TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MAESTRO EDUCACIÓN PRIMARIA MENCIÓN MÚSICA (2011-12)

ESCUELA UNIVERSITARIA DE EDUCACIÓN Y TURISMO DE ÁVILA

TRABAJO FIN DE GRADO EN MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA MENCIÓN MÚSICA

MÚSICA Y MATEMÁTICAS

AUTOR: ROSA MARINA BLÁZQUEZ LOZANO

TUTOR: CONCEPCIÓN PEDRERO MUÑOZ

Ávila, 21 de junio de 2012

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

Durante muchos siglos se ha considerado que las matemáticas y la música tienen cierta similitud y comúnmente se dice que tienen al menos cierta relación.

Ambas tienen algo de mágico, comenta Tiburcio Solis (2002), son tan abstractas que parecen pertenecer a otro mundo y sin embargo tienen gran poder en este mundo, la música afecta a la escucha y las matemáticas tienen múltiples aplicaciones prácticas. Una parte de las matemáticas estudia los números, sus patrones y formas y estos elementos son inherentes a la ciencia, la composición y la ejecución de la música. La música difícilmente existiría sin una base matemática que la apoye y cómo en realidad una obra musical, si es hermosa y compensada, podría ser considerada un trabajo matemático bien resuelto.

La música cambia su textura y carácter según el lugar y la época. Puede ser cristalina o densa, sentimental o explosiva. Por su parte, las matemáticas son directas, nunca alteran su carácter.

La música se crea a partir de algo físico, instrumentos de todo tipo de materiales que la producen. Las matemáticas son, sobre todo, abstracciones.

Y siguiendo con las respuestas a las preguntas que plantea Tiburcio Solis (2002) entre la similitud y relación de estas dos disciplinas, la música está cargada de emociones, es alegre o triste, suave o agresiva, puede ser espiritual, estética, religiosa pero en matemáticas no podemos hablar de un teorema “triste” o de una demostración “agresiva”.

Por la mezcla entre lo terrenal y lo celestial, lo universal y lo particular, ambas disciplinas han tenido un poder místico desde la Antigüedad. Hasta la fecha el aspecto mágico y ritualista se mantiene tanto para introducirse en la lectura de una partitura así como para poder seguir la demostración de un teorema.

Y en ellas hay algo de genial; en la notación que es capaz de indicarnos tiempos, ritmos y altura de sonidos en el caso de la música, o una numeración tan sofisticada como la arábiga y notaciones tan desarrolladas que dan estructura y sentido a los conceptos.

2. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

En la enseñanza, se puede observar, una considerable desconexión entre sus diversas asignaturas; y es que entraña dificultad abordar distintas teorías científicas desde diferentes ópticas.

Si nos referimos en particular a las matemáticas, es probable que una de las razones de esa relativa aversión existente hacia ellas sea el hecho de que tradicionalmente hayan sido objeto de una enseñanza en la que se muestra como una disciplina fría y cerrada, y sin ninguna relación con otras parcelas del conocimiento. Según Peralta, J. (1995), la idea que suele tenerse sobre ellas, es que se alejan del mundo y de los demás, como que ha quedado reflejado en frases como la del psicólogo y físico francés Le Bon:

> *«La matemática sólo sirve para el desarrollo del gusto de los razonamientos sutiles. Los más eminentes matemáticos no saben con frecuencia conducirse en la vida y se desorientan frente a las menores dificultades»*

Y es que en su enseñanza únicamente se acostumbra a poner énfasis en aquellos desarrollos internos de la materia que marcan los programas vigentes, procurándose hacer con eficacia pero sin hacer relaciones de interdisciplinaridad como es su presencia en el arte, la música y la literatura.

La relación de la música con las matemáticas, establecida ya por los pitagóricos, no es sin embargo suficientemente conocida a pesar de opiniones que recoge Peralta Coronado J.(1998) y en el (2007) de filósofos, matemáticos y científicos como:

«*La música es un ejercicio de aritmética secreta*, *y el que se entrega a ella ignora que maneja números» (Leibniz)*
«La geometría es una música inmóvil» (Goethe)
«La música es un arte terriblemente euclidiano» (Alejo Carpentier)
«tal vez sea la música la matemática del sentido y la matemática la música de la razón» (Puig Adam).

3. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LA MÚSICA

3.1. LOS ORÍGENES DE LA MÚSICA Y LAS MATEMÁTICAS

La música, escribe el músico y director Pérez Perazzo (2002), desde sus orígenes, ha sido y es un permanente proceso de comunicación entre los seres humanos. La música nace de la necesidad de protegerse de ciertos fenómenos naturales, de alejar los espíritus malignos, de atraer la ayuda de los dioses, de honrarlos y festejar sus fiestas, y de celebrar el cambio de las estaciones. Las finalidades mágicas, rituales, ceremoniales y religiosas de la música pueden comprobarse a través de múltiples fuentes de documentación y continúan en los sentimientos religiosos y en las ceremonias y ritos del hombre de nuestros tiempos.

Para Pérez Perazzo (2002), el hombre en sí mismo, es el primero, y más complejo de los instrumentos musicales.

- Se comporta como instrumento de cuerdas, con sus cuerdas vocales, la boca como caja de resonancia y sus numerosos músculos y tendones, como participantes directos en la producción de la voz y de los sonidos guturales.
- Al mismo tiempo, es un instrumento de viento, con sus pulmones como grandes fuelles y el sistema respiratorio, en su conjunto, que se encargara de expulsar con fuerza las columnas de aire, que producirán sonidos.
- También, es un instrumento de percusión, sometido al constante regulador de su ritmo, el corazón, y con posibilidades de producir con su cuerpo, efectos de palmas, chasquidos y todo tipo de sonidos percusivos.

Con todas esas facultades el hombre, con su cerebro e inteligencia crea, produce, organiza, coordina y reproduce los más variados ritmos, líneas melódicas y acordes. A lo largo de la historia, el hombre inventa y diseña instrumentos que son perfeccionadores de sus propias facultades musicales.

Desde los tiempos más remotos el hombre se sirvió de su gran instrumento: la VOZ HUMANA y de los sonidos obtenidos por el choque repetido de varios cuerpos sólidos, a partir de sus propias palmadas (troncos huecos, piedras, semillas secas, conchas marinas…), para comunicarse con sus semejantes y expresar por medio del sonido la alegría y el dolor de vivir, el deseo de amar y de rezar; y siempre ha sentido la necesidad del canto y de la danza.

Nuestros antepasados nos dejaron plasmadas en imágenes las evidencias y pruebas de la actividad musical ligada a ceremoniales, mágicos y rituales; en grabados murales del Período Paleolítico. Un ejemplo son los grabados pictóricos existentes en la Gruta de Trois-Frères, ubicada en L`Ariège, al sur de Francia, cuya antigüedad se ha fijado en más de 40.000 años. También nos aportan informaciones relevantes, los numerosos vasos, utensilios y pinturas procedentes de pueblos y culturas orientales milenarias, que muestran la íntima relación existente entre la música, la danza, los ritos y la magia.

Por otro lado, las matemáticas nacen de la necesidad práctica de registrar el paso del tiempo y las observaciones del cielo y consistieron, en un principio, solamente en números y conteos. Existía la necesidad de llevar un registro de las cosechas, del ganado y de las operaciones comerciales. Así se desarrollaron signos y palabras para los números. Como menciona Ifrah, G. (1992):

> "*La historia de las matemáticas es la historia de las necesidades y preocupaciones de unos grupos sociales que intentan enumerar sus miembros, sus bienes, sus cautivos, fechar la fundación de sus ciudades, victorias... utilizando todo tipo de medios*".

Los primeros matemáticos de los que tenemos conocimiento son los griegos Tales de Mileto y Pitágoras.

3.2. LOS PITAGÓRICOS.

Los términos música y matemáticas proceden respectivamente de los vocablos griegos musiké, “de las musas”, y mathema, que significa “aquello que se aprende”. Se dice que Pitágoras acuñó la palabra matemáticas.

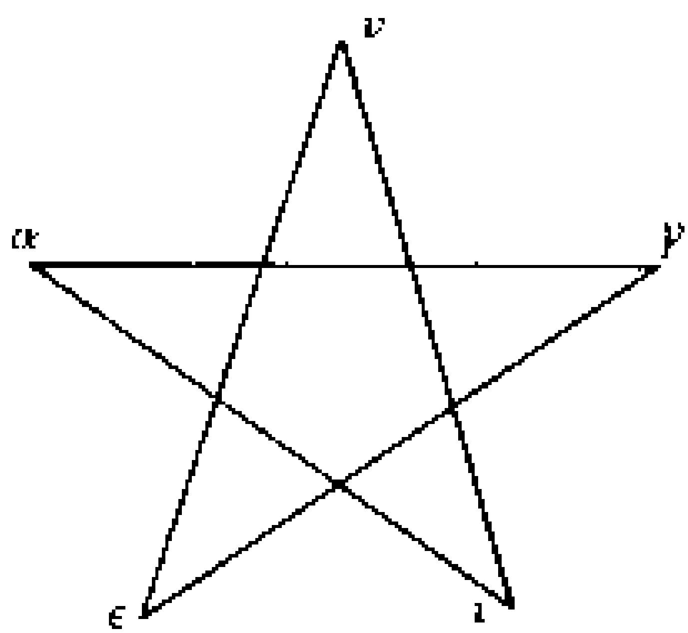
Según el matemático y escritor Guzmán Ozámiz (1986), el nacimiento y la pervivencia del pitagorismo es uno de los fenómenos más interesantes en la historia de la ciencia y de la cultura en general. Surgió, se desarrolló y se expandió como un modo de vida religioso. Su armazón intelectual consistió en una visión del universo como un cosmos, en contraposición al caos, es decir como un todo ordenado y organizado de acuerdo con leyes asequibles a la razón humana. El mismo impulso religioso conducía hacia la búsqueda y contemplación de la armonía intelectual implantada en este universo como paradigma de conducta humana y como camino y método de elevación espiritual, en búsqueda de las raíces y fuentes de la naturaleza.

Los pitagóricos atribuyen todos los descubrimientos de la Escuela Pitagórica a la figura de Pitágoras, como dice Guthrie, W.K.C. (1999) en su estudio de los filósofos presocráticos. Los biógrafos pitagóricos Jámbrico, Porfirio, Diógenes Laercio, Focio y C. Herodoto presentan un Pitágoras mítico como Zalmoxis, medio héroe, medio dios. También Aristóteles, en los fragmentos que se conservan, dibuja un Pitágoras de leyenda.

Escribe Guzmaz Ozamiz (1986) que Jámblico explica la existencia en la primitiva comunidad pitagórica de dos clases de miembros, los matemáticos (mathematikoi, conocedores) es decir los iniciados a quienes Pitágoras comunicaba los conocimientos científicos a su disposición y los acusmáticos (akousmatikoi, oidores) que participaban de los conocimientos y creencias, de los principios morales, ritos y prescripciones específicas de la hermandad, si bien sin conocer en profundidad las razones de su credo y su proceder.

Esta distinción resultó ser de enorme trascendencia en la evolución de la comunidad pitagórica. Los acusmáticos se constituyeron en custodios de las enseñanzas de Pitágoras y su preocupación fue que éstas se conservaran tal como Pitágoras las había transmitido. Los matemáticos se consideraban continuadores del espíritu de Pitágoras, basado en el conocimiento científico, y que esos conocimientos eran susceptible de perfeccionamiento. Esta diversidad de pareceres conduciría a la división de la comunidad con la desaparición de Pitágoras.

De acuerdo con las investigaciones realizadas por Kurt von Fritz (1954), los pitagóricos primitivos estaban profundamente familiarizados con el pentágono regular. Según parece el emblema que les servía para reconocimiento mutuo era el pentagrama, es decir la estrella de cinco puntas formada por las diagonales de un pentágono regular. En sus cinco vértices solían colocar las letras de la palabra ***ugieia***, salud. En esta figura encontraban armonías geométricas y numéricas. Como que todos los ángulos que aparecen en la figura son múltiplos enteros del más pequeño de entre ellos (72º=2x36º, 108º=3x36º, 144º=4x36º, 180º=5x36º) y la proporción en que se encuentran los segmentos.



3.3. MÚSICA DE LAS ESFERAS: DE PITÁGORAS A KEPLER

Siguiendo a Guzmán Ozámiz (1986), la música de las esferas o armonía de las esferas de la enseñanza pitagórica primitiva era mucho más profunda que la mera conjetura de la consonancia de las notas que los astros producen en su movimiento.

Miyara, F. (2005) recoge en sus apuntes las explicaciones de Aristóteles (De Caelo, Libro II.9), en tácita referencia a la escuela pitagórica, que:

> *"algunos pensadores suponen que el movimiento de los cuerpos celestes debe producir un sonido, dado que en la Tierra el movimiento de cuerpos de mucho menor tamaño produce dicho efecto. Afirman, también, que cuando el sol, la luna y las estrellas, tan grandes y en tal cantidad, se mueven tan rápidamente ¿cómo podrían no producir un sonido inmensamente grande? A partir de este argumento y de la observación de que sus velocidades, medidas por sus distancias, guardan igual proporción que las consonancias musicales, aseveran que el sonido proveniente del movimiento circular de las estrellas corresponde a una armonía."*

Según Miyara, F. (2005), se trata de la denominada música de las esferas o armonía de las esferas, comentada también por Platón en La República. Al parecer, el hecho de que dicho sonido no se escuchara era resuelto por Pitágoras mediante el argumento de que al ser un sonido permanente desde el mismo instante del nacimiento, no era distinguible del silencio. Aristóteles ridiculiza esta teoría sin proponer una más creíble.

Guzmán Ozámiz (1986) explica que para Pitágoras la visión fundamental consistió en que el universo es un *cosmos*, un todo ordenado y armoniosamente conjuntado. El destino del hombre consiste en considerarse a sí mismo como una pieza de este cosmos, descubrir el lugar propio que le está asignado y mantener en sí y en su entorno, en lo que está de su parte, la armonía que es debida de acuerdo con el orden natural de las cosas.

La armonía cósmica, continúa Guzmán Ozámiz (1986), entendida en este sentido fue probablemente una audaz conclusión la que Pitágoras llegó a través de la observación de la congruencia de sus consideraciones científicas sobre números, figuras, notas musicales, con las ideas orientales sobre el alma, los astros y la divinidad. Los números constituían el armazón inteligible de las formas en la aritmética figurativa de los pitagóricos, construida por ellos mediante piedras (psefoi, cálculos). Al mismo tiempo los números desvelaban las proporciones que regían las consonancias musicales. La música era a la vez entre los pitagóricos el símbolo de la armonía del cosmos y un medio para lograr el equilibrio interno en el espíritu mismo del hombre.

La teoría de la música de las esferas sobrevivió casi 20 siglos hasta la época de Kepler, quien se haría eco de la misma a raíz de sus descubrimientos en astronomía. Peralta, J (2003) escribe que Kepler intentó mostrar el secreto del universo en una síntesis general de la geometría, la música, la astrología, la astronomía y la epistemología. Reconoció que los planetas giraban alrededor del Sol y sugirió que los planetas producían diferentes sonidos por los diferentes grados de velocidad a la que giraban. Creía que si se conocía la masa y la velocidad de un objeto que giraba se podría calcular su sonido fundamental. Desarrolló sonidos que asoció a los planetas entonces conocidos.

