# MÉTODOS DE FALKNER
# EN
# MODO PREDICTOR-CORRECTOR

PARA LA RESOLUCIÓN DE

# PROBLEMAS DE VALOR INICIAL DE SEGUNDO ORDEN

(ANÁLISIS E IMPLEMENTACIÓN)

Cesáreo Lorenzo González

2013

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

Tesis presentada para optar al Grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

AUTORIZACIÓN DEL DIRECTOR DE TESIS
(R.D. 99/2011 de 28 de Enero)

D. Higinio Ramos Calle, profesor titular del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Salamanca, como Director de la Tesis Doctoral titulada *Métodos de Falkner en modo predictor-corrector para la resolución de problemas de valor inicial de segundo orden (Análisis e implementación)*, realizada por D. Cesáreo Lorenzo González, autoriza la presentación de la misma para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Salamanca, Octubre de 2013

Fdo.: Higinio Ramos Calle

# AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han hecho posible la realización de este trabajo. En primer lugar, a mi director de tesis, el profesor Higinio Ramos Calle, con quien he podido contar en todo momento, y que me animó a proseguir en las situaciones de debilidad.

A mi familia por su paciencia, confianza y apoyo inestimables durante todo el tiempo que ha durado este trabajo. También, un cariñoso recuerdo para los que no están.

A los amigos, y compañeros del Departamento de Matemática Aplicada por su ayuda y sus palabras de ánimo.

Gracias a todos.

# Índice general

**1. Introducción** **1**

**2. Métodos de Falkner** **9**

2.1. Solución exacta del problema . . . . . 11
2.2. Método de Falkner explícito . . . . . 13
2.3. Cálculo de los coeficientes del método explícito. . . . . 16
2.3.1. Procedimiento alternativo para obtener los coeficientes . . . 18
2.4. Error local del método explícito . . . . . 20
2.5. Fórmula para seguir la derivada en el método explícito . . . . . 23
2.6. Método de Falkner implícito . . . . . 25
2.7. Cálculo de los coeficientes del método implícito . . . . . 27
2.8. Error local del método implícito . . . . . 29
2.9. Fórmula para seguir la derivada en el método implícito . . . . . 30
2.10. Consistencia y estabilidad de los métodos . . . . . 32
2.10.1. Consistencia . . . . . 32
2.10.2. Estabilidad . . . . . 36
2.10.3. Convergencia . . . . . 40
2.11. Métodos de Störmer-Cowell a partir de los de Falkner . . . . . 41
2.11.1. Métodos de Störmer . . . . . 41
2.11.2. Métodos de Cowell . . . . . 44

**3. Análisis de los métodos en modo P-C para $y'' = f(t, y)$** **47**

3.1. Errores de truncamiento locales . . . . . 50
3.2. Sobre las iteraciones del corrector . . . . . 51
3.3. Métodos Explícitos . . . . . 54
3.3.1. Descripción de los métodos . . . . . 54

3.3.2. Errores acumulados . . . . . 55
3.3.3. Análisis de la estabilidad lineal . . . . . 59
3.4. Métodos implícitos . . . . . 68
3.4.1. Descripción de los métodos . . . . . 69
3.4.2. Errores acumulados . . . . . 71
3.4.3. Análisis de la estabilidad lineal . . . . . 76
3.5. Cuadro resumen . . . . . 83

**4. Análisis de los métodos en modo P-C para $y'' = f(t, y')$ 87**
4.1. Métodos explícitos . . . . . 89
4.1.1. Descripción de los métodos . . . . . 89
4.1.2. Errores acumulados . . . . . 90
4.1.3. Análisis de la estabilidad lineal . . . . . 94
4.2. Métodos implícitos . . . . . 100
4.2.1. Descripción de los métodos . . . . . 100
4.2.2. Errores acumulados . . . . . 101
4.2.3. Análisis de la estabilidad lineal . . . . . 109
4.3. Cuadro resumen . . . . . 115

**5. Análisis de los métodos en modo P-C para $y'' = f(t, y, y')$ 119**
5.1. Métodos explícitos . . . . . 121
5.1.1. Descripción de los métodos . . . . . 121
5.1.2. Errores acumulados . . . . . 122
5.1.3. Análisis de la estabilidad lineal . . . . . 124
5.2. Métodos implícitos . . . . . 130
5.2.1. Descripción de los métodos . . . . . 130
5.2.2. Errores acumulados . . . . . 132
5.2.3. Análisis de la estabilidad lineal . . . . . 141
5.3. Cuadro resumen . . . . . 152

**6. Implementación de los diferentes modos 155**
6.1. Implementación de los métodos para $y'' = f(t, y)$ . . . . . 162
6.1.1. Métodos de Falkner explícitos . . . . . 162
6.1.2. Métodos de Falkner implícitos . . . . . 164
6.2. Implementación de los métodos para $y'' = f(t, y')$ . . . . . 169

6.2.1. Métodos de Falkner explícitos . . . . . 169
6.2.2. Métodos de Falkner implícitos . . . . . 172
6.3. Implementación de los métodos para $y'' = f(t, y, y')$ . . . . . 176
6.3.1. Métodos de Falkner explícitos . . . . . 176
6.3.2. Métodos de Falkner implícitos . . . . . 177

**7. Equivalencias entre las diferentes formulaciones 185**

**8. Ejemplos numéricos 193**
8.1. Ejemplos de la forma $y'' = f(t, y)$ . . . . . 196
8.1.1. Ejemplo con los métodos explícitos . . . . . 196
8.1.2. Otro ejemplo con los métodos explícitos . . . . . 199
8.1.3. Una variante del Ejemplo 8.1.1 con los métodos implícitos . 202
8.1.4. Ejemplo con los métodos implícitos . . . . . 203
8.1.5. Ejemplo de resolución de un sistema con diferentes métodos 204
8.1.6. Comparación de métodos explícitos e implícitos . . . . . 207
8.2. Ejemplos para $y'' = f(t, y')$ . . . . . 215
8.2.1. Ejemplo lineal . . . . . 215
8.2.2. Ejemplo para comparar los métodos $\widetilde{FI'}[i]k$ y $FI'[i]k$ . . . . 223
8.2.3. Ejemplo no lineal . . . . . 226
8.2.4. Otro ejemplo no lineal . . . . . 228
8.2.5. Sistema de ecuaciones . . . . . 230
8.3. Ejemplos para $y'' = f(t, y, y')$ . . . . . 232
8.3.1. Ejemplo lineal . . . . . 232
8.3.2. Ejemplo lineal . . . . . 237
8.3.3. Ejemplo singular . . . . . 238
8.3.4. Ejemplo no lineal . . . . . 240
8.3.5. Sistema de ecuaciones . . . . . 246

**9. Conclusiones y trabajo futuro 249**
9.1. Conclusiones . . . . . 252
9.2. Trabajo futuro . . . . . 255

**10. Apéndices 257**

**A. Coeficientes de los métodos 259**

**B. Fórmulas desarrolladas** **265**

**C. Bibliografía** **273**

# Capítulo 1

# Introducción

*An important subject which rarely receives detailed attention is that of second order differential equations, which do arise frequently in practical problems in dynamics and in other applications.*

(J. R. Dormand, [34], Preface)

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se encuentran presentes en numerosos campos de la ciencia, pues permiten modelizar gran variedad de situaciones donde aparece una evolución temporal o espacial. Pero, lamentablemente, la solución de las ecuaciones que modelizan los fenómenos sólo pueden ser obtenidas analíticamente en unos pocos casos. Se hace necesario pues, recurrir a los métodos numéricos (a los que se exigirá que sean convergentes) para poder encontrar una solución aproximada de un problema de valor inicial dado. Los métodos numéricos que estudiaremos en esta memoria tienen como objetivo encontrar los valores de la solución en una red de puntos, $\{t_i\}_{i\in S}$, de un intervalo especificado; es lo que se conoce como una *solución discreta*. En general sólo podremos obtener valores aproximados de la solución $y(t)$ en los puntos de la red elegida, los cuales denotamos en la forma usual por $y_i \simeq y(t_i)$.

Desde los trabajos pioneros de Adams (1833) o de Runge (1895), el desarrollo

de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales[1] ha experimentado un constante progreso, y actualmente podemos encontrar numerosos paquetes de software que contienen códigos de propósito general para la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Dado que una ecuación diferencial de orden $n$ de la forma $y^{n)} = \varphi(t, y, y', \ldots, y^{n-1)})$ se puede escribir de manera equivalente como un sistema de ecuaciones de primer orden, podría resolverse el problema aplicando alguno de los códigos disponibles para tales sistemas (suponiendo que se conocen los valores de la solución y sus derivadas hasta el orden $n-1$ en un punto inicial $t_0$). Ello es perfectamente válido y de hecho es un procedimiento usual, pero parece más acertado buscar integradores numéricos que puedan ser aplicados directamente sin tener que transformar la ecuación en el correspondiente sistema equivalente de primer orden. Como señala Henrici [59] con respecto a la llamada *ecuación especial de segundo orden*, $y'' = f(t, y(t))$, si uno no está particularmente interesado en los valores de las primeras derivadas, parece antinatural introducirlas artificialmente.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden merecen una consideración especial, ya que aparecen muy a menudo en las ciencias aplicadas. Así, por ejemplo la segunda Ley de Newton (que hace intervenir la aceleración, esto es, una derivada segunda) es la base en que se asienta la mecánica clásica, y los problemas de caída de cuerpos, de movimientos vibratorios, o del movimiento de $n$ masas sometidas a la acción de un campo de fuerzas, se plantean por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden (véase [7]). Lo mismo sucede en la dinámica orbital, que se ocupa de estudiar el movimiento de dos o más cuerpos que sometidos a la acción de fuerzas perturbadoras interactúan de acuerdo con la Ley de Newton. O con la dinámica molecular, donde macromoléculas como ácidos nucleicos o proteínas obedecen también la segunda Ley de Newton, y por tanto, en la descripción de las trayectorias intervienen ecuaciones diferenciales de segundo orden ([79]). En un contexto diferente, las oscilaciones eléctricas en un circuito también se representan por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden. La ecuación de Rouse modela el movimiento de una columna de fluido en un tubo en forma de U ([113], pág. 25). Y podrían enumerarse muchos más ejemplos donde intervienen ecuaciones diferenciales de segundo orden. Buena prueba de su importancia es el hecho de que

[1] En esta memoria se tratan ecuaciones diferenciales ordinarias, aunque no repitamos constantemente la palabra *ordinarias*.

muchas de estas ecuaciones tienen nombres propios: ecuaciones de Bessel, de Euler, Legendre, Airy, Duffing, Mathieu, Poisson, van der Pol, Emden, Painlevé, Dirac, Schrödinger, etcétera.

Puesto que muchas de las ecuaciones de la Mecánica Celeste son de segundo orden, no es de extrañar que hayan sido los astrónomos quienes hayan desarrollado métodos directos para tales tipos de ecuaciones. Quizás fue Störmer (1907) el primero en elaborar un método multipaso explícito, guiado por la necesidad de solucionar las ecuaciones que planteó en su intento de explicar el fenómeno de las auroras boreales. Le siguieron muy de cerca Cowell y Crommelin (1910) con otro método de concepción parecida, pero esta vez implícito, el cual aplicaron para estudiar el movimiento del cometa Halley. Una variante de los dos métodos anteriores (en sus versiones explícita e implícita) descrita por Jackson (1924), aunque matemáticamente equivalente, se conoce con el nombre de método de Gauss-Jackson (véase [34], [48], [49], [41]). Al método de Gauss-Jackson a veces se le denomina como segundo método de Cowell, y es particularmente conocido entre los astrónomos, quienes lo utilizan en la integración numérica de órbitas ([15], [21], [31]).

Coincidiendo en el tiempo, Numerov (1924) aplicó un caso particular de los métodos de Cowell a ecuaciones de la forma $y'' = f(t)\, y + g(t)$, de manera que el método implícito de Cowell se convirtió en el método explícito de Numerov para este tipo de ecuaciones, y desde entonces es común denominarlo así, particularmente en relación con la solución de ecuaciones diferenciales dentro de las ciencias físico-químicas. En concreto, la llamada ecuación unidimensional de Schrödinger aparece numerosas veces unida al método de Numerov en alguna de sus múltiples variantes ([62], [114], [122], [133]). En ocasiones los métodos anteriores se confunden, y se designan indistintamente con uno u otro nombre ([85], [70]).

Otro tipo de algoritmos ampliamente utilizados para la integración numérica de ecuaciones de segundo orden son los métodos Runge-Kutta-Nyström, que fueron dados a conocer por Nyström en 1925. Estos presentan la ventaja de que son métodos de un paso y no precisan mas que de un valor de inicialización. Sin embargo, en general conllevan un mayor coste computacional por el gran número de evaluaciones de la función que es preciso realizar.

Posteriormente, Falkner (1936) obtuvo un método que permite resolver ecuaciones de la forma $y'' = f(t, y, y')$, pero que no ha encontrado mucho eco en la literatura científica sobre el tema (véase [27], [82]).

Y la relación podría continuarse largamente, pues en los últimos tiempos se está prestando más atención a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales de segundo orden, y hay cada vez más libros que recogen capítulos dedicados sólo a este tema. Podemos comenzar señalando la obra clásica de Henrici [59], pero la siguen otras, como el libro de Hairer *et al.* [54], el de Ixaru [63], o el de Dormand [34]. En el conocido libro de Press et al. [96] sólo hay una referencia a métodos numéricos que integran directamente ecuaciones de segundo orden, y es precisamente el método de Störmer. Por otro lado, no son pocos los artículos que han aparecido últimamente que, o bien presentan problemas concretos de segundo orden que se resuelven con nuevos métodos o variaciones de métodos conocidos ([100], [109], [115]), o simplemente exponen nuevos procedimientos para resolver ecuaciones de segundo orden ([3], [4], [12], [22], [23], [24], [25], [30], [33], [39], [67], [69], [80], [81], [91], [99], [111], [125], [131]).

Aunque es posible integrar un P.V.I. de segundo orden del tipo

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0\,, \tag{1.1}$$

transformándolo en un sistema de primer orden equivalente y aplicando luego uno de los muchos métodos disponibles para tales sistemas, parece más natural el intentar buscar métodos que integren la ecuación (1.1) directamente sin transformarla en un sistema de primer orden.

La ventaja de este enfoque debería traducirse en un aumento de la eficacia del método (esto es, conseguir parecida exactitud a la proporcionada por otros otros métodos, pero con un coste computacional menor). Por el contrario, un método multipaso de $k$ pasos para ecuaciones de primer orden se convierte en un método de $2k$ pasos para el problema (1.1) (véase [54], pág. 461), incrementándose de esta forma el coste computacional.

Los problemas que se plantean mediante una ecuación de la forma señalada en (1.1) aparecen en una gran variedad de situaciones físicas, y numerosos autores se han enfrentado a ellos, proporcionando diferentes aproximaciones para su resolución. Como señalábamos antes, probablemente los primeros esfuerzos en este sentido fueron debidos a Störmer (1907) en relación con los cálculos numéricos concernientes al estudio de las auroras boreales, y desde entonces, los métodos que desarrolló han sido ampliamente utilizados en diferentes contextos. El método más básico se puede obtener a partir de la suma de los desarrollos de Taylor de $y(t_n + h)$ y de $y(t_n - h)$,

con lo que resulta la fórmula

$$y(t_n + h) = 2y(t_n) - y(t_n - h) + h^2 f(t_n, y(t_n)) + \mathcal{O}(h^4)\,,$$

y despreciando los términos residuales resulta el método

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f_n\,.$$

Cowell y Crommelin utilizaron la misma idea en sus cálculos para la determinación de la órbita del cometa Halley [2], considerando desarrollos de orden superior y aproximando las derivadas por diferencias centrales de $f$. Una nota histórica en [136] señala que el anterior algoritmo fue utilizado por vez primera por Delambre en 1791, y redescubierto más tarde por Loup Verlet [3], y a partir de entonces ha sido ampliamente utilizado para aplicarlo al estudio de la dinámica molecular. También Skeel *et al.* ([119]), citando un artículo de S. Toxvaerd[4] señalan que la primera vez que apareció publicado el método fue debido a Joseph Delambre. Sin embargo, otra nota a pie de página en [56], pág. 13, indica que Verlet descubrió "su"método en los *Principia* de Newton. Y Hairer *et al.* en [58], donde refieren que a veces también se le conoce como método de Encke, le nombran como método de Newton-Störmer-Verlet-Leapfrog.

En cualquier caso, quizá la utilización más extendida corresponda precisamente a la denominación *método de Verlet*, o bien a alguna de sus variantes, en el terreno de la dinámica molecular (véase [83], [57], [28]). Como en la simulación de la dinámica de partículas es importante comprobar que la energía total se conserva, y para ello es necesario calcular la energía cinética, resulta necesario por tanto obtener las velocidades. Una variante del método de Verlet conocida como *algoritmo Leapfrog* (en francés, *algorithme saute-mouton* ), la cual con la notación $y' = v$ se escribe

$$\begin{aligned} v_{n+\frac{1}{2}} &= v_{n-\frac{1}{2}} + h f_n \\ y_{n+1} &= y_n + h\, v_{n+\frac{1}{2}}\,, \end{aligned}$$

[2] *Investigation of the motion of Halley's comet from 1759 to 1910. Appendix to Greenwich Observations for 1909, Edinburgh.*

[3] *Computer experiments on classical fluids I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules.* Physical Review. Vol 159. 1967

[4] *Hamiltonians for discrete dynamics.* Phys. Rev. E, 50 (1994).

permite obtener las velocidades por medio de la aproximación

$$v_n = \frac{1}{2}\left(v_{n-\frac{1}{2}} + v_{n+\frac{1}{2}}\right) .$$

Y aún hay otra variante del método de Verlet, conocida como *Velocity Verlet* , que se expresa por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} v_{n+\frac{1}{2}} &= v_n + \frac{h}{2} f_n \,, \\ y_{n+1} &= y_n + h\, v_{n+\frac{1}{2}} \,, \\ v_{n+1} &= v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f_{n+1} \,, \end{aligned} \tag{1.2}$$

o bien, en la forma equivalente

$$y_{n+1} = y_n + h\, v_n + \frac{h^2}{2} f_n \,, \tag{1.3}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}\left(f_n + f_{n+1}\right) . \tag{1.4}$$

En cuanto a los métodos de Störmer implícitos más bien son conocidos como métodos de Cowell ([59], pág. 296 o [63], pág. 67). Los métodos de Störmer y de Cowell han sido ampliamente utilizados en el terreno de la Mecánica Celeste ([21], [98], [70], [120]). Pero quizá la particularización más extendida de los métodos de Cowell corresponde al algoritmo dado por

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \frac{1}{12} h^2 \left(f_{n+1} + 10 f_n + f_{n-1}\right) ,$$

el cual se conoce como *método de Numerov* [5]. Son numerosos los artículos que sobre este método o variantes del mismo han aparecido recientemente ([39], [101], [127], [125], [117]) y en particular en relación con la solución de la ecuación radial de Shrödinger ([62], [122], [114]). Su extendida popularidad se debe a la exactitud que proporciona aun siendo sumamente sencillo. Ixaru y Rizea [62] señalan que el método de Numerov es quizá el esquema mas popular para integrar la ecuación radial de Schrödinger.

[5] *A method of extrapolation of perturbations.* Roy. Ast. Soc. Monthly Notices. **84**. 1924.

Estos métodos, como todos los métodos multipaso, tienen la desventaja de necesitar unos valores de inicialización, los cuales se pueden obtener por ejemplo utilizando el método de la serie de Taylor o bien un método Runge-Kutta. En algún caso muy particular, como en [101], esto se evita planteando un sistema algebraico de ecuaciones que permite obtener de manera explícita los valores de inicialización necesarios.

En este trabajo analizaremos detalladamente un tipo de métodos numéricos para resolver problemas de valores iniciales (P.V.I.) de ecuaciones diferenciales de segundo orden, los métodos de Falkner [36]. Estos métodos, como la forma del método de Verlet en (1.3) utilizan dos fórmulas, una para seguir la solución y otra para seguir la derivada. Detallaremos el procedimiento para construir los métodos, sus propiedades, diferentes formas de obtener los coeficientes, la relación con los métodos de Störmer-Cowell, y las distintas maneras de implementarlos (una descripción básica de los métodos está en el libro de Collatz [27]). La presentación del contenido aquí expuesto se hará de manera secuencial, tratando de reproducir la forma en que se han ido obteniendo los resultados, desde los iniciales artículos sobre la implementación de los métodos explícitos (véase [102] y [103]), hasta el estudio de los implícitos y su comparación con los métodos de Störmer-Cowell (véase [105] y [106]). Los resultados más recientes que hemos obtenido sobre los métodos de Falkner racionales, presentados en el congreso CMMSE-2011 [107] no se desarrollarán, y sólo los mencionaremos en el Capítulo de Conclusiones y Trabajo futuro, puesto que es una línea de trabajo abierta que esperamos continuar próximamente.

Esta memoria consta de diez capítulos, el último de ellos constituido por dos apéndices más la bibliografía. El primer capítulo lo constituye esta introducción; el siguiente presenta la descripción de los métodos de Falkner; los tres siguientes, que pueden leerse independientemente, forman el cuerpo de esta obra, y tratan de las diferentes formulaciones de los métodos de Falkner para la resolución de diferentes problemas de valor inicial de segundo orden. Les siguen otros dos, uno que trata sobre la implementación de los métodos y otro donde se muestran las equivalencias de las distintas formulaciones según el tipo de ecuación. Luego sigue otro, particularmente importante, donde aparecen diversos ejemplos resueltos numéricamente, para ver el comportamiento de los métodos descritos anteriormente. El penúltimo capítulo recoge las conclusiones finales y los proyectos de futuro. En cuanto a los

apéndices, recogen los coeficientes de las diferentes fórmulas, y la expresión desarrollada de las mismas en términos de los valores de la función en los nodos de integración.

Para facilitar la notación estudiaremos los métodos para problemas escalares, pero pueden aplicarse igualmente a sistemas formados por $m$ ecuaciones del tipo considerado en cada caso, y de hecho en los resultados numéricos presentaremos también ejemplos de aplicación a tales sistemas.

Todas las demostraciones y desarrollos que aparecen son originales, o al menos no tenemos conocimiento de que sea de otra manera. Por eso hemos tratado de detallar los pasos en cada una de ellas. Cuando sea necesario algún resultado conocido indicaremos las referencias correspondientes.

Una última observación sobre la notación. La variable independiente siempre la denotaremos mediante $t$, y la variable dependiente $y$, en tanto que los valores aproximados de la misma en el punto $t_i$ se designa en la forma habitual con $y_i$.

# Capítulo 2

# Obtención de los métodos de Falkner

## 2.1. Solución exacta del problema en forma integral.

Consideremos el problema de valor inicial de segundo orden dado por

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{2.1}$$

para el que suponemos que se dan las condiciones suficientes para garantizar la existencia de una solución única $y(t)$ sobre un cierto intervalo $I = [t_0, b] \subset \mathbb{R}$ de interés.

Nótese que la función característica $f$ la podemos considerar como una función en la única variable independiente $t$, dado que la función $y$ y su primera derivada $y'$ son funciones de $t$, y en tal caso podemos reescribir el problema anterior en la forma:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{2.2}$$

donde, sin lugar a confusión, entenderemos que la función $f(t)$ puede adoptar distintas formas, según que aparezcan como argumentos sólo la variable independiente, o también las variables $y(t)$ o $y'(t)$. Es decir, $f(t)$ hace referencia a la forma más general $f(t, y(t), y'(t))$, donde alguno o varios de los argumentos pueden no estar presentes.

Para obtener la solución exacta seguiremos los mismos pasos que para la resolución de una ecuación lineal de segundo orden mediante el método de variación de parámetros. Para ello se requiere del conocimiento de la solución general de la ecuación $y''(t) = 0$ (ecuación homogénea) y una solución particular de la ecuación completa, y posteriormente la determinación de las constantes involucradas en la expresión de la solución de la ecuación completa de forma que se satisfagan las condiciones iniciales dadas.

Dado que $y''(t) = 0$ tiene asociada como ecuación característica $\lambda^2 = 0$, de raíces $\lambda = 0$ con multiplicidad dos, una solución para esta ecuación homogénea la constituyen las funciones $\{e^{0t}, t\, e^{0t}\}$, esto es $\{1, t\}$, y así la solución correspondiente

a la ecuación homogénea será:

$$y_h(t) = A + B\,t \text{ con } A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Consideremos ahora una solución particular de la ecuación completa, de la forma

$$y_p(t) = A(t) + B(t)t\,.$$

La utilización del método de variación de parámetros conduce a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A'(t) + B'(t)t = 0 \\ \\ B'(t) = f(t) \end{cases}$$

y resolviendo este sistema obtenemos la solución

$$A'(t) = -t\,f(t)\,, \qquad B'(t) = f(t)\,.$$

Integrando las expresiones anteriores obtendremos los coeficientes que permitan expresar la solución particular del problema completo

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{t_0}^{t} -s\,f(s)\,ds \\ \\ B(t) &= \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Entonces, la solución general del problema $y''(t) = f(t)$ es la familia biparamétrica dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A + B\,t + \int_{t_0}^{t} -s\,f(s)\,ds + t\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\,. \tag{2.3}$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales señaladas: $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = \dot{y_0}$, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) = A + B\,t_0 \\ \\ \dot{y_0} = y'(t_0) = B + (-t_0\,f(t_0)) + t_0\,f(t_0) = B\,. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema lineal en las variables $A, B$ se obtiene que la solución del mismo es:

$$\begin{aligned} A &= y_0 - \dot{y_0}\,t_0 \\ B &= \dot{y_0}\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la solución exacta del problema, dada en (2.3), resulta que ésta se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 - \dot{y_0}\, t_0 + \dot{y_0}\, t + \int_{t_0}^{t} -f(s)s\, ds + t \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \\ &= y_0 + (t - t_0)\dot{y_0} + \int_{t_0}^{t} f(s)(t - s)\, ds \end{aligned}$$

siendo en general $f(s) = f(s, y(s), y'(s))$ , esto es,

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)\, y'(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), y'(s))(t - s)\, ds\,. \tag{2.4}$$

Si en la fórmula de la solución exacta (2.4) en lugar de considerar el intervalo $[t_0, t]$, consideramos el intervalo genérico $[t_n, t_{n+1}]$ donde $t_n$ y $t_{n+1}$ son dos puntos consecutivos de la red de puntos discreta, dentro de un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$ donde está definida la solución de la ecuación $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$, y siendo $h = t_{n+1} - t_n$ el tamaño del paso, resulta la fórmula:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)(t_{n+1} - t)\, dt\,, \tag{2.5}$$

la cual nos da el valor de la solución exacta del problema (2.2) evaluada en el punto $t_{n+1}$.

## 2.2. Formulación del método de Falkner explícito

La fórmula en (2.4) resulta ser la ecuación integral equivalente al problema de valor inicial en (2.1). Dicha ecuación integral en general es implícita, y la dificultad para su aplicación resulta en la evaluación de la integral. Si la función $f$ es lo suficientemente sencilla como para que la integral se pueda evaluar, entonces tendremos la solución exacta del problema (2.1). Pero en general, esto no será posible, así que lo que haremos será buscar la manera que nos permita obtener un método para resolver de forma discreta el problema. Ello se puede lograr aproximando la integral que aparece en (2.5). Distintas formas de aproximar la función darán lugar a los correspondientes métodos numéricos. La manera más usual de aproximar la función

es mediante polinomios de interpolación, y esa es la forma en que se obtienen los métodos de Falkner (de manera parecida a como se hace para obtener los métodos de Adams en el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden).

Consideramos $k+1$ puntos igualmente espaciados, $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n, t_{n+1}$ siendo el tamaño del paso $h$. El polinomio de interpolación de Newton en los primeros $k$ nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n$ se puede escribir en la forma [61]

$$p(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \,, \quad \text{con } s = \frac{t - t_n}{h} \tag{2.6}$$

donde, como es usual, los términos $\binom{-s}{j}$ son los coeficientes binomiales, y $\nabla^j f_n$ son las diferencias regresivas de orden $j$ siendo $f_n = f(t_n)$.

Si en la fórmula (2.5) aproximamos $f(t)$ por el polinomio de interpolación anterior, y llamamos $y_k$ a la aproximación de $y(t_k)$ para $k = n, n+1$, y $y'_n$ a la aproximación de $y'(t_n)$, resulta la fórmula:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)(t_{n+1} - t)\, dt \\ &= y_n + h\, y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \right) (t_{n+1} - t)\, dt \,. \end{aligned}$$

Para calcular la integral anterior efectuamos el cambio de variable $s = \dfrac{t - t_n}{h}$, con lo que resulta $t = sh + t_n$, $dt = hds$, obteniendo como nuevos límites de integración

$$\begin{cases} t = t_n \Rightarrow s = 0 \\ t = t_{n+1} \Rightarrow s = 1 \end{cases}$$

siendo $t_{n+1} - t = t_n + h - (sh + t_n) = h(1-s)$, con lo que la fórmula anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, y'_n + \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s) h \nabla^j f_n\, h\, ds \\ &= y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s)\, ds \right] \nabla^j f_n \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Denotando a los coeficientes que aparecen entre corchetes por

$$\beta_j = \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s)\, ds\,, \tag{2.8}$$

se tendrá como ecuación de recurrencia para el método de Falkner explícito la fórmula (véase [36], [27])

$$y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n\,. \tag{2.9}$$

La fórmula en (2.9) será la que usemos en la implementación de los métodos, según veremos más adelante. Pero también es usual la presentación de fórmulas concretas expresadas en términos de las $f_{n-j} = f(t_{n-j})$, es decir, de los valores de la función en diferentes puntos de la malla. Utilizaremos también esta forma para obtener las expresiones de los errores acumulados para los diferentes métodos y también las condiciones de orden. Para obtenerlas utilizaremos la fórmula siguiente (véase [110])

$$\nabla^j f_n = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n-l}\,. \tag{2.10}$$

Partiendo de la fórmula en (2.9) y sustituyendo la anterior y reordenando se obtiene:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \\
&= y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n-l} \\
&= y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \left[ (-1)^l \sum_{j=l}^{k-1} \binom{j}{l} \beta_j \right] f_{n-l} \\
&= y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \bar{\beta}_l f_{n-l}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

siendo los coeficientes $\bar{\beta}_l$ los dados por

$$\bar{\beta}_l = (-1)^l \sum_{j=l}^{k-1} \binom{j}{l} \beta_j \,. \tag{2.12}$$

Nótese que los coeficientes $\bar{\beta}_l$ dependen también del número de pasos del método, $k$, y en realidad deberíamos haberlos denotado por $\bar{\beta}_{l\,k}$, pero, hecha esta observación, y puesto que consideraremos siempre fórmulas de $k$ pasos, para no complicar la notación seguiremos poniendo simplemente $\bar{\beta}_l$.

## 2.3. Cálculo de los coeficientes del método explícito.

Para la determinación de los coeficientes de la fórmula en (2.9) utilizaremos la técnica de las funciones generatrices de Euler. Pondremos

$$F_\beta(t) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \, t^j$$

y sustituiremos los coeficientes $\beta_j$ por el valor determinado en (2.8). Podemos escribir por tanto

$$\begin{aligned}
F_\beta(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} (1-s)\, ds \right) t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} (1-s)\, ds \\
&= \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-s}{j} (1-s)\, ds \\
&= \int_0^1 (1-t)^{-s} (1-s)\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)}{(1-t)^s}\, ds \,.
\end{aligned}$$

Esta última integral se puede resolver utilizando la técnica de integración por partes, donde ponemos

$$u = 1 - s\,, \qquad dv = \frac{ds}{(1-t)^s}\,,$$

siendo por tanto

$$du = -ds\,, \qquad v = \frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}$$

y resultando que

$$\begin{aligned} F_\beta(t) &= (1-s)\frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}\Big]_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \frac{1}{\ln(1-t)}\frac{1}{(1-t)^s}\,ds \\ &= \frac{1}{\ln(1-t)} + \left(\frac{(1-t)^{-s}}{(\ln(1-t))^2}\right)\Big]_{s=0}^{s=1} \\ &= \frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{1}{(1-t)(\ln(1-t))^2} - \frac{1}{(\ln(1-t))^2} \\ &= \frac{(1-t)\ln(1-t) + 1 - (1-t)}{(1-t)(\ln(1-t))^2} \\ &= \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{(1-t)\,\ln^2(1-t)}\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De esta manera, para calcular los coeficientes bastará hacer el desarrollo en potencias de $t$ de la función $F_\beta(t)$ y los coeficientes que se obtengan son los $\beta_j$ que aparecen en la ecuación de recurrencia del método. Hemos desarrollado con la ayuda del programa Mathematica la función anterior en serie de Taylor en $t = 0$ y los coeficientes que se obtienen se muestran en el Apéndice A para valores desde $k = 0$ hasta $k = 14$.

Por otro lado, si lo que se quiere es la forma explícita de las fórmulas dadas en (2.11), basta tener en cuenta la expresión de los coeficientes dados en (2.12) en función de los $\beta_j$ que ya podemos calcular. En el Apéndice B recogemos algunas de estas fórmulas desarrolladas, desde $k = 1$ hasta $k = 14$, junto con las fórmulas implícitas y las fórmulas para aproximar la derivada, que veremos más adelante.

### 2.3.1. Otro procedimiento para obtener los coeficientes $\beta_j$ mediante fórmulas de recurrencia

Siguiendo las ideas que aparecen en [59] a propósito de la obtención de los coeficientes de los métodos de Adams y de Störmer, presentamos otra manera de obtener los coeficientes $\beta_j$. Partimos de la función generatriz en (2.13)

$$F_\beta(t) = \frac{t + (1-t)\,\ln(1-t)}{(1-t)\,\ln^2(1-t)}$$

la cual podemos reordenar y poner en la forma

$$\ln^2(1-t)\,F_\beta(t) = \frac{t + (1-t)\,\ln(1-t)}{1-t}\,. \tag{2.14}$$

Teniendo en cuenta los desarrollos en serie de $\dfrac{1}{1-t}$ y de $\ln(1-t)$, que vienen dados por

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$
$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots$$

resulta que podemos poner

$$\frac{t + (1-t)\,\ln(1-t)}{1-t} = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}\,t^3 + \frac{3}{4}\,t^4 + \frac{4}{5}\,t^5 + \cdots = \sum_{j=2}^{\infty} t^j\,\frac{j-1}{j}\,,$$

y por otra parte se tiene

$$\begin{aligned}
\ln^2(1-t) &= \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots\right)^2 \\
&= \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots\right)\left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \dots\right) \\
&= t^2 + t^3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + t^4\left(\frac{1}{1}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\,\frac{1}{3}\right) \\
&\quad + t^5\left(\frac{1}{1}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1}\right) + \dots \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} t^j \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k\,(j-k)}\right) = \sum_{j=2}^{\infty} c_j\,t^j
\end{aligned}$$

siendo

$$c_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k\,(j-k)}\,. \tag{2.15}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\ln^2(1-t)\,F_\beta(t) &= \left(-t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \ldots\right)^2 \left(\beta_0 + \beta_1\,t + \beta_2\,t^2 + \beta_3\,t^3 + \ldots\right) \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} c_j t^j \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j\,t^j \\
&= \left(c_2\,t^2 + c_3\,t^3 + c_4\,t^4 + \ldots\right)\left(\beta_0 + \beta_1\,t + \beta_2\,t^2 + \ldots\right) \\
&= t^2\,c_2\,\beta_0 + t^3\,(c_2\,\beta_1 + c_3\,\beta_0) + t^4\,(c_2\,\beta_2 + c_3\,\beta_1 + c_4\,\beta_0) + \ldots \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} t^j \left(\sum_{k=2}^{j} c_k\,\beta_{j-k}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula en (2.14) las expresiones en serie anteriores resulta la igualdad

$$\sum_{j=2}^{\infty} t^j \left(\sum_{k=2}^{j} c_k\,\beta_{j-k}\right) = \sum_{j=2}^{\infty} t^j\,\frac{j-1}{j}$$

e identificando los coeficientes de los términos de igual grado se obtiene la recurrencia

$$\sum_{k=2}^{j} c_k\,\beta_{j-k} = \frac{j-1}{j} \qquad\qquad \text{para } j = 2, 3, 4, \ldots$$

donde los $c_k$ están definidos en (2.15).

Dando valores concretos a $j$ obtenemos:
Para $j = 2$:

$$c_2\,\beta_0 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_0 = \frac{1}{2\,c_2} = \frac{1}{2}$$

Para $j = 3$:

$$c_2\,\beta_1 + c_3\,\beta_0 = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 = \frac{1}{c_2}\left(\frac{2}{3} - c_3\,\beta_0\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Para $j = 4$:

$$c_2\,\beta_2 + c_3\,\beta_1 + c_4\,\beta_0 = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_2 = \frac{1}{c_2}\left[\frac{3}{4} - (c_3\,\beta_1 + c_4\,\beta_0)\right]$$

Para $j = 5$:

$$c_2\,\beta_3 + c_3\,\beta_2 + c_4\,\beta_1 + c_5\,\beta_0 = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_3 = \frac{1}{c_2}\left[\frac{4}{5} - (c_3\,\beta_2 + c_4\,\beta_1 + c_5\,\beta_0)\right]$$

Y en general, siendo $c_2 = 1$, podemos poner la fórmula de recurrencia para obtener los coeficientes $\beta_j$ en la forma

$$\beta_{j-2} = \frac{1}{c_2}\left[\frac{j-1}{j} - \sum_{k=3}^{j} c_k\,\beta_{j-k}\right] = \frac{j-1}{j} - \sum_{k=3}^{j} c_k\,\beta_{j-k} \qquad \text{para } j = 2, 3, 4, \ldots$$

## 2.4. Error de truncamiento local para el método de Falkner explícito

En general, cualquier algoritmo numérico proporciona una manera aproximada de calcular el valor de la solución buscada. La medida del error que se comete en cada paso se denomina error de truncamiento local, y depende del propio algoritmo, del tamaño del paso, y en el contexto en que nos situamos, por supuesto de la ecuación diferencial que se ha de resolver. En la determinación del error de truncamiento local se presupone la llamada hipótesis de localización, que consiste en suponer que los valores numéricos previamente calculados mediante el algoritmo son exactos ([75], [63]). Se trata pues de determinar qué error se comete en cada paso suponiendo que los datos anteriores no contienen errores, y excluyendo los errores debidos a las operaciones (errores de redondeo).

Al igual que para otros esquemas numéricos ([75], [54], [8]) consideramos una serie de definiciones en relación con los métodos numéricos que se abordan en esta memoria.

**Definición 2.4.1** *El operador en diferencias $\mathfrak{L}_\beta$ asociado con la fórmula que aparece en (2.9) se define como*

$$\mathfrak{L}_\beta\,(z(t); h) \;=\; z(t+h) - z(t) - h\,z'(t) - h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f(t, z(t), z'(t))\,,$$

*siendo $z(t) : [t_0, b] \to \mathbb{R}$ una función cualquiera suficientemente diferenciable.*

**Definición 2.4.2** *El método numérico para resolver el problema (2.1), dado por la fórmula (2.9) se dice consistente de orden p si* [1]

$$\mathfrak{L}_\beta\,(z(t);h) = O(h^{p+2})\,.$$

*En particular, si p es al menos uno, el método simplemente se dice que es* **consistente**.

**Definición 2.4.3** *Dada la fórmula de Falkner explícita en (2.9) se define el* **error de truncamiento local** *como el defecto de la solución $y(t)$ respecto de la ecuación en diferencias, esto es,*

$$\mathfrak{L}_\beta\,(y(t);h) = y(t+h) - y(t) - h\,y'(t) - h^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\nabla^j f(t,y(t),y'(t))\,.$$

Para obtener la expresión del error de truncamiento local del método de Falkner explícito partiremos de la fórmula en (2.5). Pasando todos los términos a un lado se tiene la igualdad

$$0 \;=\; y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) - \int_{t_n}^{t_n+h} f(t)(t_n+h-t)\,dt\,.$$

Efectuando el cambio de variable $t = t_n + s\,h$, $dt = h\,ds$ en la integral resulta,

$$\begin{cases} t = t_n \Rightarrow s = 0 \\ t = t_n + h \Rightarrow s = 1 \end{cases}$$

con lo que podemos escribir la fórmula anterior como

$$0 = y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) - \int_0^1 f(t_n+s\,h)(h-sh)h\,ds\,.$$

Si ahora consideramos la igualdad que expresa a $f(t)$ como la suma del polinomio de interpolación en los nodos elegidos, $t_{n-(k-1)},\ldots,t_n$, más el error de interpolación correspondiente, tendremos que

$$f(t) = f(t_n+s\,h) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j f_n + (-1)^k\binom{-s}{k}h^k\,y^{k+2)}(\xi_s)\,,$$

[1] Se dice que $g(h) = \mathcal{O}(h^p)$ si existe $C > 0$ tal que $|g(h)| < C\,h^p$ cuando $h \to 0$.

donde $\xi_s$ es un punto intermedio entre $t = t_n + sh$ y los nodos de interpolación. Si sustituimos esta expresión en la integral, resulta:

$$\begin{aligned}
0 &= y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) \\
&\quad - \int_0^1 \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j f_n + (-1)^k\binom{-s}{k} h^k\, y^{k+2)}(\xi_s)\right](1-s)\,h^2\,ds \\
&= y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) \\
&\quad -h^2\sum_{j=0}^{k-1}\int_0^1 (-1)^j\binom{-s}{j}(1-s)\,ds\nabla^j f_n \\
&\quad -h^{k+2}\int_0^1 (-1)^k\binom{-s}{k}(1-s)\,y^{k+2)}(\xi_s)\,ds \\
&= y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) \\
&\quad -h^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\nabla^j f_n - h^{k+2}\int_0^1 (-1)^k\binom{-s}{k}(1-s)\,y^{k+2)}(\xi_s)\,ds \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta en la última igualdad la expresión de los coeficientes $\beta_j$ dada en (2.8).

En la integral última que aparece en la fórmula anterior, como $(-1)^k\binom{-s}{j}(1-s)$ no cambia de signo en el intervalo $[0,1]$, por el Teorema generalizado del valor medio podemos poner

$$\int_0^1 (-1)^k\binom{-s}{k}(1-s)\,y^{k+2)}(\xi_s)\,ds = y^{k+2)}(\bar{\xi})\int_0^1 (-1)^k\binom{-s}{k}(1-s)\;ds$$

lo que se traduce en

$$\int_0^1 (-1)^k\binom{-s}{k}(1-s)\,y^{k+2)}(\xi_s)\,ds = y^{k+2)}(\bar{\xi})\beta_k\,.$$

Si sustituimos en la fórmula (2.16) el valor obtenido para esta última integral y tenemos en cuenta la definición del error de truncamiento local en la Definición 2.4.3 resulta finalmente que

$$\begin{aligned} 0 &= y(t_n+h) - y(t_n) - h\,y'(t_n) - h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \\ &\quad -h^{k+2} y^{k+2)}(\bar{\xi})\beta_k \\ &= \mathfrak{L}_\beta\,(y(t_n); h) - h^{k+2} y^{k+2)}(\bar{\xi})\beta_k \end{aligned}$$

es decir, el error de truncamiento local en el punto $t_n$ resulta ser

$$\mathfrak{L}_\beta\,(y(t_n); h) \;=\; \beta_k\, h^{k+2} y^{k+2)}(\bar{\xi}) = O(h^{k+2})\,, \tag{2.17}$$

lo que indica que el método de Falkner explícito de $k$ pasos es un método consistente de orden $k$. El coeficiente $\beta_k$ que aparece en la fórmula anterior se llama constante del error.

## 2.5. Fórmula para seguir la derivada en el método explícito

La fórmula explícita de Falkner obtenida en (2.9) resulta por sí sola insuficiente para proporcionar una solución discreta aproximada del problema de valor inicial. Como observamos, en dicha fórmula aparece $y'_n$, la aproximación de la derivada en el punto $t_n$. En el primer paso este valor es conocido puesto que es parte de los datos iniciales, es el $y'_0$, pero cuando volvamos a querer aplicar el método necesitaremos el valor de la derivada en el punto siguiente de la red, esto es, el valor $y'_1$, y así sucesivamente. Para poder obtener estas aproximaciones de la derivada en los diferentes puntos de la red se necesita otra fórmula. Considerando la ecuación diferencial del problema (2.1) escrita en la forma $(y')' = f(t)$, la podemos interpretar como una ecuación diferencial de primer orden de la función $y'$ y aplicar el método de Adams-Bashforth de $k$ pasos (véase [76]) para obtener la aproximación $y'_{n+1}$, suponiendo conocido el valor anterior $y'_n$ y los valores necesarios para aplicar la fórmula multipaso. El esquema numérico resultante queda

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n\,,$$

donde los coeficientes del método vienen dados por (véase [59])

$$\gamma_j = \int_0^1 (-1)^j \binom{-s}{j} \, ds \, .$$

Utilizando la fórmula en (2.10) la fórmula anterior, al igual que hicimos con la fórmula explícita de Falkner, también se puede escribir en términos de la función evaluada en los nodos de interpolación, en la forma

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{l=0}^{k-1} \bar{\gamma}_l f_{n-l} \, ,$$

donde los coeficientes $\bar{\gamma}_l$ están dados por

$$\bar{\gamma}_l = (-1)^l \sum_{j=l}^{k-1} \binom{j}{l} \gamma_l \, . \tag{2.18}$$

La función generatriz de los coeficientes está dada en este caso por

$$F_\gamma = \frac{-t}{(1-t)\ln(1-t)}$$

y el error de truncamiento local se expresa en la forma

$$\mathfrak{L}_\gamma \left(y'(t_n); h\right) \;\; = \;\; \gamma_k \, h^{k+1} y^{k+2)}(\bar{\xi}) \, , \tag{2.19}$$

correspondiendo a un método consistente de orden $k$, y donde la constante del error está dada por el coeficiente $\gamma_k$.

Teniendo en cuenta la fórmula en (2.9) junto con la fórmula anterior para la derivada, podemos concluir que el método de Falkner explícito para resolver el problema en (2.1) está dado por la pareja de fórmulas

$$\boxed{\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \\ \\ y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n \, . \end{cases}} \tag{2.20}$$

## 2.6. Formulación del método de Falkner implícito

La obtención de la fórmula de Falkner implícita, los coeficientes correspondientes, y la expresión del error de truncamiento local siguen un proceso similar al del caso explícito. La única diferencia está en que la aproximación de la función $f(t)$ se realiza mediante el polinomio de interpolación en los nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n, t_{n+1}$, es decir, ahora también se tiene en cuenta el punto $t_{n+1}$. Precisamente la consideración del nodo añadido $t_{n+1}$ es lo que le confiere el carácter implícito a la fórmula que se obtiene.

Ahora, siendo $s = \dfrac{t - t_{n+1}}{h}$, el polinomio de interpolación se escribe [61]

$$p(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1}\,,$$

de manera que, si en la fórmula (2.5) aproximamos $f(t)$ por el polinomio de interpolación anterior, y llamamos $y_k$ a la aproximación de $y(t_k)$ para $k = n, n+1$, resulta:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)(t_{n+1} - t)\, dt \\ &= y_n + h\, y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1} \right) (t_{n+1} - t)\, dt\,. \end{aligned}$$

Si ahora realizamos el cambio de variable en la integral dado por

$$\begin{cases} t = t_{n+1} + s\, h \\ t_{n+1} - t = -s\, h \\ dt = h\, ds \end{cases}$$

resultan los nuevos límites de integración

$$\begin{cases} t = t_{n+1} \Rightarrow -s\, h = 0 \Rightarrow s = 0 \\ t = t_n \Rightarrow h = -s\, h \Rightarrow s = -1 \end{cases}$$

y la fórmula anterior se puede poner como

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)\,(t_{n+1}-t)\,dt \\ &= y_n + h\,y'_n + \int_{-1}^{0} p(t_{n+1}+sh)(-sh)h\,ds \\ &= y_n + h\,y'_n - h^2 \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1}\, s\, ds \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \left[ -\int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} s\, ds \right] \nabla^j f_{n+1} \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1}\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde hemos denotando a los coeficientes que aparecen entre corchetes en el sumatorio anterior por

$$\beta_j^* = -\int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} s\, ds\,. \tag{2.22}$$

Se obtiene así como ecuación de recurrencia para el método de Falkner implícito la fórmula (véase [36], [27])

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^*\, \nabla^j f_{n+1}\,.} \tag{2.23}$$

Al igual que en en caso explícito, si se quiere expresar la fórmula (2.23) en términos de las $f_{n+1-j}$, lo cual nos será útil para el cálculo de los errores acumulados, se considera la igualdad (véase [110])

$$\nabla^j f_{n+1} = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n+1-l}\,,$$

y sustituyendo y reordenando en la fórmula del método, resulta:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \,\nabla^j f_{n+1} \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} f_{n+1-l} \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{l=0}^{k} \left[ (-1)^l \sum_{j=l}^{k} \binom{j}{l} \beta_j^* \right] f_{n+1-l} \\ &= y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{l=0}^{k} \bar{\beta}_l^* f_{n+1-l} \end{aligned} \tag{2.24}$$

estando los coeficientes $\bar{\beta}_l^*$ dados por

$$\bar{\beta}_l^* = (-1)^l \sum_{j=l}^{k} \binom{j}{l} \beta_j^* \,. \tag{2.25}$$

De nuevo hay que hacer una observación parecida a la que hicimos para los coeficientes del método explícito, en el sentido de que aunque los coeficientes $\bar{\beta}_l^*$ también dependen de $k$, en lugar de denotarlos por $\bar{\beta}_{l\,k}^*$, simplemente pondremos $\bar{\beta}_l^*$.

## 2.7. Cálculo de los coeficientes del método implícito

De nuevo, para la determinación de los coeficientes $\beta_j^*$ utilizamos la técnica de las funciones generatrices de Euler. Si llamamos

$$F_{\beta^*}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^* t^j$$

y tenemos en cuenta la expresión de los coeficientes en (2.22), resulta

$$\begin{aligned} F_{\beta^*}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^* t^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( - \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} s \, ds \right) t^j \\ &= - \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-s}{j} t^j s \, ds \\ &= - \int_{-1}^{0} (1-t)^{-s} s \, ds \, . \end{aligned}$$

Esta última integral se puede obtener mediante el método de integración por partes, tomando

$$u = s \, , \qquad dv = (1-t)^{-s} \, ds$$

con lo que se obtiene finalmente que la función generatriz para los coeficientes del método implícito es

$$F_{\beta^*}(t) = \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{\ln^2(1-t)} \, .$$

En cuanto a los coeficientes $\bar{\beta}_l^*$ que aparecen en la fórmula (2.24), una vez que se conocen los coeficientes $\beta_j^*$, pueden obtenerse sin dificultad a partir de la fórmula que los relaciona en (2.25).

**Nota 2.7.1** *Una vez que se conocen los coeficientes $\beta_j$, a partir de la relación de las funciones generatrices $F_\beta(t)$ y $F_{\beta^*}(t)$ es posible obtener una relación de recurrencia que permite obtener los coeficientes $\beta_j^*$, pues se tiene*

$$F_{\beta^*}(t) = (1-t) \, F_\beta(t) \, ,$$

*de donde resulta*

$$\beta_0^* + \beta_1^* \, t + \beta_2^* \, t^2 + \cdots = \beta_0 + (\beta_1 - \beta_0) \, t + (\beta_2 - \beta_1) \, t^2 + \ldots$$

*e igualando los coeficientes de los términos de igual grado se obtiene la recurrencia*

$$\beta_0^* = \beta_0 \, , \qquad \beta_j^* = \beta_j - \beta_{j-1} \, , \qquad j \geq 1 \, .$$

## 2.8. Error de truncamiento local para el método de Falkner implícito

En el caso del método implícito las definiciones del caso explícito se trasladan aquí con mínimas variaciones, las cuales resultan obvias.

**Definición 2.8.1** *El operador en diferencias $\mathfrak{L}_{\beta^*}$ asociado con la fórmula que aparece en (2.23) se define como*

$$\mathfrak{L}_{\beta^*}\left(z(t);h\right) \;=\; z(t+h) - z(t) - h\,z'(t) - h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j^*\nabla^j f(t+h, z(t+h), z'(t+h))\,,$$

*siendo $z(t):[t_0,b]\to\mathbb{R}$ una función cualquiera suficientemente diferenciable.*

**Definición 2.8.2** *El método numérico para resolver el problema (2.1), dado por la fórmula (2.23) se dice consistente de orden $p$ si*

$$\mathfrak{L}_{\beta^*}\left(z(t);h\right) = O(h^{p+2})\,.$$

*En particular, si $p$ es al menos uno, el método simplemente se dice que es* **consistente**.

**Definición 2.8.3** *Dada la fórmula de Falkner implícita en (2.23) se define el* **error de truncamiento local** *como el defecto de la solución $y(t)$ respecto de la ecuación en diferencias, esto es,*

$$\mathfrak{L}_{\beta^*}\left(y(t);h\right) = y(t+h) - y(t) - h\,y'(t) - h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j^*\nabla^j f(t+h, y(t+h), y'(t+h))\,.$$

Para obtener la expresión del error de truncamiento local del método de Falkner implícito partiremos de nuevo de la fórmula exacta en (2.5), la cual escribimos en la forma

$$0 = y(t_n+h) - y(t_n) - hy'(t_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)(t_n+h-t)\,dt$$

y tras hacer el cambio de variable $t = t_{n+1} + s\,h$, $dt = h\,ds$ en la integral y sustituir la función $f(t)$ por la suma del polinomio de interpolación en los nodos $t_{n-(k-1)},\ldots,t_n,t_{n+1}$ más el error de interpolación correspondiente, es decir,

$$f(t) = f(t_{n+1}+s\,h) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j f_{n+1} + (-1)^{k+1}\binom{-s}{k+1}h^{k+1}\,y^{k+3)}(\xi_s)$$

resulta:

$$\begin{aligned}
0 &= y(t_n+h)-y(t_n)-hy'(t_n) \\
&\quad -\int_{-1}^{0}\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{-s}{j}\nabla^j f_{n+1}+(-1)^{k+1}\binom{-s}{k+1}h^{k+1}y^{k+3)}(\xi)\,sh\,h\,ds \\
&= y(t_n+h)-y(t_n)-hy'(t_n) \\
&\quad -h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j^*\nabla^j f_{n+1}-\int_{-1}^{0}(-1)^{k+1}\binom{-s}{k+1}h^{k+1}y^{k+3)}(\xi)\,sh\,h\,ds \\
&= y(t_n+h)-y(t_n)-hy'(t_n) \\
&\quad -h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j^*\nabla^j f_{n+1}-\left[\int_{-1}^{0}(-1)^{k+1}\binom{-s}{k+1}s\,ds\right]h^{k+3}y^{k+3)}(\xi_s) \\
&= y(t_n+h)-y(t_n)-hy'(t_n)-h^2\sum_{j=1}^{k}\beta_j^*\nabla^j f_{n+1} \\
&\quad -\beta_{k+1}^*h^{k+3}y^{k+3)}(\xi_s) \\
&= \mathfrak{L}_{\beta^*}\left(y(t_n);h\right)-\beta_{k+1}^*h^{k+3}y^{k+3)}(\bar{\xi})
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que el error de truncamiento local en el punto $t_n$ es

$$\mathfrak{L}_{\beta^*}\left(y(t_n);h\right)=\beta_{k+1}^*\,h^{k+3}y^{k+3)}(\bar{\xi})=O(h^{k+3})\,, \tag{2.26}$$

lo que indica que el método de Falkner implícito de $k$ pasos es un método de orden $k+1$ con constante de error $\beta_{k+1}^*$.

## 2.9. Fórmula para seguir la derivada en el método implícito

Al igual que en el caso explícito, la fórmula implícita de Falkner obtenida en (2.23) resulta insuficiente para obtener la solución discreta del problema de valor

inicial. Se necesita otra fórmula para poder obtener las aproximaciones de la derivada primera en los diferentes puntos de la red y poder ir dando sucesivos pasos en la integración. Considerando la ecuación diferencial del problema (2.1) escrita en la forma $(y')' = f(t)$, la podemos interpretar como una ecuación diferencial de primer orden de la función $y'$ y aplicar el método de Adams-Moulton de $k$ pasos (véase [76]) para obtener la aproximación $y'_{n+1}$, suponiendo conocido el valor anterior $y'_n$ y los valores necesarios para poder aplicar la fórmula multipaso elegida. El esquema numérico resultante queda

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1} \,,$$

donde los coeficientes del método vienen dados por (véase [59])

$$\gamma_j^* = \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} \, ds \,.$$

Esta fórmula también se puede expresar en términos de la evaluaciones de la función en los nodos de interpolación, resultando que se puede poner

$$y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{l=0}^{k} \bar{\gamma}_l^* f_{n+1-l} \,,$$

donde los coeficientes $\bar{\gamma}_l^*$ están dados por

$$\bar{\gamma}_l^* = (-1)^l \sum_{j=l}^{k} \binom{j}{l} \gamma_j^* \,. \tag{2.27}$$

La función generatriz de los coeficientes está dada en este caso por

$$F_{\gamma^*} = \frac{-t}{\ln(1-t)}$$

y el error de truncamiento local se expresa en la forma

$$\mathfrak{L}_{\gamma^*}\left(y'(t_n); h\right) \;=\; \gamma_{k+1}^* \, h^{k+2} y^{k+3)}(\bar{\xi}) \,, \tag{2.28}$$

correspondiendo a un método de orden $k+1$, y donde la constante del error está dada por el coeficiente $\gamma_{k+1}^*$.

Teniendo en cuenta la fórmula en (2.23) junto con la fórmula que acabamos de indicar para la derivada primera, podemos concluir que el método de Falkner implícito para resolver el problema en (2.1) está dado por la pareja de fórmulas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_{n+1} \\ y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1}\,. \end{cases} \tag{2.29}$$

## 2.10. Consistencia y estabilidad de los métodos

En el contexto de las ecuaciones diferenciales los conceptos de consistencia y estabilidad estudian en qué medida un esquema numérico resulta adecuado para resolver un problema de valor inicial.

La consistencia está relacionada con la precisión con que el esquema en diferencias reproduce el sistema diferencial. Si se sustituye el valor exacto del sistema en el esquema en diferencias tendremos una idea sobre la precisión del mismo.

En cuanto a la estabilidad, podemos afirmar que un método numérico es estable si pequeñas variaciones en los datos del problema originan pequeños cambios en la solución del mismo.

Abordaremos el estudio de la consistencia y estabilidad de estos métodos numéricos basándonos en los resultados aparecidos sobre métodos lineales multipaso para ecuaciones de orden dos (véase [54]). Hay que señalar que en esta referencia se consideran sistemas autónomos de la forma $y'' = f(y)$, lo cual no supondrá inconveniente alguno para poderlo aplicar a nuestro caso, ya que siempre es posible expresar un problema no autónomo en forma autónoma, sin más que introducir una nueva variable y aumentar en una unidad la dimensión del sistema.

### 2.10.1. Consistencia

Realizaremos el estudio de la consistencia con detalle en el caso del método implícito y para el esquema explícito se procedería de manera análoga. Para ello

comenzaremos considerando la noción de consistencia según [54], que se recoge en la siguiente definición.

**Definición 2.10.1** *Diremos que un método para resolver el problema en (2.1) dado por un par de fórmulas de la forma*

$$y_{n+1} = \Phi_f \left(h, t_n, y_{n-(k-1)}, \ldots, y_{n+1}, y'_{n-(k-1)}, \ldots, y'_{n+1}\right)$$

$$y'_{n+1} = \Psi_f \left(h, t_n, y_{n-(k-1)}, \ldots, y_{n+1}, y'_{n-(k-1)}, \ldots, y'_{n+1}\right)$$

*es consistente de órdenes $(p, q)$ si*

$$y(t_{n+1}) - \Phi_f \left((h, t_n, y(t_{n-(k-1)}), \ldots, y(t_{n+1}), y'(t_{n-(k-1)}), \ldots, y'(t_{n+1})\right) = \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$y'(t_{n+1}) - \Psi_f \left(h, t_n, y(t_{n-(k-1)}), \ldots, y(t_{n+1}), y'(t_{n-(k-1)}), \ldots, y'(t_{n+1})\right) = \mathcal{O}(h^{q+1}) \,,$$

*donde $t_n$ es un punto cualquiera de la red. En particular, cuando $p = q$ diremos que el método es consistente de orden $p$. Y si $p$ y $q$ son al menos uno, el método se dice simplemente que es consistente.*

El subíndice $f$ que aparece en las funciones de la parte derecha de las fórmulas indica que la dependencia de $\Phi$ y $\Psi$ de sus argumentos es a través de la función $f(t, y, y')$.

El concepto de consistencia está estrechamente relacionado con el error de truncamiento local. De hecho, las expresiones de los errores de truncamiento local en (2.17), (2.19), (2.26) y (2.28) para cada una de las distintas fórmulas involucradas permite obtener de manera directa el resultado siguiente.

**Proposición 2.10.1** *El método de Falkner explícito de $k$ pasos dado por las fórmulas en (2.20) es consistente de orden $k$, y el método de Falkner implícito de $k$ pasos dado por las fórmulas en (2.29) es consistente de orden $k + 1$.*

También las expresiones de los errores de truncamiento permiten determinar ciertas ecuaciones diferenciales para las que los métodos de Falkner proporcionan desde el punto de vista teórico soluciones exactas (aunque en la práctica los errores de redondeo harán que las soluciones obtenidas no sean exactas). Ello ocurrirá cuando las soluciones sean de tipo polinómico, como se recoge en los siguientes enunciados.

**Proposición 2.10.2** *El método de Falkner explícito de k pasos dado por las fórmulas en (2.20) integra las ecuaciones diferenciales de la forma*

$$y'' = t^q\,, \qquad q = 0, \ldots, k-1$$

*de manera exacta, salvo errores de redondeo.*

**Demostración:**

A partir de las fórmulas para los errores de truncamiento en (2.17) y (2.19) es evidente que cuando la solución sea un polinomio de grado $k+1$ o menor, estos errores serán nulos. □

**Proposición 2.10.3** *El método de Falkner implícito de k pasos dado por las fórmulas en (2.29) integra las ecuaciones diferenciales de la forma*

$$y'' = t^q\,, \qquad q = 0, \ldots, k$$

*de manera exacta, salvo errores de redondeo.*

**Demostración:**

A partir de las fórmulas para los errores de truncamiento en (2.26) y (2.28) es evidente que cuando la solución sea un polinomio de grado hasta $k+2$ o menor, entonces estos errores serán nulos. □

En general se tendrá que el método de Falkner explícito integra exactamente salvo errores de redondeo las ecuaciones de la forma $y'' = P_{k-1}(t)$ , donde $P_{k-1}(t)$ es un polinomio cualquiera de grado menor o igual que $k-1$, y el método de Falkner implícito hace lo mismo con la ecuaciones de la forma $y'' = P_k(t)$ , donde $P_k(t)$ es un polinomio cualquiera de grado menor o igual que $k$. Los resultados anteriores pueden tomarse como definición para caracterizar los métodos de determinado orden, e incluso pueden tomarse como la definición del orden de un método, como se hace en [54]. También nos permiten obtener las llamadas condiciones de orden, es decir, las relaciones que deben verificar los coeficientes del método para alcanzar un orden determinado. Las desarrollamos para las fórmulas de Falkner. Para las fórmulas de Adams para aproximar las derivadas también se verifican las correspondientes condiciones de orden, las cuales pueden verse en [54]. Expresamos dichas condiciones en forma de proposiciones.

