centro de las circunferencias.



- En este caso Cabri no nos permite llenar el trapecio circular. Utilizando el programa Paint vemos claramente el trapecio circular dibujado.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Dibuja una circunferencia de 4 cm. de radio.

Ejercicio 2. Dibuja un círculo de 4 cm. de radio.

Ejercicio 3. Dibuja un arco, en una circunferencia de 4 cm de radio, con ángulo de 50º.

Ejercicio 4. Dibuja un segmento circular en una circunferencia de 4 cm de radio, con ángulo de 50º.

Ejercicio 5. Dibuja un sector circular en una circunferencia de 4 cm de radio, con ángulo de 50º.

Ejercicio 6. Dibuja una corona circular cuyos radios midan 5 y 3 cm.

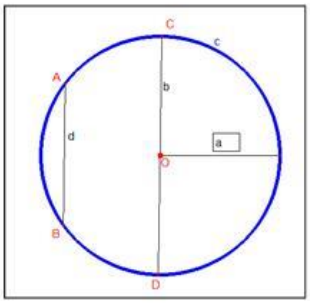
Ejercicio 7. Dibuja un trapecio circular en una corona circular cuyos radios midan 5 y 3 cm. y con un ángulo de 60º.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

En esta fase no se han planteado ejercicios.

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio. Después de estudiar la circunferencia y el círculo, completa los nombres de los elementos de la circunferencia y de las figuras circulares:



La línea gruesa curva c se llama…………………………

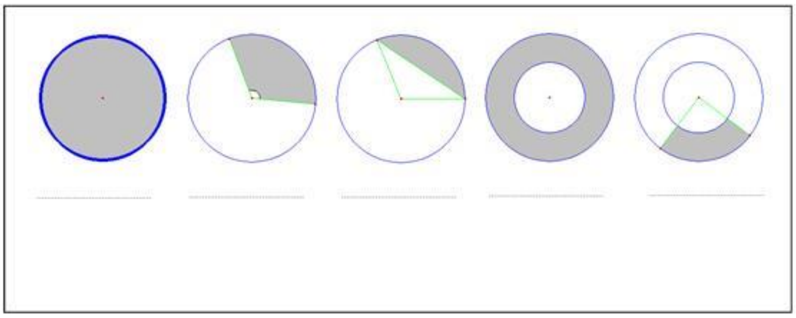
El punto O se llama…………………………………

El segmento a se llama………………………………

El segmento b se llama………………………………

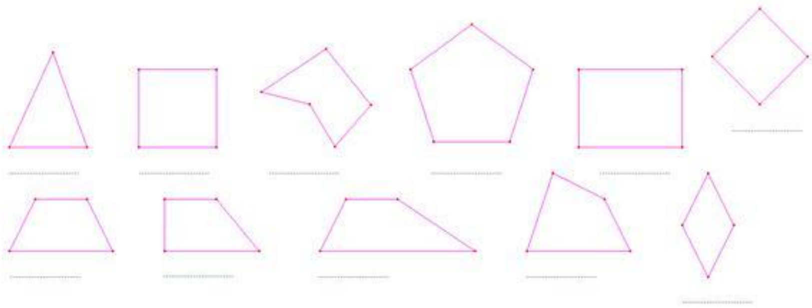
El segmento d se llama………………………………

El trozo de línea curva entre A y B se llama…………



EVALUACIÓN DE LA UNIDAD CON CABRI Y PAPEL.

1. Indica los nombres de los siguientes polígonos.



2. Dibuja un rombo de lado 5 cm.
3. Dibuja un trapecio isósceles, otro rectángulo y otro escaleno.
4. Dibuja un hexágono regular de 4 cm. de radio. Señala el centro, el lado, radio, apotema. Calcula el lado, la apotema y el ángulo central.
5. Calcula el ángulo central de un pentágono.
6. ¿Podrías dibujar un polígono regular de once lados de manera exacta?
7. Dibuja una circunferencia de 3 cm. de radio y señala todos sus elementos.
8. Dibuja un segmento circular en una circunferencia de 2 cm. de radio y ángulo central de 90º.
9. Dibuja un trapecio circular en una corona circular cuyos radios midan 6 y 4 cm. y con un ángulo de 50 cm.

UNIDAD 5.

PERÍMETROS Y ÁREAS.

5.1. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS.

En 6º de Primaria has estudiado las áreas de algunos polígonos: cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, triángulo, polígonos regulares, círculo y las áreas de figuras por descomposición.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

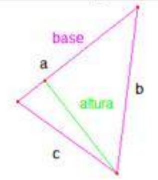
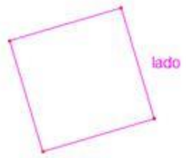
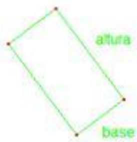
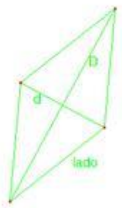
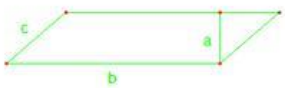
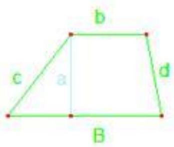
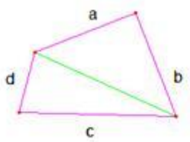
Ejercicio 1: Calcula el perímetro de un cuadrado de lado 3 cm.

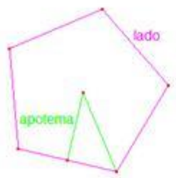
Ejercicio 2: Calcula el área de un cuadrado de lado 3 cm.

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

En la siguiente tabla tienes un cuadro resumen de los perímetros y áreas de las figuras, que has estudiado. Léelo con detenimiento y aprende las fórmulas con los ejercicios resueltos y propuestos.

Polígono	Dibujo	Perímetro	Área
Triángulo		P= a + b + c (suma de los lados)	$A = \dfrac{\text{base x altura}}{2}$
Cuadrado		P = 4 lado (suma de los lados)	$A = \text{lado}^2$
Rectángulo		P= 2base + 2altura (suma de los lados)	A = base x altura
Rombo		P = 4 ·lado (suma de los lados)	$A = \dfrac{D \times d}{2}$
Romboide		P= 2b + 2c (suma de los lados)	A = base x altura
Trapecio		P=B+b+c+d (suma de los lados)	$A = \dfrac{B + b}{2} \times a$
Trapezoide		P= a+b+c+d (suma de los lados)	A= suma de las áreas de los triángulos

Polígono regular		P = n x lado (suma de los lados)	$A=\dfrac{\text{perímetro x apotema}}{2}$

Fíjate cómo podemos entender las fórmulas de las áreas:

a. Cuadrado, rectángulo y romboide.

Son fáciles:

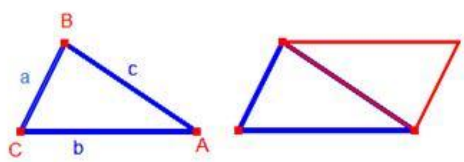
- el área del cuadrado es lado por lado,
- la del rectángulo es base por altura,
- y la del romboide también es base por altura (porque con el romboide formamos un rectángulo, como se puede ver en la imagen)

b. Triángulo, trapecio y rombo.

Se trata de ver que el área de estas figuras es la mitad del área de un rectángulo que las contiene.

• Triángulo.

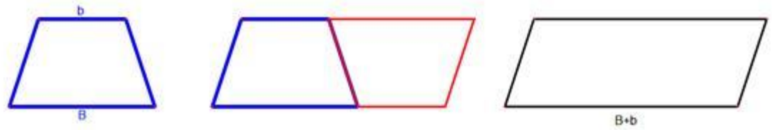
Para hallar el área de un triángulo, trazamos una paralela al lado a por el vértice A, y una paralela al lado b por el vértice B. Aparece un triángulo semejante al anterior y ambos componen un romboide.



Como el área del romboide es "base x altura", entonces la del triángulo es $\frac{\text{base x altura}}{2}$

- Trapecio.

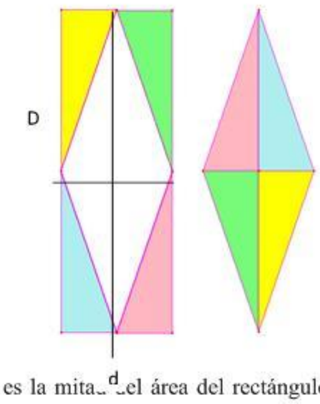
Para hallar el área del trapecio (da igual el tipo de trapecio), completamos un romboide, como en el caso del triángulo. Este romboide tiene como base la suma de las bases del trapecio inicial y la altura coincide con la altura del trapecio.



Claramente, el área del trapecio es la mitad del área del romboide. Como el área de este romboide es (B+b) x altura, entonces el área del trapecio es $\frac{B+b}{2}$ x a

- Rombo.

Fíjate cómo se puede hallar la fórmula del área del rombo.

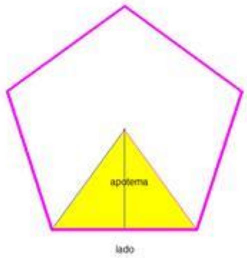


El área del rombo es la mitad del área del rectángulo de lados D (diagonal mayor) y d (diagonal menor), como puedes ver en la imagen anterior, $\frac{D \times d}{2}$

c. Polígonos regulares.

Fíjate por qué la fórmula para hallar el área de los polígonos regulares es

$$\frac{\text{perímetro x apotema}}{2}$$



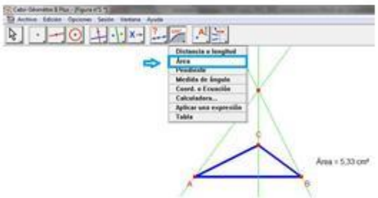
El área del triángulo amarillo es $\frac{\text{base x altura}}{2}$, es decir, $\frac{\text{lado x apotema}}{2}$. Como se repite cinco veces, queda $\frac{\text{5 x lado x apotema}}{2} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2}$.

Ejercicio 1. Calcula el perímetro y el área de un triángulo de lados 6, 4 y 3 cm.

