

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias
Experimentales



TESIS DOCTORAL

*Desarrollo de la visualización a través del área de
superficies planas. Análisis de libros de texto
colombianos y españoles*

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia

Salamanca, 2014

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias
Experimentales



TESIS DOCTORAL

*Desarrollo de la visualización a través del área de
superficies planas. Análisis de libros de texto
colombianos y españoles*

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia

Directora: Dra. María Teresa González Astudillo

Salamanca, 2014

AGRADECIMIENTOS

A la directora de esta memoria, Dra. María Teresa González Astudillo, que desde el primer momento mostró su interés y confianza en este proyecto, y cuyos consejos así como constante y paciente acompañamiento guío su desarrollo y permitió su adecuada finalización.

A los doctores y doctoras, Matías Camacho, Raymond Duval, Vilma Mesa, Gregoria Guillén, Myriam Belisa Vega, Myriam Codes y Laura Delgado, por la lectura del instrumento metodológico, aún incipiente, sus acertados comentarios para la optimización del mismo así como para la delimitación de la investigación.

A las directivas de la Universidad de Nariño, en especial al Consejo Superior de la Universidad quien brindó todas las posibilidades y garantías para que este proyecto doctoral llegase a feliz término. A mis compañeros del Departamento de Matemáticas y Estadística, en particular, a Claudia Gómez, Saulo Mosquera, Fernando Soto, Erdulfo Ortega, Lucy Aguilera, Hilbert Blanco, Édisson Fernández, Eduardo Ibarquén y Andrés Cháves, quienes siempre motivaron el inicio de este largo camino y de quienes recibí apoyo incondicional sin el cual la sustentación de esta memoria de tesis hubiera sido imposible.

A mis compañeros y profesores del Instituto de Educación y Pedagogía que en mis estudios en la Universidad del Valle mostraron el inicio de un apasionante, siempre complejo y muy subjetivo mundo de la educación matemática, en particular a mis siempre maestras y maestros Myriam Belisa Vega, Ligia Amparo Torres, Gloria Castrillón y Jorge Arce. Así como a Octavio Pabón, Diego Garzón, Fernando Gálvez y Maribel Anacona.

A mis amigos con quienes disfruté de nuevos sabores, bebidas y colores, y con quienes descubrí los más recónditos rincones de una antiquísima, romántica y novelesca ciudad de Salamanca.

A Leonor Mojica, María Eugenia Salinas, Carmen Fonseca, Carmen Patricia Cerón, María Alejandra Pérez, Edwin Insuasti, Alejandro Galeano, Consuelo Martín, Ana María Gil, David Alejandro Arias, siempre interlocutores en aquellos no pocos instantes de

frustración y de emoción desenfrenada que caracterizaron este largo y complejo proceso de formación.

A toda mi familia, a mis padres Henry y Emérita, a mis hermanos Christian y Anggella, a mis hijos Carlos, Gina y Alexandra, a mis queridos tíos y tías, por su incondicional apoyo y palabras de aliento llenas de ternura, esperanza y comprensión.

A mi esposa Rossi, siempre paciente e incondicional quien con su delicada sonrisa transformó los momentos de amargura y desesperación en deliciosos instantes de serenidad y esperanza. Y a la deliciosa Sofía, quien engendada al final de este proceso ha traído a mi vida un mundo nuevo de sueños y expectativas.

RESUMEN

Los estudiantes no adquieren la capacidad de visualización de forma espontánea por tanto su desarrollo debe considerarse desde los primeros grados. Para ello deben determinarse cuáles son los contenidos que propician la adquisición de esta actividad cognitiva. El área de figuras planas, puede ser uno de los contenidos idóneos para el desarrollo de la visualización puesto que para su adquisición se recurre al uso de figuras involucrando al alumno en actividades en las que se requiere de su uso. Dado que además los libros de texto son un recurso importante en las aulas y que influyen en la forma en que el contenido matemático se enseña en la escuela debe considerarse su estudio y análisis. En este sentido, caracterizar las tareas sobre áreas de figuras bidimensionales según la forma como se plantea la visualización, es un primer aspecto para detectar cómo la visualización es, o puede ser, desarrollada¹ en la enseñanza de las matemáticas.

En esta memoria de tesis se caracteriza cómo la visualización es promovida en los libros en el tratamiento del concepto de área de superficies planas. Se diseñó una metodología de análisis conformada por cinco categorías, a saber: *elementos constitutivos de la visualización, funciones visuales, elementos generadores de control visual, clases de control visual, y tópicos y ciclos educativos en los que se promueve el estudio del área*. Para el diseño de la metodología de análisis, la selección de datos, y el análisis de los resultados se incluyó una adaptación de los referentes teóricos expuestos por Duval (1995, 2003, 2005) sobre la visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales. También se recurrió a la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010) sobre la existencia de ciertos elementos que guían las maneras de proceder de los estudiantes al enfrentarse con actividades matemáticas. Se analizaron 2.561 tareas presentes en 35 libros de texto de seis editoriales (tres españolas y tres colombianas) que forman parte de los capítulos de Geometría y Medida donde los textos escolares

¹ Siguiendo los presupuestos de Duval (1995, 1999, 2004) el desarrollo visual o enseñanza de la visualización alude al estudio diferenciado de dos formas de discriminar información en las figuras geométricas: la *aprehensión operatoria* y la *aprehensión discursiva*. La primera corresponde a la transformación de una figura en otra mediante la aplicación de operaciones figurales e incluye un *cambio de focalización bidimensional*, y la segunda relacionada con la descomposición de una figura en unidades figurales de dimensión inferior al de la figura (cambio dimensional). En resumen, el desarrollo visual está determinado por las tareas de área de superficies planas donde aparecen transformaciones figurales sin que haya que aplicar cambios dimensionales, o cambios dimensionales sin que se incluya las transformaciones en el contorno o posición de la figura, o donde solo aparecen cambios de focalización.

seleccionados suscitan, explícita o implícitamente, reflexiones sobre la magnitud área y su medida.

El propósito de esta memoria de tesis es aportar elementos de reflexión sobre el diseño y uso de textos escolares de España y Colombia con relación al papel de la visualización como objeto de reflexión en el tratamiento del área. De forma particular, se consideraron como cuestiones que guían el desarrollo de la investigación las siguientes: ¿Al tratar el concepto de área los libros de texto promueven el desarrollo de la visualización? ¿De qué forma los libros al tratar el área consideran distintos niveles de complejidad visual? ¿Cómo se caracterizan las tareas de área de los libros en términos de la función que desempeña la visualización? ¿Cuáles podrían ser sus efectos o consecuencias para el desarrollo de la visualización? ¿Cómo son organizadas las estructuras y tipos de control visuales en las tareas donde los libros tratan el área? ¿De qué forma tal organización podría influir en el desarrollo de la visualización?

El análisis de los resultados demuestra que los libros al incluir las *estructuras de control visual* estudiadas en la investigación favorecen de forma considerable el desarrollo visual. No es así para el caso de las *funciones visuales* donde las funciones más incluidas promueven obstáculos tanto para el estudio de las figuras geométricas bidimensionales como para el desarrollo de la visualización asociada a ellas. En cuanto a los *niveles de complejidad* considerados, su inclusión también favorece el desarrollo visual pero en menor medida que en el caso de las *estructuras de control visual*. Solo en la tercera parte de las tareas se contempla el nivel de complejidad que determina el desarrollo visual, y, además, los porcentajes de tareas cuya complejidad es la mayor (y que caracterizan los tipos de visualización que las matemáticas requieren) son poco significativos. Finalmente, la variedad de formas en que los libros promueven *control visual* enfatizan la importancia de la mediación del docente en el aula para que la visualización pueda, o no, ser desarrollada a través de la forma como los libros presentan el concepto de área de superficies planas.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	21
CAPÍTULO 1: REFERENTES TEÓRICOS	25
Introducción.....	25
1.1 La Geometría desde un punto de vista semiótico y cognitivo: la visualización y las figuras geométricas.....	25
1.2 Figuras geométricas.....	28
1.3 La visualización vinculada a las figuras geométricas.....	31
1.3.1 Visión y visualización en matemáticas.....	32
1.3.2 Formas de discriminar en una figura geométrica las relaciones entre sus elementos constituyentes.....	34
1.3.3 El desarrollo de la visualización.....	39
1.3.4 Funciones visuales y estatus de las figuras.....	40
1.4 Control de acciones cognitivas.....	43
1.5 Síntesis y conclusión.....	47
CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES	49
Introducción.....	49
2.1 Visualización en educación matemática. Un mismo término distintas acepciones.....	49
2.1.1 Visualización a través de imágenes mentales.....	51
2.1.3 Visualización por medio de la interacción entre representaciones mentales y representaciones externas.....	53
2.1.4 Visualización en representaciones semióticas de naturaleza analógica.....	59
2.1.5 Razonamiento visual.....	60
2.2 Investigaciones sobre la visualización asociada a las figuras geométricas en el Campo de la educación Matemática.....	64
2.3 Investigaciones sobre el concepto de área de superficies planas en el Campo de la Educación Matemática.....	73

2.4 Investigaciones sobre análisis de libros de texto de matemáticas en el Campo de la Educación Matemática.	84
2.5 Conclusión y síntesis.	97
CAPÍTULO 3: MÉTODO	99
Introducción.....	99
3.1 Planteamiento del problema.	99
3.2 Objetivos de la investigación.....	102
3.3 Hipótesis de trabajo	103
3.4 Metodología.....	104
3.4.1 Aproximación metodológica.	105
3.4.2 Población, criterios de selección y unidades de análisis.	105
3.4.3 Fases de la investigación.	109
3.4.4 Proceso de diseño del instrumento de análisis.....	109
3.4.5 Instrumento de análisis.	113
3.4.6 Validación de la metodología de análisis	144
3.4.7 Consideraciones para la síntesis de los datos.	147
3.5 Síntesis y conclusiones.	160
CAPÍTULO 4: DESARROLLO Y COMPLEJIDAD VISUAL	161
Introducción.....	161
4.1 Descripción general de los elementos constitutivos de la visualización en el tratamiento del área.	164
4. 2 Análisis general unificado: complejidad visual y desarrollo de la visualización.	172
4.2.1 Caracterización unificada de las tareas de los libros de texto.	172
4.2.2 Síntesis y conclusión.	175
4.3 Análisis comparativo por editoriales: complejidad visual y desarrollo de la visualización.	178
4.3.1 Caracterización de las editoriales.	178
4.3.2 Resultados por niveles de complejidad.	196
4.4. Análisis comparativo por países: complejidad visual y desarrollo de la visualización.	208
4.4.1 Caracterización de las tareas por países.	208
4.4.1 Síntesis y conclusión.	215
CAPÍTULO 5: FUNCIONES VISUALES EN EL TRATAMIENTO DEL ÁREA	221
Introducción.....	221