**Proposición 2.10.4** *Si el método de Falkner explícito de k pasos dado por las fórmulas en (2.20) es de orden k entonces se verifica que*

$$1 + (-1)^{q-1} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i \, q(q-1) \, i^{q-2} = 0 \,, \qquad q = 0, \ldots, k+1 \,.$$

**Demostración:**

Consideramos las funciones $y(t) = t^q$ para $q = 0, \ldots, k+1$, para las cuales sabemos que el método de Falkner explícito tiene error de truncamiento local nulo. Entonces, teniendo en cuenta la definición del error de truncamiento local, considerando el sumatorio en términos de los coeficientes $\bar{\beta}_j$ como en (2.11) podemos poner

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{L}_\beta \left(y(0); h\right) = y(h) - y(0) - h\, y'(0) - h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i y''(-ih) \\ &= h^q - h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i \, q(q-1) \, (-ih)^{q-2} \\ &= h^q \left(1 + (-1)^{q-1}\right) \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\beta}_i \, q(q-1) \, i^{q-2} \,, \qquad q = 0, \ldots, k+1 \,, \end{aligned}$$

de donde resulta trivialmente el enunciado. □

**Proposición 2.10.5** *Si el método de Falkner implícito de k pasos dado por las fórmulas en (2.29) es de orden k + 1 entonces se verifica que*

$$1 + (-1)^{q-1} \sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_i^* \, q(q-1) \, i^{q-2} = 0 \,, \qquad q = 0, \ldots, k+2 \,.$$

**Demostración:**

Consideramos las funciones $y(t) = t^q$ para $q = 0, \ldots, k+2$, para las cuales sabemos que el método de Falkner implícito tiene error de truncamiento local nulo. Entonces, teniendo en cuenta la definición del error de truncamiento local, considerando el sumatorio en términos de los coeficientes $\bar{\beta}_j^*$ como en (2.24) podemos

poner

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{L}_{\beta^*}\left(y(0);h\right) = y(h) - y(0) - h\,y'(0) - h^2\sum_{i=0}^{k}\bar{\beta}_i^* y''(-ih) \\ &= h^q - h^2\sum_{i=0}^{k}\bar{\beta}_i^*\, q(q-1)\,(-ih)^{q-2} \\ &= h^q\left(1+(-1)^{q-1}\right)\sum_{i=0}^{k}\bar{\beta}_i^*\, q(q-1)\,i^{q-2}\,, \qquad q=0,\ldots,k+2\,, \end{aligned}$$

de donde resulta trivialmente el enunciado. □

### 2.10.2. Estabilidad

El estudio de la estabilidad de los métodos de Falkner puede abordarse considerando la definición de estabilidad dada por Hairer y Wanner [54], o bien utilizando la teoría del radio espectral de una familia de matrices como se describe en [52] (aunque esta técnica no está exenta de complicación y el grado de dificultad aumenta con el orden de la ecuación en diferencias. Además, las condiciones que se imponen son más restrictivas de lo necesario). El procedimiento utilizado para ello consiste en escribir la ecuación en diferencias como una recurrencia de un paso en un espacio de mayor dimensión utilizando notación matricial, y tratar de acotar en una norma adecuada los productos de las matrices resultantes [17], [29], [54].

Realizaremos sólo el estudio del método explícito de Falkner, y para el implícito se puede realizar un análisis similar. Sea el método de Falkner explícito dado por la pareja de fórmulas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + h^2\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\nabla^j f_n \\ y'_{n+1} = y'_n + h\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j\nabla^j f_n \end{cases} \tag{2.30}$$

donde $h = t_j - t_{j-1}$ es el tamaño de paso fijo entre cada dos puntos de la malla $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$. Para reformular el método como una recurrencia de un paso introducimos una nueva variable dada por

$$v_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}\,,$$

y los vectores $V_n$ y $E_n$ de orden $k+1$, dados por

$$\begin{aligned} V_n &= \left(y_n, y'_n, v_n, \ldots, v_{n-(k-2)}\right) , \\ E_n &= \left(h\,\Psi_n, \Phi_n, \Psi_n, 0, \ldots, 0\right) , \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \ \bigtriangledown^j \ f_n \, , \\ \Phi_n &= \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \ \bigtriangledown^j \ f_n \, . \end{aligned}$$

El método anterior se puede expresar entonces en la forma

$$V_{n+1} = A\,V_n + h\,E_n \, , \tag{2.31}$$

donde $A$ es la matriz de orden $(k+1)\times(k+1)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Llegados a este punto, consideramos la definición de estabilidad para un método formulado en notación matricial en términos de la acotación del producto de matrices (véase [54]):

**Definición 2.10.2** *Diremos que el método en (2.31) es estable si* $\|A^j\| \leq M$ *para* $k-1 \leq j \leq N$ *siendo* $0 < M \in \mathbb{R}$ *y* $N$ *el número de intervalos de integración.*

Para llegar al resultado sobre la estabilidad necesitamos el siguiente lema.

**Lema 2.10.1** *El producto de* $m$ *veces la matriz* $A$ *de orden* $k+1$*, siendo* $m \geq k-1$*,*

*es*

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & m\,h & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Demostración:**

Veremos en primer lugar que el producto de $k-1$ veces la matriz $A$ de orden $k+1$ es

$$A^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & (k-1)h & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procediendo por inducción sobre $k$ se tiene que para $k=3$ es

$$\begin{aligned} A\,A &= \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo que el enunciado es cierto para este primer valor.

Aplicando la hipótesis de inducción, suponemos que el producto de $k-2$ matrices de la forma del enunciado, cada una de ellas de orden $k$, será de la forma señalada en el enunciado de la proposición. Entonces, si en el producto de $k-1$ matrices de la forma del enunciado, cada una de ellas de orden igual a $k+1$, consideramos el producto de las $k-2$ primeras y consideramos en cada una de estas matrices $A$ la submatriz de orden $k$, que denotamos por $A^{(k)}$, y aplicamos la hipótesis de inducción podremos poner

$$A^{k-1} = A^{k-2}A = \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{(k)} & & \vdots \\ \hline 0 & & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \dots \quad \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{(k)} & & \vdots \\ \hline 0 & & 1 & 0 \end{array}\right) A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (k-2)h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (k-1)h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que queda demostrado.

A partir de aquí es fácil demostrar que si se multiplican $m$ matrices de orden $k+1$ con $m > k-1$ se obtiene la matriz

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & m\,h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Proposición 2.10.6** *El método de Falkner explícito dado en (2.30) es estable.*

**Demostración:**

Si consideramos por ejemplo la norma $\|\cdot\|_1$ dada por

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i a_{i\,j}$$

a partir del lema anterior se obtiene inmediatamente que

$$\|A^m\|_1 = m\,h + k \leq (t_N - t_0) + k = M\,,$$

con lo que según la definición anterior, el método será estable. □

### 2.10.3. Convergencia

Intuitivamente cabe esperar de un método numérico que el error que lleva asociada cierta estimación será menor cuanto más pequeño se hace el tamaño del paso $h$. Entonces, cuando $h \to 0$ la solución numérica debería coincidir con la solución exacta. Esta consideración está relacionada con el concepto de convergencia. Siguiendo la exposición de Hairer et al. en [54] establecemos la siguiente definición:

**Definición 2.10.3** *Un método numérico para resolver un problema de valor inicial de la forma* $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$ , $y(t_0) = y_0$ , $y'(t_0) = \dot{y_0}$, *con* $f$ *suficientemente diferenciable se dice convergente de orden* $p$ *si se tiene que*

$$||y(t_n) - y_n|| \leq C\,h^p \tag{2.32}$$

*para* $t_n \in [t_0, b]$ , *siendo* $C > 0$ *cierta constante real y* $h$ *el tamaño del paso. En particular, si se toma* $nh$ *constante, en el límite cuando* $h \to 0$ *se tiene que* $||y(t_n) - y_n|| \to 0$ *y en tal caso el método numérico se dice convergente.*

La demostración de la convergencia de un esquema numérico se obtiene a partir de la famosa equivalencia

$$estabilidad + consistencia \Longleftrightarrow convergencia$$

que queda recogida en el siguiente teorema (véase [54] o [121]).

**Teorema 2.10.1** *Para el problema de valor inicial*

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \quad y'(t_0) = \dot{y_0}\,,$$

*suponiendo que en los valores de arranque se satisface* $||y(t_i) - y_i|| \leq C_0\,h^p$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ *se tiene que si el método numérico es de orden* $p$ *y estable entonces es convergente de orden* $p$, *y en tal caso el error global del método satisface*

$$||y(t_n) - y_n|| \leq C\,h^p \quad para \quad t_n - t_0 = nh \quad constante\,. \tag{2.33}$$

**Proposición 2.10.7** *Los métodos Falkner explícitos e implícitos dados respectivamente por las fórmulas en (2.20) y en (2.29) son convergentes.*

**Demostración:**

La aplicación directa del teorema anterior, y dado que los métodos estudiados son de orden $k$ (Falkner explícito) y de orden $k+1$ (Falkner implícito) y estables, permite concluir que los métodos son convergentes de órdenes $k$ y $k+1$ respectivamente. □

## 2.11. Obtención de los métodos de Störmer-Cowell a partir de los de Falkner

Los métodos explícitos de Störmer y los correspondientes implícitos de Cowell ([54], p. 462 y ss.) son conocidos métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial de segundo orden donde la ecuación diferencial es de la forma $y'' = f(t, y)$. Estos métodos se pueden obtener a partir de las fórmulas de Falkner, como casos particulares para el tipo de ecuación señalada, en la forma que veremos a continuación.

### 2.11.1. Métodos de Störmer

Reproducimos aquí la fórmula exacta que aparecía en (2.5) siendo $y(t)$ la solución del problema de valor inicial en (2.2),

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)(t_{n+1} - t)\, dt\,, \tag{2.34}$$

donde $t_{n+1} = t_n + h$. Si cambiamos $h$ por $-h$ en la fórmula anterior resulta la fórmula

$$y(t_{n-1}) = y(t_n) - h\, y'(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n-1}} f(t)\,(t_{n-1} - t)\, dt\,. \tag{2.35}$$

Y si ahora aproximamos como en el método de Falkner explícito la función $f$ por el polinomio de interpolación en los puntos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n$ y llamamos $y_k$ a la aproximación de $y(t_k)$ para $k = n, n+1$, resulta la fórmula

$$y_{n-1} \;=\; y_n - h\, y'_n + \int_{t_n}^{t_{n-1}} p(t)\,(t_{n-1} - t)\, dt\,.$$

Haciendo el cambio de variable $t = t_n + s\,h\,, dt = h\,ds$ en la integral y sustituyendo el polinomio de interpolación por la expresión en términos de las diferencias regresivas como en (2.6) resulta

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= y_n - h\,y'_n + \int_0^{-1} p\,(t)(-h - s\,h)\,h\,ds \\ &= y_n - h\,y'_n + \int_{-1}^{0} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n\, h^2(1+s)\,ds \\ &= y_n - h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} (1+s)\,ds \right] \nabla^j f_n \\ &= y_n - h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{\beta}_j \nabla^j f_n \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde los coeficientes $\widetilde{\beta}_j$ están dados por

$$\widetilde{\beta}_j = \int_{-1}^{0} (-1)^j \binom{-s}{j} (1+s)\,ds\,.$$

La función generatriz que se obtiene para estos coeficientes está dada por:

$$\begin{aligned} F_{\widetilde{\beta}_j}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{\beta}_j\, t^j = \int_{-1}^{0} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-s}{j} \right] (1+s)\,ds \\ &= \int_{-1}^{0} (1-t)^{-s}(1+s)\,ds = \frac{-t - \ln(1-t)}{\ln^2(1-t)}\,, \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde hemos utilizado la integración por partes, tomando $u = 1+s,\ dv = \dfrac{ds}{(1-t)^s}$, para resolver la integral.

Recordamos que la fórmula de Falkner explícita se expresaba en la forma

$$y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n\,. \tag{2.38}$$

Sumando las fórmulas en (2.38) y (2.36) (donde hemos dejado los coeficientes expresados en la forma integral para ver qué forma tienen los nuevos coeficientes que

se obtengan) tenemos

$$y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1} =$$
$$h^2 \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ \int_0^1 \binom{-s}{j} (1-s)\,ds + \int_{-1}^0 \binom{-s}{j} (1+s)\,ds \right] \nabla^j f_n\,.$$

Haciendo el cambio de variable $s = -v$, $ds = -dv$ en la segunda integral tenemos

$$\begin{aligned} & y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1} \\ & \quad = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[ \int_0^1 \binom{-s}{j} (1-s)\,ds + \int_{-1}^0 \binom{-s}{j} (1+s)\,ds \right] \nabla^j f_n \\ & \quad = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 \left[ \binom{-s}{j} (1-s) + \binom{s}{j} (1-s) \right] ds \nabla^j f_n \\ & \quad = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \int_0^1 (1-s) \left[ \binom{s}{j} + \binom{-s}{j} \right] ds \nabla^j f_n \\ & \quad = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \nabla^j f_n\,, \end{aligned}$$

resultando la fórmula explícita de Störmer dada por (véase [54], p. 462)

$$y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \nabla^j f_n$$

donde los coeficientes del método están dados por

$$\delta_j = \beta_j + \widetilde{\beta}_j = (-1)^j \int_0^1 (1-s) \left[ \binom{s}{j} + \binom{-s}{j} \right] ds\,.$$

Como conocemos las funciones generatrices de los coeficientes $\beta_j$ y $\widetilde{\beta}_j$, sumando estas funciones obtenemos la función generatriz para los coeficientes del método de

Störmer. Resulta

$$\begin{aligned} F_{\delta_j} &= F_{\beta_j} + F_{\widetilde{\beta}_j} = \frac{t + (1-t)\ln(1-t) + (1-t)(-t - \ln(1-t))}{(1-t)\ln^2(1-t)} \\ &= \frac{t + \ln(1-t) - t\ln(1-t) - t - \ln(1-t) + t^2 + t\ln(1-t)}{(1-t)\ln^2(1-t)} \\ &= \frac{t^2}{(1-t)\ln^2(1-t)}\,. \end{aligned} \tag{2.39}$$

### 2.11.2. Métodos de Cowell

Consideramos de nuevo la fórmula exacta en (2.35), pero ahora, en lugar de aproximar por el polinomio de interpolación en puntos por detrás del $t_n$ consideramos los nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n, t_{n+1}$, incluyendo también el $t_{n+1}$. Si aproximamos como el el método de Falkner implícito la función $f$ por el polinomio de interpolación anterior y llamamos $y_k$ a la aproximación de $y(t_k)$ para $k = n, n+1$, resulta la fórmula

$$y_{n-1} = y_n - h\,y'_n + \int_{t_n}^{t_{n-1}} p(t)\,(t_{n-1} - t)\,dt$$

y haciendo el cambio de variable $t = t_{n+1} + s\,h, dt = h\,ds$, tenemos

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= y_n - h\,y'_n + \int_{-1}^{-2} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_{n+1}(-2h - s\,h)\,h\,ds \\ &= y_n - h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \left[ \int_{-2}^{-1} (-1)^j \binom{-s}{j} (2+s)\,ds \right] \nabla^j f_{n+1} \\ &= y_n - h\,y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \widetilde{\beta}^*_j \nabla^j f_{n+1} \end{aligned} \tag{2.40}$$

siendo los coeficientes $\widetilde{\beta}^*_j$ los dados por

$$\widetilde{\beta}^*_j = \int_{-2}^{-1} (-1)^j \binom{-s}{j} (2+s)\,ds\,.$$

La función generatriz para estos coeficientes es

$$\begin{aligned}
F_{\widetilde{\beta}_j^*}(t) &= \int_{-2}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-s}{j} (2+s)\, ds \\
&= \int_{-2}^{-1} (1-t)^{-s}(2+s)\, ds \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{2+s}{(1-t)^s}\, ds \\
&= (2+s)\frac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}\Big]_{s=-2}^{s=-1} + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\ln(1-t)}\frac{1}{(1-t)^s}\, ds\,.
\end{aligned}$$

donde para resolver la integral hemos utilizado la fórmula de integración por partes tomando $u = 2+s$, $dv = \dfrac{ds}{(1-t)^s}$, $du = ds$, $v = \dfrac{-(1-t)^{-s}}{\ln(1-t)}$. La integral de la última fórmula es inmediata, y siguiendo con los cálculos resulta

$$\begin{aligned}
F_{\widetilde{\beta}_j^*}(t) &= \frac{-(1-t)}{\ln(1-t)} - \frac{(1-t)^{-s}}{\ln^2(1-t)}\Big]_{s=-2}^{s=-1} \\
&= \frac{-(1-t)}{\ln(1-t)} - \frac{(1-t)}{\ln^2(1-t)} + \frac{(1-t)^2}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{-(1-t)\ln(1-t) - 1 + t + 1 + t^2 - 2t}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{t^2 - t - (1-t)\ln(1-t)}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{(t-1)\,[t + \ln(1-t)]}{\ln^2(1-t)}\,.
\end{aligned}$$

Sumando la fórmula de Falkner implícita dada en (2.23) con la fórmula que

hemos obtenido en (2.40) se tiene

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} &= \\
&= h^2 \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left[ - \int_{-1}^{0} \binom{-s}{j} s \, ds + \int_{-2}^{-1} \binom{-s}{j} (2+s) \, ds \right] \nabla^j f_{n+1} \\
&= h^2 \sum_{j=0}^{k} (\beta_j^* + \widetilde{\beta}_j^*) \nabla^j f_{n+1} \\
&= h^2 \sum_{j=0}^{k} \delta_j^* \nabla^j f_{n+1}
\end{aligned}
$$

resultando la fórmula implícita de Störmer, también conocida como fórmula de Cowell (véase [54], p. 464)

$$
y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{k} \delta_j^* \nabla^j f_{n+1} \, ,
$$

donde los coeficientes del método están dados por

$$
\delta_j^* = \beta_j^* + \widetilde{\beta}_j^* = (-1)^j \left[ - \int_{-1}^{0} \binom{-s}{j} s \, ds + \int_{-2}^{-1} \binom{-s}{j} (2+s) \, ds \right] .
$$

Como conocemos las funciones generatrices para los coeficientes $\beta_j^*$ y $\widetilde{\beta}_j^*$, sumando ambas obtenemos la función generatriz para los coeficientes $\delta_j^*$. Resulta ser

$$
\begin{aligned}
F_{\delta_j^*} &= F_{\beta_j^*} + F_{\widetilde{\beta}_j^*} \\
&= \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{\ln^2(1-t)} + \frac{(t-1)[t + \ln(1-t)]}{\ln^2(1-t)} \\
&= \frac{t^2}{\ln^2(1-t)} \, .
\end{aligned}
$$

# Capítulo 3

# Análisis de los métodos de Falkner en modo predictor-corrector para ecuaciones de la forma $y'' = f(t, y)$

En este capítulo y los dos siguientes analizaremos en qué forma se pueden combinar los métodos descritos en el capítulo anterior para resolver distintos problemas de valor inicial de segundo orden. Recordemos que en los métodos de Falkner (explícitos o implícitos) aparece una pareja de fórmulas, una de ellas se utiliza para aproximar el valor de la solución, y la otra para aproximar el valor de la derivada. Las fórmulas explícitas se aplican directamente, pero la aplicación de las implícitas produce en cada paso un sistema de ecuaciones generalmente no lineales, que hay que resolver. La resolución de estos sistemas, al igual que ocurre con otros métodos implícitos como los multipaso o los de Runge-Kutta, hace que el coste computacional aumente considerablemente. Una manera de evitar esto se consigue utilizando los métodos en la forma predictor-corrector (P-C): se usan fórmulas explícitas para obtener aproximaciones de los valores buscados, y estas aproximaciones se utilizan en las fórmulas implícitas para obtener nuevas aproximaciones mejoradas.

Como disponemos de cuatro fórmulas, dos explícitas y dos implícitas, habrá diferentes formas de combinarlas, y habrá también diferentes casos dependiendo de cómo sea la expresión de la función $f$ en el problema a solucionar. Cuando utilicemos fórmulas explícitas las llamaremos predictoras, y cuando se utilicen fórmulas implícitas las llamaremos correctoras. Utilizando la notación clásica para los esquemas predictores-correctores, la aplicación del método explícito se indicará mediante una P, y mediante una C se indicará la aplicación del método implícito. Como también hay que considerar las fórmulas para las aproximaciones de las derivadas, cuando se utilice la segunda fórmula del método de Falkner explícito se indicará mediante una P', y mediante C' se indicará la utilización de la fórmula implícita para aproximar la derivada. Finalmente, la E se utiliza para indicar la evaluación de la función $f$.

Los métodos descritos en el capítulo anterior sirven para aproximar la solución numérica de problemas de valor inicial donde la ecuación diferencial es de la forma $y'' = f(t, y, y')$. Pero como señalábamos allí, en la función $f$ puede que alguno de los argumentos no esté presente, y ello hace que se puedan formular diferentes implementaciones de los métodos, consiguiendo en algunos casos mayor eficacia computacional. Comenzaremos estudiando en este capítulo la aplicación de los métodos para resolver el problema

$$y'' = f(t, y)\,, \qquad y(t_0) = y_0\,, \qquad y'(t_0) = y'_0 \tag{3.1}$$

y más adelante haremos lo mismo cuando las ecuaciones son de la forma $y'' = f(t, y')$

o la más general $y'' = f(t, y, y')$.

Para el problema $y'' = f(t, y)$ consideraremos dos formulaciones diferentes de los métodos explícitos, y otras tres para los métodos implícitos. Comenzaremos describiendo las correspondientes a los métodos explícitos (cuyo estudio ya ha sido publicado en [103]).

## 3.1. Errores de truncamiento locales

Un aspecto importante del estudio de los métodos numéricos para la resolución de problemas de valor inicial tiene que ver con el análisis de los errores en cada paso y la forma en que se acumulan. Como vimos anteriormente, el error de truncamiento local es el residuo que se obtiene cuando la solución aproximada es sustituida por la solución exacta en la ecuación en diferencias del método.

Como van a ser utilizados profusamente en lo que sigue, recopilamos aquí las expresiones de los distintos errores de truncamiento local para cada una de las fórmulas. Según vimos anteriormente, el error de truncamiento local para la primera de las fórmulas del método de Falkner explícito en (2.9) se puede expresar en la forma

$$\mathfrak{L}_\beta(y(t_n); h) = \beta_k \, h^{k+2} y^{k+2)}(\xi) \,, \tag{3.2}$$

donde $\xi$ es un punto intermedio entre los nodos $t_{n-(k-1)}, \ldots, t_n$.

De forma similar, en la fórmula explícita para seguir la derivada (la segunda de las fórmulas en (2.20)) el error de truncamiento local es:

$$\mathfrak{L}_\gamma(y'(t_n); h) = \gamma_k \, h^{k+1} y^{k+2)}(\psi) \,, \tag{3.3}$$

donde $\psi$ se refiere como antes a un punto intermedio. Para la primera fórmula del método de Falkner implícito (2.23) el error de truncamiento local viene dado por:

$$\mathfrak{L}_{\beta^*}(y(t_n); h) = \beta^*_{k+1} \, h^{k+3} y^{k+3)}(\xi) \,, \tag{3.4}$$

y de forma similar el error de truncamiento local para la fórmula implícita para seguir la derivada (la segunda fórmula en (2.29)) es

$$\mathfrak{L}_{\gamma^*}(y'(t_n); h) = \gamma^*_{k+1} \, h^{k+2} y^{k+3)}(\psi) \,, \tag{3.5}$$

donde denotamos por $\xi$ o $\psi$ los puntos intermedios. En general, de ahora en adelante, los puntos intermedios los denotaremos por $\xi_j$ o $\psi_j$ para distinguirlos en las distintas fórmulas, y en los sucesivos pasos, sin que ello de lugar a confusión.

## 3.2. Consideración general sobre las iteraciones del corrector

En los métodos de Adams, cuando se utilizan en el modo predictor-corrector, el método corrector se puede aplicar todas las veces que se quiera. Sin embargo, ello no cambia el término principal del error, de manera que el coste computacional que supone evaluar la función cada vez que se aplica el corrector no compensa por cuanto el error que se obtiene es similar. En tal situación, lo que se hace es aplicar sólo una vez el método corrector (véase [75], Cap. 4). Veremos a continuación que en los métodos de Falkner sucede algo parecido, de manera que en las distintas formulaciones en modo predictor-corrector aplicaremos sólo una vez el método corrector que corresponda.

Veamos qué sucede cuando consideramos los esquemas predictores para la solución y la derivada, y luego aplicamos una o más veces el método corrector para tratar de mejorar la aproximación de la solución. Consideraremos como esquema predictor con tamaño fijo de paso, $h$, el método de Falkner explícito dado por las dos fórmulas

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \nabla^j f_n \rightarrow \text{Falkner Explícito de orden } k \\ y'_{n+1} = y'_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n \rightarrow \text{Adams Bashforth de orden } k \end{cases}$$

y como corrector el método de Falkner implícito para la solución, es decir,

$$y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta^*_j \nabla^j f_{n+1} \rightarrow \text{Falkner Implícito de orden } k+1$$

donde $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1})$.
Hacemos notar además que para la terna de métodos señalados consideramos el mismo número $k$ de pasos.

Se tiene para el valor exacto $y(t_{n+1})$ la igualdad:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\, y'(t_n) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\beta}_j f\left(t_{n-j}, y(t_{n-j}), y'(t_{n-j})\right) \\ &+ h^{k+2} y^{k+2)}(t_n)\beta_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \end{aligned}$$

Y para el valor aproximado $y_{n+1}^{[0]}$ proporcionado por el predictor tenemos (la notación del superíndice $^{[i]}$ se usa para indicar las repeticiones de un determinado método corrector, siendo el $^{[0]}$ la notación que se usa para el predictor, el cual se usa sólo una vez) :

$$y_{n+1}^{[0]} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\beta}_j f_{n-j}$$

con lo cual, asumiendo la hipótesis de localización, haciendo la diferencia de las dos fórmulas anteriores resulta

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[0]} = h^{k+2} y^{k+2)}(t_n)\beta_k + \mathcal{O}(h^{k+3})$$

Considerando el método de Falkner implícito de orden $k+1$ se tiene que el valor exacto se puede poner

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\, y'(t_n) + h^2 \sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_j^* f\left(t_{n+1-j}, y(t_{n+1-j}), y'(t_{n+1-j})\right) \\ &+ h^{k+3} y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

mientras que para el valor aproximado tras aplicar $\nu+1$ veces el corrector se tendrá:

$$y_{n+1}^{[\nu+1]} = y_n + h\, y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{k} \bar{\beta}_j^* f_{n+1-j} + h^2 \bar{\beta}_0^* f_{n+1}^{\nu} \tag{3.7}$$

donde hemos separado el primer sumando del sumatorio, y $f_{n+1}^{\nu}$ consiste en la evaluación de la función $f$ en la última iteración del corrector, es decir, $f_{n+1}^{\nu} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^{[\nu]}, y_{n+1}^{'[0]})$ siendo $y_{n+1}^{'[0]}$ el valor de la derivada obtenido con el predictor.

Ahora bien, para obtener la aproximación de $y'(t_{n+1})$ se hace uso del método de Adams-Bashforth, y se tiene

$$\begin{cases} y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + h\sum_{j=0}^{k-1} \bar{\gamma}_j f(t_{n-j}) + h^{k+1}\gamma_k y^{k+2)}(t_n) + \mathcal{O}(h^{k+2}) \quad \leftarrow \quad \text{valor exacto} \\ y_{n+1}^{'[0]} = y'_n + h\sum_{j=0}^{k-1} \bar{\gamma}_j f_{n-j} \quad \leftarrow \quad \text{valor aproximado} \end{cases}$$

y haciendo uso de la hipótesis de localización la diferencia entre estas dos fórmulas resulta ser

$$y'(t_{n+1}) - y_{n+1}^{'[0]} = h^{k+1} y^{k+2)}(t_n)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+2})\,.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la diferencia entre las fórmulas (3.6) y (3.7) se puede poner en la forma

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[\nu+1]} &= h^2\bar{\beta}_0^* \left[ f(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1}^{[\nu]}, y_{n+1}^{'[0]} \right] \\ &\quad + h^{k+3} y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned}$$

Utilizando el Teorema del valor medio en la diferencia entre corchetes de la fórmula anterior, resulta

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[\nu+1]} &= h^2\bar{\beta}_0^* \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(\psi_{n+1})(y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[\nu]}) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_{n+1})(y'(t_{n+1}) - y_{n+1}^{'[0]}) \right] \\ &\quad + h^{k+3} y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned}$$

donde $\psi_{n+1}$ denota un punto intermedio en el segmento que une el punto$(t_{n+1}, y_{n+1}^{[\nu]}, y_{n+1}^{'[0]})$ con el punto $(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1}))$.

Así se tendrá que:

1. Si $\nu = 0$, es decir si sólo se utiliza el corrector solamente una vez, es:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[1]} &= h^2\bar{\beta}_0^* \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(\psi_{n+1}) \left( y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[0]} \right) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_{n+1}) \left( y'(t_{n+1}) - y_{n+1}^{'[0]} \right) \right] \\ &\quad + h^{k+3} y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \\ &= h^2\bar{\beta}_0^* \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(\psi_{n+1}) h^{k+2} y^{k+2)}(t_n)\beta_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_{n+1}) h^{k+1} y^{k+1)}(t_n)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+2}) \right] \\ &\quad + h^{k+3} y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \\ &= \mathcal{O}(h^{k+3}) \end{aligned}$$

2. Si $\nu = 1$, es decir, si se utiliza el corrector dos veces resulta:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[2]} &= h^2\bar{\beta}_0^* \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\psi_{n+1})\left(y(t_{n+1}) - y_{n+1}^{[1]}\right) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_{n+1})\left(y'(t_{n+1}) - y_{n+1}^{'[0]}\right)\right] \\ &\quad + h^{k+3}y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \\ &= h^2\bar{\beta}_0^* \left[\mathcal{O}(h^{k+3}) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_{n+1})h^{k+1}y^{k+1)}(t_n)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+2})\right] + \mathcal{O}(h^{k+3}) \\ &\quad + h^{k+3}y^{k+3)}(t_n)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4}) \\ &= \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \end{aligned}$$

Si se realizaran más iteraciones con el corrector obtendríamos igualmente que el error es una $\mathcal{O}(h^{k+3})$. Se observa pues que se mantiene el orden del método de Falkner implícito en la forma P-C independientemente de que con el corrector consideremos una o más iteraciones. Ello significa que con una aplicación del corrector es suficiente para la ejecución del método sin perjuicio del error que se comete, y así será como hagamos en el resto de los capítulos. Entonces la aplicación del predictor, que en algunas referencias se expresa con un superíndice [0] lo indicaremos con un superíndice $P$, y la aplicación del corrector (que en algunas referencias se expresa con un superíndice $[\nu]$ indicando el número de veces que se aplica) puesto que sólo será una vez, la indicaremos con el superíndice $C$. Si no hay lugar a confusión podremos prescindir de los superíndices $P$ o $C$.

## 3.3. Métodos Explícitos

### 3.3.1. Descripción de los métodos

#### Método P 'P E

La forma habitual de aplicar el método de Falkner explícito en cada paso para resolver el problema $y'' = f(t, y)$ consiste en

1. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20), obteniendo $y'^{P}_{n+1}$

2. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20), obteniendo $y^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$

**Método PEC'**

Otra forma de aplicar el método de Falkner explícito en cada paso para resolver el problema $y'' = f(t, y)$ consiste en

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.20), obteniendo $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$
3. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29), obteniendo $y'^C_{n+1}$

Esta manera de aplicar los métodos se puede lograr debido a la ausencia de la derivada $y'(t)$ en la función $f = f(t, y(t))$. Una vez que se obtiene el valor $y^P_{n+1}$ mediante la fórmula explícita podemos evaluar $f_{n+1}$ para ser utilizado luego en la fórmula implícita para aproximar la derivada. Ténganse en cuenta que de esta forma la fórmula implícita deja de serlo y el método que estamos considerando en realidad resulta ser un método explícito.

Todas las fórmulas que utilizaremos serán de $k$ pasos. Para el modo P'PE veremos que el error acumulado en el punto final es de orden $\mathcal{O}(h^k)$ mientras que para el modo PEC' es de orden $\mathcal{O}(h^{k+1})$. Por lo tanto, la aplicación del método de Falkner explícito en el modo PEC' proporciona un mejor rendimiento. Veremos más adelante en el Capítulo 8 ejemplos numéricos que confirman este resultado teórico.

### 3.3.2. Errores acumulados

Para resolver de manera aproximada el problema (2.1) en un intervalo $[t_0, t_N]$ se procede mediante la partición del intervalo $[t_0, t_N]$ en subintervalos más pequeños, que tomaremos de igual longitud, y se aplica en cada uno de ellos el método numérico elegido. Se supone que en el primer intervalo se conocen de antemano los valores iniciales necesarios para aplicar el esquema numérico (o bien se pueden obtener mediante algún procedimiento, por ejemplo por un método Runge-Kutta). Y por supuesto, se supone que disponemos de la expresión del error de truncamiento local. La aplicación sucesiva del método numérico a lo largo de los subintervalos hace que los errores de truncamiento se acumulen a lo largo del intervalo de integración,

resultando que en general si el error de truncamiento local es de orden $O(h^{p+2})$ los errores acumulados son de orden $O(h^{p+1})$ (en la referencia [76] al error acumulado se le llama también error global, si bien nosotros preferimos el término acumulado).

**Nota 3.3.1** *El análisis que sigue se ha hecho sobre la base de una ecuación diferencial escalar como en (2.1). Sin embargo, el método también se puede aplicar para resolver un sistema de m ecuaciones diferenciales del tipo dado. En este caso se tendría:* $\boldsymbol{y} : [t_0, t_N] \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y} = (y^1(t), y^2(t), \ldots, y^m(t))^T$, *y* $\boldsymbol{f} : [t_0, t_N] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, *y ocurre que en esta situación el error sería un vector m-dimensional donde cada componente tendría la forma que veremos a continuación para una sola ecuación escalar.*

**Método P 'P E.**

Asumiendo la hipótesis de localización (de que en cada paso se conocen los valores de arranque necesarios en el método con total exactitud) y teniendo en cuenta las fórmulas de los errores de truncamiento local en (3.2) y (3.3), para el primer paso, $n = 1$, tenemos (nótese que como sólo estamos aplicando las fórmulas predictoras, para simplificar la notación no pondremos $y^P_{n+1}$ o $y'^P_{n+1}$ sino sencillamente $y_{n+1}$ o $y'_{n+1}$) que los errores de truncamiento local vienen dados por

$$\begin{aligned} y(t_1) - y_1 &= y(t_1) - \left[ y_0 + h\, y'_0 + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_0 \right] \\ &= h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k \,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y'_1 &= y'(t_1) - \left[ y_0 + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f_0 \right] \\ &= h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde para mayor comodidad, según comentamos anteriormente, de ahora en adelante $\xi_j$ y $\psi_j$ denotarán los puntos intermedios apropiados correspondientes a cada fórmula.

Para el paso siguiente, $n = 2$, teniendo presente la fórmula del error de truncamiento local en (3.2) resulta que podemos poner

$$y(t_2) = y(t_1) + hy'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j \bar{f}_1 + h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_2)\beta_k \,, \tag{3.10}$$

donde la barra sobre la función $f$ significa que esta se evalúa en los valores verdaderos (nótese que en (3.8) no era necesario poner la barra sobre $f$ debido a la hipótesis de localización). Por otro lado, haciendo uso del método descrito en (2.9) podremos ahora poner

$$y_2 = y_1 + hy_1' + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1 \,. \tag{3.11}$$

Restando las fórmulas anteriores en (3.10) y (3.11), y utilizando la fórmula

$$\bar{f}_1 - f_1 = f(t_1, y(t_1)) - f(t_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(\psi_1)(y(t_1) - y_1) \tag{3.12}$$

donde $\psi_1$ es un punto intermedio del segmento definido por los puntos $(t_1, y(t_1))$ y $(t_1, y_1)$, tras sustituir las fórmulas (3.8) y (3.9) del paso anterior, después de algunos cálculos se obtiene que

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2 &= h^{k+2} \left[ y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+2)}(\xi_2) \right] \beta_k + \left[ h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \,. \end{aligned}$$

De forma análoga, a partir del error de truncamiento local en (3.3) se puede poner

$$y'(t_2) = y'(t_1) + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j \bar{f}_1 + h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k \,, \tag{3.13}$$

y a partir del método en (2.20) obtenemos que

$$y_2' = y_1' + hy_1' + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f_1 \,. \tag{3.14}$$

Ahora, restando las fórmulas anteriores en (3.13) y (3.14), y teniendo en cuenta la fórmula del error en el paso anterior (3.9), junto con la fórmula en (3.12), después de algunos cálculos resulta

$$y'(t_2) - y_2' = h^{k+1} \left[ y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2) \right] \gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,.$$

Repitiendo el proceso a lo largo de los nodos del intervalo de integración, determinamos que el error acumulado para la solución en el punto final $t_N$ viene dado

por

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N &= h^{k+2}\beta_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\xi_j) + h^{k+2}\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1}(N-j)y^{k+2)}(\psi_j) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

y el error acumulado para la derivada es

$$y'(t_N) - y'_N = h^{k+1}\gamma_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

Suponiendo que $y^{k+2)}(t)$ es una función continua y utilizando el teorema del valor medio, las fórmulas anteriores se puede escribir de la siguiente manera: para la solución se tiene

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N &= h^{k+1}y^{k+2)}(\xi)(t_N - t_0)\beta_k \\ &\quad + \frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

y para la derivada tenemos

$$y'(t_N) - y'_N = h^k(t_N - t_0)y^{k+2)}(\psi)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{3.17}$$

**Método PEC'**

La diferencia de este modo con el anterior consiste en cambiar la segunda fórmula en (2.20) por la segunda fórmula en (2.29) para la evaluación de la derivada. Esto significa que para $n = 1$ la fórmula del error en la solución sigue siendo la misma que en (3.8), mientras que la fórmula (3.9) ahora es diferente, y resulta ser

$$y'(t_1) - y'_1 = h^{k+2}y^{k+3)}(\psi_1)\gamma^*_{k+1}\,, \tag{3.18}$$

esto es, el error de truncamiento local para la fórmula implícita de la derivada.

Procediendo como antes se obtiene que para $n = 2$ es

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2 &= h^{k+2}\left[y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+2)}(\xi_2)\right]\beta_k + \left[h^{k+3}y^{k+3)}(\psi_1)\right]\gamma^*_{k+1} \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned}$$

y para la fórmula de la derivada se obtiene que el error de truncamiento acumulado es en este caso

$$y'(t_2) - y'_2 \;=\; h^{k+2}\left[y^{k+3)}(\psi_1) + y^{k+3)}(\psi_2)\right]\gamma^*_{k+1} + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

Repitiendo el procedimiento a lo largo de los nodos de integración, en el punto final $t_N$ se obtiene que

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N \;&=\; h^{k+2}\,\beta_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\xi_j) + h^{k+3}\,\gamma^*_{k+1} \sum_{j=1}^{N-1}(N-j)\,y^{k+3)}(\psi_j) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

y para la derivada

$$y'(t_N) - y'_N \;=\; h^{k+2}\,\gamma^*_{k+1} \sum_{j=1}^{N}\; y^{k+3)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

Suponiendo que $y^{k+3)}(t)$ es una función continua, utilizando el teorema del valor medio las fórmulas anteriores se pueden escribir como

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N \;&=\; h^{k+1} y^{k+2)}(\xi)(t_N - t_0)\beta_k \\ &\quad + \frac{1}{2}\, h^{k+1} y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma^*_{k+1} \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

para el error acumulado de la solución, y de manera similar, para el error acumulado de la derivada se tiene

$$y'(t_N) - y'_N \;=\; h^{k+1}(t_N - t_0) y^{k+3)}(\psi)\gamma^*_{k+1} + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{3.21}$$

### 3.3.3. Análisis de la estabilidad lineal

Con el fin de determinar si en un método numérico se producen resultados razonables para un determinado valor de $h > 0$, necesitamos una noción de estabilidad que es diferente de la estabilidad que hemos visto anteriormente (en ocasiones

también llamada cero-estabilidad porque hace referencia al hecho de que ante perturbaciones en los datos los errores permanecen acotados cuando $h \to 0$). Desde el punto de vista práctico, aunque un método sea convergente no está garantizado el que los errores se mantengan acotados; necesitamos pues saber para qué valores de $h$ los errores no se propagan sin control. Las propiedades de estabilidad en este sentido práctico son analizadas por medio de la ecuación lineal del test introducido por Lambert y Watson [77] dada por

$$y''(t) = -\mu^2\, y(t)\,, \quad \text{con } \mu > 0\,. \tag{3.22}$$

La aplicación del método de la sección anterior en la forma P 'P E para el problema test (3.22) conduce a la siguiente ecuación de recurrencia

$$Y_n = B\, Y_{n-1}\,, \tag{3.23}$$

donde $Y_n$ es el vector de $k+1$ componentes dado por

$$Y_n = \left(y_{n+1}, y_n, \ldots, y_{n-(k-2)}, h\, y'_{n+1}\right)^T\,,$$

y $B$ es una matriz de orden $(k+1)\times(k+1)$ cuyos elementos dependen de $H^2$ y de los coeficientes del método siendo $H = \mu\, h$.

De igual manera, la aplicación del método que hemos denotado por PEC ' al problema (3.22) conduce a la fórmula de recursión dada por

$$A^*\, Y_n = B^*\, Y_{n-1}\,, \tag{3.24}$$

donde $Y_n$ es el mismo vector que antes y $A^*$ es la matriz identidad de orden $(k+1)\times(k+1)$ donde en lugar de tener $a^*_{k+1,1} = 0$ se tiene que $a^*_{k+1,1} = H^2 \sum_{j=0}^{k} \gamma^*_j$, y $B^*$ es una matriz de orden $(k+1)\times(k+1)$ cuyos elementos dependen de $H^2$ y de los coeficientes del método.

Para utilizar una notación más homogénea las recurrencias anteriores las expresaremos en la misma forma, siendo esta la siguiente

$$Y_n = B[i]\, Y_{n-1}\,, \quad i = 1, 2 \tag{3.25}$$

donde $B[1] = B$ y $B[2] = (A^*)^{-1}\, B^*$, de manera que $B[1]$ corresponde al método formulado en el modo P 'P E, y que denotaremos por FE[1]$k$, y $B[2]$ corresponde al método formulado en el modo PEC ', y que denotaremos por FE[2]$k$, donde $k$ hace referencia al número de pasos del correspondiente método.

Los términos de cada una de las matrices de estabilidad son los siguientes. Para la matriz $B[1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
B[1]_{1\,1} &= 1 - H^2\bar{\beta}_0 \\
B[1]_{1\,i} &= -H^2\bar{\beta}_{i-1}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \\
B[1]_{1\,k+1} &= 1 \\
B[1]_{k+1\,i} &= -H^2\bar{\gamma}_{i-1}\,, \qquad i = 1, \ldots, k \\
B[1]_{k+1\,k+1} &= 1 \\
B[1]_{i\,j} &= \delta_{i-1,j}\,, \qquad i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, k+1
\end{aligned}$$

siendo $\delta_{i-1\,j}$ el símbolo delta de Kronecker, que da lugar a ceros y unos en las filas intermedias.

En cuanto a la matriz $B[2]$, coincidirá con la matriz $B[1]$ excepto en última fila, puesto que utilizamos la fórmula correctora únicamente para aproximar la derivada. Los elementos de esta última fila son los siguientes:

$$\begin{aligned}
B[2]_{k+1\,1} &= (1 - H^2\bar{\beta}_0)(-H^2\bar{\gamma}_0^*) - H^2\bar{\gamma}_1^* \\
B[2]_{k+1\,i} &= H^4\bar{\gamma}_0^*\bar{\beta}_{i-1} - H^2\bar{\gamma}_i^*\,, \qquad i = 2, \ldots, k \\
B[1]_{k+1\,k+1} &= 1 - H^2\bar{\gamma}_0^*\,.
\end{aligned}$$

Los coeficientes $\bar{\beta}_i$, $\bar{\gamma}_i$ y $\bar{\gamma}_i^*$ corresponden a la fórmulas desarrolladas en términos de los valores de la función en los nodos de interpolación, y están dados respectavamente por la expresiones en (2.12), (2.18) y (2.27).

Por ejemplo, cuando $k = 3$ la ecuación (3.23) resulta ser

$$Y_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{19H^2}{24} & \frac{5H^2}{12} & -\frac{H^2}{8} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{23H^2}{12} & \frac{4H^2}{3} & -\frac{5H^2}{12} & 1 \end{pmatrix} Y_{n-1}\,,$$

mientras que la ecuación en (3.24) viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3H^2}{8} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{19H^2}{24} & \frac{5H^2}{12} & -\frac{H^2}{8} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{19H^2}{24} & \frac{5H^2}{24} & -\frac{H^2}{24} & 1 \end{pmatrix} Y_{n-1}\,,$$

o equivalentemente

$$Y_n = \begin{pmatrix} 1-\frac{19H^2}{24} & \frac{5H^2}{12} & -\frac{H^2}{8} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{19H^4}{64} - \frac{7H^2}{6} & \frac{5H^2\left(4-3H^2\right)}{96} & \frac{H^2\left(9H^2-8\right)}{192} & 1-\frac{3H^2}{8} \end{pmatrix} Y_{n-1}\,.$$

Las matrices $B[1]$ y $B[2]$ anteriores se llaman *matrices de estabilidad* de los métodos. El comportamiento de la solución numérica dependerá de los valores propios de estas matrices, y las propiedades de estabilidad de los métodos se caracterizan por los radios espectrales respectivos, $\rho(B[1])$ y $\rho(B[2])$. De acuerdo con la terminología introducida por Coleman e Ixaru en [24] se tienen las siguientes definiciones:

- $(0, H_s)$ es un intervalo de estabilidad para un determinado método, si para todo $H \in (0, H_s)$ es $|r_i| < 1$ donde los $r_i, i = 1, \ldots, k+1$ son los valores propios de la matriz de estabilidad.

- $(0, H_p)$ es un intervalo de periodicidad para un determinado método, si para todo $H \in (0, H_p)$ los valores propios de matriz de estabilidad, $r_i, i = 1, \ldots, k+1$, satisfacen

$$r_1 = e^{i\theta(H)}\,, \quad r_2 = e^{-i\theta(H)}\,, \quad |r_i| \leq 1\,,\ i > 2\,,$$

  siendo $\theta(H)$ una función real de $H$.

En particular, si el intervalo de estabilidad es $(0, \infty)$ el método se dice que es *A-estable*, y si el intervalo de periodicidad es $(0, \infty)$ el método se dice que es *P-estable*.

La importancia práctica del intervalo de estabilidad reside en que para un valor dado de $\mu$ en (3.22) no hay explosión del error en la solución numérica cuando $0 < h < H_s/\mu$ (véase [24]). Por otro lado, el intervalo de periodicidad determina

el tamaño de paso que se puede utilizar para que el error de la aproximación de la solución en el caso de problemas cuyas soluciones sean altamente oscilatorias o periódicas sea del mismo orden que el orden algebraico del método.

| $k$ | FE[1]$k$ | FE[2]$k$ |
|---|---|---|
| 1 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 2 | $\varnothing$ | $(0, 1'732050)$ |
| 3 | $(0, 0'966988)$ | $(0, 1'414213)$ |
| 4 | $(0, 1'014340)$ | $\varnothing$ |
| 5 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 6 | $\varnothing$ | $(0, 0'618097)$ |
| 7 | $(0, 0'477459)$ | $(0, 0'459279)$ |
| 8 | $(0, 0'350905)$ | $\varnothing$ |
| 9 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 10 | $\varnothing$ | $(0, 0'175010$ |
| 11 | $(0, 0'127867)$ | $(0, 0'126007)$ |
| 12 | $(0, 0'090714)$ | $\varnothing$ |
| 13 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 14 | $\varnothing$ | $(0, 0'010000)$ |

Cuadro 3.1: *Intervalos de estabilidad primarios para las dos implementaciones de los métodos de Falkner explícitos.*

Cuando $0 \leq h \leq H_p/\mu$ la solución numérica definida por (3.25) es también periódica, como lo es la solución exacta del problema test (3.22) para todas las condiciones iniciales no triviales de $y$ y de $y'$.

Una diferencia crucial entre la A-estabilidad y la P-estabilidad es que para los métodos A-estables, siendo $M$ la matriz de estabilidad, se verifica que $M^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ porque $\rho(M) < 1$, pero para los métodos P-estables esto no ocurre ya que $\rho(M) = 1$. Por tanto, los métodos A-estables reducen el error inicial mientras que en los métodos P-estables no se reducen los errores iniciales a medida que la integración progresa en el tiempo. Para los métodos presentados en la sección

anterior hasta $k = 14$ hemos obtenido que no son ni A-estables, ni P-estables. El único intervalo de periodicidad que existe es el del modo PEC' para $k = 1$ que resulta ser el intervalo $(0, 2)$. En el Cuadro 3.1 se muestran los intervalos primarios de estabilidad para los métodos desde $k = 1$ a $k = 14$ para ambas implementaciones. Como indicamos anteriormente el modo P'P E lo denotamos por FE[1]$k$ y el modo PEC' lo denotamos por FE[2]$k$, donde $k$ se refiere al número de pasos. Estos valores de los intervalos de estabilidad se han obtenido con la ayuda del programa Mathematica. El signo $\varnothing$ significa que no hay un intervalo primario de estabilidad, es decir, un intervalo de la forma $(0, \alpha)$, pero ello no quiere decir que no haya otros intervalos de estabilidad secundarios. Resulta curioso observar que tras dos valores consecutivos de $k$ para los cuales no existe intervalo de estabilidad primario (lo que en el artículo [88] se refiere como estabilidad en la vecindad del cero) siguen otros dos valores para los cuales sí existe tal intervalo de estabilidad. Esto mismo sucede con los métodos de Störmer y de Cowell, tal y como ha aparecido recientemente en el artículo [88]. Puesto que según hemos visto anteriormente, los métodos de Störmer y de Cowell pueden obtenerse a partir de los métodos de Falkner, no resulta extraño que tengan ciertas similitudes entre sí.

Además, si se considera que $\mu \in \mathbb{C}$, en lugar de intervalo de estabilidad se habla de región de estabilidad. En la Figura 3.1 se muestran las regiones de estabilidad de las dos implementaciones para $k = 4$, junto con las gráficas de los valores absolutos que determinan los intervalos de estabilidad para cada método. Se observa que la parte del eje real que corta a la primera región es el intervalo de estabilidad $(0, 1'014340)$, mientras que para la segunda el corte con el eje real determina un intervalo de estabilidad secundario dado por $(1'055723, 1'106566)$.

Hemos incluido diferentes gráficas mostrando los intervalos de estabilidad. En las Figuras 3.2 y 3.3 aparecen los valores absolutos de los valores propios de $B[1]$ y $B[2]$ para los valores $k = 1, 3$ en función de $H$. Las Figuras 3.4 y 3.5 muestran cada uno de los valores propios que limitan las regiones de estabilidad cuando $k = 7$ y $k = 11$ para las dos implementaciones. Hemos incluido como referencia la línea horizontal situada a una unidad de distancia por encima del eje $OX$.

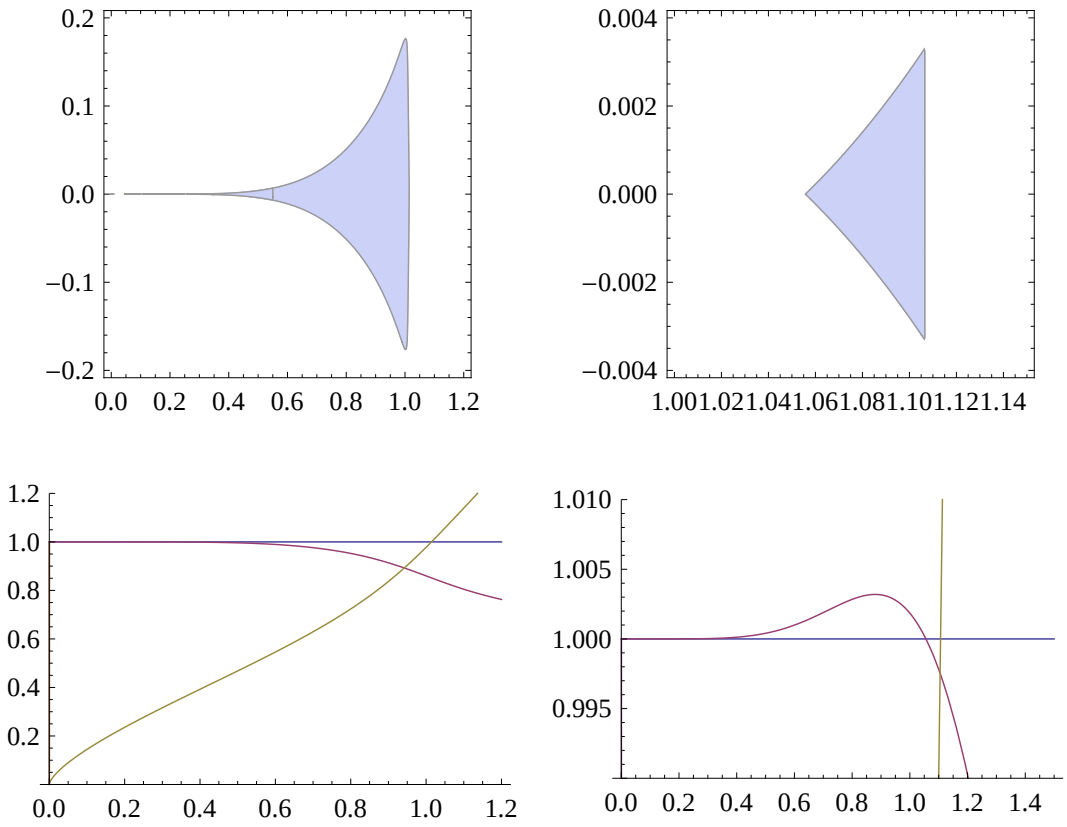



Figura 3.1: Regiones de estabilidad (arriba) y valores absolutos de los valores propios que determinan los intervalos de estabilidad (abajo) para los métodos FE[1]4 (izq.) y FE[2]4 (der.).

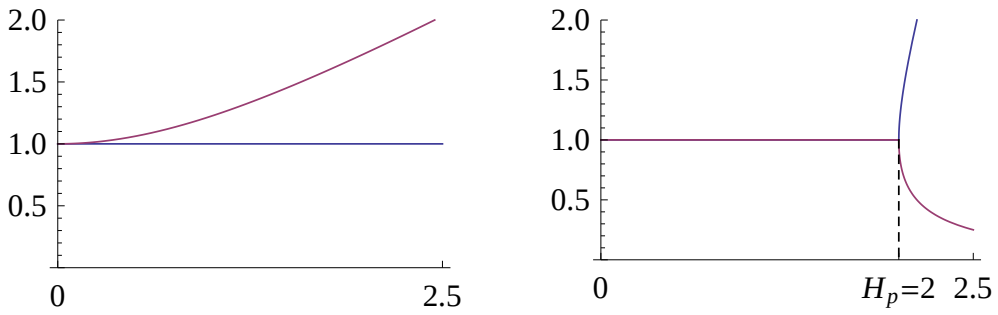



Figura 3.2: Valores absolutos de los valores propios $|r_i|$, $i = 1, 2$ de las matrices de estabilidad para los métodos FE[1]1 (izq.) y FE[2]1 (der.).

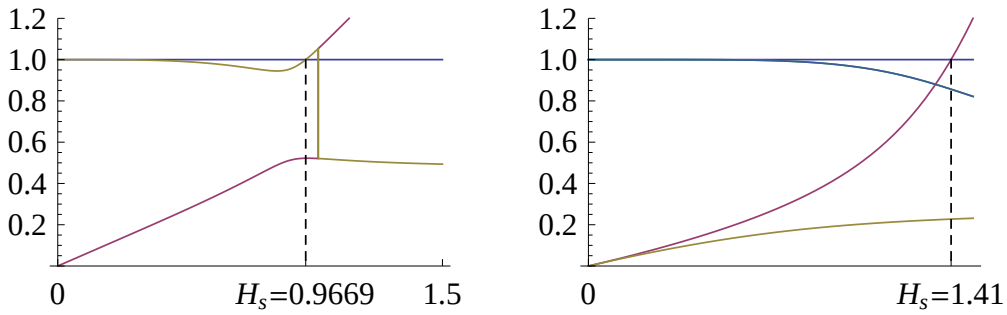



Figura 3.3: Valores absolutos de los valores propios $|r_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$ de las matrices de estabilidad para los métodos FE[1]3 (izq.) y FE[2]3 (der.).

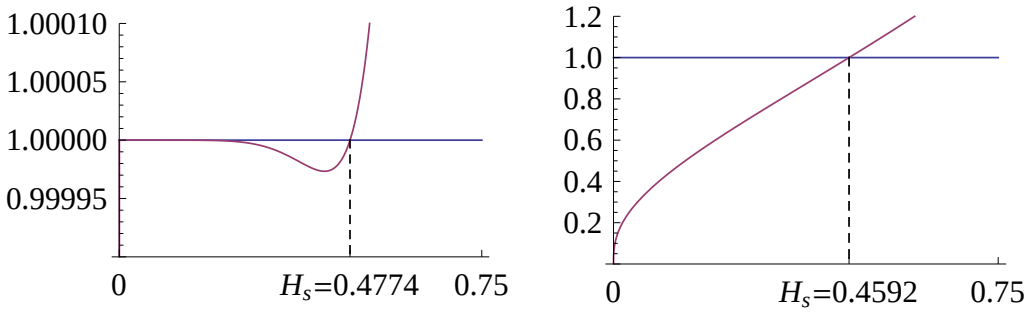



Figura 3.4: Valores absolutos de dos valores propios $|r_i|$, de cada una de las matrices de estabilidad para los métodos FE[1]7 (izq.) y FE[2]7 (der.).

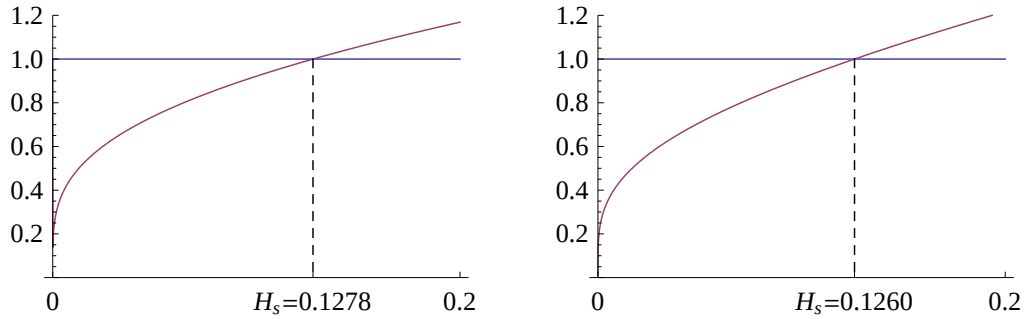



Figura 3.5: Valores absolutos de dos valores propios $|r_i|$, de cada una de las matrices de estabilidad para los métodos FE[1]11 (izq.) y FE[2]11 (der.).

## 3.4. Métodos implícitos

Las fórmulas implícitas en (2.29) se pueden conjugar con las fórmulas explícitas en (2.20) para obtener distintos métodos para resolver el problema en (3.1). Un conocido procedimiento implícito que usa fórmulas de Falkner es el método de Wilson [134], que a su vez es también un caso particular de la familia de métodos de Newmark [87], el cual se usa habitualmente en cálculos de dinámica molecular. Este método está dado por las fórmulas de dos pasos de la familia de métodos dada en (2.29), y consiste en la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{h^2}{6}\left(2y''_n + y''_{n+1}\right) \tag{3.26}$$

para obtener las posiciones, mientras que la fórmula de dos pasos dada por

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{2}\left(y''_n + y''_{n+1}\right) \tag{3.27}$$

se utiliza para obtener las velocidades.

Tras aplicar este esquema resulta un sistema implícito que debe ser resuelto en cada paso, lo que conlleva un elevado coste computational. Sin embargo, en la práctica, en este tipo de métodos suele utilizarse una formulación en el modo predictor-corrector. De esta manera los métodos implícitos en (2.29) se combinan de manera adecuada con los métodos explícitos en (2.20) para evitar tener que resolver un sistema algebraico en cada paso. Esta formulación en modo P-C se puede usar también como un método de arranque, tal y como se hace en [26], donde el método implícito de Falkner de un paso se usa en modo predictor-corrector para proporcionar los valores de arranque para el método de De Vogelaere. Otros ejemplos de este tipo de procedimientos se pueden encontrar en las referencias [13], [47] o [123].

Ahora dispondremos de más fórmulas que en el caso explícito, pero la que siempre hemos de considerar es la fórmula implícita para la solución (la fórmula correctora que denotábamos por C). La fórmula correctora para la derivada podremos usarla o no. Siempre que utilicemos la fórmula correctora para la solución, necesitaremos de la fórmula predictora correspondiente para obtener una primera estimación de la solución, que luego se usará en la fórmula implícita. Sin embargo esto no es así para la fórmula correctora de la derivada, pues por la forma particular que tiene la función $f$, una vez calculado el valor $y_{n+1}$ podremos usar este valor para hallar

$f(t_{n+1}, y_{n+1})$ y utilizarlo en la fórmula implícita para la derivada sin necesidad de la fórmula predictora correspondiente.

Por otra parte, para utilizar la fórmula correctora, previamente habremos de evaluar la función $f$. En [75] el valor obtenido tras la aplicación del predictor se denota por $y_{n+1}^{[0]}$ y el valor obtenido tras la aplicación de $i$ veces el corrector por $y_{n+1}^{[i]}$. Como ya dijimos, en nuestro caso sólo aplicaremos una vez el método predictor y una vez el corrector, así que para ser más explícitos en cuanto a la aplicación de cada método denotaremos mediante un superíndice $P$ la aplicación del predictor y mediante un superíndice $C$ la aplicación del corrector. Entonces, $y_{n+1}^P, {y'}_{n+1}^P$ serán valores obtenidos con las fórmulas predictoras, y $y_{n+1}^C, {y'}_{n+1}^C$ serán los valores obtenidos con las fórmulas correctoras (de la solución y la derivada respectivamente). Obsérvese que tras obtener el valor $y_{n+1}^C$ hay que evaluar la función $f$ para disponer del valor actualizado $f(t_{n+1}, y_{n+1}^C)$ que será necesario para el siguiente paso. Las evaluaciones de la función $f$ se denotan habitualmente por E.

Hemos considerado tres posibilidades para combinar las distintas fórmulas. En todas ellas el número de evaluaciones de la función $f$ en cada paso es el mismo: dos. Una de ellas se utiliza para obtener el valor $f(t_{n+1}, y_{n+1}^P)$ que se usará en la fórmula implícita, y la otra evaluación es $f(t_{n+1}, y_{n+1}^C)$, que actualizará el valor para ser usado en el siguiente paso. Sin embargo, la manera en que se suceden los diferentes métodos y se evalúa la función $f$ es distinta en las tres formulaciones.

### 3.4.1. Descripción de los métodos

#### Método P'PECE

La primera opción para la aplicación de la fórmula implícita de Falkner está dada por

1. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20), obteniendo así ${y'}_{n+1}^P$
2. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20), obteniendo así $y_{n+1}^P$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^P)$
4. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29), obteniendo $y_{n+1}^C$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^C)$

**Método PEC 'CE**

La segunda posibilidad que consideramos está dada por

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20), obteniendo así $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$
3. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29), obteniendo $y'^C_{n+1}$
4. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29), obteniendo $y^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1})$

**Método PECEC'**

La última posibilidad consiste en la siguiente formulación

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20), obteniendo $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$
3. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29), obteniendo $y^C_{n+1}$
4. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1})$
5. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29), obteniendo $y'^C_{n+1}$

Obviamente, se podrían haber considerado muchas más opciones, por ejemplo tomando fórmulas con diferentes números de pasos, y por lo tanto con diferentes órdenes. O bien se podría haber considerado mayor número de correcciones, obteniendo así métodos de las formas P′P(EC)$^n$E, P(EC′C)$^n$E o P(EC)$^n$EC′. Hemos hecho diferentes experimentos numéricos y como esperábamos, hay tan poca diferencia en el error que se comete, que el esfuerzo del cálculo no merece la pena. Por otra parte hemos analizado las regiones de estabilidad para distintas combinaciones de métodos y número de iteraciones y también en este caso no se obtienen mejoras con respecto a la opción elegida (en el sentido de obtener una región de estabilidad mayor). Hemos considerado por tanto los métodos P-C con el mismo número de pasos en todas las fórmulas, donde sólo se realiza una corrección, como suele hacerse también con los métodos de Adams en el modo P-C.