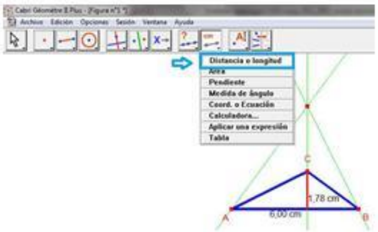
- El triángulo lo tenemos dibujado en la unidad 3, apartado 2, fase 2, ejercicio 2.
- Calculamos el perímetro, que es la suma de los lados. En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud", haz clic en el triángulo y aparece el perímetro (13). El cursor aparece al inicio del cuadro de texto. Escribe delante "Perímetro = ".

- Calculamos el área de dos formas.

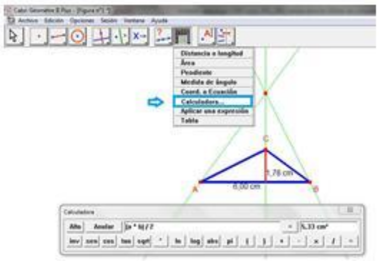
- En la barra de herramientas selecciona "Área", haz clic en el triángulo y aparece su valor (5,33).



- En la barra de herramientas seleccionamos "Segmento" y dibujamos la altura C hasta el lado opuesto. Seleccionamos "Distancia o longitud" y medimos esta altura y también la distancia entre A y B.

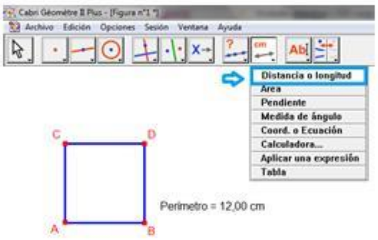


- Seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula del área, (6x1,78)/2. Y obtenemos el mismo valor.



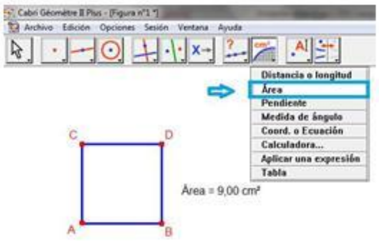
Ejercicio 2. Calcula el perímetro y el área de un cuadrado de 3 cm de lado.

- El cuadrado lo tenemos dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 1.
- Calculamos el perímetro. En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud", haz clic en el cuadrado y aparece el perímetro (12). Haz doble clic en el cuadro de texto y escribe "Perímetro = ".

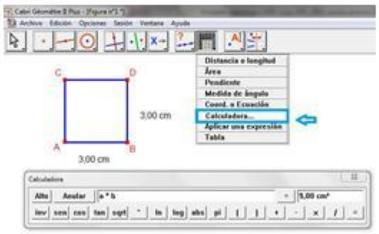


- Calculamos el área de dos formas.

- En la barra de herramientas selecciona "Área", haz clic en el cuadrado y aparece su valor (9).



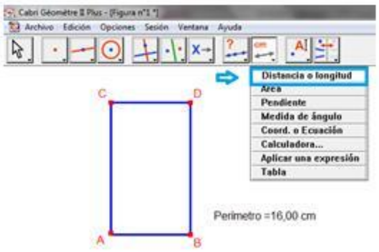
- Seleccionamos "Distancia o longitud" y calculamos la longitud de dos lados. Seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula del área, 3x3. Y obtenemos el mismo valor.



Ejercicio 3. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo de lados 3 y 5 cm.

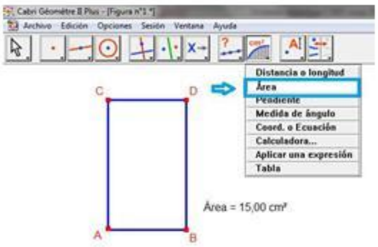
- El rectángulo lo tenemos dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 2.

- Calculamos el perímetro, que es la suma de los lados. En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud", haz clic en el rectángulo y aparece el perímetro (16). El cursor aparece al inicio del cuadro de texto. Escribe delante "Perímetro = ".

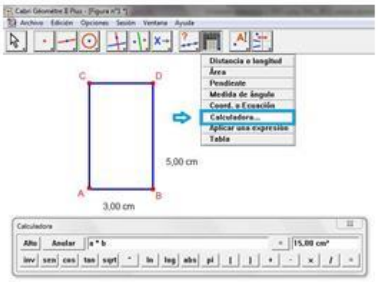


- Calculamos el área de dos formas.

- En la barra de herramientas selecciona "Área", haz clic en el rectángulo y aparece su valor (15).

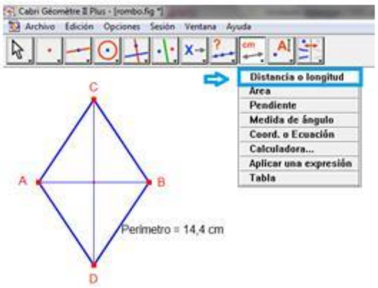


- Seleccionamos "Distancia o longitud" y calculamos la longitud de dos lados distintos. Seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula del área, 3x5. Y obtenemos el mismo valor.

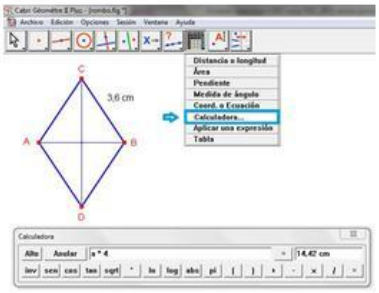


Ejercicio 4. Calcula el perímetro y el área de un rombo de diagonales 4 y 6 cm.

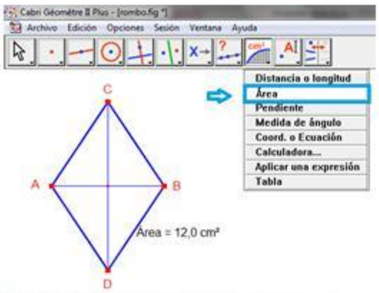
- El rombo lo tenemos dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 3.
- El perímetro lo calculamos de dos formas.
- En la barra de herramientas selecciona "Distancia o longitud", haz clic en el rectángulo y aparece el perímetro (14,4). El cursor aparece al inicio del cuadro de texto. Escribe delante "Perímetro = ".



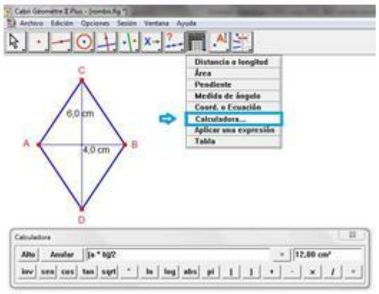
- Selecciona "Distancia o longitud", haz clic en dos vértices consecutivos. Aparece la medida del lado. Selecciona "Calculadora" y multiplica el lado por cuatro. Aparece el mismo resultado (14,4).



- Calculamos el área de dos formas.
- En la barra de herramientas selecciona "Área", haz clic en el rombo y aparece su valor (12).



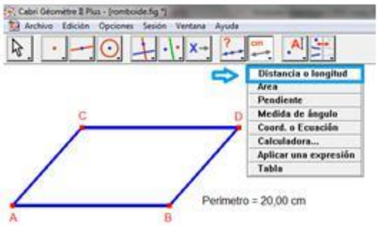
- Seleccionamos "Distancia o longitud" y calculamos la longitud de las dos diagonales. Seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula del área, (6x4)/2. Y obtenemos el mismo valor (12).



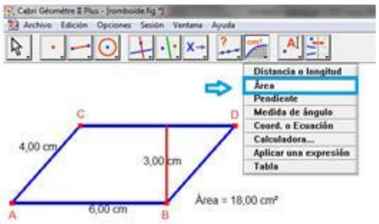
Ejercicio 5. Calcula el perímetro y el área de un romboide de lados 6 y 4 cm. y altura 3 cm.

- El romboide lo tenemos dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 4.

- En la barra de herramientas seleccionamos "Distancia o longitud", hacemos clic en el polígono y obtenemos el valor esperado (20).

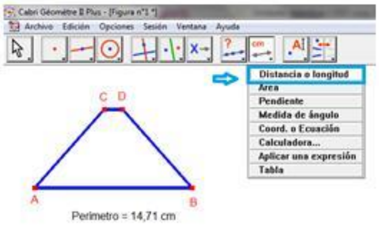


- En la barra de herramientas seleccionamos "Área" y obtenemos el valor esperado (18).

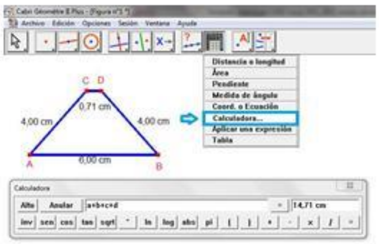


Ejercicio 6. Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles de base 6 cm., lados iguales de 4 cm. y altura 3 cm.

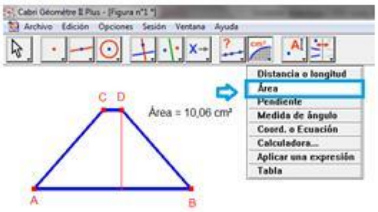
- El trapecio lo tenemos dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 5.
- Calculamos el perímetro de dos formas.
- En la barra de herramientas seleccionamos "Distancia o longitud", hacemos clic en el polígono y obtenemos el perímetro.



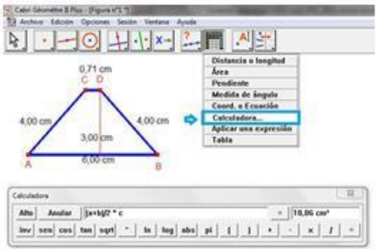
- Seleccionamos "Distancia o longitud" y calculamos la longitud de la base menor. Seleccionamos "Calculadora" y sumamos las medidas de los lados. Obtenemos el mismo resultado.



- Calculamos el área de dos formas.
- En la barra de herramientas seleccionamos "Área", hacemos clic en el polígono y obtenemos el resultado.