Según Kepler, recoge González Urbaneja (2008), el movimiento de los planetas debe estar regido por relaciones numéricas sencillas, intuiciones que tras una laboriosa investigación plasmará en su famosa obra *Harmonices Mundi*, de 1619, una especie de C*antar de los Cantares* matemático dedicado al «*gran armonista de la creación*».

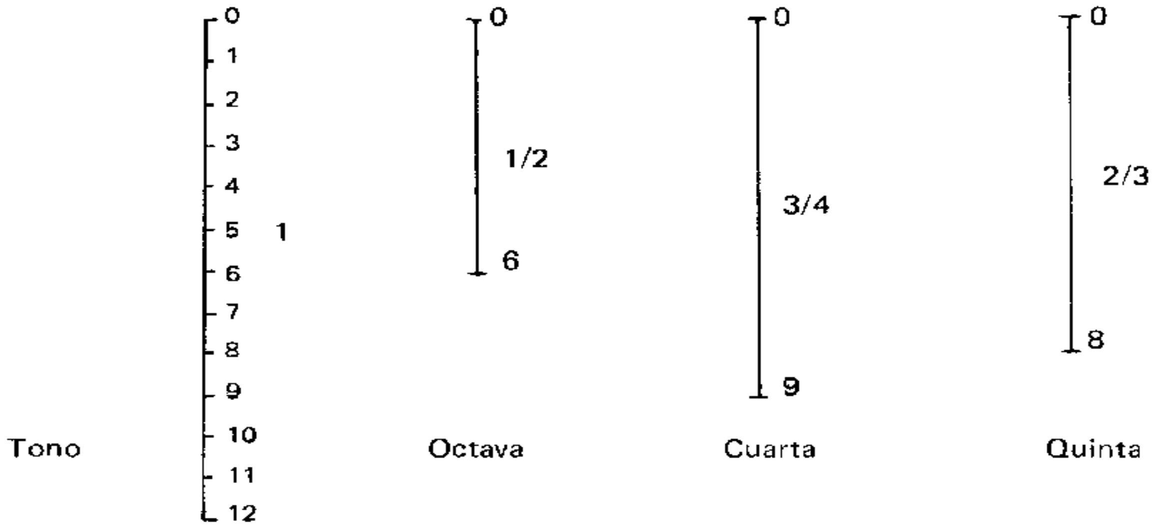
La doctrina de la Armonía de las Esferas ha tenido su influencia sobre la música sinfónica, la crítica musical ve reminiscencias pitagóricas en algunas composiciones como *La Creación* de Haydn, *Así habló Zaratustra* de R. Strauss y *La Consagración de la Primavera* de Stravinski.

3.4. MONOCORDIO

Guzmán Ozámiz (1986) en su sección de la Armonía científica de los pitagóricos, explica que existen varias versiones sobre el modo concreto como Pitágoras llegó a desentrañar las relaciones numéricas entre los sonidos consonantes, es decir aquellos cuya producción simultánea origina una sensación agradable en nuestro oído: el tono, la octava, la quinta y la cuarta. Nicómaco de Gerasa, Gaudencio y Boecio hablan de la observación de Pitágoras de los diferentes sonidos producidos en el yunque del herrero por martillos de diferentes pesos. Un martillo cuyo peso era como 6 producía el tono, otro con peso 12 producía la octava, otro con peso 9 la quinta y otro de peso 8 la cuarta.

Diógenes Laercio propone a Pitágoras como inventor del monocorde, no como un instrumento musical, sino más bien un aparato científico para verificar la teoría musical utilizado por los pitagóricos. Según Guzmán Ozámiz (1986), Gaudencio explica que Pitágoras comprobó y cuantificó su intuición genial de la conexión de la armonía musical con los números; estaba influenciado por sus conocimientos sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica) y el misticismo de los números naturales. Pitágoras tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental, el tono. Hizo señales en la cuerda, que la dividían en doce partes iguales.

Pisó la cuerda en el 6 y entonces observó que se producía la octava más agudo que el original (Do al Do superior). Pisó luego en el 9 y resultaba la cuarta. Al pisar el 8 se obtenía la quinta (la distancia de Do a Sol). A estos intervalos, cuerdas con longitudes de razones 1:2 (los extremos 1 y 2), 2:3 (media armónica de 1 y 2), y 3:4 (media aritmética de 1 y 2), los llamó *diapasón, diapente y diatesarón*, en la actualidad octava, quinta y cuarta. Los sonidos producidos al pisar en otros puntos resultaban discordes o al menos no tan acordes como los anteriores. Los números 1, 2, 3, 4, la *Tetraktys*, determinaban con sus proporciones relativas los sonidos más consonantes.



Los números 12, 9, 8, 6 constituyeron en el pitagorismo posterior otra cuaterna muy interesante por sus propiedades aritméticas. Se verifica:

$$9 = \frac{12 + 6}{2} \qquad \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) \qquad \frac{12}{9} = \frac{8}{6}$$

Así 9 es media aritmética entre 12 y 6; 8 es media armónica entre 12 y 6. Y se verifica 12 x 6=9 x 8, propiedad general de la media aritmética y armónica.

Como explica Guzmán Ozámiz (1986), los pitagóricos no sabían nada de ondas sonoras y de frecuencias. De hecho, la regla que establece que la frecuencia está relacionada con la longitud de la cuerda no fue formulada hasta el siglo XVII, cuando el franciscano fray Marin Mersenne definió algunas reglas sobre la frecuencia de una cuerda vibrando.

La razón por la cual encontramos a estos intervalos más agradables que otros tiene que ver con la física de la cuerda tocada. Cuando una cuerda de 36 cm se rasga, no sólo se produce una onda de 36 cm, sino que además se forman dos ondas de 18 cm, tres de 12, cuatro de 9, y así sucesivamente. La cuerda vibra en mitades, tercios, cuartos, etcétera. Y cada vibración subsidiaria produce “armónicos”, estas longitudes de onda producen una secuencia de armónicos, 1/2, 1/3, 1/4... de la longitud de la cuerda. Los sonidos son más agudos y mucho más suaves que el sonido de la cuerda completa (llamada "la fundamental") y generalmente son los que hacen que los instrumentos musicales suenen diferentes entre sí. Ya que Do y Sol, a una distancia de quinta, comparten muchos de los mismos armónicos, estos sonidos se mezclan produciendo un resultado agradable.

Siguiendo las explicaciones de Guzmán Ozámiz (1986) el astrónomo Tolomeo, siglo II d.C. escribió el tratado de teoría musical llamado *"Harmónicos"*. Pensaba que las leyes matemáticas subyacían tanto en los sistemas musicales como en los cuerpos celestes, y que ciertos modos y aun ciertas notas correspondían a planetas específicos, las distancias entre estos y sus movimientos. La idea había sido propuesta por Platón en el mito de la música de las esferas, que es la música no escuchada producida por la revolución de los planetas. En su obra, fundamenta mediante axiomas la armonía pitagórica:

1. A los sonidos musicales corresponden números. A los del mismo tono el mismo número, a los de distinto tono números distintos.
2. Los números correspondientes a sonidos consonantes se comportan entre sí como el numerador y el denominador de las fracciones más perfectas a/b, que son aquéllas en que el numerador es múltiplo del denominador, a = nb, o bien aquéllas en que a sobrepasa a b en una parte de b, es decir a=b+b/n, y esta relación es tanto más perfecta cuanto más simple, es decir cuanto más pequeño sea n.
3. A la octava, como más perfecta, debe corresponder la relación 2/1.

De esta forma resulta por pura deducción lógica que a la quinta le debe corresponder 3/2 y a la cuarta 4/3.

3.5. EL QUADRIVIUM

También los fundamentos matemáticos de la música, estudiados y enumerados por los pitagóricos, constituyeron todos los manuales de música que se elaboraron posteriormente. Habla González Urbaneja (2008) que Boecio en el siglo VI d.C. escribió el *"Tratado sobre la música"*, base de la teoría musical elaborada durante el Medievo en el Occidente Cristiano. Boecio consideraba la música una de las ciencias que permitían al hombre alcanzar la sabiduría. Por este motivo denominó quadrivium (cuádruple vía hacia la sabiduría) al conjunto de las cuatro ciencias matemáticas por excelencia, comprendía la aritmética *"estudio de los números en reposo"*, la geometría *"las magnitudes en reposo"*, la música *"los números en movimiento"* y la astronomía *"las magnitudes en movimiento"*.

Esta división se mantuvo durante la Edad Media por lo que era necesario el estudio de ambas disciplinas y no es de extrañar que quien se instruía en matemáticas estudiara la teoría de la música lo cual no implica que fueran músicos ejecutantes o compositores. El quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía) con la adición del Trivium (gramática, retórica y dialéctica), se convirtieron en las siete artes liberales, pero la posición de la música como un subconjunto de matemáticas permaneció constante durante la Edad Media.

Las concepciones estrechas del medioevo junto con las estrictas doctrinas de la iglesia, el sistema educativo, la falta de aceptación de los números irracionales (los inconmensurables) crearon una atmósfera que impedía el desarrollo de la música puesto que siempre se pretendía respetar esas relaciones. Por lo tanto, la música estaba considerada una parte de las matemáticas.

3.6. INTERVALOS Y ESCALAS MUSICALES

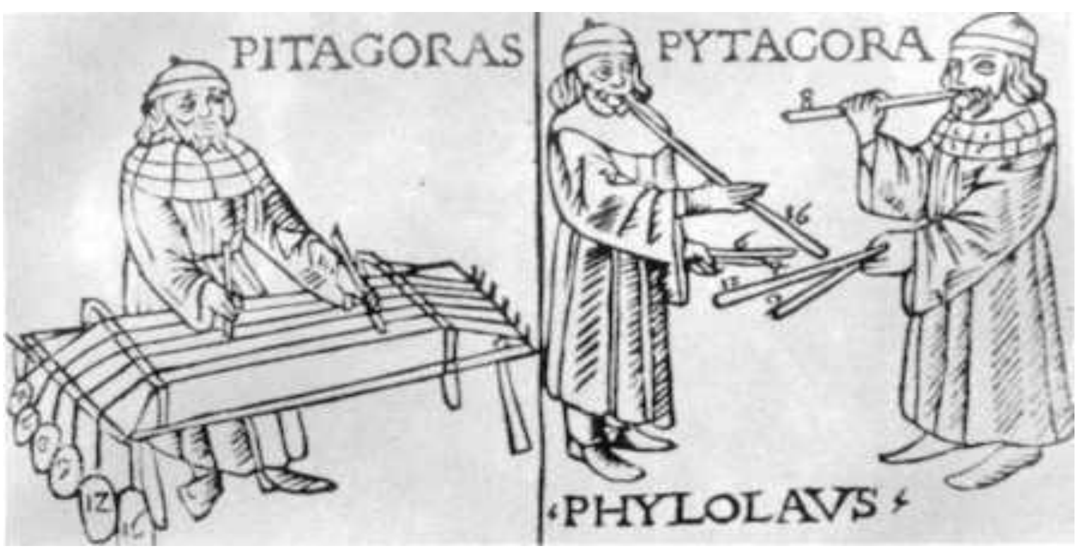
Este apartado se ha centrado en las enseñanzas de los trabajos de investigación sobre la Acústica de la Música del Catedrático de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Merino de la Fuente (2008) que define a la música, en principio, como el arte de combinar los sonidos en una sucesión temporal. La variedad de tonos que nuestro oído es capaz de percibir es muy elevada, estando acotada tan sólo por los límites de sensibilidad de nuestro sentido auditivo. Es preciso elegir ciertas frecuencias o tonos para disponer de un conjunto de sonidos que permitan la construcción de las melodías, es decir, el músico necesita de las notas de la escala para componer y ejecutar la música.

Una escala es una serie de sonidos que van desde la frecuencia más baja a la más alta siguiendo intervalos de frecuencia definidos. La construcción de la escala musical se realiza a partir de la existencia de la octava. Esta unidad natural se manifiesta espontáneamente, y de forma evidente al observar:

- un hombre y una mujer pueden cantar al "unísono" la misma melodía, si bien el primero lo hace emitiendo tonos más graves que la segunda.
- una flauta al ser soplada con fuerza, produce un sonido que se parece mucho al de origen, pero es más agudo e igual al de otra flauta de longitud mitad.
- este mismo efecto se produce al comparar el sonido de una cuerda que vibra en toda su extensión, con el de la misma cuerda, reducida también a su mitad.

3.6.1. INTERVALOS

Como ya he comentado, se atribuye a Pitágoras la invención de las restantes unidades musicales, también llamadas intervalos consonantes, pues al sonar simultáneamente dos notas separadas por algunos de estos intervalos, la abundancia de batidos es mínima y su efecto sobre el oído es agradable, de ahí que se llamen consonantes (ver el punto 3.4.)



Ejercicios musicales de Pitágoras. Xilografía de la Theorica Musicae, publicada en 1492. Imagen extraída del *Diccionario de Autores.*

Explica Merino de la Fuente (2008) que el resultado de la superposición de dos sonidos simultáneos puede ser consonante o disonante. La experiencia enseña que la sensación producida en el oído no depende de los valores absolutos de las frecuencias de los sonidos, sino de la relación entre ellas, por ello, se ha denominado intervalo al cociente de ambas frecuencias, tomando como numerador la mayor de ellas y como denominador la correspondiente a la tónica o fundamental.

En la actualidad las notas musicales no se definen a partir de la longitud del objeto vibrante, sino a partir de la *frecuencia de la vibración de la onda sonora* emitida por dicho objeto. La frecuencia y la longitud de una onda sonora se encuentran vinculadas por medio de la ecuación:

$$f = v/l$$

donde:

f: es la frecuencia expresada en *Hertz.*

v: es la velocidad del sonido en *metros/segundos*.

l: es la longitud de la onda en *metros.*

Dado tres sonidos *S1, S2 y S3,* de frecuencias *f1, f2 y f3,* en términos musicales se considera que el intervalo existente entre *S3 y S1* es la suma de los intervalos formados por *S2 y S1*, y por *S3 y S2*. Ahora bien, la relación que cumplen realmente esos intervalos es, matemáticamente:

$$f3/f1 = f3/f2 \times f2/f1$$

tomando logaritmos resulta:

$$\log f3/f1 = \log f3/f2 + \log f2/f1$$

Para conservar el lenguaje de los músicos se debería de tomar como medida de un intervalo, el logaritmo de la relación entre las frecuencias. Se conviene en utilizar logaritmos en base 10 y, para no operar con decimales, se multiplican por 1000. El intervalo unidad se llama *Savart.* El oído humano es incapaz de apreciar como diferentes dos notas cuya diferencia sea inferior al *Savat.*

Dos sonidos de la misma frecuencia tendrán de intervalo la unidad, se dice que están al unísono (musicalmente el intervalo es nulo, porque su valor es 1000 x log1 = 0) y una persona no es capaz de diferenciarlos. Si el intervalo es igual a 2 se tratará de una octava, siendo su valor en *Savart:*

$$1000 \times \log 2 = 301$$

Hay que tener en cuenta que cuando dos o más sonidos son percibidos por el oído sucesiva o simultáneamente, hay en esa percepción una cualidad que no cambia cuando, variando de igual manera las frecuencias de los sonidos, no se altera la relación entre ellas, es decir, sus intervalos no varían.