5.1 Funciones visuales que aparecen en los libros de texto al promover el estudio del área.....	222
5.2 Función informativa y no informativa.....	224
5.3 Análisis general unificado: función informativa y no informativa.....	227
5.3.1 Caracterización unificada de las tareas de los libros de texto.	228
5.3.2 Síntesis y conclusión.	230
5.4 Análisis comparativo por editoriales: función informativa y no informativa. ...	231
5.4.1 Caracterización de tareas por editoriales.....	231
5.4.2 Síntesis y conclusión.	241
5.5. Análisis comparativo por países: función informativa y no informativa.	244
5.5.1 Caracterización de tareas por países.....	244
5.5.2 Síntesis y conclusión.	247
CAPÍTULO 6: ESTRUCTURAS DE CONTROL VISUAL	251
Introducción.....	251
6.1 Análisis general unificado: estructuras de control visual.	253
6.1.1 Caracterización unificada de las tareas de los libros de texto.	254
6.1.2 Síntesis y conclusión.	257
6.2 Análisis comparativo por editoriales: estructuras de control visual.....	260
6.2.1 Caracterización de las tareas por editoriales.....	261
6.2.2 Síntesis y conclusión.	279
6.3 Análisis comparativo por países: estructuras de control visual.....	286
6.3.1 Caracterización de tareas por países.....	287
6.3.2 Síntesis y conclusión.	294
CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES	299
Introducción.....	299
7.1 Consecución de los objetivos de la investigación.	301
7.2 Hipótesis de investigación.	311
7.3 Limitaciones del trabajo y futuras investigaciones.....	313
7.5 Productos de la investigación.	318
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	319

ÍNDICE DE TABLAS E ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1

Tabla 1.1: Modificaciones figúrales y operaciones asociadas	36
---	----

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 3

Tabla 3.1. Aspectos generales del método implementado en la investigación.....	104
Tabla 3.2. Fases del diseño del instrumento metodológico.....	110
Tabla 3.3: Tareas y propiedades del área donde intervienen las operaciones visuales.....	116
Tabla 3.4. Categorías de análisis: rol, elementos y aprehensiones que les caracterizan.....	130
Tabla 3.5. Elementos generadores de control visual.....	139
Tabla 3.6. Clases de control visual.....	143
Tabla 3.7. Esquema del proceso de validación del instrumento de análisis.....	144
Tabla 3.8. Proceso para la síntesis de los datos.....	148

Ilustración 3.1. Reconfiguración simple.....	117
Ilustración 3.2. Reconfiguración por exceso	118
Ilustración 3.3. Reconfiguración por ensamblaje de partes.....	118
Ilustración 3.4. Configuración simple	119
Ilustración 3.5. Configuración por simetría	119
Ilustración 3.6. Configuración por simetría mediante la aplicación de espejos	119
Ilustración 3.7. Anamorfosis. Arrastre	120
Ilustración 3.8. Cuadratura	121
Ilustración 3.9. Superposición.....	122
Ilustración 3.10. Superposición inversa	122
Ilustración 3.11. Fraccionamiento por inhibición de trazos	123
Ilustración 3.12. Re-fraccionamiento.....	123
Ilustración 3.13. Modificación intermitente	124
Ilustración 3.14. Transformación no real.....	125
Ilustración 3.15. Agrandamiento de un rectángulo mediante la dilatación de sus lados	126
Ilustración 3.16. Cambio dimensional por desdoblamiento	126
Ilustración 3.17. Cambio de focalización configural	127
Ilustración 3.18. Cambio de focalización configural	127
Ilustración 3.19. Cambio de focalización mixto	128
Ilustración 3.20. Cambio de focalización mixto	128
Ilustración 3.21. Flujo lineal	129
Ilustración 3.22. Flujo en circuito	129
Ilustración 3.23. Función visual instantánea	131
Ilustración 3.24. Función visual exploratoria	131
Ilustración 3.25. Función verificativa	132
Ilustración 3.26. Función sintética	132
Ilustración 3.27. Función inductiva por despliegue de procedimientos	133
Ilustración 3.28. Función inductiva por enunciación	133
Ilustración 3.29. Función inductiva por pautas	133
Ilustración 3.30. Función inductiva por despliegue parcial de procedimiento	133
Ilustración 3.31. Función informativa por extracción de datos	134
Ilustración 3.32. Función informativa por alusión a objetos o situaciones físicas	134

Ilustración 3.33. Procedimiento por replica	136
Ilustración 3.34. Ausencia de contraste en tono y grosor.....	138
Ilustración 3.35. Contraste de tono y grosor.....	138
Ilustración 3.36. punteado	138
Ilustración 3.37. Iconismo	139
Ilustración 3.38. Fraccionar un cuadrado en dos triángulos rectángulos.....	140
Ilustración 3.39. Control ambiguo.....	142

CAPÍTULO 4

Tabla 4.1. Representación esquemática del Análisis y discusión de los datos.....	162
Tabla 4.2. Operaciones visuales.....	165
Tabla 4.3. Cambios figurales.....	167
Tabla 4.4. Cambios dimensionales.....	169
Tabla 4.5. Cambios de focalización.....	170
Tabla 4.6. Flujos visuales.....	171
Tabla 4.7. Niveles de complejidad.....	172
Tabla 4.8. Complejidad y desarrollo visual. Análisis general y local.....	173
Tabla 4.9. Complejidad y desarrollo visual. Análisis general global por tópicos.....	174
Tabla 4.10. Complejidad y desarrollo visual. Análisis general global por ciclos.....	175
Tabla 4.11. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen cada nivel de complejidad.....	176
Tabla 4.12. Síntesis de la caracterización de los niveles de complejidad	177
Tabla 4.13. Complejidad y desarrollo visual por editoriales.....	178
Tabla 4.14. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial CS.....	179
Tabla 4.15. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial CS.....	181
Tabla 4.16. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial CS.....	181
Tabla 4.17. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial de CSM.....	182
Tabla 4.18. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial CSM.....	184
Tabla 4.19. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial CSM.....	184
Tabla 4.20. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial CV.....	185
Tabla 4.21. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial CV	187
Tabla 4.22. Complejidad y desarrollo visual.. Análisis global por ciclos de la editorial CV	187
Tabla 4.23. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial ES	188
Tabla 4.24. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial ES.....	190
Tabla 4.25. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial ES	190
Tabla 4.26. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial ESM	191
Tabla 4.27. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial ESM	192
Tabla 4.28. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial ESM.....	193
Tabla 4.29. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial EA	194
Tabla 4.30. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial EA	195
Tabla 4.31. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial EA.....	196
Tabla 4.32. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen a MÁX	198
Tabla 4.33. Caracterización por editoriales de la complejidad MÁX (análisis local y global).....	199
Tabla 4.34. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen a INT-P.....	201
Tabla 4.35. Caracterización por editoriales según la complejidad INT-P (análisis local y global).....	202
Tabla 4.36. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen a MÍN	204
Tabla 4.37. Caracterización por editoriales según la complejidad MÍN (análisis local y global).....	205
Tabla 4.38. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen a INT-PC	207
Tabla 4.39. Caracterización por editoriales según la complejidad INT-PC (análisis local y global)	208
Tabla 4.40. Complejidad visual y desarrollo visual (Colombia Vs España).....	208
Tabla 4.41. Tareas CA (Colombia vs España). Análisis local.....	210
Tabla 4.42. Tareas MA (Colombia vs España). Análisis local.....	211
Tabla 4.43. Tareas PA (Colombia vs España). Análisis local.....	212
Tabla 4.44. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por tópicos	213
Tabla 4.45. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por ciclos.....	215
Tabla 4.46. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la complejidad visual.....	216
Tabla 4.47. Síntesis de la caracterización de los niveles de complejidad por país	219

CAPÍTULO 5

Tabla 5.1. Funciones visuales en los libros de texto.....	222
Tabla 5.2. Representación esquemática del análisis y discusión de los datos.....	226

Tabla 5.3. Funciones visuales. Análisis general unificado.....	228
Tabla 5.4. Funciones visuales. Análisis general y local.....	228
Tabla 5.5. Funciones visuales. Análisis general global por tópicos.....	229
Tabla 5.6. Funciones visuales. Análisis general global por ciclos.....	229
Tabla 5.7. Funciones visuales. Síntesis.....	231
Tabla 5.8. Funciones visuales. Editoriales.....	232
Tabla 5.9. Funciones visuales. Análisis local de la editorial CS.....	232
Tabla 5.10. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial CS.....	233
Tabla 5.11. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial CS.....	233
Tabla 5.12. Funciones visuales. Análisis local de la editorial CSM.....	234
Tabla 5.13. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial CSM.....	234
Tabla 5.14. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial CSM.....	235
Tabla 5.15. Funciones visuales. Análisis local de la editorial CV.....	235
Tabla 5.16. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial CV.....	236
Tabla 5.17. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial CV.....	236
Tabla 5.18. Funciones visuales. Análisis local de la editorial ES.....	237
Tabla 5.19. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial ES.....	238
Tabla 5.20. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial ES.....	238
Tabla 5.21. Funciones visuales. Análisis local de la editorial EA.....	239
Tabla 5.22. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial EA.....	239
Tabla 5.23. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial EA.....	239
Tabla 5.24. Funciones visuales. Análisis local de la editorial ESM.....	240
Tabla 5.25. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial ESM.....	241
Tabla 5.26. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial ESM.....	241
Tabla 5.27. Funciones visuales. Síntesis.....	242
Tabla 5.28. Función visual en los libros colombianos y españoles.....	244
Tabla 5.29. Tareas CA (Colombia vs España). Análisis local.....	245
Tabla 5.30. Tareas MA (Colombia vs España). Análisis local.....	245
Tabla 5.31. Tareas PA (Colombia vs España). Análisis local.....	246
Tabla 5.32. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por tópicos.....	246
Tabla 5.33. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por ciclos.....	247
Tabla 5.34. Análisis comparativo por país. Análisis local y global. Síntesis.....	248