### 3.4.2. Errores acumulados

Suponemos que tenemos que integrar el problema en (3.1) en el intervalo $[t_0, t_N]$, y que conocemos de antemano los valores de arranque necesarios para aplicar el esquema numérico. Procederemos a estudiar los errores de truncamiento acumulados en cada aplicación sucesiva del método en los nodos de integración a lo largo del intervalo tras dividirlo en $N$ subintervalos de igual longitud $h$. Como indicamos antes, utilizaremos un superíndice P o P' para indicar la aplicación del método explícito correspondiente, y un superíndice C o C' para indicar la aplicación de la fórmula implícita, respectivamente para las fórmulas que corresponden a la solución o a la derivada.

#### Método P'PECE

Suponiendo la hipótesis de localización, a partir de las fórmulas de los errores locales de truncamiento que aparecen en (3.2) y (3.3), para el primer paso ($n = 0$) se tiene que las diferencias entre los verdaderos valores, $y(t_1)\,, y'(t_1)$, y las aproximaciones $y_1^P\,, y_1'^P$, son respectivamente los errores de truncamiento local, es decir,

$$y'(t_1) - y_1'^P = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k\,, \tag{3.28}$$

$$y(t_1) - y_1^P = h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k\,, \tag{3.29}$$

donde, por conveniencia, hemos denotado a los puntos intermedios resultantes de la aplicación del Teorema de Taylor para obtener los errores de truncamiento local por $\xi_1$ y $\psi_1$, y en adelante pondremos $\xi_j$ y $\psi_j$ según corresponda.

Después de evaluar $f(t_1, y_1^P)$, utilizando el Teorema del Valor Medio se puede poner

$$f(t_1, y(t_1)) - f_1^P = \frac{\partial f}{\partial y}(t_1, \xi_1)\ \left(y(t_1) - y_1^P\right) \tag{3.30}$$

donde hemos utilizado la notación $f_1^P = f(t_1, y_1^P)$. Suponiendo la hipótesis de la

localización, teniendo en cuenta las fórmulas en (3.30) y (3.29) resulta

$$\begin{aligned} y(t_1) - y_1^C &= y(t_0) + h\, y'(t_0) + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1)) \\ &\quad + h^{k+3} y^{k+3)}(\xi_1)\beta_{k+1}^* - \left( y_0 + h\, y_0' + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \bigtriangledown^j f_1^P \right) \\ &= h^{k+3} y^{k+3)}(\xi_1)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4})\,. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Después de evaluar $f(t_1, y_1^C)$, para el siguiente paso ($n = 1$) tenemos que

$$\begin{aligned} y'(t_2) - y_2'^P &= y'(t_1) + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1)) \\ &\quad + h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k - \left( y_1'^P + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f_1^C \right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde hemos utilizado los valores calculados en el paso anterior, $y_1'^P$ y $y_1^C$, y se ha utilizado la notación $f_1^C = f(t_1, y_1^C)$. Después de algunos cálculos, utilizando las fórmulas en (3.28) y en (3.31), resulta que

$$y'(t_2) - y_2'^P = h^{k+1}\gamma_k \left( y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2) \right) + \mathcal{O}(h^{k+2})\,. \tag{3.33}$$

Del mismo modo, para el predictor tenemos

$$y(t_2) - y_2^P = h^{k+2}\beta_k y^{k+2)}(\xi_2) + h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{3.34}$$

Y finalmente, para el corrector tenemos que

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^C &= y(t_1) + h\, y'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1)) \\ &\quad + h^{k+3} y^{k+3)}(\xi_2)\beta_{k+1}^* - \left( y_1^C + h\, y_1'^P + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \bigtriangledown^j f_2^P \right) \\ &= h^{k+3}\beta_{k+1}^* \left( y^{k+3)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\xi_2) \right) + h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Repitiendo el procedimiento anterior a lo largo de los nodos del intervalo de integración se obtiene que el error acumulado en el punto $t_N$ está dado por

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+2}\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) y^{k+2)}(\psi_j) + h^{k+3}\beta_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

y para la derivada se tiene que

$$y'(t_N) - y_N'^P = h^{k+1}\gamma_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+2})\,. \tag{3.37}$$

Asumiendo que las derivadas $y^{k+2)}(t)$ e $y^{k+3)}(t)$ son funciones continuas, y después de utilizar el Teorema del Valor Medio, podemos poner

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= \frac{1}{2}\, h^k \gamma_k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1) \\ &\quad + h^{k+2}\beta_{k+1}^* y^{k+3)}(\xi)(t_N - t_0) + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{3.38}$$

y

$$y'(t_N) - y_N'^P = h^k \gamma_k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0) + \mathcal{O}(h^{k+2})\,. \tag{3.39}$$

**Método PEC 'CE**

En este modo, para el primer paso ($n = 0$), después de la aplicación del predictor y del corrector se obtienen los mismos resultados que antes, es decir,

$$y(t_1) - y_1^P = h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k\,,$$

y

$$y(t_1) - y_1^C = h^{k+3} y^{k+3)}(\xi_1)\beta_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+4})\,.$$

Ahora la diferencia con el modo anterior está en la aplicación de la fórmula correctora C' para obtener la aproximación de la derivada. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y_1'^C &= y'(t_0) + h\sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1)) \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* - \left( y_0'^C + h\sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f_1^P \right) \\ &= h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Después de la evaluación de $f(t_1, y_1^C)$ y la aplicación del predictor para obtener una estimación de $y(t_2)$ mediante $y_2^P$ , tras la aplicación del corrector C resulta

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^C &= h^{k+3}\beta_{k+1}^* \left( y^{k+3)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\xi_2) \right) + h^{k+3} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned} \tag{3.41}$$

mientras que tras la aplicación del corrector C' se obtiene

$$y'(t_2) - y_2'^C = h^{k+2}\gamma_{k+1}^* \left( y^{k+3)}(\psi_1) + y^{k+3)}(\psi_2) \right) + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{3.42}$$

Si se repite el procedimiento a lo largo de los nodos en el intervalo de integración se obtiene que el error acumulado en el punto $t_N$ está dado por

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+3}\gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) y^{k+3)}(\psi_j) + h^{k+3}\beta_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned} \tag{3.43}$$

y para la derivada se tiene que

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+2}\gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{3.44}$$

Asumiendo como antes que la derivada $y^{k+3)}(t)$ es una función continua, tras aplicar el Teorema del Valor Medio se obtiene que los errores acumulados en el punto $t_N$ están dados por

$$y(t_N) - y_N^C = \frac{1}{2}\, h^{k+1}\gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1) + h^{k+2}\beta_{k+1}^* y^{k+3)}(\xi)(t_N - t_0) + \mathcal{O}(h^{k+3}) \tag{3.45}$$

para la solución, y por

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+1}\gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0) + \mathcal{O}(h^{k+3}) \tag{3.46}$$

para la derivada.

**Método PECEC'**

La diferencia con el modo anterior está en cómo se aplica el corrector C' para obtener el valor $y_{n+1}'^C$. Ahora, para calcular $y_{n+1}'^C$ se usa en la fórmula implícita el valor $f(t_{n+1}, y_{n+1}^C)$ en lugar de $f(t_{n+1}, y_{n+1}^P)$. La primera diferencia con el modo anterior se observa en el primer paso ($n = 0$) donde se tiene

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y_1'^C &= y'(t_0) + h\sum_{j=0}^{k}\gamma_j^*\bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1)) \\ &\quad + h^{k+2}y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* - \left(y_0'^{C\,\prime} + h\sum_{j=0}^{k}\gamma_j^*\bigtriangledown^j f_1^C\right) \\ &= h^{k+2}y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Se observa que la única diferencia entre las fórmulas en (3.40) y en (3.47) es que el término $f_1^P$ ha sido sustituido por $f_1^C$, pero tras operar, esto no cambia los términos principales de los errores, que como se observa son iguales. Esto significa que los términos principales de los errores de las fórmulas finales son los mismos que en el modo anterior, por lo que las fórmulas en (3.45) y (3.46) siguen siendo válidas en este modo. Esto, sin embargo, no significa que los errores sean iguales, ya que los términos restantes son diferentes, pero como los términos principales son los mismos los errores serán similares (al menos para un tamaño de paso $h$ suficientemente pequeño).

### 3.4.3. Análisis de la estabilidad lineal

De nuevo el análisis de la estabilidad desde el punto de vista práctico lo llevamos a cabo considerando el test lineal introducido por Lambert y Watson [77] dado por

$$y''(t) = -\mu^2\, y(t)\,, \quad \text{con } \mu > 0\,. \tag{3.48}$$

La aplicación de las anteriores formulaciones en modo P-C del método implícito de Falkner al problema anterior conduce a una ecuación de recurrencia de la forma

$$Y_{n+1} = M[j]\, Y_n\,, \tag{3.49}$$

donde $Y_{n+1}$ es el vector de orden $k{+}1$ dado por $Y_{n+1} = \left(y_{n+1}, y_n, \ldots, y_{n-(k-2)}, h\, y'_{n+1}\right)^T$, y $M[j]\,, j = 1, 2, 3,$ son matrices de orden $(k{+}1)\times(k{+}1)$ cuyos elementos dependen de $H^2$ y de los coeficientes del método, siendo $H = \mu\, h$. Estas matrices $M[j]$ son las correspondiente matrices de estabilidad donde el índice $j$ que aparece en la notación $M[j]$ se usa para referirnos a cada uno de los diferentes modos en consonancia con la sección anterior, es decir, $j = 1$ se refiere al primero de los modos P-C, $j = 2$ corresponde al segundo de los modos P-C, y finalmente $j = 3$ corresponde al último.

Los términos de cada una de las matrices de estabilidad son los siguientes. Para la matriz $M[1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
M[1]_{1\,1} &= 1 + H^2 \sum_{j=0}^{k} \left( j - 1 + H^2 \sum_{s=0}^{k-1} \beta_s \right) \beta_j^* \\
M[1]_{1\,l+1} &= (-1)^l H^2 \sum_{j=0}^{k} \left( \binom{j}{l+1} + H^2 \sum_{s=l}^{k-1} \binom{s}{l} \beta_s \right) \beta_j^*\,, \\
&\qquad l = 1, \ldots, k-1\,. \\
M[1]_{j\,l} &= \delta_{j\,l+1}\,, \quad j = 2, \ldots, k \quad l = 1, \ldots, k+1\,. \\
M[1]_{k+1\,l+1} &= (-1)^{l+1} H^2 \sum_{j=l}^{k-1} \binom{j}{l} \gamma_j\,, \quad l = 0, \ldots, k-1\,. \\
M[1]_{k+1\,k+1} &= 1
\end{aligned}$$

siendo $\delta_{j\,l+1}$ el símbolo delta de Kronecker y donde la notación de la forma $\binom{j}{l}$ corresponde como es usual a los coeficientes binomiales.

En cuanto a las matrices $M[2]$ y $M[3]$, los términos son los mismos que para la matriz $M[1]$ salvo para la última fila, la cual para $M[2]$ está dada por

$$\begin{aligned}
M[2]_{k+1\,1} &= H^2 \sum_{j=0}^{k} \left( j - 1 + H^2 \sum_{s=0}^{k-1} \beta_s \right) \gamma_j^* \\
M[2]_{k+1\,l+1} &= (-1)^l H^2 \sum_{j=0}^{k} \left( \binom{j}{l+1} + H^2 \sum_{s=l}^{k-1} \binom{s}{l} \beta_s \right) \gamma_j^* \,, \\
&\qquad l = 1, \ldots, k-1 \,. \\
M[2]_{k+1\,k+1} &= 1 - H^2 \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \,,
\end{aligned}$$

mientras que para $M[3]$ la última fila está dada por

$$\begin{aligned}
M[3]_{k+1\,1} &= H^2 \sum_{j=0}^{k} \left[ j - 1 + H^2 \sum_{s=0}^{k} \left( 1 - s - H^2 \sum_{t=0}^{k-1} \beta_t \right) \beta_s^* \right] \gamma_j^* \\
M[3]_{k+1\,l+1} &= (-1)^l H^2 \sum_{j=0}^{k} \left[ \binom{j}{l+1} - H^2 \sum_{t=0}^{k} \left( \binom{t}{l+1} + H^2 \sum_{s=l}^{k-1} \binom{s}{l} \beta_s \right) \beta_t^* \right] \gamma_j^* \,, \\
&\qquad l = 1, \ldots, k-1 \,. \\
M[3]_{k+1\,k+1} &= 1 - H^2 \sum_{j=0}^{k} \left( 1 - H^2 \sum_{s=0}^{k} \beta_s^* \right) \gamma_j^* \,.
\end{aligned}$$

A modo de ejemplo, para $k = 3$ la ecuación en (3.49) en el caso de la matriz $M[1]$ tiene la forma

$$Y_n = \begin{pmatrix}
\frac{19\left(19H^2-132\right)H^2}{4320} + 1 & \frac{H^2}{10} - \frac{19H^4}{432} & \frac{H^2\left(19H^2-28\right)}{1440} & 1 - \frac{19H^2}{180} \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{23H^2}{12} & \frac{4H^2}{3} & -\frac{5H^2}{12} & 1
\end{pmatrix} Y_{n-1} \,,$$

mientras que en el caso de $M[2]$ la ecuación resulta ser

$$Y_n = \begin{pmatrix}
\frac{19\left(19H^2-132\right)H^2}{4320} + 1 & \frac{H^2}{10} - \frac{19H^4}{432} & \frac{H^2\left(19H^2-28\right)}{1440} & 1 - \frac{19H^2}{180} \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{19H^4}{64} - \frac{7H^2}{6} & \frac{5\,H^2\left(4-3H^2\right)}{96} & \frac{H^2\left(9H^2-8\right)}{192} & 1 - \frac{3H^2}{8}
\end{pmatrix} Y_{n-1} \,.$$

Finalmente, para la tercera de las formulaciones la matriz $M[3]$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{19\left(19H^2-132\right)H^2}{4320}+1 & \frac{H^2}{10}-\frac{19H^4}{432} & \frac{H^2\left(19H^2-28\right)}{1440} & 1-\frac{19H^2}{180} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2508H^4-361H^6-13440H^2}{11520} & \frac{95H^6-216H^4+1200H^2}{5760} & \frac{28H^4-19H^6-160H^2}{3840} & \frac{19H^4-180H^2}{480}+1 \end{pmatrix}$$

Como señalamos en el apartado 3.3.3 de la sección anterior, el comportamiento de la solución numérica dependerá de los valores propios de las matrices $M[i]$. En el caso de las formulaciones anteriores, para el método implícito se tiene que ninguna de ellas es A-estable ni P-estable para un número de pasos hasta $k = 14$. Solo existe un intervalo de periodicidad que corresponde al tercer modo en el caso de $k = 1$ siendo este intervalo el $[0, \sqrt{6}]$. En el Cuadro 3.1 se muestran los intervalos de estabilidad desde $k = 1$ hasta $k = 14$, donde como siempre $k$ se refiere al número de pasos del método. Las diferentes formulaciones en modo P-C del método implícito de $k$ pasos se denotan por FI[1]$k$, FI[2]$k$y FI[3]$k$ correspondiendo a los modos P'PECE, PEC'CE y PECEC' que acabamos de ver.

Para comparar hemos incluido también en la última columna, denominada STCW$k$, los intervalos de estabilidad del método de Störmer-Cowell de $k$ pasos en el modo PECE. Estos datos han sido obtenido con ayuda del programa Mathematica. Hemos considerado solamente los intervalos primarios de estabilidad si bien en algunos casos pueden existir intervalos de estabilidad secundarios, como ocurre por ejemplo para el segundo de los modos para $k = 2$, FI[2]2, para el cual el intervalo $[1, 2]$ es un intervalo donde se cumple $|r_i| < 1\,, i = 1, 2, 3$.

Hemos incluido diferentes gráficos mostrando los intervalos de estabilidad. La Figura Fig 3.6 muestra los valores absolutos de los valores propios de las matrices $M[2]$ y $M[3]$ para $k = 1$ en función de $H$, y los intervalos de estabilidad $(0, H_s)$ que resultan. En el caso de la matriz $M[3]$ hemos incluido el intervalo de periodicidad $(0, H_p)$. La Figura 3.7 recoge los valores absolutos de los valores propios de las matrices $M[1]$ y $M[2]$ para $k = 3$ en función de $H$. En este caso, para la matriz $M[2]$ no existe intervalo de estabilidad primario, pero sí que existe un intervalo de estabilidad secundario dado por $(1'731413, 1'895953)$.

| $k$ | FI[1]$k$ | FI[2]$k$ | FI[3]$k$ | STCW$k$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\varnothing$ | $(0, 2)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 2 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 3 | $(0, 0'853006)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 4 | $(0, 0'930949)$ | $(0, 0'534947)$ | $(0, 1'108998)$ | $(0, 0'794719)$ |
| 5 | $\varnothing$ | $(0, 0'925569)$ | $(0, 1'409664)$ | $(0, 1'330257)$ |
| 6 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 7 | $(0, 0'401364)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 8 | $(0, 0'285341)$ | $(0, 0'274630)$ | $(0, 0'480033)$ | $(0, 0'360863)$ |
| 9 | $\varnothing$ | $(0, 0'521074)$ | $(0, 0'821956)$ | $(0, 0'660841)$ |
| 10 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 11 | $(0, 0'100705)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 12 | $(0, 0'071103)$ | $(0, 0'185094)$ | $(0, 0'300133)$ | $(0, 0'232478)$ |
| 13 | $\varnothing$ | $(0, 0'362275)$ | $(0, 0'390144)$ | $(0, 0'411350)$ |
| 14 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

Cuadro 3.2: *Intervalos de estabilidad primarios para las diferentes formulaciones en modo P-C del método de Falkner implícito y del método de Stormer-Cowell.*

La Figura 3.8 muestra los valores absolutos de los valores propios de $M[1]$ y $M[3]$ para $k = 5$, teniendo en el caso de $M[1]$ un intervalo de estabilidad secundario dado por $(0'626085, 0'752697)$. Finalmente, en la Figura 3.9 aparecen los dos valores propios que limitan los intervalos de estabilidad en el caso de $M[2]$ y $M[3]$ para $k = 9$. Hemos incluido como referencia en todas las gráficas la línea horizontal a una unidad de distancia por encima del eje $OX$.

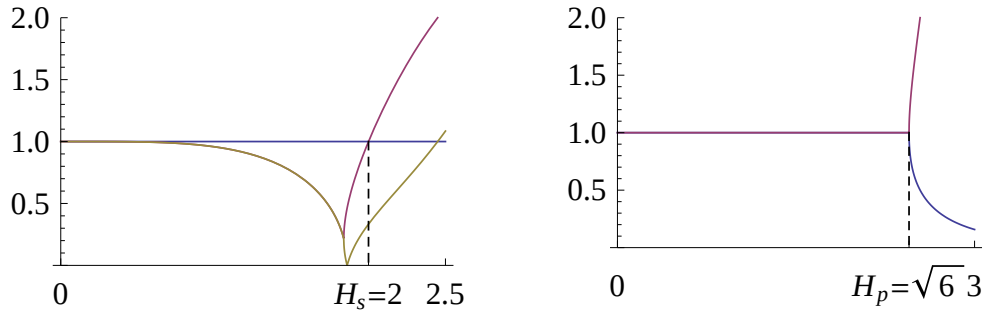



Figura 3.6: Valores absolutos de los valores propios $|r_i|$, $i = 1, 2$ de las matrices de estabilidad $M[2]$ (izq.) y $M[3]$ (der.) para $k = 1$.

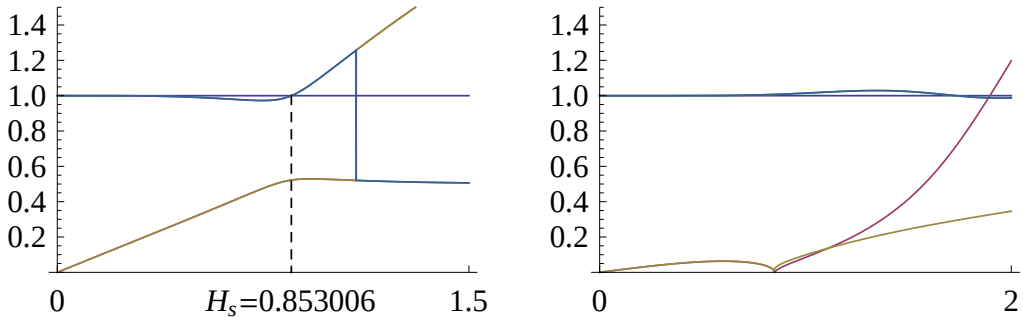



Figura 3.7: Valores absolutos de los valores propios $|r_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$ de las matrices de estabilidad $M[1]$ (izq.) y $M[2]$ (der.) para $k = 3$.

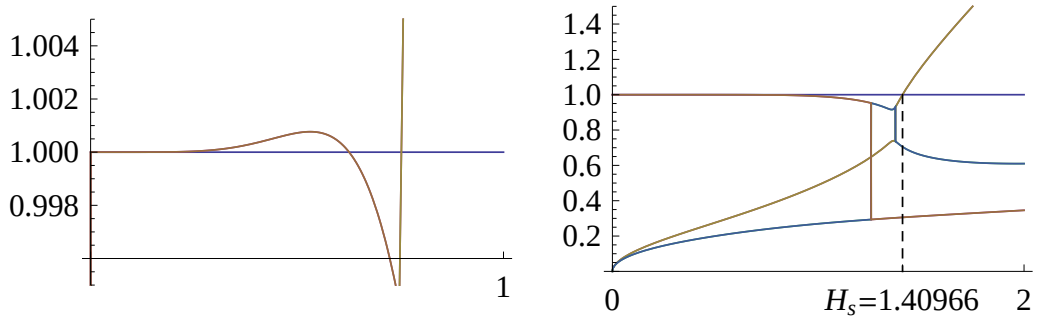



Figura 3.8: Valores absolutos de los valores propios $|r_i|$, $i = 1, \ldots, 6$ de las matrices de estabilidad $M[1]$ (izq.) y $M[3]$ (der.) para $k = 5$.

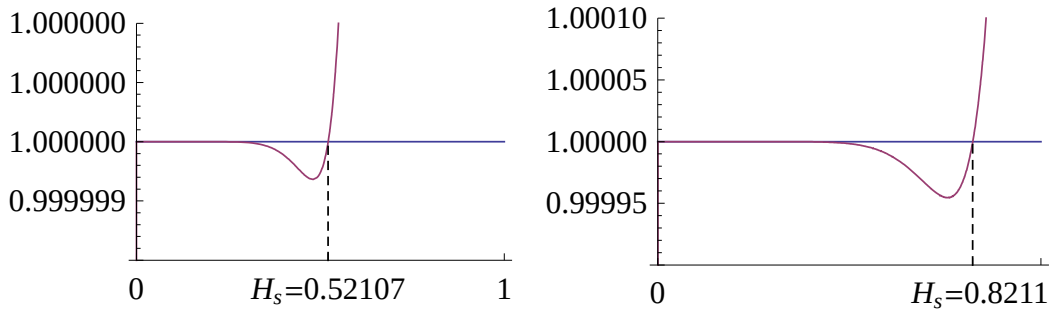



Figura 3.9: Valores absolutos de los dos valores propios que limitan el intervalo de estabilidad para cada una de las matrices de estabilidad $M[2]$ (izq.) y $M[3]$ (der.) para $k = 9$.

Con respecto a las regiones de estabilidad, mostraremos solamente uno de los casos. En la Figura 3.10 aparecen las regiones de estabilidad para los métodos $FI[i]4\,, i = 1, 2, 3$.

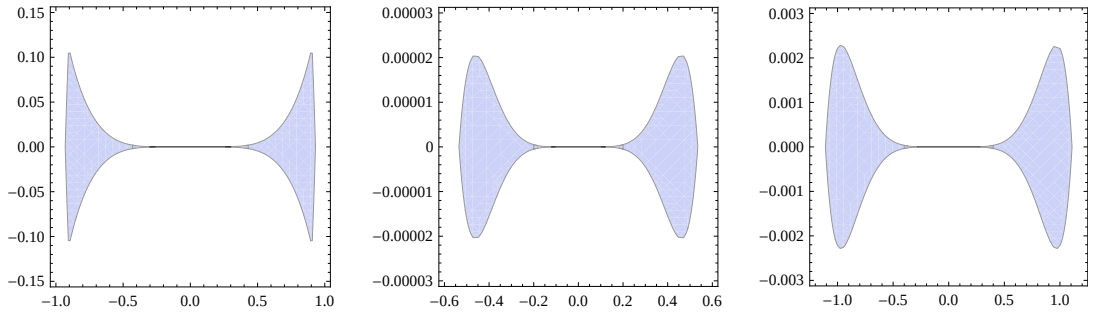



Figura 3.10: Regiones de estabilidad de los métodos $FI[i]4\,, i = 1, 2, 3$ (de izq. a der.).

**Nota 3.4.1** *En la aplicación de los modos P-C se puede optar por realizar o no la evaluación final de la función, E, para actualizar el valor de* $f_{n+1}$ *que será usado en el próximo paso. Si no se realiza esta última evaluación, el método* $FI[1]k$ *resulta ser el modo P'PEC en lugar del modo P'PECE, pero los métodos* $FI[2]k$ *y* $FI[3]k$ *resultan ser el mismo modo, concretamente el modo PEC'C. Cuando no se realiza esta última evaluación lo indicaremos mediante la notación* $\widetilde{FI}[i]k$, $i = 1, 2, 3$. *Aunque insistiremos más adelante en ello, señalamos ahora aquí que el orden de los errores acumulados es el mismo se lleve a cabo o no esta última evaluación. Sin embargo, las regiones de estabilidad difieren, aunque no mucho. En el caso en que no se realice la última evaluación, en el caso que nos ocupa las regiones de estabilidad son un poco más pequeña. En la Figura 3.11 se observan las regiones de estabilidad para los métodos* $FI[2]4$ *y* $\widetilde{FI}[2]4$.

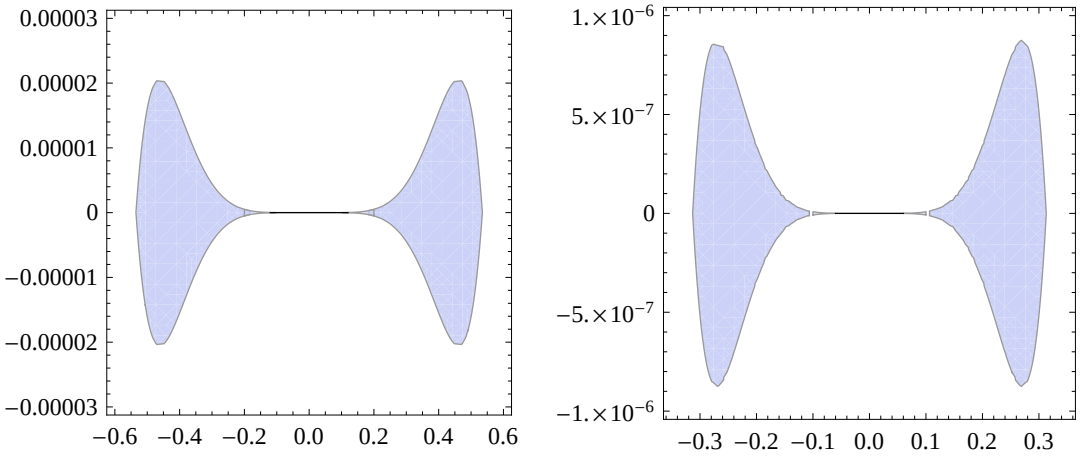



Figura 3.11: Regiones de estabilidad de los métodos $FI[2]4$ y $\widetilde{FI}[2]4$.

## 3.5. Cuadro resumen

Para poder comparar los distintos errores que hemos analizado anteriormente se han incluido en el Cuadro 3.3 los términos principales de los errores acumulados para las diferentes formulaciones de los métodos explícito e implícito de Falkner en modo P-C. Estos términos principales se denotan por $PT(y(t_n) - y_N)$ para la solución, y $PT(y'(t_n) - y'_N)$ para la derivada, donde como es habitual, la aproximación de los valores de la solución y de la derivada en el punto final se indican por $y_N$ y $y'_N$, respectivamente. Las dos formulaciones anteriores de los métodos explícitos de $k$ pasos para la solución y para la derivada se denotan según indicamos anteriormente por FE[1]$k$ y FE[2]$k$, mientras que las distintas formulaciones del método implícito de $k$ pasos en los modos P-C se denotan por FI[1]$k$, FI[2]$k$y FI[3]$k$.

En el Cuadro 3.4 hemos incluido los intervalos de estabilidad de todos los métodos analizados hasta ahora.

| Método | $PT(y(t_n) - y_N)$ | $PT(y'(t_n) - y'_N)$ |
|---|---|---|
| FE[1]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k$ | $h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma_k$ |
| FE[2]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^{k+1} y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma^*_{k+1}$ $+h^{k+1} y^{k+2)}(\xi)(t_N - t_0)\beta_k$ | $h^{k+1} y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma^*_{k+1}$ |
| FI[1]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k$ | $h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma_k$ |
| FI[2]$k$ FI[3]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^{k+1} y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma^*_{k+1}$ | $h^{k+1} y^{k+3)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma^*_{k+1}$ |

Cuadro 3.3: *Términos principales de los errores acumulados para las diferentes formulaciones en modo P-C de los métodos de Falkner explícitos e implícitos para resolver la ecuación* $y'' = f(t, y)$ .

| $k$ | FE[1]$k$ | FE[2]$k$ | FI[1]$k$ | FI[2]$k$ | FI[3]$k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(0, 2)$ | $\varnothing$ |
| 2 | $\varnothing$ | $(0, 1'732050)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 3 | $(0, 0'966988)$ | $(0, 1'414213)$ | $(0, 0'853006)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 4 | $(0, 1'014340)$ | $\varnothing$ | $(0, 0'930949)$ | $(0, 0'534947)$ | $(0, 1'108998)$ |
| 5 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(0, 0'925569)$ | $(0, 1'409664)$ |
| 6 | $\varnothing$ | $(0, 0'618097)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 7 | $(0, 0'477459)$ | $(0, 0'459279)$ | $(0, 0'401364)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 8 | $(0, 0'350905)$ | $\varnothing$ | $(0, 0'285341)$ | $(0, 0'274630)$ | $(0, 0'480033)$ |
| 9 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(0, 0'521074)$ | $(0, 0'821956)$ |
| 10 | $\varnothing$ | $(0, 0'175010$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 11 | $(0, 0'127867)$ | $(0, 0'126007)$ | $(0, 0'100705)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 12 | $(0, 0'090714)$ | $\varnothing$ | $(0, 0'071103)$ | $(0, 0'185094)$ | $(0, 0'300133)$ |
| 13 | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $(0, 0'362275)$ | $(0, 0'390144)$ |
| 14 | $\varnothing$ | $(0, 0'010000)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

Cuadro 3.4: *Intervalos de estabilidad primarios para las diferentes formulaciones en modo P-C de los métodos de Falkner explícitos e implícitos.*

# Capítulo 4

# Análisis de los métodos de Falkner en modo predictor-corrector para ecuaciones de la forma $y'' = f(t, y')$

Al igual que en el capítulo anterior la ausencia del término $y'$ en la función $f$ permitía utilizar los métodos de Falkner utilizando diferentes implementaciones, ahora la ausencia del término $y$ también permite distintas posibilidades. Veremos dos posibilidades para los métodos explícitos, y otras tres para los métodos implícitos. Nuestro problema de valor inicial se escribe ahora en la forma

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Los errores de truncamiento local de cada una de las fórmulas siguen siendo los mismos, así que remitimos al lector a la sección 3.1 o al capítulo segundo donde se muestra la expresión de cada uno de estos errores.

## 4.1. Métodos explícitos

### 4.1.1. Descripción de los métodos

#### Método PP ' E

La forma más directa de utilizar el método de Falkner explícito para resolver el problema anterior consiste en aplicar en cada paso lo siguiente:

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera formula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda formula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$

Este método es exactamente el mismo que el primero de los métodos explícitos del capítulo anterior. En aquel caso poníamos P 'P E, y ahora PP ' E simplemente para indicar que la evaluación E se hace considerando el valor más cercano, esto es el proporcionado por el predictor P '. Sin embargo el orden en que se realicen las evaluaciones correspondientes a P y a P ' es irrelevante.

**Método P ' EC**

La segunda posibilidad para resolver el problema anterior mediante el método de Falkner explícito consiste en utilizar la fórmula correctora para la solución, después de haber obtenido mediante el predictor el valor correspondiente de la derivada. En cada paso el algoritmo consiste en

1. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda formula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
3. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera formula en (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$

Ahora, debido a la ausencia del término $y(t)$ en la función $f = f(t, y'(t))$ tras obtener el valor ${y'}^P_{n+1}$ mediante el método explícito, podemos evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$ para ser utilizado luego en la fórmula implícita correspondiente para aproximar $y^C_{n+1}$. Ténganse en cuenta que de esta forma la fórmula implícita deja de serlo y el método resultante será un método explícito.

Veremos que para el modo PP ' E el error acumulado en el punto final es del orden $\mathcal{O}(h^k)$ y para el modo P ' EC es también de orden $\mathcal{O}(h^k)$, de manera que la utilización del método de Falkner explícito en cualquiera de los modos anteriores proporciona rendimientos similares (contrariamente a lo que sucedía con las dos formulaciones explícitas para el caso $y'' = f(x, y)$ donde una de ellas se comportaba mejor que la otra). Los experimentos numéricos que se verán más adelante confirmarán este hecho.

### 4.1.2. Errores acumulados

**Método PP ' E**

Como siempre, supondremos que tenemos que integrar el problema (4.1) en el intervalo $[t_0, t_N]$ y que sabemos de antemano los valores iniciales necesarios para aplicar el esquema numérico. Tras dividir el intervalo en subintervalos de igual longitud se procede aplicando el método a lo largo de dichos subintervalos, y analizaremos la forma en que se van acumulando los errores.

Asumiendo la hipótesis de la localización y teniendo en cuenta las fórmulas de los

errores de truncamiento local en (3.2) y (3.3), para el primer paso, $n = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} y(t_1) - y_1 &= y(t_1) - \left[ y_0 + h\, y_0' + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_0 \right] \\ &= h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k \,, \qquad (4.2) \\ y'(t_1) - y_1' &= h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \,, \qquad (4.3) \end{aligned}$$

con idénticas notaciones que las usadas en el capítulo anterior.

Para el paso siguiente ($n = 2$) teniendo en cuenta la fórmula del error de truncamiento local del método explícito resulta que

$$\begin{aligned} y(t_2) &= y(t_1) + hy'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j \bar{f}_1 \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_2)\beta_k \,, \qquad (4.4) \end{aligned}$$

donde consideramos como anteriormente que la barra sobre $f$ significa que la función es evaluada en los valores verdaderos (ahora será $\bar{f}_1 = f(t_1, y'(t_1))$). Por otro lado, tras aplicar el método explícito (2.9) obtenemos

$$y_2 = y_1 + hy_1' + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1 \,. \qquad (4.5)$$

Restando las fórmulas anteriores en (4.4) y (4.5), y teniendo en cuenta que podemos poner

$$\bar{f}_1 - f_1 = f(t_1, y'(t_1)) - f(t_1, y_1') = \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi)(y'(t_1) - y_1') \qquad (4.6)$$

y utilizando las fórmulas en (4.2) y en (4.3) del paso anterior, después de algunos cálculos se obtiene que

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2 &= h^{k+2} \left[ y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+2)}(\xi_2) \right] \beta_k + h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \,. \end{aligned}$$

De forma análoga, teniendo en cuenta la expresión del error de truncamiento local para la fórmula de la derivada se deduce que

$$y'(t_2) = y'(t_1) + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j \bar{f}_1 + h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k \,, \tag{4.7}$$

y del método en (2.20) obtenemos que

$$y'_2 = y'_1 + hy'_1 + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f_1 \,. \tag{4.8}$$

Ahora restamos las fórmulas anteriores en (4.7) y (4.8), y después de algunos cálculos resulta

$$y'(t_2) - y'_2 = h^{k+1}\left[y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2)\right]\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,.$$

Repitiendo el proceso a lo largo de los nodos del intervalo de integración determinamos que el error acumulado para la solución $y(t)$ en el punto final $t_N$ viene dado por

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N &= h^{k+2}\sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\xi_j)\beta_k + h^{k+2}\sum_{j=1}^{N-1}(N-j)y^{k+2)}(\psi_j)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

mientras que para la derivada resulta ser

$$y'(t_N) - y'_N = h^{k+1}\sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,.$$

Suponiendo que $y^{k+2)}(t)$ es continua y utilizando el Teorema del valor Medio, las fórmulas anteriores se puede escribir de la siguiente manera: para la solución resulta

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N &= h^{k+1} y^{k+2)}(\xi)(t_N - t_0)\beta_k \\ &\quad + \frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

y para la derivada tenemos

$$y'(t_N) - y'_N \;=\; h^k(t_N - t_0)y^{k+2)}(\psi)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{4.11}$$

Estas fórmulas son exactamente las mismas que obtuvimos para el primer método explícito para la ecuación $y'' = f(t, y)$. La razón de que sea así está en que lo único que cambia ahora con respecto a aquellas fórmulas es que el Teorema del Valor Medio se usa para hallar

$$\bar{f}_i - f_i \;=\; f(t_i, y'(t_i)) - f(t_i, y'_i) = \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_i)(y'(t_i) - y'_i)$$

pero las diferencias $y'(t_i) - y'_i$, aun teniendo un orden menos en el error que las $y(t_i) - y_i$, no cambian en nada el término principal del error.

**Método P ' EC**

La diferencia con el procedimiento anterior consiste en que en cada paso se evalúa primero la fórmula explícita para obtener la derivada y una vez que se dispone del valor ${y'}^P_{n+1}$, tras evaluar la función se utiliza la fórmula implícita para obtener el valor $y^C_{n+1}$. El procedimiento análogo en el caso de los métodos explícitos para la ecuación $y'' = f(t, y(t))$ vimos que permitía mejorar en un orden el error, tanto en la aproximación de la solución como de la derivada.

Tenemos que para $n = 1$ las fórmulas quedan

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y'_1 &= h^{k+1}y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \\ y(t_1) - y_1 &= y(t_1) - \left[y_0 + h\,y'_0 + h^2\sum_{j=0}^{k}\beta^*_j\,\nabla^j\,f_1\right] \\ &= h^{k+3}y^{k+3)}(\xi_1)\beta^*_{k+1}\,. \end{aligned}$$

Procediendo como antes se obtiene que para $n = 2$ es

$$y'(t_2) - y'_2 \;=\; h^{k+1}\left[y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2)\right]\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+4})\,.$$

y para la solución resulta

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2 \;=\; & h^{k+3}\left[y^{k+3)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\xi_2)\right]\beta^*_{k+1} + h^{k+2}\left[y^{k+2)}(\psi_1)\right]\gamma_k \\ & + \mathcal{O}(h^{k+5}) \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento a lo largo de los nodos de integración, en el punto final $t_N$ se obtiene que los errores acumulados se pueden poner en la forma

$$y(t_N) - y_N = h^{k+2}\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\, y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+4}) \tag{4.12}$$

y para la derivada

$$y'(t_N) - y'_N = h^{k+1}\gamma_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{4.13}$$

Suponiendo que las derivadas que aparecen son continuas, podemos utilizar el Teorema del valor Medio para simplificar los sumatorios, resultando que las fórmulas anteriores se puede escribir de la siguiente manera

$$y'(t_N) - y'_N = h^k (t_N - t_0) y^{k+2)}(\psi)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,,$$

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N &= \frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned} \tag{4.14}$$

de manera que los términos principales de los errores tanto para la solución como para la derivada coinciden con los del procedimiento anterior. Hacemos notar que ahora, a diferencia del caso $y'' = f(t, y)$, no se mejora el error al utilizar este segundo modo para los métodos explícitos.

### 4.1.3. Análisis de la estabilidad lineal

Como señalábamos en el capítulo anterior, el análisis de la estabilidad lineal consiste en ver para qué valores del paso $h$ un determinado método produce resultados razonables al aplicarlo a problemas test sencillos. Ahora la ecuación que estamos considerando es de la forma $y'' = f(t, y')$, y por tanto no tiene sentido considerar el problema test de Lambert dado en (3.48), donde no aparece la primera derivada. Si consideramos ecuaciones de la forma $y'' = \lambda y$ o $y'' = \lambda y'$ encontramos que las soluciones no tienen carácter oscilatorio. Entonces, para poder analizar la estabilidad

lineal (en realidad será la P-estabilidad puesto que veremos que siempre hay una raíz de módulo unidad) vamos a considerar el problema test dado por

$$y''(t) = -i\mu\, y'(t)\,, \quad \text{con } \mu \neq 0\,, \tag{4.15}$$

el cual tiene soluciones oscilatorias y acotadas, aunque tendremos que operar con aritmética compleja ($i$ es la unidad imaginaria). Ahora la aplicación de los métodos que acabamos de ver al problema test anterior conduce a una ecuación de recurrencia de la forma

$$\dot{Y}_{n+1} = C[j]\,\dot{Y}_n\,, \tag{4.16}$$

donde $\dot{Y}_{n+1}$ es el vector de $k+1$ componentes dado por

$$\dot{Y}_{n+1} = \left(h\,y'_{n+1}, h\,y'_n, \ldots, h\,y'_{n-(k-2)}, y_{n+1},\right)^T$$

y $C[j]\,, j = 1, 2$ son matrices de orden $(k+1)\times(k+1)$ cuyos elementos dependen de $H = \mu\, h$, y que se conoce como matriz de estabilidad. Denotaremos por $C[1]$ la matriz que corresponde al primero de los modos, PP'E , y por $C[2]$ a la que corresponde al segundo de los modos, P'EC . A continuación mostramos los términos de cada una de las matrices de estabilidad. Para la matriz $C[1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
C[1]_{1\,1} &= 1 - iH\bar{\gamma}_0 \\
C[1]_{1\,i} &= -iH\bar{\gamma}_{i-1}\,, \qquad i = 2, \ldots, k\,. \\
C[1]_{1\,k+1} &= 0 \\
C[1]_{k+1\,1} &= 1 - iH\bar{\beta}_0 \\
C[1]_{k+1\,i} &= -iH\bar{\beta}_{i-1}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \\
C[1]_{k+1\,k+1} &= 1 \\
C[1]_{i\,j} &= \delta_{i-1,j}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \quad j = 1, \ldots, k+1
\end{aligned}$$

donde, como dijimos anteriormente, $\delta_{i-1\,j}$ es el símbolo delta de Kronecker.

En cuanto a la matriz $C[2]$ resulta que es igual que la anterior salvo la última fila, puesto que en el segundo caso se utiliza la fórmula correctora para aproximar

la solución, en lugar de la fórmula predictora, pero la derivada se aproxima de igual forma, mediante la fórmula predictora. Los términos de la última fila de $C[2]$ son

$$\begin{aligned} C[2]_{k+1\,1} &= 1 - iH\bar{\beta}_1^* - iH\bar{\beta}_0^*(1 - iH\bar{\gamma}_0) \\ C[2]_{k+1\,i} &= -iH\bar{\beta}_i^* - H^2\bar{\beta}_0^*\bar{\gamma}_{i-1}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \\ C[2]_{k+1\,k+1} &= 1\,. \end{aligned}$$

A modo de ejemplo, cuando $k = 3$ la ecuación en (4.16) en el caso del método PP ' E se escribe

$$\dot{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{23iH}{12} & \frac{4iH}{3} & -\frac{5iH}{12} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{19iH}{24} & \frac{5iH}{12} & -\frac{iH}{8} & 1 \end{pmatrix} \dot{Y}_n$$

mientras que en el caso del modo P ' EC está dada por

$$\dot{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{23iH}{12} & \frac{4iH}{3} & -\frac{5iH}{12} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{437H^2}{2160} - \frac{209iH}{360} & \frac{H(38H+27i)}{270} & -\frac{H(95H+42i)}{2160} & 1 \end{pmatrix} \dot{Y}_n\,.$$

El comportamiento de las soluciones numéricas depende de los valores propios de estas matrices de estabilidad, y siguen siendo válidas las definiciones de intervalo de estabilidad y de intervalo de periodicidad. No obstante, por la forma de la matriz, el polinomio característico siempre tendrá la raíz 1, y por tanto hablaremos solo de intervalos y regiones de periodicidad. Por otro lado, el hecho de que las matrices $C[1]$ y $C[2]$ se diferencien únicamente en la última fila, teniendo la última columna igual, formada por ceros y un 1 al final, hace que las dos matrices tengan el mismo polinomio característico. Por tanto las regiones de periodicidad en los dos métodos son iguales.

En el Cuadro 4.1 se muestran los intervalos de periodicidad para los métodos desde $k = 1$ a $k = 14$ para ambas formulaciones. Las regiones de periodicidad son simétricas respecto del eje vertical, así que los intervalos de periodicidad también lo son respecto del origen. Para mayor comodidad en la notación, el modo PP ' E lo denotamos por FE'[1]$k$ y el modo P ' EC lo denotamos por FE'[2]$k$, donde $k$ se

refiere al número de pasos. Estos valores de los intervalos de periodicidad se han obtenido con la ayuda del programa Mathematica. El signo $\varnothing$ significa que no hay un intervalo primario de periodicidad, es decir, un intervalo de la forma $(-\alpha, \alpha)$, pero ello no quiere decir que no haya otros intervalos de periodicidad secundarios. De hecho, si se considera que $\mu \in \mathbb{C}$ en lugar de intervalo de periodicidad se habla de región de periodicidad. En la Figura 4.1 se muestran las regiones de periodicidad para $k = 1$ y $k = 2$ y en la Figura 4.2 se muestran las regiones de periodicidad para $k = 3$ y $k = 11$. Debajo de esta última, en la Figura 4.3 se muestran las raíces de los polinomios característicos correspondientes las cuales determinan dichas regiones. Se observa que la parte del eje real que corta a las regiones son los intervalos de periodicidad. En todos los casos los polinomios característicos tienen la raíz 1, así que no hay intervalos de estabilidad, mientras que para las dos formulaciones los intervalos de periodicidad son los mismos. También se observa que a medida que crece el número de pasos del método, $k$, las regiones son cada vez más pequeñas.

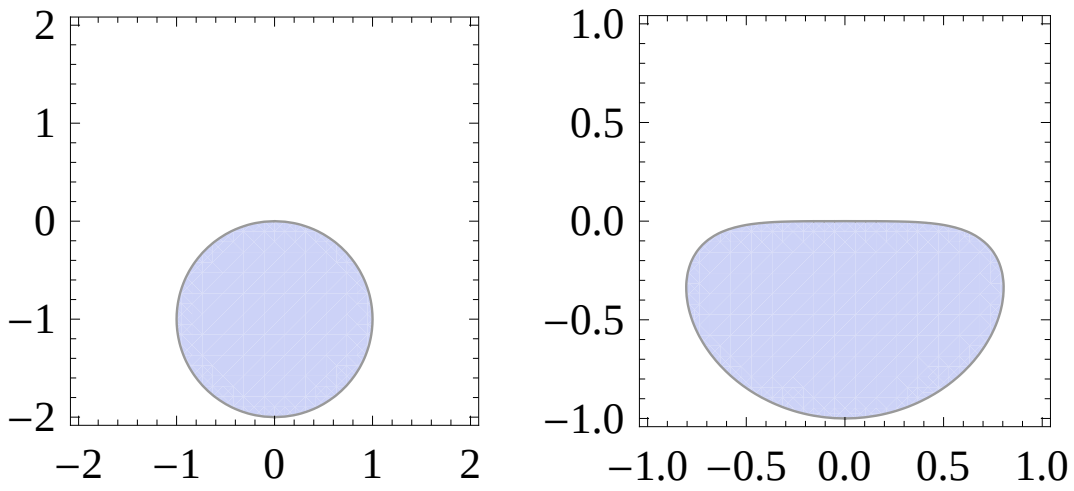



Figura 4.1: Regiones de periodicidad para los métodos FE'[i]1 (izq.) y FE'[i]2 (der.), $i = 1, 2$.

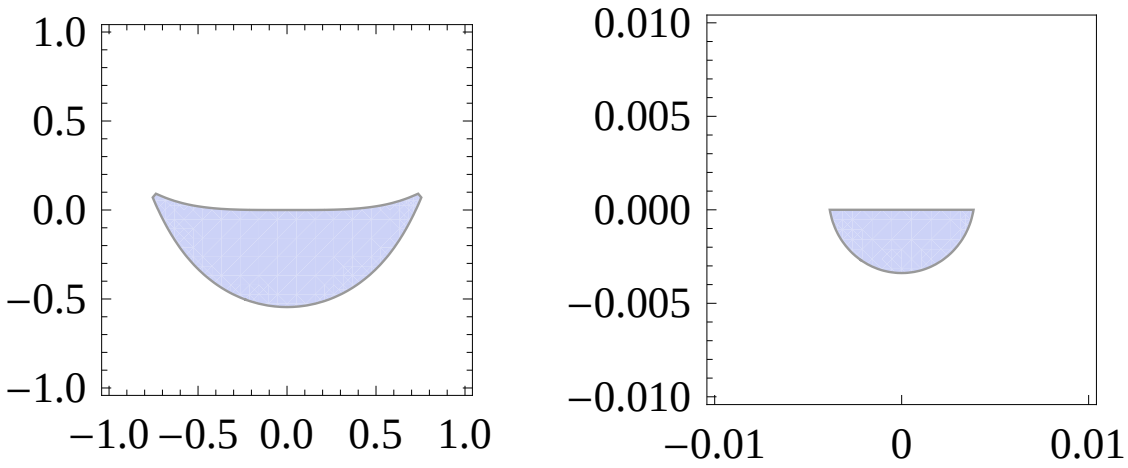



Figura 4.2: Regiones de periodicidad para los métodos FE'[i]3 (izq.) y FE'[i]11 (der.), $i = 1, 2$.

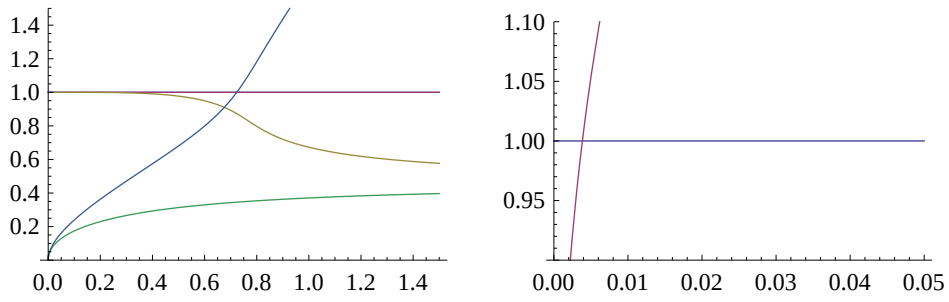



Figura 4.3: Valores absolutos de algunos valores propios de las matrices de estabilidad para los métodos FE'[i]3 (izq.) y FE'[i]11 (der.), $i = 1, 2$.

| $k$ | FE'[1]$k$ y FE'[2]$k$ |
|---|---|
| 1 | $\varnothing$ |
| 2 | $\varnothing$ |
| 3 | $(-0'723627, 0'723627)$ |
| 4 | $(-0'429987, 0'429987)$ |
| 5 | $\varnothing$ |
| 6 | $\varnothing$ |
| 7 | $(-0'058089, 0'058089)$ |
| 8 | $(-0'029489, 0'029489)$ |
| 9 | $\varnothing$ |
| 10 | $\varnothing$ |
| 11 | $(-0'003845, 0'003845)$ |
| 12 | $(-0'001947, 0'001947)$ |
| 13 | $\varnothing$ |
| 14 | $\varnothing$ |

Cuadro 4.1: *Intervalos de periodicidad para las dos implementaciones de los métodos de Falkner explícitos FE'[i]k, $i = 1, 2$, para la ecuación $y'' = f(t, y')$.*

## 4.2. Métodos implícitos

En este apartado utilizaremos la misma notación que en el capítulo anterior en lo que respecta a los métodos implícitos, indicando mediante un superíndice $P$ la aplicación del predictor y mediante un superíndice $C$ la aplicación del corrector, y las evaluaciones de la función $f$ las indicaremos mediante una E. Como en la función $f$ aparece la $y'$ será obligado el uso de la fórmula predictora para calcular ${y'}^P_{n+1}$, y luego ya podremos utilizar las fórmulas implícitas bien para obtener la solución o bien para la derivada. Obsérvese que tras obtener el último valor de $y'_{n+1}$ (bien sea el ${y'}^P_{n+1}$ o el ${y'}^C_{n+1}$) evaluamos la función $f$ para disponer del valor actualizado $f(t_{n+1}, {y'}_{n+1})$ que será necesario para el siguiente paso.

Hemos considerado tres posibilidades para combinar las distintas fórmulas. En todas ellas el número de evaluaciones de la función $f$ en cada paso es el mismo: dos. Una de ellas se utiliza para obtener el valor $f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$ que se usará en la fórmula implícita, y la otra evaluación es $f(t_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$, que actualizará el valor para ser usado en el siguiente paso.

### 4.2.1. Descripción de los métodos

#### Método PP 'E C' E

La primera opción para la aplicación del método implícito de Falkner para resolver el problema en (4.1) consiste en realizar en cada paso las siguientes operaciones

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
4. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener ${y'}^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$

#### Método P 'E C C' E

La segunda posibilidad que consideraremos está dada por las siguientes operaciones

1. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
3. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$
4. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener ${y'}^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$

**Método P ' E C ' E C**

La última posibilidad consiste en realizar las siguientes operaciones

1. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
3. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener ${y'}^C_{n+1}$
4. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$
5. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$

### 4.2.2. Errores acumulados

Como siempre, supondremos que tenemos que integrar el problema en (4.1) en el intervalo $[t_0, t_N]$, y que conocemos de antemano los valores de partida necesarios para aplicar el esquema numérico. Procederemos a analizar los errores acumulados en el punto final tras aplicar el método numérico en cada paso a lo largo de los $N$ subintervalos en que se divide el intervalo inicial.

**Método PP ' E C ' E**

Suponiendo la hipótesis de la localización y el conocimiento de los errores locales de truncamiento, para el primer paso ($n = 0$) se tiene que las diferencias entre los verdaderos valores, $y(t_1)\,, y'(t_1)$, y sus aproximaciones $y^P_1\,, {y'}^P_1$, consisten en los respectivos errores de truncamiento local, es decir,

$$y(t_1) - y^P_1 = h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k\,, \tag{4.17}$$

$$y'(t_1) - {y'}^P_1 = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k\,, \tag{4.18}$$

para unos puntos intermedios adecuados $\xi_j$ y $\psi_j$ .

Después de evaluar $f(t_1, y_1'^P)$, utilizando el Teorema del Valor Medio se puede poner que

$$f(t_1, y'(t_1)) - f_1^P = \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1)\ \left(y'(t_1) - y_1'^P\right)$$

donde $f_1^P = f(t_1, y_1'^P)$. Tras la obtención del valor aproximado de la derivada mediante la fórmula implícita, haciendo uso de la fórmula anterior, tenemos

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y_1'^C &= y'(t_0) + h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f(t_1, y'(t_1)) \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* - \left(y_0' + h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f_1^P\right) \\ &= h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1) + h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,. \end{aligned}$$

Después de evaluar $f(t_1, y_1'^C)$, para el siguiente paso ($n = 1$) tenemos que

$$y(t_2) = y(t_1) + hy'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f(t_1, y'(t_1)) + h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_2)\beta_k$$

$$y_2^P = y_1^P + hy_1'^C + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1$$

Restando estas dos expresiones nos queda

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^P &= y(t_1) + hy'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f(t_1, y'(t_1)) \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_2)\beta_k - \left(y_1^P + hy_1'^C + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1\right) \end{aligned}$$

y, utilizando las fórmulas de los errores obtenidos en el paso anterior, tras simplificar resulta

$$y(t_2) - y_2^P = h^{k+2}\beta_k \left(y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2)\right) + \mathcal{O}(h^{k+4})\,. \tag{4.19}$$

Para hallar el error obtenido al calcular la derivada con el predictor consideramos las fórmulas

$$y'(t_2) = y'(t_1) + \ h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f(t_1, y'(t_1)) + \ h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k$$

$$y_2'^P = y_1'^C + \ h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f_1$$

y restando ambas fórmulas resulta

$$y'(t_2) - y_2'^P = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k \, . \tag{4.20}$$

Ahora evaluamos la función $f(t_2, y_2'^P)$ y el siguiente paso sería calcular la derivada con el corrector. Para hallar el error en este paso consideramos las fórmulas

$$y'(t_2) = y'(t_1) + \ h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f(t_2, y'(t_2)) + \ h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_2)\gamma_{k+1}^*$$

$$y_2'^C = y_1'^C + \ h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f_1$$

Restamos estas dos fórmulas, y teniendo en cuenta los errores del paso anterior, después de algunos cálculos nos queda

$$\begin{aligned} y'(t_2) - y_2'^C &= y'(t_1) + \ h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f(t_2, y'(t_2)) + \ h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_2)\gamma_{k+1}^* \\ &\quad - \left( y_1'^C + \ h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \bigtriangledown^j f_2 \right) \\ &= h^{k+2}\gamma_{k+1}^*(y^{k+3)}(\psi_1) + y^{k+3)}(\psi_2)) \\ &\quad + h^{k+2}\gamma_0^*\gamma_k(y^{k+2)}(\psi_1)\frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1) + y^{k+2)}(\psi_2)\frac{\partial f}{\partial y'}(t_2, \xi_2)) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3}) \, . \end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento anterior a lo largo de los nodos en el intervalo de integración se obtiene que el error acumulado en el punto $t_N$ para la solución está dado por

$$y(t_N) - y_N^P = h^{k+2}\beta_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+4}), \tag{4.21}$$

y para la derivada se tiene la fórmula

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+2}\left(\gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j) + \gamma_0^*\gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(t_j, \xi_j)\, y^{k+2)}(\psi_j)\right)$$
$$+\mathcal{O}(h^{k+3}).$$

Si suponemos que las derivadas que aparecen en las fórmulas anteriores son funciones continuas, por el Teorema del Valor Medio podemos simplificar los sumatorios y poner

$$y(t_N) - y_N^P = h^{k+1}\beta_k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0) + \mathcal{O}(h^{k+4}),$$

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+1}(t_N - t_0)\left(\gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) + \gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi)\, y^{k+2)}(\psi)\right)$$
$$+\mathcal{O}(h^{k+3}).$$

**Método P ' E CC ' E**

En este modo lo primero que hacemos en cada paso es hallar una aproximación de la derivada mediante el método explícito, $y_{n+1}'^P$, y con este valor, tras calcular el valor de $f(t_{n+1}, y_{n+1}'^P)$, utilizamos las fórmulas implícitas de la solución y de la derivada para obtener las aproximaciones $y_{n+1}^C$, $y_{n+1}'^C$. Finalmente, se evalúa $f(t_{n+1}, y_{n+1}'^C)$ para poderlo utilizar en el paso siguiente. Y así a lo largo de todos los nodos hasta llegar al punto final $t_N$.

Suponiendo la hipótesis de la localización, a partir de la fórmula del error de truncamiento local, para el primer paso ($n = 0$) se tiene que la diferencia entre el verdadero valor, $y'(t_1)$, y el valor aproximado es

$$y'(t_1) - y_1'^P = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \tag{4.22}$$

para un punto intermedio adecuado $\psi_j$.

Tras evaluar la función para obtener $f(t_{n+1}, y'^P_{n+1})$ determinamos el error para la solución y la derivada con las fórmulas implícitas. Se tiene

$$y(t_1) - y_1^C = h^{k+3}\beta^*_{k+1}y^{k+3)}(\xi_1) + h^{k+3}\beta^*_0\frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_1) + \mathcal{O}(h^{k+4}) \tag{4.23}$$

donde hemos utilizado la fórmula

$$f(t_1, y'(t_1)) - f_1^P = \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1)\ \left(y'(t_1) - y'^P_1\right)$$

junto con el error en el primer paso dado por (4.22).

Ahora hallamos el error para la aproximación de $y'(t_{n+1})$ obtenido mediante la fórmula implícita. A partir de las fórmulas

$$y'(t_1) = y'(t_0) + h\sum_{j=0}^{k}\gamma^*_j\bigtriangledown^j f_j + h^{k+2}y^{k+3)}(\psi_1)\gamma^*_{(k+1)}\,, \tag{4.24}$$

y

$$y'^C_1 = y'_0 + h\sum_{j=0}^{k}\gamma^*_j\bigtriangledown^j f_j \tag{4.25}$$

se obtiene restándolas que

$$y'(t_1) - y'^C_1 = h^{k+2}y^{k+3)}(\psi_1)\gamma^*_{k+1} + h^{k+2}\gamma^*_0\gamma_k\frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1)y^{k+2)}(\psi_1)\,.$$

Tras evaluar la función $f(t_1, y'^C_1)$ para poderla utilizar en el siguiente paso se vuelve a repetir el esquema. Empezamos calculando el error en la derivada con la fórmula explícita en el punto $t_2$. Nos queda de la siguiente manera

$$y'(t_2) - y'^P_2 = h^{k+1}y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{4.26}$$

Evaluamos la función en ese punto obteniendo $f(t_2, y'^P_2)$, y seguidamente corregimos la aproximación de la solución con la forma implícita, o sea con el corrector, y obtenemos que el error se puede expresar como

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^C = {} & h^{k+3}\beta^*_{k+1}y^{k+3)}(\xi_1) + h^{k+3}\gamma^*_{k+1}y^{k+3)}(\psi_1) \\ & + h^{k+3}\gamma^*_0\gamma_k\frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1)y^{k+2)}(\psi_1) + h^{k+3}\beta^*_{k+1}y^{k+3)}(\xi_2) \\ & + h^{k+3}\beta^*_0\gamma_k y^{k+2)}(\xi_1)\frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1) + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned}$$

El valor obtenido con el predictor se usa también para hallar una mejor aproximación a la derivada mediante la fórmula implícita. Se tiene que el error cometido es

$$\begin{aligned} y'(t_2) - y_2'^C &= h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma^*_{k+1} + h^{k+2}\gamma^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1) y^{k+2)}(\xi_1) \\ &\quad + h^{k+2}\gamma^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t_2, \xi_2) y^{k+2)}(\xi_2) + h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_2)\gamma^*_{k+1} \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3}) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Procediendo de esta manera sucesivamente se obtiene que los errores acumulados para la solución en el punto final se pueden expresar en la forma

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+3} \left[ \gamma^*_{k+1} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) y^{k+3)}(\psi_j) + \beta^*_{k+1} \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j) \right. \\ &\quad + \gamma^*_0\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \frac{\partial f}{\partial y'}(t_i, \xi_i) y^{k+2)}(\xi_i) \\ &\quad \left. + \beta^*_0\gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(t_i, \xi_i) y^{k+2)}(\xi_i) \right] . \end{aligned}$$

Y finalmente, el error en el punto final para la derivada se puede escribir como

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+2} \left[ \gamma^*_{k+1} \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j) + \gamma^*_0\gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(t_j, \xi_j) y^{k+2)}(\xi_j) \right] .$$

Suponiendo que las derivadas que aparecen en las anteriores fórmulas son continuas se pueden poner como

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+1} \frac{1}{2} (t_N - t_0)(t_N - t_1) \\ &\quad \times \left[ \gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi) \right] \\ &\quad + h^{k+2}(t_N - t_0) \left[ \beta^*_{k+1} y^{k+3)}(\xi) + \beta^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi) \right] , \end{aligned}$$

$$y'(t_N) - y'^C_N \;=\; h^{k+1}(t_N - t_0)\left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t,\xi) y^{k+2)}(\xi)\right].$$

**Método P ' EC ' EC**

La diferencia con el anterior está en que tras la aplicación del corrector $C'$ para obtener la aproximación $y'^C_{n+1}$, se evalúa la función $f(t_{n+1}, y'^C_{n+1})$ y después se utiliza este valor en el método implícito para aproximar la solución y obtener $y^C_{n+1}$. Nótese que de esta manera ya no hay que hacer nueva evaluación de la $f$, y lo único que hemos hecho ha sido anticipar la evaluación de la función, pero el número total de evaluaciones sigue siendo dos. En el caso anterior lo que pasaba es que calculábamos $y^C_{n+1}$ antes de evaluar la función y lo último que se hacía en cada paso era evaluar dicha función.