Por tanto, dice Merino de la Fuente (2008), en música quedan definidas todas las notas por sus intervalos, luego para determinar sus frecuencias basta fijar una de ellas. En el Congreso Técnico Internacional de Acústica (1953), se adoptó para el LA_4 una frecuencia de 440 Hz.

El concepto de consonancia ha evolucionada a lo largo de la historia. En su libro Merino de la Fuente (2008) cita al matemáticos Euler, que en 1739, desarrolló una teoría de consonancia basada en la ley pitagórica, entre más pequeños sean los números que expresan la relación de vibración de dos notas, éstas serán más consonantes. Al físico Tyndall (1820-1893) que llego a la conclusión de que cuanto más simple sea la relación de frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman. A Helmholtz (1821-1894) que explicó la consonancia y disonancia fijándose exclusivamente en la ausencia o no de batidos, que podrían darse entre los sonidos fundamentales o entre algunos de sus armónicos. Y los estudios de Békésy y Plomp, sobre la existencia de batidos que pueden crear una sensación desagradable, pero no en todas las ocasiones. De tal manera, que si la frecuencia de un batido es baja, el oído aprecia simplemente un trémolo, no una disonancia. Por el contrario, dos sonidos cuyas frecuencias difieran lo suficiente como para no producir pulsaciones audibles, pueden crear, al sonar juntos, una sensación de aspereza. Al campo de frecuencias dentro del que se perciben la sonoridad áspera y los batidos se denomina banda crítica.

3.6.2. ESCALAS MUSICALES

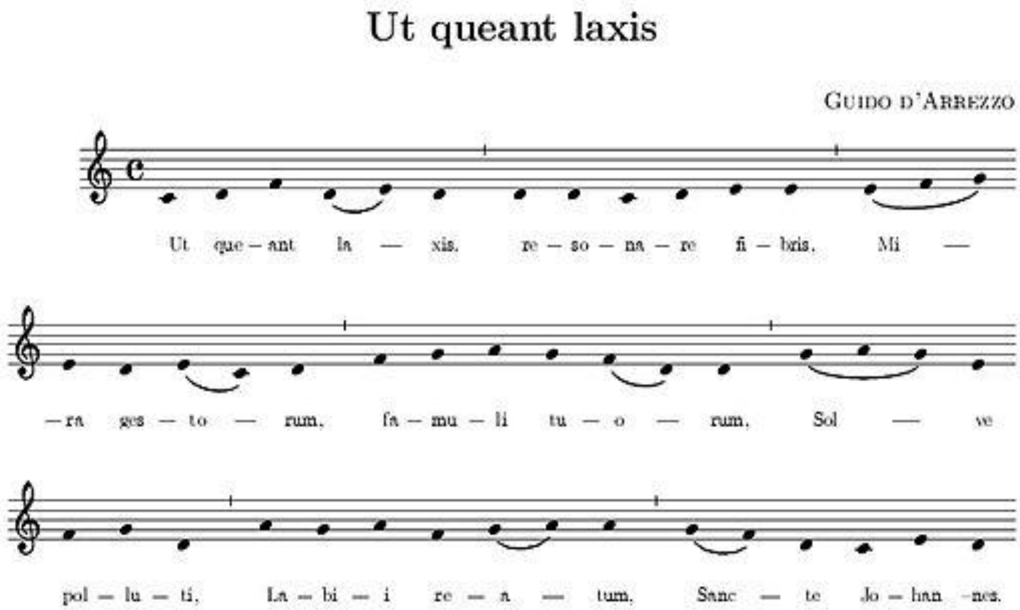
Continuando con Merino de la Fuente (2008), en música es necesario disponer de un número limitado de sonidos (notas), elegidos de entre las infinitas frecuencias, que han de cumplir la doble condición: por un lado la de formar intervalos sencillos con una de ellas, libremente elegida y denominada tónica y por otro la de que las relaciones de frecuencia entre dos cualesquiera sean también las más sencillas posibles. A esta sucesión de sonidos se le llama escala musical o gama.

La escala musical está formada por la repetición ilimitada de la unidad natural por excelencia: la octava. En la práctica, los límites de la escala están condicionados por la sensibilidad del oído, que es nula por debajo de 20 Hz y por encima de 3500 Hz.

El número de notas que componen la octava ha variado según las diversas culturas, pero cabe destacar entre otras:

a) La escala pentafónica, característica de la cultura china, así como de otras culturas exóticas, incluso algunas europeas.
b) La hepafónica, también llamada diatónica o natural, utilizada desde la Edad Media en todo el mundo occidental.
c) La dodecafónica o cromática, que no es sino una ampliación de la anterior que proporciona doce notas dentro de la octava.

Las denominaciones DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI de las notas que componen la escala diatónica, son las habituales en la notación musical latina, escribe Merino de la Fuente (2008) y fueron establecidas por el benedictino Guido D´Arezzo (990-1058), a quien se atribuye la invención del actual sistema de solfeo. El dio nombre a cada nota a partir de la primera sílaba de su himno a San Juan Bautista.



La notación musical basada en el empleo del pentagrama ha sufrido transformaciones a lo largo de la historia.

En la práctica no son suficientes los siete sonidos de la escala natural, pues con frecuencia es necesario modificar el tono de una melodía, es decir, tomar como nota fundamental o tónica una distinta del DO, de modo que a partir de ella, subsista la misma serie de intervalos que define la gama. Para ello es necesario intercalar nuevas notas o alteraciones, que son:

- Sostenidos (#): son las alteraciones que aumentan la frecuencia de un sonido.
- Bemoles (b): son las alteraciones que disminuyen la frecuencia de un sonido.

3.6.3.MODELOS MATEMÁTICOS DE AFINACIÓN DE LA ESCALA DIATÓNICA

Como explica Merino de la Fuente (2008), las escalas europeas contienen siete notas sin alteración, no existiendo en rigor ninguna ley fundamental inmutable que justifique la desigualdad de intervalos existente entre un sonido y otro de la escala. Sea cual fuere el método a seguir para la elección de los intervalos que han de formar las siete notas, prima por encima de todo el criterio de la máxima consonancia.

3.6.3.1. LA ESCALA PITAGÓRICA

Los experimentos de Pitágoras con el monocordio llevaron a un método de afinación con intervalos en razón de enteros conocido como la afinación pitagórica. La escala producida por esta afinación se llamó escala pitagórica diatónica y fue usada durante muchos años en el mundo occidental.

La construcción de la escala musical mediante el sistema de afinación pitagórica parte del axioma que obliga a cualquier intervalo a expresarse como una combinación de un número mayor o menor de quintas perfectas. Partiendo de una nota base se obtienen las demás notas de una escala diatónica mayor encadenando hasta seis quintas consecutivas por encima y una por debajo, lo que da lugar a las siete notas de la escala.

Si comenzamos atribuyendo a Do el valor 1, a su quinta que es Sol le corresponderá 3/2; la quinta de Sol es Re' (Re de la siguiente octava), que tendrá asignado el valor $(3/2)^2$ = 9/4; la quinta de Re' es La', de valor $(3/2)^3$ = 278; la quinta de La' es Mi" (Mi de la octava siguiente a la anterior), que le corresponderá $(3/2)^4$ = 81/16; y la quinta de Mi" es Si", de valor $(3/2)^5$ = 243/32. Se tienen, pues, Do: 1, Sol: 3/2, Re: (9/4)/2 = 9/8, La: (27/8)/2 = 27/16, Mi: (81/16)/4 = 81/64, Si: (243/32)/4 = 243/128. Falta únicamente Fa, que puede obtenerse de la octava anterior a la de partida razonando así: como la quinta de Fa de la octava anterior es Do, tendrá asignado el valor 2/3, y Fa de nuestra octava será 4/3.

Fa ⟵*Do* ⟶Sol ⟶Re ⟶La ⟶Mi ⟶Si

Tabla: De frecuencias con respecto a la frecuencia del Do y relaciones de frecuencia entre los sonidos de la escala pitagórica

	DO	**RE**	**MI**	**FA**	**SOL**	**LA**	**SI**	**DO´**
fn	*f*	*9/8 f*	*81/64 f*	*4/3 f*	*3/2 f*	*27/16 f*	*243/128 f*	*2 f*
fn/fn-1	*9/8*	*9/8*	*256/243*	*9/8*	*9/8*	*9/8*	*256/243*	

Esto proporciona una estructura en la cual hay dos tipos de intervalos:

$$9/8 = 1,125$$

$$256/243 = 1,05349794238683….$$

estos se denominan tono (T) y hemitono (h). Es de notar que un intervalo formado por dos hemitonos es menor que un tono

$$(256/243) \times (256/243) = 1,10985791461329…$$

Se tiene, entonces, una estructura de escala del tipo:

T T h T T T h

compuesta por cinco tonos y dos hemitonos: 5T y 2h, y se repite cíclicamente en las octavas superiores e inferiores.

DO T RE T MI h FA T SOL T LA T SI h DO

Se observa que la distribución de tonos y hemitonos es simétrica respecto de la nota RE:

T h T T T h T T h T T T h T

RE T MI h FA T SOL T LA T SI h DO T RE T MI h FA T SOL T LA T SI h DO T RE

es decir, que la distribución de tonos y de semitonos es similar tanto si se asciende como si se desciende en la escala musical, tomando como punto de partida a la nota RE. Por este motivo, durante la Edad Media los clérigos componían sus piezas religiosos partiendo de esta nota.

La estructura tonal del intervalo de quinta es siempre de tres tonos y un hemitono: 3T y 1h. Sin embargo, como consecuencia de la peculiar distribución tonal de la octava, encontramos que el intervalo de cuarta puede tener una de las siguientes composiciones tonales:

- Intervalo de cuarta perfecta: 2T y 1h (no siempre se verifica entre las notas de la octava, sino también entre los siguientes pares de notas: DO-FA; RE-SOL; MI-LA; SOL-DO; LA-RE; SI-MI.
- Intervalo de cuarta aumentada o trítono 3T, entre el par de notas: FA-SI.

3.6.3.2. LA ESCALA DE ZARLINO.

Recibe también los nombres de escala de Aristógenes, escala de los físicos y escala de la justa entonada.

Este procedimiento para la construcción de la escala, consiste en elegir los sonidos de la gama diatónica de manera que los intervalos formados por cada sonido con la tónica, sean aquellos que da la serie de los armónicos.

La escala se genera por encadenamiento de 3 quintas, generando las notas: Fa ⟵*Do* ⟶Sol ⟶Re. Las tres notas que faltan se logran tomando las terceras mayores perfectas sobre las tres primeras notas: La ⟶Mi ⟶Si. Luego se procede igual que en la escala de Pitágoras, subiendo o bajando la cantidad de octavas que haga falta para que todos los sonidos se encuadren dentro de una misma octava.

Tabla: De frecuencias con respecto a la frecuencia del Do y relaciones de frecuencia entre los sonidos de la escala de Zarlino.

	DO	**RE**	**MI**	**FA**	**SOL**	**LA**	**SI**	**DO´**
fn	*f*	*9/8 f*	*5/4 f*	*4/3 f*	*3/2 f*	*5/3 f*	*15/8 f*	*2 f*
fn/fn-1	*9/8*	*10/9*	*16/15*	*9/8*	*10/9*	*9/8*	*16/15*	

Que la tercera mayor debía corresponder a una relación 5/4 fue propuesto por *Didymus* en el siglo I AC, aunque entonces no era reconocida como una consonancia.

Se observa que la estructura de la escala es más compleja que la de la escala pitagórica, ya que no hay un solo tono sino dos, denominados *tono mayor* (T) y *tono menor* (t). En cambio, se simplifica el intervalo más pequeño, que pasa a denominarse *semitono* (s):

T t s T t T s

La sucesión de un tono mayor y un tono menor forman una tercera mayor exacta, y si se les agrega un semitono, se obtiene una cuarta. Sin embargo, no todos los intervalos son perfectos. En efecto, la quinta Re-La corresponde a una proporción 40/27 = 1,481481..., que difiere de la quinta justa en un una coma pitagórica, es decir, en un 1,25%.

Por otra parte, el cociente entre las relaciones de frecuencia correspondientes a un tono mayor y un tono menor proporciona otro pequeño intervalo cuyo valor es:

$$9/8 : 10/8 = 81/80$$

Dicho intervalo se llama coma y se considera como el más pequeño que puede percibirse en la práctica musical, siendo apreciado sólo por oídos muy ejercitados. Por este motivo a los tonos mayor y menor se les da indistintamente el nombre de tono, quedando así formada la escala por dos tonos, un semitono mayor, tres tonos y un semitono mayor.

Las escalas de los armónicos y de las quintas son las que aseguran para los distintos intervalos la máxima consonancia posible. Esto significa que cuando suenan simultáneamente dos notas separadas por un intervalo de quinta, cuarta menor, tercera mayor o menor (intervalos consonantes) la sensación producida tiene el mayor nivel de consonancia.

Existe un grave problema en el momento que se quiera hacer uso de estas escalas formadas por intervalos cuyas razones de frecuencias son números enteros. Se puede comprobar mediante un dispositivo informático ascendiendo y descendiendo con estos intervalos perfectos estaríamos desviándonos continuamente de cualquier escala fija. Esta dificultad puede salvarse si el pasaje se interpreta con instrumentos de entonación libre (violín, viola, trombón, voz humana, etc.), puesto que pueden producir sonidos de cualquier frecuencia. No ocurre lo mismo con instrumentos de entonación fija (piano, órgano, arpa, etc.), puesto que están afinados para determinadas frecuencias solamente.

3.6.3.3. LA ESCALA TEMPERADA

La escala temperada es una fórmula transacción entre las escalas de Aristógenes y de Pitágoras por una parte, y la comodidad y las posibilidades manuales de los músicos por otra, lo que permite salvar las dificultades que ofrecen ambas escalas de intervalos perfectos.

Desde siempre, las dificultades emanadas del empleo de los intervalos perfectos a la hora de hacer música eran sobradamente conocidas desde la Edad Media, escribe Merino de la Fuente (2008), y se tiene constancia de que en el siglo XV el organista Bartolomé Ramos de Pareja y más tarde, en el siglo XVI, Francisco de Salinas afinaban sus instrumentos por el procedimiento de las quintas desafinadas ligeramente a la baja y por igual todas ellas, de forma que diluían el efecto adverso que de otra forma se concentraba en la temida "quinta del lobo". La ligera desafinación a penas se notaba y el efecto general conseguido era bueno.

Más tarde, ya en pleno siglo XVII, Juan Sebastian Bach fue un decidido impulsor de este modo de afinación que entre otras ventajas, permite interpretar con un mismo instrumento de tecla todo tipo de composiciones, cualquiera que sea su tonalidad, con un grado de afinación satisfactorio. Como colofón al empeño, compuso la colección "El clave bien Temperado" que incluye veinticuatro melodías en todas las tonalidades y modos posibles.