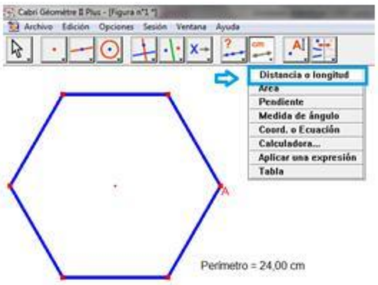


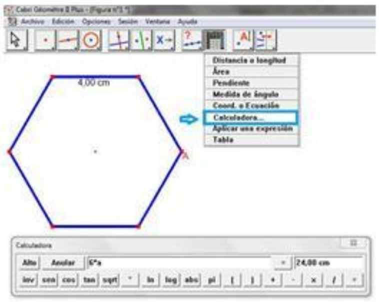
- Seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula del área del trapecio [(6+0,71)/2]x3. Obtenemos el mismo resultado.



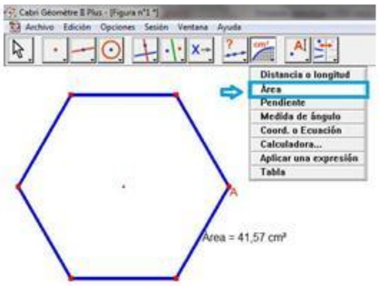
Ejercicio 7. Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular de 4 cm. de radio.

- El hexágono lo tenemos dibujado en la unidad 4, apartado 2, fase 2, ejercicio 1 y 2.
- Calculamos el perímetro de dos formas.
- En la barra de herramientas seleccionamos "Distancia o longitud", hacemos clic en el polígono y tenemos el resultado.

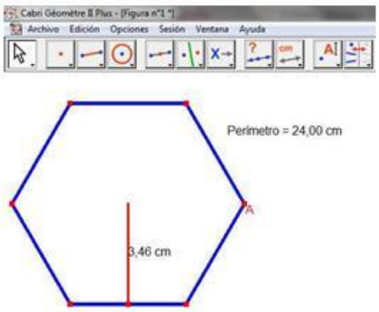




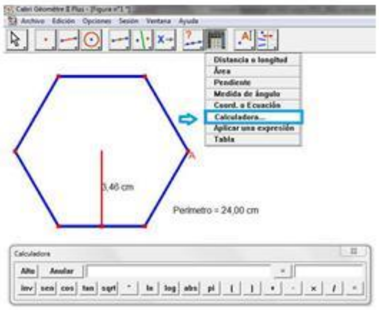
- Seleccionamos "Distancia o longitud" y calculamos la medida de un lado, que en el caso del hexágono sabemos que coincide con el radio. Seleccionamos "Calculadora" y multiplicamos la longitud del lado por 6. Obtenemos el mismo resultado.
- Calculamos el área de dos formas.



- En la barra de herramientas seleccionamos "Área", hacemos clic en el polígono y obtenemos su valor.
- Calculamos el valor de la apotema. En la barra de herramientas seleccionamos "Punto medio" y calculamos el punto medio de un lado. Seleccionamos "Segmento" y unimos el centro del hexágono con este punto dibujado. Seleccionamos "Distancia o longitud" y obtenemos el valor de la apotema, que es 3,46.



- En la barra de herramientas seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula (perímetro x apotema)/2.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Calcula el perímetro y el área de un triángulo de lados 4, 5 y 6. (Dibujado en la unidad 3, apartado 2, fase 3, ejercicio 2).

Ejercicio 2. Calcula el perímetro y el área de un cuadrado de 5 cm. de lado. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 1).

Ejercicio 3. Calcula el perímetro y el área de un rectángulo de lados 4 y 6 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 2).

Ejercicio 4. Calcula el perímetro y el área de un rombo de diagonales 6 y 9 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 3).

Ejercicio 5. Calcula el perímetro y el área de un romboide de lados 6 y 5 cm. y altura 3 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 4).

Ejercicio 6. Calcula el perímetro y el área de un trapecio isósceles de base 6 cm., lados iguales de 2 cm. y altura 1 cm. (Dibujado en la unidad 4, apartado 1, fase 3, ejercicio 5).

Ejercicio 7. Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular de 3 cm. de radio. (Dibujado en la unidad 4, apartado 2, fase 3, ejercicio 1).

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

Ejercicio 1.

- **Dibuja un triángulo de lados 6, 7 y 8 cm.**
- **Calcula su perímetro y su área teniendo en cuenta distintas alturas.**

  El perímetro es……………………………………………………………………

  El área calculada con la altura sobre el lado de 6 cm es…..........................

  El área calculada con la altura sobre el lado de 7 cm es…..........................

  El área calculada con la altura sobre el lado de 8 cm es…..........................

- **¿Qué relación tienen las áreas obtenidas con las tres alturas?**

  ………………………………………………………………………………………

Ejercicio 2.

- **Calcula el perímetro y el área de un trapecio rectángulo de base 6 cm, altura 3 cm y lado no paralelo a la altura de 4 cm.**

  (Está dibujado en la Unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 6).

  El perímetro es…………………………………………………………………...

  El área es………………………………………………………………………...

- **Calcula el perímetro y el área de un trapecio escaleno de base 6 cm, altura 1 cm. y lados no paralelos de 2 y 3 cm.**

  (Está dibujado en la Unidad 4, apartado 1, fase 2, ejercicio 7).

  El perímetro es…………………………………………………………………...

  El área es………………………………………………………………………...

- **La fórmula del área, ¿es distinta para cada tipo de trapecio o es igual para todos?**

  ……...

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio 1.

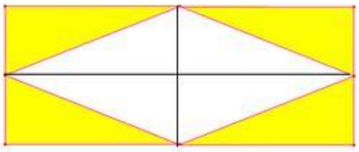
- **Calcula el área del rombo del siguiente dibujo en el que las diagonales miden 10 y 20 cm. y el área amarilla comprendida entre el rectángulo y el rombo.**

- **¿Cuál es mayor?**

………………………………………………………………………………………….

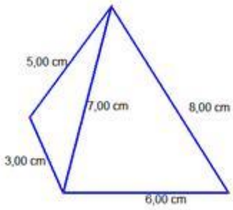
- **¿Por qué?**

………………………………………………………………………………………….



Ejercicio 2.

- **Halla el perímetro y el área de esta figura. (Dibújalo en Cabri).**



- **El perímetro es.**……………………………………………………………………
- **El área es**……………………………………………………………………..

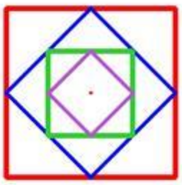
Ejercicio 3. Recuerda cómo se obtiene la fórmula del área de polígonos regulares, por descomposición en triángulos rectángulos de altura igual a la apotema. Haz tú lo mismo con el hexágono. (Realiza un dibujo aproximado)

Ejercicio 4.

- **Dibuja un cuadrado C1. Marca los puntos medios de cada lado y dibuja otro cuadrado C2. Marca los puntos medios de cada lado de este cuadrado y dibuja otro C3. Obtienes una sucesión de cuadrados C1, C2, C3…**
- **¿Qué relación tienen sus perímetros?**

  ………………………………………………………………………………………..
- **¿Y sus áreas?**

  ………………………………………………………………………………………
- **Compruébalo con Cabri.**



5.2. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA. ÁREA DEL CÍRCULO.

FASE 1. INDAGACIÓN: RECORDANDO.

Ejercicio 1. Completa con las expresiones "de la circunferencia" o "del círculo" según proceda. ¿Se puede utilizar indistintamente una expresión u otra?............

	La longitud..................... es $2 \times \pi \times 3 = 18{,}85$ cm. El área............................. es $\pi \times 3^2 = 28{,}27$ cm^2.

FASE 2. ORIENTACIÓN DIRIGIDA: PASO A PASO.

Un poco de teoría:

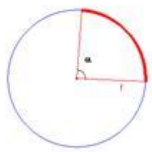
- Para calcular la longitud de la circunferencia de radio r, se utiliza la fórmula:

$$\text{Longitud} = 2 \times \pi \times r$$

- El área del círculo se calcula con la fórmula:

$$\text{Área} = \pi \times r^2$$

- Para calcular la longitud del arco de amplitud α, se hace una regla de tres:



$360^o \longrightarrow 2 \times \pi \times r$

$\alpha^o \longrightarrow$ longitud del arco

Longitud del arco $= (2 \times \pi \times r \times \alpha^o)/360^o$

- Para calcular el área del sector circular de amplitud α, se hace una regla de tres:

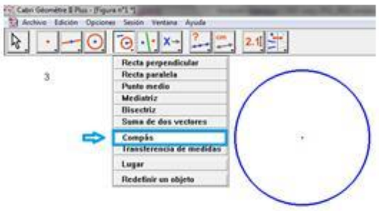
$360^o \longrightarrow \pi \times r^2$

$\alpha^o \longrightarrow$ área del sector circular

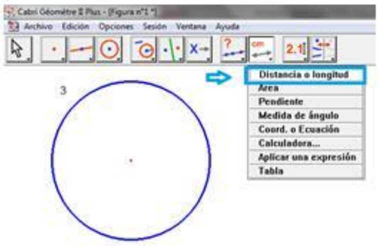
Área del sector circular $= (\pi \times r^2 \times \alpha^o)/360^o$

Ejercicio 1. Dibuja una circunferencia de radio 3 cm. y halla su longitud y el área del círculo que encierra.

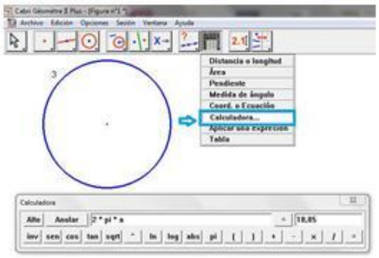
- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 3. Luego selecciona "Compás" y haz clic en el número 3 y en un punto de la ventana de trabajo.



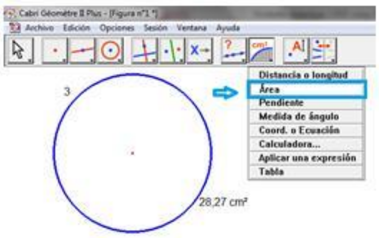
- Selecciona "Distancia o longitud" y haz clic en la circunferencia. El programa dice "Perímetro de este círculo", pero debería decir "Longitud de la circunferencia". En este caso el valor es 18,85 cm.