CAPÍTULO 6

Tabla 6.1. Representación esquemática del análisis de los datos.....	253
Tabla 6.2. Estructuras de control promovidos en los libros de texto.....	254
Tabla 6.3. Estructuras de control. Libros de texto. Análisis local.....	255
Tabla 6.4. Estructuras de control. Libros de texto. Análisis global. Tópicos.....	257
Tabla 6.5. Estructuras de control. Libros de texto. Análisis global. Ciclos.....	257
Tabla 6.6. Porcentajes mayores y menores de tareas que promueven cada estructura de control.....	259
Tabla 6.7. Comparación por estructuras de control, ciclos y tópicos. Síntesis.....	259
Tabla 6.8. Estructuras de control. Editoriales.....	260
Tabla 6.9. Estructuras de control. Análisis local de la Editorial CS.....	261
Tabla 6.10. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial CS.....	263
Tabla 6.11. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial CS.....	263
Tabla 6.12. Estructuras de control. Análisis local de la editorial CSM.....	264
Tabla 6.13. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial CSM.....	266
Tabla 6.14. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial CSM.....	266
Tabla 6.15. Estructuras de control. Análisis local de la editorial CV.....	267
Tabla 6.16. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial CV.....	269
Tabla 6.17. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial CV.....	269
Tabla 6.18. Estructuras de control. Análisis local de la editorial ES.....	270
Tabla 6.19. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial ES.....	272
Tabla 6.20. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial ES.....	272
Tabla 6.21. Estructuras de control. Análisis local de la editorial ESM.....	273
Tabla 6.22. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial ESM.....	275
Tabla 6.23. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial ESM.....	275
Tabla 6.24. Estructuras de control. Análisis local de la editorial EA.....	276
Tabla 6.25. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial EA.....	278
Tabla 6.26. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial EA.....	278

Tabla 6.27. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la ECV.....	281
Tabla 6.28. Caracterización por editoriales de la ECV (análisis local y global)	281
Tabla 6.29. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la ECD.....	283
Tabla 6.30. Caracterización por editoriales de la ECD (análisis local y global).....	284
Tabla 6.31. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la ECÍco.....	286
Tabla 6.32. Caracterización por editoriales de la ECÍco.....	286
Tabla 6.33. Estructuras de control (Colombia Vs España)	287
Tabla 6.34. Tareas CA (Colombia vs España). Análisis local	288
Tabla 6.35. Tareas MA (Colombia vs España). Análisis local.....	289
Tabla 6.36. Tareas PA (Colombia vs España). Análisis local.....	291
Tabla 6.37. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por tópicos.....	292
Tabla 6.38. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por ciclos.....	293
Tabla 6.39. Síntesis de la caracterización de las estructuras de control por país.....	296

INTRODUCCIÓN

Existe en la actualidad una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en la enseñanza de las matemáticas. La aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos junto al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente, hicieron que el interés de los investigadores por el papel que juega esta actividad cognitiva en las matemáticas creciera en los últimos decenios.

La visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación que se considere. En esta investigación la atención recae en la visualización asociada a las figuras geométricas de naturaleza bidimensional, y se entiende como la discriminación de las partes de una configuración geométrica así como las acciones figurales que en ella se contemplan y que son pertinente al estudio de la problemática planteada donde las figuras geométricas bidimensionales son soportes intuitivos que ayudan de manera importante a dotar de sentido y significado los conceptos matemáticos.

No obstante al reconocimiento generalizado de lo anteriormente mencionado, diferentes investigaciones ponen en evidencia que para muchos estudiantes no es posible hacer de las figuras herramientas heurísticas potentes en matemáticas (Duval, 1999; Padilla, 1992; Marmolejo y Vega, 2012); y que la visualización no se adquiere de forma inmediata ni simple (Marmolejo, 2007; Marmolejo y Vega, 2012). Otros estudios han demostrado que la capacidad visual de un individuo es susceptible de mejoría (Presmeg, 2006a; Marmolejo y Vega, 2012) y que no es suficiente con unas cuantas sesiones para asegurar “una adecuada movilización de los tratamientos figurales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística. Por el contrario, ha de constituirse en objeto constante de enseñanza durante los primeros ciclos de la educación básica” (Marmolejo y Vega, 2013, p. 29). Por tanto, se ha llamado la atención a considerar el desarrollo de esta actividad cognitiva de forma paralela al estudio de las matemáticas (Villani, 1998; Presmeg, 2006a).

Pretendemos, por lo tanto, mediante esta investigación estudiar, analizar y caracterizar cómo la visualización tiende a ser desarrollada en los primeros grados de la educación básica, y más concretamente, cómo los libros al abordar el concepto de área de superficies planas (en adelante área) incluyen aspectos correspondientes a la visualización en los

primeros seis grados de la educación básica. Los libros de texto y el área se posicionan como tópicos para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas, pues, los primeros, tipifican las propuestas de enseñanza privilegiadas en el aula y dan vida a los lineamientos curriculares de una nación; y, el segundo, es un objeto matemático donde el acto de ver desempeña un papel fundamental para su comprensión y donde la visualización puede ser un objeto de desarrollo.

Para determinar cómo la visualización es incluida en los libros al tratar el área se consideraron cinco dimensiones: dos de naturaleza cognitiva, dos metacognitiva y una matemática. La primera dimensión considera los elementos constitutivos de la visualización en el estudio del área, es decir, las *operaciones, cambios figurales, dimensionales y de focalización bidimensional así como los flujos visuales* predominantes en los libros, mientras que la segunda se identifica las clases de función que desempeña la visualización (*heurística, inductiva e informativa*). En las dos dimensiones siguientes, se contemplan tanto los elementos y estrategias (*elementos generadores de control visual*) como las formas (*clases de control visual*) en que los libros inducen unas formas de visualización en detrimento de otras. En la quinta dimensión se caracteriza los tópicos matemáticos en que el concepto de área es promovido en los libros (*cantidad de área, medida de área y relaciones perímetro-área*). Estas dimensiones permitieron caracterizar en detalle la forma en que los libros consideran la visualización en el tratamiento del área; así, fueron cuatro los niveles de complejidad visual detectados, donde uno de ellos determina el *desarrollo visual* (uno *máximo*, dos *intermedios* y uno *mínimo*), dos tipos de *funciones visuales* (*informativa y No informativa*), tres *estructuras* y tres *clases de control visual*.

El desarrollo de esta investigación se presenta en esta memoria diseñada en seis capítulos, siendo su estructura la siguiente:

- Capítulo 1: Referentes teóricos
- Capítulo 2: Antecedentes
- Capítulo 3: Método
- Capítulo 4: Desarrollo y complejidad visual
- Capítulo 5: Funciones visuales en el tratamiento del área. Efectos potenciales para el desarrollo de la visualización.
- Capítulo 6: Estructuras de control visual
- Capítulo 7: Conclusiones

Damos a continuación una visión general de cada uno presentando para ello sus aspectos más identificativos:

El primer capítulo se proporciona el marco conceptual en que se desarrolla la investigación. Se han considerado los referentes teóricos expuestos por Raymond Duval y Lobo Mesquita sobre la visualización asociada a las figuras, y la noción de estructura

de control de Balacheff y Gaudin (2010) que resalta la existencia de elementos que guían el desarrollo de la cognición en el estudio de las matemáticas. El capítulo se divide en cinco apartados que abarcan los diferentes ámbitos con los que se relaciona este trabajo, concretando y acotando en cada uno los aspectos que resultan relevantes y necesarios para su desarrollo. En el primero, se caracteriza semióticamente y cognitivamente el estudio de la geometría; en el segundo, se define el concepto de figura geométrica indicándose las dificultades y posibilidades que caracterizan su inclusión en el estudio de la geometría. En el tercer apartado, se describen los elementos que determinan la visualización vinculada a las figuras geométricas (diferenciación entre visión y visualización, clases de discriminación de una figura, desarrollo visual y funciones visuales); y, en el cuarto, al considerar el papel de la meta cognición en el estudio de las matemáticas se define el concepto de *estructura de control* y se caracteriza su importancia en el estudio de las matemáticas, en particular, lo relacionado con la presentación del contenido en los libros de texto. Finalmente, se presenta una síntesis de los principales elementos conceptuales contemplados a lo largo del capítulo y se plantean algunas conclusiones.

En el segundo capítulo se caracteriza los resultados de las investigaciones en el campo de la Educación Matemática realizados en torno a los elementos que determinan la investigación aquí tratada, es decir: la visualización, el concepto de área y los libros de texto. Así, son cinco los apartados que conforman este capítulo, en el primero se caracteriza las distintas acepciones que del término visualización han sido contempladas en la literatura especializada; a continuación, en un segundo apartado se establece los distintos enfoques en que se ha considerado la visualización asociada a las figuras geométricas, y en los dos apartados siguientes se hace lo propio para el concepto de área y los libros de texto de matemáticas. Por último, se sintetiza las principales ideas que determinan el capítulo y que se articulan con la investigación desarrollada y se establecen algunas conclusiones.

