IDEA

DE UNA GENERALIZACIÓN

DE LA

CANTIDAD IMAGINARIA

POR

J. DOMÍNGUEZ BERRUETA

Profesor de la Facultad libre de Ciencias de la Universidad de Salamanca

SALAMANCA
IMPRENTA DE CALATRAVA
á cargo de L. Rodríguez

1896

IDEA

DE UNA GENERALIZACIÓN

DE LA

CANTIDAD IMAGINARIA

POR

J. DOMÍNGUEZ BERRUETA

Profesor de la Facultad libre de Ciencias de la Universidad de Salamanca

SALAMANCA
IMPRENTA DE CALATRAVA
á cargo de L. Rodríguez

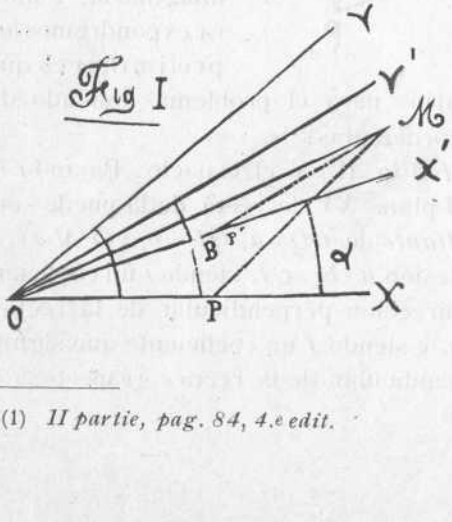
1896

INTRODUCCIÓN

Laurent, en su *Traité d'Algebre* (1), tratando de la teoría de Mourey sobre *cantidades imaginarias* en el plano, afirma que Mr. Despeyrous *(Mémoires de l'Academie de Toulouse)* ha ensayado el extender á la Geometría del espacio la noción de cantidad imaginaria, y ha hecho hasta ahora la generalización más natural de la teoría de Mourey.

No conocemos el trabajo de Mr. Despeyrous. Hemos visto, con ocasión del problema de transformación de coordenadas en Geometría Analítica, la facilidad con que las fórmulas se deducen de la identidad $x+y\,(\cos\theta+i\ \mathrm{sen}\ \theta) = x'(\cos\alpha+i\ \mathrm{sen}\ \alpha)+y'(\cos\beta+i\ \mathrm{sen}\ \beta)$.

El primer miembro expresa la recta *O M (Fig. I)* como *resultante* de las coordenadas de *M* en el sistema *XY*, y el segundo miembro la misma recta como *resultante* de las coordenadas de *M* en el sistema *X' Y'*.

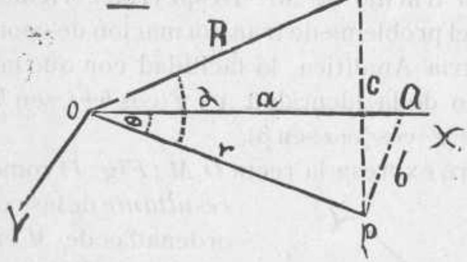


Tratando de resolver por el mismo método el problema

(1) *II partie, pag. 84, 4.e edit.*

correspondiente de Geometría del Espacio, hemos sido llevados á una generalización natural de cantidades imaginarias. Y si hemos de creer en la justificación del procedimiento, que *á posteriori* supone la invención de las fórmulas, que damos después, y la multiplicidad de pruebas lógicas de analogía, que sin excepción hemos ido descubriendo en los capitales puntos de vista, señalados solamente en este ensayo de teoría, nos será permitido el atrevimiento de presentar nuestra *idea* á examen comparativo con la generalización más natural que hasta ahora se haya hecho de la cantidad imaginaria.

Fig II



Daremos después á continuación primeramente el problema de Geometría Analítica que ha sido causa ocasional de nuestro estudio de la cantidad imaginaria, y ahora expondremos los preliminares que nos han sido necesarios para el problema indicado de transformación de coordenadas.

Sea una recta OM (Fig. II) en el espacio. Bajando la perpendicular MP al plano XY, la recta dada puede considerarse como *resultante* de $OQ=a$, $QP=b$, y $PM=c$, y podrá tener por expresión $a+bi+c\,I$, siendo i un coeficiente que significa la dirección perpendicular de la recta b respecto á la recta a, y siendo I un coeficiente que significa la dirección perpendicular de la recta c respecto á la recta b y á la recta a.