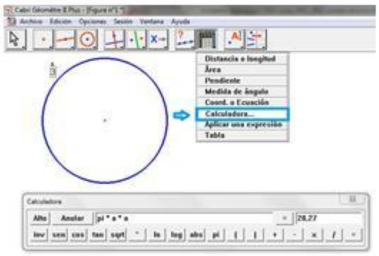
- En la barra de herramientas selecciona "Calculadora" y escribe 2, pulsa el signo de multiplicación, el símbolo pi, multiplicación y haz clic en el número 3. Pulsa el símbolo "=" y aparece el mismo valor.



- Para calcular el área en la barra de herramientas selecciona "Área" y haz clic en la circunferencia. Aparece el valor 28,27 cm^2.

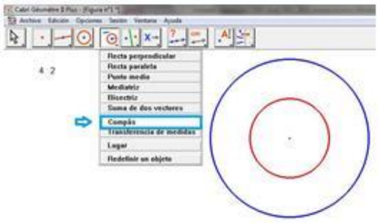


- Selecciona "Calculadora" y haz clic en el símbolo pi, multiplicación, en el número 3, multiplicación, otra vez en el número 3. Aparece el mismo valor.

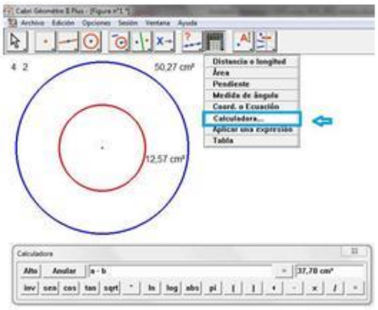


Ejercicio 2. Halla el área de una corona circular determinada por dos circunferencias concéntricas de radios de 4 y 2 cm.

- En la barra de herramientas selecciona "Número" y escribe 4 y 2. Luego selecciona "Compás" y haz clic en el número 4 y en un punto de la ventana de trabajo. Luego haz clic en el número 2 y en el mismo punto. Así están dibujadas las dos circunferencias.

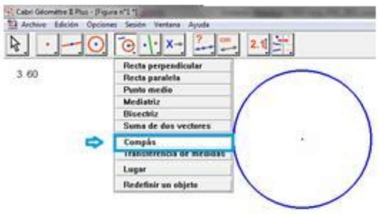


- Selecciona "Área" y haz clic en cada una de las circunferencias. Luego selecciona "Calculadora" y resta los dos valores de las áreas. Obtenemos el área de la corona circular 37,70 cm^2.



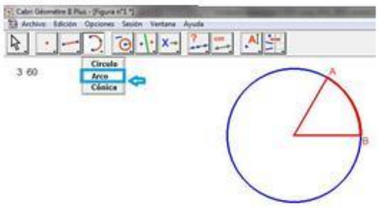
Ejercicio 3. Halla la longitud de un arco de circunferencia de radio 3 cm. determinado por un ángulo de 60º.

- En la barra de herramientas seleccionamos "Número" y escribimos 3 y 60. Seleccionamos "Compás", hacemos clic en 3 y en un punto de la ventana de trabajo. Así tenemos la circunferencia.

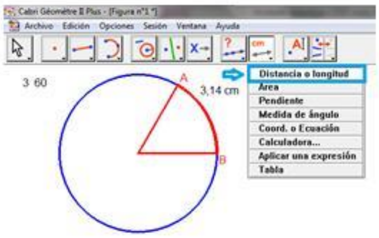


- Seleccionamos "Segmento" y dibujamos uno de los radios. Seleccionamos "Rotación" y hacemos clic en el número 60, en el segmento y en el centro de la circunferencia. De esta manera tenemos el ángulo. Llamamos A y B a los puntos de la circunferencia que delimitan el ángulo.

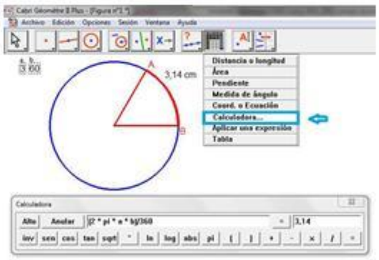
- Seleccionamos "Arco" y hacemos clic en A, un punto intermedio de la circunferencia y en B.



- Seleccionamos "Distancia o longitud", hacemos clic en el arco y obtenemos su valor, 3,14 cm.

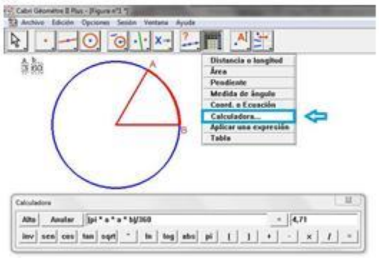


- Para hallarlo con la calculadora, seleccionamos "Calculadora" e introducimos los datos de la fórmula (2 x pi x 3 x 60º)/360º y se obtenemos el mismo valor.



Ejercicio 4. Halla el área del sector circular determinado por el arco del ejercicio anterior.

- La opción "Área" no nos permite calcular el área del sector circular directamente. Seleccionamos "Calculadora" y aplicamos la fórmula del área del sector circular.



FASE 3. EXPLICITACIÓN: AHORA TÚ.

Ejercicio 1. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm. y halla su longitud y el área del círculo que encierra.

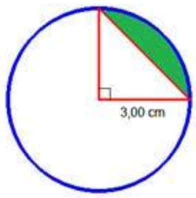
Ejercicio 2. Halla el área de una corona circular determinada por dos circunferencias concéntricas de radios de 4 y 1 cm.

Ejercicio 3. Halla la longitud de un arco de circunferencia de radio 4 cm. determinado por un ángulo de 90º.

Ejercicio 4. Halla el área del sector circular determinado por el arco del ejercicio anterior.

FASE 4. ORIENTACIÓN LIBRE.

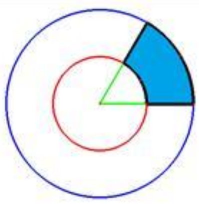
Ejercicio 1. Calcula el área del siguiente segmento circular, formado por un ángulo de 90º en una circunferencia de radio 3 cm.

	El área es:

Ejercicio 2. Calcula el área de la región comprendida entre las dos circunferencias:

	El área es:

Ejercicio 3. Calcula el perímetro y el área del trapecio circular de amplitud 60º formado por dos circunferencias concéntricas de radios 4 y 2.

	El área es:

FASE 5. INTEGRACIÓN: REPASO Y PROFUNDIZACIÓN DE LO APRENDIDO.

Ejercicio.

- **Dibuja una circunferencia de radio 5 cm. y halla su longitud y el área del círculo que encierra.**
- **Dibuja una circunferencia de radio 3 cm. concéntrica con la anterior y halla su área.**
- **Halla el área de la corona circular determinada por dichas circunferencias.**
- **Halla la longitud de arco determinado por un ángulo de 90º en cada una de las circunferencias.**
- **Halla el área de los sectores circulares determinados en cada una de las circunferencias.**
- **Calcula el área del trapecio circular formado por el ángulo de 90º y las dos circunferencias concéntricas.**
- **Calcula también su perímetro.**

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD CON CABRI Y PAPEL.

1. Dibuja (Cabri) un triángulo de lados 3, 4 y 5 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
2. Dibuja (Cabri) un cuadrado de lado 3 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
3. Dibuja (Cabri) un rectángulo de lados 3 y 5 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
4. Dibuja (Cabri) un rombo de diagonales 6 y 8 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
5. Dibuja (Cabri) un romboide de lados 4 y 5 cm y altura 3 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
6. Dibuja (Cabri) un hexágono regular de radio 3 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
7. Dibuja (Cabri) un trapecio isósceles de bases 12 y 6 cm y altura 4 cm. Halla su perímetro y área. Comprueba que obtienes el mismo resultado aplicando la fórmula.
8. Calcula la longitud de la circunferencia de 2 cm de radio y el área del círculo. (Con papel)
9. Calcula la longitud de un arco que determina un ángulo de 45º en una circunferencia de radio 3 cm. ¿Qué área tiene el sector circular? (Con papel)
10. Dibuja dos circunferencias concéntricas de radios 8 y 4 cm. (Con CABRI) ¿Cuál es el área de la corona circular? (Con papel)
11. En un terreno cuadrado de 6 m de lado, una oveja está atada en el centro de uno de los lados de la valla por una cuerda de 3 m. El terreno está sembrado de césped. Haz un dibujo. ¿Qué superficie del terreno no puede comer la oveja? (Con CABRI y papel)

INDICE

Anexo 20. Difusión de los resultados de investigación llevados a cabo en durante el proceso de creación de esta Tesis.

Cabello, A. B., López, R., y Sánchez, A. B. (2010). El modelo de Van Hiele aplicado a la Geometría en primero de ESO. En M. Contreras, O. Monzó, y L. Puig, *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (págs. 309-315). Valencia: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