Todos los aspectos relacionados con la naturaleza metodológica de la investigación así como la descripción de los instrumentos y la explicitación de las decisiones metodológicas consideradas en el trabajo aparecen en el tercer capítulo. Una vez planteado el problema a abordar se plantean los objetivos de la investigación, las hipótesis de trabajo y se precisa la metodología usada: cualitativa y cuantitativa, comparativa, descriptiva, interpretativa y básica donde la captación de los datos se realiza tanto de forma inductiva como deductiva. A continuación, se especifican las etapas en las que se ha llevado a cabo este trabajo, el proceso de selección de las fuentes y la metodología de análisis contemplada así como su proceso de validación. Finalmente, se determinan las consideraciones a tener en cuenta para la síntesis de datos.

El análisis de los libros seleccionados se realiza en los capítulos cuatro, cinco y seis y en el Anexo 7. En el cuarto capítulo se caracterizan y clasifican las tareas de los libros según el nivel de complejidad visual que les subyace, y se consideran las posibilidades de desarrollo de la visualización que promueven. En los capítulos quinto y sexto la atención

recae en las funciones que desempeña la visualización y en las estructuras de control visual utilizadas para inducir unas formas de ver en detrimento de otras. Los resultados de la investigación también permitieron determinar que los libros promueven el control visual de formas distintas, pero en este caso, y por limitantes de naturaleza temporal del investigador, tanto los resultados como las conclusiones fueron tratadas tangencialmente y presentadas en el Anexo 7. En cada caso el análisis y la discusión de los datos se contemplaron desde tres niveles de análisis distintos: *general unificado*, *comparativo por editoriales* y *comparativo por países*, y en cada uno se contempló dos sub-niveles de análisis: *local* y *global*. Al final de cada nivel de análisis se sintetiza y reorganiza la información presentada y se presentan algunas conclusiones.

Finalmente, el último capítulo, está dedicado a las conclusiones generales, a las aportaciones docentes y de diseño de libros de texto y a futuras investigaciones.

Después de los capítulos se incluyen las referencias bibliográficas y en los anexos se caracterizan las editoriales analizadas según el país de procedencia y el número de tareas analizadas; así mismo, los libros según la editorial a la que pertenecen y los tipos de visualización, niveles de complejidad, funciones visuales y estructuras de control considerados. De forma puntual también se determina según cada grado educativo cómo se organizan las tareas de los libros en función de los niveles de complejidad, las funciones visuales y las estructuras de control visual. Finalmente, en un formato de artículo se retoman las clases de control visual detectados en el estudio y se analizan y discuten los resultados, y se establecen las respectivas conclusiones.

CAPÍTULO 1: REFERENTES TEÓRICOS

Introducción

En este capítulo se exponen los referentes conceptuales que dan sentido tanto al problema y al propósito de la investigación como a la metodología diseñada para su desarrollo. Se han considerado por un lado la noción de Duval (1988, 1995, 1998a, 1998b, 1999, 2003, 2004) sobre la visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales, y por otro la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010) que resalta la existencia de ciertos elementos que promueven el recurso a procedimientos a seguir en resolución de tareas matemáticas. El capítulo está dividido en cuatro apartados en los que se concretan y acotan los aspectos relevantes y necesarios para el desarrollo de la investigación. En el primero, se resalta la importancia en la enseñanza de la Geometría de las figuras geométricas bidimensionales y la visualización asociada a ellas; en el segundo, se caracteriza semióticamente qué es una figura, en el tercer apartado, se describen los elementos que determinan la visualización vinculada a las figuras geométricas bidimensionales; y, en el último, se trata la definición de estructura de control caracterizándose su importancia en relación con las tareas matemáticas y, en particular, con la presentación del contenido en los libros de texto.

1.1 La Geometría desde un punto de vista semiótico y cognitivo: la visualización y las figuras geométricas.

Uno de los campos de conocimiento en los que es más notorio el bajo nivel de logros en la educación básica y media es el relativo a las matemáticas. La precariedad de estos resultados se relaciona con la existencia de por lo menos dos características típicas de la actividad cognitiva propia al desarrollo de conocimiento matemático. En primer lugar, los objetos matemáticos nunca son accesibles por la percepción, como ocurre en otras disciplinas (Duval, 1999): al no ser asequibles los conceptos matemáticos de forma directa se recurre a sus representaciones. Por otra parte, se dispone de varios registros de representación², algunos de los cuales son necesarios para efectuar tratamientos

² Un sistema de signos se constituye en un registro de representación cuando permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: 1°, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. 2°, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se

matemáticos (Duval, 1999). Esto lleva a que en el aprendizaje de las matemáticas los alumnos tengan dificultades y encuentren obstáculos al confundir la representación con lo representado. Este estudio se inscribe en una perspectiva semiótica que considera que el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas pasa por la distinción que se haga entre el objeto y su representación, por la movilización de diferentes tipos de registros de representación semióticos y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza.

La Geometría es una de las partes de las matemáticas que genera una particular preocupación en los educadores matemáticos dado su abandono como objeto de estudio en los currículos escolares desde la segunda mitad del siglo XX (entre 1960 y 1980). Esto se ve reflejado en las encuestas nacionales e internacionales que evalúan los conocimientos matemáticos de los estudiantes; en ellas, la Geometría es con frecuencia totalmente ignorada o se incluyen muy pocos ítems relacionados con ella (Villani, 1998). En algunos casos las preguntas tienden a ser confinadas a algunos "hechos" elementales sobre figuras simples y sus propiedades; aun así, el desempeño de los estudiantes que se reporta es relativamente pobre. El movimiento de las "matemáticas modernas" basado en la suposición de que ciertas partes de la Geometría Elemental estaban "muertas" para la investigación contemporánea avanzada contribuyó, al menos indirectamente, a disminuir el rol de la Geometría en la educación, favoreciendo otros aspectos de las matemáticas y otros puntos de vista para su enseñanza (Kline, 1986) como la teoría de conjuntos, el simbolismo moderno, las estructuras algebraicas, los sistemas axiomatizados, etc.

Actualmente existe en la comunidad matemática internacional una cierta unidad de pensamiento acerca de que la Geometría, después de años de abandono, debiera ser revitalizada en sus variados aspectos y en todos los niveles escolares. No obstante, es utópico, y hasta cierto punto indeseable, pensar que esta disciplina ocupe ahora un tiempo análogo al que antaño se le dedicaba en las instituciones educativas. Hace 50 años en Colombia para la enseñanza de la Geometría, por ejemplo, se dedicaban 5 de las 10 horas semanales asignadas a las matemáticas. En la actualidad son muchos los objetos, propiedades y relaciones matemáticas a reflexionar en las aulas escolares; en contraste, los tiempos asignados cada vez son menores. La búsqueda de caminos que permitan revitalizar la Geometría como objeto de estudio es indispensable para vencer estas dificultades de orden temporal.

Otro aspecto que ha llevado a que esta disciplina haya sido relegada en los currículos escolares se relaciona con la naturaleza de la actividad cognitiva que la Geometría exige para su aprendizaje,

obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Y 3°, convertir las representaciones dadas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa (Duval, 1999)

La actividad matemática en los cursos de geometría se realiza en dos registros: el de las figuras y el de la lengua natural. Uno para designar las figuras y sus propiedades; el otro, para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis... Pero no se trata simplemente de un cambio de registro... los tratamientos efectuados separada y alternativamente en cada uno de los dos registros no bastan para que este proceso llegue a algún resultado; es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos de geometría con otras formas de actividad matemática, tiene que ver con que es absolutamente necesaria la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en lengua natural (Duval, 1999, p.147).

Pero la mayoría de los estudiantes se encuentran muy lejos de alcanzar dicha coordinación. Varias investigaciones han mostrado que uno de los mayores problemas en la enseñanza de la Geometría es que muy pocos alumnos logran la coordinación necesaria entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos, incluso al concluir la educación básica y media (Duval, 1999). Una de las razones que explica esta deficiencia tiene que ver con la naturaleza de estos registros, que no son exclusivos de las matemáticas. Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico parece ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar (Duval, 1999). En consecuencia, existe la creencia de que hay una proximidad entre los tratamientos que son naturales en cada uno de estos dos registros y aquellos que la actividad matemática solicita; sin embargo, este resulta ser un fenómeno de falsa proximidad.

...entre todos los tratamientos que espontáneamente hacen los sujetos en esos dos registros, cuando se está en el ámbito de las matemáticas, algunos se utilizan ocasionalmente y otros se rechazan sistemáticamente. Así, por ejemplo, a veces parece converger una interpretación perceptiva casi-automática de las figuras con la interpretación matemática pertinente, pero con frecuencia también está en divergencia. Pero no hay ningún índice perceptivo que permita distinguir, o prever, los casos de convergencia o de divergencia. De otro lado, la utilización de la lengua natural en las matemáticas proviene de un empleo especializado y no de un empleo común. (Duval, 1999, pp. 147-148).

Entonces ¿cómo lograr que la Geometría ocupe un lugar importante en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cómo lograr que los estudiantes discriminen entre las diferentes posibilidades que brindan los registros de las figuras y de la lengua natural aquellos tratamientos que son exigidos en el aprendizaje de la Geometría? ¿Cómo podría darse una enseñanza de la Geometría para que los alumnos alcancen una adecuada coordinación entre estos dos registros? Las investigaciones realizadas por Raymond Duval y su equipo de colaboradores aportan un importante marco conceptual para el análisis que puede acercar respuestas tentativas a los cuestionamientos planteados:

- Teniendo en cuenta que los objetos matemáticos tienen la característica de no ser sensorialmente accesibles su aprendizaje ha de pasar, necesariamente, por los tratamientos propios a cada uno de los registros de representación semiótica en los cuales ellos existen. Para el caso de la Geometría, los registros de la lengua natural y el de las figuras, como mínimo.

- El aprendizaje de los tratamientos propios a cada uno de estos dos registros de representación semiótica se ha de realizar por separado.
- Respecto a la lengua natural, es necesario hacer explícito en el currículo escolar un trabajo de diferenciación entre la organización discursiva propia de un razonamiento tipo argumentativo y uno deductivo.
- Y con respecto a las figuras, teniendo en cuenta que estas representaciones reenvían necesariamente a la actividad cognitiva de *ver*, es indispensable también suscitar de manera explícita trabajos en el aula escolar que lleven a reflexionar sobre las posibilidades que brinda la visualización en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y diferenciar los diferentes procesos de visualización que las figuras permiten.
- Teniendo en cuenta las características epistemológicas de la visualización, en relación a las del razonamiento y la construcción, esta se impone como la actividad cognitiva a privilegiar en la enseñanza de la Geometría en los primeros grados.