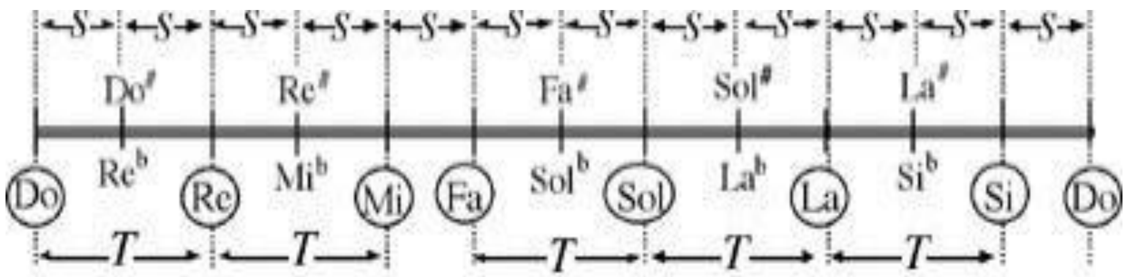
Tras varias tentativas, continua Merino de la Fuente (2008), el procedimiento adoptado actualmente para la afinación de la escala Temperada o Templada es el del alemán Ernest Chladni. Consiste en establecer un intervalo constante, llamado semitono, que constituye la unida mínima de la escala cromática temperada. Su valor es:

$$2^{1/12} = 1{,}0594631.$$

En la escala temperada, la octava se divide en doce intervalos en los cuales la razón de frecuencias es:

$$1, f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8, f^9, f^{10}, f^{11}, f^{12}$$

de lo que se deduce $f^{12} = 2$, o $f = 2^{1/12}$ de donde $f = \sqrt[12]{2} = 1,059...$



Si bien la escala temperada no contiene intervalos perfectos, resulta más regular frente a las de Aristógenes y Pitágoras. La afinación temperada da una excelente aproximación a los intervalos perfectos, siendo esta aproximación la misma en todas las tonalidades.

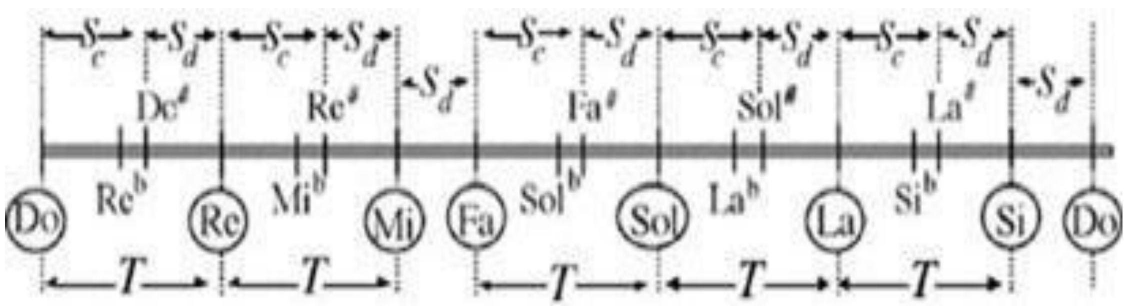
En definitiva, con la afinación temperada se consigue que todas las tonalidades estén afinadas (o si se prefiere, desafinadas) por igual.

Tabla: De los valores asignados a cada nota y sus frecuencias

NOTA	**VALOR EN [1,2]**	**FRECUENCIA (Hz)**
DO	1	261,6256
DO# = RE *b*	1,059463094	277,1826
RE	1,122462048	293,6648
RE# = MI *b*	1,189207115	311,127
MI	1,25992105	329,6276
FA	1,334839854	349,2282
FA# = SOL *b*	1,414213562	369,9944
SOL	1,498307077	391,9954
SOL# = LA *b*	1,5874011	415,3047
LA	1,68179283	440
LA# = SI *b*	1,781797436	466,1638
SI	1,887748625	493,8833

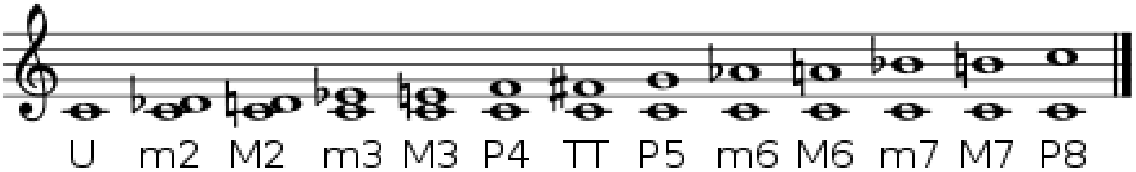
En nuestros días también se utiliza el denominado temperamento de Holden. La Gran Enciclopedia Larousse, nos muestra a William Holder (1614-1697) como teórico musical ingles, que publicó un tratado sobre las bases y los principios de la armonía (1693) en el que proponía una división de la octava en 53 partes, notas o comas, de esta forma un tono contiene 9 comas, el semitono cromático 5 y el diatónico 4.

El sistema utilizado por Holder no es más que una adaptación del sistema Pitagórico y, de hecho, cuando se compara ambos sistemas dan resultados prácticamente iguales. En el temperamento de Holder, si nos quedamos con las notas más habituales, 7 notas naturales, 5 notas con sostenido y 5 notas con un bemol, la distribución que se obtiene es prácticamente la misma que en la afinación pitagórica:



El mayor inconveniente práctico de este sistema es que 53 notas por octava resulta un número excesivamente grande.

La teoría musical considera tonales los intervalos de primera –unísono-, cuarta, quinta y octava y modales los de segunda, tercera, sexta y séptima. Los intervalos tonales tienen un solo valor justo; los modales tienen un valor mayor y otro menor, propios de la modalidad en la que se encuentran. Todos los intervalos pueden ser, demás, aumentados o disminuidos.



Intervalos armónicos, mostrados sobre el pentagrama a partir de la nota *do*.

Significado de la nomenclatura utilizada y distancia de cada intervalo en tonos y semitonos:

U = unísono (dos notas iguales)

m2 = de segunda menor (1st)

M2 = de segunda mayor (1T)

m3 = de tercera menor (1T 1st)

M3 = de tercera mayor (2T)

P4 = de cuarta justa o perfecta (2T 1st)

TT = de cuarta aumentada o trítono (2T 2st)

P5 = de quinta justa o perfecta (3T 1st)

m6 = de sexta menor (3T 2st)

M6 = de sexta mayor (4T 1st)

m7 = de séptima menor (4T 2st)

M7 = de séptima mayor (5T 1st)

P8 = de octava justa o perfecta (5T 2st)

Distancia en tonos												
Intervalo	**1/2**	**1**	**1-1/2**	**2**	**2-1/2**	**3**	**3-1/2**	**4**	**4-1/2**	**5**	**5-1/2**	**6**
2ª	2m	2M	2A									
3ª		3d	3m	3M	3A							
4ª				4d	4J	4A						
5ª						5d	5J	5A				
6ª							6d	6m	6M	6A		
7ª									7d	7m	7M	7A
8ª											8d	8J

- Horizontalmente se indica la distancia entre los sonidos.
- Verticalmente se indican los intervalos.

3.7. LA GEOMETRÍA EN LA MÚSICA

Una transformación geométrica en el plano hace corresponder a una figura otra figura de igual forma y tamaño. Una homotecia en el plano hace corresponder a una figura otra de igual forma pero de distinto tamaño, tanto mayor como menor. (La homotecia podemos definirla como un cambio de escala).

Las transformaciones se pueden llamar movimientos en el plano y son de tres tipos:

- Traslaciones: es un movimiento directo, se conserva la forma, el tamaño y la orientación pero la figura está desplazada de lugar según una dirección dada (horizontales y verticales),
- Giros (Rotaciones): es un movimiento directo, conserva la orientación. La figura resultante está girada según a un ángulo de giro: 90º, 180º….
- Simetrías axiales (Reflexiones): respecto a un eje, es un movimiento inverso, no conservan la orientación.

Otro movimiento más sería un deslizamiento que es una composición de una simetría axial con una traslación en la dirección del eje de simetría

Las transformaciones geométricas que en matemáticas conservan la forma de una figura, en música se corresponden con transformaciones que conservan los intervalos (en el caso de los movimientos) o que conservan la proporción entre ellos (en el caso de las homotecias). En casi cualquier composición se pueden encontrar ejemplos de este tipo de transformaciones. Esto no quiere decir que el compositor sea consciente de estar realizando una “transformación geométrica”, pero su oído y su experiencia le indican que conservar los intervalos o sus proporciones es una excelente forma de familiarizar al oyente con el motivo musical sin que este tenga que ser repetido exactamente.

- Simetrías en la música: Reflexiones (4 ejemplos)
  - Simetría en la altura de la melodía por medio de un eje vertical: es una reflexión horizontal

- Simetría vertical de la altura de un acorde: La simetría se realiza respecto de la nota LA
- Simetría del ritmo en el tiempo:
  A tempo - *accel* - *decel* - *a tempo*
- Simetría de la intensidad del sonido en el tiempo
  Piano - *Forte* – *Piano*

- Ejemplos de una rotación y otro tipo de reflexión (*inversión*).
  - Giro o rotación respecto a SI. Se mantienen los intervalos en orden inversa por ser un giro:

RE - MIb - RE • SOL - FA# - SOL

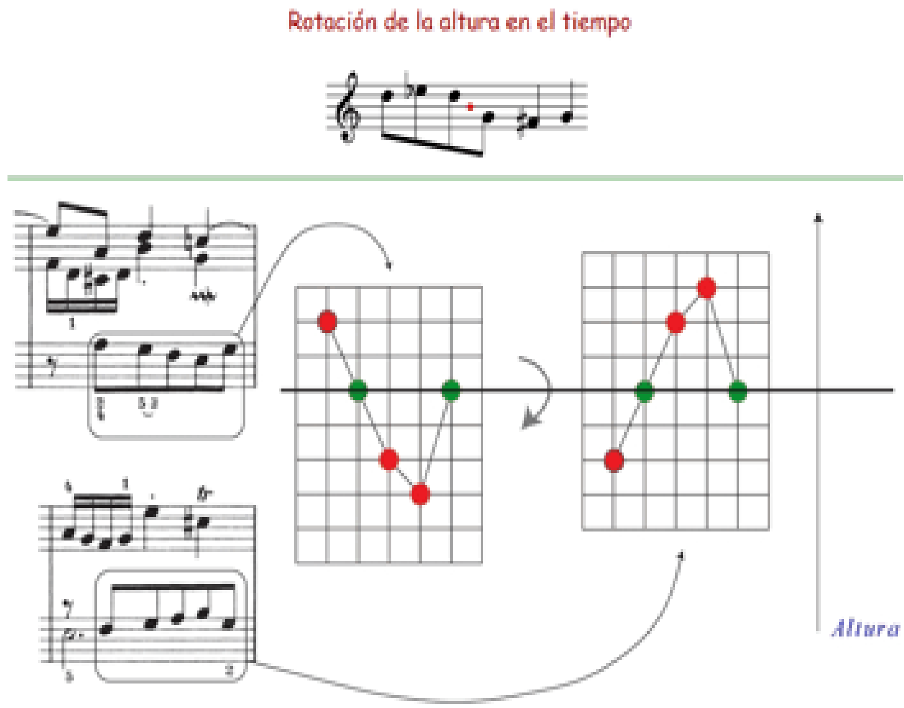
1/2↑ 1/2↓ GIRO 1/2↓ 1/2↑

  - Reflexión (simetría respecto a la nota SOL, en clave de FA).Se mantienen los intervalos en el mismo orden pero con distinto sentido por ser una reflexión:

LA - SOL - FA - MI – SOL FA - SOL - LA - SIb* - SOL

1↓ 1↓ 1/2↓ 1 ½ ↑ 1↑ 1↑ 1/2↑ 1 ½ ↓

*Nota: Fuga nº 6 en Re menor de J. S. Bach (el SI es bemol)



Ejemplo de **inversión melódica** en la *Fuga 6, en Re Menor*, del *Clave bien temperado* (1722) de Johann Sebastian **Bach**.

- Ejemplos de una reflexión desplazada y dos tipos de reflexión con homotecia:
  - Un desplazamiento con simetría horizontal

    DO MI SOL MI → DO MI SOL MI → DO MI SOL MI

    (una traslación 3 veces)

    DO MI SOL MI DO MI SOL MI DO MI SOL MI DO

    (una reflexión respecto a la nota SOL)
  - Reflexión con homotecia en la duración(disminución del tempo)

    DO RE MI FA SOL FA MI RE DO

    (negras) (corcheas)
  - Reflexión con homotecia en la compresión del sonido

    FA SOL LA SI DO# DO*b* SI SI*b* LA

    1↑ 1↑ 1↑ 1↑ 1/2↓ 1/2↓ 1/2↓ 1/2↓

3.8. SERIE FIBONACCI

Los números de la llamada serie de Fibonacci (sobrenombre de Leonardo de Pisa - en abreviación de filius Bonacci, 1170-1250), escribe Lluis-Puebla (1998), son elementos de una serie infinita. El primer número de esta serie es 1, y cada número subsecuente es la suma de los dos anteriores. Como el primero es 1 y antes no hay nada, el segundo es 1, el tercero 1+1, el cuarto es 1+2, y así sucesivamente, el 21= 13 + 8; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55, es decir, la sucesión dada por la fórmula $u_1=u_2=1$ y $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ para n mayor o igual que 2:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ,55, 89, 144, 233, 377,... ...

Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos: 1 : 1 = 1; 2 : 1 = 2; 3 : 2 = 1´5; 5 : 3 = 1´66666666; 8 : 5 = 1´6; …. Al tomar más términos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos al número de oro: 1,61803....

En su trabajo Tiburcio Solis (2002) explica que la razón entre dos elementos subyacentes de la serie lleva a converger al decimal 0.618..., y sus recíprocos al decimal

1.61803... La proporción de estas razones, sea en fracción o en decimal, es considerada por muchos como atractiva a la vista, balanceada y bella, y es nombrada proporción (sección) áurea. 13 : 8 = 1´625; 21 :13 = 1´6153846....; 34 :21 = 1´6190476....; 55 :34 = 1´6176471....; 89 :55 = 1´6181818....

Por su atractiva estética la proporción áurea se usa ampliamente en el arte y en la arquitectura. Muchos elementos de la naturaleza se desarrollan en esta proporción, las vueltas del caracol, los cuernos del cimarrón, la forma en que nacen las ramas y hojas de ciertas plantas, etcétera. Las superficies se dividen para obtener la proporción áurea, dando lugar a una composición bella y balanceada. Los números de la serie se utilizan porque es una manera fácil de lograr la proporción áurea. Pero no sólo es agradable a la vista sino al oído.

Un violín, por ejemplo, puede separar hasta un tercio de tono. El oído humano sano y entrenado distingue hasta trescientos sonidos por octava. Como un ejemplo conocido y no discutido tenemos a la escala atemperada o templada. Esta es una escala logarítmica. Se creó muy poco tiempo después de que los logaritmos pasaran al patrimonio de la matemática. La octava atemperada está basada en e*ste número irracional* tiene infinitos decimales, pero la afinación se hace redondeando las cifras de las frecuencias a uno o dos decimales. De cualquier manera, el error tonal total cometido no es superior al doceavo de tono y el oído humano no lo nota. La uniformidad de la separación de las notas y la coincidencia de bemoles y sostenidos permite comenzar una melodía por cualquier nota sin que se produzcan las desagradables disonancias de la escala diatónica y la escala física. De la misma manera se actúa con la distribución de tiempos o la altura de los tonos usando el número áureo; con una aproximación racional que resulte práctica.