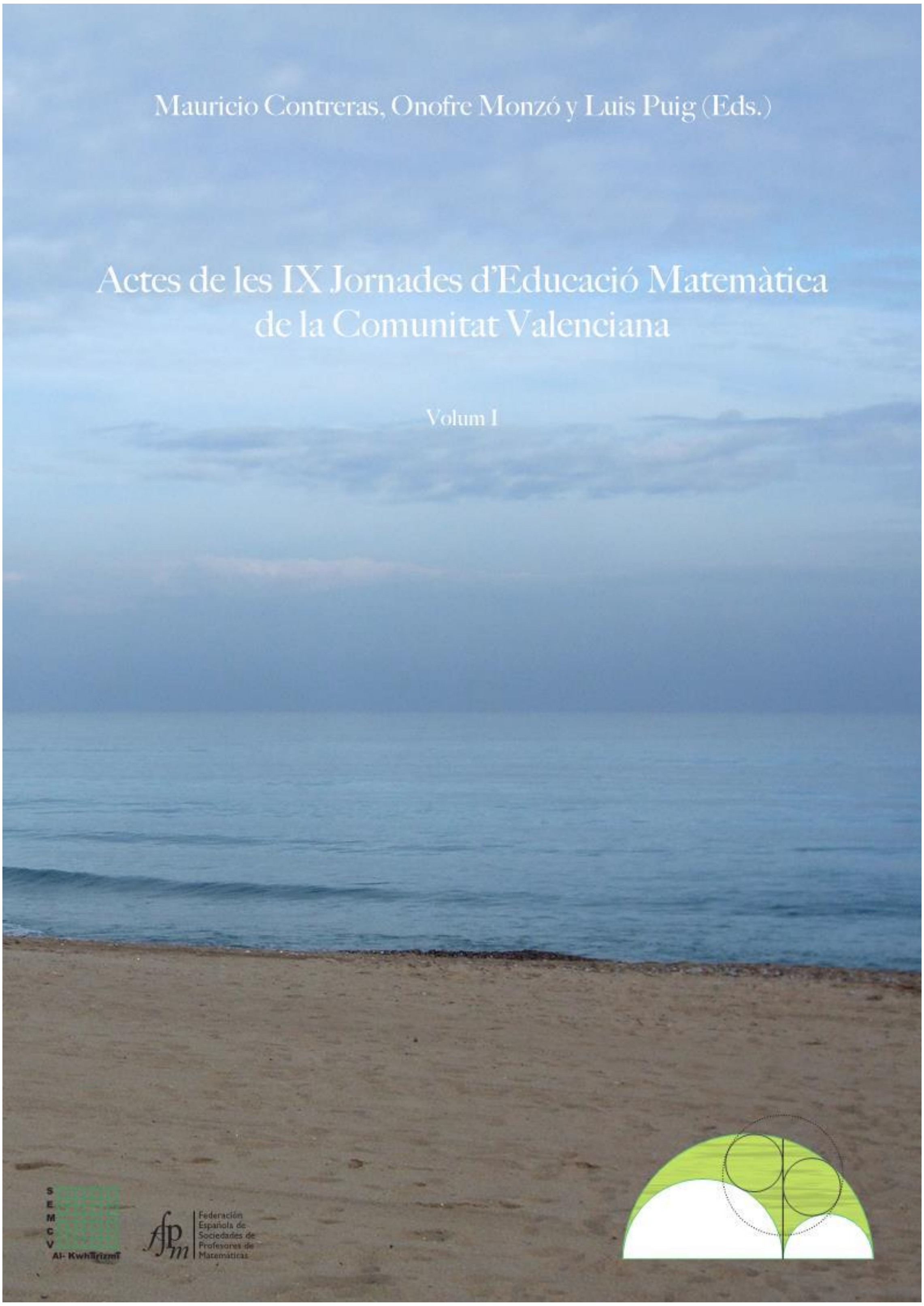
Cabello, A., Sánchez, A., y López, R. (2012 a). Elaboración de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría. En E. Martín, M. Rubio, y J. Urquiza, *Actas de las III Jornadas de Innovación y TIC Educativas JITICE* (págs. 163-166). Madrid.

Cabello, A. B., Sánchez, A. B., y López, R. (2012 b). Aplicación de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría. En *I Simposio Internacional de Enseñanza de las Ciencias (ISIEC 2012).* Vigo: (Pendiente de edición).

Cabello, A. B., Sánchez, A. B., y López, R. (2013). Significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele. *Investigación en Educación Matemática XVII*. Lugar: SEIEM. **(Aceptado 24-06-2013)**

Cabello, A. B., Sánchez, A. B., y López, R. (2013). Diseño de unidades didáctico-tecnológicas de Geometría en 1º de ESO según el modelo de Van Hiele. *Congreso internacional euro-iberoamericano sobre la formación del profesorado de Educación Secundaria. Reflexión, Análisis y Propuestas.* Madrid: UNED. **(Aceptado 25-06-2013)**

Cabello, A. B., Sánchez, A. B., y López, R., (2013). Validación de un cuestionario de rendimiento en Geometría. *Revista de Educación.* **(En evaluación)**


Mauricio Contreras, Onofre Monzó y Luis Puig (Eds.)
Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica
de la Comunitat Valenciana
Volum I

Editors:

Mauricio Contreras
IES Benicalap
València, Espanya
mauricio.contreras@uv.es

Onofre Monzó
IES Veles e Vents
Torrent, Espanya
onofre.monzo@uv.es

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
València, Espanya
luis.puig@uv.es

Publica:
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"
www.semcv.org

Il·lustració de la portada: logo de les Jornades dissenyat per Eduardo Llopis
Fotografia de la portada: *mar, 110101*, elepé

Citar com:

Contreras, M., Monzó, O., & Puig, L. (Eds.) (2011). *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*. València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī"

ISBN: 978-84-614-9741-6
Dipòsit legal: V-1770-2011

EL MODELO DE VAN HIELE APLICADO A LA GEOMETRÍA EN PRIMERO DE ESO

Ana Belén Cabello Pardos
I.E.S. Joaquín Araújo, Fuenlabrada (Madrid)
Universidad Rey Juan Carlos de Madrid
Ricardo López Fernández
Ana Belén Sánchez García
Universidad de Salamanca

RESUMEN

El modelo de van Hiele, en su doble aspecto descriptivo y prescriptivo, establece los niveles de pensamiento que va alcanzando el alumno guiado por el profesor a través de las distintas fases de aprendizaje. La brillantez de la propuesta radica en su sencillez y contrasta con cierta dificultad, en la práctica, para establecer el contenido concreto de cada fase de aprendizaje dentro de un nivel determinado referido a un tema específico del currículum.

El conocimiento de las interpretaciones que los alumnos dan a las palabras, los preconceptos, concepciones alternativas e incluso errores de comprensión, permiten al profesor organizar las actividades para que los alumnos construyan el pensamiento geométrico.

Keyword: modelo de van Hiele, nivel de pensamiento, fase de aprendizaje, concepto figural, ejemplo no intuitivo.

Nivel educativo: Enseñanza Secundaria Obligatoria.

INTRODUCCIÓN

La teoría conocida como "el modelo de van Hiele" tiene su origen en Holanda, en 1957. Pierre y Dina van Hiele leen sus tesis doctorales y desarrollan sucesivas investigaciones hasta elaborar un modelo en el que se explica cómo el alumno va construyendo el pensamiento geométrico recorriendo cinco niveles, guiado por el profesor a través de cinco fases de aprendizaje (en cada nivel).

El modelo, por tanto, consta de dos aspectos, uno descriptivo, en el que se especifican los niveles de pensamiento geométrico que va alcanzando el alumno; y otro prescriptivo, en el que se establecen las fases de aprendizaje a través de la cuales el profesor guía al alumno para adquirir un determinado nivel de conocimiento.

El aspecto descriptivo se ordena en cinco niveles de pensamiento.

- El nivel cero es el nivel básico, de reconocimiento o visualización.
  Los objetos de este nivel son los elementos básicos.
- El nivel uno es el nivel de análisis.
  Los objetos son las propiedades de los elementos básicos.
- El nivel dos es el nivel de clasificación, deducción informal u orden.
  Se estudian los enunciados que relacionan las propiedades.
- El nivel tres es el nivel de deducción.
  Los objetos son las ordenaciones parciales de los enunciados.

- El nivel cuatro es el nivel de rigor.
  Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.

El aspecto prescriptivo se compone de cinco fases de aprendizaje.

- La fase uno, es la fase de indagación.
  El profesor establece un diálogo con los alumnos para conocer el sentido que dan a las palabras, preparando el terreno conceptual.
- La fase dos, es la orientación dirigida.
  El profesor organiza actividades sencillas, de un solo paso, para que los alumnos tomen conciencia de lo que se está estudiando y se familiaricen con las estructuras.
- La fase tres es la explicitación.
  Los alumnos construyen sobre experiencias previas.
- La fase cuatro es la orientación libre.
  Los alumnos encuentran su modo propio de resolver las tareas.
- La fase cinco es la fase de integración.
  Los alumnos integran en un nuevo saber todo lo aprendido. Consta de actividades de refuerzo y ampliación.

Este modelo tiene su origen en una investigación al analizar las causas o los motivos por los cuales los alumnos no entienden lo que se explica en clase.

De manera breve podemos afirmar que el alumno sólo va a comprender lo que el profesor le presente de una manera adecuada a su nivel de razonamiento; de ahí la importancia de conocer en qué nivel se encuentra el alumno.

> Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, muy pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la asignatura que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no lo entendían. Podía ver que ellos lo intentaban pero sin éxito. Especialmente al principio de la geometría, cuando se tiene que probar cosas muy simples, podía ver que ellos hacían todo lo posible, pero la materia parecía demasiado difícil. Pero como yo era un profesor inexperto, tenía que considerar la posibilidad de que fuera un mal profesor. Y esta última molesta posibilidad fue confirmada por lo que viene a continuación: De repente parecía que entendían la materia. Podían hablar de ella muy sensatamente. Pero muy a menudo decían: "No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicaste con tanta dificultad?" En los años siguientes cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades permanecían. Parecía que yo estaba hablando en un idioma distinto. Y considerando esta idea descubrí la solución, los distintos niveles de pensamiento (Van Hiele, 1986).

La fase de indagación en el modelo de van Hiele

Nos hemos propuesto aplicar el método de van Hiele en el desarrollo de la Geometría en primero de ESO. En este trabajo presentamos solamente resultados de una unidad didáctica. El primer bloque de contenidos, referido a los elementos básicos del plano, se inicia con el nivel cero, básico, de reconocimiento o visualización de dichos elementos. En él, la primera fase es la de indagación, en la que el profesor establece un diálogo con los alumnos sobre los objetos que se van a estudiar; de esta manera conoce las interpretaciones que los alumnos dan a las palabras y se prepara el terreno conceptual. En este momento el profesor conoce los preconceptos, concepciones alternativas e incluso errores de los que parten los alumnos.

Nuestro objetivo es reflejar la importancia de esta fase, mostrando los resultados que hemos obtenido en la aplicación del modelo de van Hiele.

Fase de indagación en el nivel básico, de reconocimiento o visualización de los elementos básicos del plano.

Los alumnos estudian los elementos básicos del plano desde tercero de Primaria, con lo cual se supone que saben reconocerlos y explicar con sus palabras por qué un elemento del plano tiene determinado nombre.