El interés de la presente investigación recae en el tercer y cuarto de los aspectos anteriores. En este sentido, asumimos que los libros de texto y el área se posicionan como tópicos para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas. Los primeros, al tipificar las propuestas de enseñanza privilegiadas en el aula y dar vida a los lineamientos curriculares de una nación (Schmidt et al., 1996). El segundo, al constituirse “en la ocasión propicia para promover la enseñanza de la visualización asociada a las figuras geométricas” (Marmolejo y Vega, 2012, p. 29), pues su estudio induce la aplicación de formas de ver diversas que “coincide, en gran medida, con características del aprendizaje de la visualización” (p. 11). Además, el área tiende a ser un elemento de reflexión a lo largo de toda la educación básica. Este aspecto es determinante, ya que “no bastan unas pocas sesiones para asegurar una adecuada movilización de los tratamientos figurales que permitan a la visualización ser una herramienta heurística ante las exigencias que las matemáticas escolares requieren” (p. 29), por el contrario, la adquisición “de esta actividad cognitiva ha de ser objeto de constante enseñanza durante los primeros ciclos de educación básica” (p. 29). El área, pues, “se constituye en una entrada a la enseñanza de la geometría” (p. 29).

1.2 Figuras geométricas

“Una figura geométrica es siempre una configuración de al menos dos unidades figurales elementales” (Duval, 1999, p. 151). Cada unidad figural elemental es asumida en términos de la combinación de dos tipos de variables visuales de naturaleza distinta (Duval, 1999). Una, ligada al número de dimensiones (cero, uno y dos). La otra, relacionada con variaciones de naturaleza cualitativa, por ejemplo, variaciones de forma (línea recta o línea curva, contorno abierto o contorno cerrado de una gestalt), variaciones de tamaño, de orientación (en relación al plano fronto-paralelo, variaciones de

granulación, de color, etc). Duval (1999) señala que si bien todas las variables visuales “pueden utilizarse para mejorar la “lectura” de una figura”, no todas son pertinentes a las exigencias que en matemáticas cumplen este tipo de representaciones “puesto que no son susceptibles de representar intrínsecamente relaciones proyectivas o topológicas” (Duval, 1999, p. 149).

El color puede ser importante si se trata, por ejemplo, de figuras que representan objetos del espacio. Pero,... el recurso a estas variables permite solo allanar ambigüedades de representación debidas a la tercera dimensión, sin que permita representar una relación o un objeto matemático. Esta variable de color no interviene más que como un subrayado. El tamaño y la orientación pueden parecer más discutibles: a veces se toman en consideración en la representación de una figura geométrica; pero esto implica añadir notaciones suplementarias (flechas, ejes, graduaciones...) que no permiten hablar solo en términos de variables visuales. De otra parte, si el tamaño puede ser una variable visual pertinente, la medida de las longitudes sobre una figura trazada sería un argumento tan matemáticamente válido como la deducción a partir de las propiedades matemáticas dadas discursivamente. (Duval, 1999, p. 149).

En palabras de Duval, únicamente hay una variable visual de naturaleza cualitativa que “puede de manera intrínseca, determinar una unidad de base representativa para las figuras geométricas: es la variable visual de forma...” (Duval, 1999, p. 150).

De acuerdo a lo anterior, Duval (1999) distingue como unidades figurales elementales al punto, las rectas o partes de una recta, el arco, la curva, el ángulo, la cruz, el triángulo, el cuadrado, el rectángulo, la curva en punta, la curva en “e”, el ovalo y la circunferencia. En este sentido, destacan tres aspectos que se constatan al analizar las figuras geométricas en función de tales unidades. Primero, “una figura geométrica es siempre una configuración de al menos dos unidades figurales elementales” (p, 151). Segundo, “las unidades figurales elementales de dimensión 2 (límite cerrado de un área) se estudian en geometría como configuraciones de unidades figurales de dimensión 1” (p, 151). Y tercero, que “un mismo “objeto” matemático puede representarse con unidades figurales diferentes” (p. 152).

La importancia de las figuras geométricas en cuanto al aprendizaje de las matemáticas radica en que son importantes soportes heurísticos para el desarrollo de las actividades geométricas. En fin, permiten la conducta de abducción consistente en delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración. Para Duval (1999) hablar del papel heurístico de las figuras alude a que es la conducta de abducción la que guía la deducción. Sin embargo, cuando los alumnos deben resolver situaciones donde las figuras juegan este papel, se observa que tienen dificultades para acceder a sus posibilidades y en muchos casos les asocian propiedades que no le corresponden o no llegan incluso a ver nada significativo en ellas.

Lo anterior se pone de relieve en investigaciones como la realizada por Marmolejo y Vega (2012) donde se aplicó a un grupo de estudiantes de tercer grado de Educación Básica

una serie de problemas de área en los cuales la visualización desempeñaba un papel determinante para su resolución. En los procedimientos explicitados por los alumnos se observó que un porcentaje muy alto de la población participante tiene un casi total desconocimiento de los tratamientos que se pueden hacer con las figuras. En aquellos casos donde se hizo uso de este recurso, los alumnos accedieron a las posibilidades figurales pero en su más baja racionalidad. Respecto al primer caso se identificaron, entre otros aspectos, que para la mayoría de los alumnos participantes las figuras tienen un carácter estático, es decir, para ellos hay un total desconocimiento de que la organización perceptiva de una figura se puede modificar mediante la introducción física o mental de trazos y que de esta manera se pueden obtener nuevas sub-figuras o inhibir las ya dadas. También se identificó, en casi la totalidad de los alumnos, un gran desconocimiento en cuanto a las posibilidades que tiene una figura de ser dividida en las diferentes sub-figuras que la componen para que sean susceptibles de ser trasladadas o rotadas tanto dentro de la figura como fuera de ella. De igual manera se observó una total ignorancia respecto a que, mediante estas transformaciones, la figura inicial puede ser convertida en otra con un contorno global diferente; en consecuencia, resultó imposible discriminar entre las diferentes posibilidades de transformación de una figura, aquellas potentes y pertinentes al problema planteado.

Entonces, ¿por qué al enfrentar situaciones donde las figuras contribuyen o ayudan en el proceso de resolución de la actividad planteada, los alumnos no pueden acceder a las posibilidades que ellas brindan y, por tanto, el recurso a las figuras como soporte heurístico tiende a ser dejado a un lado o juega en su más baja racionalidad?

Según Marmolejo y Vega (2012) son varios los elementos que se han de tener en cuenta para tratar de responder tal pregunta. En primer lugar, hay que tener presente que para la mayoría de los profesores el papel de ayuda o apoyo didáctico que juegan las figuras en la enseñanza de la Geometría se fundamenta en la creencia popular que basta con verlas para acceder al contenido representado, por tanto, no se consideran objetos de enseñanza. En la única etapa escolar que existe una intencionalidad de enseñanza de este registro semiótico es en la etapa preescolar, pero está más orientada al desarrollo de la motricidad fina y al reconocimiento de figuras por parte del alumno, que al desarrollo de algún tipo de racionalidad de orden geométrico. Posteriormente, en los cursos de educación básica primaria, los alumnos deben, a partir de ese reconocimiento visual y de esa actividad motora adquirida, entender todas las posibilidades que brindan los dos registros. En consecuencia, para que un alumno pueda discriminar los diferentes tratamientos que permite el registro semiótico de las figuras y de esta manera acceder a las figuras como verdaderos soportes heurísticos en el desarrollo de actividades matemáticas, es indispensable y urgente abrir espacios específicos en los currículos escolares dirigidos al trabajo con este registro.

La condición previa para la descripción precisa de los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro de las figuras geométricas es un análisis semiótico relativo a la

determinación de las unidades de base constitutivas de este registro, a las posibilidades de su articulación en figuras y a la modificación de las figuras obtenidas. Estos tratamientos son importantes puesto que es su ejecución, en parte no consciente, lo que permite a las figuras cumplir su función heurística. La descripción de estos tratamientos es igualmente importante para la enseñanza puesto que la mayoría, como lo veremos, no pueden llegar a ser dominados sin un aprendizaje específico (Duval, 1999, p.148)

Un segundo aspecto se relaciona con que no es suficiente que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras para asegurar un éxito en la comprensión y desarrollo de una actividad geométrica. Es decir, no basta con que pueda realizar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella sub-figuras, realizar transformaciones y rotaciones y transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente. Es necesario que también pueda discriminar sobre la figura dada aquellas transformaciones que por su naturaleza son pertinentes, potentes y económicas en la solución del problema planteado. Diferentes investigaciones han puesto en evidencia que, para muchos estudiantes, “ver” sobre una figura las relaciones o las propiedades relativas a las hipótesis dadas y que corresponden a la solución buscada no es fácil (Lemonidis, 1991; Padilla, 1992; Duval, 1999; Mesquita, 1989; Marmolejo, 2007, 2010; Marmolejo y Vega, 2012). Pero esta dificultad no es exclusiva de alumnos de la educación básica. Hemos podido constatar en el desarrollo de programas de cualificación dirigidos tanto a maestros en ejercicio como a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de algunas ciudades colombianas, que para muchos de ellos “ver” continúa siendo un asunto de enorme complejidad. En definitiva, ver en matemáticas está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo, por el contrario, “el acto de “ver” se basa en realidad, en un conjunto complejo de funcionamientos cognitivos” (Duval, 2003, p.41) y “es una cuestión de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico” (Marmolejo y Vega, 2012, p. 39).