La primera diferencia con el modo anterior se observa en el primer paso ($n = 0$). El error en este primer paso para la derivada es el error de truncamiento local

$$y'(t_1) - y'^P_1 \;=\; h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k\,. \tag{4.28}$$

Luego evaluamos la función $f(t_{n+1}, y'^P_{n+1})$ y ahora volvemos a calcular el error en la aproximación de la derivada para el corrector C'

$$y'(t_1) - y'^C_1 \;=\; h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma^*_{k-1} + h^{k+2}\gamma^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1) y^{k+2)}\,.$$

Volvemos a evaluar la función obteniendo $f(t_{n+1}, y'^C_{n+1})$, y el siguiente paso es aproximar la solución mediante el método implícito con lo que resulta el error

$$y(t_1) - y^C_1 \;=\; h^{k+3}\beta^*_{k+1} y^{k+3)}(\xi_1) + h^2\beta^*_0 \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_1) h^{k+1} + \mathcal{O}(h^{k+4})\,.$$

Después de calcularlo en el primer punto procedemos de la misma manera en el segundo punto, teniendo en cuenta las fórmulas de los errores en el primer paso. Empezamos con la derivada en forma explícita y nos queda de la siguiente manera

$$y'(t_2) - y'^P_2 \;=\; h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})$$

Evaluamos la función en el valor que se acaba de obtener y resulta $f(t_{n+2}, y'^P_{n+2})$ y seguidamente, de la misma manera corregimos la derivada con la fórmula implícita.

El error que resulta lo podemos poner

$$\begin{aligned} y'(t_2) - y_2'^C &= h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_1)\gamma_{k+1}^* + h^{k+2}\gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1) y^{k+2)} \\ &\quad + h^{k+2}\gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_2) y^{k+2)} \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+3)}(\psi_2)\gamma_{k+1}^* + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \end{aligned}$$

Y por ultimo evaluamos de nuevo la función y calculamos el error al utilizar la fórmula implícita para aproximar la solución, resultando ser

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^C &= h^{k+3}\beta_{k+1}^* y^{k+3)}(\xi_1) + h^{k+3}\gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi_1) \\ &\quad + h^{k+2}\gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1) y^{k+2)} \\ &\quad + h^{k+3}\beta_{k+1}^* y^{k+3)}(\xi_2) + h^{k+3}\beta_0^* y^{k+2)} \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+4})\,. \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera a lo largo de los nodos del intervalo resulta que el error acumulado para la solución en el punto final del intervalo es

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+3}\left[\gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N-1}(N-j) y^{k+3)}(\psi_j) + \beta_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j)\right. \\ &\quad \left. + \gamma_0^*\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1}(N-j)\frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j)\right]\,, \end{aligned}$$

y para la derivada

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+2}\left[\gamma_0^*\gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) + \gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j)\right]\,.$$

Suponiendo que las derivadas son continuas se pueden simplificar los sumatorios anteriores y poner

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+1}\frac{1}{2}(t_N - t_0)(t_N - t_1) \\ &\quad \times \left[\gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) + \gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi) y^{k+2)}(\xi)\right] \\ &\quad + h^{k+2}\beta_{k+1}^*(t_N - t_0) y^{k+3)}(\xi)\,, \end{aligned}$$

$$y'(t_N) - y'^C_N \;=\; h^{k+1}(t_N - t_0)\left[\gamma^*_0\gamma_k\frac{\partial f}{\partial y'}(\psi)y^{k+2)}(\xi) + \gamma^*_{k+1}y^{k+3)}(\psi)\right].$$

### 4.2.3. Análisis de la estabilidad lineal

De nuevo consideramos el problema test dado por

$$y''(t) = -i\mu\, y'(t)\,, \quad \text{con } \mu \neq 0\,, \tag{4.29}$$

el cual tiene soluciones oscilatorias y acotadas, aunque como dijimos tendremos que operar con aritmética compleja. Ahora la aplicación de los métodos que acabamos de ver al problema test anterior conduce a ecuaciones de recurrencia de la forma

$$\dot{Y}_{n+1} = D[j]\,\dot{Y}_n\,, \tag{4.30}$$

donde $\dot{Y}_{n+1}$ es el vector de $k+1$ componentes dado por

$$\dot{Y}_{n+1} = \left(h\,y'_{n+1}, h\,y'_n, \ldots, h\,y'_{n-(k-2)}, y_{n+1},\right)^T$$

y $D[j]\,, j = 1, 2, 3$ son matrices de orden $(k+1)\times(k+1)$ cuyos elementos dependen de $H = \mu\,h$ y de los coeficientes de los métodos, y que es la matriz de estabilidad del modo correspondiente. Igual que anteriormente, $D[1]$ corresponde al primero de los modos, PP'EC' E, la matriz $D[2]$ corresponde al segundo de los modos, P'E CC' E, y finalmente, $D[3]$ corresponde al último de ellos, P'EC'EC. A continuación mostramos cómo está formada cada una de estas matrices. La matriz $D[1]$ tiene la última fila igual que la de la matriz $C[1]$ del primero de los modos explícitos, puesto que como en los modos correspondientes, el valor de la solución se aproxima por la fórmula predictora. En cuanto a los otros términos, son los siguientes

$$\begin{aligned}
D[1]_{1\,1} &= 1 - iH\bar{\gamma}^*_1 - iH\bar{\gamma}^*_0(1 - iH\bar{\gamma}_0)\\
D[1]_{1\,i} &= -iH\bar{\gamma}^*_i - H^2\bar{\gamma}^*_0\bar{\gamma}_{i-1}\,, \qquad i = 2, \ldots, k\,.\\
D[1]_{1\,k+1} &= 0\\
D[1]_{i\,j} &= \delta_{i-1,j}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \quad j = 1, \ldots, k+1
\end{aligned}$$

En cuanto a la matriz $D[2]$, la última fila será igual que la de la matriz $C[2]$ del correspondiente modo explícito, ya que para obtener la aproximación de la solución

se usa en ambos casos el método corrector. Y la primera fila de $D[2]$ será igual que la de la matriz $D[1]$ puesto que en ambos casos se usa el método corrector para obtener la derivada. Las restantes filas están formadas por ceros y unos para completar la matriz, siendo

$$D[2]_{i\,j} \quad = \quad \delta_{i-1,j}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \quad j = 1, \ldots, k+1$$

Finalmente, la matriz $D[3]$ tiene la primera fila igual a la de las matrices $D[1]$ y $D[2]$. Y para los otros términos se tiene que

$$\begin{aligned}
D[3]_{k+1\,1} &= 1 - iH\bar{\beta}_1^* - iH\bar{\beta}_0^*(1 - iH\bar{\gamma}_1^* - iH\bar{\gamma}_0^*(1 - iH\bar{\gamma}_0)) \\
D[3]_{k+1\,i} &= -iH\bar{\beta}_i^* - iH\bar{\beta}_0^*(-iH\bar{\gamma}_i^* - H^2\bar{\gamma}_0^*\bar{\gamma}_{i-1})\,, \qquad i = 2, \ldots, k \\
D[3]_{k+1\,k+1} &= 1 \\
D[3]_{i\,j} &= \delta_{i-1,j}\,, \qquad i = 2, \ldots, k \quad j = 1, \ldots, k+1\,.
\end{aligned}$$

A modo de ejemplo, cuando $k = 3$ la ecuación en (4.30) en el caso del método PP'E C' E se escribe

$$\dot{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{23H^2}{32} - \frac{7iH}{6} + 1 & \frac{H(12H+5i)}{24} & -\frac{H(15H+4i)}{96} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{19iH}{24} & \frac{5iH}{12} & -\frac{iH}{8} & 1 \end{pmatrix} \dot{Y}_n$$

mientras que en el caso del modo P'E CC' E está dada por

$$\dot{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} -\frac{23H^2}{32} - \frac{7iH}{6} + 1 & \frac{H(12H+5i)}{24} & -\frac{H(15H+4i)}{96} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{437H^2}{2160} - \frac{209iH}{360} + 1 & \frac{H(38H+27i)}{270} & -\frac{H(95H+42i)}{2160} & 1 \end{pmatrix} \dot{Y}_n$$

y finalmente, para el tercer modo, P'EC'EC, la matriz de estabilidad está dada por

$$\begin{pmatrix} -\frac{23H^2}{32} - \frac{7iH}{6} + 1 & \frac{H(12H+5i)}{24} & -\frac{H(15H+4i)}{96} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{437iH^3}{5760} - \frac{133H^2}{1080} - \frac{209iH}{360} + 1 & \frac{H\left(-228iH^2+95H+432i\right)}{4320} & \frac{iH\left(285H^2+76iH-336\right)}{17280} & 1 \end{pmatrix}.$$

El comportamiento de las soluciones numéricas depende de los valores propios de estas matrices de estabilidad, y siguen siendo válidas las definiciones de intervalo de estabilidad y de intervalo de periodicidad. De nuevo, el hecho de que las tres matrices se diferencien entre sí en la última fila, y que la última columna esté formada por ceros salvo un 1 al final, hace que las tres tengan el mismo polinomio característico, y por tanto los mismos valores propios y las mismas regiones de periodicidad.

En el Cuadro 4.2 se muestran los intervalos de periodicidad para los métodos desde $k = 1$ a $k = 14$ para las tres formulaciones. Las regiones de periodicidad son simétricas respecto del eje vertical, así que los intervalos de periodicidad también lo son respecto del origen. Para mayor comodidad en la notación el modo PP ' E C ' E lo denotamos por FI'[1]$k$, al modo P ' E CC ' E lo denotamos por FI'[2]$k$, y al modo P ' EC ' EC por FI'[3]$k$, donde $k$ se refiere como siempre al número de pasos del método. Estos valores de los intervalos de periodicidad se han obtenido con la ayuda del programa Mathematica. El signo $\varnothing$ significa que no hay un intervalo primario de periodicidad, es decir, un intervalo de la forma $(-\alpha, \alpha)$, pero ello no quiere decir que no haya otros intervalos de periodicidad secundarios. Si se considera que $\mu \in \mathbb{C}$ en lugar de intervalo de periodicidad se habla de región de periodicidad. La Figura 4.5 muestra las regiones de periodicidad para $k = 2$ con el detalle cerca del eje horizontal donde se aprecia el intervalo de periodicidad. En la Figura 4.4 se muestra la región de periodicidad para $k = 4$ y en el detalle de la misma cerca del eje $OX$ se observa que hay un intervalo secundario, que está dado por $(0'828504, 0'936272)$ (y también el simétrico respecto del origen). En la Figura 4.6 aparecen algunos valores absolutos de los valores propios de las matrices de estabilidad de los métodos FI[i]'2 y FI[i]'4. En todos los casos los polinomios característicos tienen la raíz 1, así que no hay intervalos de estabilidad, mientras que para las tres formulaciones los intervalos de periodicidad son los mismos. También se observa que a medida que crece el número de pasos del método, $k$, las regiones son cada vez más pequeñas.

También en este caso se puede optar por no realizar la última evaluación de la función y prescindir así de la E final en cada uno de los modos implícitos. Más adelante, en el capítulo donde se tratan los ejemplos numéricos, haremos alguna observación al respecto. Los métodos resultantes los denominaremos de forma parecida a como hicimos en el capítulo anterior, en la forma $\widetilde{FI}'[i]k$.

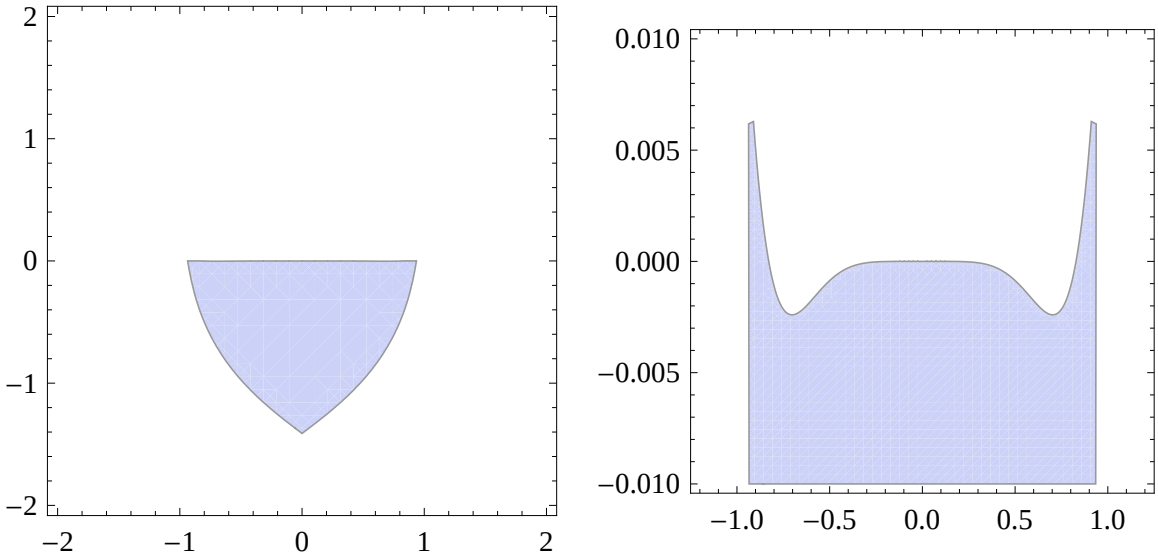



Figura 4.4: Región de periodicidad para los métodos implícitos FI[i]'4, i=1,2,3 (izq.) y detalle de la misma cerca del eje OX (der.).

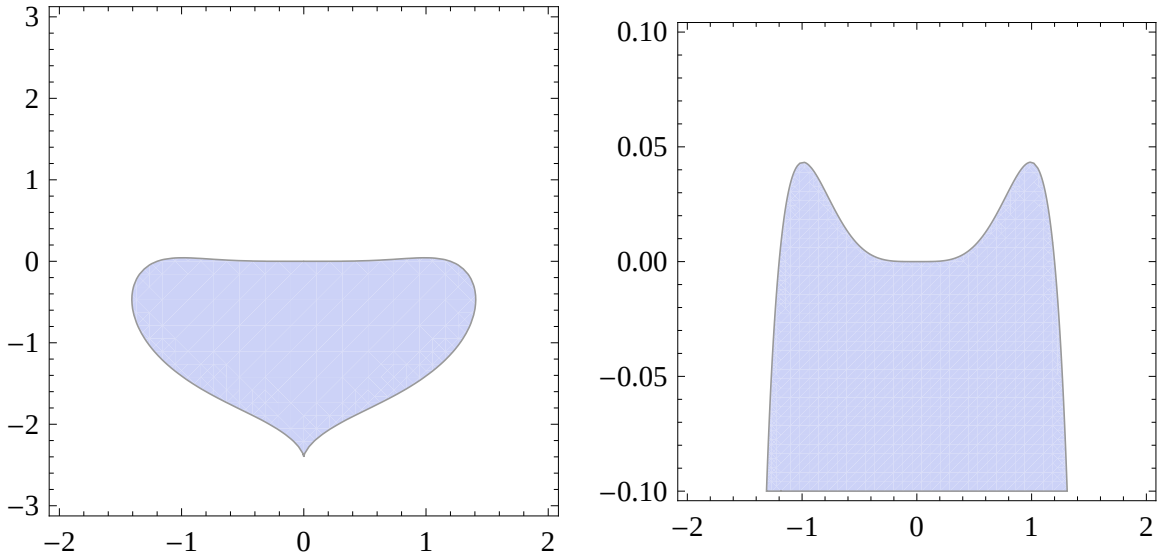



Figura 4.5: Región de periodicidad para los métodos implícitos FI[i]'2, i=1,2,3 (izq.) y detalle de la misma cerca del eje OX (der.).

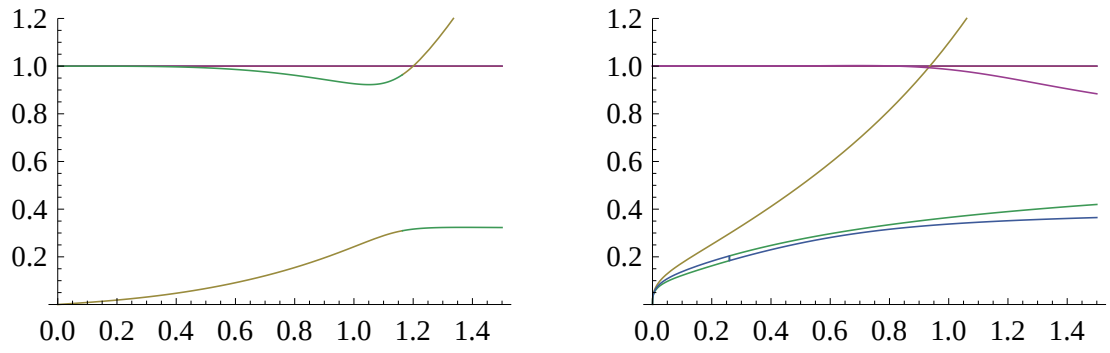



Figura 4.6: Valores absolutos de algunos valores propios de las matrices de estabilidad para los métodos implícitos FI[i]'2 (izq.) y FI[i]'4 (der.) $i = 1, 2, 3$.

| $k$ | FI[1]'$k$ , FI[2]'$k$ , FI[3]'$k$ |
|---|---|
| 1 | $\varnothing$ |
| 2 | $(-1'200000, 1'200000)$ |
| 3 | $(-1'178471, 1'178471)$ |
| 4 | $\varnothing$ |
| 5 | $\varnothing$ |
| 6 | $(-0'518854, 0'518854)$ |
| 7 | $(-0'374167, 0'374167)$ |
| 8 | $\varnothing$ |
| 9 | $\varnothing$ |
| 10 | $(-0'119787, 0'119787)$ |
| 11 | $(-0'075228, 0'075228)$ |
| 12 | $\varnothing$ |
| 13 | $\varnothing$ |
| 14 | $(-0'014394, 0'014394)$ |

Cuadro 4.2: *Intervalos de periodicidad para las tres formulaciones de los métodos de Falkner implícitos en el caso de $y'' = f(t, y')$.*

## 4.3. Cuadro resumen

Para poder comparar los distintos errores que hemos analizado anteriormente se han incluido en el Cuadro 4.3 los términos principales de los errores acumulados para las diferentes formulaciones de los métodos explícito e implícito de Falkner en modo P-C para la ecuación $y'' = f(t, y')$. Estos términos principales se denotan por $PT(y(t_n) - y_N)$ para la solución, y $PT(y'(t_n) - y'_N)$ para la derivada, donde como es habitual, la aproximación de los valores de la solución y de la derivada en el punto final se indican por $y_N$ y $y'_N$, respectivamente. Las dos formulaciones anteriores de los métodos de Falkner explícitos de $k$ pasos se denotan según indicamos anteriormente por FE'[1]$k$ y FE'[2]$k$, mientras que las distintas formulaciones del método implícito de $k$ pasos en los modos P-C se denotan por FI'[1]$k$, FI'[2]$k$y FI'[3]$k$.

En el Cuadro 4.4 hemos incluido los intervalos de periodicidad de las distintas formulaciones.

| Método | $PT(y(t_n) - y_N)$ | $PT(y'(t_n) - y'_N)$ |
|---|---|---|
| FE'[1]k | $\frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k$ | $h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma_k$ |
| FE'[2]k | $\frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k$ | $h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma_k$ |
| FI'[1]k | $h^{k+1}\beta_k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi)\, y^{k+2)}(\psi)\right]$ |
| FI'[2]k | $\frac{1}{2}\, h^{k+1}(t_N - t_0)(t_N - t_1)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ |
| FI'[3]k | $\frac{1}{2}\, h^{k+1}(t_N - t_0)(t_N - t_1)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) + \gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi)\right]$ |

Cuadro 4.3: *Términos principales de los errores acumulados para las diferentes formulaciones de los métodos de Falkner explícitos e implícitos para resolver la ecuación* $y'' = f(t, y')$ .

| $k$ | FE'[i]$k$ | FI'[i]$k$ |
|---|---|---|
| 1 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 2 | $\varnothing$ | $(-1'200000, 1'200000)$ |
| 3 | $(-0'723627, 0'723627)$ | $(-1'178471, 1'178471)$ |
| 4 | $(-0'429987, 0'429987)$ | $\varnothing$ |
| 5 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 6 | $\varnothing$ | $(-0'518854, 0'518854)$ |
| 7 | $(-0'058089, 0'058089)$ | $(-0'374167, 0'374167)$ |
| 8 | $(-0'029489, 0'029489)$ | $\varnothing$ |
| 9 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 10 | $\varnothing$ | $(-0'119787, 0'119787)$ |
| 11 | $(-0'003845, 0'003845)$ | $(-0'075228, 0'075228)$ |
| 12 | $(-0'001947, 0'001947)$ | $\varnothing$ |
| 13 | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| 14 | $\varnothing$ | $(-0'014394, 0'014394)$ |

Cuadro 4.4: *Intervalos de periodicidad para las diferentes formulaciones de los métodos de Falkner para la ecuación* $y'' = f(t, y')$.

# Capítulo 5

# Análisis de los métodos de Falkner en modo predictor-corrector para ecuaciones de la forma $y'' = f(t, y, y')$

En los dos capítulos anteriores la ausencia del término $y$ o del término $y'$ en la función $f$ permitía usar los métodos de Falkner según diferentes formulaciones en modo P-C, y según cual fuera el caso vimos que unas formulaciones resultaban más eficaces que otras. Ahora consideraremos la ecuación diferencial completa, $y'' = f(t, y, y')$, y veremos que también hay distintas posibilidades según la forma en que se apliquen los diferentes métodos. Siguiendo con la clasificación adoptada hasta ahora, sólo tendremos un método explícito, que consistirá en la utilización de las dos fórmulas predictoras para aproximar respectivamente la solución y la derivada. En cuanto a los métodos implícitos, dependiendo de qué fórmulas correctoras se utilicen y en qué orden, tendremos cinco posibilidades, que analizaremos a continuación. El problema de valor inicial se escribe ahora en la forma

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Los errores de truncamiento local de cada una de las fórmulas siguen siendo los mismos, así que remitimos al lector al capítulo primero para ver la expresión de cada uno de estos errores.

# 5.1. Métodos explícitos

## 5.1.1. Descripción de los métodos

### Método PP'E

La forma más directa de utilizar el método Falkner explícito para resolver el problema anterior consiste en aplicar en cada paso lo siguiente:

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera formula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda formula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$

Ahora, esta es la única posibilidad, pues no hay manera alguna de usar una fórmula correctora sin que previamente se haya de usar la fórmula predictora correspondiente. El caso que nos ocupa es el mismo que veíamos para la ecuación

$y'' = f(t, y)$, o para la $y'' = f(t, y')$, y veremos que el término principal del error acumulado que resulta en el punto final es el mismo que en aquellos casos.

### 5.1.2. Errores acumulados

#### Método PP 'E

Como siempre, supondremos que tenemos que integrar el problema (5.1) en el intervalo $[t_0, t_N]$ y que conocemos de antemano los valores iniciales necesarios para aplicar el esquema numérico. Tras dividir el intervalo en subintervalos de igual longitud se procede aplicando el método a lo largo de dichos subintervalos, y analizaremos la forma en que se van acumulando los errores.

Asumiendo la hipótesis de la localización y teniendo en cuenta las fórmulas de los errores de truncamiento local en (3.2) y (3.3), para el primer paso, $n = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} y(t_1) - y_1 &= y(t_1) - \left[ y_0 + h\, y_0' + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_0 \right] \\ &= h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k \,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$y'(t_1) - y_1' = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k \,, \tag{5.3}$$

con idénticas notaciones que las usadas en los capítulos anteriores.

Para el paso siguiente ($n = 2$) teniendo en cuenta la fórmula del error de truncamiento local del método explícito resulta que

$$\begin{aligned} y(t_2) &= y(t_1) + hy'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j \bar{f}_1 \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_2)\beta_k \,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde consideramos como anteriormente que la barra sobre $f$ significa que la función es evaluada en los valores verdaderos (ahora será $\bar{f}_1 = f(t_1, y(t_1), y'(t_1))$). Por otro lado, tras aplicar el método explícito (2.9) obtenemos

$$y_2 = y_1 + hy_1' + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1 \,. \tag{5.5}$$

Restando las fórmulas anteriores en (5.4) y (5.5), y teniendo en cuenta que podemos poner

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 - f_1 &= f(t_1, y(t_1), y'(t_1)) - f(t_1, y_1, y_1') \qquad (5.6) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(\xi)(y(t_1) - y_1) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi)(y'(t_1) - y_1') \qquad (5.7) \end{aligned}$$

y utilizando las fórmulas en (5.2) y en (5.3) del paso anterior, después de algunos cálculos se obtiene que

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2 &= h^{k+2} \left[ y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+2)}(\xi_2) \right] \beta_k + \left[ h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_1) \gamma_k \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \, . \end{aligned}$$

De forma análoga, teniendo en cuenta la expresión del error de truncamiento local para la fórmula de la derivada se deduce que

$$y'(t_2) = y'(t_1) + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j \bar{f}_1 + h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2) \gamma_k \, , \qquad (5.8)$$

y del método en (2.20) obtenemos que

$$y_2' = y_1' + h y_1' + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \bigtriangledown^j f_1 \, . \qquad (5.9)$$

Ahora restamos las fórmulas anteriores en (5.8) y (5.9), y después de algunos cálculos resulta

$$y'(t_2) - y_2' = h^{k+1} \left[ y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2) \right] \gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \, .$$

Repitiendo el proceso a lo largo de los nodos del intervalo de integración determinamos que el error acumulado para la solución $y(t)$ en el punto final $t_N$ viene dado por

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N &= h^{k+2} \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\xi_j) \beta_k + h^{k+2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) y^{k+2)}(\psi_j) \gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \qquad (5.10) \end{aligned}$$

mientras que para la derivada resulta ser

$$y'(t_N) - y'_N \;=\; h^{k+1} \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

Suponiendo que $y^{k+2)}(t)$ es continua y utilizando el Teorema del valor Medio, las fórmulas anteriores se pueden escribir de la siguiente manera: para la solución podemos poner

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N \;&=\; h^{k+1} y^{k+2)}(\xi)(t_N - t_0)\beta_k \\ &\quad + \frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

y para la derivada resulta ser

$$y'(t_N) - y'_N \;=\; h^k (t_N - t_0) y^{k+2)}(\psi)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \tag{5.12}$$

Estas fórmulas son exactamente las mismas que obtuvimos para los primeros métodos explícitos para las ecuaciones $y'' = f(t, y)$ o $y'' = f(t, y')$. La razón de que sea así está en que lo único que cambia ahora con respecto a aquellas fórmulas es la aplicación del Teorema del Valor Medio para hallar

$$\bar{f}_i - f_i \;=\; f(t_i, y(t_i), y'(t_i)) - f(t_i, y'_i, y'_i) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i)(y(t_i) - y_i) + \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_i)(y'(t_i) - y'_i)$$

pero al expresar los errores $y(t_i) - y_i$ y $y'(t_i) - y'_i$ en términos de potencias de $h$, como toda la expresión va multiplicada por $h^2$ ello no cambia en nada el término principal del error.

### 5.1.3. Análisis de la estabilidad lineal

Ahora, para determinar el análisis de la estabilidad lineal, como la ecuación que estamos considerando es de la forma $y'' = f(t, y, y')$, sí que tendría sentido considerar el problema test de Lambert dado en (3.48). Pero en tal caso, en realidad, nuestra ecuación se ve reducida a una de la forma $y'' = f(t, y)$ y resulta que el análisis de la estabilidad es el mismo que el que hicimos para el método FE[1]k para ese

tipo de ecuaciones. Entonces, para realizar una análisis de la estabilidad lineal más adecuado al problema que estamos tratando vamos a considerar el problema test dado por

$$y''(t) = -2\mu\, y'(t) - \mu^2 y(t)\,, \quad \text{con } \mu > 0\,, \tag{5.13}$$

el cual tiene soluciones acotadas que tienden a cero cuando $t \to \infty$. Vamos a estudiar en qué regiones el método numérico reproduce el comportamiento de tales soluciones. Ahora la aplicación del único método explícito con que contamos al problema test anterior conduce a una ecuación de recurrencia de la forma

$$\bar{Y}_{n+1} = P\,\bar{Y}_n\,, \tag{5.14}$$

donde $\bar{Y}_{n+1}$ es el vector de $2k$ componentes dado por

$$\bar{Y}_{n+1} = \left(y_{n+1}, y_n, \ldots, y_{n-(k-2)}, h\,y'_{n+1}, h\,y'_n, \ldots, h\,y'_{n-(k-2)}\right)^T$$

y $P$ es una matriz de orden $2k \times 2k$ cuyos elementos dependen de $H = \mu\, h$ y los coeficientes del método, y que se conoce como matriz de estabilidad.

Los términos de la matriz de estabilidad $P$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
P_{1\,1} &= 1 - H^2\bar{\beta}_0 \\
P_{1\,i} &= -H^2\bar{\beta}_{i-1}\,, \quad i = 2, \ldots, k \\
P_{1\,k+1} &= 1 - 2H\bar{\beta}_0 \\
P_{1\,i} &= -2H\bar{\beta}_{i-(k+1)}\,, \quad i = k+2, \ldots, 2k \\
P_{k+1\,i} &= -H^2\bar{\gamma}_{i-1}\,, \quad i = 1, \ldots, k \\
P_{k+1\,k+1} &= 1 - 2H\bar{\gamma}_0 \\
P_{k+1\,i} &= -2H\bar{\gamma}_{i-(k+1)}\,, \quad i = k+2, \ldots, 2k \\
P_{i\,j} &= \delta_{i-1,j}\,, \qquad i = 2, \ldots, k, k+2, \ldots, 2k \quad j = 1, \ldots, 2k
\end{aligned}$$

siendo los coeficientes $\bar{\beta}_j$ y $\bar{\gamma}_j$ los dados en (2.12) y (2.18).

A modo de ejemplo, cuando $k = 3$ la ecuación en (5.14) en el caso del método PP ' E se escribe

$$\bar{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{19H^2}{24} & \frac{5H^2}{12} & -\frac{H^2}{8} & 1 - \frac{19H}{12} & \frac{5H}{6} & -\frac{H}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{23H^2}{12} & \frac{4H^2}{3} & -\frac{5H^2}{12} & \frac{12-46H}{12} & \frac{8H}{3} & -\frac{5H}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{Y}_n \, .$$

El comportamiento de las soluciones numéricas depende de los valores propios de estas matrices de estabilidad, y siguen siendo válidas las definiciones de intervalo de estabilidad y de intervalo de periodicidad que vimos anteriormente.

En el Cuadro 5.1 se muestran los intervalos de estabilidad para los métodos desde $k = 1$ a $k = 14$.

Las regiones de estabilidad son simétricas respecto del eje horizontal, y los intervalos de estabilidad resultan del corte de dichas regiones con el eje real. Para mayor comodidad en la notación y para distinguirlo del mismo modo para las ecuaciones $y'' = f(t, y)$ o $y'' = f(t, y')$ el modo PP ' E lo denotamos por FEC$k$, donde $k$ se refiere al número de pasos. Estos valores de los intervalos de periodicidad se han obtenido con la ayuda del programa Mathematica. Contrariamente a los otros problemas, ahora siempre hay un intervalo primario de periodicidad, es decir, un intervalo de la forma $(0, \alpha)$, y también puede haber otros intervalos de periodicidad secundarios. Cuando se considera que $\mu \in \mathbb{C}$ en lugar de intervalo de periodicidad se habla de región de periodicidad. En la Figura 5.1 se muestran las regiones de estabilidad para $k = 1, 2, 3$ y en las Figuras 5.2 y 5.3 se muestran respectivamente las regiones de estabilidad para $k = 7, 8$ y para $k = 11, 12$. Se observa que a medida que crece el número de pasos del método, $k$, las regiones son cada vez más pequeñas; de hecho, observando el Cuadro 5.1 vemos que a medida que aumenta $k$ el intervalo de estabilidad se reduce prácticamente a la mitad.

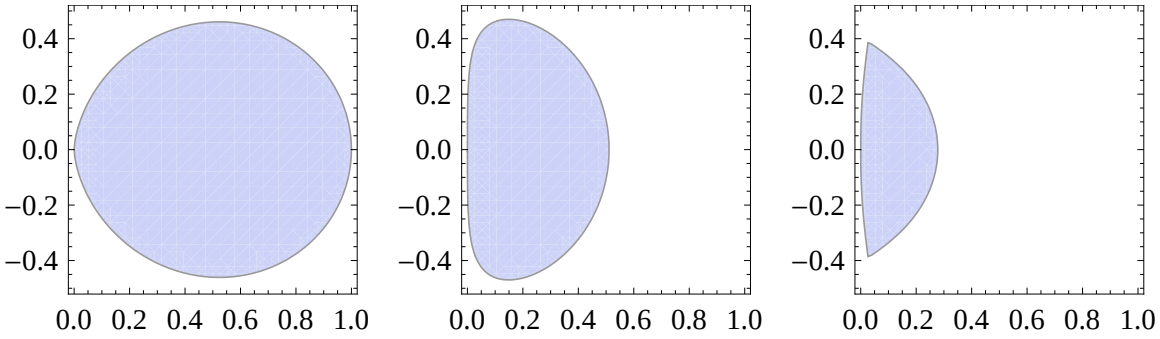



Figura 5.1: Regiones de estabilidad para los métodos FEC1 (izq.), FEC2 (cent.) y FEC3 (der.).

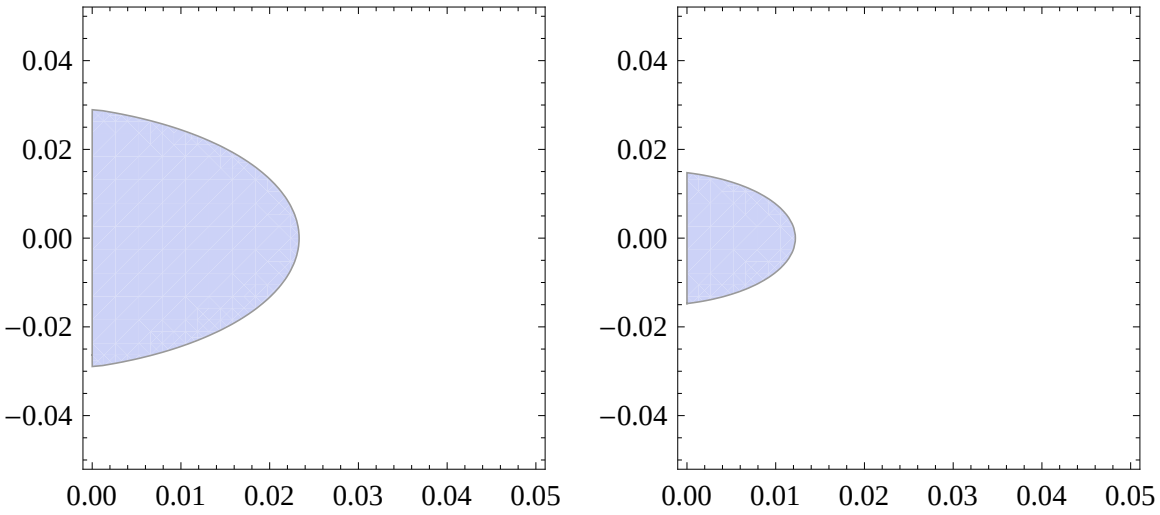



Figura 5.2: Regiones de estabilidad para los métodos FEC7 (izq.) y FEC8 (der.).

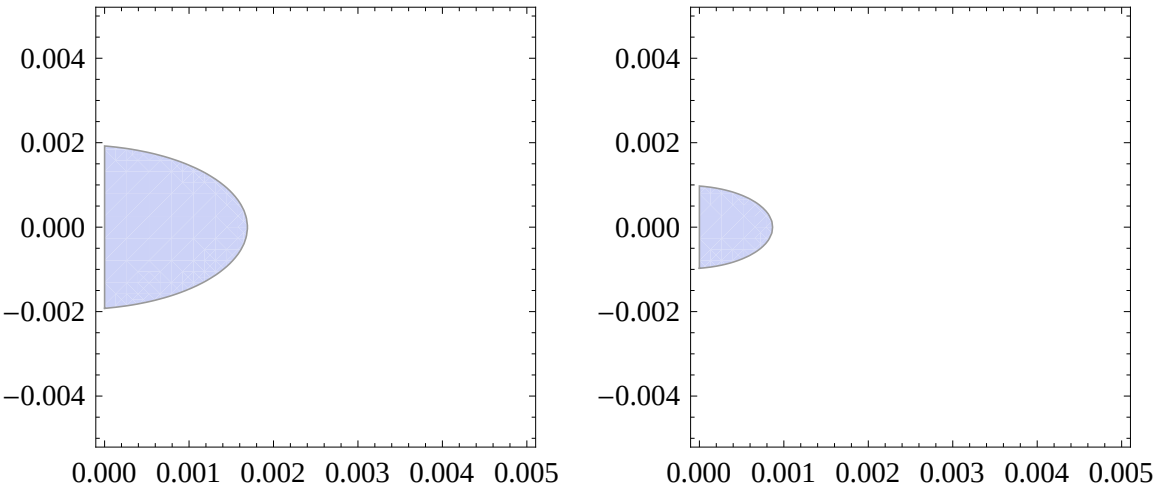



Figura 5.3: Regiones de estabilidad para los métodos FEC11 (izq.) y FEC12 (der.).

| $k$ | FEC$k$ |
|---|---|
| 1 | $(0, 1'000000)$ |
| 2 | $(0, 0'510874)$ |
| 3 | $(0, 0'277996)$ |
| 4 | $(0, 0'152002)$ |
| 5 | $(0, 0'082346)$ |
| 6 | $(0, 0'044071)$ |
| 7 | $(0, 0'023320)$ |
| 8 | $(0, 0'012222)$ |
| 9 | $(0, 0'006357)$ |
| 10 | $(0, 0'003287)$ |
| 11 | $(0, 0'001691)$ |
| 12 | $(0, 0'000867)$ |
| 13 | $(0, 0'000443)$ |
| 14 | $(0, 0'000226)$ |

Cuadro 5.1: *Intervalos de estabilidad para el método de Falkner explícito FECk para el problema 5.14.*

## 5.2. Métodos implícitos

En este apartado utilizaremos la misma notación que en los capítulos anterior en lo que respecta a los métodos implícitos, indicando mediante un superíndice $P$ la aplicación del predictor y mediante un superíndice $C$ la aplicación del corrector, y las evaluaciones de la función $f$ las indicaremos mediante una E. Como en la función $f$ aparecen tanto la $y$ como la $y'$ será obligado el uso de las fórmulas predictoras para calcular $y^P_{n+1}$ y ${y'}^P_{n+1}$, y luego ya podremos utilizar las fórmulas implícitas bien para obtener la solución o bien para la derivada. Obsérvese que tras obtener los últimos valores de $y_{n+1}$ y de $y'_{n+1}$ (bien con alguna fórmula predictora o bien con alguna correctora) evaluaremos finalmente la función $f$ para disponer del valor actualizado $f(t_{n+1}, y_{n+1}, {y'}_{n+1})$, que será necesario para el siguiente paso.

Hemos considerado cinco posibilidades para combinar las distintas fórmulas, dependiendo del orden en que se apliquen y las veces que se evalúe la función $f$. En las tres primeras el número de evaluaciones de la función $f$ es dos, mientras que en las dos restantes la función se evalúa tres veces.

### 5.2.1. Descripción de los métodos

#### Método PP 'E C E

La primera opción para la aplicación del método implícito de Falkner para resolver el problema en (4.1) consiste en realizar en cada paso las siguientes operaciones

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
4. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$

#### Método PP 'E C' E

La segunda posibilidad que consideraremos está dada por las siguientes operaciones

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
4. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener ${y'}^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$

**Método PP ' E CC ' E**

La tercera posibilidad consiste en realizar las siguientes operaciones

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
4. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$
5. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener ${y'}^C_{n+1}$
6. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$

**Método PP ' E C E C ' E**

La cuarta posibilidad que consideraremos está dada por las siguientes operaciones

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
4. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, {y'}^P_{n+1})$
6. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener ${y'}^C_{n+1}$
7. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, {y'}^C_{n+1})$

**Método PP 'E C' E C E**

La quinta y última posibilidad consiste en realizar las siguientes operaciones

1. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula en (2.20) para obtener $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula en (2.20) para obtener $y'^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, y'^P_{n+1})$
4. Evaluar $y'_{n+1}$ usando la segunda fórmula de (2.29) para obtener $y'^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, y'^C_{n+1})$
6. Evaluar $y_{n+1}$ usando la primera fórmula de (2.29) para obtener $y^C_{n+1}$
7. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, y'^C_{n+1})$

### 5.2.2. Errores acumulados

Como siempre, supondremos que tenemos que integrar el problema en (5.1) en el intervalo $[t_0, t_N]$, y que conocemos de antemano los valores de partida necesarios para aplicar el esquema numérico. Procederemos a analizar los errores acumulados tras aplicar el método numérico en cada paso a lo largo de los $N$ subintervalos en que se divide el intervalo inicial.

**Método PP 'E C E**

Suponiendo la hipótesis de la localización y el conocimiento de los errores locales de truncamiento, para el primer paso ($n = 0$) se tiene que las diferencias entre los verdaderos valores, $y(t_1)\,, y'(t_1)$, y sus aproximaciones $y^P_1\,, y'^P_1$, consisten en los respectivos errores de truncamiento local, es decir,

$$y(t_1) - y^P_1 = h^{k+2} y^{k+2)}(\xi_1)\beta_k\,, \tag{5.15}$$

$$y'(t_1) - y'^P_1 = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k\,, \tag{5.16}$$

para unos puntos intermedios adecuados $\xi_1$ y $\psi_1$ .

Después de evaluar $f(t_1, y^P_1, y'^P_1)$, utilizando el Teorema del Valor Medio se puede poner que

$$f(t_1, y(t_1), y'(t_1)) - f_1^P = \frac{\partial f}{\partial y}(t_1, \xi_1, \nu_1)(y(t_1) - y_1^P) + \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1, \nu_1)(y'(t_1) - y_1'^P)$$

donde ahora hemos puesto $f_1^P = f(t_1, y_1^P, y_1'^P)$. Tras la obtención del valor aproximado de la solución mediante el método implícito, haciendo uso de la fórmula anterior, tenemos

$$\begin{aligned} y(t_1) - y_1^C &= \bar{\beta}_0^* h^2 \left[ f(t_1, y(t_1), y'(t_1)) - f(t_1, y_1, y_1') \right] + h^{k+3} y^{k+3)}(\delta_1) \beta_{k+1}^* \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \\ &= h^{k+3} \left( \bar{\beta}_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\bar{\nu}_1) y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\delta_1) \beta_{k+1}^* \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \end{aligned}$$

Después de evaluar $f(t_1, y_1^C, y_1'^P)$, para el siguiente paso ($n = 1$) tenemos que

$$y(t_2) = y(t_1) + h y'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1), y'(t_1)) + h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_2) \beta_k$$

$$y_2^P = y_1^C + h y_1'^P + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1$$

Restando las dos expresiones anteriores nos queda

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^P &= y(t_1) + h y'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f(t_1, y(t_1), y'(t_1)) \\ &\quad + h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_2) \beta_k - \left( y_1^C + h y_1'^P + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \bigtriangledown^j f_1 \right) \end{aligned}$$

y, utilizando las fórmulas de los errores obtenidos en el paso anterior, tras simplificar resulta

$$y(t_2) - y_2^P = h^{k+2} \left( y^{k+2)}(\psi_1) \gamma_k + y^{k+2)}(\psi_2) \beta_k \right) + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,. \qquad (5.17)$$

Para hallar el error obtenido al calcular la derivada con el predictor consideramos las fórmulas

$$y'(t_2) = y'(t_1) + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f(t_1, y(t_1), y'(t_1)) + h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k$$

$$y_2'^P = y_1'^P + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_1$$

y restando ambas fórmulas resulta

$$y'(t_2) - y_2'^P = h^{k+1}\gamma_k \left( y^{k+2)}(\psi_1) + y^{k+2)}(\psi_2) \right) + \mathcal{O}(h^{k+2}) \,. \tag{5.18}$$

Ahora evaluamos la función $f(t_2, y_2^P, y_2'^P)$ y el siguiente paso sería calcular la solución con el corrector. Para hallar el error en este paso consideramos las fórmulas

$$y(t_2) = y(t_1) + hy'(t_1) + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \nabla^j f(t_2, y(t_2), y'(t_2)) + h^{k+3} y^{k+3)}(\psi_2)\beta_{k+1}^*$$

$$y_2^C = y_1^C + hy_1'^P + h^2 \sum_{j=0}^{k} \beta_j^* \nabla^j f_1$$

Restamos estas dos fórmulas, y teniendo en cuenta los errores del paso anterior, después de algunos cálculos resulta que se puede poner

$$y(t_2) - y_2^C \;\; = \;\; h^{k+2} y^{k+2)}(\psi_1)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,.$$

Repitiendo el procedimiento anterior a lo largo de los nodos en el intervalo de integración se obtiene que el error acumulado en el punto $t_N$ para la solución está dado por

$$y(t_N) - y_N^C \;\; = \;\; h^{k+2}\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,, \tag{5.19}$$

y para la derivada se tiene la fórmula

$$y'(t_N) - y_N'^P \;\; = \;\; h^{k+1}\gamma_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\psi_j) + \mathcal{O}(h^{k+2}) \,.$$

Si suponemos que las derivadas que aparecen en las fórmulas anteriores son funciones continuas, por el Teorema del Valor Medio podemos simplificar los sumatorios y poner

$$y(t_N) - y_N^C = \frac{1}{2} h^k \gamma_k y^{k+2)}(\xi)(t_N - t_0)(t_N - t_1) + \mathcal{O}(h^{k+3}) ,$$

$$y'(t_N) - y_N'^P = h^k \gamma_k (t_N - t_0)\, y^{k+2)}(\psi) + \mathcal{O}(h^{k+2}) ,$$

donde $\xi$ y $\psi$ son los correspondientes puntos intermedios.

**Método PP ' E C ' E**

En este modo el comienzo es igual que en el modo anterior, se hallan aproximaciones de la solución y de la derivada mediante los métodos explícitos, $y_{n+1}^P$ y $y_{n+1}'^P$. La diferencia con el modo anterior está en que después de calcular el valor de $f(t_{n+1}, y_{n+1}^P, y_{n+1}'^P)$, se utiliza la fórmula implícita de la derivada para obtener la aproximación $y_{n+1}'^C$. Finalmente, se obtiene el valor actualizado $f(t_{n+1}, y_{n+1}^P, y_{n+1}'^C)$ para poderlo utilizar en el paso siguiente. Y así a lo largo de todos los nodos hasta llegar al punto final $t_N$.

Tras la primera aplicación del corrector para aproximar la derivada se tiene que la diferencia entre el verdadero valor, $y'(t_1)$, y el valor aproximado $y_1'^C$ es

$$y'(t_1) - y_1'^C = h^{k+2} \left( \bar{\gamma}_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1, \nu_1) y^{k+2)}(\psi_1) + \gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi_1) \right) . \quad (5.20)$$

Tras evaluar la función para obtener $f(t_1, y_1^P, y_1'^C)$ ya podemos dar el siguiente paso y calcular las aproximaciones de nuevo con las fórmulas explícitas. Se tiene que los errores que resultan están dados por

$$y(t_2) - y_2^P = h^{k+2} \beta_k \left( y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+2)}(\xi_2) \right) + \mathcal{O}(h^{k+3})$$

para la solución, y para la derivada por

$$y'(t_2) - y_2'^P = h^{k+1} y^{k+2)}(\psi_2) \gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3}) . \quad (5.21)$$

Evaluamos la función en los valores obtenidos resultando el valor $f(t_2, y_2^P, y_2'^P)$, y seguidamente corregimos la aproximación de la derivada con la fórmula implícita, y obtenemos que el error se puede expresar como

$$\begin{aligned} y'(t_2) - y_2'^C &= h^{k+2}\bar{\gamma}_0^*\gamma_k \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(t_1, \xi_1, \nu_1) y^{k+2)}(\psi_1) + \frac{\partial f}{\partial y'}(t_2, \xi_2, \nu_2) y^{k+2)}(\psi_2) \right) \\ &+ h^{k+2}\gamma_{k+1}^* \left( y^{k+3)}(\psi_1) + y^{k+3)}(\psi_2) \right) \\ &+ \mathcal{O}(h^{k+3}) \,. \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera sucesivamente se obtiene que los errores acumulados para la solución en el punto final se pueden expresar en la forma

$$y(t_N) - y_N^P = h^{k+2}\beta_k \sum_{j=1}^{N} y^{k+2)}(\xi_j) + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,.$$

Y el error en el punto final para la derivada se puede escribir como

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+2} \left[ \gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j) + \gamma_0^*\gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(t_j, \xi_j) y^{k+2)}(\xi_j) \right] .$$

Suponiendo que las derivadas que aparecen en las anteriores fórmulas son continuas, utilizando el Teorema del Valor Medio se pueden poner como

$$y(t_N) - y_N^P = h^{k+1} y^{k+2)}(\xi)\, \beta_k (t_N - t_0) + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,,$$

$$y'(t_N) - y_N'^C = h^{k+1}(t_N - t_0) \left[ \gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) + \gamma_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi) \right] .$$

**Método PP 'E CC' E**

En este modo, tras obtener las aproximaciones iniciales para la función y la derivada con las fórmulas explícitas, se evalúa la función $f(t_{n+1}, y_{n+1}^P, y_{n+1}'^P)$ y después se utiliza este valor en las dos fórmulas implícitas para obtener $y_{n+1}^C$, $y_{n+1}'^C$.

Los primeros pasos son exactamente igual que en el primero de los métodos implícitos y según vimos el error en el primer paso, $n = 0$, para la fórmula implícita resultaba ser

$$\begin{aligned} y(t_1) - y_1^C &= h^{k+3} \left( \bar{\beta}_0^*\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\bar{\nu}_1) y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\delta_1)\beta_{k+1}^* \right) \\ &+ \mathcal{O}(h^{k+4}) \,. \end{aligned}$$

En cuanto al error en este primer paso para la aproximación de la derivada mediante la fórmula implícita es

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y_1'^C &= h^{k+2}\left(\bar{\gamma}_0^*\gamma_k\frac{\partial f}{\partial y'}(\bar{\nu}_1)y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\delta_1)\gamma_{k+1}^*\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \end{aligned}$$

Luego evaluamos la función $f(t_1, y_1^C, y_1'^C)$ para dar el siguiente paso y aproximar la solución y la derivada mediante las fórmulas explícitas, resultando los errores

$$y(t_2) - y_2^P = h^{k+2}\beta_k y^{k+2)}(\xi_2) + \mathcal{O}(h^{k+3})\,,$$

$$y'(t_2) - y_2'^P = h^{k+1}y^{k+2)}(\psi_2)\gamma_k + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

Seguidamente evaluamos la función en las aproximaciones obtenidas con las fórmula explícitas y resulta $f(t_2, y_2^P, y_2'^P)$ y luego, de la misma manera que en el primer paso volvemos a corregir la solución y la derivada con las fórmula implícitas. Los errores que resultan en este paso los podemos poner

$$\begin{aligned} y(t_2) - y_2^C &= h^{k+3}\beta_{k+1}^*\left(y^{k+3)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\xi_2)\right) + h^{k+3}\gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi_1) \\ &\quad + h^{k+3}\gamma_0^*\gamma_k\frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1)y^{k+2)} \\ &\quad + h^{k+3}\bar{\beta}_0^*\gamma_k\left(y^{k+2)}(\nu_1)\frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1) + y^{k+2)}(\nu_2)\frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_2)\right) + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t_2) - y_2'^C &= h^{k+2}\left(y^{k+3)}(\psi_1) + y^{k+3)}(\psi_2)\right)\gamma_{k+1}^* \\ &\quad + h^{k+2}\bar{\gamma}_0^*\gamma_k\left(\frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_1)y^{(k+2)(\psi_1)} + \frac{\partial f}{\partial y'}(\xi_2)y^{(k+2)(\psi_2)}\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3})\,. \end{aligned}$$

Volvemos a evaluar la función, $f(t_2, y_2^C, y_2'^C)$ para utilizarla en el siguiente paso, y procediendo de esta manera a lo largo de los nodos del intervalo resulta que el

error acumulado para la solución en el punto final del intervalo es

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+3} \left[ \gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N-1} N - j y^{k+3)}(\psi_j) + \beta_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j) \right. \\ &\quad + \bar{\gamma}_0^* \gamma_k \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) \\ &\quad \left. + \bar{\beta}_0^* \gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \,, \end{aligned}$$

mientras que para la derivada se obtiene que

$$\begin{aligned} y'(t_N) - y_N'^C &= h^{k+2} \left[ \bar{\gamma}_0^* \gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) + \gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,. \end{aligned}$$

Suponiendo que las derivadas son continuas se pueden simplificar los sumatorios anteriores y poner

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+1} \frac{1}{2} (t_N - t_0)(t_N - t_1) \\ &\quad \times \left[ \gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) + \bar{\gamma}_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) \right] \\ &\quad + h^{k+2} (t_N - t_0) \left( \beta_{k+1}^* y^{k+3)}(\xi) + \bar{\beta}_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4}) \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t_N) - y_N'^C &= h^{k+1} (t_N - t_0) \left[ \gamma_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) + \gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,. \end{aligned}$$

**Método PP'E C E C'E**

En este modo, tras obtener las aproximaciones iniciales para la función y la derivada con las fórmulas explícitas, se evalúa la función $f(t_{n+1}, y^P_{n+1}, y'^P_{n+1})$ y después se utiliza este valor únicamente en la fórmula implícita para obtener la solución $y^C_{n+1}$. Luego, tras evaluar $f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, y'^P_{n+1})$ se aplica la fórmula implícita para obtener $y'^C_{n+1}$. Finalmente se evalúa $f(t_{n+1}, y^C_{n+1}, y'^C_{n+1})$ para poder dar el siguiente paso con los valores más actualizados. Nótese que de esta manera en cada paso hay una evaluación más de la $f$, siendo el número total de evaluaciones por paso tres.

La primera diferencia con el modo anterior se observa en el primer paso ($n = 0$). El error en este primer paso para la derivada obtenida con el corrector se expresa

$$\begin{aligned} y'(t_1) - y'^C_1 &= h^{k+2}\left(\bar{\gamma}^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\bar{\nu}_1) y^{k+2)}(\xi_1) + y^{k+3)}(\delta_1)\gamma^*_{k+1}\right) && (5.22)\\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, && (5.23)\end{aligned}$$

donde observamos que el término principal es el mismo que en el caso anterior. Es decir, el efecto de utilizar el valor corregido $y^C_1$ en lugar del $y^P_1$ en la fórmula para hallar $y'^C_1$ no afecta al término principal. Lo único que sucede es que el siguiente sumando en lugar de ser un $\mathcal{O}(h^{k+3})$ es un $\mathcal{O}(h^{k+4})$.

Luego evaluamos la función $f(t_1, y^C_1, y'^C_1)$ y continuamos con el siguiente paso. Procediendo de esta manera a lo largo de los nodos del intervalo resulta que los términos principales de los errores acumulados para la solución y para la derivada en el punto final son exactamente los mismos que en el caso anterior, es decir,

$$\begin{aligned} y(t_N) - y^C_N &= h^{k+3}\left[\gamma^*_{k+1}\sum_{j=1}^{N-1} N - j y^{k+3)}(\psi_j) + \beta^*_{k+1}\sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j)\right.\\ &\quad + \bar{\gamma}^*_0\gamma_k \sum_{j=1}^{N-1}(N-j)\frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j)\\ &\quad \left. + \bar{\beta}^*_0\gamma_k \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j)\right]\\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned}$$

$$y'(t_N) - y'^C_N = h^{k+2}\left[\bar{\gamma}^*_0\gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) + \gamma^*_{k+1} \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j)\right] + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

De nuevo, si suponemos que las derivadas son continuas, se pueden simplificar los sumatorios anteriores y poner

$$\begin{aligned} y(t_N) - y^C_N &= h^{k+1}\frac{1}{2}(t_N - t_0)(t_N - t_1) \\ &\quad \times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \bar{\gamma}^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi)\right] \\ &\quad + h^{k+2}(t_N - t_0)\left(\beta^*_{k+1} y^{k+3)}(\xi) + \bar{\beta}^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+4})\,, \end{aligned}$$

$$y'(t_N) - y'^C_N = h^{k+1}(t_N - t_0)\left[\gamma^*_0\gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) + \gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi)\right] + \mathcal{O}(h^{k+3})\,.$$

**Método PP 'E C' E C E**

En este modo se procede de manera parecida al modo anterior, pero en lugar de utilizar el valor $y^C_{n+1}$ para obtener el $y'^C_{n+1}$, ahora se invierte el orden. Es decir, el valor $y'^C_{n+1}$ se utiliza para obtener el $y^C_{n+1}$.

La primera diferencia con el modo anterior se observa en el primer paso ($n = 0$). El error en este primer paso para la solución obtenida con el corrector tras evaluar $f(t_1, y^P_1, y'^C_1)$ resulta ser

$$y(t_1) - y^C_1 = h^{k+3}\beta^*_{k+1} y^{k+3)}(\xi_1) + \mathcal{O}(h^{k+4})\,.$$

Luego se evalúa $f(t_1, y^C_1, y'^C_1)$ y así estamos preparados para dar el siguiente paso. A partir de aquí se repiten los mismos pasos que anteriormente y se van calculando

los errores acumulados. Esta forma de proceder resulta en un error acumulado para la solución un poco más sencillo que en el caso anterior, y un error acumulado para la derivada igual. Sin embargo, tras simplificar se obtiene que los términos principales de los errores son iguales a los dos casos anteriores.

Procediendo de esta manera a lo largo de los nodos del intervalo resulta que el error acumulado para la solución en el punto final del intervalo es

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+3} \left[ \gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N-1} N - j y^{k+3)}(\psi_j) + \beta_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\xi_j) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\gamma}_0^* \gamma_k \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) \right] + \mathcal{O}(h^{k+4}) \,, \end{aligned}$$

y para la derivada

$$\begin{aligned} y'(t_N) - y_N'^C &= h^{k+2} \left[ \bar{\gamma}_0^* \gamma_k \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y'}(\psi_j) y^{k+2)}(\xi_j) + \gamma_{k+1}^* \sum_{j=1}^{N} y^{k+3)}(\psi_j) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,. \end{aligned}$$

Suponiendo que las derivadas son continuas se pueden simplificar los sumatorios anteriores y poner

$$\begin{aligned} y(t_N) - y_N^C &= h^{k+1} \frac{1}{2} (t_N - t_0)(t_N - t_1) \\ &\quad \times \left[ \gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) + \gamma_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) \right] \\ &\quad + h^{k+2} \beta_{k+1}^* (t_N - t_0) y^{k+3)}(\xi) + \mathcal{O}(h^{k+4}) \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t_N) - y_N'^C &= h^{k+1} (t_N - t_0) \left[ \gamma_0^* \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) + \gamma_{k+1}^* y^{k+3)}(\psi) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(h^{k+3}) \,. \end{aligned}$$

### 5.2.3. Análisis de la estabilidad lineal

De nuevo consideraremos para el análisis de la estabilidad desde el punto de vista práctico el test lineal dado en (5.13). Si hubiéramos considerado el test de

Lambert y Watson dado en (3.48) para los métodos implícitos de esta sección, se habrían obtenido resultado de estabilidad ya conocidos, que vimos para los métodos descritos para el problema $y'' = f(t, y)$. En el cuadro 5.2 reflejamos la equivalencia en cuanto a la estabilidad lineal para el problema (3.48) de los métodos implícitos para $y'' = f(t, y, y')$ y los distintos métodos para el problema $y'' = f(t, y)$.

| métodos para $y'' = f(t, y, y')$ | métodos para $y'' = f(t, y)$ |
|---|---|
| FIC[1]$k$ | FI[1]$k$ |
| FIC[2]$k$ | FE[2]$k$ |
| FIC[3]$k$ | FI[2]$k$ |
| FIC[4]$k$ | FI[3]$k$ |
| FIC[5]$k$ | FI[2]$k$ |

Cuadro 5.2: *Equivalencia de estabilidad lineal de los distintos métodos para el problema test de Lambert y Watson (3.48).*

La aplicación de las anteriores formulaciones en modo P-C del método implícito de Falkner al problema test en (5.13) conduce a ecuaciones de recurrencia de la forma

$$\bar{Y}_{n+1} = P[i]\,\bar{Y}_n\,, \tag{5.24}$$

donde $\bar{Y}_n$ es el vector de orden $2k$ dado por

$$\bar{Y}_{n+1} = \left(y_{n+1}, y_n, \ldots, y_{n-(k-2)}, h\,y'_{n+1}, h\,y'_n, \ldots, h\,y'_{n-(k-2)}\right)^T$$

y $P[j]\,, j = 1, 2, 3, 4, 5$ son las matrices de estabilidad, de orden $2k \times 2k$ y cuyos elementos dependen de $H = \mu\, h$ y de los coeficientes del método. El índice $j$ que aparece en la notación $P[j]$ se usa para referirnos a cada uno de los diferentes modos en consonancia con la sección anterior, es decir, $j = 1$ se refiere al primero de los modos implícitos P-C, $j = 2$ corresponde al segundo de los modos P-C, y así sucesivamente.