No se sabe si el uso de la serie es intencional o, de manera intuitiva, tal vez el compositor la usa sin saber, sólo porque se oye bien. Por ejemplo, Beethoven no sólo la emplea en el tema de su Quinta Sinfonía, sino además en la forma en que incluye este tema en el transcurso de la obra, separado por un número de compases que pertenece a la serie.

Otro ejemplo lo encontramos en la sonata nº 1 de Mozart para piano subdivide su primer movimiento en 38 y 62 compases. El cociente, 62/38 = 1,6315, difiere en menos de un 1% de la proporción áurea. Lo mismo puede decirse de su segundo movimiento, que con 28 y 46 compases en sus dos secciones principales arrojan una proporción 46/28 = 1,6428. La sonata nº 2 subdivide el primer movimiento en 56 y 88 compases, cuyo cociente es 88/56 = 1,5714, también bastante próximo a la relación áurea.

3.9. LA COMPOSICIÓN

Para Tiburcio Solis (2002), otro aspecto interesante de la relación entre música y matemáticas es la composición. Una composición musical consiste en secuencias de una gran cantidad de sonidos que transcurren en el tiempo, esto nos permite utilizar las técnicas de la teoría de las probabilidades y la estadística que posibilita asociar a las características físicas del sonido a un conjunto de variables aleatorias ligadas a un conjunto de funciones de densidad de probabilidad.

Algunas composiciones son el resultado de reglas y conceptos como probabilidad aplicada a juegos de azar, modelos estadísticos, el movimiento browniano, el ruido blanco o música estocástica entre otros. También se puede generar música por medio de computadoras programadas con ciertas reglas.

Continuando con Tiburcio Solis (2002), uno de los primeros intentos data de alrededor del año 1026, cuando Guido de Arezzo desarrolló una técnica para componer una melodía asociando sonidos a las vocales de un texto de tal forma que la melodía variaba de acuerdo al contenido de vocales del texto. Abundan también los procedimientos de composiciones basados en proporciones. Un exponente de este método fue Guillaume Dufay (1400-1474), quien derivó el tempo de sus motetes de una catedral florentina utilizando la antes mencionada sección áurea (1:1,618). También fue de los primeros en utilizar las transformaciones geométricas en forma deliberada en su música. El uso de secuencias rítmicas como una técnica formal se utilizó entre los años 1300 - 1450 y el músico G. Machault lo utilizó en algunos motetes.

3.9.1. JUEGO DE DATOS DE W. A. MOZART

Tiburcio Solis (2002) nos explica, como Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) compuso la obra *Musikalisches Würfelspiel*, que es una creación artística en la que el ingenio del músico lo llevó a componer no una pieza para piano sino un generador de *valses*. Esto es, la obra no contiene una partitura para un pequeño *vals* de 16 compases sino que tiene un sistema que, apoyado en el azar, puede generar un número *mucho* muy grande de valses diferentes de 16 compases cada uno.

Se deduce que haciendo la observación de que la distribución probabilística para la suma de las caras de dos dados lanzados al azar, suma = 2 sólo cuando en ambas caras aparece el número 1, esto es (1,1) y la suma = 3 cuando (1,2) o bien (2,1), y así las demás, como la suma = 9 cuando: (3,6) o (4,5) o (5,4) o (6,3). El número total de pares (x,y) = 36.

Dados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Las referidas probabilidades de la suma son:

Prob (2)	=	1/36	=	**Prob (12)**
Prob (3)	=	2/36	=	**Prob (11)**
Prob (4)	=	3/36	=	**Prob (10)**
Prob (5)	=	4/36	=	**Prob (9)**
Prob (6)	=	5/36	=	**Prob (8)**
Prob (7)	=	6/36	=	**Prob (7)**

Por tanto, sigue Tiburcio Solis (2002) este experimento depende de dos variables aleatorias una asociada al primer dado y otra asociada al segundo. Mozart en 1777, usó el lanzamiento de dados para hacer un vals de 16 compases que tituló *"Juego de dados musical para escribir valses con ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición"*

Cada vals consta de dos partes un minueto y un trío y cada uno de ellos tendrá 16 compases. Mozart compone 176 compases para los minuetos y 96 compases para los tríos. Estos compases están sueltos. El juego descrito por Mozart se basa en componer cada vals escogiendo algunos de estos compases.

(Tiburcio Solis (2002), transcripción de 48 compases de los 176)

Para hacer esta elección Mozart nos dejó dos tablas. La primera es para escribir los minuetos y la segunda tabla es para componer los tríos. Las columnas están numeradas en romano, son 16, e indican el número de orden del compás. Las filas en la primera tabla se numeran de 2 a 12, que indican los 11 resultados posibles de lanzar dos dados. Las filas en la segunda tabla se numeran de 1 a 6 e indican los resultados posibles de lanzar un dado.

Las tablas son las siguientes:

Minueto																
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Cada minueto de Mozart está formado de dos partes. Primero se interpretan 8 compases, se repiten y después se interpretan los 8 siguientes también con repetición.

Todos los compases que están situados en la columna octava, por ejemplo 5, 24, 30, 33,…, tienen dos versiones una para hacer la repetición y otra para continuar.

Trío																
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

El método funciona porque los compases correspondientes a la misma columna son variaciones sobre una misma base armónica, por eso el resultado será armónicamente coherente. Se utiliza una escala de siete sonidos correspondientes a siete grados, los que más se utilizan son el primer grado (I), el quinto grado (V) y el cuarto grado (IV) que en una escala de DO mayor corresponderían al Do, Sol y Fa y a los acordes que se construyen sobre ellos.

Todas las obras de Mozart han sido catalogadas por su número *Köchel* y esta obra en particular, *Musikalisches Würfelspiel* es la K. 294 (Anh.C), así que ha sido propuesto que cada realización pudiera tener un número particular *Köchel* que la identifique. Es relativamente simple hacer una extensión con 16 “dígitos” utilizando un sistema de base 11, por ejemplo, los “dígitos” 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y A. La correspondencia entre la suma de los dados y cada uno de los 16 compases representaría a la suma igual a 2 con “0”, la suma igual a 3 con “1” y finalmente la suma igual a 12 con “A”. Así la partitura más probable tendría el número *Köchel*, K. 294.5555555555555555.

Por ejemplo la versión que se generaría con 16 lanzamientos de dos dados de sumas (4, 12, 11, 6, 7, 7, 11, 8, 3, 5, 4, 8, 2, 12, 10, 7),sería K 294. 2A94559613260A85.

3.9.2. IANNIS XENAKIS

Según Vlashi & Cruz Araujo (nd), Iannis Xenakis (1922-2001), fue un compositor, arquitecto y matemático, que aplicó sistemáticamente las matemáticas en la composición. En su obra podemos encontrar piezas cuyos principios compositivos se basan en la teoría de probabilidades, en las cadenas de Markov, en la teoría de juegos, en principios geométricos y en otras ramas de las matemáticas. Pionero de la música electrónica. Funda un laboratorio, el CEMAMu, en que estudia la aplicación de la informática a la música.

Se sentía ajeno a dos de las corrientes musicales más importantes del S. XX:

- El **serialismo**, abanderado por Pierre Boulez, contra el que reacciona por su enorme complejidad que impide al oyente seguir el entramado de las líneas. Esta corriente proponía el uso de una serie de sonidos, normalmente los doce sonidos que se encuentran en una octava, sin que se pudiera repetir una sola nota hasta no haber aparecido los doce sonidos. Los representantes más importantes de esta técnica son Arnold Schönberg, Anton Webern y Alban Berg aunque tuvieron numerosos seguidores.
- El **indeterminismo** (o música casual, o postserialismo), personalizado en John Cage, insistió en la filosofía de que *todos los sonidos* son esencialmente música y en la importancia de focalizar la atención y la invención como esenciales al arte. Xenakis califica este movimiento como sonidos tocados libre y aleatoriamente, y que no transmiten ningún significado estético musical al oyente.

La respuesta a los problemas estéticos de ambas tendencias viene dada por las Matemáticas. Introduce sobre todo la probabilidad en el mundo de la composición. A pesar de la excesiva formalización del proceso compositivo logra dotar a su obra de gran expresividad.

Continuando con Vlashi & Cruz Araujo (nd), Xenakis tenía preferencia por los grandes bloques de sonido. Al buscar un tipo de causalidad apropiada para los efectos sonoros en masa comenzó a aplicar a su música las teorías de la Probabilidad matemática, especialmente "La ley de los grandes números", formulada por el matemático Jacques Bernoulli en el S. XVIII. Esta ley viene a decir que cuanto más aumente el número de ocasiones en las que se produce un hecho casual (aleatorio) más posibilidades habrá de qué el resultado se encamine hacia un fin determinado. Usando dicha ley, definió la música estocástica como música indeterminada en sus detalles pero que sin embargo se dirige hacia un final definido. La palabra estocástica proviene del griego "tendencia hacia una meta" Las matemáticas las utiliza como una herramienta y cuando traslada los cálculos a unas indicaciones musicales concretas los ajusta con el fin de obtener los resultados musicales previamente prefijados. Los principios formales de la música, tales como la altura, la duración y el instante de comienzo de cada sonido son controlados estadísticamente.

Xenakis encuentra tres puntos de inflexión para componer música estocástica:

- Intenta reproducir sonidos y estructuras propias de la naturaleza. Así la música es concebida como el medio más idóneo para reflejar la realidad universal.
- El hombre siempre ha intentado determinar la naturaleza mediante reglas universales; el uso de estas reglas se hace necesario a la hora de componer música. Se acude a las leyes de Poisson y Gauss, (la teoría cinética de gases), que postula que toda alteración, movimiento o alternancia en el espacio y tiempo se puede medir y acaso prever según la posibilidad de cálculo de probabilidades. No hay más que aplicar estas reglas sobre los timbres y estructuras tonales para que sea el principio de incertidumbre el que guíe toda composición musical. El resultado es una música libre, liberada de la determinación serial.
- Sólo la intencionalidad del autor pueden medir el valor de una obra.

Dos aspectos influyeron decisivamente al desarrollo de la música estocástica y en particular a la proyección creativa de Xenakis:

- Su visión arquitectónica
- El desarrollo de la tecnología computacional.

Dos tipos de escritura musical son usados por el compositor de forma recurrente:

- Los glissando: si en geometría la línea recta es la forma espacial más básica, en música lo serán los glissandos, que son variaciones constantes y continuas de alturas de sonido. Estas estructuras sonoras más tarde las llevará a la arquitectura.
- El Pizzicato: que intenta asemejar al movimiento de las moléculas de gas.

Un aspecto de importancia capital para el desarrollo de la música estocástica fue el auge de la computación. El uso de sofisticadas computadoras, permitía al compositor el poder preocuparse de aspectos estéticos, ya que todos los complicados y fatigosos cálculos algebraicos y probabilísticos que determinaban el desarrollo de la composición, eran relegados y resueltos por el ordenador.

Tiburcio Solis (2002) relaciona algunas de las leyes de la probabilidad, y otros campos matemáticos que usó en algunas de sus obras:

- Distribución aleatoria de puntos en un plano: Diamorphoses
- Ley de Maxwell-Boltzmann : Pithoprakta
- Restricciones mínimas: Achorripsis
- Cadenas de Markov: Analogicas
- Distribución de Gauss: ST/IO,Atrés
- Teoría de juegos: Duel, Stratégie
- Teoría de grupos: Nomos alpha
- Teoría de conjuntos y álgebra booleana: Henna, Eona.

Otro de los campos matemáticos en los que el compositor se ha movido, incluyendo nuevas definiciones para la composición musical, es la Teoría de Conjuntos, pero incomprensible para la mayoría de los compositores que han decidido estudiarla o imitarla.

4. CONEXIONES CURRICULARES: ÁREAS DE TRABAJO

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, en su artículo 6.2, establece que corresponde al Gobierno fijar las enseñanzas mínimas a las que se refiere la Ley Orgánica 8/1985, de 3 de junio, reguladora del Derecho a la Educación.

El Gobierno mediante el REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, estableció las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Las enseñanzas mínimas son los aspectos básicos del currículo en relación con los objetivos, las competencias básicas, los contenidos y los criterios de evaluación. La finalidad de las enseñanzas mínimas es asegurar una formación común a todos los alumnos y alumnas dentro del sistema educativo español, garantizar la validez de los títulos correspondientes y la continuidad, progresión y coherencia del aprendizaje en caso de movilidad geográfica del alumnado. Las áreas de la Educación primaria que se imparten en todos los ciclos de esta etapa son las siguientes:

- Conocimiento del medio natural, social y cultural.
- Educación artística (Plástica y Música).
- Educación física.
- Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.
- Lengua extranjera.
- Matemáticas.

Asimismo, el presente Real Decreto fija los aspectos básicos del currículo - conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de esta etapa educativa -, estableciendo las distintas administraciones educativas dicho currículo que desarrollarán y completarán los centros docentes.

Por tanto, corresponde a la Comunidad de Castilla y León, de conformidad con las competencias atribuidas en el artículo 35.1 de su Estatuto de Autonomía de Castilla y León, establecer el currículo propio de la educación primaria para su aplicación en los centros que pertenecen a su ámbito de gestión.

El Decreto 40/2007, de 3 de mayo, establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León, fijando los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación correspondientes al conjunto de la etapa y a cada una de las áreas que la integran o configuran.

Se establece, entre otros, que el área de Educación Artística contribuirá al desarrollo de las competencias básicas de matemáticas en Educación Primaria y viceversa.

La expresión artística, en cuanto a la competencia matemática, utiliza la lógica y el razonamiento, las numerosas clasificaciones atendiendo a los más diversos criterios, los números y medidas, tanto en el ámbito musical, con las medidas de tiempo expresadas en diversos conceptos de la métrica, como en el campo plástico y visual, donde los aspectos matemáticos forman parte de sus contenidos. Sin embargo la peculiar aportación que es específica de esta área se refiere al desarrollo creativo que el arte representa por derecho propio. La resolución de problemas comporta una dimensión creativa considerable para permitir encontrar soluciones nuevas y desconocidas a los problemas que las matemáticas plantean.

Las Matemáticas contribuyen a la competencia cultural y artística desde la consideración del conocimiento matemático como contribución al desarrollo cultural de la humanidad. Así mismo, el reconocimiento de las relaciones y formas geométricas ayuda en el análisis de determinadas producciones artísticas.

Apoyando una visión interdisciplinar de las matemáticas y la música, se establecerán similitudes con la realidad que se vive, se acercará a la cotidianidad de la vida, se mostrará más útil, práctica, dinámica, y por encima de todo, se presentará motivadora.

La enseñanza, de los contenidos de estas áreas en esta etapa, se ha organizado en distintos bloques:

EDUCACIÓN ARTÍSTICA (MÚSICA)	**MATEMÁTICAS**
1. Escucha. 2. Interpretación y creación musical.	1. Números y operaciones. 2. La medida: estimulación y cálculo de magnitudes. 3. Geometría. 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

El canto, el baile o la audición son actividades a priori motivadoras y que sin duda contienen relaciones músico-matemático fáciles de entender.

Canto

Lectura musical: cuando cantamos siguiendo una partitura se ponen en juego multitud de elementos y conceptos como los relacionados con el compás, relaciones de proporción, altura y duración.

Danza y Movimiento

Orientación espacial: la organización en el espacio es pieza clave para el trabajo tanto musical como matemático.