"Toda igualdad de la forma $a+bi+c\,I=a'+b'i+c'I$ (en que a, b, c, a', b' y c' son reales) envuelve estas otras tres $a=a'$; $b=b'$; $c=c'$„ (1).

Otra proposición:

"$a+bi+c\,I=R\,[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I \operatorname{sen}\alpha]$."

En efecto:

$$a+bi+c\,I= r\,(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)+c\,I.$$

$$=R\left[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\frac{r}{R}+\frac{c}{R}I\right]=R\,[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\cos\alpha$$
$$+I \operatorname{sen}\alpha]$$

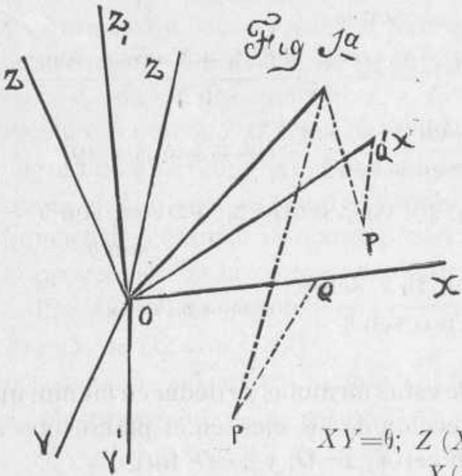
El *módulo* de OM es, pues, igual á $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, y los *argumentos* α y θ son, el primero, el ángulo de la recta con el plano XY (2), y el segundo, el ángulo de la proyección ortogonal de la recta (en el plano XY) con el eje OX (3).

(1) La demostración es la misma que la correspondiente á la igualdad $a+bi=a'+b'i$ (Véase Laurent, ob. cit.)

(2) Que contiene las cantidades *reales* y las *imaginarias* ó complejas de *primer orden*.

(3) Es decir, el *argumento* de la proyección, considerada como cantidad imaginaria ó compleja de *primer orden* en el plano.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS



1. Designando por XY al ángulo de dos ejes OX, OY; y por $X'(XY)$ al ángulo de un eje OX' con el plano XY, etc. Y siendo OZ_1, la perpendicular al plano XY, tendremos los siguientes datos:

$$XY=\theta;\ Z\,(XY)=\omega;\ X'\,(XY)=\alpha$$
$$X\,(ZZ_1)=\omega_1;\ X(X'Z_1)=\alpha_1$$
$$Y'\,(XY)=\beta;\ Z'\,(XY)=\gamma$$
$$X\,(Y'Z_1)=\beta_1;\ X(Z'Z_1)=\gamma_1$$

Llamando x, y, z las coordenadas del punto M en el sistema O, XYZ, y x', y', z' las coordenadas del mismo punto en el sistema O, $X'Y'Z'$, tenemos, considerando la cantidad OM como suma algebráica, $OQ+QP+PM$, y después como $OQ'+Q'P'+P'M$:

$$OM=x+y\,(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)+z\,[(\cos\omega_1+i\,\mathrm{sen}\,\omega_1)\cos\omega+I\,\mathrm{sen}\,\omega]=x'\,[(\cos\alpha_1+i\,\mathrm{sen}\,\alpha_1)\cos\alpha+I\,\mathrm{sen}\,\alpha]+y'\,[(\cos\beta_1+i\,\mathrm{sen}\,\beta_1)\cos\beta+I\,\mathrm{sen}\,\beta]+z'\,[(\cos\gamma_1+i\,\mathrm{sen}\,\gamma_1)\cos\gamma_1+I\,\mathrm{sen}\,\gamma]$$

Identificando ahora las partes reales de ambos miembros y los coeficientes respectivos de i y de I resulta:

$$x+y\cos\theta+z\cos\omega\cos\omega_1=x'\cos\alpha\cos\alpha_1+y'\cos\beta\cos\beta_1+z'\cos\gamma\cos\gamma_1$$

$$y\operatorname{sen}\theta+z\cos\omega\operatorname{sen}\omega_1=x'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha_1+y'\cos\beta\operatorname{sen}\beta_1+z'\cos\gamma\operatorname{sen}\gamma_1$$

$$z\operatorname{sen}\omega=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\beta+z'\operatorname{sen}\gamma$$