1.3 La visualización vinculada a las figuras geométricas.

Como se pondrá en evidencia en el capítulo siguiente, en la literatura especializada, la *visualización* tiende a ser considerada bajo acepciones de distinta naturaleza: como el estudio de imágenes o de representaciones mentales y/o de representaciones semióticas³ de naturaleza analógica (figuras, gráficos, esquemas, tablas, etc.), o bien como proceso que genera, en sí mismo, pruebas de naturaleza matemática. En el presente estudio, al hablar de visualización aludimos de forma específica al acto de “ver” asociado a las representaciones de naturaleza analógica. En este sentido, se destaca que la *visualización*

³Un sistema de signos se constituye en un registro de representación cuando permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: 1º, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. 2º, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Y 3º, convertir las representaciones dadas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa. (Duval, 1999).

adquiere matices y características diferentes según el tipo de registro semiótico considerado (Duval, 1988, 1995, 2003). Nuestro interés recae sobre la visualización vinculada al registro semiótico de las figuras, en particular en las representaciones figurales de naturaleza bidimensional. Adaptando la definición de visualización asumida por Duval (2003), consideramos esta actividad cognitiva no solo como el reconocimiento o discriminación de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, además de aquellas que se imponen al primer golpe de vista o como la discriminación de las modificaciones de naturaleza configural y las extrapolaciones susceptibles que se pueden aplicar sobre la figura en estudio. Además tenemos en cuenta tres aspectos adicionales; la variabilidad dimensional (Duval, 2003, 2004), los cambios de focalización bidimensional (Marmolejo y González, 2011, 2013b; Marmolejo y Vega, 2012; Marmolejo, 2012) que se han de aplicar en la figura al realizar una actividad propuesta y el flujo visual (Marmolejo y González, 2011, 2013b), es decir, cuando se realiza una actividad, cómo se interrelacionan o conectan las distintas forma de ver que se aplican en la figura en estudio.

Las investigaciones realizadas por Duval y su grupo de colaboradores han permitido describir la complejidad que subyace a esta actividad cognitiva. Entre otros aspectos se encuentran la diferencia significativa entre visión y visualización; la presencia de diferentes maneras de discriminar en una figura geométrica las relaciones existentes entre sus elementos constituyentes y la existencia de factores que aumentan o disminuyen la complejidad de discriminar en una figura la operación a aplicar en ella. Así mismo, se imponen como aspectos a considerar tanto la existencia, o no, de una articulación referencial entre las partes de la figura que se enuncian en la consigna de una tarea y las que, a primer golpe de vista, se imponen en la figura, como el carácter multifuncional de la visualización y los estatus que juegan las figuras en la resolución de un problema geométrico. También, se constituye en un aspecto a tener en cuenta al describir la complejidad asociada al acto de ver, el hecho que esta es una actividad susceptible de enseñanza y aprendizaje. En lo que sigue describimos en detalle cada uno de los aspectos anteriores.

1.3.1 Visión y visualización en matemáticas.

El acercamiento a los objetos, propiedades y relaciones matemáticas exige la puesta en juego de una serie de registros de representación. Por un lado, la escritura aritmética y algebraica, la lengua natural y el discurso matemático, de otro, los gráficos cartesianos, las tablas, esquemas y figuras, se imponen como los registros de mayor presencia en las matemáticas básicas. La visualización, en cada uno de los registros del segundo grupo juega un papel determinante. En el aprendizaje de las matemáticas es imprescindible el recurso a diferentes registros de representación, es decir, los elementos que se estudian en esta disciplina son asequibles solo a través de sus representaciones, nunca lo son de forma directa, como sí suele suceder en otras disciplinas. Por lo tanto, en matemáticas se

movilizan formas de ver de naturaleza diferentes a las privilegiadas en las demás disciplinas. No vemos de la misma forma cuando tratamos con una figura geométrica, una tabla o un gráfico... como se hace sobre un esqueleto al estudiar los huesos humanos o al analizar las propiedades de una gota de sangre en el laboratorio. Reconocer la complejidad cognitiva que subyace al aprendizaje de la visualización en matemáticas exige tener en cuenta una clara diferenciación y separación entre dos actos cognitivos de naturaleza diferente: la visión (percepción de objetos físicos) y la visualización (percepción de representaciones).

El propósito de la visión es permitir una aprehensión simultánea (tomar en conjunto y en un solo acto los múltiples elementos del campo percibido, así como sus relaciones), inmediata (permitir discriminar e identificar rápidamente los múltiples elementos del campo y sus relaciones) y directa (se focaliza directamente sobre el objeto en cuestión). “En este sentido “ver” los objetos que nos rodean es siempre reconocer alguna cosa al primer golpe de vista” (Duval, 2003, p.45). En lo que respecta a la visualización, su característica principal apunta a “producir una representación que dé lugar a una aprehensión simultánea y casi inmediata, pero sin que esta representación constituya una aprehensión de los objetos representados” (Duval, 2003, p.45). De esta manera destacan dos rupturas que separan la aprehensión de objetos físicos y la de representaciones. La visualización, a diferencia de la visión, no se desarrolla en un espacio tridimensional real, por el contrario, se proyecta sobre uno de dos dimensiones. Ver en matemáticas exige pasar de ver en 3D a hacerlo en 2D. La segunda ruptura “tiende al hecho que la visualización permite asociar formas a los objetos donde la “juxtaposición”, retomando el termino de Kant, es imposible de observar en la realidad” (Duval, 2003, p.46).

En este sentido, Duval (2003, P.42) asume el acto de visualizar como la acción de,

...producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permite mirarlos como si estuvieran verdaderamente delante de los ojos. La visualización debe entonces permitir distinguir e identificar, ya sea a primer golpe de vista (aprehensión vista como inmediata) o sea de un solo golpe de vista (aprehensión simultánea) lo que se representa...

No obstante, es vital tener en cuenta que la visualización en matemáticas moviliza una aprehensión sobre las figuras que exige poner en juego algo más que una simple relación de similitud con objetos reales 3D/3D, ya sea a través de sus contorno o por medio de la disposición de elementos característicos de un todo o de un conjunto (Duval, 2003). Es decir, no basta con una visualización icónica para comprender el papel que juegan estas representaciones en el aprendizaje de las matemáticas. La visualización matemática exige: 1) la puesta en evidencia de las relaciones existentes entre las unidades de las figuras en cuestión (puntos, trazos, contornos...); 2) implica, además, la capacidad de producción, pues, las figuras geométricas son construcciones realizadas a partir de propiedades y/o reglas; y 3) una articulación con un vocabulario técnico dado en el registro de la lengua natural (Duval, 2003). En este sentido, una marcada separación entre

la visualización icónica y la visualización matemática es también indispensable en aras de reconocer la complejidad que significa ver en matemáticas. Tal como lo reseña Duval (2003) hay una enorme brecha entre el reconocimiento icónico de las formas euclidianas elementales que se privilegia en una visualización de tipo icónico y el movilizado en las tareas propias de las matemáticas. Una figura geométrica, en matemáticas, “consiste siempre en una configuración de varias formas y la mirada matemática sobre una figura no se reduce jamás a una simple percepción visual sino a la coordinación con otros tipos de aprehensión” (Duval, 2003, p. 52).

1.3.2 Formas de discriminar en una figura geométrica las relaciones entre sus elementos constituyentes.

Para describir cuál puede ser el aporte heurístico de una figura en un problema de geometría se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución del problema. Duval (1995, 2003) ha mostrado que una misma figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente: *Perceptiva*, *Operatoria*, *Discursiva* y *Secuencial de formas*. Y que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan, y en otros se oponen.

A continuación nos centraremos en los tres primeros tipos de aprehensión, pues son ellos quienes determinan la visualización, actividad cognitiva de interés en la presente investigación, mientras que la aprehensión secuencial de formas caracteriza la construcción de figuras mediante el uso de instrumentos geométricos como es el caso, entre otros, de la regla y el compás.

Aprehesión Perceptiva. En este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada. Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción. En este sentido, desde la psicología de la Gestalt, se asume que nuestro cerebro, de manera espontánea y específica tiende a organizar los elementos que perceptivamente llegan a él. Es decir, la organización perceptiva de una figura influye en la manera de ver de un individuo. Son varias las leyes (gestálticas) que permiten predecir qué organización perceptiva tiende a ser privilegiada por un individuo al centrar su atención sobre una configuración; es el caso, de la Ley de la Buena Continuidad, que alude a la “tendencia a reunir en una única estructura aquellas partes o unidades que parecen estar alineadas o en suave continuidad direccional unas respecto a otras sin que las demás cosas varíen” (Rock, 1985, 116), o la Ley de Cierre que alude a la “tendencia, sin que varíe el resto, a agrupar en estructuras unificadas aquellos elementos que juntos constituyen una entidad cerrada” (Rock, 1985, p.118).

Pero, como lo señala Duval (2003, 2004) no basta con estas maneras de ver espontáneas para cubrir las exigencias visuales que subyacen al estudio la Geometría, por el contrario, muchas veces, en matemáticas, la actividad mental que ha de movilizarse al recurrir a la visualización pone en juego actividades mentales que van en total contravía de las que espontáneamente impone nuestro cerebro. Es el caso tanto de la aplicación de transformaciones de naturaleza mereológica (Duval, 1999, 2004), como de la introducción de cambios en la manera de ver en una figura que suscita pasar de discriminar en ella una gestalt a privilegiar sus unidades constituyentes de dimensión inferior (Duval, 2003, 2004) o cuando es necesario aplicar cambios de focalización bidimensional en la configuración de partida (Marmolejo, 2012; Marmolejo y González, 2011, 2013B; Marmolejo y Vega, 2012).

De esta forma, según sea la capacidad visual de un individuo, la Aprehensión Perceptiva puede tener un rol facilitador o inhibidor en la comprensión del problema planteado (Duval, 1999). Según el mismo autor, cuando las unidades figurales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad, pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes. En primer lugar, de conformidad con la ley gestáltica de cierre, algunas unidades figurales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para construirlas.

Aprehensión Operatoria y factores de visibilidad. Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras y que hemos descrito en párrafos anteriores, se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre una figura: una figura de partida puede ser rotada, trasladada, aumentada, disminuida o reconfigurada⁴. Las modificaciones que tienen estas características son *modificaciones mereológicas*, que ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo. Cuando se agranda, disminuye o se deforma la figura inicial, hablamos de *modificación óptica*, que transforma una figura en otra apelando a su imagen; "esta transformación, que es realizable como un juego de lentes o de espejos, puede conservar la forma de partida o alterarla" (Duval, 1999, p.62). Por otro lado, también es posible desplazar o rotar tanto la figura de partida como las subfiguras que la componen, en relación con la orientación del campo en el que se destaca. Cuando esto sucede, hablamos de una *modificación posicional*.