Los términos de cada una de las matrices de estabilidad son los siguientes. Para

la matriz $P[1]$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
P[1]_{1\,1} &= 1+\bar{\beta}_0^*\left(H^4\bar{\beta}_0+2H^3\bar{\gamma}_0-H^2\right)-H^2\bar{\beta}_1^* \\
P[1]_{1\,j} &= \bar{\beta}_0^*\left(H^4\bar{\beta}_{j-1}+2H^3\bar{\gamma}_{j-1}\right), \\
&\qquad j=2,\ldots,k\,. \\
P[1]_{1\,k+1} &= 1+\bar{\beta}_0^*\left(2H^3\bar{\beta}_0+4H^2\bar{\gamma}_0-H^2-2H\right)-2H\bar{\beta}_1^* \\
P[1]_{1\,j} &= \bar{\beta}_0^*\left(2H^3\bar{\beta}_{j-(k+1)}+4H^2\bar{\gamma}_{j-(k+1)}\right)-2H\bar{\beta}_{j-k}^*\,, \quad j=k+2,\ldots,2k\,. \\
P[1]_{k+1\,j} &= -H^2\bar{\gamma}_{j-1}\,, \quad j=1,\ldots,k \\
P[1]_{k+1\,k+1} &= 1-2H\bar{\gamma}_0 \\
P[1]_{k+1\,j} &= -2H\bar{\gamma}_{j-(k+1)}\,, \quad j=k+2,\ldots,2k \\
P[1]_{i\,j} &= \delta_{i-1,j}\,, \qquad i=2,\ldots,k,k+2,\ldots,2k \quad j=1,\ldots,2k
\end{aligned}
$$

siendo $\delta_{i-1\,j}$ el símbolo delta de Kronecker donde la notación de la forma $\binom{j}{l}$ corresponde como es usual a los coeficientes binomiales. Nótese que la fila $k+1$-ésima de esta matriz es la misma que la de la matriz de estabilidad $P$ del método explícito. Para $k=3$ esta matriz se escribe

$$
\begin{pmatrix}
P[1]_{1\,1} & P[1]_{1\,2} & P[1]_{1\,3} & P[1]_{1\,4} & P[1]_{1\,5} & P[1]_{1\,6} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{23H^2}{12} & \frac{4H^2}{3} & -\frac{5H^2}{12} & 1-\frac{23H}{6} & \frac{8H}{3} & -\frac{5H}{6} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

siendo

$$\begin{aligned}
P[1]_{1\,1} &= \frac{19(H+6)(19H-22)H^2+4320}{4320}\\
P[1]_{1\,2} &= \frac{H^2(216-19H(5H+32))}{2160}\\
P[1]_{1\,3} &= \frac{H^2(19H(3H+20)-84)}{4320}\\
P[1]_{1\,4} &= \frac{19H(H(19H+80)-132)}{2160}+1\\
P[1]_{1\,5} &= \frac{H(216-19H(5H+32))}{1080}\\
P[1]_{1\,6} &= \frac{H(19H(3H+20)-84)}{2160}\,.
\end{aligned}$$

En cuanto a la matriz $P[2]$, los términos de la primera fila son los mismos que para la matriz $P$ del método explícito, y también los de las demás filas, salvo para la fila $k+1$-ésima para la cual se tiene

$$\begin{aligned}
P[2]_{k+1\,1} &= \bar{\gamma}_0^* \left(2H^3\bar{\gamma}_0 - H^2 + H^4\bar{\beta}_0\right) - H^2\bar{\gamma}_1^*\\
P[2]_{k+1\,j} &= \bar{\gamma}_0^* \left(2H^3\bar{\gamma}_{j-1} + H^4\bar{\beta}_{j-1}\right) - H^2\bar{\gamma}_j^*\,, \quad j = 2,\ldots,k\\
P[2]_{k+1\,k+1} &= 1 - \bar{\gamma}_0^* \left(2H^3\bar{\beta}_0 + 4H^2\bar{\gamma}_0 - H^2 - 2H\right) - 2H\bar{\gamma}_1^*\\
P[2]_{k+1\,j} &= \bar{\gamma}_0^* \left(2H^3\bar{\beta}_{j-(k+1)} + 4H^2\bar{\gamma}_{j-(k+1)}\right) - 2H\bar{\gamma}_{j-k}^*\,, \quad j = k+2,\ldots,2k
\end{aligned}$$

Mostramos a continuación cómo queda esta matriz para $k = 3$

$$\begin{pmatrix}
1-\frac{19H^2}{24} & \frac{5H^2}{12} & -\frac{H^2}{8} & 1-\frac{19H}{12} & \frac{5H}{6} & -\frac{H}{4}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
P[2]_{4\,1} & P[2]_{4\,2} & P[2]_{4\,3} & P[2]_{4\,4} & P[2]_{4\,5} & P[2]_{4\,6}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

siendo

$$
\begin{aligned}
P[2]_{4\,1} &= \frac{H^2(3H(19H+92)-224)}{192} \\
P[2]_{4\,2} &= \frac{H^2(20-3H(5H+32))}{96} \\
P[2]_{4\,3} &= \frac{H^2\left(9H^2+60H-8\right)}{192} \\
P[2]_{4\,4} &= \frac{H(3H(19H+80)-224)}{96}+1 \\
P[2]_{4\,5} &= \frac{H(20-3H(5H+32))}{48} \\
P[2]_{4\,6} &= \frac{H\left(9H^2+60H-8\right)}{96}
\end{aligned}
$$

Por su parte, la matriz $P[3]$ se puede obtener a partir de las dos anteriores. Resulta que la primera fila de $P[3]$ es igual a la primera fila de $P[1]$, y la fila $k+1$-ésima de $P[3]$ es la misma que la de la matriz $P[2]$.

En cuanto a la matriz $P[3]$, es igual que la matriz $P[1]$ salvo la fila $k+1$-ésima, puesto que en este caso se utiliza el valor corregido de la solución, $y^C_{n+1}$, en la fórmula corregida para hallar el valor de la derivada. La fila $(k+1)$-ésima resulta ser

$$
\begin{aligned}
P[4]_{k+1\,1} &= \bar{\gamma}_0^*\left(2H^3\bar{\gamma}_0 - H^2P[1]_{1\,1}\right) - H^2\bar{\gamma}_1^* \\
P[4]_{k+1\,j} &= \bar{\gamma}_0^*\left(2H^3\bar{\gamma}_{j-1} - H^2P[1]_{1\,j}\right) - H^2\bar{\gamma}_j^*\,, \quad j=2,\ldots,k \\
P[4]_{k+1\,k+1} &= 1-2H\bar{\gamma}_1^* - \bar{\gamma}_0^*\left(4H^2\bar{\gamma}_0 - H^2\,P[1]_{1\,k+1} - 2H\right) - 2H\bar{\gamma}_1^* \\
P[4]_{k+1\,j} &= \bar{\gamma}_0^*\left(4H^2\bar{\gamma}_{j-(k+1)} - H^2\,P[1]_{1\,j}\right) - 2H\bar{\gamma}_{j-k}^*\,, \quad j=k+2,\ldots,2k
\end{aligned}
$$

Para $k = 3$ esta matriz se escribe

$$\begin{pmatrix} P[4]_{1\,1} & P[4]_{1\,2} & P[4]_{1\,3} & P[4]_{1\,4} & P[4]_{1\,5} & P[4]_{1\,6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P[4]_{4\,1} & P[4]_{4\,2} & P[4]_{4\,3} & P[4]_{4\,4} & P[4]_{4\,5} & P[4]_{4\,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} P[4]_{4\,1} &= -\frac{H^2(H(19H(H+6)(19H-22)-16560)+13440)}{11520} \\ P[4]_{4\,2} &= \frac{H^2(H(H(19H(5H+32)-216)-5760)+1200)}{5760} \\ P[4]_{4\,3} &= \frac{H^2(H(H(84-19H(3H+20))+3600)-480)}{11520} \\ P[4]_{4\,4} &= 1-\frac{H(H(19H(H(19H+80)-132)-14400)+13440)}{5760} \\ P[4]_{4\,5} &= \frac{H(H(H(19H(5H+32)-216)-5760)+1200)}{2880} \\ P[4]_{4\,6} &= \frac{H(H(H(84-19H(3H+20))+3600)-480)}{5760} \end{aligned}$$

y los términos de la primera fila igual que la primera fila de la matriz $P[1]$ que ya vimos, $P[4]_{1\,i} = P[1]_{1\,i}$, $i = 1, \ldots, 6$.

Finalmente, la matriz $P[5]$ es igual que la matriz $P[2]$ excepto la primera fila, ya que se utiliza el valor corregido de la derivada $y'^{C}_{n+1}$ en la fórmula correctora para obtener la solución. La primera fila de esta matriz resulta ser

$$\begin{aligned} P[5]_{1\,1} &= 1 - H^2\bar{\beta}_1^* + \bar{\beta}_0^*\left(H^4\bar{\beta}_0 - H^2 - 2H\,P[2]_{1\,1}\right) \\ P[5]_{1\,j} &= \bar{\beta}_0^*\left(H^4\bar{\beta}_{j-1} - 2H\,P[2]_{1\,j}\right) - H^2\bar{\beta}_j^*\,, \qquad j = 2, \ldots, k\,. \\ P[5]_{1\,k+1} &= 1 - 2H\bar{\beta}_1^* + \bar{\beta}_0^*\left(2H^3\bar{\beta}_0 - H^2 - 2H\,P[2]_{1\,k+1}\right) \\ P[5]_{1\,j} &= \bar{\beta}_0^*\left(2H^3\bar{\beta}_{j-(k+1)} - 2H\,P[2]_{1\,j}\right) - 2H\bar{\beta}_{j-k}^*\,, \qquad j = k+2, \ldots, 2k\,. \end{aligned}$$

En el caso de $k = 3$ esta matriz queda

$$\begin{pmatrix} P[5]_{11} & P[5]_{12} & P[5]_{13} & P[5]_{14} & P[5]_{15} & P[5]_{16} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P[5]_{41} & P[5]_{42} & P[5]_{43} & P[5]_{44} & P[5]_{45} & P[5]_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} P[5]_{11} &= 1 - \frac{19H^2(H(H(57H+200)-224)+528)}{17280} \\ P[5]_{12} &= \frac{H^2(19H(H(15H+76)-20)+864)}{8640} \\ P[5]_{13} &= -\frac{H^2\left(19H\left(9H^2+48H-8\right)+336\right)}{17280} \\ P[5]_{14} &= \frac{8640-19H(H(H(57H+164)-176)+528)}{8640} \\ P[5]_{15} &= \frac{H(19H(H(15H+76)-20)+864)}{4320} \\ P[5]_{16} &= -\frac{H\left(19H\left(9H^2+48H-8\right)+336\right)}{8640} \end{aligned}$$

y los elementos de la cuarta fila los mismos que los de la matriz $P[2]$ que vimos anteriormente, $P[5]_{4j} = P[2]_{4j}$, $j = 1, \ldots, 6$.

De nuevo, el comportamiento de la solución numérica dependerá de los valores propios de las matrices $P[i]$. En el caso de las formulaciones anteriores, para el método implícito se tiene que ninguna de ellas es A-estable ni P-estable para un número de pasos del método hasta $k = 14$. En el Cuadro 5.3 se muestran los intervalos de estabilidad desde $k = 1$ hasta $k = 14$, donde como siempre $k$ se refiere al número de pasos del método. Se observa que excepto para $k = 1$ la primera columna es la que presenta menores intervalos de estabilidad siendo mucho más pequeños que en las otras columnas. De las otras columnas, la correspondiente al método FIC[3]$k$ es la que presenta menores valores, y la correspondiente a FIC[2]$k$ la que tiene mayores intervalos de estabilidad, al menos hasta $k = 10$.

| $k$ | FIC[1]$k$ | FIC[2]$k$ | FIC[3]$k$ | FIC[4]$k$ | FIC[5]$k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(0, 2'449489)$ | $(0, 1'000000)$ | $(0, 0'872983)$ | $(0, 1'000000)$ | $(0, 1'000000)$ |
| 2 | $(0, 0'552363)$ | $(0, 1'200000)$ | $(0, 1'038292)$ | $(0, 1'200000)$ | $(0, 1'200000)$ |
| 3 | $(0, 0'288020)$ | $(0, 1'022872)$ | $(0, 0'872187)$ | $(0, 0'945416)$ | $(0, 0'971657)$ |
| 4 | $(0, 0'154777)$ | $(0, 0'777780)$ | $(0, 0'674360)$ | $(0, 0'709279)$ | $(0, 0'718601)$ |
| 5 | $(0, 0'083133)$ | $(0, 0'582847)$ | $(0, 0'509328)$ | $(0, 0'527503)$ | $(0, 0'530869)$ |
| 6 | $(0, 0'044293)$ | $(0, 0'437147)$ | $(0, 0'382709)$ | $(0, 0'392643)$ | $(0, 0'393934)$ |
| 7 | $(0, 0'023381)$ | $(0, 0'330076)$ | $(0, 0'288408)$ | $(0, 0'294040)$ | $(0, 0'294566)$ |
| 8 | $(0, 0'012239)$ | $(0, 0'251880)$ | $(0, 0'219039)$ | $(0, 0'222348)$ | $(0, 0'222575)$ |
| 9 | $(0, 0'006361)$ | $(0, 0'194991)$ | $(0, 0'168363)$ | $(0, 0'170383)$ | $(0, 0'170488)$ |
| 10 | $(0, 0'003288)$ | $(0, 0'153748)$ | $(0, 0'131536)$ | $(0, 0'132825)$ | $(0, 0'132876)$ |
| 11 | $(0, 0'001691)$ | $(0, 0'104899)$ | $(0, 0'104999)$ | $(0, 0'105760)$ | $(0, 0'105999)$ |
| 12 | $(0, 0'000867)$ | $(0, 0'025801)$ | $(0, 0'030982)$ | $(0, 0'030831)$ | $(0, 0'0308298)$ |
| 13 | $(0, 0'000443)$ | $(0, 0'012889)$ | $(0, 0'013583)$ | $(0, 0'013578)$ | $(0, 0'013578)$ |
| 14 | $(0, 0'000226)$ | $(0, 0'006831)$ | $(0, 0'007005)$ | $(0, 0'007004)$ | $(0, 0'007004)$ |

Cuadro 5.3: *Intervalos de estabilidad primarios para las diferentes formulaciones en modo P-C del método de Falkner implícito para la ecuación test (5.13).*

En la Figura 5.4 se muestran las regiones de estabilidad cuando $k = 1$ para los métodos FIC[1]1 y FIC[2]1, y en la Figura 5.5 aparecen las regiones de estabilidad cuando $k = 1$ para los métodos FIC[4]1 y FIC[5]1. Se observa que estas dos últimas regiones son muy parecidas, y los intervalos primarios de estabilidad sí que coinciden: $(0, 1)$.

En la Figura 5.6 aparecen las regiones de estabilidad de los métodos FIC[1]5 y FIC[2]5, donde se observa que el primer método tiene una región de estabilidad mucho más pequeña que el segundo. También en la Figura 5.7 se observa lo mismo cuando $k = 12$. Por otra parte, en la Figura 5.8 se observa cuan parecidas son las regiones de estabilidad para $k = 5$ de los métodos FIC[4]5 y FIC[5]5. En general, podemos decir que las regiones de estabilidad del método FIC[1]$k$ son mucho más pequeñas que las regiones de las otras formulaciones, y que las regiones de estabilidad correspondientes a los métodos FIC[4]5 y FIC[5]5 son muy similares para todos

los valores de $k$.

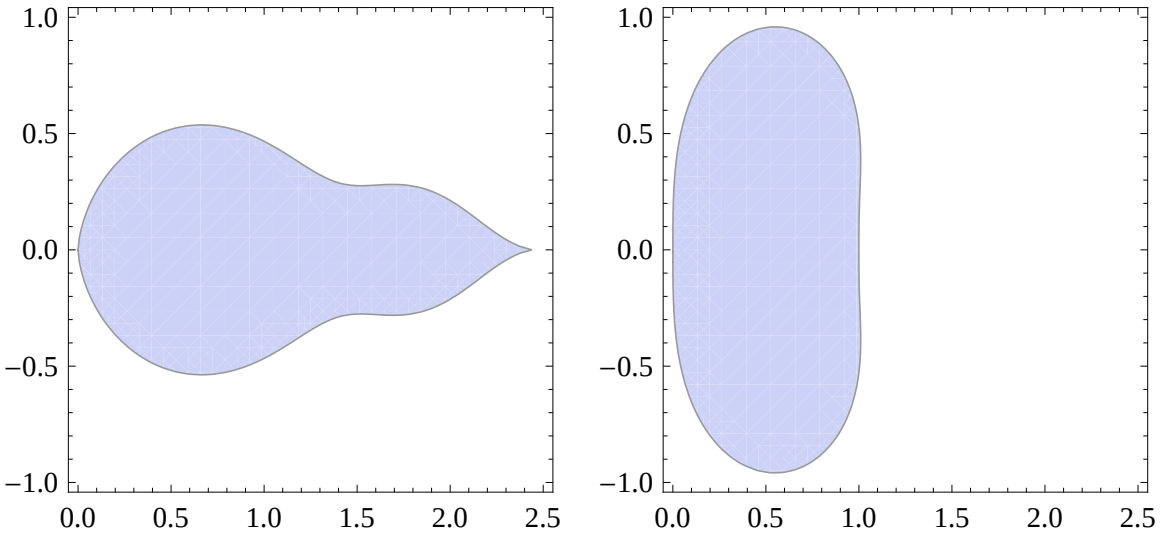



Figura 5.4: Regiones de estabilidad para $k = 1$ de los métodos FIC[1]1 (iqda.) y FIC[2]1 (drcha.)

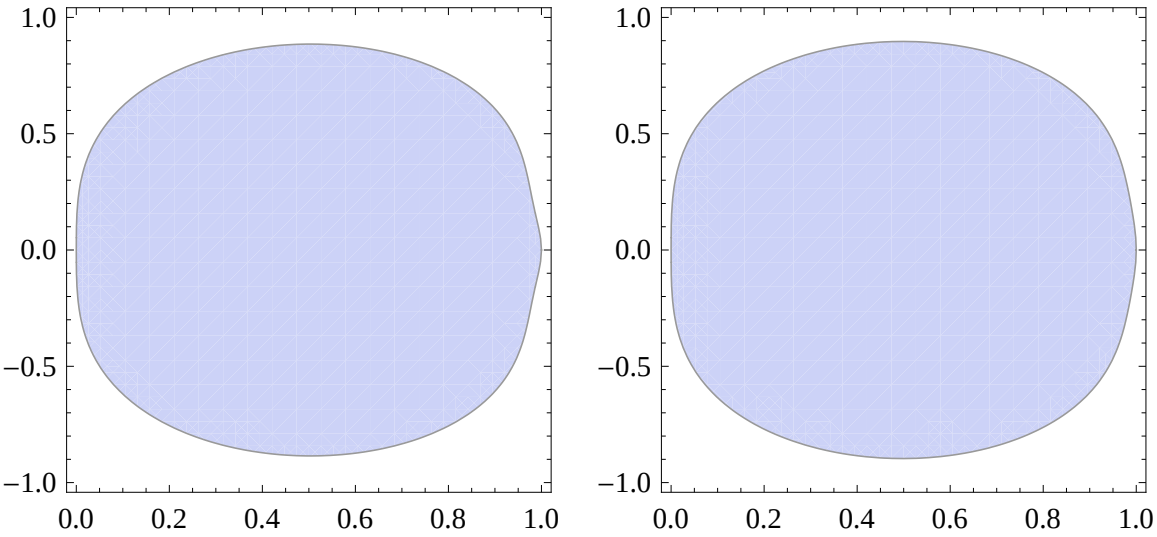



Figura 5.5: Regiones de estabilidad para $k = 1$ de los métodos FIC[4]1 (iqda.) y FIC[5]1 (drcha.)

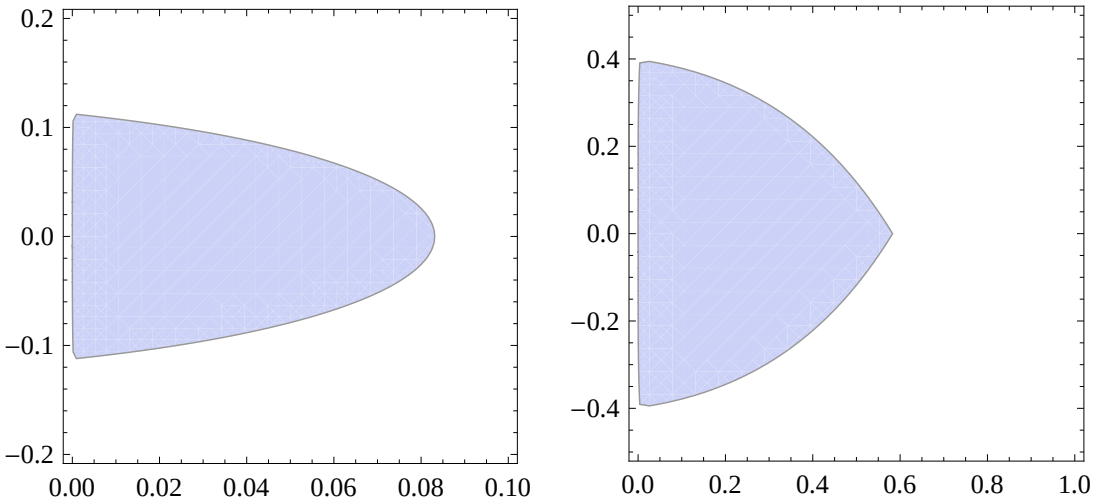



Figura 5.6: Regiones de estabilidad para $k = 5$ de los métodos FIC[1]5 (iqda.) y FIC[2]5 (drcha.)

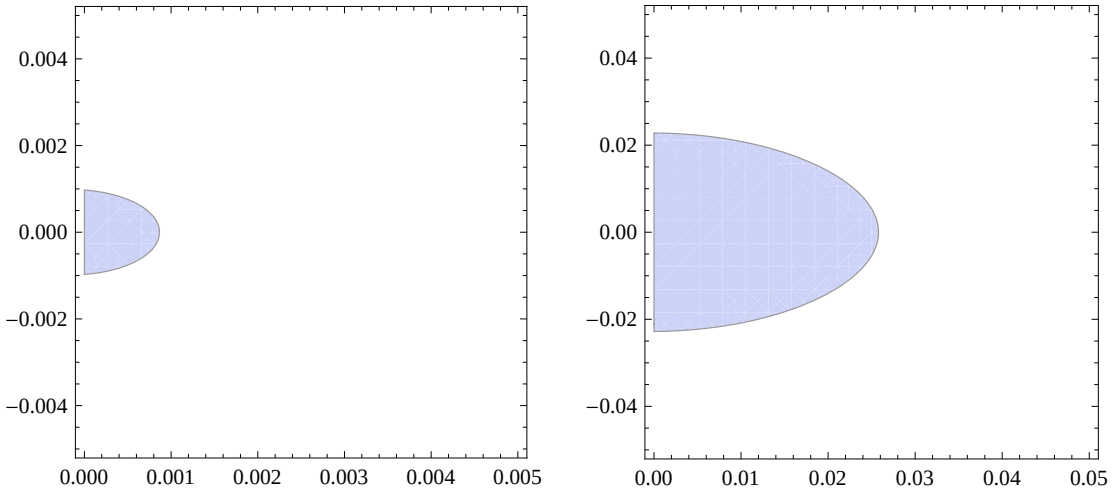



Figura 5.7: Regiones de estabilidad para $k = 12$ de los métodos FIC[1]12 (iqda.) y FIC[2]12 (drcha.)

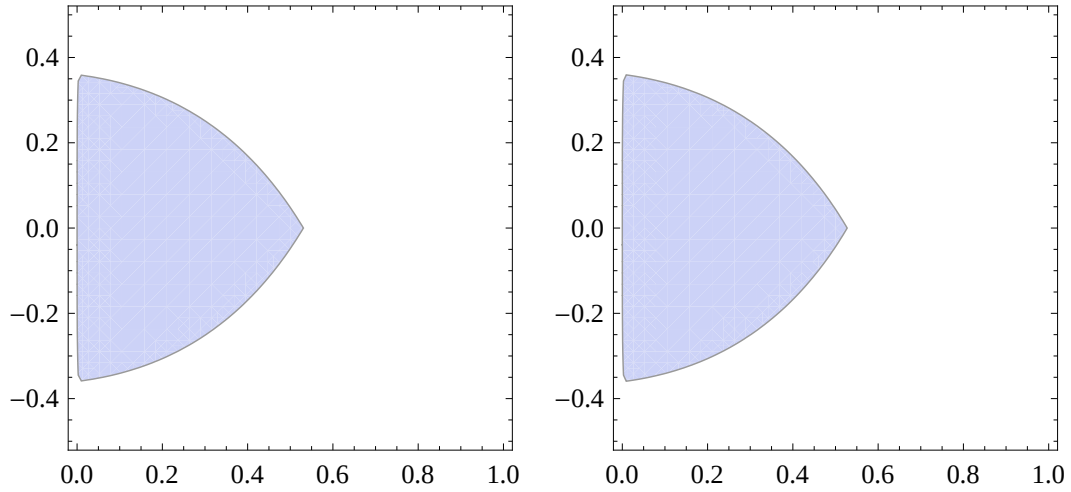



Figura 5.8: Regiones de estabilidad para $k = 5$ de los métodos FIC[4]5 (iqda.) y FIC[5]5 (drcha.)

## 5.3. Cuadro resumen

De nuevo, para poder comparar los distintos errores que hemos analizado anteriormente, se han incluido en el Cuadro 5.4 los términos principales de los errores acumulados para las diferentes formulaciones de los métodos explícito e implícito de Falkner en modo P-C para la ecuación $y'' = f(t, y, y')$. Estos términos principales se denotan por $PT(y(t_n) - y_N)$ para la solución, y $PT(y'(t_n) - y'_N)$ para la derivada, donde como es habitual, la aproximación de los valores de la solución y de la derivada en el punto final se indican por $y_N$ y $y'_N$, respectivamente. La única formulación que hemos visto para el método explícito de $k$ pasos se denota según indicamos anteriormente por FEC$k$, mientras que las distintas formulaciones del método implícito de $k$ pasos en los modos P-C se denotan por FIC[1]$k$, FIC[2]$k$, FIC[3]$k$, FIC[4]$k$ y FIC[5]$k$.

En el Cuadro 5.5 hemos incluido los intervalos de estabilidad de las distintas formulaciones.

| Método | $PT(y(t_n) - y_N)$ | $PT(y'(t_n) - y'_N)$ |
|---|---|---|
| FEC$k$ | $\frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k$ | $h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma_k$ |
| FIC[1]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)(t_N - t_1)\gamma_k$ | $h^k y^{k+2)}(\psi)(t_N - t_0)\gamma_k$ |
| FIC[2]$k$ | $h^{k+1} y^{k+2)}(\xi)\, \beta_k (t_N - t_0)$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi)\, y^{k+2)}(\psi)\right]$ |
| FIC[3]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^{k+1}(t_N - t_0)(t_N - t_1)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \bar{\gamma}^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \bar{\gamma}^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \xi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ |
| FIC[4]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^{k+1}(t_N - t_0)(t_N - t_1)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) + \gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi)\right]$ |
| FIC[5]$k$ | $\frac{1}{2}\, h^{k+1}(t_N - t_0)(t_N - t_1)$ $\times \left[\gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi) + \gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi)\right]$ | $h^{k+1}(t_N - t_0)$ $\times \left[\gamma^*_0 \gamma_k \frac{\partial f}{\partial y'}(t, \psi) y^{k+2)}(\xi) + \gamma^*_{k+1} y^{k+3)}(\psi)\right]$ |

Cuadro 5.4: *Términos principales de los errores acumulados para las diferentes formulaciones de los métodos de Falkner explícito e implícito para resolver la ecuación* $y'' = f(t, y, y')$ .

| $k$ | FEC$k$ | FIC[1]$k$ | FIC[2]$k$ | FIC[3]$k$ | FIC[4]$k$ | FIC[5]$k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(0, 1'000000)$ | $(0, 2'449489)$ | $(0, 1'000000)$ | $(0, 0'872983)$ | $(0, 1'000000)$ | $(0, 1'000000)$ |
| 2 | $(0, 0'510874)$ | $(0, 0'552363)$ | $(0, 1'200000)$ | $(0, 1'038292)$ | $(0, 1'200000)$ | $(0, 1'200000)$ |
| 3 | $(0, 0'277996)$ | $(0, 0'288020)$ | $(0, 1'022872)$ | $(0, 0'872187)$ | $(0, 0'945416)$ | $(0, 0'971657)$ |
| 4 | $(0, 0'152002)$ | $(0, 0'154777)$ | $(0, 0'777780)$ | $(0, 0'674360)$ | $(0, 0'709279)$ | $(0, 0'718601)$ |
| 5 | $(0, 0'082346)$ | $(0, 0'083133)$ | $(0, 0'582847)$ | $(0, 0'509328)$ | $(0, 0'527503)$ | $(0, 0'530869)$ |
| 6 | $(0, 0'044071)$ | $(0, 0'044293)$ | $(0, 0'437147)$ | $(0, 0'382709)$ | $(0, 0'392643)$ | $(0, 0'393934)$ |
| 7 | $(0, 0'023320)$ | $(0, 0'023381)$ | $(0, 0'330076)$ | $(0, 0'288408)$ | $(0, 0'294040)$ | $(0, 0'294566)$ |
| 8 | $(0, 0'012222)$ | $(0, 0'012239)$ | $(0, 0'251880)$ | $(0, 0'219039)$ | $(0, 0'222348)$ | $(0, 0'222575)$ |
| 9 | $(0, 0'006357)$ | $(0, 0'006361)$ | $(0, 0'194991)$ | $(0, 0'168363)$ | $(0, 0'170383)$ | $(0, 0'170488)$ |
| 10 | $(0, 0'003287)$ | $(0, 0'003288)$ | $(0, 0'153748)$ | $(0, 0'131536)$ | $(0, 0'132825)$ | $(0, 0'132876)$ |
| 11 | $(0, 0'001691)$ | $(0, 0'001691)$ | $(0, 0'104899)$ | $(0, 0'104999)$ | $(0, 0'105760)$ | $(0, 0'105999)$ |
| 12 | $(0, 0'000867)$ | $(0, 0'000867)$ | $(0, 0'025801)$ | $(0, 0'030982)$ | $(0, 0'030831)$ | $(0, 0'0308298)$ |
| 13 | $(0, 0'000443)$ | $(0, 0'000443)$ | $(0, 0'012889)$ | $(0, 0'013583)$ | $(0, 0'013578)$ | $(0, 0'013578)$ |
| 14 | $(0, 0'000226)$ | $(0, 0'000226)$ | $(0, 0'006831)$ | $(0, 0'007005)$ | $(0, 0'007004)$ | $(0, 0'007004)$ |

Cuadro 5.5: *Intervalos de estabilidad primarios para las diferentes formulaciones en modo P-C de los métodos de Falkner para la ecuación test (5.13).*

# Capítulo 6

# Estudio de la implementación de los diferentes modos

En el ámbito de los métodos numéricos la implementación se refiere a la forma en que se desarrolla un algoritmo para ejecutarlo en el ordenador. Tiene por tanto que ver con la manera en que se programa en un determinado lenguaje. En nuestro caso la implementación de los métodos de Falkner se hará utilizando el lenguaje de programación propio del programa Mathematica.

Suponemos que tenemos un problema de valor inicial del tipo

$$y'' = f(t, y, y')\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \quad y'(t_0) = \dot{y}_0\,,$$

donde pueden faltar la $y$ o la $y'$ (pero no las dos), y hemos de resolverlo en un intervalo concreto $[t_0, t_N]$ mediante alguno de los métodos de los capítulos anteriores. Como los métodos que hemos analizado son métodos multipaso de $k$ pasos, necesitaremos conocer la información en $k-1$ puntos antes del $t_0$ (o bien en $k-1$ puntos después del $t_0$, y entonces considerar como punto de partida para la aplicación del método el punto $t_{k-1}$ para obtener tras aplicar el método los valores aproximados de la solución y la derivada en el punto $t_k$, y así sucesivamente). Estos valores de arranque necesarios se suelen calcular utilizando la solución exacta si es que es conocida, y en su defecto aplicando un método Runge-Kutta de un paso, y de un orden mayor en una unidad al orden del método elegido, para tener suficiente precisión en los cálculos. Nosotros utilizaremos los valores proporcionados por la solución exacta si es que se conoce, o los obtenidos con el comando `NDSolve` proporcionado por el programa Mathematica.

A partir de aquí ya aplicamos el método numérico que proceda para calcular los datos en el siguiente paso, y así sucesivamente, teniendo en cuenta en cada nuevo paso los $k$ datos anteriores para ir actualizando los cálculos.

Vamos a mostrar la manera de proceder, y para ello consideraremos la fórmula de Adams-Bashforth, es decir, la fórmula predictora con la que aproximamos el valor de la derivada, si bien el procedimiento es similar para cualquiera de las fórmulas. Vimos que la fórmula estaba dada por

$$y'_{n+1} = y'_n + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n \rightarrow \text{Adams Bashforth} \tag{6.1}$$

El valor $y'_n$ es conocido, así como el $y_n$ (en cada paso desempeñan el papel de valores iniciales), y por tanto también la evaluación de la función $f$ correspondiente,

$f_n = f(t_n, y_n, y'_n)$. En cuanto al sumatorio, se tiene que se puede poner en la forma

$$\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{k-1}) \cdot (\nabla^0 f_n, \nabla^1 f_n, ..., \nabla^{k-1} f_n) \tag{6.2}$$

es decir, el sumatorio lo podemos expresar como el producto escalar de un vector de coeficientes conocido por un vector de diferencias finitas, siendo

$$\begin{aligned}
&\nabla^0 f_n = f_n \\
&\nabla^1 f_n = f_n - f_{n-1} \\
&\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \\
&\quad \cdots \\
&\nabla^{k-1} f_n = \nabla^{k-2}(\nabla f_n)\,.
\end{aligned}$$

En el primer paso se ha de evaluar la función en todos los puntos para poder hallar el primer vector de diferencias finitas, pues estas se expresan en función de los valores de la función en los puntos anteriores, $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_{n-(k-1)}$.

Para el segundo paso la aproximación que se obtiene con el método anterior viene dada por la fórmula

$$y'_{n+2} = y'_{n+1} + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_{n+1} \tag{6.3}$$

donde tenemos de nuevo que el sumatorio se puede poner como

$$\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_{n+1} = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{k-1}) \cdot (\nabla^0 f_{n+1}, \nabla^1 f_{n+1}, ..., \nabla^{k-1} f_{n+1})\,, \tag{6.4}$$

donde el vector de coeficientes permanece, pero el vector de diferencias finitas cambia.

Para calcular el nuevo vector de diferencias finitas,

$$(\nabla^0 f_{n+1}, \nabla^1 f_{n+1}, ..., \nabla^{k-1} f_{n+1})$$

tendremos en cuenta la fórmula

$$\nabla^{k+1} f_{n+1} \;=\; \nabla^k(\nabla f_{n+1}) = \nabla^k(f_{n+1} - f_n) = \nabla^k f_{n+1} - \nabla^k f_n \tag{6.5}$$

de manera que para actualizar el vector de diferencias sólo es necesario evaluar una vez la función $f$ en el último valor obtenido. El proceso queda como sigue

$$\nabla^0 f_{n+1} = f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1})$$

$$\nabla^1 f_{n+1} = \nabla^0 f_{n+1} - \nabla^0 f_n$$

$$\nabla^2 f_{n+1} = \nabla^1 f_{n+1} - \nabla^1 f_n$$

$$\dots$$

$$\nabla^{k-1} f_{n+1} = \nabla^{k-2} f_{n+1} - \nabla^{k-2} f_n$$

Vemos que con sólo una evaluación de la función por paso y con $k-1$ restas, a partir del vector de diferencias del paso anterior obtenemos el nuevo vector de diferencias del paso actual. Y así se procedería con los demás puntos hasta llegar al punto final del intervalo.

De manera que en lo que respecta al cálculo de los vectores de diferencias finitas hemos de realizar $k$ evaluaciones de la función en el primer paso, y a partir de ahí, una evaluación más en cada paso.

Naturalmente, esto que hemos hecho con la fórmula predictora para la derivada, de actualizar el vector de coeficientes en cada paso, puede hacerse con cualquiera de las otras fórmulas. Para aplicar cada una de las fórmulas también nos hacen falta una serie de coeficientes, tanto como para el predictor ($\beta_i$ o $\gamma_i$ dependiendo si es para calcular la función o la derivada), como para el corrector ($\beta_i^*$ o $\gamma_i^*$ dependiendo si es para calcular la función o la derivada), que calculamos con las fórmulas que vimos anteriormente, en el apartado de cálculo de coeficientes. Estos vectores de coeficientes son fijos, así que una vez calculados se introducen al comienzo del programa, y se utilizan en cada paso de la integración.

El momento en que se realiza la evaluación de la función para obtener el valor $f_{n+1}$ (bien $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, bien $f(t_{n+1}, y'_{n+1})$ o $f(t_{n+1}, y_{n+1}, y'_{n+1})$) depende del problema a tratar y el algoritmo que se esté utilizando. Si este valor sólo se usa para obtener el vector de diferencias finitas para el siguiente paso, la evaluación se hará al final, pero si se utiliza también en una fórmula correctora, habrá de hacerse la evaluación antes de usar dicha fórmula. En los que hemos llamado métodos explícitos sólo es necesaria una evaluación de la función por paso. Pero en los métodos implícitos los últimos valores obtenidos se usan para hallar un valor más preciso de $f_{n+1}$

y por tanto han de hacerse dos evaluaciones por paso. Más adelante detallaremos cada uno de los modos, pero ahora expondremos la manera en que se lleva a cabo la actualización del vector de diferencias finitas.

El primer vector de diferencias finitas se obtiene a partir de la definición, teniendo en cuenta los valores de la función $f$ en los puntos de arranque. Inicialmente, en el programa denotamos por $d[i] = f(t_i, y_i, y_i')\, i = 1, \ldots, n$ (en el programa hemos tomado $n = k - 1$ para que resulte más fácil la programación). La ejecución del bucle anidado

```
Do[Do[d[i] = d[i + 1] - d[i],
      {i, 0, n - k}],
   {k, 1, n}];
```

nos devuelve el vector

$$(d[n], d[n-1], \ldots, d[0]) = (\nabla^0 f_n, \nabla^1 f_n, \ldots, \nabla^n f_n)\,.$$

A partir del vector de coeficientes correspondiente y del vector de diferencias anterior se obtiene el valor proporcionado por el método (en el caso que estamos considerando, el valor $y'_{n+1}$ proporcionado por la fórmula (6.1), pero con cualquiera de las otras fórmulas sería similar). Una vez que se haya obtenido el último valor de la derivada (o de la solución en su caso), la utilización reiterada de la fórmula en (6.5) proporciona la actualización. El pseudocódigo para actualizar el vector de diferencias es

```
t = t + h;
p = f_{n+1};
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}]
```

donde se actualiza el valor del nodo de integración , $t = t + h$, el nuevo valor de la función lo llamamos $p$, y $pp$ es una variable intermedia para actualizar el vector de diferencias, con lo que el vector actualizado resulta ser

$$(d[n], d[n-1], \ldots, d[0]) = (\nabla^0 f_{n+1}, \nabla^1 f_{n+1}, \ldots, \nabla^n f_{n+1})\,.$$

Veamos con cierto detalle cómo se realiza la actualización.

$$p = f_{n+1} \leftarrow \text{Este es el nuevo valor de la función}$$

El bucle comienza con el valor de $j = n$, y para este valor resulta

$$pp = p - f_n = f_{n+1} - f_n = \nabla^1 f_{n+1}$$

$$d[n] = p = f_{n+1} = \nabla^0 f_{n+1}$$

Nótese que el valor de $p$ también cambia y resulta ser

$$p = pp = \nabla^1 f_{n+1}\,.$$

El siguiente paso del bucle es $j = n - 1$, donde al actualizar las variables intermedias resulta

$$pp = p - d[n-1] = \nabla^1 f_{n+1} - \nabla^1 f_n = \nabla^2 f_{n+1}$$

$$d[n-1] = p = \nabla^1 f_{n+1}$$

$$p = pp = \nabla^2 f_{n+1}\,.$$

Seguimos con el valor $j = n - 2$ y se obtiene

$$pp = p - d[n-2] = \nabla^2 f_{n+1} - \nabla^2 f_n = \nabla^3 f_{n+1}$$

$$d[n-2] = p = \nabla^2 f_{n+1}$$

$$p = pp = \nabla^3 f_{n+1}\,.$$

Se procede sucesivamente, y así llegamos hasta el último paso del bucle para $j = 0$ para el cual se obtiene

$$pp = p - d[0] = \nabla^n f_{n+1} - \nabla^n f_n = \nabla^{n+1} f_{n+1}$$

$$d[0] = p = \nabla^n f_{n+1}$$

$$p = pp = \nabla^{n+1} f_{n+1}\,.$$

De esta manera, el nuevo vector que se obtiene es el que corresponde a la actualización del vector de diferencias finitas, que como señalábamos antes, es

$$(d[n], d[n-1], \ldots, d[0]) = (\nabla^0 f_{n+1}, \nabla^1 f_{n+1}, \ldots, \nabla^n f_{n+1}),$$

y que se utilizará en el siguiente paso para evaluar las fórmulas que correspondan. Seguidamente veremos algunas particularidades de la implementación para cada uno de los métodos estudiados.

## 6.1. Implementación de los métodos de Falkner para la ecuación $y'' = f(t, y)$ en modo P-C

### 6.1.1. Métodos de Falkner explícitos

En los métodos explícitos, podemos utilizar tanto correctores como predictores, pero lo único que se tiene que cumplir es que al tratarse de una función de la forma $f = f(t, y)$, necesitaremos obtener en cada paso el valor $y_{n+1}$ con el predictor, independientemente de cómo se calcule la $y'_{n+1}$, que podrá hacerse con el predictor, o con el corrector. La forma en que se calcule la $y'_{n+1}$ determina cada uno de los métodos que siguen. Los llamamos explícitos porque en ningún momento se necesita de un predictor para evaluar el corrector correspondiente.

#### Método P ' P E

Este es un método totalmente explícito, en el sentido de que utiliza únicamente fórmulas predictoras, tanto para obtener la aproximación de la solución, $y_{n+1}$, como de la derivada, $y'_{n+1}$.

El orden en que se calculen $y_{n+1}$ y $y'_{n+1}$ es indiferente, pues ninguno de ellos se utiliza en cálculos que afecten al otro. En la notación del método hemos preferido poner P 'P E (en lugar de PP ' E, que sería igualmente válido) para indicar que tras el cálculo con el predictor de $y_{n+1}$ se evalúa la función, $f(t_{n+1}, y_{n+1})$.

El código de la iteración queda como sigue

```
sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypn[n] = ypn[n] + h*sp;
```

```
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

s = bet[0] d[n];
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)



t = t + h;
p = f[t, yn[n]];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de f y actualización del vector de diferencias
finitas*)
```

**Método PEC'**

Empezamos el método calculando $y_{n+1}$ con el predictor, a continuación evaluamos la función $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, y por último calculamos la $y'_{n+1}$ con el corrector. Nótese que aunque utilicemos una fórmula implícita para hallar $y'_{n+1}$ el método es explícito ya que la $y'$ no aparece en la función $f$ y por tanto podemos calcular $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$ una vez que hemos aproximado el valor $y_{n+1}$. Tras el cálculo de $y'_{n+1}$ con el corrector no procede evaluar la función $f$ puesto que no tenemos ningún dato nuevo para hacerlo.

Aquí podemos observar que la utilización del corrector en lugar del predictor para aproximar la derivada hace que el error tenga un orden mayor que en el caso anterior. Pero no solo eso, sino que también afecta al error de la solución, que también aumenta un orden, según vimos en el capítulo anterior correspondiente.

El código de la iteración queda como sigue

```
s = bet[0] d[n];
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
```

```
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, yn[n]];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de f y actualización del vector de diferencias *)

spI = gamI[0]*d[n];
Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI =spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)
```

### 6.1.2. Métodos de Falkner implícitos

En los métodos implícitos, podemos utilizar tanto correctores como predictores, pero el único requisito que se ha de cumplir es que al tratarse de un función de la forma $f = f(t, y)$, el valor final de $y_{n+1}$ tiene que ser obtenido con el corrector, y para ello antes tendremos que haber obtenido una aproximación con el predictor. Por esto los denominamos métodos implícitos. Veamos qué diferencia hay en cuanto a la implementación de las tres posibilidades que hemos analizado anteriormente.

#### Método P 'PECE

En este primer caso del método implícito empezamos calculando $y'_{n+1}$ con el predictor, y continuamos calculando la $y_{n+1}$ con el predictor (el orden en que se realicen estos dos cálculos es irrelevante). Luego evaluamos la función $f$ para obtener $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$, y corregimos el valor $y_{n+1}$ con el método corrector. Finalmente evaluamos la función, $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1})$, la cual usaremos para obtener el vector de diferencias finitas actualizado, y que será utilizado en el paso siguiente.

El código de la iteración es

```
sp = gam[0]*dd[n];
```

```
Do[sp = sp + dd[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypn[n] = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

s = bet[0] dd[n];
Do[s = s + dd[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ynn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de
diferencias con el valor del predictor *)

sI = betI[0]*d[n];
Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI =sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)


p = f[t, yn[n]];
Do[{pp = p - dd[j],
    d[j] = dd[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de f y actualización del vector de
diferencias con el valor del corrector *)
```

**Nota 6.1.1** *Una observación que hemos de hacer aquí en cuanto a la diferencia con los métodos explícitos, es que como en los métodos implícitos se hacen dos evaluaciones de la función, $f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$ y $f(t_{n+1}, y^C_{n+1})$, ha de guardarse el valor inicial del vector de diferencias finitas para poderse utilizar en las dos actualizaciones. En el programa se nombra con*

$$(dd[n], dd[n-1], \ldots, dd[0]) = (\nabla^0 f_n, \nabla^1 f_n, \ldots, \nabla^n f_n)\,,$$

*mientras que la primera actualización, utilizando el valor $f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$, se denota por*

$$(d[n], d[n-1], \ldots, d[0]) = (\nabla^0 f_{n+1}, \nabla^1 f_{n+1}, \ldots, \nabla^n f_{n+1})\,.$$

**Nota 6.1.2** *Hacemos ahora una importante observación. En la implementación de métodos en la forma predictor-corrector es usual hacer una evaluación última de la función utilizando los últimos valores obtenidos durante cada paso. Sin embargo, la evaluación final que hemos incluido en el código anterior no influye en el término principal del error acumulado. Ello es así porque esta evaluación final, en lo que respecta al cálculo del error, sólo interviene en acotar la diferencia*

$$f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y^C_i)$$

*en lugar de la misma diferencia utilizando el predictor*

$$f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y^P_i)\,.$$

*Y como ambas van multiplicadas por $h^2$ esto hace que la contribución al error en el primer caso sea una $\mathcal{O}(h^{k+5})$, mientras que en el segundo caso es una $\mathcal{O}(h^{k+4})$, y por tanto no afecta al término principal del error.*

*Así pues, se concluye que la evaluación final no sería necesaria, ya que a parte de tener que realizar menos cálculos (¡una evaluación menos de la función en cada paso!), el error que resulta es prácticamente el mismo. En los ejemplos numéricos hemos incluido los resultados correspondientes a esta implementación sin la evaluación final. En el Cuadro 8.8 se observa que los errores son similares mientras que el tiempo de ejecución se reduce casi a la mitad.*

### Método PEC'CE

En este método empezamos calculando la solución con el predictor. Luego se evalúa la función lo cual nos servirá para obtener la $y'_{n+1}$ y la $y_{n+1}$ con las fórmulas correctoras correspondientes. Finalmente, evaluamos la función para obtener el valor $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1})$ para ser utilizado en el paso siguiente.

También en este caso son válidos los comentario de las notas finales del modo anterior. Insistimos en que no haría falta realizar la última evaluación de la función, por idéntico motivo al que se indicaba allí. El error que resulta es prácticamente el mismo, y se logra un ahorro computacional puesto que en cada paso se realiza solo una evaluación de la función en lugar de dos.

La diferencia con el modo anterior está en que tras obtener el valor $y_{n+1^P}$ y evaluar la función, se corrigen tanto la solución como la derivada, lo que hace que el método tenga un orden más que el anterior, según vimos en el apartado correspondiente.

El código de la iteración es

```
s = bet[0] d[n];
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ynn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)

sI = betI[0]*d[n];
Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
```

```
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

spI = gamI[0]*d[n];
Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)

p = f[t, yn[n]];
Do[{pp = p - dd[j],
    d[j] = dd[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de f y actualización del vector de diferencias
con el valor del corrector *)
```

**Método PECEC'**

Este es el último de los métodos implícitos que hemos considerado. Si nos fijamos vemos que es similar al anterior, lo único que cambia es el orden en que se hacen los cálculos. Ello permite que en la utilización de la fórmula correctora para la derivada se emplee el valor $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^C_{n+1})$ en lugar del $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$. De nuevo, la última evaluación de la función no afecta al término principal del error, y los resultados numéricos del Cuadro 8.8 así lo confirman. De hecho, si no se hace la última evaluación de la función en cada uno de ellos, este método y el anterior son exactamente el mismo.

El código de la iteración en este caso se expresa como sigue

```
s = bet[0] d[n];
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ynn];
```

```
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)

sI = betI[0]*d[n];
Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

p = f[t, yn[n]];
Do[{pp = p - dd[j],
    d[j] = dd[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* actualización del vector de diferencias con el valor
del corrector *)

spI = gamI[0]*d[n];
Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)
```

## 6.2. Implementación de los métodos de Falkner para la ecuación $y'' = f(t, y')$ en modo P-C

### 6.2.1. Métodos de Falkner explícitos

En los métodos explícitos podemos utilizar tanto fórmulas predictoras como correctoras. Lo único que se tiene que cumplir es que al tratarse de una función

de la forma $f = f(t, y')$, el valor de $y'_{n+1}$ tiene que obtenerse obligadamente con el predictor, independientemente de cómo se calcule la $y_{n+1}$, bien con el predictor, o bien con el corrector. El hecho de que no haya que utilizar forzosamente el par predictor-corrector para la solución o para la derivada permite que les llamemos métodos explícitos.

### Método PP'E

Este es un método explícito que sólo utiliza fórmulas predictoras para resolver el problema de la forma $y'' = f(t, y')$. En cada paso se obtiene el valor $y_{n+1}$ con la fórmula predictora, y el valor $y'_{n+1}$ también con la fórmula predictora correspondiente. Finalmente se evalúa la función para utilizarla en el siguiente paso. No hay diferencias entre este método y el primero de los explícitos del capítulo anterior, salvo en lo que respecta a la forma de la función. La implementación de los cálculos en cada paso queda recogida en las siguiente líneas de código

```
s = bet[0] d[n];
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypn[n] = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ypn[n]];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)
```

### Método P ' E C

En este segundo método explícito se comienza calculando la $y'_{n+1}$ con el predictor, y a continuación, tras evaluar la función, se calcula la $y_{n+1}$ con el corrector. No se necesita del método predictor para hallar la aproximación $y_{n+1}$, pues al tratarse de una función de la forma $f = f(t, y')$ lo que es obligado es utilizar el predictor para aproximar $y'_{n+1}$. El método resultante es explícito.

Tanto en este método como en el anterior el valor de la derivada se aproxima con el predictor. La diferencia está en que en este método se usa el corrector para obtener la solución, y en el anterior se obtenía el valor con el predictor. En el cálculo de los errores esto afecta en cada paso únicamente al valor de la diferencia

$$y(t_i) - y_i$$

que en el primer caso es $y(t_i) - y_i^P = \mathcal{O}(h^{k+2})$ mientras que en el segundo es $y(t_i) - y_i^C = \mathcal{O}(h^{k+3})$. Pero ello no cambia el término principal del error acumulado en el punto final, que es el mismo en ambos métodos.

El código para la ejecución en cada paso del método queda

```
sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ypnn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)

sI = betI[0]*d[n];
Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
```

```
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

ypn[n] = ypnn[n];
(* actualización del valor de la y' para el paso siguiente *)
```

Nótese que el valor $y'^{P}_{n+1}$ (que se denota por `ypnn` en el código) es un valor que se usa para actualizar el vector de diferencias. Pero como después se utiliza la fórmula correctora para aproximar la solución, donde se necesita el valor $y'_n$, no podemos almacenar de manera definitiva ese valor como el valor calculado para la derivada. Es por esto que la última línea del código asigna a $y'_{n+1}$ el valor $y'^{P}_{n+1}$ (en el código `ypn[n] = ypnn`) para continuar el siguiente paso con los últimos valores obtenidos tanto para la solución como para la derivada.

### 6.2.2. Métodos de Falkner implícitos

En los métodos implícitos que consideramos para el problema $y'' = f(t, y')$ podemos utilizar tanto predictores como correctores, pero el requisito obligado que se tiene que cumplir es que para calcular la aproximación de $y'_{n+1}$ hemos de usar el predictor, y ese valor será corregido posteriormente. Esto es lo que nos lleva a llamar implícitos a estos modos que a continuación presentamos.

#### Método PP'EC'E

En este primer caso implícito, empezamos calculando la solución con el predictor, a continuación calculamos la derivada también con el predictor, y seguidamente evaluamos la función para usarla en la fórmula correctora para la derivada. Finalmente evaluaremos de nuevo la función para actualizar los valores que se utilizarán en el siguiente paso.

El código de la parte iterativa del método queda como sigue

```
s = bet[0] d[n];
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor*)
```

```
sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor*)

t = t + h;
p = f[t, ypnn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)

spI = gamI[0]*d[n];
Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector*)

p = f[t, ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j],
    d[j] = dd[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
 con el valor del corrector *)
```

### Método P'ECC'E

En el segundo método de los implícitos, comenzamos calculando la derivada de la función, $y'_{n+1}$, con el método predictor. Una vez calculado esto, evaluamos la función, y continuamos corrigiendo la derivada y la solución. Por último evaluamos la función $f$ para utilizarla en el paso siguiente. Mientras que en el método anterior sólo se corregía la derivada, ahora se corrigen tanto ésta como la solución.

La parte del código correspondiente al cálculo en cada paso queda como sigue

```
sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ypnn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)

sI = betI[0]*d[n];
Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

spI = gamI[0]*d[n];
Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)


p = f[t, ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j],
    d[j] = dd[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
```

```
con el valor del corrector *)
```

### Método P ' EC ' E C

Este método es el último de los implícitos que hemos considerado. Podemos observar que hacemos los mismos cálculos que en el anterior, con la única diferencia en el orden en el que se realizan las dos últimas operaciones, evaluar y corregir la solución. El error que resulta es prácticamente el mismo, como era de esperar.

En primer lugar calculamos la $y'_{n+1}$ con el predictor, a lo que sigue la evaluación la función $f$ que usaremos para corregir la derivada anterior con la fórmula correspondiente. Después evaluamos de nuevo la función utilizando el valor de $y'^{C}_{n+1}$ y finalizamos calculando $y_{n+1}$ con el corrector.

El código correspondiente a cada paso se expresa como sigue

```
sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor*)

t = t + h;
p = f[t, ypnn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)

spI = gamI[0]*d[n];
Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypnn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)

p = f[t, ypnn];
```

```
Do[{pp = p - dd[j],
    d[j] = dd[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del corrector *)

sI = betI[0]*d[n];
Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

ypn[n] = ypnn;
(* actualización del valor de la y' para el paso siguiente *)
```

## 6.3. Implementación de los métodos de Falkner para la ecuación $y'' = f(t, y, y')$ en modo P-C

### 6.3.1. Métodos de Falkner explícitos

Ahora, debido a la forma de la función, en los métodos explícitos solo utilizaremos fórmulas predictoras. Como vimos, los términos principales de los errores son iguales en todos los casos para el primer modo explícito, y la implementación también es similar.

#### Método PP'E

Este es un método explícito que sólo utiliza fórmulas predictoras para resolver el problema de la forma $y'' = f(t, y, y')$. En cada paso se obtienen los valores de $y_{n+1}$ y de $y'_{n+1}$ con la fórmula predictora correspondiente. Finalmente se evalúa la función para utilizarla en el siguiente paso. La implementación del procedimiento iterativo es como sigue

```
s = bet[0] d[n];
```

```
Do[s = s + d[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*d[n];
Do[sp = sp + d[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypn[n] = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, yn[n], ypn[n]];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor *)
```

### 6.3.2. Métodos de Falkner implícitos

En los métodos implícitos que hemos consideramos para el problema $y'' = f(t, y, y')$ utilizaremos siempre inicialmente las fórmulas predictoras en la forma PP'E. Posteriormente corregiremos el valor de la solución, de la derivada o de ambos, quizás con evaluaciones intermedias de la función. En las tres primeras formulaciones hay dos evaluaciones de la función por paso, mientras que en las dos últimas hay tres evaluaciones de la función por paso.

#### Método PP'ECE

En este primer modo, tras obtener los valores con las fórmulas predictoras, únicamente corregimos el valor de la solución. Y a continuación hacemos la evaluación final de la función para actualizar el vector de diferencias finitas que se usará en el paso siguiente. La parte iterativa del código queda

```
s = bet[0] dd[n];
Do[s = s + dd[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
```

```
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*dd[n];
Do[sp = sp + dd[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, ynn, ypnn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con los valores de los predictores *)

sI = betI[0]*d[n]; Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI =sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

ypn[n] = ypnn;
p = f[t, yn[n], ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j], d[j] = dd[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* actualización del valor de la y', evaluación de la f y actualización
del vector de diferencias con los valores últimos de y e y' *)
```

### Método PP'EC'E

Esta segunda formulación difiere de la anterior en que en lugar de corregir el valor de la solución se corrige el valor de la derivada. A continuación se evalúa la función en los últimos valores obtenidos para actualizar el vector de diferencias finitas que se usará en el paso siguiente. La parte iterativa del código se escribe

```
s = bet[0] dd[n];
```

```
Do[s = s + dd[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*dd[n];
Do[sp = sp + dd[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = f[t, yn[n], ypnn];
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con los valores de los predictores *)

spI = gamI[0]*d[n]; Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)

p = f[t, yn[n], ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j], d[j] = dd[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
 con los valores últimos de y e y' *)
```

### Método PP'ECC'E

La tercera formulación es similar a las dos anteriores, pero ahora se corrigen tanto el valor de la solución como el valor de la derivada. A continuación se evalúa la función en los últimos valores obtenidos para actualizar el vector de diferencias finitas que se usará en el paso siguiente. La parte iterativa del código es similar a las anteriores, y se escribe

```
s = bet[0] dd[n];
Do[s = s + dd[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*dd[n];
Do[sp = sp + dd[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = p = f[t, ynn, ypnn];;
Do[{pp = p - d[j],
    d[j] = p,
    p = pp},
{j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con los valores de los predictores *)

sI = betI[0]*d[n]; Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

spI = gamI[0]*d[n]; Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)

p = f[t, yn[n], ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j], d[j] = dd[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
 con los valores últimos de y e y' *)
```

### Método PP 'ECEC 'E

Ahora consideramos el primero de los modos en que hay tres evaluaciones de la función. Tras obtener el valor de la función en los datos proporcionados por los predictores se corrige la solución, luego se evalúa la función, se corrige la derivada, y se hace la evaluación final para actualizar el vector de diferencias finitas. El código se escribe

```
s = bet[0] dd[n];
Do[s = s + dd[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*dd[n];
Do[sp = sp + dd[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = p = f[t, ynn, ypnn];;
Do[{pp = p - d[j], d[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con los valores de los predictores *)

sI = betI[0]*d[n]; Do[sI = sI + d[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

p = f[t, yn[n], ypnn];
Do[{pp = p - d2[j], d2[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor para la y', y del corrector para la y *)

spI = gamI[0]*d2[n]; Do[spI = spI + d2[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
```

```
spI = spI + p*gamI[n + 1];
ypn[n] = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)

p = f[t, yn[n], ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j], d[j] = d2[j] = dd[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
 con los valores últimos de y e y' *)
```

### Método PP'EC'ECE

Esta última formulación también tiene tres evaluaciones de la función por paso, y se diferencia del anterior en el orden en que se aplican los correctores. Ahora se corrige primero el valor de la derivada, se evalúa, y luego se corrige la solución. La evaluación final permite actualizar el vector de diferencias finitas con los últimos valores obtenidos. La parte del código correspondiente a la iteración es

```
s = bet[0] dd[n];
Do[s = s + dd[n - i] bet[i], {i, 1, n}];
ynn = yn[n] + h*ypn[n] + s*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el predictor *)

sp = gam[0]*dd[n];
Do[sp = sp + dd[n - i]*gam[i], {i, 1, n}];
ypnn = ypn[n] + h*sp;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el predictor *)

t = t + h;
p = p = f[t, ynn, ypnn];;
Do[{pp = p - d[j], d[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con los valores de los predictores *)

spI = gamI[0]*d[n]; Do[spI = spI + d[n - i]*gamI[i], {i, 1, n}];
spI =  spI + p*gamI[n + 1];
```

```
ypnn1 = ypn[n] + h*spI;
(* nuevo valor de la y' obtenido con el corrector *)

p = f[t, ynn, ypnn1];
Do[{pp = p - d2[j], d2[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* evaluación de la f y actualización del vector de diferencias
con el valor del predictor para la y, y del corrector para la y' *)

sI = betI[0]*d2[n]; Do[sI = sI + d2[n - i]*betI[i], {i, 1, n}];
sI = sI + p*betI[n + 1];
yn[n] = yn[n] + h*ypn[n] + sI*h^2;
(* nuevo valor de la y obtenido con el corrector *)

ypn[n] = ypnn1;
p = f[t, yn[n], ypn[n]];
Do[{pp = p - dd[j], d[j] = d2[j] = dd[j] = p, p = pp}, {j, n, 0, -1}];
(* actualización del valor de la y', evaluación de la f, y
actualización del vector de diferencias *)
```

# Capítulo 7

# Equivalencias entre las diferentes formulaciones

En este capítulo vamos a mostrar los diferentes métodos que hemos considerado y la relación entre ellos. En el Capítulo 5 veíamos que los métodos para la ecuación $y'' = f(t, y, y')$ si se aplicaban en particular para resolver una ecuación de la forma $y'' = f(t, y)$ daban lugar a las mismas regiones de estabilidad que los métodos que vimos para esta última ecuación. Esto ocurre no solo con respecto a las regiones de estabilidad sino también con respecto a los resultados numéricos, si bien con algún matiz. Vamos a explicar uno de los casos con algún detalle, y luego simplemente mostraremos los cuadros con las distintas equivalencias.

Consideremos el método $FIC[2]k$ (o modo PP 'E C' E ) para resolver la ecuación $y'' = f(t, y, y')$. Este método lo podemos aplicar también en particular para resolver la ecuación $y'' = f(t, y)$. Las operaciones que se suceden en cada paso son:

1. Calcular $y^P_{n+1}$
2. Calcular ${y'}^P_{n+1}$
3. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$
4. Calcular ${y'}^C_{n+1}$
5. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$ .

En esta sucesión de operaciones hay cálculos innecesarios. En efecto, el paso 2 no aporta nada, puesto que el valor ${y'}^P_{n+1}$ no se utiliza posteriormente, mientras que la aproximación para la derivada la proporciona el paso 4. De la misma manera la última evaluación en el paso 5, $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$ tampoco aporta nada, puesto que es la misma que se había realizado en el paso 3. Si se prescinde de estas operaciones innecesarias los pasos que resultan son:

1. Calcular $y^P_{n+1}$
2. Evaluar $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y^P_{n+1})$
3. Calcular ${y'}^C_{n+1}$ ,

es decir, resulta el método $FE[2]k$ (o modo PE C' ) para la ecuación $y'' = f(t, y)$.

Los resultados numéricos que se obtengan con los dos métodos serán los mismos, si bien el primero será más costoso computacionalmente puesto que realiza más

cálculos. Esta es la razón de que para las ecuaciones particulares del tipo $y'' = f(t, y)$ o $y'' = f(t, y')$ se hayan diseñado métodos adecuados para cada uno de los tipos.

Mostramos a continuación los diferentes modos que hemos visto y seguidamente las tablas de equivalencias entre ellos.

| métodos para $y'' = f(t, y)$ | |
|---|---|
| FE[1]$k$ | (modo PP ' E) |
| FE[2]$k$ | (modo PEC ') |
| FI[1]$k$ | (modo P ' PE C E) |
| FI[2]$k$ | (modo PEC 'CE) |
| FI[3]$k$ | (modo PECEC ') |

| métodos para $y'' = f(t, y')$ | |
|---|---|
| FE'[1]$k$ | (modo PP ' E) |
| FE'[2]$k$ | (modo P ' EC) |
| FI'[1]$k$ | (modo PP ' E C ' E) |
| FI'[2]$k$ | (modo P ' E C C ' E) |
| FI'[3]$k$ | (modo P ' E C ' E C) |

| métodos para $y'' = f(t, y, y')$ | |
|---|---|
| FEC$k$ | (modo PP ' E) |
| FIC[1]$k$ | (modo PP ' E C E) |
| FIC[2]$k$ | (modo PP ' E C ' E ) |
| FIC[3]$k$ | (modo PP ' E CC ' E ) |
| FIC[4]$k$ | (modo PP ' E C E C ' E) |
| FIC[5]$k$ | (modo PP ' E C ' E C E) |

Cuadro 7.1: *Diferentes formulaciones de los métodos según el tipo de ecuación.*

| métodos para $y'' = f(t, y, y')$ | métodos para $y'' = f(t, y)$ |
|---|---|
| FEC$k$ | FE[1]$k$ (*) |
| FIC[1]$k$ | FI[1]$k$ (*) |
| FIC[2]$k$ | FE[2]$k$ |
| FIC[3]$k$ | FI[2]$k$ |
| FIC[4]$k$ | FI[3]$k$ |
| FIC[5]$k$ | FI[2]$k$ |

| métodos para $y'' = f(t, y, y')$ | métodos para $y'' = f(t, y')$ |
|---|---|
| FEC$k$ | FE'[1]$k$ (*) |
| FIC[1]$k$ | FE'[2]$k$ |
| FIC[2]$k$ | FI'[1]$k$ (*) |
| FIC[3]$k$ | FI'[2]$k$ |
| FIC[4]$k$ | FI'[2]$k$ |
| FIC[5]$k$ | FI'[3]$k$ |

Cuadro 7.2: *Equivalencia en cuanto al resultado numérico de los distintos métodos para* $y'' = f(t, y, y')$ *cuando se aplican a ecuaciones de la forma* $y'' = f(t, y)$ *o bien* $y'' = f(t, y')$

Nótese cómo los métodos que resultan en la columna derecha del Cuadro 7.2 en general son más eficaces computacionalmente, no sólo porque dejen de realizarse operaciones aritméticas, sino porque en algunos casos también dejan de realizarse evaluaciones de la función. Esto no se aplica a los métodos marcados con (*), los cuales realizan las mismas operaciones en cada paso.