Sin embargo, nos hemos encontrado que en primero de ESO, la realidad es distinta; no todos los alumnos reconocen el segmento, la recta y la semirrecta antes de empezar a estudiar el bloque de Geometría.

Elaboramos un cuestionario cuyo primer ítem demanda a los alumnos la escritura del nombre correspondiente a una recta, semirrecta o segmento, en cada una de las siguientes figuras:

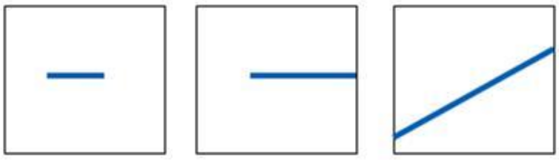


Figura 1. Elementos básicos de la Geometría del plano.

Y también se les pide explicar la primera y la última.

El número total de unidades de análisis está compuesto por alumnos de ambos sexos (47,5% niñas y 52,5% niños) que se encuentran distribuidos por grupos como exponemos en la tabla 1 que mostramos a continuación. Seleccionamos todos los alumnos de los grupos señalados a excepción de los niños de integración puesto que tratábamos de indagar sobre el origen del error (N=59).

Grupo	Chicas	Chicos	Totales	% chicas sobre el total de frecuencias	% chicos sobre el total de frecuencias	% grupo sobre el total de frecuencias
1ºA	9	10	19	15,3%	16,9%	32,2%
1ºB	10	11	21	16,9%	18,7%	35,6%
1ºC	9	10	19	15,3%	16,9%	32,2%
Totales	28	31	59	47,5%	52,5%	100%

Tabla 1. Muestra de investigación por grupos.

Entendemos que está claro que los elementos representados en la figura 1, corresponden a un segmento, una semirrecta y una recta.

Solamente el 30,5% de los alumnos identificó correctamente los elementos.

Las respuestas erróneas podemos clasificarlas en grupos:

- Respuesta recta-semirrecta-segmento.
  La característica de este error es que, por lo menos, reconoce la semirrecta.
  El 44,1% de los alumnos cometió este error.

- Respuesta semirrecta-recta-segmento.
  La característica de este error es que no reconoce ninguno de los elementos. Tiene en común con el error anterior el hecho de denominar segmento al tercer elemento. El 13,6% de los alumnos cometió este error.

- Otras respuestas.
  Incluimos en este grupo las respuestas que aparecieron en un número aislado de casos.
  Respuesta segmento-recta-semirrecta. El 1,7% de los alumnos da esta respuesta. Por lo menos reconoce el segmento.
  Respuesta recta-segmento-semirrecta. El 5,1% de los alumnos responde de esta manera. No reconocen ningún elemento.
  Respuesta semirrecta-segmento-recta. El 3,4% de los alumnos responde así. No reconocen ningún elemento.
  Respuesta recta-no sé-no sé. Lo afirma el 1,7% de los alumnos. Es el peor de los casos.

La siguiente tabla sintetiza el análisis de las respuestas.

Tipo de respuesta	Clasificación de la respuesta			% según clasificación	% según tipo
Correcta	Segmento	Semirrecta	Recta	30,5	30,5
Incorrecta	Recta	Semirrecta	Segmento	44	57,6
	Semirrecta	Recta	Segmento	13,6	
	Segmento	Recta	Semirrecta	1,7	11,9
	Recta	Segmento	Semirrecta	5,1	
	Semirrecta	Segmento	Recta	3,4	
	Recta	No sé	No sé	1,7	
				100	100

Tabla 2. Clasificación de las respuestas.

Las explicaciones de la primera y última respuesta no nos aportaron toda la información que deseábamos debido a la dificultad de los alumnos para verbalizar su pensamiento. Adolecen de la estructuración lingüística a la que se refiere van Hiele en la comprensión del nivel.

En las respuestas erróneas de los dos primeros tipos, que coinciden en llamar segmento al tercer elemento, encontramos tres tipos de argumentaciones de dicha afirmación:

- No-horizontalidad.
  El 20,3% de los alumnos afirma que el tercer elemento es un segmento porque no está en posición horizontal.
  "Porque está mirando para arriba"
  "Porque está inclinada"
  "Porque está torcido"
  "Porque choca en cada uno de los extremos y no es paralela"
  "Porque no va del todo recto"

"Porque está cruzado"
"Porque está de lado"
"Porque es una línea torcida"
"Un segmento es una línea torcida"
"Es una línea recta pero torcida"
"Es una línea inclinada"
"Es segmento porque es una línea curva que va de un lado para otro"

- Atribución de extremos.
  El 6,8% de los alumnos atribuye extremos al tercer elemento.
  "Porque choca en cada uno de los extremos y no es paralela"
  "Es una línea pero va de un punto a otro"
  "Es una raya que tiene principio y fin"
  "Es una línea con principio y fin"
  "Va de un extremo a otro"

- No sabe/no contesta/argumentos no válidos del tipo:
  "Porque aunque se larga no llega a la recta completa"
  "Porque es un segmento"
  "El segmento es un línea muy recta"
  El 30,5% de los alumnos responde de esta manera.

Llegamos a la conclusión de que el error en la identificación de los elementos básicos del plano está en identificar recta con horizontalidad.

Para superar este error proponemos que el alumno utilice software geométrico de manera que, por una parte, le permita manipular los elementos geométricos en el entorno gráfico, y, por otra, le obligue a identificar el elemento para buscar en el menú el icono que le posibilite dibujar dicho elemento.

Pautas para la elaboración de las siguientes fases.

Como hemos observado, en un grupo numeroso de alumnos existe un conflicto entre el concepto y la figura (o imagen). A esta conclusión llegamos por los razonamientos que exponen.

No todos los alumnos que contestaron correctamente (30,5%), argumentan su afirmación. Pero los que verbalizan su pensamiento reflejan esa conexión entre el concepto y la imagen.

Así por ejemplo, explican que la primera imagen es un segmento con las siguientes afirmaciones:

- "Es una parte de la recta"
- "Está cortado"
- "Porque sale un trozo de recta y se le llama segmento"
- "Es una recta de un tamaño determinado"
- "Una línea corta"
- "Es un cacho de línea"
- "Es un trozo de recta"
- "Es una pequeña parte de una recta"
- "Es una línea recta que tiene principio y final"

- "Es un trozo de línea recta"
- "Porque se comprende de un punto a otro"
- "Línea que es corta"

Y explican que la tercera imagen es una recta por los siguientes motivos:

- "Se ve que no tiene límites y las rectas son infinitas"
- "Es una recta que se puede prolongar sin tener fin"
- "Es una línea continua sin final"
- "Es una línea que nunca acaba"
- "Es una línea continua que nunca acaba"
- "Una recta es una línea que llega siempre a su fin"
- "Es una línea recta que no tiene ni principio ni final"
- "Es una recta porque no se ve de dónde a dónde llega"
- "Línea muy larga"

Aunque la estructuración lingüística no es del todo correcta en algunos casos, podemos afirmar que reconocen los elementos básicos del plano.

En este aspecto estamos de acuerdo con el planteamiento de Fischbein (1993) y seguimos su propuesta en nuestro trabajo de elaboración de las siguientes fases de aprendizaje.

Fischben sostiene que la Geometría trata con entidades mentales (llamadas figuras geométricas) que poseen características conceptuales y figurales simultáneamente, por lo que las llama conceptos figurales. Por esta doble naturaleza, a veces surgen conflictos o tensiones internas.

Los alumnos tienen el concepto figural "recta" cuando hacen referencia a "línea" (que expresa dirección), "ausencia de límites". Y tienen el concepto figural "segmento" cuando aluden a "parte de una recta", "presencia de extremos".

Los elementos que hemos encontrado en las respuestas erróneas de los alumnos y que les han impedido identificar correctamente la recta han sido la atribución de extremos y la no-horizontalidad. Analizamos cada uno de ellos.

- No-horizontalidad. Los alumnos que no han identificado la tercera imagen como recta por el hecho de no estar horizontal, tienen un concepto figural erróneo en el que las rectas son horizontales.
  En este sentido nuestra propuesta es la utilización de software geométrico con el que los alumnos puedan manipular los objetos. Se les presentan actividades en las que deben dibujar una recta y moverla por la pantalla de manera que esté horizontal, vertical o inclinada. La ventaja del programa es que se libera del carácter estático del papel.
- Atribución de extremos. Algunos alumnos no han identificado la tercera imagen como recta porque le atribuyen como extremos los límites que le imponen los márgenes del cuadrado; sin embargo no reconocen los extremos de la primera imagen.
  En la ventana de trabajo del programa geométrico pueden dibujar una recta y observar que aunque está enmarcada en dicha ventana, si ésta se desplaza, los márgenes no cortan a la recta.

Es precisamente en la fase de explicitación donde el profesor puede corregir este error presentando a los alumnos ejemplos no intuitivos de rectas, semirrectas y segmentos en el software geométrico. Se trata simplemente de dibujar estos elementos en distintas posiciones en el plano y manipularlos en la ventana de trabajo. En este caso creemos que no sería necesario presentar no-ejemplos de estos elementos geométricos, es decir curvas, circunferencias, arcos, etc. (Tsamir, Tirosh, Levenson, 2008)

CONCLUSIONES.

- El modelo de van Hiele tiene la peculiaridad de haber surgido como investigación en la comprensión de la Geometría por parte de los estudiantes. Se caracteriza por su sencillez, pero es difícil llevarlo a la práctica pues no es fácil determinar el contenido de cada nivel y de cada fase; requiere un notorio esfuerzo por parte del profesor.
- Es un modelo que aunque es conocido en nuestro país desde hace unos veinte años, sin embargo no está implantado mayoritariamente. Hay grupos de estudio que han realizado notables aportaciones, destacando profesores de la Universidad de Valencia como Ángel Gutiérrez Rodríguez y Adela Jaime (1993) entre otros.
- En cada nivel de razonamiento, la fase de indagación es clave en la determinación de la comprensión que tienen los alumnos de ese nivel. El grado de fluidez en la verbalización de sus pensamientos, es decir, la estructuración lingüística, refleja la comprensión del alumno.
- Proponemos la utilización de software geométrico de manera que, por una parte, el alumno pueda manipular los objetos geométricos en el entorno gráfico, progresando así en la comprensión y, por otra parte, la necesidad de buscar en el menú el icono que le permita dibujar un objeto sea un medio para afianzar el reconocimiento o visualización de dichos objetos.
- Proponemos también la continua referencia por parte del profesor a ejemplos y no ejemplos, intuitivos y no intuitivos, para reconocer los elementos geométricos que se estudien y formar correctamente el concepto figural correspondiente.