La Aprehensión Operatoria de las figuras es "una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y por consiguiente sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen" (Duval, 1998b, p.62).

⁴ Dividir la figura en sub-figuras, reorganizarlas de tal manera que la figura inicial se transformada en otra de contorno global diferente o no

Por cada modificación existen varias operaciones⁵ (tabla 1.1) cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística. "La productividad heurística de una figura, en un problema de geometría, hace referencia a que haya una congruencia entre una de las operaciones y uno de los tratamientos matemáticos posibles del problema propuesto" (Duval, 1998b, p.62). En otras palabras, podríamos decir que es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada que se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver la actividad. La aplicación de operaciones visuales es, pues, uno de los elementos que propician la productividad heurística de las figuras.

Tipo de modificación configural	Operaciones constituyentes de la productividad heurística
<i>Mereológicas</i>	Reconfiguración
<i>Ópticas</i>	Agrandamiento. Achicamiento
<i>Posicionales</i>	Rotación. Traslación

Tabla 1.1. Modificaciones figúrales y operaciones asociadas

Sin embargo, para que los alumnos puedan hacer uso de las potencialidades que brinda el hecho de que una figura juegue un rol heurístico en la resolución de un problema de geometría, no basta que una figura sea productiva heurísticamente, pues, suele suceder que los alumnos no logran ver la operación u operaciones pertinentes en la resolución del problema. Se ha encontrado la existencia de factores que facilitan, o por el contrario, dificultan la visualización tanto de las sub-figuras, como las transformaciones figurales a tener en cuenta en la solución de la problemática planteada (Duval, 1999; Mesquita, 1989; Padilla, 1992; Grenier, 1988 (En Padilla 1992); Küschemann, 1981 (en Padilla, 1992) y Marmolejo, 2007). Además, se ha demostrado que estos factores de visibilidad inciden en los tiempos de respuestas, asunto que resalta en gran manera la complejidad cognitiva que subyace en la visualización en relación con registro semiótico de las figuras (Padilla, 1992).

En el caso de la operación de reconfiguración, investigaciones realizadas por Duval (1999), Padilla (1992) y Mesquita (1989) han discriminado una alta gama de factores que minimizan o aumentan la complejidad de ver en una figura la aplicación de esta operación los siguientes. Entre los factores de visibilidad vinculados a la operación de reconfiguración destacan:

- Que el fraccionamiento adecuado al desarrollo de la tarea propuesta sea dado sobre la figura al inicio o que deba ser encontrado,
- Que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no-convexa,

⁵ Cada una de estas modificaciones es realizable de forma física, gráfica o mental. El tipo de modificación escogido permite transformaciones de distinta naturaleza en las figuras, cuyo carácter es independiente entre sí.

- El número de rotaciones o traslaciones de las sub-figuras claves para lograr una adecuada colocación, que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermediarios a comparar,
- Que solo se deba tener en cuenta las características del contorno de la figura a reconfigurar y que las partes en que está dividida la figura a reconfigurar deban ser desplazadas dentro de la figura, o al contrario que algunas deban salir fuera de ella.

En lo relacionado con las modificaciones posicionales, en particular, en la operación de rotación, se ha puesto en evidencia que la medida del ángulo de rotación con el cual se representa una figura se constituye en un factor de visibilidad que complejiza o ayuda al reconocimiento de una forma en relación a otra. Es el caso del trabajo realizado por Pellegrino y Kail (1982) quienes ponen en evidencia que el tiempo requerido para reconocer una forma aumenta si su representación se presenta en una orientación diferente a la que habitualmente se acostumbra a privilegiar. Por su parte, Shepard y Metzler, (1971) muestran que el tiempo de reconocimiento de un mismo objeto, presentado rotado en relación al otro, aumenta según el valor del ángulo de rotación. Por otra parte, tanto en la operación de traslación como en la rotación se caracterizan como factores de visibilidad la pregnancia de las direcciones verticales y horizontales existentes entre la figura de inicio y su imagen obtenida, sea por traslación, sea por rotación (Duval, 1995).

Por otra parte, entre los factores de visibilidad vinculados a las modificaciones ópticas Duval (1995) destaca tanto la similitud o diferencia de orientación entre la figura de inicio y su imagen obtenida por la aplicación de operaciones de agrandamiento o achicamiento, como la relación entre la orientación de las líneas de perspectiva asumidas y los lados de las figuras en cuestión. Igualmente, la ubicación del centro de homotecia de la figura de inicio (dentro o fuera del contorno de la figura) es asumida como un elemento que complejiza o facilita la consideración de las operaciones ópticas en el desarrollo o comprensión de una tarea geométrica.

Marmolejo (2007), por su parte, resalta que las características del contorno de una figura junto a la orientación de los trazos que han de introducirse en ella, son aspectos que explican la dificultad que tienen los estudiantes para descomponer una figura en sub-figuras previamente determinadas.

Aprehensión Discursiva. Este tipo de aprehensión es inseparable de una doble referencia. Por un lado, a una red semántica de objetos matemáticos y, por otra, a una axiomática local. En este sentido se dice que está indisociablemente ligada a las aseveraciones correspondientes del enunciado. Dicho de otro modo, la Aprehensión Discursiva de una figura privilegia exclusivamente el estatus que el enunciado concede a sus proposiciones. Por lo tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo. Es decir, no basta con un simple

reconocimiento perceptivo para asignar a una figura o a sus unidades constituyentes propiedades geométricas particulares. Por el contrario, la consigna juega un papel determinante que impone de entrada las características matemáticas de la figura. Se pone así en evidencia una particularidad esencial del registro de las figuras “una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas de entrada” (Duval, 1999, p.159). Es decir, “la introducción de una figura geométrica necesariamente es discursiva” (Duval, 1999, p.160).

De acuerdo a lo anterior y considerando que la organización perceptiva de una figura privilegia el reconocimiento de unas unidades sobre otras, nos lleva discriminar dos particularidades que se relacionan con la complejidad cognitiva que subyace al desarrollo de una actividad geométrica y que tienen que ver con la articulación referencial, es decir, entre lo que se designa en el enunciado y lo que se privilegia en la figura (Duval, 1999). Puede suceder, que las unidades que se refieren en la consigna de una actividad, sean las mismas que se privilegian en la configuración. En ese caso, si las unidades son las pertinentes para la resolución de la tarea planteada, la complejidad disminuye. El caso contrario sucede, cuando por un lado, no hay articulación referencial o cuando, la hay, pero, las unidades referenciadas no son aquellas a tener en cuenta en la resolución de la problemática planteada. En fin, la existencia o no de una articulación referencial entre las partes de la figura que se designan en el enunciado y las que a primer golpe de vista resaltan en la figura, pueden aumentar o disminuir considerablemente los tiempos de respuesta de quienes acceden a ella e incluso pueden suscitar el fracaso en la tarea propuesta.

Por otra parte, discriminar en una figura geométrica las relaciones existentes entre los elementos constituyentes a partir de una Aprehensión Discursiva exige el reconocimiento de algunas de las unidades constitutivas de su configuración geométrica. Pero, en el estudio de la Geometría las figuras, aún las más elementales, no suelen representarse de manera separada como si fuesen una sola figura, lo cual suscita un nivel de complejidad adicional en la focalización de las partes claves, pues, por acción de la ley de cierre unas y otras sub-figuras tienden a solaparse entre sí (Duval, 1999). Un segundo aspecto tiene que ver con que raramente las unidades a discriminar en la configuración son unidades cuya dimensión es la misma que la de la figura en cuestión (Duval, 1999). Al ser la figura de dimensión 2, por ejemplo, las unidades a reconocer tienden a ser de dimensión 1 o cero. Esto obliga, a quien ve en la figura, a aplicar un proceso de deconstrucción dimensional sobre ella. Lo que suscita la aplicación de un *cambio dimensional* pues hay que pasar de ver la figura global en sus 2 dimensiones a centrarse en los elementos que la constituyen de una sola dimensión. Esta forma de proceder va totalmente en contra de los mecanismos de organización perceptiva necesarios para el reconocimiento de las formas (Duval, 1999, 2003, 2004).

Esta forma de aprehensión implica una subordinación de la Aprehensión Perceptiva a la Aprehensión Discursiva y como consecuencia una restricción de la Aprehensión Perceptiva: las propiedades de las figuras no surgen a partir de los trazos y las formas de una figura sino a partir de las propiedades mencionadas en el enunciado (Duval, 1999). En relación con la Aprehensión Operatoria, cuando existe una congruencia entre esta aprehensión y un posible tratamiento matemático del problema, la Aprehensión Discursiva puede dejarse de lado. Pero si no hay tal congruencia, se hace necesaria la Aprehensión Discursiva. Es en este caso cuando los alumnos se encuentran enfrentados a una tarea de demostración.

1.3.3 El desarrollo de la visualización.

Investigaciones como las realizadas por Duval (1998a, 1999, 2003, 2004), Mesquita (1989), Lemonidis (1991), Padilla (1992), Marmolejo y Vega (2012), Marmolejo (2007, 2010) evidencian, por un lado, que las figuras son importantes soportes heurísticos para dotar de sentido y significado el aprendizaje de las matemáticas. Por otro, que hacer de estas representaciones potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo. En consecuencia, la enseñanza de las matemáticas debe considerar que la visualización es un asunto de tratamiento de información y que es susceptible de aprendizaje (Padilla, 1992; Lemonidis, 1991; Marmolejo, 2007, 2012; Marmolejo y Vega, 2012).