De donde:

$$z=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\beta+z'\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\omega}\qquad[1]$$

$$y=\frac{x'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha_1+y'\cos\beta\operatorname{sen}\beta_1+z'\cos\gamma\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\beta+z'\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta}\cos\omega\operatorname{sen}\omega_1\qquad[2]$$

$$x=\frac{x'\cos\alpha\operatorname{sen}(\theta-\alpha_1)+y'\cos\beta\operatorname{sen}(\theta-\beta_1)+z'\cos\gamma\operatorname{sen}(\theta-\gamma_1)}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\beta+z'\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\theta}\cos\omega\operatorname{sen}(\theta-\omega_1)\qquad[3]$$

2. *Corolario.*—De estas fórmulas se deducen fácilmente las de cambio de dirección de los ejes en el plano, observando que z y z' son ceros, $\alpha=O$; y $\beta=O$; luego:

$$y=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha_1+y'\operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$x=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha_1)+y'\operatorname{sen}(\theta-\beta_1)}{\operatorname{sen}\theta}$$ que son las

conocidas fórmulas de Geometría Plana, designando α_1 y β_1 los ángulos que los nuevos ejes OX', OY' forman con el eje OX.

Módulo de OM.—Siendo el módulo de una cantidad imaginaria $a+bi+c\,I$, igual á $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, llamando R al módulo de OM tendremos:

$$R^2=(x+y\cos\theta+z\cos\omega_1\cos\omega)^2+(y\,\mathrm{sen}\,\theta+z\,\mathrm{sen}\,\omega_1\cos\omega)^2$$
$$+z^2\mathrm{sen}^2\omega=x^2+y^2\cos^2\theta+z^2\cos^2\omega_1\cos^2\omega+2\,x\,y\cos\theta$$
$$+y^2\mathrm{sen}^2\theta+z^2\mathrm{sen}^2\omega_1\cos^2\omega+2\,xz\cos\omega_1\cos\omega$$
$$+z^2\mathrm{sen}^2\omega+2\,yz\cos\omega\cos(\theta-\omega_1)$$
$$=x^2+y^2+z^2+2\,xy\cos\theta+2\,xz\cos\omega_1\cos\omega$$
$$+2\,yz\cos\omega\cos(\theta-\omega_1)$$

Ahora bien, observando la figura 2.ª, se ve fácilmente que $H\cos\psi=L\cos LX_1$ (designando LX_1 el ángulo de la recta L con OX_1), y también: $L=H\cos LH$, luego, sustituyendo $\cos\psi=\cos LH\cos LX_1$ es decir, que "el coseno del ángulo de una recta exterior á un plano con una recta situada en el plano, es igual al producto del coseno del ángulo de la recta con el plano, por el coseno del ángulo de la proyección de la recta con la situada en el plano".

De modo que (fig. 1.ª) $\cos\omega_1\cos\omega=\cos\mu$ siendo μ el ángulo de OZ con OX, y
$\cos\omega\cos(\theta-\omega_1)=\cos\nu$, siendo ν el ángulo de OZ con OY.

Sustituyendo, pues, resulta:

$$R^2=x^2+y^2+z^2+2\,xy\cos\theta+2\,xz\cos\mu+2\,yz\cos\nu,$$

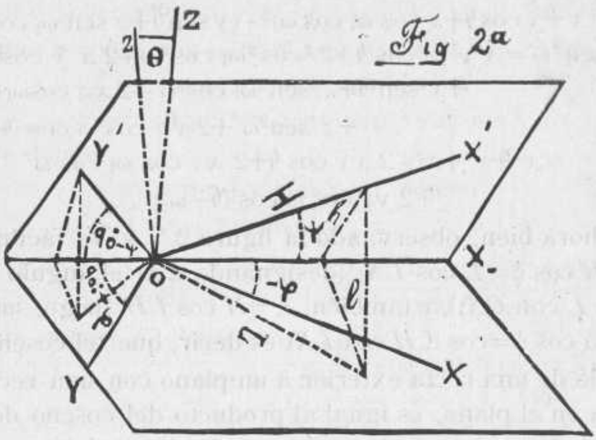
que es también el cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo oblícuo, en función de las aristas y de los ángulos que éstas forman entre sí.

3. *Fórmulas de Euler.*—Estas fórmulas se deducen de las [1], [2] y [3].