Si se prescinde de la última evaluación de la función, en el caso de los métodos implícitos, también se tienen equivalencias entre los diferentes métodos. A continuación mostramos un cuadro con los diferentes modos que pueden considerarse, y seguidamente en el Cuadro 7.4 las equivalencias entre ellos.

| métodos para $y'' = f(t, y)$ | |
|---|---|
| $\widetilde{FI}[1]k$ | (modo P ' PE C ) |
| $\widetilde{FI}[2]k$ | (modo PEC 'C) |
| $\widetilde{FI}[3]k$ | (modo PECC ') |
| **métodos para $y'' = f(t, y')$** | |
| $\widetilde{FI}'[1]k$ | (modo PP ' E C ' ) |
| $\widetilde{FI}'[2]k$ | (modo P ' E C C ' ) |
| $\widetilde{FI}'[3]k$ | (modo P ' E C ' C) |
| **métodos para $y'' = f(t, y, y')$** | |
| $\widetilde{\widetilde{FIC}}[1]k$ | (modo PP ' E C ) |
| $\widetilde{\widetilde{FIC}}[2]k$ | (modo PP ' E C ') |
| $\widetilde{\widetilde{FIC}}[3]k$ | (modo PP ' E CC ') |
| $\widetilde{\widetilde{FIC}}[4]k$ | (modo PP ' E C E C ') |
| $\widetilde{\widetilde{FIC}}[5]k$ | (modo PP ' E C ' E C ) |

Cuadro 7.3: *Diferentes formulaciones de los métodos sin realizar la última evaluación de la función, según los diferentes tipos de ecuaciones.*

| métodos para $y'' = f(t, y, y')$ | métodos para $y'' = f(t, y)$ |
|---|---|
| $\widetilde{FIC}[1]k$ | $\widetilde{FI}[1]k$ (*) |
| $\widetilde{FIC}[2]k$ | FE[2]$k$ |
| $\widetilde{FIC}[3]k$ | $\widetilde{FI}[2]k$ |
| $\widetilde{FIC}[4]k$ | FI[3]$k$ |
| $\widetilde{FIC}[5]k$ | $\widetilde{FI}[2]k$ |

| métodos para $y'' = f(t, y, y')$ | métodos para $y'' = f(t, y')$ |
|---|---|
| $\widetilde{FIC}[1]k$ | FE'[2]$k$ |
| $\widetilde{FIC}[2]k$ | $\widetilde{FI}'[1]k$ (*) |
| $\widetilde{FIC}[3]k$ | $\widetilde{FI}'[2]k$ |
| $\widetilde{FIC}[4]k$ | $\widetilde{FI}'[2]k$ |
| $\widetilde{FIC}[5]k$ | FI'[3]$k$ |

Cuadro 7.4: *Equivalencia en cuanto al resultado numérico de los distintos métodos para* $y'' = f(t, y, y')$ *cuando se aplican a ecuaciones de la forma* $y'' = f(t, y)$ *o bien* $y'' = f(t, y')$

También en este último Cuadro 7.4 los métodos de la segunda columna son más eficaces computacionalmente que los de la primera, salvo en los dos casos marcados con (*) que tienen el mismo coste, puesto que se realizan las mismas operaciones en cada paso.

# Capítulo 8

# Ejemplos numéricos

En este capítulo mostraremos cómo funcionan las distintas implementaciones de los métodos, aplicándolos a diferentes problemas que han aparecido en la literatura matemática. Primero consideraremos problemas de la forma $y'' = f(t, y)$, luego otros de la forma $y'' = f(t, y')$, y finalmente, distintos ejemplos del tipo $y'' = f(t, y, y')$. Esta última forma es la más general, y aunque cualquiera de los otros tipos podría resolverse con los métodos para esta última forma, como señalábamos en el capítulo anterior, el hecho de prescindir de algunos cálculos en el caso de los métodos para $y'' = f(t, y)$ o $y'' = f(t, y')$ hace que estos sean más eficaces computacionalmente.

Aunque en el estudio general de los errores en los capítulos anteriores hemos considerado una última evaluación de la función para actualizar el valor de la misma con los valores obtenidos más recientemente, en los ejemplos que siguen consideraremos también otra posibilidad: la no evaluación última de la función (prescindimos así de la E última en las formulaciones P-C). Según hemos hecho anteriormente, denotaremos a estos métodos mediante la notación $\widetilde{FI}[i]k$, $\widetilde{FI}'[i]k$ o $\widetilde{FIC}[i]k$ según corresponda (nótese que esto es posible solo en el caso de los métodos implícitos). El no realizar esta última evaluación no cambia el término principal del error de truncamiento local, así que en general, no influye demasiado en los errores cometidos, y sin embargo, sí que se ahorra tiempo de ejecución (véase la Nota 6.1.2 de la página 166). De hecho, como se puede observar en los cuadros que siguen, el tiempo casi se reduce a la mitad. Lo que sí se ve afectado con este proceder son las regiones de estabilidad, que en general disminuyen. Aunque no presentaremos un estudio detallado de cómo se ven afectadas, sí que diremos que en el caso de los métodos para ecuaciones de los tipos $y'' = f(t, y)$ e $y'' = f(t, y, y')$ dichas regiones cambian poco, mientras que para los métodos para problemas de la forma $y'' = f(t, y')$ se ven notablemente reducidas.

# 8.1. Ejemplos de aplicación de los métodos de Falkner para la ecuación $y'' = f(t, y)$ en modo P-C

## 8.1.1. Ejemplo con los métodos explícitos

Consideraremos el problema de valor inicial dado por

$$y''(t) = -y(t) + \text{sen}(t)\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0 \tag{8.1}$$

que ha aparecido en [103], cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\text{sen}(t) + (2-t)\cos(t)\right).$$

Hemos integrado el problema en el intervalo $[0, 20\pi]$ utilizando los métodos explícitos para $k = 6$, los cuales designábamos respectivamente por $FE[1]6$ y $FE[2]6$. Hemos considerado también el método Runge-Kutta-Nyström de orden 6 que aparece en la referencia [94], al que hemos denominado RKN6, y el método clásico de Störmer de orden 6, denominado por STAB6. En este último caso, se ha utilizado la correspondiente fórmula explícita en (2.20) para seguir los valores de la derivada. El número de pasos se ha fijado para todos los métodos en $N = 1000$. En la Figura 8.1 se muestra la propagación de los errores absolutos para la solución utilizando los métodos anteriores. Observamos que el mejor resultado corresponde a la implementación $FE[2]6$ del método explícito de Falkner. En cuanto a la propagación de los errores absolutos de la derivada, se obtienen resultados parecidos, como se observa en la Figura 8.2.

Como conocemos la solución exacta hemos utilizado la fórmula en (3.15) para obtener una estimación de los errores absolutos en el punto final con el método $FE[1]6$ para diferentes numeros de pasos. Para ello hemos tomado los puntos intermedios $\xi_j$ y $\psi_j$ igual a los nodos de integración, $\xi_j = \psi_j = t_j$. Los resultados para estas estimaciones aparecen en el Cuadro 8.1, estando los errores absolutos en el punto final dados por

$$GE(t_N) = |y(t_N) - y_N|\,.$$

Además del número de pasos, hemos incluido los errores absolutos de las estimaciones, los cuales se observa que son del mismo orden que las estimaciones.

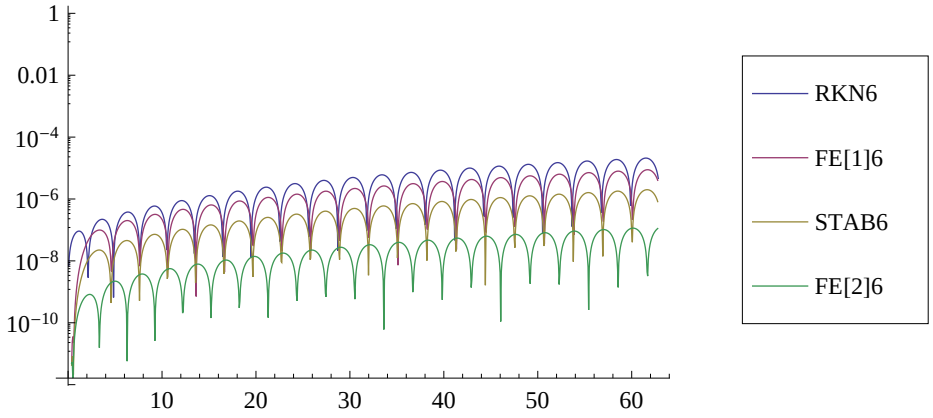



Figura 8.1: Errores absolutos en escala logarítmica para la solución $y(t)$ del problema (8.1) con los métodos RKN6, $FE[1]6$, STAB6 y $FE[2]6$

En el caso del método $FE[2]6$, consideraciones parecidas a las anteriores con respecto a la fórmula en (3.19) permiten obtener los datos que aparecen en el Cuadro 8.2. Observamos que a medida que aumenta el número de pasos, se obtienen estimaciones más precisas.

| N | Estimación $GE(t_N)$ | $GE(t_N)$ | Error Estimación |
|---|---|---|---|
| 1000 | $4{,}0417 \times 10^{-6}$ | $4{,}0198 \times 10^{-6}$ | $3{,}9037 \times 10^{-6}$ |
| 2000 | $4{,}0417 \times 10^{-6}$ | $1{,}3792 \times 10^{-7}$ | $3{,}9037 \times 10^{-6}$ |
| 3000 | $3{,}5534 \times 10^{-7}$ | $1{,}2162 \times 10^{-8}$ | $3{,}4317 \times 10^{-7}$ |
| 4000 | $6{,}3244 \times 10^{-8}$ | $2{,}1131 \times 10^{-9}$ | $6{,}1130 \times 10^{-8}$ |
| 5000 | $1{,}6569 \times 10^{-8}$ | $6{,}1769 \times 10^{-10}$ | $1{,}5951 \times 10^{-8}$ |

Cuadro 8.1: *Estimaciones del error absoluto global en* $t_N$ *para el problema (8.1) con el método* $FE[1]6$.

**Nota 8.1.1** *Hacemos notar que podría parecer que hay una contradicción en las soluciones numéricas obtenidas con el método* $FE[1]6$. *Este método tiene un intervalo de estabilidad vacío como se puede comprobar en el Cuadro 3.1. Por otro lado se*

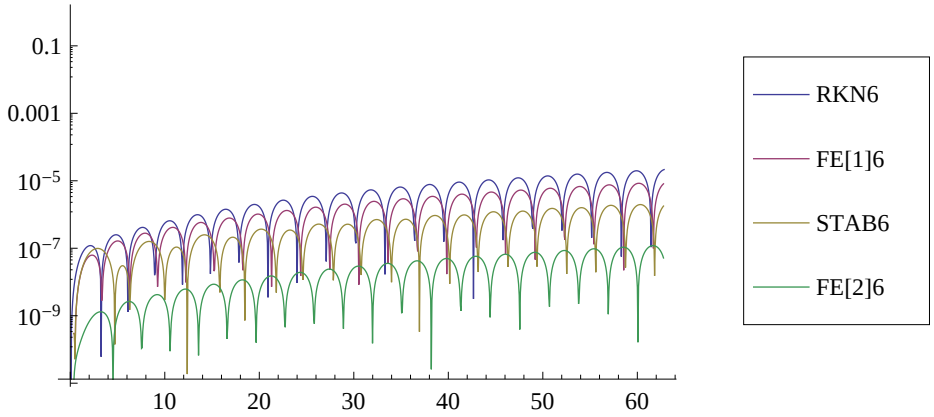



Figura 8.2: Errores absolutos en escala logarítmica para la derivada $y'(t)$ del problema (8.1) con los métodos RKN6, $FE[1]6$, STAB6 y $FE[2]6$

*tiene que* $\mu = 1$*, y por tanto* $H = h\,\mu = 20 * \pi/1000 \simeq 0{,}0628319 > 0$*, y a pesar de esto el comportamiento del error global es aceptable, como se observa en la Figura 8.1. Explicaremos esta aparente contradicción.*

*Si el valor del paso* $h$ *hace que* $H$ *no esté dentro del intervalo de estabilidad, entonces el error tiende a infinito a medida que el número de pasos* $N$ *crece indefinidamente. Sin embargo, la manera en que esto se refleja en la práctica (es decir, cómo de peligrosa o tolerable puede ser la propagación del error) depende de los datos particulares del problema que se esté resolviendo. Como vimos, el comportamiento de la solución numérica depende de los valores propios de la matriz de estabilidad, y para los datos del problema anterior estos valores propios tienen módulos cercanos a* 1 *(justamente dos de ellos son mayores que* 1*, pero de una magnitud* $1{,}0606 \times 10^{-10}$*). Esta es la razón por la que los errores no crecen drásticamente en cada paso, y los errores globales se mantienen acotados, lo que nos indica que para* $N \geq 1000$ *la inestabilidad del método no afecta a los resultados.*

*Por el contrario, si se toma* $N = 70$*, se tiene que* $H = h = 20 * \pi/70 \simeq 0{,}897598$*, y en este caso el mayor de los módulos de los valores propios es* $|r| \simeq 1{,}2759721$*, lo que se traduce en que el error crece drásticamente a medida que avanza la integración, como se puede comprobar en la Figura 8.3. En conclusión, el estudio de la estabilidad es un aspecto que ha de ser tenido en cuenta a la hora de resolver cualquier problema.*

| N | Estimación $GE(t_N)$ | $GE(t_N)$ | Error Estimación |
|---|---|---|---|
| 1000 | $7{,}8684 \times 10^{-7}$ | $1{,}1111 \times 10^{-7}$ | $6{,}7572 \times 10^{-7}$ |
| 2000 | $6{,}1705 \times 10^{-9}$ | $9{,}1773 \times 10^{-10}$ | $5{,}2527 \times 10^{-9}$ |
| 3000 | $3{,}6195 \times 10^{-10}$ | $5{,}4019 \times 10^{-11}$ | $3{,}0793 \times 10^{-10}$ |
| 4000 | $4{,}8333 \times 10^{-11}$ | $8{,}0362 \times 10^{-12}$ | $4{,}0297 \times 10^{-11}$ |
| 5000 | $1{,}0132 \times 10^{-11}$ | $5{,}6843 \times 10^{-14}$ | $1{,}0075 \times 10^{-11}$ |

Cuadro 8.2: *Estimaciones del error absoluto global en $t_N$ para el problema (8.1) con el método $FE[2]6$.*

### 8.1.2. Otro ejemplo con los métodos explícitos

En este caso consideramos una aplicación de los métodos $FE[2]k$ para resolver un problema de valores en la frontera utilizando el método del disparo. Consideramos el problema dado por

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t)) = \dfrac{1}{2}\left(t + y(t) + 1\right)^3, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 0\,, \quad y(1) = 0\,, \end{cases} \tag{8.2}$$

que también ha aparecido en [103], y cuya solución exacta es $y(t) = \dfrac{2}{2-t} - t - 1$.

Para resolver el problema anterior consideramos el problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + y(t) + 1\right)^3, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = s\,, \end{cases} \tag{8.3}$$

donde la constante $s$ se debe elegir de manera que al avanzar la solución hasta el punto final $t = 1$ se ha de obtener que $y(1) = 0$. Si denotamos por $y(t, s)$ la solución del problema de valor inicial en (8.3), para obtener la solución del problema de partida, hemos de determinar $s$ de manera que $\rho(s) = y(1, s) = 0$. Utilizamos el método de Newton para hallar la solución, para lo cual necesitamos elegir una aproximación inicial $s_0$ y a partir de ella generar la sucesión

$$s_{n+1} = s_n - \frac{\rho(s_n)}{\rho'(s_n)} = s_n - \frac{y(1, s_n)}{w(1, s_n)}\,,$$

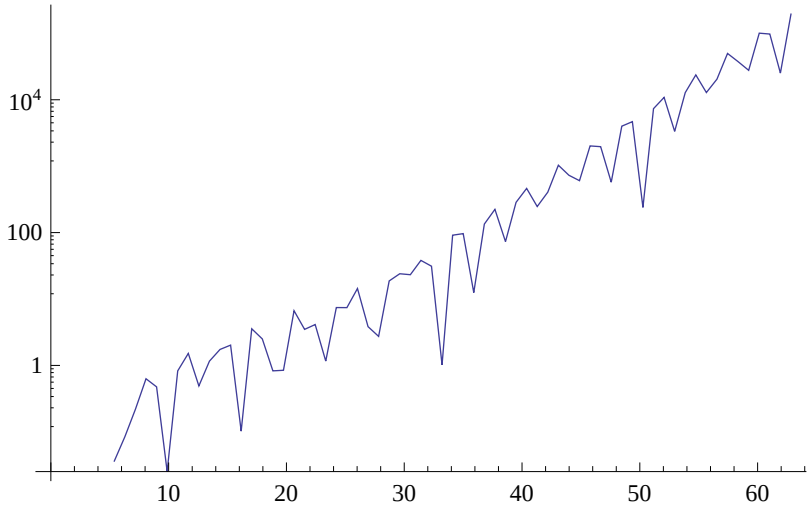



Figura 8.3: Errores absolutos globales en escala logarítmica para la solución $y(t)$ del problema en (8.1) con el método $FE[1]6$, tomando $N = 70$.

siendo $w(t,s)$ la solución del problema variacional (véase [68], [53])

$$\begin{cases} w''(t,s) = w(t,s)\,\dfrac{\partial f(t,y(t,s))}{\partial y}\,, \\ w(0,s) = 0\,, \quad w'(0,s) = 1\,. \end{cases} \tag{8.4}$$

Los dos problemas de valor inicial (8.3) y (8.4) se han de resolver conjuntamente en cada iteración. Consideraremos el método de Heun de tercer orden (RK3) [60], el cual es un método Runge-Kutta con tablero de Butcher dado por

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

junto con el método de Falkner $FE[2]3$, el cual está dado por las dos fórmulas

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,y'_n + \frac{h^2}{24}\left(19y''_n - 10y''_{n-1} + 3y''_{n-2}\right) \\ y'_{n+1} &= y'_n + \frac{h}{24}\left(9y''_{n+1} + 19y''_n - 5y''_{n-1} + y''_{n-2}\right). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Hemos resuelto también el problema con el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden, y el método de Falkner $FE[2]4$, dado por las dos fórmulas

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\, y'_n + \frac{h^2}{360}\left(323y''_n - 264y''_{n-1} + 159y''_{n-2} - 38y''_{n-3}\right) \\ y'_{n+1} &= y'_n + \frac{h}{720}\left(251y''_{n+1} + 646y''_n - 264y''_{n-1} + 106y''_{n-2} - 19y''_{n-3}\right). \end{aligned} \tag{8.6}$$

En el Cuadro 8.3 hemos incluido los errores máximos absolutos en los nodos de integración, $E_N$,

$$MaxErr = \max_{j\in 0,\ldots,N} |y(t_j) - y_j|\,,$$

y el tiempo de computación empleado medido en segundos. Se han tomado pasos de longitud constante $h = 2^{-m}$ para $m = 3, 4, 5, 6$. Para hallar la aproximación inicial $s_0$ hemos considerado el polinomio de interpolación de la forma $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ que verifica las condiciones

$$p(0) = 0\,, \quad p(1) = 0\,, \quad p''(0) = f(0, y(0))\,, \quad p''(1) = f(1, y(1))\,.$$

Utilizando este polinomio, se ha tomado $s_0 = p'(0) \simeq -0{,}833$. Luego se ha utilizado el método de Newton con una tolerancia de $10^{-8}$ necesitándose en todos los casos cuatro iteraciones para obtener la aproximación de la velocidad inicial dada por $s_n = -0{,}49999986$.

Observamos que el método $FE[2]3$ es más eficaz que el método RK3. Análogamente, el método $FE[2]4$ es más eficaz que el método RK4. Para utilizar los métodos Runge-Kutta los problemas de valor inicial (8.3-8.4) han de transformarse en un problema equivalente de primer orden. En el caso de los métodos de Falkner, el sistema de problemas de segundo orden (8.3-8.4) se resuelve de manera directa sin transformarlo en un sistema equivalente de primer orden. Esto se traduce en el menor coste computacional para los métodos de Falkner.

| | RK3 | | $FE[2]3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $m$ | $MaxErr$ | Tiempo CPU(s.) | $MaxErr$ | Tiempo CPU(s.) |
| 3 | $2{,}2552 \times 10^{-4}$ | 0,016 | $1{,}6649 \times 10^{-4}$ | 0,016 |
| 4 | $3{,}2524 \times 10^{-5}$ | 0,031 | $1{,}4243 \times 10^{-5}$ | 0,016 |
| 5 | $4{,}3339 \times 10^{-6}$ | 0,047 | $1{,}0522 \times 10^{-6}$ | 0,031 |
| 6 | $5{,}5928 \times 10^{-7}$ | 0,110 | $7{,}2724 \times 10^{-8}$ | 0,047 |
| | RK4 | | $FE[2]4$ | |
| $m$ | $MaxErr$ | Tiempo CPU(s.) | $MaxErr$ | Tiempo CPU(s.) |
| 3 | $9{,}6095 \times 10^{-6}$ | 0,031 | $7{,}3191 \times 10^{-5}$ | 0,016 |
| 4 | $6{,}5566 \times 10^{-7}$ | 0,031 | $3{,}7600 \times 10^{-6}$ | 0,031 |
| 5 | $4{,}2639 \times 10^{-8}$ | 0,063 | $1{,}5597 \times 10^{-7}$ | 0,031 |
| 6 | $2{,}7109 \times 10^{-9}$ | 0,126 | $2{,}3172 \times 10^{-9}$ | 0,047 |

Cuadro 8.3: *Datos correspondientes al problema (8.2) utilizando el método del disparo junto con el método de Newton y los métodos RK3, RK4,* $FE[2]3$ *y* $FE[2]4$ *para tamaños de paso* $h = 2^{-m}$.

### 8.1.3. Una variante del Ejemplo 8.1.1 con los métodos implícitos

El problema en 8.1.1 presenta una variante más general que ha aparecido en numerosos artículos (véase por ejemplo [22], [95], [116]). Es la siguiente

$$y''(t) = -w^2 y(t) + (w^2 - 1)\,\mathrm{sen}(t)\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = w + 1 \tag{8.7}$$

siendo la solución exacta

$$y(t) = \cos(wt) + \mathrm{sen}(wt) + \mathrm{sen}(t)\,.$$

Se ha resuelto el problema en el intervalo $[0, 100]$ con el método $\widetilde{FI}[2]4$ para el valor $w = 20$. Los resultados se presentan en la Figura 8.4. La gráfica de la izquierda

corresponde a la aparecida en [22] para distintos métodos tipo Runge-Kutta de órdenes 4 y 5, y la gráfica de la derecha corresponde a los datos obtenidos con el método $\widetilde{FI}[2]4$. Se observa que este último proporciona los mejores resultados.

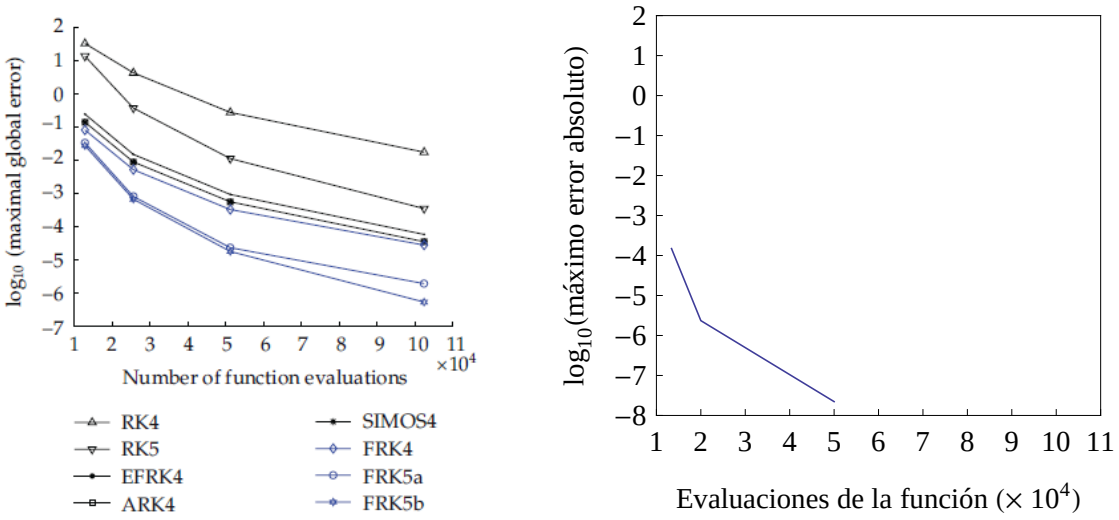



Figura 8.4: Datos del problema (8.7) obtenidos con diferentes métodos tipo Runge-Kutta (izqda.) y con el método $\widetilde{FI}[2]4$ (drcha.)

### 8.1.4. Ejemplo con los métodos implícitos

Consideramos ahora el problema no lineal estudiado por Chawla y Rao en [20] dado por

$$y''(t) + 100y(t) = \text{sen}(y(t))\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \tag{8.8}$$

Como no se conoce la solución analítica, una manera de utilizar este problema test es hallar la solución en el intervalo $[0, 20\pi]$ y obtener el valor en el punto final para compararlo con el valor conocido $y(20\pi) = 0{,}000392823991$ (véase [126]). En el cuadro 8.4 presentamos los errores absolutos globales en el punto final $t_N = 20\pi$ junto con el número de evaluaciones de la función, FEval , para los siguientes métodos

- Método 1: El método Runge-Kutta-Nyström que aparece en [34]

- Método 2: El método explícito de orden 8 que aparece en [126]
- Método 3: El método híbrido de sexto orden de Chawla y Rao en [20]
- Método 4: El método $FI[2]8$
- Método 5: El método $\widetilde{FI}[2]8$

Observamos que los errores son similares para todos los métodos, pero la formulación $\widetilde{FI}[2]8$ necesita el menor número de evaluaciones de la función.

| Método | FEval | $MaxErr$ |
|---|---|---|
| Método 1 | 14000 | $3{,}4 \times 10^{-10}$ |
| Método 2 | 16000 | $3{,}2 \times 10^{-10}$ |
| Método 3 | 16000 | $3{,}8 \times 10^{-10}$ |
| Método 4 | 12000 | $2{,}1 \times 10^{-10}$ |
| Método 5 | 6000 | $4{,}1 \times 10^{-10}$ |

Cuadro 8.4: *Datos para el problema (8.8) utilizando diferentes métodos.*

### 8.1.5. Ejemplo de resolución de un sistema con diferentes métodos

Aunque en la aplicación de los métodos para resolver un problema de valores en la frontera mediante el método del disparo vimos en el Ejemplo 8.1.2 que había que resolver un sistema de ecuaciones de segundo orden, utilizaremos ahora diferentes métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones. Consideraremos el sistema correspondiente al movimiento de dos cuerpos, dado por (véase [113])

$$\begin{cases} y_1''(t) = \dfrac{-y_1(t)}{r^3} \\ y_2''(t) = \dfrac{-y_2(t)}{r^3} \\ y_1(0) = 1\,, \quad y_1'(0) = 0\,, \quad y_2(0) = 0\,, \quad y_2'(0) = 1\,, \end{cases} \tag{8.9}$$

siendo $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, y cuya solución exacta es

$$y_1(t) = \cos(t)\,, \quad y_2(t) = \text{sen}(t)\,.$$

Este problema ha sido utilizado como problema test en numerosos artículos sobre métodos de resolución de problemas de valor inicial. Aquí lo vamos a resolver como en [130] en el intervalo $[0, 7]$ utilizando el método $FE[2]k$ para valores de $k = 2, \ldots, 10$, y tomando un número de pasos igual a $N = 112$ en todos los casos, con lo que resulta $h = 0{,}0625$. Los datos aparecen en el Cuadro 8.5.

| k | MaxErr $y_1$ | MaxErr $y_2$ | MaxErr $y_1'$ | MaxErr $y_2'$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $1{,}1651 \times 10^{-3}$ | $1{,}1781 \times 10^{-3}$ | $1{,}2740 \times 10^{-3}$ | $8{,}5695 \times 10^{-3}$ |
| 3 | $1{,}7458 \times 10^{-5}$ | $1{,}9902 \times 10^{-5}$ | $1{,}9762 \times 10^{-5}$ | $1{,}6453 \times 10^{-5}$ |
| 4 | $3{,}9115 \times 10^{-6}$ | $3{,}9177 \times 10^{-6}$ | $4{,}2581 \times 10^{-6}$ | $2{,}8593 \times 10^{-6}$ |
| 5 | $5{,}6869 \times 10^{-8}$ | $7{,}3229 \times 10^{-8}$ | $7{,}3142 \times 10^{-8}$ | $5{,}6222 \times 10^{-8}$ |
| 6 | $1{,}3264 \times 10^{-8}$ | $1{,}3101 \times 10^{-8}$ | $1{,}4338 \times 10^{-8}$ | $9{,}6002 \times 10^{-9}$ |
| 7 | $2{,}3774 \times 10^{-10}$ | $2{,}9070 \times 10^{-10}$ | $2{,}9288 \times 10^{-10}$ | $2{,}1161 \times 10^{-10}$ |
| 8 | $4{,}5591 \times 10^{-11}$ | $4{,}4313 \times 10^{-11}$ | $4{,}8903 \times 10^{-11}$ | $3{,}2613 \times 10^{-11}$ |
| 9 | $9{,}9675 \times 10^{-13}$ | $1{,}1674 \times 10^{-12}$ | $1{,}1874 \times 10^{-12}$ | $8{,}1706 \times 10^{-13}$ |
| 10 | $1{,}5953 \times 10^{-13}$ | $1{,}5451 \times 10^{-13}$ | $1{,}7053 \times 10^{-13}$ | $1{,}1368 \times 10^{-13}$ |

Cuadro 8.5: *Datos correspondientes al problema (8.9) utilizando el método* $FE[2]k$ *para diferentes valores de* $k$.

En el cuadro 8.6 aparecen los datos obtenidos con el método $\widetilde{FI}[2]k$ para valores de $k = 2, \ldots, 10$. En la Figura 8.5 se muestran los datos obtenidos con el método Runge-Kutta adaptado en [118] y con el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden. La segunda columna corresponde a los errores con el método Runge-Kutta adaptado en [130] el cual es exacto para el problema dado y por tanto los errores son debidos únicamente a errores de redondeo. Excepto para este último método, se observa que los métodos $FE[2]4$ y $\widetilde{FI}[2]3$ proporcionan mejores resultados.

| k | MaxErr $y_1$ | MaxErr $y_2$ | MaxErr $y_1'$ | MaxErr $y_2'$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $5{,}3652 \times 10^{-4}$ | $5{,}4163 \times 10^{-4}$ | $5{,}8808 \times 10^{-4}$ | $3{,}9961 \times 10^{-4}$ |
| 3 | $3{,}1679 \times 10^{-6}$ | $1{,}8396 \times 10^{-6}$ | $2{,}6416 \times 10^{-6}$ | $1{,}4614 \times 10^{-6}$ |
| 4 | $8{,}5809 \times 10^{-7}$ | $8{,}3725 \times 10^{-7}$ | $9{,}2345 \times 10^{-7}$ | $6{,}2228 \times 10^{-7}$ |
| 5 | $1{,}4127 \times 10^{-8}$ | $1{,}0529 \times 10^{-8}$ | $1{,}3377 \times 10^{-8}$ | $8{,}3543 \times 10^{-8}$ |
| 6 | $1{,}7960 \times 10^{-9}$ | $1{,}6812 \times 10^{-9}$ | $1{,}8923 \times 10^{-9}$ | $1{,}2603 \times 10^{-9}$ |
| 7 | $5{,}3236 \times 10^{-11}$ | $4{,}2099 \times 10^{-11}$ | $5{,}2048 \times 10^{-11}$ | $3{,}2922 \times 10^{-11}$ |
| 8 | $4{,}1453 \times 10^{-12}$ | $3{,}6718 \times 10^{-12}$ | $4{,}2665 \times 10^{-12}$ | $2{,}7894 \times 10^{-12}$ |
| 9 | $1{,}9606 \times 10^{-13}$ | $1{,}5978 \times 10^{-13}$ | $1{,}9451 \times 10^{-13}$ | $1{,}2401 \times 10^{-13}$ |
| 10 | $2{,}1871 \times 10^{-14}$ | $2{,}0983 \times 10^{-14}$ | $2{,}3314 \times 10^{-14}$ | $1{,}5543 \times 10^{-14}$ |

Cuadro 8.6: *Datos correspondientes al problema (8.9) utilizando el método* $\widetilde{FI}[2]k$ *para diferentes valores de* $k$ *tomando* $h = 0{,}0625$.

| $h$ | Our method | Simos' method | Classical method |
|---|---|---|---|
| 1 | $4.38 \times 10^{-15}$ | 37.49 | 10.97 |
| 0.5 | $1.65 \times 10^{-14}$ | 0.07 | 0.11 |
| 0.25 | $1.26 \times 10^{-14}$ | $8.00 \times 10^{-3}$ | $1.10 \times 10^{-2}$ |
| 0.125 | $8.55 \times 10^{-15}$ | $6.02 \times 10^{-4}$ | $8.29 \times 10^{-4}$ |
| 0.0625 | $2.03 \times 10^{-14}$ | $4.05 \times 10^{-5}$ | $5.53 \times 10^{-5}$ |

Figura 8.5: Datos del problema (8.9) obtenidos con diferentes métodos tipo Runge-Kutta adaptados y con el método clásico RK de cuarto orden

Finalmente, en el cuadro 8.7 se muestran los datos correspondientes a los métodos $FE[2]k$, $\widetilde{FI}[2]k$ y $FI[3]k$ para $k = 8, 9, 10$. Se han incluido los tiempos de ejecución para comparar la eficacia de los distintos métodos. Se observa que las implementaciones $FE[2]k$ y $\widetilde{FI}[2]k$ necesitan un tiempo parecido de computación, al realizar una evaluación de la función por paso, mientras que el método $FI[3]k$ necesita un tiempo mayor al realizar dos evaluaciones de la función por paso. Asimismo,

la exactitud de los métodos implícitos es un orden mayor que la del explícito, como era de esperar, tanto si hay evaluación final de la función como si no la hay.

| k | CPU (s.) | MaxErr $y_1$ | MaxErr $y_2$ | MaxErr $y_1'$ | MaxErr $y_2'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $FE[2]k$: | | | | |
| 8 | 0.063 | $4{,}5591 \times 10^{-11}$ | $4{,}4313 \times 10^{-11}$ | $4{,}8903 \times 10^{-11}$ | $3{,}2613 \times 10^{-11}$ |
| 9 | 0.062 | $9{,}9675 \times 10^{-13}$ | $1{,}1674 \times 10^{-12}$ | $1{,}1874 \times 10^{-12}$ | $8{,}1706 \times 10^{-13}$ |
| 10 | 0.063 | $1{,}5953 \times 10^{-13}$ | $1{,}5451 \times 10^{-13}$ | $1{,}7053 \times 10^{-13}$ | $1{,}1368 \times 10^{-13}$ |
| | $\widetilde{FI}[2]k$: | | | | |
| 8 | 0.047 | $4{,}1453 \times 10^{-12}$ | $3{,}6718 \times 10^{-12}$ | $4{,}2665 \times 10^{-12}$ | $2{,}7894 \times 10^{-12}$ |
| 9 | 0.063 | $1{,}9606 \times 10^{-13}$ | $1{,}5978 \times 10^{-13}$ | $1{,}9451 \times 10^{-13}$ | $1{,}2401 \times 10^{-13}$ |
| 10 | 0.078 | $2{,}1871 \times 10^{-14}$ | $2{,}0983 \times 10^{-14}$ | $2{,}3314 \times 10^{-14}$ | $1{,}5543 \times 10^{-14}$ |
| | $FI[3]k$: | | | | |
| 8 | 0.078 | $5{,}9725 \times 10^{-12}$ | $6{,}0061 \times 10^{-12}$ | $6{,}5510 \times 10^{-12}$ | $4{,}4171 \times 10^{-12}$ |
| 9 | 0.094 | $3{,}4035 \times 10^{-14}$ | $2{,}3592 \times 10^{-14}$ | $2{,}4313 \times 10^{-14}$ | $2{,}4619 \times 10^{-14}$ |
| 10 | 0.110 | $1{,}7541 \times 10^{-14}$ | $1{,}8207 \times 10^{-14}$ | $1{,}9206 \times 10^{-14}$ | $1{,}3322 \times 10^{-14}$ |

Cuadro 8.7: *Datos correspondientes al problema (8.9) utilizando los métodos* $FE[2]k$, $\widetilde{FI}[2]k$ *y* $FI[3]k$ *para diferentes valores de* $k$.

### 8.1.6. Comparación de métodos explícitos e implícitos

Consideramos el problema de segundo orden dado por el oscilador cúbico (véase [**?**], [104])

$$y'' = f(t, y) = -y^3 \tag{8.10}$$

donde tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \\ t_N = 20 \end{cases} \tag{8.11}$$

Utilizaremos el mismo número de pasos con todos los métodos, $N = 500$, con lo que el tamaño del paso es

$$h = \frac{t_N - t_0}{N} = \frac{20}{500} = \frac{1}{25} = 0,04\,.$$

La solución exacta del problema es la función elíptica de Jacobi [1], que en la nomenclatura del programa Mathematica se escribe

$$y(t) = JacobiCN[t, 0'5]\,,$$

y que usaremos para calcular los valores de arranque del método y para obtener los errores absolutos que se cometen con cada método. Tomaremos un número de pasos de los métodos igual a $k = 6$.

Hemos utilizado el programa *Mathematica 8.0* para realizar todos los cálculos y comparar cada uno de los errores, y determinar el tiempo de ejecución en cada caso.

A continuación se muestra la tabla correspondiente al ejemplo realizado, donde se comparan los métodos explícitos e implícitos. Se muestra el máximo de los valores absolutos de los errores para la solución y la derivada en los nodos de integración. Aparecen también el número de pasos utilizado, que es el mismo para todos los métodos, y el tiempo de computación correspondiente, CPU (s.), proporcionado por el comando `Timing`, medido en segundos.

| Método | $\max_{0\leq i\leq N} \lvert y(t_i) - y_i \rvert$ | $\max_{0\leq i\leq N} \lvert y'(t_i) - y'_i \rvert$ | $N$ | $CPU(s.)$ |
|---|---|---|---|---|
| $FE[1]6$ | $2,89512677 * 10^{-7}$ | $5,14897612 * 10^{-7}$ | 500 | $0,156$ |
| $FE[2]6$ | $1,26901056 * 10^{-8}$ | $1,55337218 * 10^{-8}$ | 500 | $0,172$ |
| $FI[1]6$ | $2,75254987 * 10^{-7}$ | $4,96242467 * 10^{-7}$ | 500 | $0,313$ |
| $\widetilde{FI}[1]6$ | $2,75916043 * 10^{-7}$ | $4,97039783 * 10^{-7}$ | 500 | $0,172$ |
| $FI[2]6$ | $4,47301290 * 10^{-9}$ | $5,00946772 * 10^{-9}$ | 500 | $0,329$ |
| $\widetilde{FI}[2]6$ | $3,86499909 * 10^{-9}$ | $4,46424816 * 10^{-9}$ | 500 | $0,172$ |
| $FI[3]6$ | $4,74876399 * 10^{-9}$ | $5,27890425 * 10^{-9}$ | 500 | $0,313$ |
| $\widetilde{FI}[3]6$ | $3,86499909 * 10^{-9}$ | $4,46424816 * 10^{-9}$ | 500 | $0,172$ |

Cuadro 8.8: Datos correspondientes al problema (8.11) utilizando los métodos de Falkner en modo P-C.

Observamos que los métodos explícitos y el primer método implícito (en las implementaciones $FI[1]6$ y $\widetilde{FI}[1]6$) proporcionan los peores resultados en cuanto al error cometido. El segundo y tercer métodos implícitos generan los menores errores, si bien las formulaciones $\widetilde{FI}[2]6$ y $\widetilde{FI}[3]6$ son las que menos tiempo de computación requieren. En realidad, si no se considera la última evaluación de la función en el método $FI[3]6$ resulta que el método $\widetilde{FI}[3]6$ es el mismo que el método $\widetilde{FI}[2]6$, y así se observa en las líneas correspondientes de la tabla que los errores son exactamente los mismos.

Hacemos notar que también los tiempos de computación son muy parecidos. Salvo en el primer método explícito, que es el más simple, en los demás métodos que utilizan una evaluación por paso el tiempo de computación es exactamente el mismo. Y para los métodos implícitos en que hay dos evaluaciones de la función por paso también los tiempos son muy parecidos.

Con ayuda del programa *Mathematica 8.0* hemos realizado las representaciones gráficas de los errores correspondientes, para cada método utilizado. En las páginas siguientes aparecen estas gráficas.

**Método P' PE**

En la gráfica 8.6 se representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la solución $y(t)$ con el método P' PE .

La gráfica 8.7 muestra el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la derivada $y'(t)$ con el método P' PE .

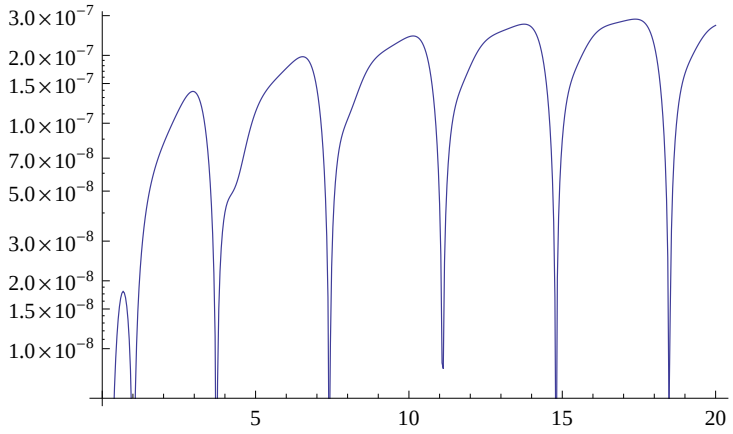



Figura 8.6: Errores en la solución del problema (8.11) obtenida con el método P' PE

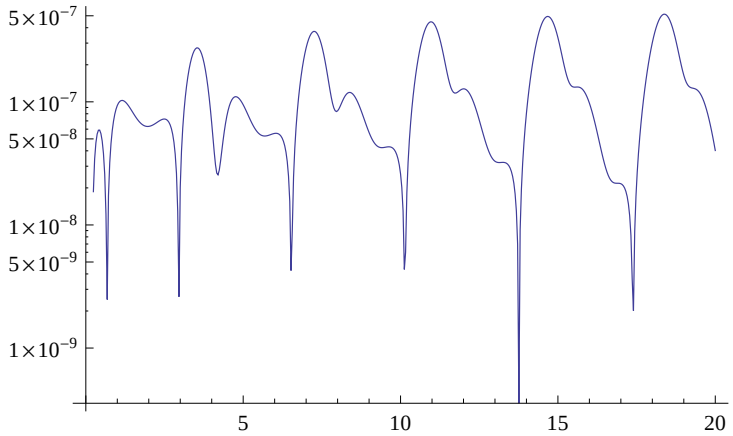



Figura 8.7: Errores en la derivada del problema (8.11) obtenida con el método P' PE

**Método PEC'**

La gráfica 8.8 muestra el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la solución $y(t)$ con el método PEC'.

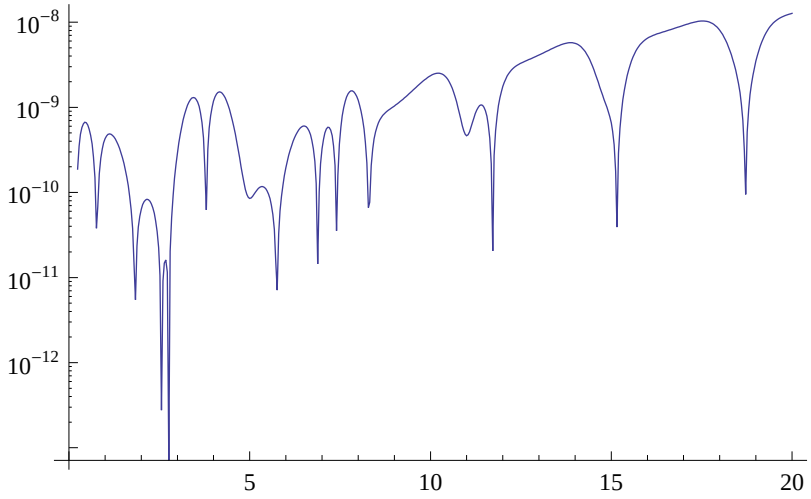



Figura 8.8: Errores en la solución del problema (8.11) obtenida con el método PEC'

La gráfica 8.9 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y'(t)$ con el método PEC'.

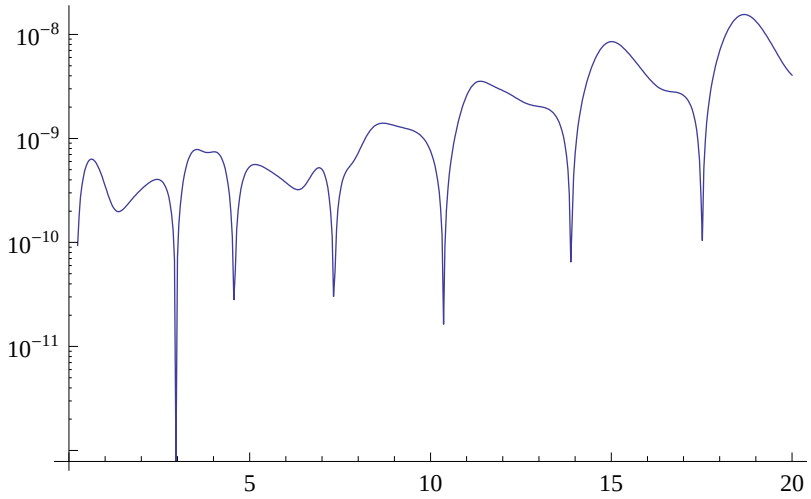



Figura 8.9: Errores en la derivada del problema (8.11) obtenida con el método PEC'

**Método P ' PECE**

La gráfica 8.10 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la solución $y(t)$ con el método P ' PECE .

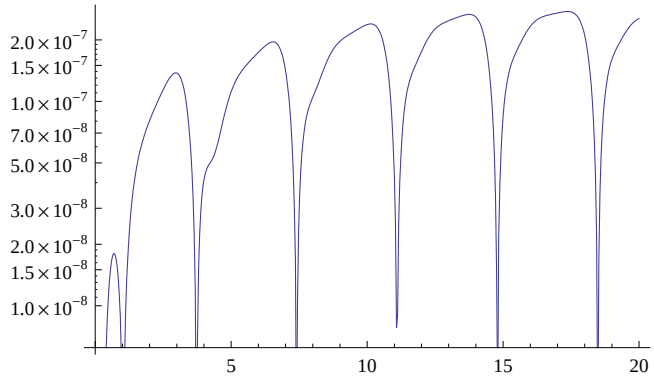



Figura 8.10: Errores en la solución del problema (8.11) obtenida con el método P ' PECE

La gráfica 8.11 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y'(t)$ con el método P ' PECE .

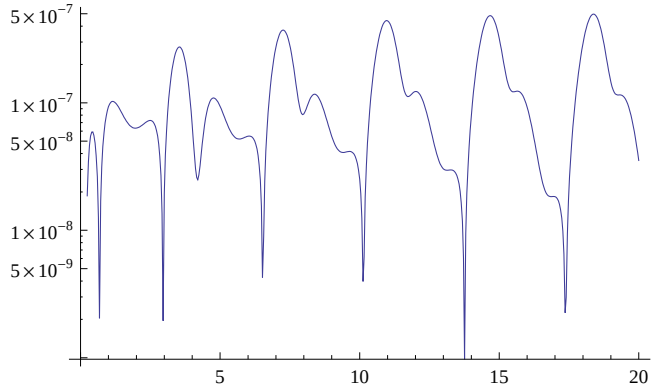



Figura 8.11: Errores en la derivada del problema (8.11) obtenida con el método P ' PECE

**Método PEC'CE**

La gráfica 8.12 muestra el error en escala logarítmica que se comete al calcular la solución $y(t)$ con el método PEC'CE .

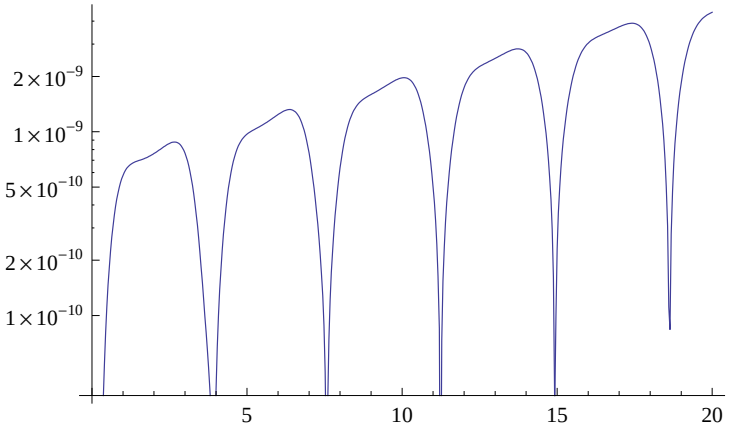



Figura 8.12: Errores en la solución del problema (8.11) obtenida con el método PEC'CE

La gráfica 8.13 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y'(t)$ con el método PEC'CE .

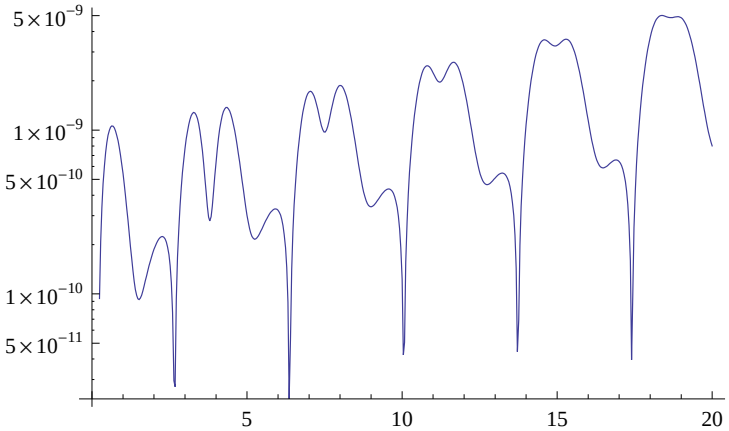



Figura 8.13: Errores en la derivada del problema (8.11) obtenida con el método PEC'CE

**Método PECEC'**

La gráfica 8.14 muestra el error en escala logarítmica que se comete al calcular la solución $y(t)$ con el método PECEC'.

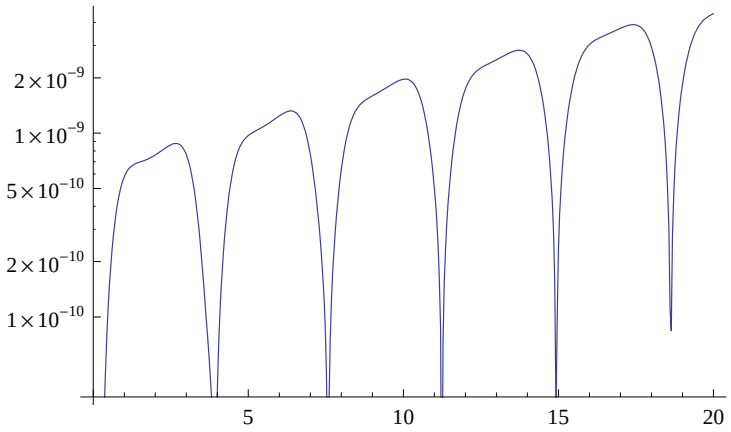



Figura 8.14: Errores en la solución del problema (8.11) obtenida con el método PECEC'

La gráfica 8.15 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y(t)$'con el método PECEC'.

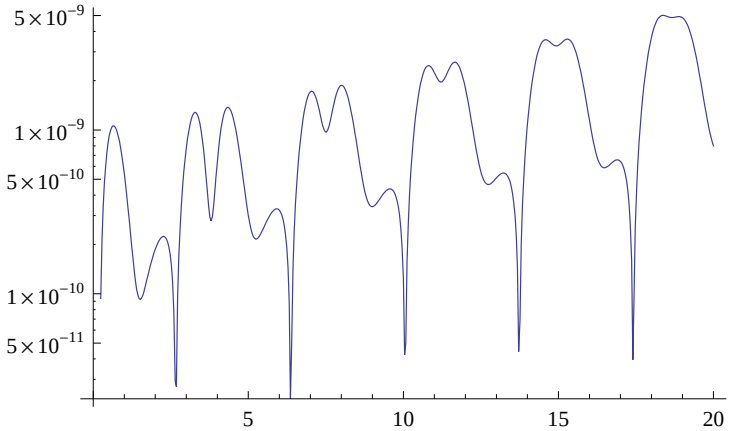



Figura 8.15: Errores en la derivada del problema (8.11) obtenida con el método PECEC'

## 8.2. Ejemplos de aplicación de los métodos de Falkner para la ecuación $y'' = f(t, y')$ en modo P-C

### 8.2.1. Ejemplo lineal

Consideramos el problema de segundo orden dado por la ecuación

$$y'' = f(t, y') = -y' - \cos t \tag{8.12}$$

donde tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \\ t_N = 100, \end{cases} \tag{8.13}$$

La solución exacta en este caso es

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-3e^{-t} - \operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 2\right)$$

y la usaremos para obtener los valores de arranque y para hallar los errores cometidos.

En primer lugar vamos a mostrar cómo la aplicación de cualquiera de las dos formulaciones de los métodos explícitos produce resultados similares, lo que está en consonancia con los resultados teóricos sobre los errores obtenidos anteriormente. En el Cuadro 8.9 observamos cómo para diferentes números de pasos los métodos $FE'[1]8$ y $FE'[2]8$ producen errores similares, siendo también muy parecidos los tiempos de computación.

A continuación tomaremos el mismo número de pasos para todos los métodos, $N = 3000$, con lo que el tamaño del paso, $h$, resulta ser

$$h = (t_N - t_0)/N = 100/3000 = 1/30 = 0,0333\,.$$

Tomamos un número de pasos de los métodos igual a $k = 6$ (de manera que en el código correspondiente es $n = k - 1 = 5$).

| N | h | MaxErr $y$ | MaxErr $y'$ | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| | $FE'[1]8$: | | | |
| 3000 | 0,033 | $5{,}5181 \times 10^{103}$ | $7{,}6058 \times 10^{105}$ | 0,688 |
| 3500 | 0,029 | $6{,}5036 \times 10^{52}$ | $9{,}8896 \times 10^{54}$ | 0,812 |
| 4000 | 0,025 | $1{,}2496 \times 10^{-6}$ | $2{,}0763 \times 10^{-4}$ | 0,922 |
| 4500 | 0,022 | $2{,}6356 \times 10^{-13}$ | $9{,}2259 \times 10^{-14}$ | 1,047 |
| 5000 | 0,020 | $4{,}3765 \times 10^{-13}$ | $1{,}0608 \times 10^{-13}$ | 1,156 |
| | $FE'[2]8$: | | | |
| 3000 | 0,033 | $1{,}1113 \times 10^{104}$ | $7{,}6058 \times 10^{105}$ | 0,703 |
| 3500 | 0,029 | $1{,}2757 \times 10^{53}$ | $9{,}8896 \times 10^{54}$ | 0,828 |
| 4000 | 0,025 | $2{,}4011 \times 10^{-6}$ | $2{,}0763 \times 10^{-4}$ | 0,953 |
| 4500 | 0,022 | $2{,}6179 \times 10^{-13}$ | $9{,}2259 \times 10^{-14}$ | 1,094 |
| 5000 | 0,020 | $4{,}3720 \times 10^{-13}$ | $1{,}0608 \times 10^{-13}$ | 1,218 |

Cuadro 8.9: *Datos correspondientes al problema (8.12) utilizando los métodos* $FE'[1]8$ *y* $FE'[2]8$ *para diferentes pasos.*

Hemos utilizado el programa *Mathematica 8.0* para realizar los cálculos y para determinar los errores que se producen en cada caso.

En el Cuadro 8.10 correspondiente al ejemplo realizado se muestran los datos obtenidos tanto para los métodos explícitos como implícitos. Aparecen los máximos de los valores absolutos de los errores de la solución y de la derivada en los nodos de integración. Se indica también el número de pasos utilizado, y el tiempo de ejecución correspondiente, $CPU(s.)$, en segundos.

Hemos utilizado el programa *Mathematica 8.0* para realizar las representaciones gráficas de los errores correspondientes para cada método utilizado. En las páginas que siguen se muestran estos errores.

| Método | $\max_{0\leq i\leq N} \lvert y(t_i) - y_i \rvert$ | $\max_{0\leq i\leq N} \lvert y'(t_i) - y'_i \rvert$ | $N$ | $CPU(s.)$ |
|---|---|---|---|---|
| $FE'[1]6$ | $1,03959907 * 10^{-9}$ | $3,25774519 * 10^{-10}$ | 3000 | $1,109$ |
| $FE'[2]6$ | $1,03081787 * 10^{-9}$ | $3,25774518 * 10^{-10}$ | 3000 | $1,141$ |
| $FI'[1]6$ | $2,90500957 * 10^{-12}$ | $3,43408635 * 10^{-12}$ | 3000 | $2,109$ |
| $\widetilde{FI}'[1]6$ | $2,59361421 * 10^{-11}$ | $1,08213438 * 10^{-11}$ | 3000 | $1,297$ |
| $FI'[2]6$ | $1,06203935 * 10^{-11}$ | $3,43408619 * 10^{-12}$ | 3000 | $2,172$ |
| $\widetilde{FI}'[2]6$ | $3,44835271 * 10^{-11}$ | $1,08213438 * 10^{-11}$ | 3000 | $1,297$ |
| $FI'[3]6$ | $1,052447018 * 10^{-11}$ | $3,43408635 * 10^{-12}$ | 3000 | $2,125$ |
| $\widetilde{FI}'[3]6$ | $3,44835271 * 10^{-11}$ | $1,08213438 * 10^{-11}$ | 3000 | $1,265$ |

Cuadro 8.10: Datos correspondientes al problema (8.13) utilizando los métodos de Falkner en modo P-C.

Observamos que los métodos explícitos tienen un comportamiento muy similar, como corresponde a los resultados teóricos obtenidos anteriormente.

En cuanto a los métodos implícitos también tienen un comportamiento parecido si bien debido a la longitud del intervalo de integración, en este caso es el primer método implícito el que mejor se comporta. Los tiempos de computación son parecidos, siendo los métodos donde no se realiza la última evaluación de la función los que menos tiempo de computación requieren.

### Métodos de Falkner explícitos

#### Método PP'E

La gráfica 8.16 representa el error en escala logarítmica que se comete al hallar la función $y(t)$ con el método PP'E.

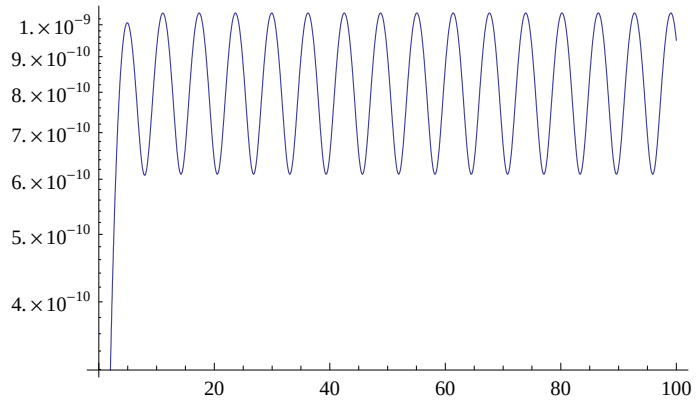



Figura 8.16: Errores en la solución con el método PP'E

La gráfica 8.17 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y'(t)$ con el método PP'E.

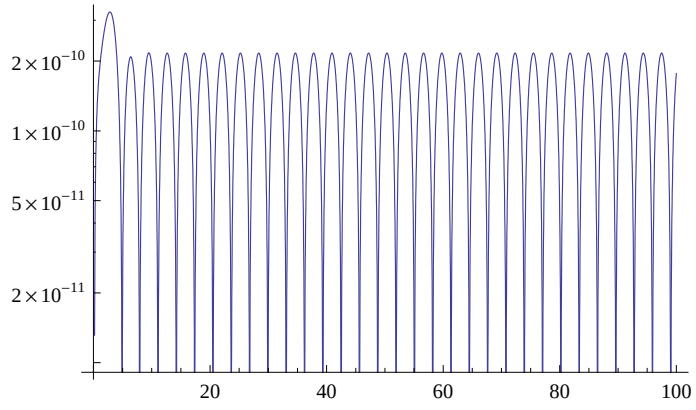



Figura 8.17: Errores en la derivada con el método PP'E

**Método P ' EC**

La gráfica 8.18 muestra el error en escala logarítmica que se comete al calcular la solución $y(t)$ con el método P ' EC .

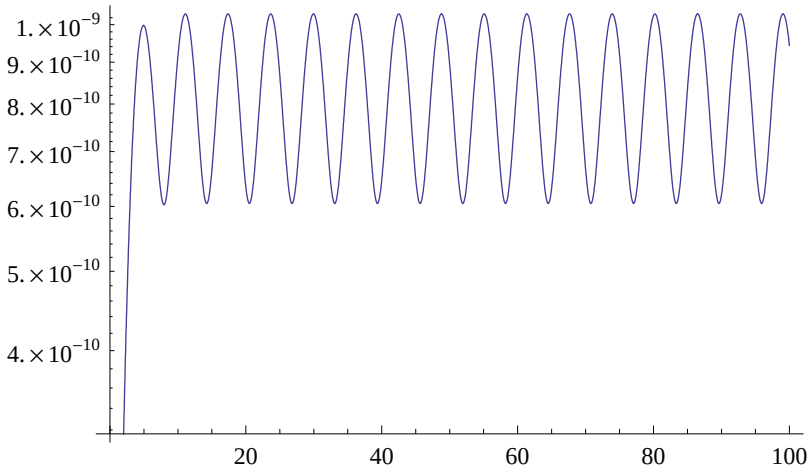



Figura 8.18: Errores en la solución con el método P ' EC

En la gráfica 8.19 se representa el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la derivada $y'(t)$ con el método P ' EC .

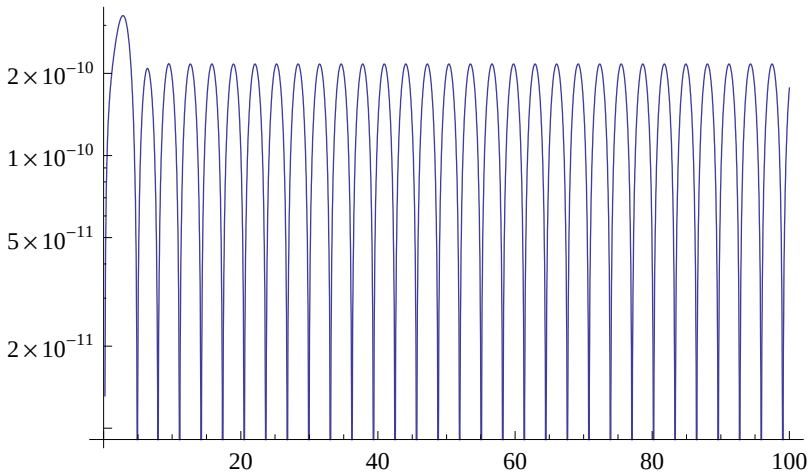



Figura 8.19: Errores en la derivada con el método P ' EC

### Métodos de Falkner implícitos

#### Método PP'EC'E

La gráfica 8.20 representa el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la solución $y(t)$ con el método PP'EC'E.