Geometría: se trazan formas en el espacio y con el cuerpo encontrando así coincidencias con conceptos matemáticos.

Audición

Se ejercita la discriminación auditiva implicando el análisis de elementos físicos y matemáticos: las cualidades del sonido o las distancias entre notas (intervalos, acordes, fenómeno físico armónico), son hechos sonoros que admiten un estudio más profundo que el meramente sensitivo. Hablamos por tanto de altura: frecuencia (Hercios), intensidad (Decibelios), duración: figuras y su relación espacio- tiempo, y timbre: características de la onda sonora.

Práctica instrumental

Supone, como en el canto, la puesta en práctica del lenguaje musical, reforzar conceptos como lateralidad, orientación y coordinación. También se practica la improvisación y la experimentación sonora**,** hechos y conceptos muy relacionados con la probabilidad o el azar (música aleatoria).

Música y cultura

El estudio de las aportaciones de ciertos matemáticos y músicos al mundo de la cultura implica el acercamiento a estas disciplinas desde otro punto de vista, como ya hemos visto.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha estudiado e investigado alguna de las muchas conexiones que existen en Música y Matemáticas, aplicando conocimientos de conceptos matemáticos de Educación Primaria a la Estética y a la Composición Musical. Se ha intentado huir de otros estudios avanzados que describen las estructuras musicales utilizando conceptos más complejos con campos vectoriales, funciones, combinatoria, integrales, formulas de densidad de probabilidad, etc…

En síntesis, se puede concluir diciendo que la Música y Matemáticas comparten una serie de notas, entre ellas:

- Lo fundamental, su lenguaje universal.
- Sus lenguajes son abstractos, con su propia notación y que no puede ser comprendido si no se han estudiado.
- El estudio de las ondas que es primordial para la percepción de la música y se analizan matemáticamente.
- La música, incluso el arte en general, va siendo fuertemente impregnado e influenciado por el sentido matemático.

- La búsqueda de la belleza a través de sus creaciones tanto de los músicos como de los matemáticos.
- Como algunos matemáticos adoran la música y a muchos músicos les agrada las matemáticas.

Para terminar, en el Anexo, se presenta una propuesta didáctica donde se tiene en cuenta las consideraciones expuestas en los apartados anteriores, con una serie de actividades adecuadas a esta etapa de educación primaria. De esta forma, resolviendo problemas que puedan resultar adecuados e interesantes, desarrollar la imaginación y la intuición, con un espíritu activo y lúdico, en conexión con el mundo real de los niños y sus intereses.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boletín Oficial de Castilla y León (2007). Decreto 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCYL* nº 89, de 9 de mayo, 9.852-9.896.

Boletín Oficial del Estado (1985). Ley Orgánica 8/1985, de 3 de junio, reguladora del Derecho a la Educación. *BOE* nº 159, de 4 de julio, 21.015-21.022.

Boletín Oficial del Estado (2006). La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE* nº 106, de 4 de mayo, 17.158-17.207.

Boletín Oficial del Estado (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE* nº 293, de 8 de diciembre, 43.053-43.102.

Etayo, J.J. (1995). *La Enseñanza de las matemáticas en la educación Secundaria*. Madrid: Editorial Rialp.

Fubini, E. (1976). *La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX*. Madrid: Alianza Música

Ifrah, G. (1992). *Las cifras. Historia de una gran invención.* Madrid: Alianza editorial.

Fuente Charfolé, J.L. de la (2007). Jean Jacques Rousseau: Diccionario de música. Madrid: Editorial Akal.

González Urbaneja, P.M. (2008, septiembre). La dimensión cultural del número. El legado de Pitágoras. Ponencia presentada en el 10º Congreso Castellano y Leonés de Educación Matemática. Segovia, España.

Guthrie, W.K.C. (1999). *Historia de la Filosofía Griega. Los primeros presocráticos y los pitagóricos.* Tomo I. Madrid: Editorial Gredos.

Guzmán Ozámiz, M. (1986). Historia de la Matemática hasta el siglo XVII. Madrid: *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*.

Kurt von Fritz, K.A. (1954). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, 46, 242-264.

Lluis-Puebla, E. (1998). ¿Matemáticas en la Música?. *Miscelania, 27.* 15-27.

Merino de la Fuente, J.M. (2008). *Las vibraciones de la música.* Alicante: Editorial Club Universitario.

Miraya, F. (2005). *La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis…y más acá.* Rosario, Argentina: Universidad Nacional.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática.* Madrid: Editores Huerga y Fierro.

Peralta, J. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias Pedagógicas,* Nº Extraordinario, Vol. II., 235-244.

Peralta, J. (2003) Matemáticas para no desafinar. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* Vol. 6.2, 437–456

Peralta Coronado J.(2007). Las matemáticas y las artes liberales. Del Ministerio de Educación y Ciencia. Aulas de Verano: Instituto Superior de Formación del Profesorado. *Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar.*

Pérez Perazzo, J.I. (2002). *Hitos de Nuestro Sistema Musical. Desde los Orígenes al Siglo XVII*. Volumen I (5ª ed.). Venezuela: Edita Asociación Nacional de Directores de Banda.

Planeta, S.A.(1989). Gran Enciclopedia Larousse. (1ª Ed). Barcelona.

Tiburcio, S. (2002). Música y Matemáticas. *Elementos, N.º 44,*(8) *Diciembre-Febrero,* 21-26.

Tiburcio Solis. S. (2002). *Teoría de la Probabilidad en la Composición Musical Contemporánea.* Tesis de Doctorado para la obtención del título de Doctor en Música. Escuela de Artes. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Extraído el 15 de abril, 2012, de:
www.sectormatematica.cl/musica/Tesis%20musica%20y%20matematicas%20Mozart.pdf.

Vlashi, F. & Cruz Araujo, M.R.(nd). Música o Matemáticas. Guía didáctica. Consorcio para la promoción de la música. Extraído el 28 de marzo de: www.sinfonicadegalicia.com/subido/Didactica_Musica_oMatematicas.pdf

ANEXO

PROPUESTA DIDÁCTICA. ÁREA: MÚSICA – MATEMÁTICAS

OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

La enseñanza de la Educación artística en esta etapa tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Indagar en las posibilidades del sonido, la imagen y el movimiento como elementos de representación y comunicación y utilizarlas para expresar ideas y sentimientos, contribuyendo con ello al equilibrio afectivo y a la relación con los demás.
2. Aprender a expresar y comunicar con autonomía e iniciativa emociones y vivencias a través de los procesos propios de la creación artística en su dimensión plástica y musical.
3. Explorar y conocer materiales e instrumentos diversos y adquirir códigos y técnicas específicas de los diferentes lenguajes artísticos para utilizarlos con fines expresivos y comunicativos.
4. Aplicar los conocimientos artísticos en la observación y el análisis de situaciones y objetos de la realidad cotidiana y de diferentes manifestaciones del mundo del arte y la cultura para comprenderlos mejor y formar un gusto propio.
5. Mantener una actitud de búsqueda personal y colectiva, articulando la percepción, la imaginación, la indagación y la sensibilidad y reflexionando a la hora de realizar y disfrutar de diferentes producciones artísticas.
6. Conocer algunas de las posibilidades de los medios audiovisuales y las tecnologías de la información y la comunicación en los que intervienen la imagen y el sonido, y utilizarlos como recursos para la observación, la búsqueda de información y la elaboración de producciones propias, ya sea de forma autónoma o en combinación con otros medios y materiales.
7. Conocer y valorar diferentes manifestaciones artísticas del patrimonio cultural de Castilla y León y de otros pueblos, colaborando en la conservación y renovación de las formas de expresión de nuestra Comunidad.

8. Valorar el enriquecimiento que supone el intercambio con personas de diferentes culturas que comparten un mismo entorno.
9. Desarrollar una relación de autoconfianza con la producción artística personal, respetando las creaciones propias y las de los otros y sabiendo recibir y expresar críticas y opiniones.
10. Realizar producciones artísticas de forma cooperativa, asumiendo distintas funciones y colaborando en la resolución de los problemas que se presenten para conseguir un producto final satisfactorio.
11. Conocer algunas de las profesiones de los diferentes ámbitos artísticos, interesándose por las características del trabajo de los artistas, en particular los que realizan su trabajo en nuestra Comunidad, y disfrutando como público en la observación de sus producciones.
12. Iniciarse en la práctica de un instrumento.

La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
2. Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos.
3. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones, y el esfuerzo e interés por su aprendizaje.

4. Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas que permitan disfrutar de los aspectos creativos, estéticos o utilitarios, y confiar en sus posibilidades de uso.
5. Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial, en contextos de resolución de problemas, decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y valorando la coherencia de los resultados.
6. Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas, así como para la ampliación de los contenidos matemáticos y su relación con otros de las distintas áreas del currículo.
7. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.
8. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
9. Plantear y resolver problemas matemáticos utilizando los procedimientos adecuados de cálculo, medida, estimación y comprobación de resultados.
10. Inventar y formular problemas matemáticos utilizando de forma lógica y creativa la comunicación oral y la expresión escrita en un castellano correcto.
11. Utilizar el lenguaje propio del campo científico con precisión y, en particular, emplear adecuadamente el lenguaje matemático para identificar relaciones y conceptos aprendidos y para comprender y nombrar otros nuevos.
12. Comprender la necesidad de la argumentación mediante razonamientos lógicos en el estudio y utilización de las Matemáticas.
13. Desarrollar estrategias de comprensión lectora en los mensajes transmitidos por los textos escritos utilizados en el área.

OBJETIVOS ESPECIFICOS DEL ÁREA

Se indicaran con cada una de las actividades propuestas.

CONTENIDOS

- El sonido y la expresión musical. Cualidades de los sonidos. Discriminación auditiva, denominación y representación gráfica
- La partitura. Grafías convencionales y no convencionales para la interpretación de canciones y obras instrumentales sencillas
- La escucha como base de documentación. Las fuentes de información.
- Conocimiento y práctica de actitudes de respeto en audiciones y otras representaciones musicales.
- La contaminación acústica. Identificación de agresiones acústicas y contribución activa a su disminución y al bienestar personal y colectivo.
- Recursos sonoros de la voz. Percusión corporal. El sentido musical a través del control corporal.
- Esquemas rítmicos y melódicos básicos.
- Interés y respeto por las manifestaciones producidas por los demás.
- Lenguajes musicales. Utilización de grafías convencionales y no convencionales para registrar y conservar la música inventada.
- La realización de producciones musicales. Constancia y exigencia en la participación individual y en grupo.
- Orden y relaciones entre números. Expresión oral de las operaciones y el cálculo. Cálculo aproximado. Estimación y redondeo.
- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo. Representación gráfica. Ordenación de fracciones sencillas.
- Las fracciones: fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador. Conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 10.
- Relación entre fracción y número decimal. Aplicación a la ordenación de fracciones. Escritura decimal y fraccionaria de un número no natural.

- Figuras geométricas. Elementos básicos: lado, vértice, base, diagonal, ángulo, ejes de simetría.
- Transformaciones métricas: traslaciones, giros y simetrías. Identificación de traslaciones, giros y simetrías en el entorno familiar y en la naturaleza.
- Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un eje.
- Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas. Lectura, interpretación y elaboración de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana.
- Iniciación a la potenciación. Potencia como producto de factores iguales.
- Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, decidiendo sobre la conveniencia de usarla cuando lo aconseje la complejidad de los cálculos.
- Utilización de la Regla de Tres en situaciones de proporcionalidad.
- Interés en utilizar los procedimientos matemáticos estudiados para resolver problemas en situaciones reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos.
- Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.
- Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo, manifestando iniciativa para resolver problemas que implican la aplicación de los contenidos estudiados.
- Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad y constancia en la búsqueda de soluciones.
- Disposición para desarrollar aprendizajes autónomos.
- Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.

METODOLOGÍA

Las actividades están diseñadas y presentadas para realizarse en grupo y de forma individual.

Se pretende que los alumnos sean partícipe tanto de las actividades propuestas por el profesorado como de otras que ellos mismos se les ocurra, ya sean variantes de las anteriores o totalmente innovadoras.

Se buscará una participación activa, donde se pueda observar en los alumnos la evolución en el proceso de enseñanza-aprendizaje, procurando el desarrollo personal y social del alumnado para su integración en un sistema de valores y saberes organizados.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Para este apartado se tendrán en cuenta las características personales, físicas y afectivas que pueden darse dentro del aula. Es imposible recoger toda la variedad de situaciones y necesidades que pueden aparecer (alumnos con dificultades visuales, auditivas, motoras, intelectuales…).

El objetivo principal será que todos los niños y niñas que realicen cualquier actividad participen de una forma activa.

Se buscará el apoyo del Departamento de Orientación en casos muy concretos.

RECURSOS

Material de la clase, reproductor de CD y DVD, equipos informáticos, libros de texto, material de plástica: lápices de colores, laminas, …,biblioteca, pizarra digital.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

ACTIVIDAD 1: FRACCIONES Y RITMO MUSICAL

Curso: Por su contenido, esta actividad es adecuada, a partir del 2º Ciclo de Educación Primaria.

Objetivos Específicos:

- Resolver los algoritmos de (+/-/x/:) de fracciones.

- Entender cómo las notas musicales están relacionadas con los fraccionamientos. Además, identificar diferentes tipos de notas musicales.
- Aprender a leer notas musicales de una manera básica, para con esto crear una sinfonía de aplausos, y al mismo tiempo repasar sus conocimientos sobre fracciones.