En efecto, desde luego, siendo los ejes OX, OY, OZ rectangulares $\theta=90°$; $\omega=90°$,

$$z=x'\,\mathrm{sen}\,\alpha+y'\,\mathrm{sen}\,\beta+z'\,\mathrm{sen}\,\gamma$$
$$y=x'\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha_1+y'\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta_1+z'\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\gamma_1$$
$$x=x'\cos\alpha\cos\alpha_1+y'\cos\beta\cos\beta_1+z'\cos\gamma\cos\gamma_1$$

Ahora falta hallar relaciones entre los ángulos contenidos en estas fórmulas y los ángulos θ, φ, ψ, de las fórmulas de Euler.



Bajando desde un punto de OX' la perpendicular p al plano XY, y desde el pié de esa perpendicular trazando otra perpendicular l á la recta OX, intersección de los dos planos XY y $X'Y'$, tendremos:

$$p=h \text{ sen } \theta=H \text{ sen } \alpha$$

y

$$h=H \text{ sen } \psi$$

De donde:

$$\text{sen } \alpha=\text{sen } \theta \text{ sen } \psi \quad [A]$$

De la misma manera:

$$p=l \text{ tang } \theta=L \text{ tang } \alpha$$

y

$$l=L \text{ sen } (\alpha_1-\varphi)$$

De donde:

$$\text{sen } (\alpha_1-\varphi)=\text{cot } \theta \text{ tang } \alpha \quad [B]$$

Análogamente, con el eje OY', obtendríamos los siguientes resultados:

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \theta \cos \psi \quad [C]$$

$$\text{sen } (\beta_1 - \varphi) = -\cot \theta \text{ tang } \beta \quad [D]$$

Además, siendo el ángulo $Z\ (XY)$ igual á 90º, $Z'\ (XY) = \gamma^* = 90^\circ + \theta$ $[E]$ y siendo OZ y OZ' perpendiculares á OX_1 la proyección de OZ' sobre el plano XY forma un ángulo recto con OX_1, luego

$$X\ (Z'Z) = \gamma_1 = 90^\circ + \varphi \quad [F]$$

4. En virtud, pues, de las relaciones $[A]$, $[C]$ y $[E]$

$$z = x' \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi + y' \text{ sen } \theta \cos \psi + z' \cos \theta \quad [4]$$

que es una de las fórmulas de Euler.

Para hallar la que da el valor de y, tengamos en cuenta las relaciones $[B]$, $[D]$, $[F]$, y las transformaciones trigonométricas siguientes:

$$\cot \theta \text{ tang } \alpha = \text{sen } \alpha_1 \cos \varphi - \cos \alpha_1 \text{ sen } \varphi$$

$\cos \alpha \text{ sen } \alpha_1 = \dfrac{\cot \theta \text{ sen } \alpha}{\cos \varphi} + \cos \alpha \cos \alpha_1 \text{ tang } \varphi$, y esto es igual á $\dfrac{\cos \theta \text{ sen } \psi}{\cos \varphi} + \cos \alpha \cos \alpha_1 \text{ tang } \varphi$, en virtud de la fórmula $[A]$.

$$\left(\cos \alpha \text{ sen } \alpha_1 - \frac{\cos \theta \text{ sen } \psi}{\cos \varphi}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi - \cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi \text{ sen}^2 \alpha_1}{\cos^2 \varphi}$$

$$(\cos \alpha \text{ sen } \alpha_1 \cos \varphi - \cos \theta \text{ sen } \psi)^2 = \cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi$$
$$- \cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi \text{ sen}^2 \alpha_1$$

$$\cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \alpha_1 - 2 \cos \alpha \text{ sen } \alpha_1 \cos \varphi \cos \theta \text{ sen } \psi$$
$$+ \cos^2 \theta \text{ sen}^2 \psi = \cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi$$

$$(\cos \alpha \text{ sen } \alpha_1 - \cos \theta \text{ sen } \psi \cos \varphi)^2 = \cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi$$
$$- \cos^2 \theta \text{ sen}^2 \psi \text{ sen}^2 \varphi$$

$$= \cos^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi - \text{sen}^2 \psi \text{ sen}^2 \varphi + \text{sen}^2 \alpha \text{ sen}^2 \varphi,$$

por la fórmula [A].

Y por último:

$$(\cos \alpha \text{ sen } \alpha_1 - \cos \theta \text{ sen } \psi \cos \varphi)^2 = \text{sen}^2 \varphi \cos^2 \psi$$

De donde:

$$\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha_1 = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\theta \operatorname{sen}\psi \cos\varphi,$$

que es el coeficiente de x' en la fórmula de Euler que dá el valor de y.