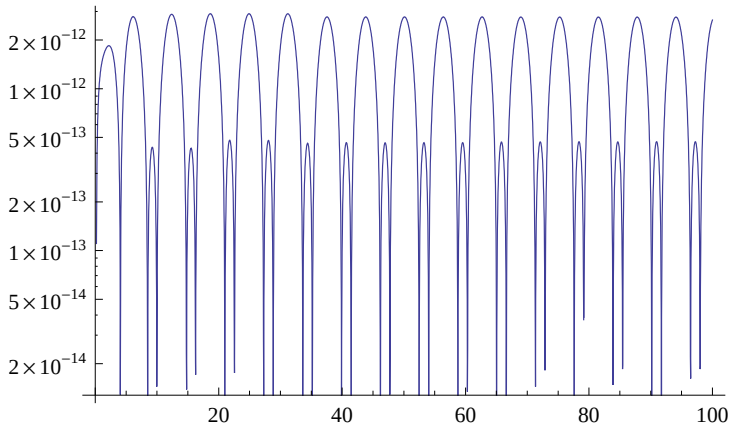



Figura 8.20: Errores en la solución con el método PP'EC'E

La gráfica 8.21 muestra el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la derivada $y'(t)$ con el método P'PECE.

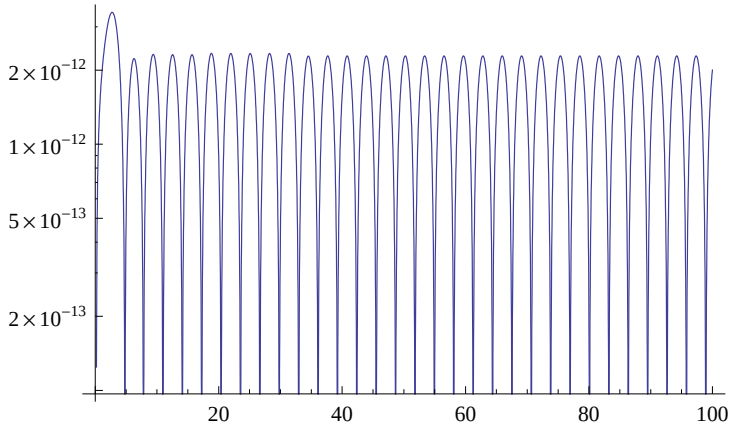



Figura 8.21: Errores en la derivada con el método PP'EC'E

**Método P ' ECC ' E**

La gráfica 8.22 representa el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la función $y(t)$ con el método P ' EC ' CE .

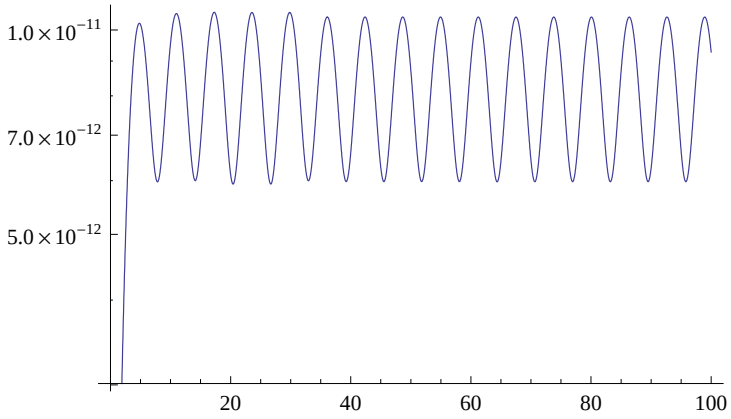



Figura 8.22: Errores en la solución con el método P ' EC ' CE

La gráfica 8.23 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y'(t)$ con el método PECEC ' .

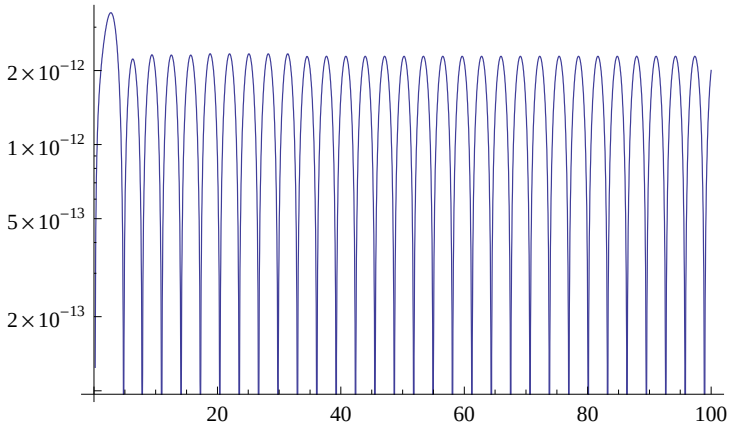



Figura 8.23: Errores en la derivada con el método P ' EC ' CE

**Método P ' EC ' EC**

La gráfica 8.24 representa el error en escala logarítmica que se comete al calcular la función $y(t)$ con el método P ' EC ' EC .

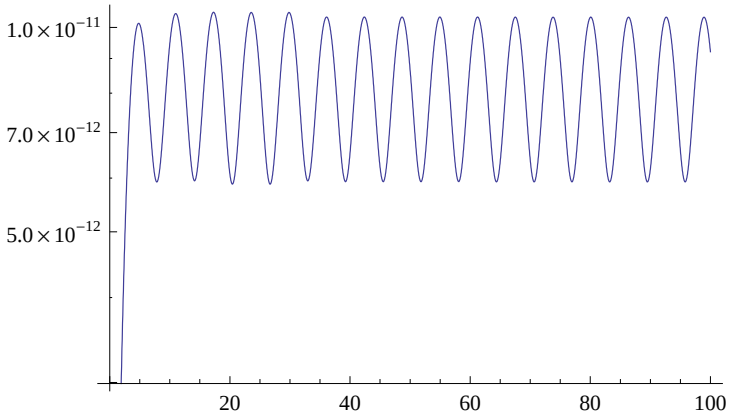



Figura 8.24: Errores en la solución con el método P ' EC ' EC

La gráfica 8.25 muestra el error en escala logarítmica que se comete al calcular la derivada $y'(t)$ con el método P ' EC ' EC .

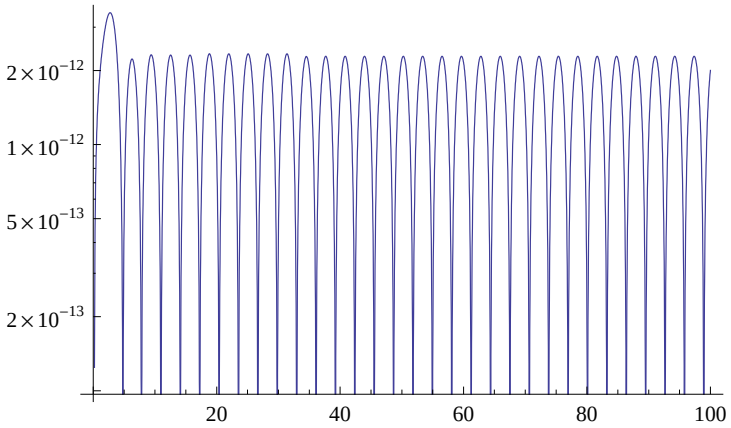



Figura 8.25: Errores en la derivada con el método P ' EC ' EC

### 8.2.2. Ejemplo para comparar los métodos $\widetilde{FI}'[i]k$ y $FI'[i]k$

Sea la ecuación diferencial de la función de error junto con las condiciones iniciales siguientes [2]

$$y'' = f(t, y') = -2ty' \,, \quad y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tag{8.14}$$

cuya solución exacta está dada por la función de error

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} \, dz \,.$$

En los ejemplos del apartado anterior hemos visto que en la utilización de los métodos implícitos, se podía prescindir de la evaluación final de la función, cuando ello era posible. Las regiones de estabilidad y periodicidad no cambian mucho, y se consigue un gran ahorro computacional, al realizar la mitad de las evaluaciones.

Y en el primer ejemplo de esta sección también hemos visto que los resultados según que se realizara la evaluación final de la función o no, no eran muy diferentes.

Sin embargo, y a pesar de ese primer ejemplo, en el caso de la ecuación $y'' = f(t, y')$ la situación es diferente porque las regiones de estabilidad sí que difieren bastante según se realice o no la última evaluación de la función. Aunque no hemos estudiado todas las regiones en el caso en que no se realice la última evaluación de la función, en la Figura 8.26 aparecen las dos regiones de periodicidad correspondientes a los métodos $\widetilde{FI}'[2]3$ y $FI'[2]3$, donde se observa que la primera de ellas es mucho menor que la otra, siendo los intervalos de periodicidad respectivamente $(-0{,}42998707990, 0{,}42998707990)$ y $(-1{,}17847173060, 1{,}17847173060)$.

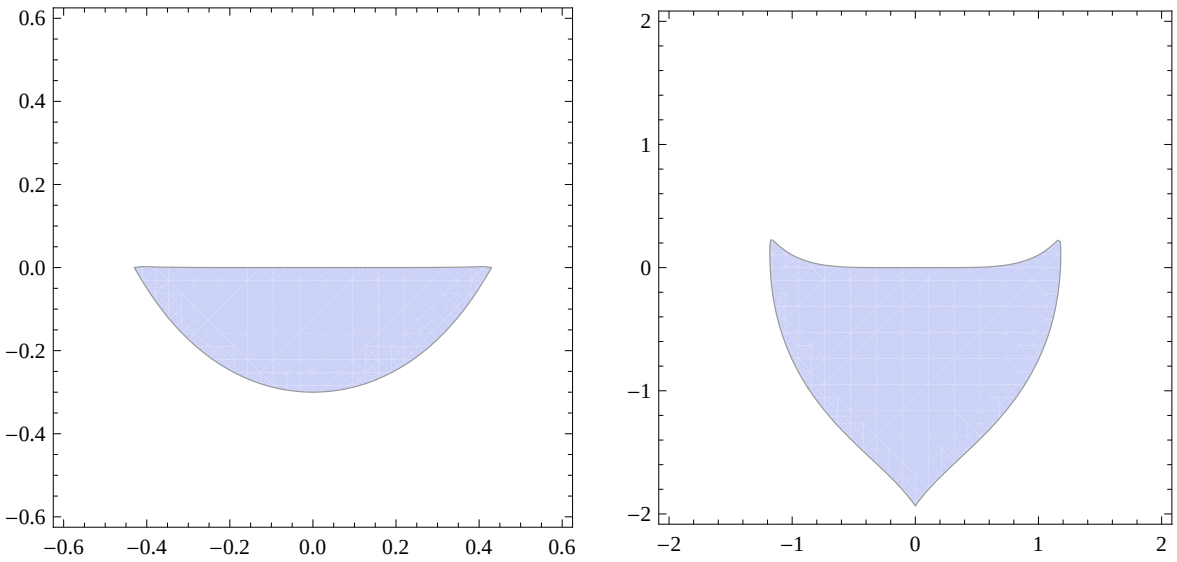



Figura 8.26: Regiones de periodicidad de los métodos $\widetilde{FI}'[2]3$ y $FI'[2]3$.

Esta situación se ve reflejada en los datos correspondientes al problema que nos ocupa, los cuales aparecen en el Cuadro 8.11, donde se observa que para el número más pequeño de pasos, el método $\widetilde{FI}'[2]3$ propaga los errores descontroladamente, mientras que con el método $FI'[2]3$ no ocurre este problema. Si la estabilidad no se ve comprometida los dos métodos se comportan de forma parecida, si bien el coste computacional en el caso del método $FI'[2]3$ aumenta notablemente.

Esto mismo se ve de manera más clara cuando se utiliza un método con mayor orden. En el Cuadro 8.12 se observa que el método $\widetilde{FI}'[2]7$ produce errores inadmisibles, mientras que el método $FI'[2]7$ proporciona buenos resultados. Para obtener errores aceptables con el método $\widetilde{FI}'[2]7$ se necesitaría un número de pasos mucho mayor (con $N = 12000$ se obtiene un error igual a $9{,}4438 \times 10^{-2}$ y para valores mayores de $N$ los errores disminuyen notablemente, resultando que para $N = 14000$ el error es $1{,}4210 \times 10^{-14}$).

| N | h | MaxErr $y(t)$ | MaxErr $y'(t)$ | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| | $\widetilde{FI}'[2]3$: | | | |
| 200 | 0,0500 | $3{,}8999 \times 10^{11}$ | $2{,}0053 \times 10^{12}$ | 0,047 |
| 400 | 0,0250 | $4{,}9406 \times 10^{-7}$ | $7{,}1967 \times 10^{-7}$ | 0,047 |
| 600 | 0,0166 | $9{,}8598 \times 10^{-8}$ | $1{,}4196 \times 10^{-7}$ | 0,078 |
| 800 | 0,0125 | $3{,}1376 \times 10^{-8}$ | $4{,}4890 \times 10^{-8}$ | 0,109 |
| 1000 | 0,0100 | $1{,}2899 \times 10^{-8}$ | $1{,}8379 \times 10^{-8}$ | 0,125 |
| | $FI'[2]3$: | | | |
| 200 | 0,0500 | $3{,}9413 \times 10^{-6}$ | $4{,}9682 \times 10^{-6}$ | 0,032 |
| 400 | 0,0250 | $2{,}5034 \times 10^{-7}$ | $3{,}0292 \times 10^{-7}$ | 0,078 |
| 600 | 0,0166 | $4{,}9815 \times 10^{-8}$ | $5{,}9392 \times 10^{-8}$ | 0,093 |
| 800 | 0,0125 | $1{,}5826 \times 10^{-8}$ | $1{,}8725 \times 10^{-8}$ | 0,141 |
| 1000 | 0,0100 | $6{,}4991 \times 10^{-9}$ | $7{,}6540 \times 10^{-9}$ | 0,219 |

Cuadro 8.11: *Datos correspondientes al problema (8.14) utilizando los métodos* $\widetilde{FI}'[2]3$ *y* $FI'[2]3$ *para diferentes pasos.*

| N | h | MaxErr $y(t)$ | MaxErr $y'(t)$ | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| | $\widetilde{FI}'[2]7$: | | | |
| 200 | 0,0500 | $1{,}1392 \times 10^{95}$ | $1{,}3907 \times 10^{96}$ | 0,047 |
| 400 | 0,0250 | $3{,}8739 \times 10^{141}$ | $1{,}8516 \times 10^{143}$ | 0,125 |
| 600 | 0,0166 | $8{,}8404 \times 10^{173}$ | $1{,}0449 \times 10^{176}$ | 0,156 |
| 800 | 0,0125 | $2{,}0758 \times 10^{199}$ | $4{,}2278 \times 10^{201}$ | 0,219 |
| 1000 | 0,0100 | $2{,}6826 \times 10^{220}$ | $8{,}1737 \times 10^{222}$ | 0,265 |
| | $FI'[2]7$: | | | |
| 200 | 0,0500 | $1{,}5352 \times 10^{-9}$ | $2{,}6866 \times 10^{-9}$ | 0,063 |
| 400 | 0,0250 | $5{,}8253 \times 10^{-12}$ | $9{,}9105 \times 10^{-12}$ | 0,140 |
| 600 | 0,0166 | $2{,}2792 \times 10^{-13}$ | $3{,}7958 \times 10^{-13}$ | 0,203 |
| 800 | 0,0125 | $2{,}2426 \times 10^{-14}$ | $3{,}8857 \times 10^{-14}$ | 0,266 |
| 1000 | 0,0100 | $4{,}6629 \times 10^{-15}$ | $5{,}8841 \times 10^{-15}$ | 0,343 |

Cuadro 8.12: *Datos correspondientes al problema (8.14) utilizando los métodos* $\widetilde{FI}'[2]7$ *y* $FI'[2]7$ *para diferentes pasos.*

### 8.2.3. Ejemplo no lineal

Consideramos ahora el problema

$$y'' = f(t, y') = -t(y')^2\,, \quad y(4) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})\,, \quad y'(4) = \frac{1}{6} \tag{8.15}$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\,.$$

Hemos resuelto el problema en el intervalo $[4, 5]$ como en la referencia [51] utilizando el método $FI'[2]3$, para así comparar los resultados que aparecen en el referido artículo, correspondientes a un método de tres pasos y error global de orden $O(h^4)$ basado en una aproximación por B-splines. La Figura 8.27 reproduce dichos datos, mientras que en el Cuadro 8.13 mostramos los errores obtenidos con

el método $FI'[2]3$ para los tamaños de paso $h = 1/16, 1/32$. Es obvio que el método $FI'[2]3$ proporciona mejores resultados que el método en [51]. La utilización en este caso del método $\widetilde{FI}'[2]3$ también proporciona resultados parecidos en cuanto a los errores pero con un coste computacional menor. Y en cuanto a los métodos $FI'[3]3$ y $\widetilde{FI}'[3]3$ también se comportan de manera parecida a los anteriores.

| $x$ | $y(x) = \frac{1}{2}\ln(x-2)/(x+2)$ | $e_h(h=\frac{1}{16})$ | $e_h(h=\frac{1}{32})$ |
|---|---|---|---|
| 4.1250 | $-0.52930348D+00$ | $-0.352D-03$ | $-0.198D-04$ |
| 4.1875 | $-0.51988589D+00$ | $-0.336D-03$ | $-0.200D-04$ |
| 4.2500 | $-0.51082562D+00$ | $-0.344D-03$ | $-0.203D-04$ |
| 4.3125 | $-0.50210130D+00$ | $-0.345D-03$ | $-0.205D-04$ |
| 4.3750 | $-0.49369333D+00$ | $-0.347D-03$ | $-0.207D-04$ |
| 4.4375 | $-0.48558367D+00$ | $-0.349D-03$ | $-0.210D-04$ |
| 4.5000 | $-0.47775572D+00$ | $-0.351D-03$ | $-0.212D-04$ |
| 4.5625 | $-0.47019474D+00$ | $-0.353D-03$ | $-0.214D-04$ |
| 4.6250 | $-0.46288474D+00$ | $-0.355D-03$ | $-0.215D-04$ |
| 4.6875 | $-0.45581436D+00$ | $-0.356D-03$ | $-0.217D-04$ |
| 4.7500 | $-0.44897080D+00$ | $-0.359D-03$ | $-0.219D-04$ |
| 4.8125 | $-0.44234270D+00$ | $-0.356D-03$ | $-0.220D-04$ |
| 4.8750 | $-0.43591948D+00$ | $-0.371D-03$ | $-0.221D-04$ |

Figura 8.27: Datos del problema (8.15) en [51] con un método de 3 pasos y error global $O(h^4)$.

| t | h=1/16 | h=1/32 |
|---|---|---|
| 4,1250 | 0. | $4{,}9198645 \times 10^{-11}$ |
| 4,1875 | $3{,}9288506 \times 10^{-10}$ | $2{,}2207447 \times 10^{-10}$ |
| 4,2500 | $2{,}6762275 \times 10^{-9}$ | $4{,}8965765 \times 10^{-10}$ |
| 4,3125 | $6{,}4081798 \times 10^{-9}$ | $8{,}2902218 \times 10^{-10}$ |
| 4,3750 | $1{,}1249071 \times 10^{-8}$ | $1{,}2219871 \times 10^{-9}$ |
| 4,4375 | $1{,}6925750 \times 10^{-8}$ | $1{,}6541135 \times 10^{-9}$ |
| 4,5000 | $2{,}3220424 \times 10^{-8}$ | $2{,}1139263 \times 10^{-9}$ |
| 4,5625 | $2{,}9959241 \times 10^{-8}$ | $2{,}5923071 \times 10^{-9}$ |
| 4,6250 | $3{,}7003416 \times 10^{-8}$ | $3{,}0820174 \times 10^{-9}$ |
| 4,6875 | $4{,}4242232 \times 10^{-8}$ | $3{,}5773225 \times 10^{-9}$ |
| 4,7500 | $5{,}1587515 \times 10^{-8}$ | $4{,}0736949 \times 10^{-9}$ |
| 4,8125 | $5{,}8969234 \times 10^{-8}$ | $4{,}5675762 \times 10^{-9}$ |
| 4,4875 | $6{,}6331997 \times 10^{-8}$ | $5{,}0561893 \times 10^{-9}$ |

Cuadro 8.13: *Máximos errores absolutos en diferentes nodos correspondientes al problema (8.15) utilizando el método $FI'[2]3$ para diferentes tamaños de pasos.*

### 8.2.4. Otro ejemplo no lineal

Un problema parecido al anterior, y que ha aparecido en numerosos artículos relacionados con la resolución directa de problemas de segundo orden (véase [5], [6], [9], [10], [11], [90]), es el dado por

$$y'' = f(t, y') = t(y')^2\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = \frac{1}{2} \tag{8.16}$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\,.$$

Hemos resuelto el problema en el intervalo $[0, 1]$, como se ha hecho en todas las referencias anteriores, utilizando el método $FI'[2]2$, para así comparar los resultados que aparecen en [5]. En esta referencia se recogen los mejores resultados de todos los artículos referidos a este problema, los cuales corresponden a un método

multipaso híbrido de orden 4 formado por cuatro fórmulas híbridas que se utilizan en bloque, denotado por ASSLMM. La Figura 8.28 reproduce dichos resultados en la última columna, mientras que en las dos columnas anteriores aparecen los datos correspondientes a los métodos de las referencias [9] y [10, 11] respectivamente.

Por otro lado en el Cuadro 8.14 mostramos los errores obtenidos con el método $FI'[2]3$ para los tamaños de paso $h = 1/320 = 0{,}003125$. Es obvio que el método $FI'[2]3$ proporciona mejores resultados que los otros métodos, siendo además el número de evaluaciones de la función por paso menor, pues el método $FI'[2]3$ realiza dos evaluaciones por paso mientras que el método ASSLMM realiza cinco evaluaciones por paso.

| x | Awoyemi [7]<br>Order $p = 6$<br>$h = 0.003125$ | Awoyemi [8-9]<br>Order $p = 8$<br>$h = 0.003125$ | ASSLMM<br>Order $p = 4$<br>$h = 0.003125$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | $0.26075 \times 10^{-9}$ | $0.66391 \times 10^{-13}$ | $1.60316 \times 10^{-13}$ |
| 0.2 | $1.98167 \times 10^{-9}$ | $0.20012 \times 10^{-9}$ | $4.296563 \times 10^{-13}$ |
| 0.3 | $6.50741 \times 10^{-9}$ | $1.72007 \times 10^{-9}$ | $2.575717 \times 10^{-14}$ |
| 0.4 | $15.5924 \times 10^{-9}$ | $5.89464 \times 10^{-9}$ | $1.424638 \times 10^{-12}$ |
| 0.5 | $31.5045 \times 10^{-9}$ | $14.4347 \times 10^{-9}$ | $3.539835 \times 10^{-12}$ |
| 0.6 | $56.3746 \times 10^{-9}$ | $41.8664 \times 10^{-9}$ | $6.332490 \times 10^{-12}$ |
| 0.7 | $96.1640 \times 10^{-9}$ | $63.1096 \times 10^{-9}$ | $9.675149 \times 10^{-12}$ |
| 0.8 | $156.868 \times 10^{-9}$ | $91.1317 \times 10^{-9}$ | $1.475506 \times 10^{-11}$ |
| 0.9 | $248.698 \times 10^{-9}$ | $149.242 \times 10^{-9}$ | $2.297873 \times 10^{-11}$ |
| 1.0 | $387.984 \times 10^{-9}$ | $237.189 \times 10^{-9}$ | $3.483280 \times 10^{-11}$ |

Figura 8.28: Datos del problema (8.16) en [6] con un método multipaso híbrido en bloque de orden 4, y los métodos de orden 6 y 8 en [9] y [10, 11].

| t | h=1/160=0.00625 | h=1/320=0.003125 |
|---|---|---|
| 0,1 | $5{,}5511151 \times 10^{-15}$ | $6{,}6613381 \times 10^{-16}$ |
| 0,2 | $5{,}9952043 \times 10^{-14}$ | $5{,}1070259 \times 10^{-15}$ |
| 0,3 | $2{,}2182256 \times 10^{-13}$ | $1{,}5765167 \times 10^{-14}$ |
| 0,4 | $5{,}3224092 \times 10^{-13}$ | $3{,}6637360 \times 10^{-14}$ |
| 0,5 | $9{,}9542596 \times 10^{-13}$ | $6{,}7945649 \times 10^{-14}$ |
| 0,6 | $1{,}5392132 \times 10^{-12}$ | $1{,}0347279 \times 10^{-13}$ |
| 0,7 | $1{,}9213520 \times 10^{-12}$ | $1{,}2856383 \times 10^{-13}$ |
| 0,8 | $1{,}5487611 \times 10^{-12}$ | $1{,}0635937 \times 10^{-13}$ |
| 0,9 | $9{,}3836050 \times 10^{-13}$ | $5{,}0848215 \times 10^{-14}$ |
| 1,0 | $8{,}6033403 \times 10^{-12}$ | $5{,}3845817 \times 10^{-13}$ |

Cuadro 8.14: *Máximos errores absolutos en diferentes nodos correspondientes al problema (8.16) utilizando el método* $FI'[2]3$ *para diferentes tamaños de pasos.*

### 8.2.5. Sistema de ecuaciones

Como último ejemplo de esta sección consideraremos el sistema dado por (véase [81])

$$\begin{cases} y_1''(t) = -y_2'(t) \\ y_2''(t) = -y_1'(t) \\ y_1(0) = 0\,, \quad y_1'(0) = \dfrac{1}{1-e^{-1}}\,, \quad y_2(0) = 1\,, \quad y_2'(0) = \dfrac{1}{1-e^{-1}}\,, \end{cases} \tag{8.17}$$

cuya solución exacta es

$$y_1(t) = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}\,, \quad y_2(t) = \frac{2-e^{-t}-e^{-1}}{1-e^{-1}}\,.$$

Hemos integrado este problema en el intervalo $[0, 10]$ como en [81], utilizando el método $FI'[1]k$ para valores de $k = 2, \ldots, 12$ y para un número de pasos fijo para todos los métodos, $N = 100$. Puesto que el número de pasos es fijo, el número de evaluaciones de la función en todos los casos es de 400.

En la Figura 8.29 aparecen los datos correspondientes al método en [81], que es un método de dos pasos en bloque que utiliza como fórmulas principales las fórmulas de Falkner implícitas de dos pasos (para la solución y la derivada) además de otras dos fórmulas multipaso. El resultado es un método en bloque de orden 3, que se implementa en paso variable.

| TOL | Method | TS | FS | MAXE | AVERR | FCN | TIME |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^{-2}$ | 2P(A) | 23 | 7 | $1.42058e-004$ | $3.37359e-005$ | 185 | 296 |
| | 2P(B) | 9 | 0 | $1.47268e-003$ | $4.24039e-004$ | 69 | 247 |
| $10^{-4}$ | 2P(A) | 54 | 2 | $1.41231e-006$ | $2.21945e-007$ | 433 | 597 |
| | 2P(B) | 22 | 0 | $2.73310e-005$ | $9.95954e-006$ | 177 | 451 |
| $10^{-6}$ | 2P(A) | 201 | 1 | $6.04402e-009$ | $9.73203e-010$ | 1609 | 2252 |
| | 2P(B) | 63 | 0 | $9.51564e-007$ | $2.58666e-007$ | 503 | 980 |
| $10^{-8}$ | 2P(A) | 666 | 1 | $4.12406e-011$ | $8.11194e-012$ | 5329 | 7700 |
| | 2P(B) | 192 | 0 | $1.25592e-008$ | $2.60498e-009$ | 1537 | 2426 |

Figura 8.29: Datos para el problema 8.17 utilizando el método en paso variable en [81].

En el Cuadro 8.15 hemos incluido los resultados obtenidos con los métodos $FI'[1]k$, para $k = 2, \ldots, 12$. Observamos que los métodos $FI'[1]k$ proporcionan buenos resultados, y considerando los órdenes más altos, para un número reducido de evaluaciones de la función se obtienen resultados muy aceptables. Asimismo, vemos que los tiempos de computación son menores con los métodos $FI'[1]k$ que con el método en [81] (los tiempos en la última columna de la Figura 8.29 están expresados en milisegundos).

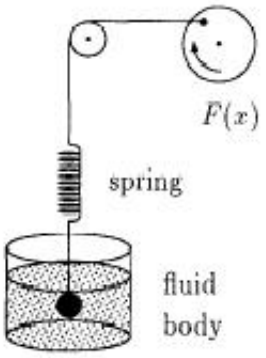
| N | Método | CPU(s.) | Err $y_1$ | Err $y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 100 | $FI'[1]2$ | 0,031 | $7{,}1738 \times 10^{-5}$ | $7{,}1738 \times 10^{-5}$ |
| | $FI'[1]3$ | 0,047 | $5{,}6635 \times 10^{-6}$ | $5{,}6635 \times 10^{-6}$ |
| | $FI'[1]4$ | 0,031 | $4{,}7451 \times 10^{-7}$ | $4{,}7451 \times 10^{-7}$ |
| | $FI'[1]5$ | 0,063 | $4{,}1040 \times 10^{-8}$ | $4{,}1040 \times 10^{-8}$ |
| | $FI'[1]6$ | 0,062 | $3{,}6200 \times 10^{-9}$ | $3{,}6200 \times 10^{-9}$ |
| | $FI'[1]7$ | 0,063 | $3{,}2357 \times 10^{-10}$ | $3{,}2357 \times 10^{-10}$ |
| | $FI'[1]8$ | 0,078 | $2{,}9196 \times 10^{-11}$ | $2{,}9195 \times 10^{-11}$ |
| | $FI'[1]9$ | 0,094 | $2{,}6518 \times 10^{-12}$ | $2{,}6516 \times 10^{-12}$ |
| | $FI'[1]10$ | 0,109 | $2{,}4202 \times 10^{-13}$ | $2{,}4247 \times 10^{-13}$ |
| | $FI'[1]11$ | 0,110 | $2{,}1760 \times 10^{-14}$ | $2{,}2204 \times 10^{-14}$ |
| | $FI'[1]12$ | 0,110 | $2{,}8865 \times 10^{-15}$ | $2{,}2204 \times 10^{-15}$ |

Cuadro 8.15: *Datos correspondientes al problema (8.17) utilizando el método* $\widetilde{FI'}[1]k$*, con* $k = 2, \ldots, 12$*, para un número de pasos fijo de* $N = 100$*.*

## 8.3. Ejemplos de aplicación de los métodos de Falkner para la ecuación $y'' = f(t, y, y')$ en modo P-C

### 8.3.1. Ejemplo lineal

En esta ocasión vamos a considerar una ecuación de segundo orden completa, en la forma normal $y'' = f(t, y, y')$. El experimento numérico surge de un problema de la mecánica. Los datos correspondientes al oscilador mecánico aparecen en la Figura 8.30, que está tomada de [33].




| parameter | value |
|---|---|
| mass $m$ | 1[kg] |
| damping coefficient $d$ | 1[kg/s] |
| spring constant $c$ | 10000.25[kg/s$^2$] |
| force $F(x)$ | cos(10 $x$)[N] |

Fig. 2. Mechanical oscillator.

Figura 8.30: Datos del problema 8.18.

Se tiene la ecuación de segundo orden dada por,

$$y'' = f(t, y, y') = -y' - 10000,25y + \cos 10t \tag{8.18}$$

junto con los siguientes datos:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \\ t_N = \pi \end{cases}$$

Tomaremos un número de pasos $N = 4000$, con lo que el tamaño del paso se obtiene como

$$h = \frac{t_N - t_0}{N} = \frac{\pi}{4000} = 0{,}000785398\,.$$

La solución exacta está dada por

$$\begin{aligned} y(t) \;=\; & \frac{e^{-t/2}}{313648160200}\,(1568079197\,\mathrm{sen}(100t) + 313616479400\cos(100t) \\ & +800e^{t/2}(40\,\mathrm{sen}(10t) + 39601\cos(10t))\big)\;. \end{aligned}$$

La solución presenta una gran oscilación, así que para buscar obtener una mayor precisión tomaremos un método con mayor orden, eligiendo $k = 9$.

El método que vamos a utilizar es el que corresponde al siguiente esquema: PP 'ECC 'E, y también consideraremos este mismo método sin la última evaluación de la función, es decir, el modo PP 'ECC ', o en la notación más cómoda $FIC[3]9$ y $\widetilde{FIC}[3]9$.

La manera en que se procede en cada paso es calculando el valor $y_{n+1}$ con el predictor, junto con el valor de $y'_{n+1}$ también con el predictor. Seguidamente se evalúa la función, y se termina calculando la $y'_{n+1}$ con el corrector, junto con la $y_{n+1}$ también con el corrector. Finalmente, se evalúa la función $f$ de nuevo para tener los valores más actualizados de cara al siguiente paso. Observamos que en el caso en que no se realice esta última evaluación los errores son similares, pero el tiempo de computación es notablemente menor.

A continuación se muestra la tabla correspondiente al ejemplo realizado, donde comparamos los dos métodos, con y sin evaluación de la $f$ final. Mostramos el máximo valor absoluto de los errores en los nodos de integración, tanto para la solución como para la derivada. Aparece también número de pasos utilizado así como el tiempo de ejecución $CPU(s.)$ medido en segundos.

| Método | $N$ | $\max\limits_{0\leq i\leq N} \lvert y(t_i) - y_i \rvert$ | $\max\limits_{0\leq i\leq N} \lvert y'(t_i) - y'_i \rvert$ | $CPU(s.)$ |
|---|---|---|---|---|
| $FIC[3]9$ | 4000 | $2,00517380 * 10^{-12}$ | $2,01477945 * 10^{-10}$ | $5,141$ |
| $\widetilde{FIC}[3]9$ | 4000 | $3,69804187 * 10^{-12}$ | $3,70835806 * 10^{-10}$ | $3,438$ |

Cuadro 8.16: Datos correspondientes al problema (8.3.1) utilizando los métodos $FIC[3]9$ y $\widetilde{FIC}[3]9$.

Hemos utilizado el programa *Mathematica 8.0* para realizar las representaciones gráficas de los errores correspondientes, para los dos métodos utilizados.

La gráfica 8.31 muestra el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la función $y(t)$ con el método $FIC[3]9$. La gráfica 8.32 representa el error en escala logarítmica que se comete al aproximar la derivada $y'(t)$ con el método $FIC[3]9$. Asimismo, en las figuras 8.33 y 8.34 aparecen los errores en escala logarítmica de la solución y de la derivada al resolver el problema con el método $\widetilde{FIC}[3]9$. Vemos que no hay diferencias significativas en la utilización de los dos métodos salvo en lo que se refiere al tiempo de computación, como era de esperar.

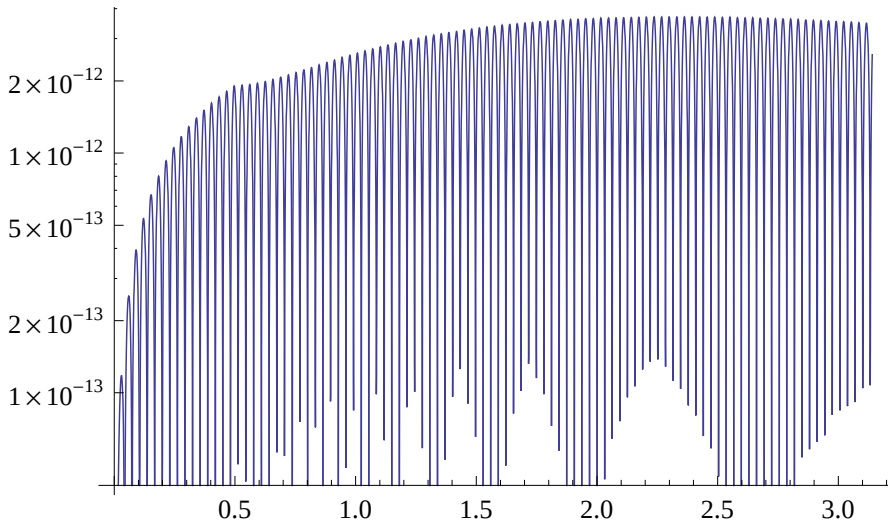



Figura 8.31: Errores en la solución del problema 8.3.1 con el método $FIC$[3]9

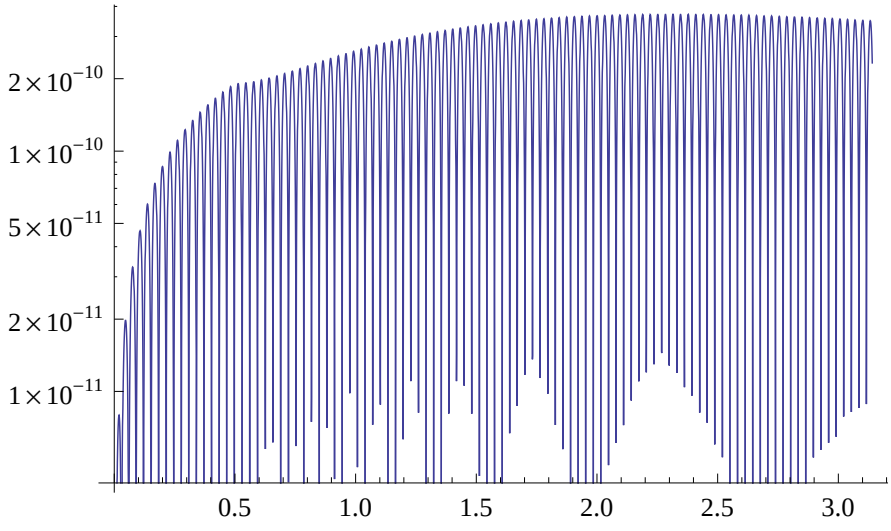



Figura 8.32: Errores en la derivada del problema 8.3.1 con el método $FIC$[3]9

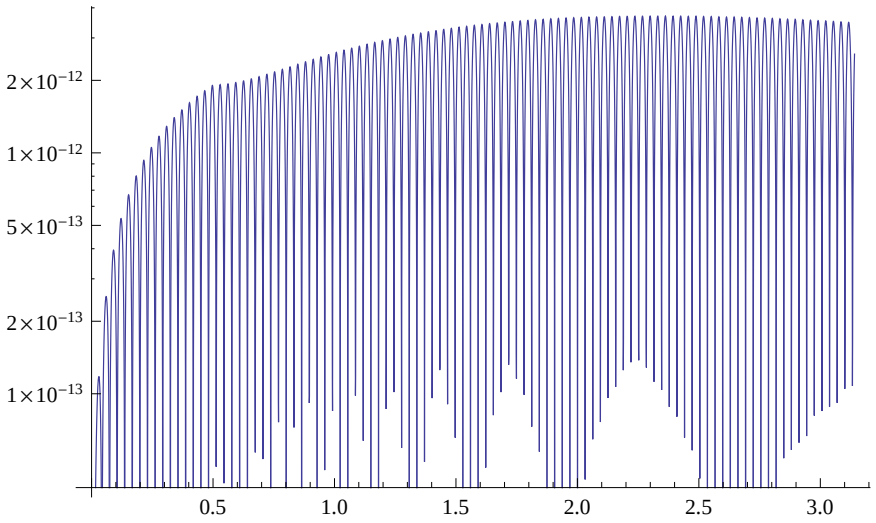



Figura 8.33: Errores en la solución del problema 8.3.1 con el método $\widetilde{FIC}[3]9$

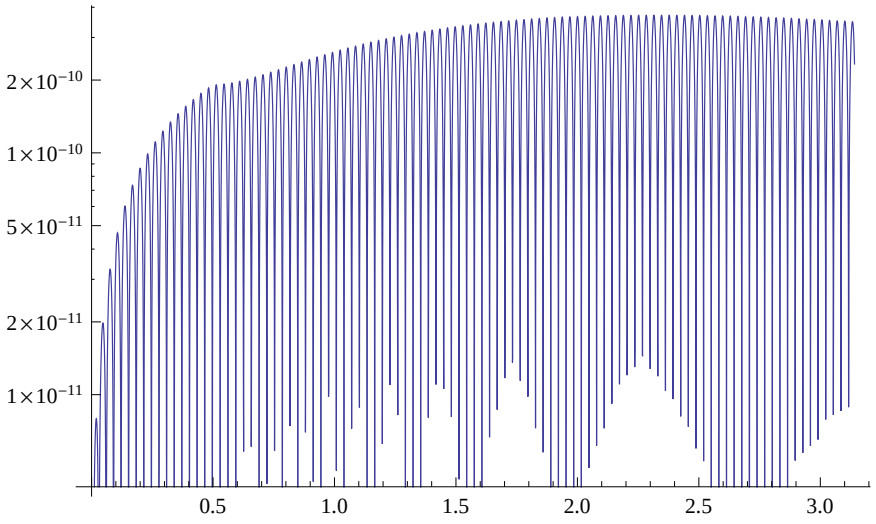



Figura 8.34: Errores en la derivada del problema 8.3.1 con el método $\widetilde{FIC}[3]9$

### 8.3.2. Ejemplo lineal

Consideramos ahora el problema que aparece en la referencia [89] y que consiste en

$$y'' = f(t, y, y') = 4y' - 4y + e^{2t}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0 \tag{8.19}$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{1}{2}\, t^2 e^{2t}\,.$$

Hemos resuelto el problema en el intervalo $[0, 1]$, como en [89], utilizando los métodos $FIC[3]4$ y $\widetilde{FIC}[3]4$ tomando diferentes números de pasos. Los resultados aparecen en el Cuadro 8.17

| N | h | MaxErr $y(t)$ | MaxErr $y'(t)$ | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| | $FIC[3]4$: | | | |
| 100 | 0,01000 | $4{,}4707 \times 10^{-8}$ | $1{,}9313 \times 10^{-7}$ | 0,031 |
| 200 | 0,00500 | $1{,}4747 \times 10^{-9}$ | $6{,}3152 \times 10^{-9}$ | 0,047 |
| 400 | 0,00250 | $4{,}7197 \times 10^{-11}$ | $2{,}0137 \times 10^{-10}$ | 0,109 |
| 800 | 0,00125 | $1{,}2856 \times 10^{-12}$ | $5{,}6914 \times 10^{-12}$ | 0,203 |
| | $\widetilde{FIC}[3]4$: | | | |
| 100 | 0,01000 | $1{,}3717 \times 10^{-7}$ | $5{,}9191 \times 10^{-7}$ | 0,015 |
| 200 | 0,00500 | $4{,}5374 \times 10^{-9}$ | $1{,}9412 \times 10^{-8}$ | 0,032 |
| 400 | 0,00250 | $1{,}4569 \times 10^{-10}$ | $6{,}2086 \times 10^{-10}$ | 0,078 |
| 800 | 0,00125 | $4{,}4182 \times 10^{-12}$ | $1{,}8982 \times 10^{-12}$ | 0,157 |

Cuadro 8.17: *Datos correspondientes al problema (8.19) utilizando los métodos* $FIC[3]4$ *y* $\widetilde{FIC}[3]4$ *para diferentes números de pasos.*

En la Figura 8.35 aparecen los datos obtenidos con los métodos en [89] que corresponden a un método de 5 pasos en bloque, utilizando diferentes formulaciones que proporcionan la solución en uno, dos o tres puntos respectivamente. La última

columna en esta tabla corresponde al tiempo de computación expresado en microsegundos. Se observa que los datos proporcionados por los métodos de Falkner son más eficaces en cuanto que consumen menos tiempo y proporcionan más exactitud.

Comparison between the I1P, 2PIB and 3PIB Methods for Solving Problem 2 of Second Order ODE when k=5

| h | MTD | STEPS | MAXE | TIME |
|---|---|---|---|---|
| $10^{-2}$ | I1P | 100 | 1.25292(-2) | 150265 |
| | S2PIB | 53 | 1.25811(-2) | 145487 |
| | P2PIB | 53 | 1.25811(-2) | 277465 |
| | S3PIB | 36 | 1.30459(-2) | 133296 |
| | P3PIB | 36 | 1.30459(-2) | 262630 |
| $10^{-3}$ | I1P | 1000 | 1.25675(-3) | 1355877 |
| | S2PIB | 503 | 1.25636(-3) | 1260639 |
| | P2PIB | 503 | 1.25636(-3) | 1114347 |
| | S3PIB | 336 | 1.25699(-3) | 1113396 |
| | P3PIB | 336 | 1.25699(-3) | 943335 |
| $10^{-4}$ | I1P | 10000 | 1.25712(-4) | 13542405 |
| | S2PIB | 5003 | 1.25707(-4) | 12542291 |
| | P2PIB | 5003 | 1.25707(-4) | 10785314 |
| | S3PIB | 3336 | 1.25709(-4) | 11036813 |
| | P3PIB | 3336 | 1.25709(-4) | 8779314 |
| $10^{-5}$ | I1P | 100000 | 1.25716(-5) | 135160215 |
| | S2PIB | 50003 | 1.25716(-5) | 125133470 |
| | P2PIB | 50003 | 1.25716(-5) | 104717695 |
| | S3PIB | 33336 | 1.25716(-5) | 110132382 |
| | P3PIB | 33336 | 1.25716(-5) | 87244821 |

Figura 8.35: Datos del problema (8.19) en [89] con un método de 5 pasos en bloque utilizando diferentes formulaciones.

### 8.3.3. Ejemplo singular

El siguiente ejemplo está tomado de las referencia [12] y [67] y consiste en el problema

$$y'' = f(t, y, y') = -\frac{4}{t^2}\, y - \frac{6}{t}\, y' \,, \quad y(1) = 1 \,, \quad y'(1) = 1 \tag{8.20}$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{5t^3 - 2}{3t^4}\,.$$

Se ha tomado un tamaño de paso como en las referencias citadas, $h = 1/320$, y se ha integrado en los mismos nodos que en estas referencias para establecer la comparación. En [12] se considera un método en bloque de orden 6 que utiliza fórmulas implícitas, y donde no es necesario el calcular los valores de arranque. En [67] se utiliza un método de orden 6 que utiliza fórmulas multipaso de 5 pasos, donde los valores de arranque se obtienen utilizando fórmulas multipaso de menor orden y haciendo uso del desarrollo de Taylor. Los datos obtenidos con estos dos métodos aparecen en la Figura 8.36 en diferentes nodos de integración (nótese que los nodos son en realidad de la forma $1 + x$ faltando sumar el 1 en la primera columna), mostrándose en la penúltima columna los errores con el método en [12], y en la última los errores con el método en [67].

Table 1: Comparison of errors arising from New Method (12) with Badmus and Yahaya (2009) for Problem 1

| x | Exact solution | Computed with new Method (12) | Absolute errors in method (Badmus and Yahaya, 2009) | Absolute errors in new Method (12) |
|---|---|---|---|---|
| $3.125\times10^{-3}$ | 1.003076526 | 1.003076422 | 3.83540E-05 | 1.1040E-07 |
| $6.250\times10^{-3}$ | 1.006057503 | 1.006057317 | 7.50040E-04 | 1.8600E-07 |
| $9.375\times10^{-3}$ | 1.008944995 | 1.008944031 | 1.05920E-04 | 9.6400E-07 |
| $1.250\times10^{-2}$ | 1.011741018 | 1.011737343 | 1.35476E-04 | 3.6750E-06 |
| $1.5625\times10^{-2}$ | 1.014447543 | 1.014441611 | 1.55567E-04 | 5.9320E-06 |
| $1.875\times10^{-2}$ | 1.017066494 | 1.017060278 | 1.86372E-04 | 6.2160E-06 |
| $2.1875\times10^{-2}$ | 1.019599755 | 1.019592312 | 1.96055E-04 | 7.4430E-06 |
| $2.500\times10^{-2}$ | 1.022049164 | 1.022041427 | 2.21045E-04 | 7.7370E-06 |
| $2.8125\times10^{-2}$ | 1.024416519 | 1.024412166 | 2.05628E-04 | 4.3530E-06 |
| $3.125\times10^{-2}$ | 1.026703578 | 1.026702417 | 2.77908E-04 | 1.1610E-06 |

Figura 8.36: Datos del problema (8.20) en [67] obtenidos con dos métodos implícitos de orden 6. (en la primera columna falta sumar 1 a cada valor de $x$ para obtener los nodos de integración)

Hemos resuelto el problema anterior con el método $FIC[3]5$, que es también de 5 pasos y orden 6. Los datos aparecen en el Cuadro 8.18. Los valores de arranque se han tomado haciendo uso de la solución exacta, y anteriores al punto inicial $t_0 = 1$. Resulta evidente que el método de Falkner proporciona errores más pequeños, y además la formulación en modo P-C no requiere de la resolución de un sistema algebraico en cada paso, como ocurre en los otros métodos.

| t | MaxErr |
|---|---|
| $1 + 3{,}1250 \times 10^{-3}$ | $2{,}2204460492 \times 10^{-16}$ |
| $1 + 6{,}2500 \times 10^{-3}$ | $2{,}4424906541 \times 10^{-15}$ |
| $1 + 9{,}3750 \times 10^{-3}$ | $5{,}9952043329 \times 10^{-15}$ |
| $1 + 1{,}2500 \times 10^{-2}$ | $1{,}2212453270 \times 10^{-14}$ |
| $1 + 1{,}5625 \times 10^{-2}$ | $1{,}9095836023 \times 10^{-14}$ |
| $1 + 1{,}8750 \times 10^{-2}$ | $2{,}7977620220 \times 10^{-14}$ |
| $1 + 2{,}1875 \times 10^{-2}$ | $3{,}7747582837 \times 10^{-14}$ |
| $1 + 2{,}5000 \times 10^{-2}$ | $4{,}9071857688 \times 10^{-14}$ |
| $1 + 2{,}8125 \times 10^{-3}$ | $6{,}1728400169 \times 10^{-14}$ |
| $1 + 3{,}1250 \times 10^{-2}$ | $7{,}5495165674 \times 10^{-14}$ |

Cuadro 8.18: *Máximos errores absolutos en diferentes nodos correspondientes al problema (8.20) utilizando el método* $FIC[3]5$.

### 8.3.4. Ejemplo no lineal

Este ejemplo ha aparecido entre otras en las referencias [4], [86] y [111] y consiste en el el problema

$$y'' = f(t, y, y') = \frac{3(y')^2}{1+y}\,, \quad y(1) = 0\,, \quad y'(1) = -\frac{1}{2} \tag{8.21}$$

cuya solución exacta es

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - 1\,.$$

Lo hemos resuelto en el intervalo $[1, 10]$ como en las dos últimas referencias anteriores. Los datos correspondientes a este problema tomados de [4] aparecen en la Figura 8.37, donde para diferentes tamaños de paso se muestran los métodos con el orden correspondiente y los errores absolutos máximos en los nodos de integración. Por otro lado, se ha resuelto el problema con el método $FIC[3]k$, para valores de $k = 2, \ldots, 9$. Los errores absolutos aparecen en el Cuadro 8.19, donde se observa que para los valores mayores del paso y órdenes bajos los dos métodos tienen comportamientos similares. Pero para valores más pequeños del paso y órdenes altos, el método $FIC[3]k$ presenta mejores errores.

Algo parecido ocurre con el método $FIC[2]k$, cuyos datos aparecen recogidos en el Cuadro 8.20. Y si prescindimos de la última evaluación de la función y aplicamos el método $\widetilde{FIC}[2]k$ se obtienen los datos del Cuadro 8.21, donde se requieren menos evaluaciones de la función por paso, y por tanto menos tiempo de computación, pero la inestabilidad del método en ciertos casos hace que los errores sean muy elevados. Nótese que para permanecer dentro del intervalo de estabilidad, a medida que los órdenes son mayores se necesita también mayor número de pasos.

Nótese que en la primera columna de la Figura 8.37 hay un error puesto que no se corresponde el número de pasos con el tamaño del paso. Seguramente los autores han tomado incorrectamente como intervalo de integración el $[0, 10]$ en lugar del $[1, 10]$, y así al hacer el cociente entre la longitud del intervalo, 10, y el número de pasos, resultan los valores de $h$ equivocados. Nosotros hemos considerado en el Cuadro 8.19 el mismo número de pasos que en la referida figura, pues consideramos que es el dato correcto.

| | Main Scheme | Order | Error Method1 | Method2 | Method3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h = 8 \cdot 10^{-2}$, 125 points | $GF_2GF_1$ | 3 | 5.20e-05 | 6.97e-05 | 1.42e-05 |
| | $GB_2GB_1$ | 3 | 3.23e-05 | 3.63e-05 | 6.13e-06 |
| | $EC_2EC_1$ | 4 | 1.10e-04 | 9.47e-05 | 3.71e-06 |
| | $GF_2GF_1$ | 5 | 7.00e-06 | 7.29e-06 | 7.35e-07 |
| | $GB_2GB_1$ | 5 | 6.50e-06 | 6.83e-06 | 6.34e-07 |
| | $EC_2EC_1$ | 6 | 9.29e-06 | 8.91e-06 | 7.17e-07 |
| | $GF_2GF_1$ | 7 | 1.16e-06 | 1.17e-06 | 5.32e-08 |
| | $GB_2GB_1$ | 7 | 1.11e-06 | 1.12e-06 | 5.57e-08 |
| | $EC_2EC_1$ | 8 | 1.36e-06 | 1.35e-06 | 6.95e-08 |
| | $GF_2GF_1$ | 9 | 2.39e-07 | 2.40e-07 | 1.11e-08 |
| | $GB_2GB_1$ | 9 | 2.34e-07 | 2.35e-07 | 1.12e-08 |
| | $EC_2EC_1$ | 10 | 2.68e-07 | 2.68e-07 | 1.24e-08 |
| $h = 4 \cdot 10^{-2}$, 250 points | $GF_2GF_1$ | 3 | 4.54e-06 | 7.11e-06 | 1.75e-06 |
| | $GB_2GB_1$ | 3 | 3.23e-05 | 2.57e-06 | 1.23e-06 |
| | $EC_2EC_1$ | 4 | 1.31e-05 | 9.19e-06 | 2.51e-07 |
| | $GF_2GF_1$ | 5 | 1.92e-07 | 2.27e-07 | 1.80e-08 |
| | $GB_2GB_1$ | 5 | 1.77e-07 | 2.15e-07 | 1.20e-08 |
| | $EC_2EC_1$ | 6 | 3.31e-07 | 2.85e-07 | 1.58e-08 |
| | $GF_2GF_1$ | 7 | 1.31e-08 | 1.36e-08 | 4.06e-10 |
| | $GB_2GB_1$ | 7 | 1.25e-08 | 1.30e-08 | 4.62e-10 |
| | $EC_2EC_1$ | 8 | 1.68e-08 | 1.59e-08 | 5.54e-10 |
| | $GF_2GF_1$ | 9 | 1.10e-09 | 1.12e-09 | 3.52e-11 |
| | $GB_2GB_1$ | 9 | 1.07e-09 | 1.09e-09 | 3.53e-11 |
| | $EC_2EC_1$ | 10 | 1.29e-09 | 1.26e-09 | 3.96e-11 |
| $h = 2 \cdot 10^{-2}$, 500 points | $GF_2GF_1$ | 3 | 2.75e-06 | 6.92e-07 | 2.12e-07 |
| | $GB_2GB_1$ | 3 | 3.40e-06 | 1.38e-07 | 1.79e-07 |
| | $EC_2EC_1$ | 4 | 1.56e-06 | 8.35e-07 | 1.61e-08 |
| | $GF_2GF_1$ | 5 | 2.54e-09 | 5.54e-09 | 3.70e-10 |
| | $GB_2GB_1$ | 5 | 2.26e-09 | 5.34e-09 | 1.58e-10 |
| | $EC_2EC_1$ | 6 | 1.03e-08 | 7.19e-09 | 2.70e-10 |
| | $GF_2GF_1$ | 7 | 9.15e-11 | 1.03e-10 | 6.75e-12 |
| | $GB_2GB_1$ | 7 | 8.59e-11 | 9.82e-11 | 6.46e-12 |
| | $EC_2EC_1$ | 8 | 1.46e-10 | 1.21e-10 | 5.62e-12 |
| | $GF_2GF_1$ | 9 | 1.08e-11 | 7.93e-12 | 1.93e-11 |
| | $GB_2GB_1$ | 9 | 5.48e-12 | 6.21e-12 | 1.92e-11 |
| | $EC_2EC_1$ | 10 | 8.68e-12 | 5.87e-12 | 1.79e-11 |
| $h = 1 \cdot 10^{-2}$, 1000 points | $GF_2GF_1$ | 3 | 9.03e-07 | 6.97e-08 | 2.58e-08 |
| | $GB_2GB_1$ | 3 | 9.85e-07 | 7.78e-09 | 2.37e-08 |
| | $EC_2EC_1$ | 4 | 1.89e-07 | 7.82e-08 | 1.01e-09 |
| | $GF_2GF_1$ | 5 | 2.11e-10 | 1.24e-10 | 7.95e-12 |
| | $GB_2GB_1$ | 5 | 2.22e-10 | 1.22e-10 | 5.75e-12 |
| | $EC_2EC_1$ | 6 | 3.11e-10 | 1.66e-10 | 4.63e-12 |
| | $GF_2GF_1$ | 7 | 3.93e-12 | 1.67e-12 | 3.48e-12 |
| | $GB_2GB_1$ | 7 | 3.51e-12 | 2.29e-12 | 4.38e-12 |
| | $EC_2EC_1$ | 8 | 5.28e-12 | 2.29e-12 | 2.72e-12 |
| | $GF_2GF_1$ | 9 | 3.60e-11 | 2.16e-11 | 1.88e-12 |
| | $GB_2GB_1$ | 9 | 5.38e-12 | 1.41e-11 | 2.13e-12 |
| | $EC_2EC_1$ | 10 | 1.38e-11 | 1.18e-11 | 3.63e-12 |

Figura 8.37: Datos para el problema 8.21 utilizando los métodos en diferencias finitas en [4].

| N | Método | orden | MaxErr | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| 125 | FIC[3]2 | 3 | $8{,}0279 \times 10^{-5}$ | 0.015 |
| | FIC[3]3 | 4 | $1{,}4041 \times 10^{-5}$ | 0.031 |
| | FIC[3]4 | 5 | $3{,}1381 \times 10^{-6}$ | 0.031 |
| | FIC[3]5 | 6 | $8{,}3426 \times 10^{-7}$ | 0.031 |
| | FIC[3]6 | 7 | $2{,}5340 \times 10^{-7}$ | 0.046 |
| | FIC[3]7 | 8 | $8{,}5608 \times 10^{-8}$ | 0.047 |
| | FIC[3]8 | 9 | $3{,}1562 \times 10^{-8}$ | 0.062 |
| | FIC[3]9 | 10 | $1{,}2523 \times 10^{-8}$ | 0.062 |
| 250 | FIC[3]2 | 3 | $1{,}0392 \times 10^{-5}$ | 0.047 |
| | FIC[3]3 | 4 | $9{,}9917 \times 10^{-7}$ | 0.047 |
| | FIC[3]4 | 5 | $1{,}2560 \times 10^{-7}$ | 0.078 |
| | FIC[3]5 | 6 | $1{,}9224 \times 10^{-8}$ | 0.094 |
| | FIC[3]6 | 7 | $3{,}4342 \times 10^{-9}$ | 0.094 |
| | FIC[3]7 | 8 | $6{,}9602 \times 10^{-10}$ | 0.109 |
| | FIC[3]8 | 9 | $1{,}5682 \times 10^{-10}$ | 0.109 |
| | FIC[3]9 | 10 | $3{,}8684 \times 10^{-11}$ | 0.125 |
| 500 | FIC[3]2 | 3 | $1{,}3231 \times 10^{-6}$ | 0.094 |
| | FIC[3]3 | 4 | $6{,}6816 \times 10^{-8}$ | 0.110 |
| | FIC[3]4 | 5 | $4{,}4755 \times 10^{-9}$ | 0.125 |
| | FIC[3]5 | 6 | $3{,}7019 \times 10^{-10}$ | 0.156 |
| | FIC[3]6 | 7 | $3{,}6226 \times 10^{-11}$ | 0.188 |
| | FIC[3]7 | 8 | $4{,}0762 \times 10^{-12}$ | 0.203 |
| | FIC[3]8 | 9 | $5{,}1442 \times 10^{-13}$ | 0.250 |
| | FIC[3]9 | 10 | $7{,}4162 \times 10^{-14}$ | 0.250 |
| 1000 | FIC[3]2 | 3 | $1{,}6694 \times 10^{-7}$ | 0.172 |
| | FIC[3]3 | 4 | $4{,}3228 \times 10^{-9}$ | 0.219 |
| | FIC[3]4 | 5 | $1{,}4964 \times 10^{-10}$ | 0.281 |
| | FIC[3]5 | 6 | $6{,}4511 \times 10^{-12}$ | 0.329 |
| | FIC[3]6 | 7 | $3{,}2901 \times 10^{-13}$ | 0.359 |
| | FIC[3]7 | 8 | $2{,}2037 \times 10^{-14}$ | 0.438 |
| | FIC[3]8 | 9 | $4{,}7739 \times 10^{-15}$ | 0.485 |
| | FIC[3]9 | 10 | $3{,}5527 \times 10^{-15}$ | 0.516 |

Cuadro 8.19: *Datos correspondientes al problema (8.21) utilizando el método* $FIC[3]k, k = 2, \ldots, 9$*, para diferentes tamaños de pasos.*

| N | Método | orden | MaxErr | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| 125 | FIC[2]2 | 3 | $3{,}6027 \times 10^{-5}$ | 0.015 |
| | FIC[2]3 | 4 | $7{,}2308 \times 10^{-6}$ | 0.031 |
| | FIC[2]4 | 5 | $1{,}7859 \times 10^{-6}$ | 0.031 |
| | FIC[2]5 | 6 | $5{,}1538 \times 10^{-7}$ | 0.031 |
| | FIC[2]6 | 7 | $1{,}6715 \times 10^{-7}$ | 0.047 |
| | FIC[2]7 | 8 | $5{,}9634 \times 10^{-8}$ | 0.047 |
| | FIC[2]8 | 9 | $2{,}3044 \times 10^{-8}$ | 0.062 |
| | FIC[2]9 | 10 | $9{,}5323 \times 10^{-9}$ | 0.046 |
| 250 | FIC[2]2 | 3 | $4{,}4190 \times 10^{-6}$ | 0.031 |
| | FIC[2]3 | 4 | $4{,}8708 \times 10^{-7}$ | 0.031 |
| | FIC[2]4 | 5 | $6{,}7731 \times 10^{-8}$ | 0.046 |
| | FIC[2]5 | 6 | $1{,}1207 \times 10^{-8}$ | 0.062 |
| | FIC[2]6 | 7 | $2{,}1351 \times 10^{-9}$ | 0.062 |
| | FIC[2]7 | 8 | $4{,}5614 \times 10^{-10}$ | 0.094 |
| | FIC[2]8 | 9 | $1{,}0725 \times 10^{-10}$ | 0.094 |
| | FIC[2]9 | 10 | $2{,}7573 \times 10^{-11}$ | 0.094 |
| 500 | FIC[2]2 | 3 | $5{,}4716 \times 10^{-7}$ | 0.063 |
| | FIC[2]3 | 4 | $3{,}1586 \times 10^{-8}$ | 0.078 |
| | FIC[2]4 | 5 | $2{,}3360 \times 10^{-9}$ | 0.110 |
| | FIC[2]5 | 6 | $2{,}0881 \times 10^{-10}$ | 0.141 |
| | FIC[2]6 | 7 | $2{,}1763 \times 10^{-11}$ | 0.125 |
| | FIC[2]7 | 8 | $2{,}5804 \times 10^{-12}$ | 0.172 |
| | FIC[2]8 | 9 | $3{,}4153 \times 10^{-13}$ | 0.172 |
| | FIC[2]9 | 10 | $4{,}9765 \times 10^{-14}$ | 0.219 |
| 1000 | FIC[2]2 | 3 | $6{,}8027 \times 10^{-8}$ | 0.141 |
| | FIC[2]3 | 4 | $2{,}0105 \times 10^{-9}$ | 0.187 |
| | FIC[2]4 | 5 | $7{,}6782 \times 10^{-11}$ | 0.219 |
| | FIC[2]5 | 6 | $3{,}5721 \times 10^{-12}$ | 0.250 |
| | FIC[2]6 | 7 | $1{,}9637 \times 10^{-13}$ | 0.281 |
| | FIC[2]7 | 8 | $1{,}1393 \times 10^{-14}$ | 0.328 |
| | FIC[2]8 | 9 | $4{,}2188 \times 10^{-15}$ | 0.391 |
| | FIC[2]9 | 10 | $3{,}6637 \times 10^{-15}$ | 0.427 |

Cuadro 8.20: *Datos correspondientes al problema (8.21) utilizando el método* $FIC[2]k, k = 2, \ldots, 9$*, para diferentes tamaños de pasos.*

| N | Método | orden | MaxErr | CPU(s.) |
|---|---|---|---|---|
| 125 | $\widetilde{FIC}[2]2$ | 3 | $1{,}8985 \times 10^{-4}$ | 0.000 |
| | $\widetilde{FIC}[2]3$ | 4 | $3{,}8235 \times 10^{-5}$ | 0.016 |
| | $\widetilde{FIC}[2]4$ | 5 | $9{,}3914 \times 10^{-6}$ | 0.016 |
| | $\widetilde{FIC}[2]5$ | 6 | $2{,}6736 \times 10^{-6}$ | 0.031 |
| | $\widetilde{FIC}[2]6$ | 7 | $7{,}1466 \times 10^{-4}$ | 0.016 |
| | $\widetilde{FIC}[2]7$ | 8 | $3{,}3527 \times 10^{68}$ | 0.032 |
| | $\widetilde{FIC}[2]8$ | 9 | $8{,}7714 \times 10^{117}$ | 0.047 |
| | $\widetilde{FIC}[2]9$ | 10 | $4{,}6514 \times 10^{127}$ | 0.031 |
| 250 | $\widetilde{FIC}[2]2$ | 3 | $2{,}5029 \times 10^{-5}$ | 0.016 |
| | $\widetilde{FIC}[2]3$ | 4 | $2{,}7540 \times 10^{-6}$ | 0.031 |
| | $\widetilde{FIC}[2]4$ | 5 | $3{,}7915 \times 10^{-7}$ | 0.046 |
| | $\widetilde{FIC}[2]5$ | 6 | $6{,}2125 \times 10^{-8}$ | 0.047 |
| | $\widetilde{FIC}[2]6$ | 7 | $1{,}2023 \times 10^{-8}$ | 0.062 |
| | $\widetilde{FIC}[2]7$ | 8 | $6{,}8202 \times 10^{-4}$ | 0.062 |
| | $\widetilde{FIC}[2]8$ | 9 | $5{,}4640 \times 10^{244}$ | 0.062 |
| | $\widetilde{FIC}[2]9$ | 10 | $2{,}3756 \times 10^{278}$ | 0.078 |
| 500 | $\widetilde{FIC}[2]2$ | 3 | $3{,}2166 \times 10^{-6}$ | 0.062 |
| | $\widetilde{FIC}[2]3$ | 4 | $1{,}8539 \times 10^{-7}$ | 0.063 |
| | $\widetilde{FIC}[2]4$ | 5 | $1{,}3576 \times 10^{-8}$ | 0.079 |
| | $\widetilde{FIC}[2]5$ | 6 | $1{,}2007 \times 10^{-9}$ | 0.094 |
| | $\widetilde{FIC}[2]6$ | 7 | $1{,}2395 \times 10^{-10}$ | 0.110 |
| | $\widetilde{FIC}[2]7$ | 8 | $2{,}7132 \times 10^{-11}$ | 0.125 |
| | $\widetilde{FIC}[2]8$ | 9 | $3{,}1477 \times 10^{-2}$ | 0.141 |
| | $\widetilde{FIC}[2]9$ | 10 | $2{,}4259 \times 10^{582}$ | 0.188 |
| 1000 | $\widetilde{FIC}[2]2$ | 3 | $4{,}0779 \times 10^{-7}$ | 0.094 |
| | $\widetilde{FIC}[2]3$ | 4 | $1{,}2035 \times 10^{-8}$ | 0.125 |
| | $\widetilde{FIC}[2]4$ | 5 | $4{,}5516 \times 10^{-10}$ | 0.156 |
| | $\widetilde{FIC}[2]5$ | 6 | $2{,}0960 \times 10^{-11}$ | 0.187 |
| | $\widetilde{FIC}[2]6$ | 7 | $1{,}1337 \times 10^{-12}$ | 0.218 |
| | $\widetilde{FIC}[2]7$ | 8 | $7{,}2775 \times 10^{-14}$ | 0.219 |
| | $\widetilde{FIC}[2]8$ | 9 | $1{,}1846 \times 10^{-13}$ | 0.250 |
| | $\widetilde{FIC}[2]9$ | 10 | $1{,}8959 \times 10^{-1}$ | 0.297 |

Cuadro 8.21: *Datos correspondientes al problema (8.21) utilizando el método* $\widetilde{FIC}[2]k, k = 2, \ldots, 9$*, para diferentes tamaños de pasos.*

### 8.3.5. Sistema de ecuaciones

Finalmente consideramos el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} y_1''(t) = -e^{-t}\, y_2(t) \\ y_2''(t) = 2e^{t}\, y_1'(t) \\ y_1(0) = 1\,, \quad y_1'(0) = 0\,, \quad y_2(0) = 1\,, \quad y_2'(0) = 1\,, \end{cases} \tag{8.22}$$

cuya solución exacta es

$$y_1(t) = \cos(t)\,, \quad y_2(t) = e^{t}\,\cos(t)\,.$$

Hemos integrado este problema en el intervalo $[0, \pi]$ como en [81], utilizando el método $\widetilde{FIC}[3]k$ para valores de $k = 2, \ldots, 6$ y número de pasos $N = 125, 250, 500$.