Ejercicios:

1. Observar las figuras musicales que conforman el ritmo de abajo, y teniendo en cuenta su valor numérico efectuar la suma de todas ellas (utilizar el gráfico de valores de las figuras del ejercicio 3)

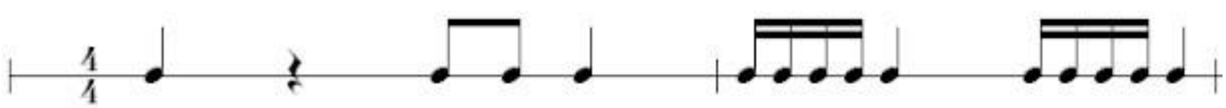
Solución: 1/8 x 2 + 1/4 + 1/16 x 4 + 1/4 + 1/16 x 4 + 1/8 x 2 + 1/4 + 1/4 = 2

2. ¿Con cuál de estos 3 ritmos se corresponde la siguiente representación matemática? (utilizar el gráfico de valores de las figuras del ejercicio 3)

1/8 x 2 + 1/4 + 1/8 x 2 + 1/4 + 1/16 x 4 + 1/8 + 1/8 + 1/8 x 2 + 1/4

a)

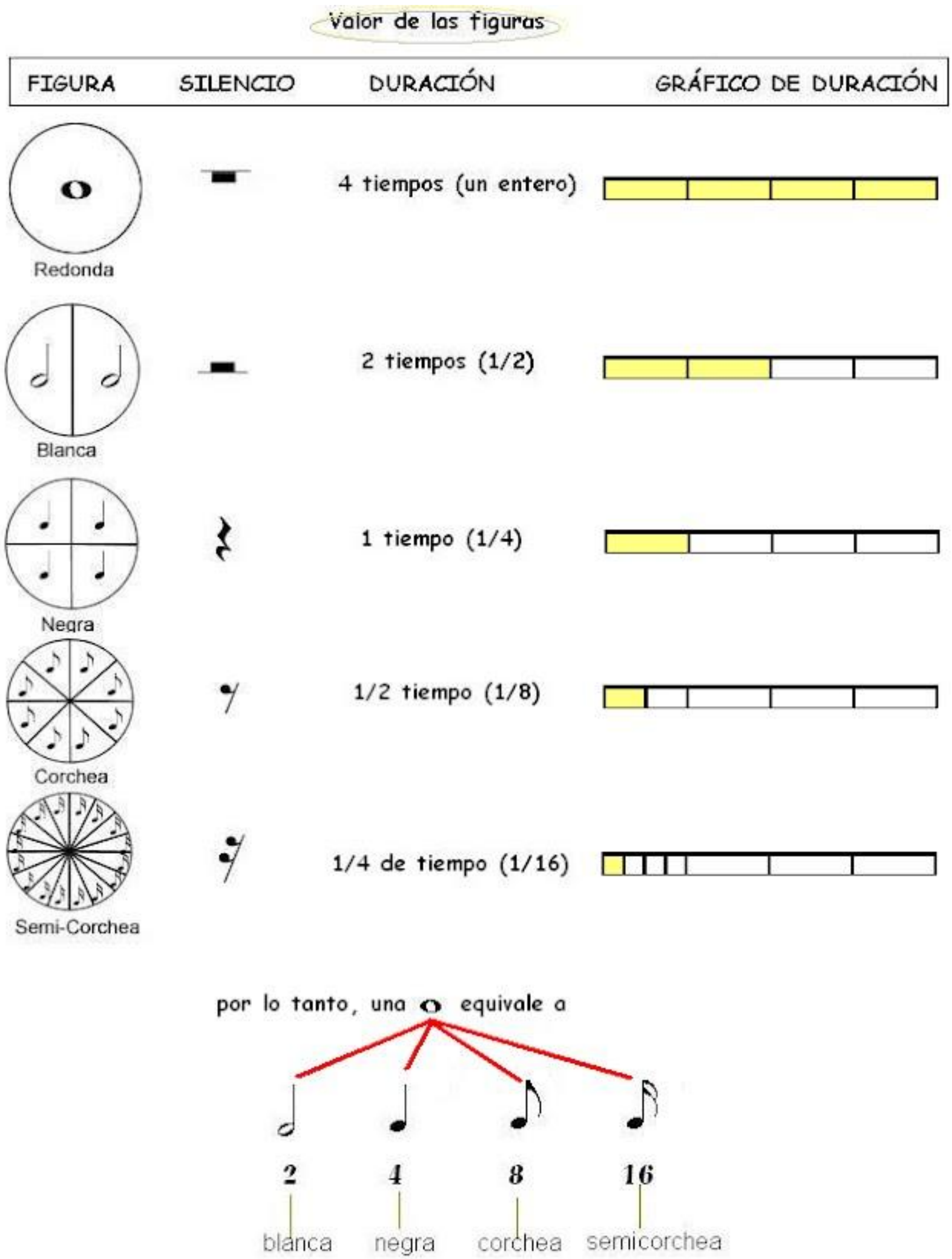
b)



c)

Solución: c)

3. En el siguiente gráfico aparecen representadas las figuras y los silencios musicales.


Valor de las figuras
FIGURA
SILENCIO
DURACIÓN
GRÁFICO DE DURACIÓN
Redonda
4 tiempos (un entero)
Blanca
2 tiempos (1/2)
Negra
1 tiempo (1/4)
Corchea
1/2 tiempo (1/8)
Semi-Corchea
1/4 de tiempo (1/16)
por lo tanto, una equivale a
2
4
8
16
blanca
negra
corchea
semicorchea

Se propone:

a) Ordenarlas según su valor de duración sonora.

b) Representar su valor en fracciones

c) Sumar los valores e indicar la duración total de todas ellas.

Realizar las siguientes operaciones:

a) 2/8 + 4/16 + 1/4 + 1/4= Solución: 4/4 = 1

b)**1/8** + 1/8 + 4/16 + 2/8 + 1/4= Solución: 4/4 = 1

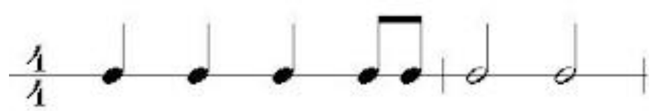
c)1/4 + **1/8** + 1/8 + **1/8** + 1/8 + **1/8** + 1/8= Solución: 4/4 = 1

Transcribe (en el cuaderno de lenguaje musical) las operaciones a ritmos musicales.

* las fracciones de color verde corresponden a *silencios*, no a figuras musicales.

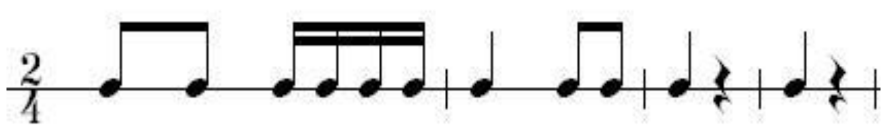
4. Tocar los siguientes ritmos, golpeando con las palmas. Realizar lentamente cada ritmo. Cuando se domine, pasar al siguiente.

a)



b)

c)



d)

ACTIVIDAD 2: MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Curso: Por su contenido, esta actividad es adecuada, para el 3º Ciclo de Educación Primaria.

Objetivos Específicos:

- Iniciar el aprendizaje de la divisibilidad: múltiplos, divisores, números primos y números compuestos. Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 10.
- Entender mejor el mínimo común múltiplo con ejercicios sencillo de ritmo.

Ejercicio:

Dividir la clase en dos grupos. Un grupo lleva un ritmo de 3/4 y otro 4/4. Siempre dan la palmada en el tiempo fuerte del compás. De este modo un grupo usa múltiplos de 3 y otro múltiplos de 4.

Comprobar que los dos grupos coinciden dando la palmada a la vez cada 12 pulsos. Es por eso que el mínimo común múltiplo de 3 y 4 es doce.

Representación gráfica del ritmo:

Grupo 1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
Grupo 2	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

ACTIVIDAD 3: VALORES DE CADA NOTA. UTILIZACIÓN DE INTERVALOS Y MEDIAS

Curso: Por su contenido, esta actividad es adecuada, para el 3º Ciclo de Educación Primaria.

Objetivos Específicos:

- Deducir los valores concernientes a cada nota mediante un enfoque matemático.
- Conocer el modelo de afinación pitagórico.
- Repasar y afianzar la utilización de la Regla de Tres en situaciones de proporcionalidad.
- Construir la escala musical aplicando las relaciones de proporcionalidad existente entre sus notas. Identificar su simetría.

- Interés y curiosidad por el aprendizaje y utilización de las Matemáticas.

Ejercicios:

1. Realizar una partición del intervalo cerrado [1; 2] en siete trozos, es decir, intercalar seis puntos entre 1 y 2.

Para ello, vamos a tener en cuenta la teoría de las medias, de origen pitagórico, que establecía, como señala Arquitas, que en música hay tres medias: la media aritmética, la media geométrica y la subcontraria, llamada también armónica.

media aritmética	**media armónica**	**media geométrica**
a + c / 2	b = 2ac / a + c	a/b = b/c

Además, se verifica que el segundo y el tercero son, respectivamente, la media aritmética y la media armónica de los dos extremos a = 1 y c = 2.

Solución:

Calculamos:

- El segundo: media armónica: 2 x 1 x 2=(1 + 2) = 4/3
- El tercero: media aritmética: (1 + 2)/2 = 3/2

por lo que se tiene de momento: 1; x; y; 4/3; 3/2; z; t; 2.

Se observa que 4/3 refleja la cuarta y 3/2 la quinta, habrá que añadir dos nuevos puntos entre 1 y 4/3, y otros dos entre 3/2 y 2. Por tanto, atribuimos a Do el valor 1, su quinta Sol le corresponderá 3/2, y en consecuencia y por análogas razones, Fa tendrá el valor 4/3 y 2 la nota de Do de la octava superior (Do').

La relación entre las notas consecutivas Fa y Sol, es decir, entre la media aritmética y la media armónica = (3/2)/(4/3) es 9/8, se intentará que los nuevos términos a determinar también lo verifiquen.

Entre 1 y 4/3 se intercalarán por tanto dos términos x e y tales que $x/1 = y/x = 9/8$, lo que conduce a que: $x = 9/8$; $y = 81/64$. De este modo, en la cuaterna 1; 9/8; 81/64; 4/3, se ha conseguido lo que se buscaba (el cociente entre cada término y el precedente es 9/8), pero con una excepción: entre el cuarto y el tercer término la relación es $\lambda = (4/3)/(81/64) = 256/243$

De forma análoga se añadirán dos términos z y t entre 3/2 y 2: $z/(3/2) = t/z = 9/8$, que se deduce deben ser: $z = 27/16$, $d = 243/128$; y se puede comprobar igualmente que en la sucesión 3/2; 27/16; 243/128; 2, la razón entre cada término y el anterior es 9/8, salvo entre los dos últimos que es λ.

Resumiendo, los valores atribuidos a cada nota de la escala diatónica son:

Do: 1, Re: 9/8, Mi: 81/64, Fa: 4/3, Sol: 3/2, La: 27/16, Si: 243/128, Do': 2.

El cociente entre los valores asignados a una nota y su precedente es 9/8, salvo en los casos Mi-Fa y Si-Do' que es λ; los primeros determinan el valor de la relación entre tono y los segundos al semitono diatónico.

2. Mostrar la simetría que presenta la escala musical en su estructura matemática.

Se tiene en cuenta que la octava musical satisface también la siguiente relación proporcional:

$$a \,/\, \text{media armónica} = \text{media aritmética} \,/\, c$$

Dado que la proporción armónica define la relación de una nota con su cuarta y la proporción aritmética determina la relación de una nota con su quinta, la expresión anterior se puede enunciar como la relación entre el extremo menor de la octava y la cuarta nota es idéntica a la relación entre la quinta nota y el extremo mayor.

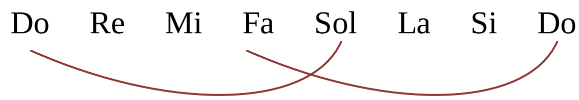
Gráficamente:

Do Re Mi Fa Sol La Si Do

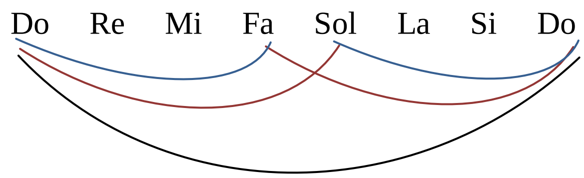
Por otra parte, si escribimos la ecuación anterior como:

$$c \,/\, \text{media armónica} = \text{media aritmética} \,/\, a$$

podemos decir que la relación entre el extremo mayor de la octava y la cuarta nota es idéntica a la relación entre la quinta nota y el extremo menor de la octava. Su representación:



Si dibujamos conjuntamente los dos gráficos anteriores:



Esta representación nos muestra la simetría que presenta la escala musical y nos permite visualizar la relación entre el intervalo de cuarta, el de quinta y el de octava.

ACTIVIDAD 6: **IDENTIFICAR LAS TRANSFORMACIONES MÉTRICAS**

Curso: Por su contenido, esta actividad es adecuada, a partir del 2º Ciclo de Educación Primaria.

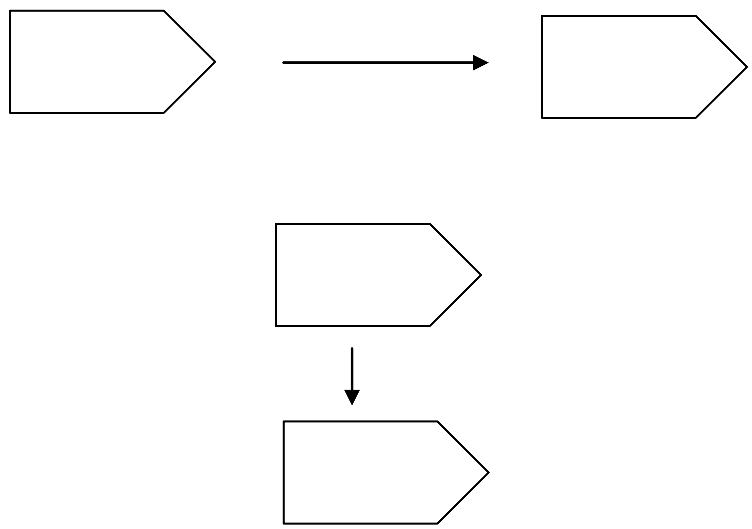
Objetivos Específicos:

- Identificar las transformaciones métricas: traslaciones, giros y simetrías, en el plano y en la música (ver punto 3.7) mediante ejemplos sencillos.
- Conocer algunos de los profesionales que han utilizado estos recursos en sus composiciones.
- Mantener actitudes de respeto en audiciones y otras representaciones musicales.
- Disfrutar con la práctica activa de la audición y la interpretación.

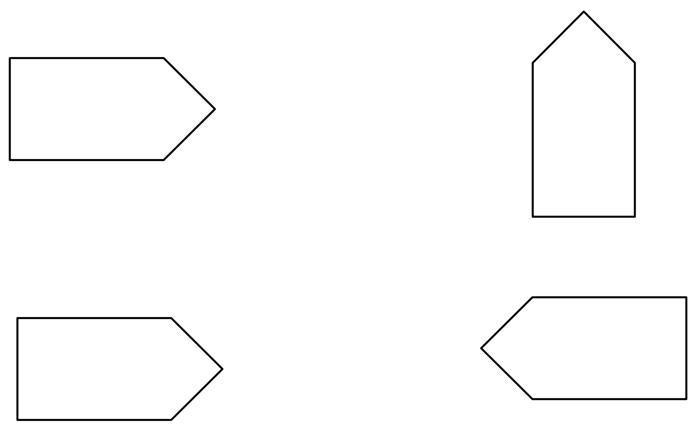
Ejercicios:

1. Analizar e identificar los siguientes casos de transformaciones en el plano.

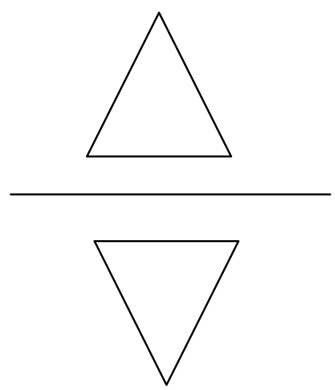
a)



b)



c)



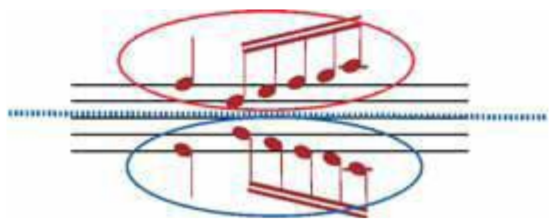
Soluciones:

a) Son traslaciones porque se conserva la forma y el tamaño, pero la figura esta desplazada de lugar según una dirección. La primera sería una traslación horizontal y la segunda traslación vertical.

b) Las figuras resultantes están giradas según un ángulo de giro. La primera sería con un giro de 90º y la segunda con un giro de 180º.

c) Es una simetría respecto a un eje horizontal (no conserva la orientación).