5. Sustituyendo en lugar de α y α_1, β y β_1 respectivamente, tendremos:

$$-\cot\theta \operatorname{tang}\beta = \operatorname{sen}\beta_1 \cos\varphi - \cos\beta_1 \operatorname{sen}\varphi.$$

Y por la misma serie de transformaciones ánteriores, teniendo además presente la relación [C], resulta finalmente:

$$(\cos\beta \operatorname{sen}\beta_1 + \cos\theta \cos\psi \cos\varphi)^2 = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\psi$$

De donde:

$$\cos\beta \operatorname{sen}\beta_1 = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi - \cos\theta \cos\psi \cos\varphi,$$

que es el coeficiente de y' en la fórmula de Euler, que dá el valor de y.

6. Y en virtud de las fórmulas [E] y [F]

$$\cos\gamma \operatorname{sen}\gamma_1 = -\operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$

Luego

$$y = x' (\operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\theta \operatorname{sen}\psi \cos\varphi)$$
$$+ y' (\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi - \cos\theta \cos\psi \cos\varphi) - z' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,$$

que es otra de las fórmulas de Euler.

7. Partiendo de las mismas fórmulas del §. 4 se obtiene:

$$\cos\alpha \cos\alpha_1 = -\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\varphi} + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha_1 \cot\varphi$$

Y por la misma serie de transformaciones resulta, finalmente:

$$\cos\alpha \cos\alpha_1 = \cos\varphi \cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \cos\theta$$

que es el coeficiente de x', en la fórmula de Euler que da el valor de x.

8. Sustituyendo β y β_1 en lugar de α y α_1 respectivamente, tendremos, §. 5:

$$\cos\beta\cos\beta_1 = \frac{\cos\theta\cos\psi}{\text{sen}\,\varphi} + \cos\beta\,\text{sen}\,\beta_1\cot\varphi$$

Y por la misma serie de transformaciones se obtendría:

$$\cos\beta\cos\beta_1 = -\cos\varphi\,\text{sen}\,\psi - \text{sen}\,\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

que es el coeficiente de y' en la fórmula de Euler, que da el valor de x.

9. Y en virtud de las fórmulas [E] y [F]

$$\cos\gamma\cos\gamma_1 = \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

Luego

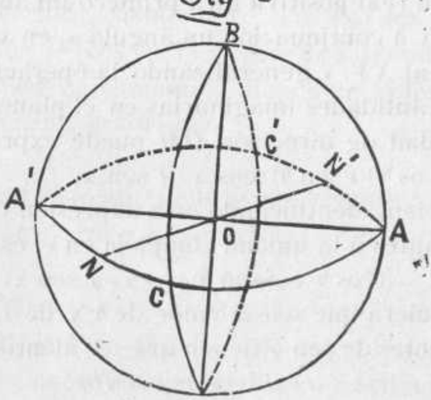
$$x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi\cos\theta)$$
$$+\,y'(-\cos\varphi\,\text{sen}\,\psi - \text{sen}\,\varphi\cos\psi\cos\theta) + z'\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,$$

que es la tercera de las fórmulas de Euler.

REPRESENTACIÓN DE LA CANTIDAD EN EL ESPACIO

10. *Significación de I.*—Hemos visto en la introducción cómo la magnitud dirigida en el espacio OM puede considerarse como suma algebráica, ó cantidad compleja en su completa generalización, de la forma $a+bi+c\,I$. Siendo la magnitud a, con el coeficiente $+1$ ó -1, dirigida en uno de los dos sentidos de la dirección de las cantidades reales en el plano XY; siendo la magnitud b, con el coeficiente $+i$ ó $-i$, dirigida en uno de los dos sentidos de la dirección perpendicular á la anterior (en el plano XY); y siendo la magnitud c, con el coeficiente $+I$ ó $-I$, dirigida en uno de los dos sentidos de la dirección perpendicular á todas las direcciones del plano XY.

Fig 3a



Si el coeficiente i de las imaginarias en el plano AOC (fig. 3.ª) es, como sabemos, igual á $\sqrt{OA.\ OA'} = \sqrt{-1}$, haciendo $r=1.$, de la misma manera

$$I = \sqrt{OA.\ OA'} = \sqrt{OC.\ OC'}$$

en general

$$I = \sqrt{ON.\ ON'} = \sqrt{(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). -(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)},$$

para todos los valores de φ desde O á π.