REFERENCIAS

FISCHBEIN, E. (1993). *The theory of figural concepts,* Educational Studies in Mathematics, 24 (2): 139-162

JAIME PASTOR, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento,* Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

VAN HIELE, P. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría,* Tesis doctoral, Universidad Real de Utrech.

VAN HIELE, P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education,* Academic Press.

TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E. (2008). *Intuitive nonexamples: the case of triangles,* Educational Studies in Mathematics, 69: 81-95.

Estefanía Martín Barroso
Manuel Rubio Sánchez
Jaime Urquiza Fuentes (eds.)

Actas de las III Jornadas en Innovación y TIC Educativas

JITICE 2012

Número 2012-001

Boletín de la ETSII
ISSN: 2172-6620
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad Rey Juan Carlos

Parte VII: Las TIC en la Educación Secundaria Obligatoria

Elaboración de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría

Ana Belén Cabello Pardos	Ana B. Sánchez García	Ricardo López Fernández
IES Joaquín Araújo	Universidad de Salamanca	Universidad de Salamanca
C/ La Fuente 36 28944-Fuenlabrada	Facultad de Educación	Facultad de Educación
+34916000315	Pº de Canalejas 169, 37008-Salamanca	Pº de Canalejas 169, 37008-Salamanca
anabelen.cabello@educa.madrid.org	+34923294630	+34923294630
	asg@usal.es	riclop@usal.es

RESUMEN

En el presente trabajo se expone el proceso de elaboración de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría. Se detalla el análisis psicométrico de los resultados, el índice de facilidad y de discriminación de los ítems en la muestra del estudio, el coeficiente de fiabilidad de los resultados y su validez. La investigación se ha realizado apoyada en el programa estadístico SPSS.

La finalidad es aplicarlo tanto al inicio de la docencia como en su finalización. Con ello se pretende detectar los errores de comprensión en las dos fases del aprendizaje así como el grado de dificultad de los distintos conceptos para proponer una organización del currículum de 1º de ESO según el modelo de van Hiele y determinar el modo de utilización del software Geométrico para subsanar dichos errores. Y también analizar si existen diferencias significativas por sexos en el rendimiento en Geometría.

Palabras claves

Análisis psicométrico, índice de facilidad, índice de discriminación, coeficiente de fiabilidad, validez, análisis factorial, análisis de los errores de comprensión en geometría, modelo de van Hiele.

1. INTRODUCCIÓN

Durante el curso 2009/10 elaboramos un cuestionario con el fin de medir los conocimientos con los que los alumnos inician y finalizan el aprendizaje de Geometría en 1º de ESO. Pretendíamos también detectar los errores de comprensión en ambos momentos del aprendizaje, realizando además un estudio comparativo por sexos. Analizar si es posible la creación de descriptores característicos de cada uno de los niveles de van Hiele. Proponer una organización del currículum de Geometría de 1º de ESO según los niveles de van Hiele. Y determinar el modo de utilización del software Geométrico para subsanar dichos errores.

Jornadas de Innovación y TIC Educativas - JITICE'12

21-23 de Marzo del 2012, Universidad Rey Juan Carlos, Móstoles, Madrid

Este cuestionario se elaboró a partir de bibliografía relevante, teniendo en cuenta el currículum de 1º de ESO. Se trataba de una primera versión del cuestionario que debía ser aplicada y analizada. Inicialmente constaba de 96 variables y se aplicó a una muestra de 177 alumnos de dos institutos (Tabla 1). Durante el curso 2010/11 se realizó el estudio psicométrico y el análisis de los resultados. Actualmente estamos aplicando la segunda versión de dicho cuestionario con la que completaremos los objetivos propuestos.

2. ANÁLISIS PSICOMÉTRICO

En el mes de abril de 2010, antes de impartir la Geometría, aplicamos el cuestionario a los alumnos de dos institutos cercanos de la localidad de Fuenlabrada (Madrid).

2.1 Valoración del cuestionario por una comisión de expertos.

Después de aplicar la prueba, las profesoras aplicadoras actuaron como grupo de expertos para analizar su contenido y aportaron observaciones que sirvieron para eliminar algunos ítems.

2.2 Índice de facilidad de los ítems para la muestra del estudio.

Comenzamos el análisis estadístico del cuestionario analizando el índice de facilidad de cada ítem. En este apartado decidimos seguir a varios autores (Morales Vallejo, Lukas Mújika, Muñiz y Yela). [2, 3, 7]. En la bibliografía consultada se suele denominar índice de dificultad a la proporción de aciertos del ítem (tanto por ciento si multiplicamos por cien) en la muestra de alumnos que estamos utilizando. Pero, por coherencia con la fórmula, decidimos llamarlo índice de facilidad.

Este estudio, junto con la valoración de expertos, nos permitió disponer de un cuestionario de 48 ítems claros, bien redactados y con un amplio rango de índices de facilidad que otorgaban al cuestionario una calificación casi de dificultad media, lo cual era deseable para medir el aprendizaje de los alumnos.

2.3 Índice de discriminación de los ítems.

A continuación realizamos el estudio del índice de discriminación de los 48 ítems, siguiendo el criterio de los mismos autores. Obtuvimos que 32 de los 48 ítems discriminan satisfactoriamente a los alumnos. Lo cual es bastante aceptable teniendo en cuenta que es un pretest.

2.4 Estudio de la fiabilidad o consistencia interna.

Antes de presentar el estudio de la fiabilidad conviene aclarar algunas cuestiones. El concepto de fiabilidad está relacionado con el de validez, pero son distintos. La fiabilidad expresa el grado de precisión de la medida y la validez significa que el instrumento mide aquello que pretendemos medir.

Con las 48 variables calculamos la fiabilidad de los resultados del cuestionario, es decir, su consistencia interna mediante el alfa de Cronbach. Obtuvimos un valor de 0,938.

Cronbach (1960) afirma que sólo aquellos tests que tienen por lo menos un coeficiente de fiabilidad de 0,90 deberían ser usados con propósitos educativos. Nunnally (1978) propone un valor mínimo de 0,70. Webb (1983), revisando los trabajos de varios autores propone una interpretación del coeficiente de fiabilidad que mostramos en la Tabla 2. [2, 5]

Según este estudio concluimos que tenemos unos resultados con una fiabilidad muy alta.

2.5 Algunas cuestiones sobre la validez.

Como explican algunos autores (Muñiz, 2003 y Mújika, 1998), con los datos del test se pretenden hacer ciertas inferencias. La validez se refiere a la adecuación, significación y utilidad de dichas inferencias. Es decir, lo que se validan son las inferencias. [2,7]

Tradicionalmente se define la validez como el grado en que un test mide lo que pretende medir. Pero esta definición hay que matizarla y precisarla en validez de contenido, de criterio y de constructo.

2.6 Validez de contenido.

En nuestro caso, la validez de contenido está garantizada por el estudio realizado por la comisión de expertos y por el análisis exploratorio explicado anteriormente, que han tenido como resultado los datos de 48 variables en 177 alumnos.

2.7 Validez de criterio.

Este tipo de validez es el más utilizado. Hace referencia a la relación que existe entre las puntuaciones obtenidas en el instrumento y otro criterio que previamente ha demostrado lo que el test pretende medir.

En esta primera muestra de alumnos no lo incluimos, pero en la segunda aplicación del cuestionario lo hemos tenido en cuenta adoptando como criterio la nota obtenida por los alumnos en la primera evaluación. La validez de criterio en la segunda aplicación nos hace sospechar lo análogo en la primera aplicación.

2.8 Validez de constructo.

Es el nivel más importante de validación. Consiste en determinar el grado en que la prueba mide el rasgo (constructo) teórico al que se refiere. Es un proceso complejo que suele incluir varios procedimientos. Generalmente se suele realizar un análisis factorial pues analiza la estructura del constructo que estamos pretendiendo medir. [4]

Obtenemos 13 factores que explican el 73,516% de la varianza. Hallamos la matriz de componentes rotados, con rotación Varimax, para ver más claramente la estructura. La tabla que nos proporciona el programa estadístico es demasiado amplia como para incluirla en el artículo y, por tanto, la omitimos.

Según este estudio podemos definir los factores:

Factor 1: Clasificación de triángulos según sus lados y sus ángulos

Factor 2: Reconocimiento de polígonos (difíciles)

Factor 3: Identificación de la posición relativa de dos ángulos

Factor 4: Determinación de los ángulos de triángulos semejantes y obtención de un ángulo conociendo los otros dos

Factor 5: Identificación de los tipos de ángulos

Factor 6: Reconocimiento de los elementos de la circunferencia

Factor 7: Identificación de las formas planas (difíciles) relacionadas con el círculo

Factor 8: Determinación del área de un polígono

Factor 9: Reconocimiento de los elementos de un polígono regular

Factor 10: Reconocimiento de polígonos (fáciles)

Factor 11: Identificación de la posición relativa de dos rectas en el plano

Factor 12: Identificación de la mediatriz y de la bisectriz

Factor 13: Identificación de las formas planas (fáciles) relacionadas con el círculo

Esta estructura clara y lógica es lo que nos permite afirmar la validez de constructo.

2.9 Estudio de la muestra.

Después de exponer el análisis psicométrico, parece oportuno presentar en este momento el estudio de la muestra, pues lo anterior clarifica algunas cuestiones.

La primera cuestión que se planteó al inicio de la investigación era ¿cuántos alumnos necesitamos? Y como indica el profesor Morales Vallejo hay que añadir ¿para qué? [6]

En este sentido la bibliografía es abundante y los autores sostienen diversos criterios. Nosotros nos centramos en lo concerniente a la investigación en Educación. La pregunta es ¿cuántos alumnos necesitamos para construir y analizar un instrumento de medición y llevar a cabo un análisis de ítems, de fiabilidad y factorial?