2. Intentar identificar el tipo de reflexión del siguiente ejemplo.



Solución: Simetría vertical de la altura de un acorde. La simetría se realiza respecto de la nota SI

3. En el aula escucharemos composiciones de música clásica en las que podemos encontrar distribuciones de las notas generadas mediante simetría bilateral, traslación o giros de media vuelta. Por ejemplo, el Preludio de Johann Sebastian Bach, la Sonata en G mayor de Domenico Scarlatti, Lotosblume de Robert Schumann, o Die Meiestersinger de Richard Wagner.

4. Audición de la partitura el Canon del Cangrejo de la Ofrenda musical compuesta por Johann Sebastian Bach en 1747. Es otro ejemplo de simetría, es una pieza de apenas unos compases que acaba donde empieza y puede ser interpretada en ambas direcciones y, además, superponerse, creando un acompañamiento.

   En este enlace puede verse la partitura y escucharse la música http://www.youtube.com/watch?v=nlbwxxNrvxw

ACTIVIDAD 7: **COMPONER AL AZAR**

Curso: Por su contenido, esta actividad es adecuada, a partir del 2º Ciclo de Educación Primaria.

Objetivos Específicos:

- Desarrollar el pensamiento lógico y la comprensión de nociones básicas de probabilidad y análisis de datos a través de la experiencia.
- Iniciación a la potenciación, como producto de factores iguales.
- Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, por la complejidad de los cálculos.
- Disfrutar y compartir el potencial lúdico y creativo de la música.

Ejercicios (repasar el punto 3.9.1 del trabajo)**:**

1. Realizar un experimento aleatorio (lanzamiento de dados). Calcular la probabilidad del suceso (nº de casos favorables / nº de casos posibles).
   a) Lanzamiento de un dado. Su espacio muestral. Probabilidad del suceso. Su representación.
   b) Lanzamiento de dos dados. Su espacio muestral. Probabilidad del suceso. Su representación.

Soluciones:

a) Lanzamiento de un dado.

Espacio muestral E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Todos los sucesos elementales son equiprobables (en cada tirada del dado tanto puede salir una cara como otra)

Entonces de cada 6 veces que lancemos el dado hay una vez teórica que saldrá la cara 1, otra vez que saldrá la 2,…

Dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1	1	1	1	1	1

Prob (1)	=	1/6
Prob (2)	=	1/6
Prob (3)	=	1/6
Prob (4)	=	1/6
Prob (5)	=	1/6
Prob (6)	=	1/6

b) Lanzamiento de dos dados.

Espacio muestral E= {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Hay 11 sucesos elementales, no todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad.

Prob (2)	=	1/36	=	**Prob (12)**
Prob (3)	=	2/36	=	**Prob (11)**
Prob (4)	=	3/36	=	**Prob (10)**
Prob (5)	=	4/36	=	**Prob (9)**
Prob (6)	=	5/36	=	**Prob (8)**
Prob (7)	=	6/36	=	**Prob (7)**

Dados	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Si nos fijamos en el cuadro hay 36 celdas, o sea 36 resultados posibles pero por ejemplo el 2 o el 12 sólo aparecen una vez cada uno, en cambio el 7 aparece 6 veces.

2. Realizar una composición al azar, mediante el lanzamiento de dos dados utilizando la tabla de los minuetos y la tabla de música con los 176 compases del Juego de Dados de Mozart. Escribir los 16 compases en el pentagrama.
   Audición de algunas de las posibles composiciones de El Juego de Dados de Mozart.
   ¿Cuántos minuetos distintos se pueden componer con 176 compases? ¿Cuál sería la composición con la probabilidad más alta para ocurrir?
   Si todos los minuetos posibles son interpretados uno cada 30 segundos, ¿Cuántos años necesitaríamos para realizar todos los minuetos?

Solución:

Para el 1º compás se elige uno de los de la 1ª columna: hay 11 para elegir.

Para el 2º compás se elige uno de los de la 2º columna: hay 11 para elegir.

……

Para el compás 16 se elige uno de los de la columna 16ª: hay 11 para elegir.

Luego tendríamos las siguientes posibles elecciones:

11x11x…x 11 (16 veces) = 46.000.000.000.000.000 = 46 mil billones

De entre los minuetos posibles la probabilidad más alta será el minueto formado por los 16 compases obtenido cuando los dos dados suman 7, es decir los compases (104, 157, 27, 167, 154, 68, 118, 91, 138, 71, 150, 29, 101, 162, 23, 151).

Para saber cuantos años se tardaría en interpretar todas las versiones de minuetos, calculamos los segundos que hay en un año:

1 año = 365 días = 365 días x 24 horas/día x 3600 segundos/hora = 31.536.000 seg.

Si en 30 segundos se realiza un minueto en 31.536.000 segundos que tiene un año (tocando día y noche), se interpretarían:

31536000 : 30 = 1.051.200 (aproximadamente un millón de versiones).

Como hay casi 46 mil billones de minuetos y cada año se puede interpretar 1 millón de versiones se tardaría en interpretar todas 46 mil millones de años.

3. Escribe el número de Köchel de la versión del minueto generada por 16 lanzamientos de dos dados de sumas (8, 3, 7, 12, 7, 11, 5, 7, 2, 9, 7, 12, 4, 10, 5, 5).

Solución:

La versión que se genera con 16 lanzamientos de dos dados de sumas:

(8, 3, 7, 12, 7, 11, 5, 7, 2, 9, 7, 12, 4, 10, 5, 5), será K 294. 615A5935075A2833.

ACTIVIDAD 8: **LA SUCESIÓN DE FIBONACCI**

Curso: Por su contenido, esta actividad es adecuada, a partir del 2º Ciclo de Educación Primaria.

Objetivos Específicos:

- Acercar las matemáticas a los alumnos a través de las aplicaciones que en diversos campos (Arte, Ciencias Naturales,…,) tiene la sucesión de Fibonacci y el número áureo.
- Realizar en clase estudios de tipo estadístico para la verificación de algunas propiedades que la sucesión de Fibonacci y el número áureo poseen (en relación con el Arte y las Ciencias Naturales).
- Implicar a los alumnos en investigaciones orientadas a poner de relieve la importancia de la sucesión de Fibonacci y del número áureo.

Ejercicios (repasar el punto 3.8. del trabajo):

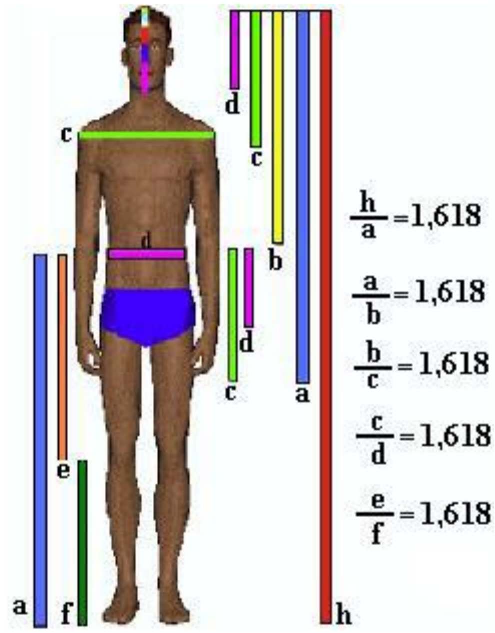
1. Explicar las proporciones áureas que hay en nuestro cuerpo humano. Elaborar una estadística que ponga de manifiesto la presencia del número áureo en las proporciones humanas.

Solución:

1. Mediante el gráfico se explica algunas de estas proporciones:

- **h** es la altura total.
- **a** es la altura del ombligo.
- **b** es la distancia desde la parte superior de la cabeza al codo.
- **c** es la longitud desde el codo hasta la punta de los dedos, y también el ancho de hombros.
- **d** es la longitud desde el codo hasta el comienzo de la mano en la muñeca, y también el ancho
- de la cintura.

- **e** es la distancia entre el ombligo y la rodilla.
- **f** es la distancia desde la rodilla a la planta de los pies.



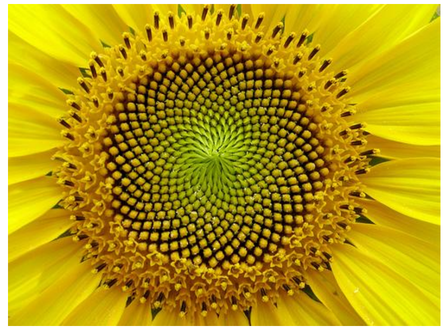
En el aula, por grupos, se tomara medida a los alumnos y se comprobará con nuestras medidas como todas estas razones son números bastante próximos al número áureo.

2. Dividir la clase por grupos. Cada grupo realizará un trabajo de investigación, que representará en una cartulina, donde se pondrá de manifiesto la serie Fibonacci en diversos campos: en Botánica, en Arte, en Música, en Arquitectura, en el crecimiento de poblaciones, …

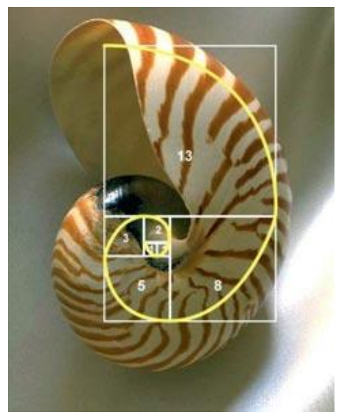
Solución:

Murales para colocar en clase, de cómo se presenta la serie Fibonacci, en:

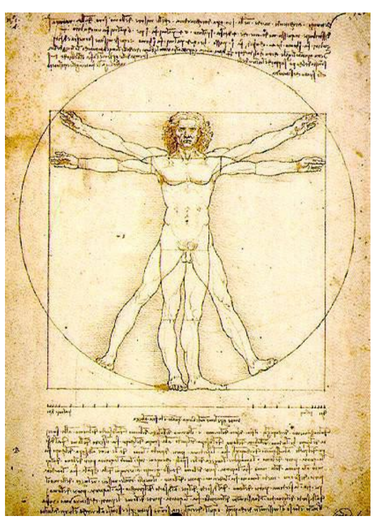
- Botánica: aparece en configuraciones biológicas, como en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa….El número de espirales en numerosas flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión: los girasoles tienen 55 espirales en un sentido y 89 en el otro,…Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales.

- Zoología: curvas de una concha de nautilus, cada nueva circunvolución completa cumplirá una proporción de 1: 1,618; si se compara con la distancia desde el centro de la espiral precedente.

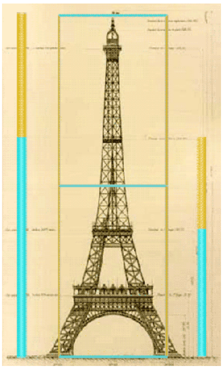
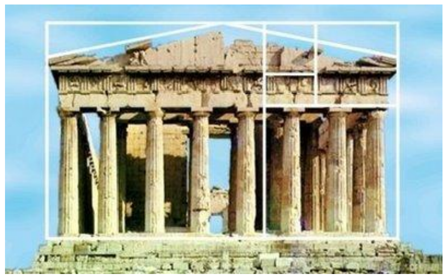



- Arte: en el dibujo de El Hombre de Vitrubio de Leonardo da Vinci, en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero…

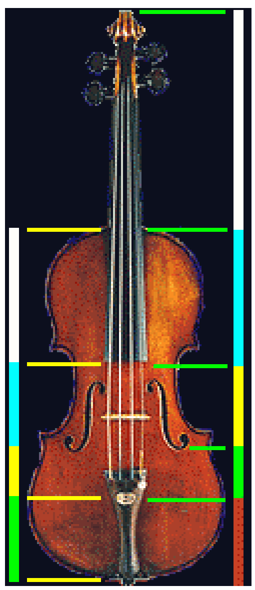
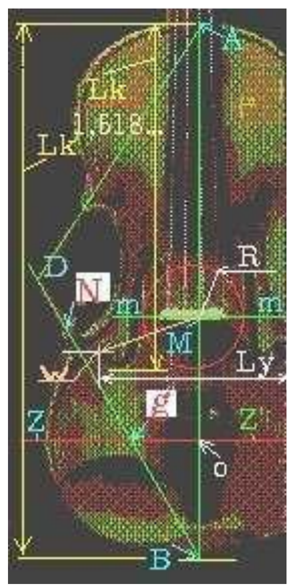


El Hombre de Vitrubio que Leonardo da Vinci hizo en 1509 para ilustrar el libro "La Divina Proporción" de Luca Pacioli.

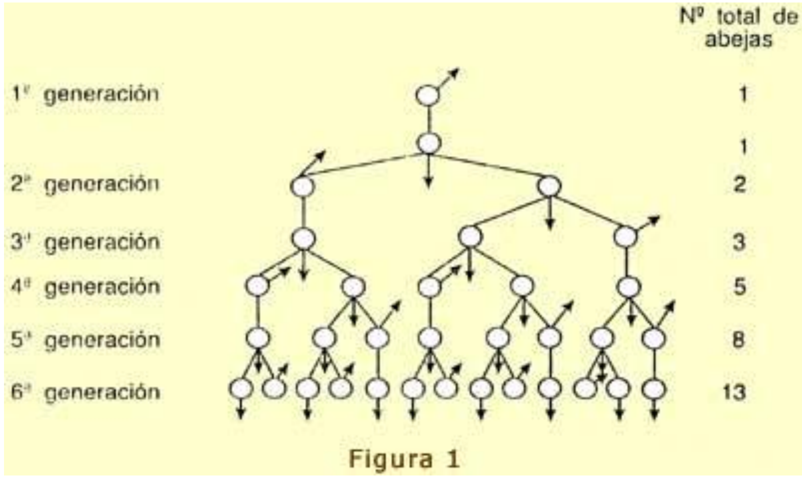
- Arquitectura, por ejemplo: El Partenón de Atenas, La gran Pirámide de Egipto, La Torre Eiffel...


- Música: en la construcción de instrumentos. Stradivarius usaba el número áureo en la construcción de sus famosos violines. Así por ejemplo las distancias entre las distintas partes del violín guardan relación con el número 1,618.

- Crecimiento de población: realizar gráficos con el número de parejas a lo largo de los meses de conejos. También, las abejas tienen relación con las series de Fibonacci, por ejemplo en la colocación de las celdas de una colmena, en las que sólo hay una ruta posible para ir a la siguiente celda, dos hacia la siguiente y así sucesivamente según la serie. Además, los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente la misma distribución, no tienen padre, por lo que sólo hay una madre, dos abuelos... ,



3. Audición de temas que han utilizado la serie Fibonacci. Beethoven en su Quinta Sinfonía y Mozart en la sonata nº 1 para piano.

EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES.

Será continua y global y tendrá en cuenta su progreso en el conjunto de las áreas del currículo. Se utilizará test de autoevaluación, observación directa, participación individual y del grupo, asistencia a las audiciones con actitud de respeto, ..

Se tendrá en cuenta los objetivos específicos planteados y los conocimientos adquiridos en cada una de las áreas, y se valorará el grado de adquisición de las competencias básicas.

Si el progreso de un alumno no es el adecuado, se establecerán medidas de refuerzo educativo. Estas medidas se adoptarán tan pronto como se detecten las dificultades y se dirigirán a la adquisición de los aprendizajes imprescindibles para continuar el proceso educativo.