11. *Corolario.*—Vemos, por lo anterior, que así como i representa la raíz cuadrada de la unidad real, tomada en el sentido negativo, así también $I = \sqrt{-(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi)}$ representa la raíz cuadrada de la unidad imaginaria tomada en el sentido negativo.

Además $I = i.(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, como se ve por lo anterior, luego así como una cantidad imaginaria iA en el plano se forma poniendo el coeficiente i á la cantidad real, así una cantidad imaginaria IA en el espacio se forma poniendo el mismo coeficiente i á la cantidad $A(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ imaginaria en el plano.

12. *Otra prueba.*—Observando el modo de formar la dirección OM (véase la introducción) viendo que la dirección de la unidad real positiva gira primero un ángulo θ, en el plano XY, y á continuación un ángulo α, en un plano perpendicular al XY, y generalizando la operación de multiplicar las cantidades imaginarias en el plano, se deduce, que la unidad de dirección OM puede expresarse por el producto $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \alpha + I \operatorname{sen} \alpha)$.

Ahora bien, identificando esta expresión con la que hemos dado antes á la unidad compleja en el espacio,

$$[(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cos \alpha + I \operatorname{sen} \alpha]$$

para cualquiera que sea el valor de θ y de α, resulta que los coeficientes de sen α tienen que ser idénticos

$$I = I\,(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Y en efecto:

$$\sqrt{-(\cos 2\varphi+i \operatorname{sen} 2\varphi)}=\sqrt{-[\cos(2\varphi+2\theta)+i \operatorname{sen}(2\varphi+2\theta)]}$$

puesto que todos los valores de $(2\varphi+2\theta)$ tienen los mismos senos y cosenos que los correspondientes á otros valores de 2φ.

13. *Otra prueba.*—Si nuestra forma de expresar la cantidad imaginaria en el espacio es generalización natural y lógica de la forma de la cantidad imaginaria en el plano, las reglas fundamentales de las operaciones deben ser las mismas.

Así, el módulo del producto debe ser el producto de los módulos de los factores, y los argumentos del producto deben ser las sumas de los respectivos argumentos de los factores.

Esto es, $R[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I \operatorname{sen}\alpha]\times R'[(\cos\theta'+i \operatorname{sen}\theta')\cos\alpha'+I \operatorname{sen}\alpha']=RR'[(\cos(\theta+\theta')+i\operatorname{sen}(\theta+\theta'))\cos(\alpha+\alpha')+I \operatorname{sen}(\alpha+\alpha')]$

Verificando operaciones:

$$[\cos(\theta+\theta')+i \operatorname{sen}(\theta+\theta')]\cos\alpha\cos\alpha'+I^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha'$$
$$+I[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha'+(\cos\theta'+i \operatorname{sen}\theta')\cos\alpha' \operatorname{sen}\alpha]$$
$$=[\cos(\theta+\theta')+i \operatorname{sen}(\theta+\theta')]\cos(\alpha+\alpha')+I \operatorname{sen}(\alpha+\alpha')$$

Y esto se verifica, siendo $I=I(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)=I(\cos\theta'+i \operatorname{sen}\theta')$; $I^2=-[\cos(\theta+\theta')+i \operatorname{sen}(\theta+\theta')]$ condiciones á las cuales satisface únicamente I siendo de la forma que anteriormente hemos estudiado.

14. Hemos visto antes que $[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I \operatorname{sen}\alpha]=(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)(\cos\alpha+I \operatorname{sen}\alpha)$ [1]

luego

$$[(\cos\theta+i \operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I \operatorname{sen}\alpha][(\cos\theta'+i \operatorname{sen}\theta')\cos\alpha'+I \operatorname{sen}\alpha']$$
$$=[\cos(\theta+\theta')+i \operatorname{sen}(\theta+\theta')][\cos(\alpha+\alpha')+i \operatorname{sen}(\alpha+\alpha')]$$
$$=[\cos(\theta+\theta')+i \operatorname{sen}(\theta+\theta')]\cos(\alpha+\alpha')+I \operatorname{sen}(\alpha+\alpha').$$