En la Figura 8.38 aparecen los datos correspondientes al método en [81], que es un método de dos pasos en bloque que utiliza como fórmulas principales las fórmulas de Falkner implícitas de dos pasos (para la solución y la derivada) además de otras dos fórmulas multipaso. El resultado es un método en bloque de orden 3, que se implementa en paso variable.

| Method | TS | FS | MAXE | AVERR | FCN |
|---|---|---|---|---|---|
| 2P(A) | 17 | 4 | $4.64239e-004$ | $1.01900e-004$ | 137 |
| 2P(B) | 6 | 0 | $1.29794e-003$ | $2.48275e-004$ | 47 |
| 2P(A) | 46 | 3 | $5.27751e-006$ | $9.23287e-007$ | 369 |
| 2P(B) | 16 | 1 | $4.19030e-005$ | $7.96402e-006$ | 131 |
| 2P(A) | 171 | 2 | $2.35992e-008$ | $5.04232e-009$ | 1369 |
| 2P(B) | 55 | 1 | $4.24624e-007$ | $6.60118e-008$ | 429 |
| 2P(A) | 750 | 2 | $4.50146e-011$ | $7.04651e-012$ | 1741 |
| 2P(B) | 173 | 1 | $4.31085e-009$ | $6.26858e-010$ | 1343 |

Figura 8.38: Datos para el problema 8.22 utilizando el método en paso variable en [81] (hay un error en la última columna, penúltima fila, pues en lugar de 1741 debería aparecer 6001).

En el Cuadro 8.22 hemos incluido los resultados obtenidos con los métodos $\widetilde{FIC}[3]k$, para $k = 2, \ldots, 6$. Observamos que aunque no es justa la comparación,

pues el método en [81] está implementado en paso variable, los métodos $\widetilde{FIC}[3]k$ proporcionan buenos resultados, y considerando órdenes más altos, para un número reducido de evaluaciones de la función se obtienen resultados muy aceptables. Esto nos lleva a plantearnos como trabajo futuro la implementación de los métodos de Falkner en bloque, y también en paso variable.

| N | Método | Evalf | Err $y_1$ | Err $y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 125 | $\widetilde{FIC}[3]2$ | 250 | $6{,}9859 \times 10^{-6}$ | $1{,}5633 \times 10^{-4}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]3$ | 250 | $2{,}4621 \times 10^{-7}$ | $2{,}2785 \times 10^{-6}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]4$ | 250 | $5{,}3822 \times 10^{-9}$ | $6{,}3022 \times 10^{-8}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]5$ | 250 | $8{,}4426 \times 10^{-11}$ | $1{,}3313 \times 10^{-9}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]6$ | 250 | $2{,}3878 \times 10^{-12}$ | $1{,}9866 \times 10^{-11}$ |
| 250 | $\widetilde{FIC}[3]2$ | 500 | $8{,}9729 \times 10^{-7}$ | $2{,}0133 \times 10^{-5}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]3$ | 500 | $1{,}5886 \times 10^{-8}$ | $1{,}3870 \times 10^{-7}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]4$ | 500 | $1{,}8166 \times 10^{-10}$ | $2{,}2002 \times 10^{-9}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]5$ | 500 | $1{,}2480 \times 10^{-12}$ | $2{,}1941 \times 10^{-11}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]6$ | 500 | $2{,}0428 \times 10^{-14}$ | $1{,}5631 \times 10^{-13}$ |
| 500 | $\widetilde{FIC}[3]2$ | 1000 | $1{,}1365 \times 10^{-7}$ | $2{,}5536 \times 10^{-6}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]3$ | 1000 | $1{,}0087 \times 10^{-9}$ | $8{,}5565 \times 10^{-9}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]4$ | 1000 | $5{,}8884 \times 10^{-12}$ | $7{,}2450 \times 10^{-11}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]5$ | 1000 | $2{,}0872 \times 10^{-14}$ | $3{,}5527 \times 10^{-13}$ |
| | $\widetilde{FIC}[3]6$ | 1000 | $1{,}5543 \times 10^{-15}$ | $2{,}4869 \times 10^{-14}$ |

Cuadro 8.22: *Datos correspondientes al problema (8.22) utilizando el método* $\widetilde{FIC}[3]k$*, con* $k = 2, \ldots, 6$*, para diferentes tamaños de pasos.*

# Capítulo 9

# Conclusiones y trabajo futuro.

Los métodos de Falkner se utilizan para resolver problemas de valor inicial de segundo orden del tipo $y'' = f(t, y, y')$ de manera directa, sin transformar la ecuación en un sistema de ecuaciones de primer orden. Para su aplicación son necesarias dos fórmulas, una para obtener el valor de la solución, y otra para obtener el valor de la derivada (puesto que la derivada aparece en la primera de las fórmulas, y ha de actualizarse en cada paso). Estas dos fórmulas pueden ser explícitas o implícitas, con lo cual se dispone de un total de cuatro fórmulas, las cuales pueden ser aplicadas en diferentes combinaciones, según la forma que tenga la función $f$. La manera en que se aplican estas fórmulas normalmente es en la forma predictora-correctora, es decir, para utilizar una fórmula implícita previamente se hace uso de la correspondiente fórmula predictora. Sin embargo, en este trabajo se ha introducido una modificación a este proceder, pues por ejemplo, si la función $f$ no contiene la derivada, $f = f(t, y)$, entonces tras utilizar la fórmula explícita para la solución y evaluar $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, podemos utilizar la fórmula implícita para la derivada sin necesidad de haber utilizado la correspondiente fórmula predictora para dicha derivada. Cuando se procede de esta manera hemos denominado al método que resulta explícito. Y por el contrario, cuando el uso de una fórmula implícita exige la utilización de una fórmula predictora explícita, al método resultante le hemos llamado implícito (en realidad, los métodos que resultan no necesitan de ningún procedimiento para resolver ecuaciones). Esta es simplemente una forma de distinguir las diferentes implementaciones de los métodos, pues está claro que en el modo predictor-corrector, no hay que resolver ninguna ecuación para obtener el resultado que proporciona la fórmula implícita de que se trate.

Entonces, surgen diferentes posibilidades según la forma que tiene la función $f$, y lo que hemos tratado en los capítulos anteriores es la forma en que se acumulan los errores para esas posibilidades. Hemos estudiado también las regiones e intervalos de estabilidad, los cuales resultan de vital importancia a la hora de aplicar un determinado método a un problema concreto. En los cuadros correspondientes se observa que cuanto mayor es el orden más reducidas son las regiones e intervalos de estabilidad. A continuación exponemos los resultados obtenidos según el tipo de ecuación diferencial que se trate.

## 9.1. Conclusiones

### Métodos de Falkner en modo P-C para la ecuación $y'' = f(t, y)$

A lo largo de todo el estudio, las fórmulas que se han utilizado han sido fórmulas multipaso de $k$ pasos. El modo más directo de usar estas fórmulas es considerar las dos fórmulas explícitas, lo que hemos denominado método $FE[1]k$, o modo P' PE. Las fórmulas correctoras tienen un orden más que las predictoras, así que si en lugar de utilizar la fórmula explícita para hallar la derivada, se utiliza la fórmula implícita, es de esperar que el resultado mejore. Y así ocurre, como se puede verificar en el ejemplo 8.1 o en los resultados del Cuadro 8.8, pues el método resultante, que hemos denominado método $FE[2]k$, o modo PEC' proporciona un error de un orden mayor que el método anterior.

En cuanto a los métodos implícitos, el que hemos denominado $FI[1]k$ o modo P' PECE, utiliza la fórmula correctora para la solución, y a pesar de ello resulta un error del mismo orden que para el primero de los métodos explícitos. Además, al evaluar dos veces la función $f$ en cada paso, el coste computacional que resulta es más elevado.

Para los dos métodos implícitos que quedan, el $FI[2]k$ o modo PEC' CE y el $FI[3]k$ o modo PECEC' , el error que resulta es del mismo orden que para el segundo de los métodos explícitos, aunque el término principal del error acumulado tiene un sumando menos. Cabe esperar entonces que estos sean los métodos que proporcionan mejor error, aunque el coste computacional será mayor porque hay dos evaluaciones de la función $f$ por paso. Así se constata en el ejemplo numérico cuyos datos aparecen en el Cuadro 8.8.

Sin embargo, la última evaluación de la función en los métodos implícitos no mejora el orden del error que se obtiene si no hubiera tal evaluación. Por tanto, el prescindir de esta última evaluación mejoraría el coste computacional sin perjuicio del error que se cometa. Así se constata también en el Cuadro 8.8 donde se observa que los errores obtenidos con los métodos implícitos sin esta última evaluación son similares a los que se obtienen si se realiza la evaluación. Lo que sí cambia al dejar de realizar esa última evaluación son las regiones de estabilidad, pero es tan pequeña la diferencia que en general resulta más eficaz el uso de los métodos que no realizan la última evaluación, los cuales hemos denominado mediante una tilde, en la forma $\widetilde{FI}[i]k$. Los datos que aparecen en los ejemplos numéricos confirman lo anterior.

Aunque los métodos $FI[2]k$ y $FI[3]k$ dan lugar a errores similares (puesto que tienen los mismos términos principales), estos últimos tienen mayores regiones de estabilidad. No ocurre lo mismo si se prescinde de la última evaluación pues en este caso los métodos $\widetilde{FI}[2]k$ y $\widetilde{FI}[3]k$ resultan ser el mismo método.

Por todo lo dicho, concluimos que el método $FI[3]k$ o modo PECECés el más indicado para resolver el tipo de problemas que nos ocupan, y si la estabilidad no se ve comprometida al prescindir de la última evaluación, utilizaremos cualquiera de los métodos $\widetilde{FI}[2]k$ o $\widetilde{FI}[3]k$.

## Métodos de Falkner en modo P-C para la ecuación $y'' = f(t, y')$

Ahora cabría esperar una situación parecida al caso anterior cuando la función es de la forma $f(t, y')$. El primero de los métodos explícitos es exactamente el mismo que en el caso anterior aunque lo hemos denominado $FE'[1]k$, o modo PP' E, donde simplemente hemos cambiado el orden de las letras P y P'para colocar la evaluación de la función $f$ tras la aplicación del predictor para la derivada. Y el error que resulta es el mismo que en el caso anterior.

En el segundo de los métodos explícitos para este caso, denominado $FE'[2]k$, o modo P' EC, se utiliza la fórmula implícita para obtener el valor de la solución. Cabría esperar que al utilizar una fórmula de mayor orden esto redundara en un mejor rendimiento, como ocurrió en el caso $FE[2]k$. Sin embargo, no ocurre así, y el error que se comete es del mismo orden en los dos métodos explícitos, según se refleja en el Cuadro 4.3 y como queda de manifiesto en el ejemplo cuyos datos aparecen en el Cuadro 8.9.

En cuanto a los métodos implícitos, el primero de ellos es el denominado $FI'[1]k$ o modo PP' E C' E, y utiliza la fórmula correctora para la derivada, resultando un error de un orden mayor que en los métodos explícitos. Los otros dos métodos implícitos, $FI'[2]k$ o modo P' E C C' E y el método $FI'[3]k$ o modo P' E C' EC, utilizan no solo la fórmula correctora para la derivada sino también la correctora para la solución. A pesar de utilizar las dos fórmulas correctoras, para estos dos últimos métodos los errores tienen el mismo orden que para el primero de los métodos implícitos, aunque con una expresión más complicada (véase el Cuadro 4.3).

De nuevo, en el caso de los métodos implícitos, la evaluación última de la función

es prescindible en lo que se refiere al error, puesto que no contribuye a aumentar el orden del mismo. En el Cuadro 8.10 se observa que los métodos implícitos con y sin evaluación final de la función $f$ proporcionan errores similares, si bien el tiempo de computación se reduce considerablemente. Pero ahora lo que sí cambia sustancialmente son las regiones de estabilidad, puesto que se ven disminuidas, como se puede apreciar en la Figura 8.26.

Por todo lo anterior se concluye que el método $FI'[1]k$ sin la última evaluación, o método $\widetilde{FI}'[1]k$, o modo PP'E C' es el más indicado para resolver el tipo de problema que nos ocupa siempre que la estabilidad no se vea comprometida. Si la estabilidad es determinante en el problema que se quiera resolver entonces consideraremos los métodos $FI'[1]k$.

## Métodos de Falkner en modo P-C para la ecuación $y'' = f(t, y, y')$

Esta es la formulación más general de las ecuaciones de segundo orden objeto de estudio, y por ello hay más posibilidades para implementar los métodos. En este caso solo podemos hablar de un método explícito, que será el mismo que para las ecuaciones $y'' = f(t, y)$ e $y'' = f(t, y')$, y en los tres casos el término principal del error acumulado en el punto final es el mismo.

En el caso de las fórmulas implícitas hemos considerado cinco posibilidades, según el orden en que se utilicen las diferentes fórmulas y el número de veces que se evalúa la función. Es interesante observar cómo en los métodos $FIC[1]k$ y $FIC[2]k$ tras la obtención de las aproximaciones de la solución y de la derivada con las fórmulas explícitas, según que se evalúe con la fórmula implícita correspondiente primero la función o primero la derivada, se obtienen errores de distinto orden. Es preferible el método $FIC[2]k$ o modo PP'E C' E. E incluso se comporta mejor que el método $FIC[3]k$ que tras la evaluación de la función utiliza las dos fórmulas implícitas para aproximar la solución y la derivada. Además, en el método $FIC[2]k$ hay cinco etapas en cada paso, mientras que en el método $FIC[3]k$ hay seis etapas, lo que se traduce en un ligero aumento en cuanto a tiempo de computación.

Las dos últimas posibilidades de los métodos implícitos $FIC[4]k$ y $FIC[5]k$ no son recomendables, pues realizan tres evaluaciones de la función por paso, con el consiguiente aumento de coste computacional, siendo los errores y regiones de

estabilidad parecidos a los de las fórmulas anteriores.

También ahora podemos prescindir de la última evaluación de la función, con lo que las regiones de estabilidad se ven disminuidas, y también los errores se ven afectados, aumentando ligeramente, según se puede comprobar en los resultados numéricos del capítulo anterior.

Teniendo en cuenta lo dicho, consideramos que el método idóneo para resolver el tipo de problemas más general es el $FIC[2]k$, sin perjuicio de que si la estabilidad no se ve afectada al prescindir de la última evaluación, se pueda usar el método $\widetilde{FIC}[2]k$.

Como puede observarse en los resultados numéricos, las diferentes implementaciones de los métodos de Falkner pueden resultar muy eficaces y competir favorablemente con otros métodos aparecidos en la literatura matemática. Cuando ello es posible, resulta particularmente interesante la aplicación de métodos de orden elevado que sólo realizan una única evaluación de la función por paso.

## 9.2. Trabajo futuro

En las páginas anteriores se han analizado e implementado los métodos de Falkner en modo predictor-corrector. Los métodos de Falkner son métodos multipaso específicamente diseñados para resolver problemas de segundo orden de manera directa. Pero son métodos generales, y por tanto, cuando se presenta alguna dificultad añadida, como un comportamiento altamente oscilatorio, o stiff, o un problema con singularidades, cabe esperar que los métodos no se comporten bien. Para tales tipos de problemas se han diseñado procedimientos específicos. Los problemas con soluciones oscilatorias en general se integran bien utilizando método trigonométricamente adaptados. En la referencia [80], basándose en nuestro artículo [103] y adelantándose a nuestra pretensiones, los autores han desarrollado un método de Falkner adaptado para problemas de segundo orden de tipo oscilatorio. En la referencia [135] Wu et al. consideran el método explícito $FE[2]k$, al que citan y llaman método de Falkner reformado, para obtener el correspondiente método adaptado. El tema no queda cerrado aquí, pues pueden considerarse también métodos implícitos adaptados, o la formulación en modo predictor-corrector de tales métodos adaptados.

En la referencia [106] presentamos un método de dos pasos para resolver problemas cuya solución se puede aproximar mejor por funciones racionales que por

polinomios. El método consiste en dos fórmulas racionales, una para seguir la solución y otra para seguir la derivada. Los resultados numéricos muestran el buen comportamiento del método, y cómo resulta más eficaz que otros métodos de tipo no racional. Esta es una línea de investigación abierta en la que seguiremos insistiendo, considerando métodos de órdenes más altos, y su implementación en paso variable.

Finalmente, para los problemas stiff, lo interesante es obtener métodos que sean A-estables. Los métodos de Falkner que hemos visto no lo son, pero podrían considerarse métodos híbridos (que combinan los métodos multipaso y los métodos de Runge-Kutta) con puntos intermedios, para tratar de obtener métodos con buenas características de estabilidad.

Para concluir, señalaremos que últimamente están apareciendo en la literatura numerosos artículos de los métodos en bloque, donde se consideran varias fórmulas que constituyen un sistema, y al resolverlo se obtienen los valores que aproximan la solución y la derivada en varios puntos. Estos métodos tienen la ventaja de que no necesitan valores de arranque, y en general resultan eficaces. Una línea de investigación abierta sería considerar los métodos de Falkner en sus distintas versiones (multipaso, híbridos, adaptados, racionales) y formular métodos en bloque. Esta idea creemos que proporcionará métodos que pueden competir con los actualmente existentes en la literatura matemática.

# Capítulo 10

# Apéndices

# Apéndice A

# Coeficientes de los métodos

En este Apéndice vamos a incluir los valores de los distintos coeficientes de los métodos presentados anteriormente.

### Coeficientes del método de Falkner explícito.

En primer lugar tenemos los coeficientes $\beta_i$, utilizados para la aproximación de la solución con el predictor.

$$\beta_0 = \frac{1}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{8}$$

$$\beta_3 = \frac{19}{180}$$

$$\beta_4 = \frac{3}{32}$$

$$\beta_5 = \frac{863}{10080}$$

$$\beta_6 = \frac{275}{3456}$$

$$\beta_7 = \frac{33953}{453600}$$

$$\beta_8 = \frac{8183}{115200}$$

$$\beta_9 = \frac{3250433}{47900160}$$

$$\beta_{10} = \frac{4671}{71680}$$

$$\beta_{11} = \frac{13695779093}{217945728000}$$

$$\beta_{12} = \frac{2224234463}{36578304000}$$

$$\beta_{13} = \frac{132282840127}{2241727488000}$$

$$\beta_{14} = \frac{2639651053}{45984153600}$$

A continuación mostramos los coeficientes $\gamma_i$, utilizados para el cálculo de la derivada con el predictor.

## Coeficientes del método explícito para la derivada.

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_2 = \frac{5}{12}$$

$$\gamma_3 = \frac{3}{8}$$

$$\gamma_4 = \frac{251}{720}$$

$$\gamma_5 = \frac{95}{288}$$

$$\gamma_6 = \frac{19087}{60480}$$

$$\gamma_7 = \frac{5257}{17280}$$

$$\gamma_8 = \frac{1070017}{3628800}$$

$$\gamma_9 = \frac{25713}{89600}$$

$$\gamma_{10} = \frac{26842253}{95800320}$$

$$\gamma_{11} = \frac{4777223}{17418240}$$

$$\gamma_{12} = \frac{703604254357}{2615348736000}$$

$$\gamma_{13} = \frac{106364763817}{402361344000}$$

$$\gamma_{14} = \frac{1166309819657}{4483454976000}$$

## Coeficientes del método de Falkner implícito.

Siguen los coeficientes $\beta_i^*$, utilizados para el cálculo de la solución con el corrector.

$$\beta_0^* = \frac{1}{2}$$

$$\beta_1^* = \frac{-1}{3}$$

$$\beta_2^* = \frac{-1}{24}$$

$$\beta_3^* = \frac{-7}{360}$$

$$\beta_4^* = \frac{-17}{1440}$$

$$\beta_5^* = \frac{-41}{5040}$$

$$\beta_6^* = \frac{-731}{120960}$$

$$\beta_7^* = \frac{-8563}{1814400}$$

$$\beta_8^* = \frac{-27719}{7257600}$$

$$\beta_9^* = \frac{-190073}{59875200}$$

$$\beta_{10}^* = \frac{-516149}{191600640}$$

$$\beta_{11}^* = \frac{-1013143139}{435891456000}$$

$$\beta_{12}^* = \frac{-1519024289}{747242496000}$$

$$\beta_{13}^* = \frac{-14108351869}{7846046208000}$$

$$\beta_{14}^* = \frac{-14399405173}{8966909952000}$$

## Coeficientes del método implícito para la derivada.

Finalmente, estos son los coeficientes $\gamma_i^*$, utilizados para el cálculo de la derivada con el corrector.

$$\gamma_0^* = 1$$

$$\gamma_1^* = \frac{-1}{2}$$

$$\gamma_2^* = \frac{-1}{12}$$

$$\gamma_3^* = \frac{-1}{24}$$

$$\gamma_4^* = \frac{-19}{720}$$

$$\gamma_5^* = \frac{-3}{160}$$

$$\gamma_6^* = \frac{-863}{60480}$$

$$\gamma_7^* = \frac{-275}{24192}$$

$$\gamma_8^* = \frac{-33953}{3628800}$$

$$\gamma_9^* = \frac{-8183}{1036800}$$

$$\gamma_{10}^* = \frac{-3250433}{479001600}$$

$$\gamma_{11}^* = \frac{-4671}{788480}$$

$$\gamma_{12}^* = \frac{-13695779093}{2615348736000}$$

$$\gamma_{13}^* = \frac{-2224234463}{475517952000}$$

$$\gamma_{14}^* = \frac{-132282840127}{31384184832000}$$

# Apéndice B

# Fórmulas desarrolladas

En este Apéndice mostramos algunas de las diferentes fórmulas desarrolladas.

### Fórmulas de Falkner explícitas.

$k = 1: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{2}\, h^2 f_n$

$k = 2: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{6}\, h^2 (4f_n - f_{n-1})$

$k = 3: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{24}\, h^2 (3f_{n-2} - 10f_{n-1} + 19f_n)$

$k = 4: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{360}\, h^2 (-38f_{n-3} + 159f_{n-2} - 264f_{n-1} + 323f_n)$

$k = 5: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{1440}\, h^2 (135f_{n-4} - 692f_{n-3} + 1446f_{n-2} - 1596f_{n-1} + 1427f_n)$

$k = 6: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{10080}\, h^2 (-863f_{n-5} + 5260f_{n-4} - 13474f_{n-3} + 18752f_{n-2} - 15487f_{n-1} + 10852f_n)$

$k = 7: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{120960}\, h^2 (9625f_{n-6} - 68106f_{n-5} + 207495f_{n-4} - 354188f_{n-3} + 369399f_{n-2} - 243594f_{n-1} + 139849f_n)$

$k = 8: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \dfrac{1}{1814400}\, h^2 (-135812f_{n-7} + 1095059f_{n-6} - 3873642f_{n-5} + 7865845f_{n-4} - 10066240f_{n-3} + 8393037f_{n-2} - 4604594f_{n-1} + 2233547f_n)$

$k=9:\ y_{n+1}=y_n+h\,y'_n+\dfrac{1}{7257600}\,h^2(515529f_{n-8}-4667480f_{n-7}+18815048f_{n-6}-44364192f_{n-5}+67550410f_{n-4}-69134584f_{n-3}+48006960f_{n-2}-22542608f_{n-1}+9449717f_n)$

$k=10:\ y_{n+1}=y_n+h\,y'_n+\dfrac{1}{239500800}\,h^2(-16252165f_{n-9}+163281942f_{n-8}-739104780f_{n-7}+1986078444f_{n-6}-3511791126f_{n-5}+4276936320f_{n-4}-3646623132f_{n-3}+2169307620f_{n-2}-890175549f_{n-1}+328092826f_n)$

$k=11:\ y_{n+1}=y_n+h\,y'_n+\dfrac{1}{958003200}\,h^2(62427915f_{n-10}-689287810f_{n-9}+3462383943f_{n-8}-10447768920f_{n-7}+21054175926f_{n-6}-29778999084f_{n-5}+30217607430f_{n-4}-22077842328f_{n-3}+11486486655f_{n-2}-4184981346f_{n-1}+1374799219f_n)$

$k=12:\ y_{n+1}=y_n+h\,y'_n+\dfrac{1}{435891456000}\,h^2(-27391558186f_{n-11}+329711841371f_{n-10}-1820161653780f_{n-9}+6094991794755f_{n-8}-13792949059980f_{n-7}+22234549928262f_{n-6}-26204344465152f_{n-5}+22788225582030f_{n-4}-14565025359930f_{n-3}+6732887128255f_{n-2}-2205473652476f_{n-1}+652925202831f_n)$

$k=13:\ y_{n+1}=y_n+h\,y'_n+\dfrac{1}{5230697472000}\,h^2(318065528209f_{n-12}-4145485036740f_{n-11}+24948866958246f_{n-10}-91816356051340f_{n-9}+230582338000515f_{n-8}-417423287061288f_{n-7}+560707147204260f_{n-6}-566360031923352f_{n-5}+430901143447815f_{n-4}-244754720525140f_{n-3}+101786970400854f_{n-2}-30282470168220f_{n-1}+8153167962181f_n)$

$k=14:\ y_{n+1}=y_n+h\,y'_n+\dfrac{1}{15692092416000}\,h^2(-925979880889f_{n-13}+12991935036184f_{n-12}-84662885819562f_{n-11}+339676846808992f_{n-10}-937524682989655f_{n-9}+1883483120705688f_{n-8}-2841251336789388f_{n-7}+3271102917218304f_{n-6}-2890816202474199f_{n-5}+1954779045179080f_{n-4}-999094407509674f_{n-3}+377587341911904f_{n-2}-102885148956217f_{n-1}+25385483767432f_n)$

## Fórmulas explícitas para aproximar la derivada.

$k=1:\ y'_{n+1}=y'_n+h\,f_n$

$k=2:\ y'_{n+1}=y'_n+\dfrac{1}{2}\,h(3f_n-f_{n-1})$

$k = 3: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{12}\, h(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$

$k = 4: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{24}\, h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 59f_{n-3})$

$k = 5: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{720}\, h(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4})$

$k = 6: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{1440}\, h(4277f_n - 7923f_{n-1} + 9982f_{n-2} - 7298f_{n-3} + 2877f_{n-4} - 475f_{n-5})$

$k = 7: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{60480}\, h(198721f_n - 447288f_{n-1} + 705549f_{n-2} - 688256f_{n-3} + 407139f_{n-4} - 134472f_{n-5} + 19087f_{n-6})$

$k = 8: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{120960}\, h(434241f_n - 1152169f_{n-1} + 2183877f_{n-2} - 2664477f_{n-3} + 2102243f_{n-4} - 1041723f_{n-5} + 295767f_{n-6} - 36799f_{n-7})$

$k = 9: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3628800}\, h(14097247f_n - 43125206f_{n-1} + 95476786f_{n-2} - 139855262f_{n-3} + 137968480f_{n-4} - 91172642f_{n-5} + 38833486f_{n-6} - 9664106f_{n-7} + 1070017f_{n-8})$

$k = 10: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{7257600}\, h(30277247f_n - 104995189f_{n-1} + 265932680f_{n-2} - 454661776f_{n-3} + 538363838f_{n-4} - 444772162f_{n-5} + 252618224f_{n-6} - 94307320f_{n-7} + 20884811f_{n-8} - 2082753f_{n-9})$

$k = 11: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{479001600}\, h(134211265f_{n-10} - 1479574348f_{n-9} + 7417904451f_{n-8} - 22329634920f_{n-7} + 44857168434f_{n-6} - 63176201472f_{n-5} + 63716378958f_{n-4} - 46113029016f_{n-3} + 23591063805f_{n-2} - 8271795124f_{n-1} + 2132509567f_n)$

$k = 12: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{958003200}\, h(-262747265f_{n-11} + 3158642445f_{n-10} - 17410248271f_{n-9} + 58189107627f_{n-8} - 131365867290f_{n-7} + 211103573298f_{n-6} - 247741639374f_{n-5} + 214139355366f_{n-4} - 135579356757f_{n-3} + 61633227185f_{n-2} - 19433810163f_{n-1} + 4527766399f_n)$

$k = 13: \ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{2615348736000}\, h(703604254357f_{n-12} - 9160551085734f_{n-11} + 55060974662412f_{n-10} - 202322913738370f_{n-9} + 507140369728425f_{n-8} - 915883387152444f_{n-7} +$

$1226443086129408 f_{n-6} - 1233589244941764 f_{n-5} + 932884546055895 f_{n-4} - 524924579905150 f_{n-3} + 214696591002612 f_{n-2} - 61497552797274 f_{n-1} + 13064406523627 f_n)$

$k = 14: \; y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{5230697472000} h(-1382741929621 f_{n-13} + 19382853593787 f_{n-12} - 126174972681906 f_{n-11} + 505586141196430 f_{n-10} - 1393306307155755 f_{n-9} + 2793869602879077 f_{n-8} - 4204551925534524 f_{n-7} + 4825671323488452 f_{n-6} - 4246767353305755 f_{n-5} + 2854429571790805 f_{n-4} - 1445313351681906 f_{n-3} + 537247052515662 f_{n-2} - 140970750679621 f_{n-1} + 27511554976875 f_n)$

## Fórmulas de Falkner implícitas.

$k = 1: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{6} h^2 (f_{n+1} + 2 f_n)$

$k = 2: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{24} h^2 (3 f_{n+1} + 10 f_n - f_{n-1})$

$k = 3: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{360} h^2 (38 f_{n+1} + 171 f_n - 36 f_{n-1} + 7 f_{n-2})$

$k = 4: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{1440} h^2 (135 f_{n+1} + 752 f_n - 246 f_{n-1} + 96 f_{n-2} - 17 f_{n-3})$

$k = 5: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{10080} h^2 (863 f_{n+1} + 5674 f_n - 2542 f_{n-1} + 1492 f_{n-2} - 529 f_{n-3} + 82 f_{n-4})$

$k = 6: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{120960} h^2 (9625 f_{n+1} + 72474 f_n - 41469 f_{n-1} + 32524 f_{n-2} - 17313 f_{n-3} + 5370 f_{n-4} - 731 f_{n-5})$

$k = 7: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{1814400} h^2 (135812 f_{n+1} + 1147051 f_n - 801858 f_{n-1} + 787565 f_{n-2} - 559400 f_{n-3} + 260373 f_{n-4} - 70906 f_{n-5} + 8563 f_{n-6})$

$k = 8: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{7257600} h^2 (515529 f_{n+1} + 4809956 f_n - 3983564 f_{n-1} + 4702524 f_{n-2} - 4177930 f_{n-3} + 2593756 f_{n-4} - 1059756 f_{n-5} + 256004 f_{n-6} - 27719 f_{n-7})$

$k = 9: \; y_{n+1} = y_n + h\, y'_n + \frac{1}{239500800} h^2 (16252165 f_{n+1} + 165571176 f_n - 158828124 f_{n-1} + 219047820 f_{n-2} - 233668482 f_{n-3} + 181390740 f_{n-4} - 98836476 f_{n-5} + 35818644 f_{n-6} - 7757355 f_{n-7} + 760292 f_{n-8})$

$k = 10:\ y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \dfrac{1}{958003200}\,h^2(-2580745f_{n-9} + 3(9616206f_{n-8} - 49054315f_{n-7} + 150987992f_{n-6} - 312434118f_{n-5} + 458636900f_{n-4} - 492210126f_{n-3} + 395293560f_{n-2} - 250482007f_{n-1} + 688092154f_n + 20809305f_{n+1})$

$k = 11:\ y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \dfrac{1}{435891456000}\,h^2(1013143139f_{n-10} - 12318813504f_{n-9} + 68848993835f_{n-8} - 234127757910f_{n-7} + 540435844950f_{n-6} - 894544701288f_{n-5} + 1094111498718f_{n-4} - 1006204057860f_{n-3} + 706744327335f_{n-2} - 397630812200f_{n-1} + 324226504599f_n + 27391558186f_{n+1})$

$k = 12:\ y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \dfrac{1}{5230697472000}\,h^2(-10633170023f_{n-11} + 139755757944f_{n-10} - 849614983566f_{n-9} + 3165485331080f_{n-8} - 8072952256305f_{n-7} + 14906700797616f_{n-6} - 20559585516708f_{n-5} + 21550808642832f_{n-4} - 17337867855705f_{n-3} + 10820229333080f_{n-2} - 5473358967918f_{n-1} + 4018316095464f_n + 318065528209f_{n+1})$

$k = 13:\ y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \dfrac{1}{15692092416000}\,h^2(28216703738f_{n-12} - 398716658663f_{n-11} + 2620170165396f_{n-10} - 10618822219766f_{n-9} + 29671399165910f_{n-8} - 60533754479721f_{n-7} + 93139966007256f_{n-6} - 110098620164532f_{n-5} + 100967323639302f_{n-4} - 72188546739785f_{n-3} + 40530665268308f_{n-2} - 18620979795318f_{n-1} + 12421765434986f_n + 925979880889f_{n+1})$

$k = 14:\ y_{n+1} = y_n + h\,y'_n + \dfrac{1}{62768369664000}\,h^2(-100795836211f_{n-13} + 1524008521906f_{n-12} - 10767287729853f_{n-11} + 47170365042388f_{n-10} - 143371920926275f_{n-9} + 320478860758062f_{n-8} - 544824914060517f_{n-7} + 718491173905176f_{n-6} - 743084376799761f_{n-5} + 605662558651630f_{n-4} - 389650819006351f_{n-3} + 198812345454036f_{n-2} - 83656340276473f_{n-1} + 51098203446898f_n + 3603123687345f_{n+1})$

## Fórmulas implícitas para aproximar la derivada.

$k = 1:\ y'_{n+1} = y'_n + h\,\dfrac{1}{2}\,(f_{n+1} + f_n)$

$k = 2:\ y'_{n+1} = y'_n + \dfrac{1}{12}\,h(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$

$k = 3:\ y'_{n+1} = y'_n + \dfrac{1}{24}\,h(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$

$$k=4:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{720}\,h(251f_{n+1}+646f_n-264f_{n-1}+106f_{n-2}-19f_{n-3})$$

$$k=5:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{1440}\,h(475f_{n+1}+1427f_n-798f_{n-1}+482f_{n-2}-173f_{n-3}+27f_{n-4})$$

$$k=6:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{120960}\,h(9625f_{n+1}+72474f_n-41469f_{n-1}+32524f_{n-2}-17313f_{n-3}+5370f_{n-4}-731f_{n-5})$$

$$k=7:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{1814400}\,h(135812f_{n+1}+1147051f_n-801858f_{n-1}+787565f_{n-2}-559400f_{n-3}+260373f_{n-4}-70906f_{n-5}+8563f_{n-6})$$

$$k=8:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{7257600}\,h(515529f_{n+1}+4809956f_n-3983564f_{n-1}+4702524f_{n-2}-4177930f_{n-3}+2593756f_{n-4}-1059756f_{n-5}+256004f_{n-6}-27719f_{n-7})$$

$$k=9:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{239500800}\,h(16252165f_{n+1}+165571176f_n-158828124f_{n-1}+219047820f_{n-2}-233668482f_{n-3}+181390740f_{n-4}-98836476f_{n-5}+35818644f_{n-6}-7757355f_{n-7}+760292f_{n-8})$$

$$k=10:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{958003200}\,h(-3250433f_{n-9}+36284876f_{n-8}-184776195f_{n-7}+567450984f_{n-6}-1170597042f_{n-5}+1710774528f_{n-4}-1823311566f_{n-3}+1446205080f_{n-2}-890175549f_{n-1}+656185652f_n+134211265f_{n+1})$$

$$k=11:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{7257600}\,h(5675265f_{n-10}-68928781f_{n-9}+384709327f_{n-8}-1305971115f_{n-7}+3007739418f_{n-6}-4963166514f_{n-5}+6043521486f_{n-4}-5519460582f_{n-3}+3828828885f_{n-2}-2092490673f_{n-1}+1374799219f_n+262747265f_{n+1})$$

$$k=12:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{2615348736000}\,h(-13695779093f_{n-11}+179842822566f_{n-10}-1092096992268f_{n-9}+4063327863170f_{n-8}-10344711794985f_{n-7}+19058185652796f_{n-6}-26204344465152f_{n-5}+27345870698436f_{n-4}-21847538039895f_{n-3}+13465774256510f_{n-2}-6616420957428f_{n-1}+3917551216986f_n+703604254357f_{n+1})$$

$$k=13:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{5230697472000}\,h(24466579093f_{n-12}-345457086395f_{n-11}+2268078814386f_{n-10}-9181635605134f_{n-9}+25620259777835f_{n-8}-52177910882661f_{n-7}+$$

$80101021029180f_{n-6}-94393338653892f_{n-5}+86180228689563f_{n-4}-61188680131285f_{n-3}+33928990133618f_{n-2}-15141235084110f_{n-1}+8153167962181f_n+1382741929621f_{n+1})$

$$k=14:\ y'_{n+1}=y'_n+\frac{1}{31384184832000}\,h(-132282840127f_{n-13}+1998759236336f_{n-12}-14110480969927f_{n-11}+61759426692544f_{n-10}-187504936597931f_{n-9}+418551804601264f_{n-8}-710312834197347f_{n-7}+934600833490944f_{n-6}-963605400824733f_{n-5}+781911618071632f_{n-4}-499547203754837f_{n-3}+251724894607936f_{n-2}-102885148956217f_{n-1}+50770967534864f_n+8164168737599f_{n+1})$$

# Apéndice C

# Bibliografía

# Bibliografía


[1] Abramowitz M. and Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications. New York. (1972)

[2] Alipanah A. *Numerical solution to differential equations via hybrid of block pulse and rationalized Haar functions*, Math. Reports **13** (2011) , 117–126

[3] Alvarez J. and Rojo J. *An improved class of generalized Runge-Kutta-Nyström methods for special second-order differential equations*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **9** (2004) , 217–227

[4] Amodio P. and Settanni G. *High order finite difference schemes for the solution of second order initial value problems*, Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics **5** (2010) , 3–10

[5] Adesanya A.O., Odekunle M.R. and Adeyeye A.O. *Continuous Block Hybrid-Predictor-Corrector method for the solution of* $y'' = f(x, y, y')$, International Journal of Mathematics and Soft Computing **2** (2012) , 35–42

[6] Areo E. A. and Adeniyi R. B. *A self-starting linear multistep method for direct solution of initial value roblems of second order ordinary differential equations*, International Journal of Pure and Applied Mathematics **82** (2013) , 345–364

[7] Arnold V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag. New York. (1978)

[8] Ascher U. and Petzold L. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, SIAM. Philadelphia. (1998)

[9] Awoyemi D. O. *A new sixth-order algorithm for general second order ODEs*, International Journal of Computer Mathematics **77** (2001) , 117–124

[10] Awoyemi D. O. and Kayode, S. J. *A maximal order collocation method for direct solution of IVPs of general second ODEs*, Proceedings of the conference organized by the National Mathematical Center, Abuja. (2005)

[11] Awoyemi D. O. and Kayode, S. J. *An Implicit Collocation Method for Direct Solution of Second Order Ordinary Differential Equations*, Journal of the Nigerian Mathematical Society **24** (2005) , 70–78

[12] Badmus A. M. and Yahaya Y. A. *An Accurate Uniform Order 6 Block Method for Direct Solution of General Second Order Ordinary Differential Equations*, The Pacific Journal of Science and Technology **10** (2009) , 248–254

[13] Beeman D. *Some multistep methods for use in molecular dynamics calculations*, J. Comput. Phys. **20** (1976), 130–139

[14] Beléndez A., Beléndez T., Márquez A. and Neipp C. *Application of He's homotopy perturbation method to conservtive truly nonlinear oscillators*, Chaos Sol. and Frac. **37** (2008), 770–780

[15] Brouwer D. and Clemence G. M. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press. London. (1961)

[16] Burden R. L. y Faires J. D. *Análisis Numérico*, Thomson Editores. México. (1998)

[17] Butcher J. C. and Heard A. D. *Stability of numerical methods for ordinary differential equations*, Numerical Algorithms **31** (2002), 59–73

[18] Butcher J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley. Chichester, England. (2003)

[19] Chawla M. M., Al-Zanaidi M. A. and Al-Ghonaim S. S. *Singly-Implicit Stabilized Extended One-Step Methods for Second-Order Initial-Value Problems with Oscillating Solutions*, Mathematical and Computer Modelling **29** (1998) , 63–72

[20] Chawla, M.M. and Rao, P.S. *Numerov-type method with minimal phase-lag for the integration of second order periodic initial-value problems II. Explicit method*, *J. Comput. Appl. Math.* **15** (1986), 329–337.

[21] Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, American Elsevier. New York. (1967)

[22] Chen Z., You X., Shu X. and Zhang M. *A New Family of Phase-Fitted and Amplification-Fitted Runge-Kutta Type Methods for Oscillators*, Journal of Applied Mathematics (2012), doi:10.1155/2012/236281.

[23] Coleman J. P. and Booth A. S. *Analysis of a Family of Chebyshev Methods for* $y'' = f(x, y)$, J. of Computational and Applied Mathematics **44** (1992) , 95–114

[24] Coleman J.P. and Ixaru L.Gr. *P-stability and exponential-fitting methods for* $y'' = f(x, y)$, IMA J. Numer. Anal. **16** (1996) ,179–199.

[25] Coleman J. P. and Duxbury S. C. *Mixed collocation methods for* $y'' = f(x, y)$, J. of Computational and Applied Mathematics **126** (2000) , 47–75

[26] Coleman J.P. and Mohamed J. *De Vogelaere´s methods with automatic error control*, Comput. Phys. Comm. **17** (1979) , 283–300

[27] Collatz L. *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer, Berlin, (1966)

[28] Cotter J. C. and Reich S. *Time Stepping Algorithms for Classical Molecular Dynamics*, Dept. of Mathematics. Imperial College, London. (2003)

[29] Crouzeix M. and Mignot A. L. *Analyse numérique des equations differentielles*, Masson. Paris. (1984)

[30] Cui D. and Huang T. *A numerical method for differential equations of second order*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **55** (1993) , 405–409

[31] Danby J. M. A. *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Willmann-Bell. Richmond, U.S.A. (1988)

[32] Davis P. J. *Interpolation and Approximation*, Dover. New York. (1975)

[33] Denk G. *A new numerical method for the integration of highly oscillatory second-order ordinary differential equations*, Applied Numerical Mathematics **13** (1993) , 57–67

[34] Dormand J. R. *Numerical Methods for Differential Equations. A Computational Approach*, CRC Press. Boca Raton. (1996)

[35] El-Hawary H. M. and Mahmoud S.M. *On some 4-point spline collocation methods for solving second-order initial value problems*, Applied Numerical Mathematics **38** (2001) , 223–236

[36] Falkner V. M. *A method of numerical solution of differential equations*, Phil. Mag. S. **7** (1936) , 621–640.

[37] Franco J. M., Correas J. M. y Petriz F. *Métodos adaptados de tipo Störmer-Cowell de orden elevado*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Calculo y Diseño en Ingeniería , Vol. 7, **2** (1991) , 193–216

[38] Franco J.M. and Gómez I. *Accuracy and linear stability of RKN methods for solving second-order stiff problems*, Appl. Numer. Math. **59** (2009) , 959–975.

[39] Franco J. M. *An explicit hybrid method of Numerov type for second-order periodic initial-value problems*, J. of Computational and Applied Mathematics **59** (1995) , 79–90

[40] Franco J. M. *Embedded pairs of explicit ARKN methods for the numerical integration of perturbed oscillators*, Proceedings of the Computational and Mathematical Methods on Science and Engineering, J. Vigo and B.Wade Eds. Alicante. Vol.I , (2002) , 92–100

[41] Frankena J. F. *Störmer-Cowell: straight, summed and split. An overview*, J. of Computational and Applied Mathematics **62** (1995) , 129–154

[42] Fukushima T. *A fast procedure solving Kepler's equation for elliptic case*, The Astronomical Journal **112** 6 (1996) , 2858–2861

[43] Funaro D. *A superconsistent Chebyshev collocation method for second-order differential operators* Numerical Algoritms **28** (2001) , 151–157

[44] García A., Martín P. and González A. B. *New methods for oscillatory problems based on classical codes*, Applied Numerical Mathematics **42** (2002) , 141–157

[45] García A., Martín P. and González A. B. *High order Runge-Kutta-Nyström codes for the integration of oscillatory problems*, Applied Numerical Mathematics **48** (2004) , 13–25

[46] García A., López D. J. and Martín P. *On the numerical integration of oscillatory problems with multistep codes*, Applied Mathematics and Computation. Próxima publicación. (2004)

[47] Gladwell I., Thomas R. *Stability properties of the Newmark, Houbolt and Wilson θ methods*, I. J. Numer. and Anal. Meth. in Geom. **4** (1980) , 143–158.

[48] González A. B. and Martín P. *Clarifying the construction and initialization of the Gauss-Jackson method*, Actes des $IV^{emes}$ Journèes Zaragoza-Pau de Mathèmatiques Appliquèes. Publications de lÚniversité de Pau (1995) , 225–232

[49] González A. B. and Martín P. *A Note Concerning Gauss-Jackson method*, Extracta Mathematicae. Vol. 11 **2** (1996) , 255–260

[50] González Martínez A. B. *Métodos numéricos tipo Runge-Kutta para la integración de osciladores perturbados*, Tesis Doctoral.U. de Valladolid. España. (1998)

[51] Gregory J., Sarker, T. and Zeman, M. *Higher Order Discretization Methods for $y'' = f(x, y, y')$*, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS **136** (1988) , 141–156

[52] Guglielmi N. and Zennaro M. *On the zero-statility of variable stepsize multistep methods: the spectral radius approach*, Numer. Math. **88** (2001) , 445–458

[53] Ha S. N. *A Nonlinear Shooting Method for Two-Point Boundary Value Problems*, Comput. Math. with App. **42** (2001) ,1411

[54] Hairer E., Norsett S. P. and Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer. Berlin. (1993)

[55] Hairer E. and Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II*, Springer. Berlin. (1996)

[56] Hairer E. and Wanner G. *Geometric Numerical Integration*, Springer. Berlin. (2002)

[57] Hairer E. and Lubich C. *Energy conservation by Störmer-type numerical integrators*, Numerical Analysis 1999, D. F. Griffiths, G. A. Watson Eds. ,(2000) , 169–190. CRC Press LCC.

[58] Hairer E., Lubich C. and Wanner G. *Geometric numerical integration illustrated by the Störmer/Verlet method*, Acta Numerica **12** (2003) , 399–450

[59] Henrici P. *Discrete variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley. New York. (1962)

[60] Heun K. *Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen*, Z. Math. Phys. **45** (1900) , 23

[61] Isaacson E. and Keller H. B. *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley. New York. (1966)

[62] Ixaru L. Gr. and Rizea M. *A Numerov-like scheme for the numerical solution of the Schrödinger equation in the deep continuum spectrum of energies*, Comput. Phycis. Commun. **19** (1980) , 23–27

[63] Ixaru L. Gr. *Numerical Methods for Differential Equations and Applications*, Editura Academiei. Romania. (1984)

[64] Ixaru L. Gr. and Paternoster B. *A conditionally P-stable fourth-order exponential-fitting method for* $y'' = f(x, y)$, Journal of Computational and Applied Mathematics **106** (1999) , 87–98

[65] Jordan D. W. and Smith P. *Nonlinear ordinary differential equations*, Clarendon Press. Oxford. (1987)

[66] Kalagiratou Z. and Simos T. E. *Construction of trigonometically and exponentially fitted Runge-Kutta-Nyström methods for the numerical solution of the Schrödinger equation and related problems - a method of 8th algebraic order*, Journal of Mathematical Chemistry **31** (2002) , 211–232

[67] Kayode, S. J. *A Zero-Stable Optimal Order Method for Direct Solution of Second Order Differential Equations*, Journal of Mathematics and Statistics **6** (2010) , 367–371

[68] Keller H. B. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*, Dover, U.S.A. (1984)

[69] Khiyal M. S. H. and Thomas R. M. *Variable-order, variable-step methods for second-order initial-value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **79** (1997) , 263–276

[70] Kinoshita H. and Nakai H. *Numerical integration methods in dynamical astronomy*, Celestial Mechanics **45** (1989) , 231–244

[71] Konguetsof A. and Simos T. E. *An Exponentially-Fitted and Triognometrically-Fitted Method for the Numerical Solution of Periodic Initial-Value Problems*, Computers and Mathematics with Applications **45** (2003) , 547–554

[72] Kramarz L. *Stability of collocation methods for the numerical solution of* $y" = f(x, y)$, BIT **20** (1980) , 215–222

[73] Krishnaiah U. A. *Adaptive methods for periodic initial value problems of second order differential equations*, J. of Comput. and Appl. Math. **8** (1982) , 101–104

[74] Krogh F. T. *On testing a subroutine for the numerical integration of ordinary differential equations*, Journal of the Association for Computing Machinery **20**, No. 4 (1973) , 542–562

[75] Lambert J. D. *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & sons, London (1973).

[76] Lambert J. D. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, John Wiley & Sons Ltd. Chichester, England (1993)

[77] Lambert J. D. and Watson I. A. *Symmetric multistep methods for periodic initial value problems*, IMA J. Numer. Anal. **18** (1976) , 189–202

[78] Lanczos C. *Applied Analysis*, Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ. (1956)

[79] Leimkuhler B. J., Reich S. and Skeel R. D. *Integration Methods for Molecular Dynamics*, IMA Volumes in Math. Appls., **82**, K. Schulten and J. Mesirov Eds. (1996) , 161–185. Springer. Berlin.

[80] Li J. and Wu X. *Adapted Falkner-type methods solving oscillatory second-order differential equations*, Numer. Algor. **62** (2013) , 355–381

[81] Majid Z. A.,Mokhtar N. Z. and Suleiman M. *Direct Two-Point Block One-Step Method for Solving General Second-Order Ordinary Differential Equations*, Mathematical Problems in Engineering (2012) , doi:10.1155/2012/184253

[82] Martín P., López D. J. and García A. *Implementation of Falkner method for problems of the form* $y'' = f(x, y)$, Applied Mathematics and Computation **109** (2000) , 183–187

[83] Mazur A. K. *Common Molecular Dynamics Algorithms Revisited: Accuracy and Optimal Time Steps of Störmer-Leapfrog Integrators*, Journal of Computational Physics **136** (2002) , 354–365

[84] Mickens R. E. *An Introduction to Nonlinear Oscillations*, Cambridge University Press. New York. (1981)

[85] Miller J. C. P. *Numerical solution of ordinary differential equations*, Numerical Analysis: an introduction. J. Walsh, Ed. Academic Press. London. (1966)

[86] Murugesan K., Dhayabaran D. P., Amirtharaj E. C. and Evans D. J. *Numerical strategy for the system of second order IVPs using RK method*

*based on centroidal mean*, Intern. J. of Computer Mathematics **80** (2003) , 233–241

[87] Newmark, N. M. *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, (1959), 67–94

[88] Norsett S. P. and Asheim A. *Regarding the absolute stability of Störmer-Cowell methods*, Discrete and continuous dynamical systems **34** (2014) , 1131–1146

[89] Omar Z. *Developing parallel 3-point implicit block method for solving second order ordinary differential equations directly*, International Journal of Management Studies **11** (2004) , 91–103

[90] Owolabi K. M *4th-Step implicit formula for solution of initial value problems of second order ordinary differential equations*, African Journal of Mathematics and Computer Science Research **4** (2011) , 270–272

[91] Panowsky J. and Richardson D. L. *A family of implicit Chebyshev methods for the numerical integration of second-order differential equations*, J. of Computational and Applied Mathematics **23** (1988) , 35–51

[92] Papageorgiou G., Famelis I. Th. and Tsitouras Ch. *A P-stable singly diagonally implicit Runge-Kutta-Nyström method*, Numerical Algorithms **17** (1998) , 345–353

[93] Parand K. and Razzaghi M. *Rational Chebyshev tau method for solving Volterra's population model*, Applied Mathematics and Computation **149** (2004) , 893–900

[94] Paternoster B. and Stecca A. *Runge-Kutta-Nyström Integrator*, Disponible en http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/532

[95] Paternoster B. *Runge-Kutta-Nyström methods for ODEs with periodic solutions based on trigonometric polynomials*, Applied Numerical Mathematics **28** (1998) , 401–412

[96] Press W. H., Teudolsky S. A., Vetterling W. T. and Flannery B. P *Numerical recipes in Fortran*, Cambridge University Press. England. (1992)

[97] Psihoyios G. and Simos T. E. *Trigonometrically fitted predictor-corrector methods for IVPs with oscillating solutions*, Journal of Computational and Applied Mathematics **158** (2003) , 135–144

[98] Peters C. F. *Numerical Integration of the Satellites of the Outer Planets*, Astron. Astrophys. **104** (1981) , 37–41

[99] Qinghong L. and Xinyuan W. *A two step explicit P-stable method for solving second order initial value problems*, Applied Mathematics and Computation **138** (2003) , 435–442

[100] Quinlan G. D. and Tremaine S. *Symmetric multistep methods for the numerical integration of planetary orbits*, The Astronomical J. **100**, No. 5, (1990) , 1694–1700

[101] Quiroz J. L. M. and Thompson D. *Getting started with Numerov's method*, Computers in Physics **11, 5** (1997) , 514–515

[102] Ramos H. and Lorenzo C., *Error analysis on the implementation of explicit Falkner methods for* $y'' = f(x, y)$ , Proceedings of the 2009 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Gijón (2009), 874–883

[103] Ramos H. and Lorenzo C., *Review of explicit Falkner methods and its modifications for solving special second-order I.V.P.s* , Comput. Phys. Comm. **181** (2010) ,1833–1841.

[104] Ramos H. and Vigo-Aguiar J., *On the frequency choice in trigonometrically fitted methods* , Applied Mathematics Letters **23** (2010) ,1378–1381.

[105] Ramos H. and Lorenzo C., *Error analysis on the implementation of implicit Falkner methods for the special second-order I.V.P.* , Proceedings of the 2010 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Almería (2010), 780–791

[106] Ramos H. and Lorenzo C., *Comparison via stability regions of the Stormer-Cowell and Falkner methods in predictor-corrector mode* , Proceedings of the 2011 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Benidorm (2011), 947–959

[107] Ramos H. and Lorenzo C., *A rational Falkner method for solving special second order IVPs.*, Proceedings of the 2012 International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. La Manga del Mar Menor (2012), 1003–1013

[108] Ramos H. *Modification of the Richardson-Panovsky Method for the Integration of Oscillatory Problems*, Proceedings of the International Conference on Scientific Computing and Mathematical Modeling. Milwaukee. U.S.A. (2000), 198–208

[109] Raptis A. D. *Two-Step Methods for the Numerical Solution of the Schrödinger Equation*, Computing **28** (1982) , 373–378

[110] Scheid. F. *Análisis Numérico*, McGraw-Hill. México. (1972)

[111] Settani G. *High order finite difference schemes for the numerical solution of second order ordinary differential problems*, Tesi di Dottorato. Università degli Studi di Bari. (2012)

[112] Shampine L. F. *Numerical solution of ordinary differential equations*, Chapman and Hall. New York. (1994)

[113] Shampine L. F. and Gordon M. K. *Computer solution of Ordinary Differential Equations. The initial Value Problem*, Freeman, San Francisco, CA, (1975)

[114] Simos T. E. and Williams P. S *A family of Numerov-type exponentially fitted methods for the numerical integration of the Schrödinger equation*, Computers Chem. **21, 6** (1997) , 403–417

[115] Simos T. E. *Some embedded modified Runge-Kutta methods for the numerical solution of some specific Schrödinger equations*, Journal of Mathematical Chemistry **24** (1998) , 23–37.

[116] Simos T. E. *Some Modified Runge-Kutta Methods for the Numerical Solution of Initial-Value Problems with Oscillating Solutions*, Journal of Scientific Computing **13** (1998) , 51–63

[117] Simos T. E., Famelis I. T. and Tsitouras C. *Zero dissipative, explicit Numerov-type methods for second order IVPs with oscillating solutions*, Numerical Algorithms **34** (2003) , 27–40

[118] Simos T. E. *An exponentially-fitted Runge-Kutta method for the numerical integration of initial-value problems with periodic or oscillating solutions*, Comput. Phys. Commun. **115** (1998) , 1–8

[119] Skeel R. D. *Variable step size destabilizes the Störmer/Leapfrog/Verlet method*, BIT **33** (1993) , 172–175

[120] Skordos P. A. *Multistep Methods for Integrating the Solar System*, Report. Massachusetts Institute of Technology. (1986)

[121] Stetter H. J. *Analysis of Discretización Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag. Berlin. (1973)

[122] Thomas R. M., Simos T. E. and Mitsou G. V. *A Family of Numerov-Type Exponentially Fitted Predictor-Corrector Methods for the Numerical Integration of the Radial Schrödinger Equation*, Numerical Analysis Report No. 249, UMIST (1994)

[123] Toxvaerd S. *A New Algorithm for Molecular Dynamics Calculations*, J. Comput. Phys. **47** (1982) , 444

[124] Tselyaev V. I. *A generalized Numerov method for linear second-order differential equations involving a first derivative term*, Archivo Na/0210320v1 arXiv (2002) , 1–7

[125] Tsitouras Ch. *Explicit Two-Step Methods for Second-Order Linear IVPs*, Computers and Mathematics with Applications **43** (2002) , 943–949

[126] Tsitouras Ch. and Simos T. E. *Explicit high order methods for the numerical integration of periodic initial-value problems*, Applied Mathematics and Computation **95** (1998) , 15–26

[127] Tsitouras Ch. and Simos T. E. *High algebraic, high phase-lag order embedded Numerov-type methods for oscillatory problems*, Applied Mathematics and Computation **131** (2002) , 201–211

[128] Tsitouras Ch. *Explicit Numerov type Methods with Reduced Number of Stages*, Computers and Mathematics with Applications **45** (2003) , 37–42

[129] Tsitouras Ch. *Families of explicit two-step methods for integration of problems with oscillating solutions*, Applied Mathematics and Computation **135** (2003) , 169–178

[130] Vanden Berghe G., De Meyer H. Van Daele, M. and Van Hecke T. *Exponentially–fitted explicit Runge–Kutta methods*, Computer Physics Communications **123** (1999), 7–15

[131] Vigo-Aguiar J. and Ramos H. *Dissipative Chebyshev exponential-fitted methods for numerical solution of second-order differential equations*, J. Comput. App. Math. **158** (2003) , 187–211

[132] Vigo-Aguiar J. and Richardson D. L. *Modification of the Richardson-Panowsky Methods for Precise Integration of Satellite Orbits*, Computers and Mathematics with Applications **45** (2003) , 25–36

[133] Vigo-Aguiar J. and Ramos H. *A variable-step Numerov method for the numerical solution of the Schrödinger equation*, J. of Mathematical Chemistry. Próxima publicación. (2004)

[134] Wilson E. L. *A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures*, SESM Report No. 68–1, Division Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley (1968)

[135] Wu X., You X. and Wang B. *Structure-Preserving Algorithms for Oscillatory Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin, (2013)

[136] Zhigilei L. *Modeling in Materials Science*, Report MSE **524** U. of Virginia. (2004)