Para determinar este número adoptamos la síntesis y el criterio del profesor Morales Vallejo y asumimos que nuestra muestra es suficiente.

Nunnally (1978) propone que haya al menos unos cinco sujetos por ítem para hacer bien el análisis de los ítems.

Pero la experiencia muestra que se pueden construir instrumentos con muestras muy pequeñas (los alumnos disponibles en las clases) y utilizar varias muestras para acumular los análisis y verificar los ítems que tienen una discriminación aceptable.

Para hacer el análisis factorial la recomendación habitual es utilizar una muestra diez veces mayor que el número de ítems (Nunnally, 1978). Otros autores consideran que es suficiente una muestra menor (dos o tres veces el número de ítems) con tal de que el número de sujetos no sea muy inferior a 200.

En este punto aceptamos que la muestra de 177 alumnos es suficiente para nuestro estudio ya que el número de ítems es 48, con lo cual nos aproximamos a las condiciones requeridas (lo ideal sería tener 48 x 5 = 240 alumnos). Es un número no muy inferior a 200. Y sobre todo asumimos que es la muestra que tenemos y el estudio nos proporciona la información que necesitamos para nuestro instituto.

3. ANÁLISIS DEL CONTENIDO

3.1 Modelo de van Hiele

Para exponer con más claridad la investigación, presentamos brevemente el modelo de van Hiele. [1]

La teoría conocida como modelo de van Hiele, tiene su origen en Holanda, en 1957. Pierre y Dina van Hiele leen sus tesis doctorales y desarrollan sucesivas investigaciones hasta elaborar un modelo en el que se explica cómo el alumno va construyendo el pensamiento geométrico recorriendo cinco niveles, guiado por el profesor a través de cinco fases de aprendizaje (en cada nivel).
El modelo, por tanto, consta de dos aspectos, uno descriptivo, en el que se especifican los niveles de pensamiento geométrico que va alcanzando el alumno; y otro prescriptivo, en el que se establecen las fases de aprendizaje a través de la cuales el profesor guía al alumno para adquirir un determinado nivel de conocimiento.

El aspecto descriptivo se ordena en cinco niveles de pensamiento.
Nivel 0. Nivel básico, de reconocimiento o visualización. Los objetos de este nivel son los elementos básicos.
Nivel 1. Análisis. Los objetos son las propiedades de los elementos básicos.
Nivel 2. Clasificación, deducción informal u orden. Se estudian los enunciados que relacionan las propiedades.
Nivel 3. Deducción. Los objetos son las ordenaciones parciales de los enunciados.
Nivel 4. Rigor. Los objetos son propiedades que analizan las ordenaciones parciales.
En Secundaria se llega, como mucho, al nivel 2.

El aspecto prescriptivo se compone de cinco fases de aprendizaje.
Fase 1. Indagación.
El profesor establece un diálogo con los alumnos para conocer el sentido que dan a las palabras, preparando el terreno conceptual.
Fase 2. Orientación dirigida.
El profesor organiza actividades sencillas, de un solo paso, para que los alumnos tomen conciencia de lo que se está estudiando y se familiaricen con las estructuras.
Fase 3. Explicitación.
Los alumnos construyen sobre experiencias previas.
Fase 4. Orientación libre.
Los alumnos encuentran su modo propio de resolver las tareas.
Fase 5. Integración.
Los alumnos integran en un nuevo saber todo lo aprendido. Consta de actividades de refuerzo y ampliación.

3.2 Planteamiento de la investigación

El modelo de van Hiele, en su doble aspecto descriptivo y prescriptivo, establece los niveles de pensamiento que va alcanzando el alumno guiado por el profesor a través de las distintas fases de aprendizaje. La brillantez de la propuesta radica en su sencillez y contrasta con cierta dificultad, en la práctica, para establecer el contenido concreto de cada fase de aprendizaje dentro de un nivel determinado referido a un tema específico del currículum.
Con el cuestionario pretendemos:
1. Detectar los errores de comprensión de los alumnos en ambos momentos del aprendizaje.

2. Analizar si es posible la creación de descriptores característicos de cada uno de los niveles de van Hiele.

3. Proponer una organización del currículum de Geometría de 1º de ESO según los niveles de van Hiele.

4. Determinar si existen diferencias significativas en el rendimiento y en la adquisición de los niveles de van Hiele realizando la comparación por sexos.

3.3 Un ejemplo de la investigación: la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad

Podríamos pensar que los alumnos cuando comienzan 1º de ESO con 12 años, tienen claro el concepto de paralelismo y perpendicularidad. En el cuestionario antes mencionado, se les pedía identificar rectas paralelas, secantes no perpendiculares y secantes perpendiculares. Esta pregunta, que consta de cuatro ítems, se presenta en la Figura 1.

En el primer ítem se presentan dos rectas secantes no perpendiculares.

En el segundo, dos rectas paralelas con un pequeño giro respecto de los ejes de coordenadas, es decir, ni horizontales ni verticales.

En el tercero dos rectas perpendiculares ligeramente giradas, y en el cuarto dos rectas perpendiculares siguiendo la dirección de los ejes de coordenadas.

Se trata de averiguar si los alumnos reconocen las rectas paralelas aunque no estén en posición horizontal ni vertical. Y no sólo si diferencian las rectas perpendiculares de las secantes no perpendiculares sino si reconocen la perpendicularidad sin tener en cuenta el giro que puedan presentar las rectas.

Analizamos los índices de facilidad de cada una de las variables en la muestra del estudio.

El ítem 2a (rectas no perpendiculares) tiene un índice de facilidad, IF, de 0,71. Les resulta muy fácil reconocer las rectas paralelas (IF de 2b = 0,93). La variable 2c tiene una dificultad media (0,48) y finalmente la variable 2d resulta fácil con un índice de 0,61.

A la vista de estos resultados se trata de determinar si los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, que nosotros reconocemos visualmente (es decir, para nosotros pertenecen al nivel 0), son objetos del nivel 0 o del nivel 1 para los alumnos de 12 años.

De momento, conjeturamos que el concepto de paralelismo pertenece al nivel básico, de reconocimiento o visualización. Los alumnos reconocen dos rectas paralelas aunque no sean horizontales. Sin embargo, el concepto de perpendicularidad pertenece al nivel 1. Los alumnos tienen que analizar para llegar a la conclusión.

En este sentido la utilización de un software Geométrico, por su carácter dinámico, puede ayudar a la comprensión del concepto de perpendicularidad, por citar el caso que estamos ejemplificando.

Finalmente añadimos que en la comprensión de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad no hay diferencias significativas por razón de sexos, en la muestra de nuestro estudio, como se muestra en la Tabla 3.

4. FIGURAS

Tabla 1. Muestra de alumnos

Instituto	Nº alumnos	chicas	chicos	nc
IES 1	81	41	40	0
IES 2	96	49	45	2
	177	90	85	2

Tabla 2. Interpretación del coeficiente alfa de Cronbach

Valor del coeficiente	Significado
0,80 o menos	Pobre
Entre 0,81 y 0,84	Moderado
Entre 0,85 y 0,90	Normal
Entre 0,91 y 0,93	Bueno
Entre 0,94 y 0,99	Casi perfecto

Tabla 3. ANOVA Perpendicularidad y paralelismo (sexos)

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
2a	Inter-grupos	,062	2	,031	,044	,957
	Intra-grupos	123,508	174	,710		
	Total	123,571	176			
2 b	Inter-grupos	,011	2	,006	,044	,957
	Intra-grupos	22,712	174	,131		
	Total	22,723	176			
2c	Inter-grupos	1,276	2	,638	,636	,531
	Intra-grupos	174,565	174	1,003		
	Total	175,842	176			
2 d	Inter-grupos	1,206	2	,603	,509	,602
	Intra-grupos	206,353	174	1,186		
	Total	207,559	176			

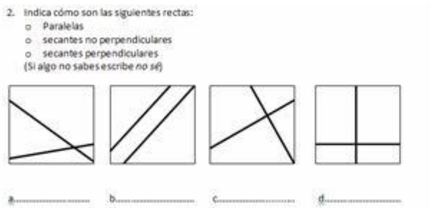


Figura 1. Paralelismo y perpendicularidad.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos expuesto el proceso de elaboración de un cuestionario de medición del rendimiento en Geometría de los alumnos de 1º de ESO. Se aplicó a una muestra de 177 alumnos y hemos validado los resultados obtenidos.

Con estos datos estamos investigando los errores de comprensión en Geometría que tienen los alumnos y buscando la mejor manera de corregirlos mediante la aplicación del modelo de van Hiele y la ayuda del software geométrico.

Estamos comprobando que no resulta fácil determinar el contenido de cada uno de los niveles de van Hiele ni establecer los descriptores para cada uno de dichos niveles.

6. REFERENCIAS

[1] Jaime Pastor, A. Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Tesis doctoral, Universidad de Valencia, 1993

[2] Lukas Mújika, J.F. Análisis de ítems y de test con iteman. Universidad del País Vasco, 1998

[3] Morales Vallejo, P. Análisis de ítems en las pruebas objetivas. [Disponible en:]

<http://www.upcomillas.es/personal/peter/otrosdocumentos/AnalisisItemsPruebasObjetivas.pdf> Versión 28 de diciembre de 2011

[4] Morales Vallejo, P. Análisis factorial en la construcción e interpretación de tests, escalas y cuestionarios. [Disponible en:]

<http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/AnalisisFactorial.pdf >Versión 8 de enero de 2011

[5] Morales Vallejo, P. La fiabilidad de los tests y escalas. [Disponible en:]

http://www.upcomillas.es/personal/peter/estadisticabasica/Fiabilidad.pdf Versión 18 de septiembre de 2007

[6] Morales Vallejo, P. Tamaño necesario de la muestra: ¿Cuántos sujetos necesitamos? [Disponible en:]

<http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Tama%F1oMuestra.pdf> Versión 23 de octubre de 2011

[7] Muñiz, J. Teoría clásica de los tests. Ed. Psicología Pirámide, 2003.