15. *Fórmula de Moivre generalizada.*—Siguiendo el mismo método que para la fórmula

$$(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)^m=\cos m\theta+i\operatorname{sen} m\theta$$

tendremos

$$[(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha]^m=(\cos m\theta+i\operatorname{sen} m\theta)\cos m\alpha$$
$$+I\operatorname{sen} m\alpha. \quad [2]$$

16. *Exponencial imaginaria generalizada.*—Siendo

$$OM=R\,[(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha]=R\,[\cos\theta$$
$$+i\operatorname{sen}\theta)\,(\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha),$$

y llamando l el logaritmo de R, siguiendo el mismo método que para la fórmula

$$\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta=e^{\theta i}$$

tendremos:

$$R\,(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\,(\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha)=e^{l+\theta i+\alpha I} \quad [3]$$

17. Pero puede también demostrarse directamente la igualdad

$$R\,[(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha]=e^{l+\theta i+\alpha I}$$

En efecto, según la fórmula de Moivre generalizada

$$[(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha]$$
$$=\left[\left(\cos\frac{\theta}{m}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\right)\cos\frac{\alpha}{m}+I\operatorname{sen}\frac{\alpha}{m}\right]^m$$

y esto es igual á

$$\left[\left(\cos\frac{\theta}{m}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\right)\left(1-\frac{\alpha}{m}\varepsilon\right)+I\frac{\alpha}{m}(1-\delta)\right]^m$$

siendo ε y δ ceros cuando m es infinitamente grande. (Véase Baltzer; *Arit. univ.*, pág. 268, trad. de la 6.ª edic. alemana, por Jiménez y Merelo).

Ahora bien, llamando K á $\left(\cos\frac{\theta}{m}+i\operatorname{sen}\frac{\theta}{m}\right)$ y sacando factor común $\frac{\alpha I}{m}$, la expresión última se convierte en

$$\left[K+\frac{\alpha I}{m}\left(1-\frac{\varepsilon K}{I}-\delta\right)\right]^m=\left[K+\frac{\alpha I}{m}\right]^m$$

cuando m es suficientemente grande.

Pero $\left[K+\frac{\alpha I}{m}\right]^m=K^m\left[1+\frac{\alpha\ I:K}{m}\right]^m$ y como para m infinitamente grande $K=1$, y K^m siempre es igual á (cos θ $+i$ sen θ) resulta

$$\left[K+\frac{\alpha I}{m}\right]^m=(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\left[1+\frac{\alpha I}{m}\right]^m$$

$$=(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).\ e^{\alpha I}$$

Y por último

$$R\,[(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\cos\alpha+I\operatorname{sen}\alpha]=e^{l+\theta i+\alpha I}$$

18. La raíz n.ª de una cantidad imaginaria tiene n² valores como se ve fácilmente por la fórmula

$$\sqrt[n]{R}\left[\left(\cos\frac{\theta+2\,h\,\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\,h\,\pi}{n}\right)\cos\frac{\alpha+2\,k\,\pi}{n}\right.$$
$$\left.+\,I\operatorname{sen}\frac{\alpha+2\,k\,\pi}{n}\right]$$

19. El logaritmo de una cantidad imaginaria general tiene un valor real, un número infinito de valores imaginarios de la forma $a+bi$, y un número infinito de 2.º orden, si así podemos decir, de valores imaginarios de la forma $a+bi+c\,I$, como se deduce de la fórmula

$$L=l+(\theta+2\,h\,\pi)\,i+(\alpha+2\,k\,\pi)\,I$$

20. Claramente se ve por lo expuesto el número de consecuencias grande que pueden deducirse, para poder constituir una teoría completa de cantidades imaginarias en general, pero no nos atrevemos á dar un paso más en este desarrollo, sin haber obtenido antes la aprobación de las autoridades de la ciencia, para esta idea de generalización que sometemos ahora á su examen.

DEL MISMO AUTOR

La Electrolisis.—Madrid, 1893; en 8.º 42 páginas. *1 peseta.*

La Cientificomania.—Salamanca, 1895; en 8.º 202 páginas. *2'50 pesetas.*

(Esta obra ha merecido en el extranjero del competente crítico L. Couture, un encomiástico artículo, que puede leerse en el *Polybiblion*, 1895, Junio, sección de Filosofía, núm. 10.

La *Civiltá Cattólica*, Julio de 1895, ha visto en esta obra un «digno paralelo» á los escritos de Brunetiere contra la falsa ciencia).