En este sentido y de acuerdo a los referentes teóricos expuestos en los apartados anteriores, cualquier proceso de enseñanza que pretenda hacer de la visualización un objeto de explícito aprendizaje, ha de propiciar en las aulas actividades específicas que como mínimo susciten el desarrollo de dos tipos de transformaciones de distinta naturaleza: las transformaciones visuales de una figura bidimensional de forma global (Duval, 2004) y la deconstrucción dimensional de formas (Duval, 2004), es decir, las transformaciones visuales internas que suscitan pasar de una discriminación de unidades visuales de dimensión 2 a unidades visuales de dimensión 1. En el primer caso Duval (1999, p. 167) señala tres condiciones a considerar en su desarrollo; la primera, que las tareas propuestas no deben implicar en su desarrollo ningún tipo de actividad de razonamiento que exija la utilización de definiciones o de teoremas; la segunda, que no debe estar implicado ningún tipo de cambio dimensional en la secuencia de sub-figuras consideradas y, por último, que las tareas de enseñanza de la visualización deben venir dadas en una serie organizada en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad.

El aprendizaje de la deconstrucción dimensional de formas, por su parte, debe considerar, el desarrollo de tareas de restauración de figuras, es decir, el desarrollo de actividades donde se propongan figuras deterioradas, es decir, en representaciones donde “los ángulos, los segmentos están parcial o completamente borrados, de manera que con un

golpe de vista, nada o casi nada se organiza en una forma inmediatamente reconocible” (Duval, 2004, p. 23). Se trataría de que los estudiantes de forma visual y con ayuda de instrumentos apliquen sobre ellas prolongaciones para que aparezcan puntos de intersección ausentes que permitan trazar nuevas rectas. Además, Duval (2004) señala que las figuras deterioradas pueden ser representaciones icónicas (una figura que representa una casa) o no icónicas como objetos básicos para la enseñanza de la Geometría (triángulos, rectángulos...), ensamblados de diversas formas. Este tipo de tarea no es “una actividad cognitivamente centrada sobre las figuras particulares y matemáticamente remarcables, sino sobre el proceso de visualización para el desarrollo de la actividad geométrica” (p.24). En este sentido, el desarrollo de actividades de restauración obliga a introducir operaciones como observar una figura fuera de su marco de referencia, prolongar la recta soporte de los segmentos, reorganizar una figura dada y discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones. Igualmente, es necesario considerar en cualquier proceso de reflexión sobre la visualización en el aula, que es indispensable que el estudio en torno a estos dos tipos de transformaciones se desarrolle en tiempos y espacios distintos (Duval, 2004).

1.3.4 Funciones visuales y estatus de las figuras.

Son variadas las maneras en que la visualización soporta o guía el desarrollo de un problema matemático o permite la comprensión del despliegue de un procedimiento (función visual). En este sentido, la literatura considera que la visualización permite, entre variadas funciones visuales, dar miradas sinópticas o verificaciones subjetivas (Duval, 1998a) o la exploración heurística de situaciones complejas (Duval, 1998a; Arcavi, 2003); puede ser asumida como un legítimo elemento de prueba matemática (Davis, 1993; Arcavi, 2003), como una actividad cognitiva para extraer datos y relaciones matemáticas (Richard, 2004). Asimismo, se asume que puede generar un sentimiento de auto-prueba e inmediatez (Fischbein, 1987, citado por Arcavi, 2003, p. 220).

Consideramos que la principal función que desempeña la visualización vinculada a las figuras en matemáticas, se relaciona con que estas representaciones coadyuvan en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración, ya sea suscitando la exploración heurística de situaciones complejas o el reconocimiento de la situación planteada o promoviendo la conducta de abducción, es decir, que “de entrada, la figura ha de evitar la exploración de todos los caminos posibles captando la atención solo sobre aquellos susceptibles de conducir a la solución o sobre los que ya ha conducido a ella” (Duval, 1999, p. 153).

En dicho sentido la visualización permite ilustrar proposiciones, relaciones e ideas; suscitar preguntas a tener en cuenta en el desarrollo de una actividad matemática; ayudar a discernir entre las distintas maneras de proceder aquellas que habrán de tenerse en cuenta en el desarrollo de un procedimiento; inspirar bosquejos globales de estrategias

que van más allá de lo meramente procedimental y, finalmente, ajustar nuestras 'malas intuiciones' para poder armonizarlas con el razonamiento.

Sin embargo, diversos estudios ponen en evidencia que hacer de estas representaciones potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo (Duval, 1999; Padilla, 1992; Lémonidis, 1991; Marmolejo, 2005, 2007, 2010, 2012; Marmolejo y Vega, 2012). Por el contrario, es necesario considerar que, en las actividades que se proponen a los estudiantes, la función que desempeña la visualización no siempre contribuye o ayuda en la comprensión y desarrollo de la actividad matemática a realizar. Es el caso de la función de ilustración, en ella “la figura aparece como una simple aprehensión sinóptica de las propiedades en juego” (Mesquita, 1989, p.20). Por tanto, la visualización en este caso no desencadena ningún tipo de procedimiento que guie la resolución de la problemática planteada. Por el contrario, la figura “es una presentación redundante de lo enunciado” (Mesquita, 1989, p. 20) donde cualquier manera de ver en ella es totalmente inoperante para la resolución o comprensión de la actividad propuesta.

Mesquita (1989), al igual que el presente estudio, resalta que pueden coexistir variadas funciones en ciertos tipos de actividades, más no en todas, y que para la comprensión o desarrollo de la mayoría de ellas, las figuras no son un soporte a la intuición⁶, por el contrario, pueden constituirse en una trampa para ella, pues, “suscitan la constatación de ciertas relaciones, sin permitir su justificación” (p. 20), incluso puede que las relaciones discriminadas sean falsas. En el mismo sentido, es importante considerar que “en la mayoría de las actividades solicitantes de una aprehensión discursiva, la figura no tiene un rol más que descriptivo” (p. 20). Al contrario, se considera que la visualización promueve una función heurística en el desarrollo o comprensión de una actividad matemática, cuando es intrínseca a la representación figural y está asociada generalmente a su aprehensión operatoria (Mesquita, 1989). En este sentido, al privilegiarse en la figura una forma de Aprehensión Operatoria los procesos de resolución suelen surgir de forma inmediata. Ahora bien, si dichos procesos son matemáticamente correctos la figura juega un rol heurístico. En cambio, si no lo son, entonces la 'intuición' suele ser peligrosa o engañosa. Todo lo anterior debería obligar a utilizar las figuras con cierto nivel de precaución.

Las figuras geométricas constituyen un registro de representación multifuncional presente en la actividad matemática a través de los distintos estatus⁷ que puede llegar a desempeñar (Duval, 2003). Una figura o tiene un estatus de instanciación o uno de representación

⁶ En Mesquita (1989) el término intuición alude a que las figuras contribuyen o ayudan en el proceso de resolución o comprensión de la actividad planteada, ya sea promoviendo la conducta de abducción o permitiendo la exploración heurística y la anticipación, incluso suscitando ideas adicionales o complementarias a las descritas en el enunciado de la tarea propuesta.

⁷ Término alude a las diferentes maneras en que puede ser considerada una figura en la resolución de un problema o en la comprensión de un procedimiento desarrollado (Duval, 2003).

cuando respectivamente “aparece como una aplicación o como una ilustración de alguna cosa en general” (Duval, 2003, p. 61) o cuando “lo que es presentado toma el lugar de algo que no es actualmente perceptible o que es perceptivamente inexequible” (Duval, 2003, p. 66). Otro estatus es el de objeto, en este caso, la figura “da lugar a una comparación con otra figura, sea dentro de una misma configuración, sea respecto a otra figura que sirve de referencia o de patrón para la comparación” (Duval, 2003, p. 63). El estatus de objeto prevalece cuando dos o más figuras son comparadas por estimación o por medida (Duval, 2003). En el primer caso, la comparación se establece cualitativamente y se da respuesta a la cuestión cuándo una es figura es más grande, más pequeña o igual que otra u otras. En el segundo caso la comparación conduce a determinar un número mediante el uso de instrumentos de medida.

Es importante considerar que en las actividades de geometría pueden estar presentes los diferentes estatus, en consecuencia, según sea el caso, las operaciones y los tratamientos⁸ admisibles son diferentes (Mesquita, 1989). La dificultad radica en que “el estatus de la figura no sea explícitamente bien interpretado; es el contexto el que permite determinarlo, de forma objetiva y, en principio, no ambigua” (pp. 21-22). Igualmente, es necesario resaltar que una misma figura no puede tener diferentes estatus al mismo tiempo, pues, cada uno introduce ambivalencias de naturaleza distinta que son totalmente incompatibles entre sí (Duval, 2003). Al asumir las figuras como objetos, por ejemplo, se puede realizar la estimación mediante operaciones físicas de medida que implican un conteo o la lectura de un número; lo cual no es matemáticamente pertinente para comparar entre sí las figuras, pues, si bien “este tipo de acciones interviene en la “limpieza” o la precisión de *la producción de un trazo*, jamás incide en la justificación de un resultado” (Duval, 2003, p. 64). Por otra parte, la figura puede ser considerada como una figura concreta que se representa a sí misma o, por el contrario, una de naturaleza genérica y abstracta que representa a toda una clase de problemas asociados a ella (Mesquita, 1989), o se puede pasar de la visualización de representaciones figurales al uso de representaciones no visuales en las que los números y los cálculos, no las figuras ni su visualización, son los protagonistas (Duval, 2003). Los dos aspectos anteriores se imponen como una segunda y tercera ambivalencia que se producen al asumir las figuras con un estatus de objeto.

La existencia de ilusiones sistemáticas (ilusión primaria de Delboeuf e ilusión secundaria de Müller-Meyer) y de ciertos umbrales de discriminación perceptiva constituyen dos obstáculos a considerar en la adquisición de la visualización y de su papel en la construcción de conocimiento matemático (Duval, 2003). En el primer caso se induce a considerar las formas a comparar como si fueran iguales entre sí cuando en realidad no lo son o viceversa. Y, en el segundo caso, las formas a comparar no son discernibles entre sí. Un tercer obstáculo a tener en cuenta, se relaciona con ignorar que los objetos matemáticos no son accesibles vía sensorial, por el contrario, que es a través de

⁸ El tratamiento es una transformación de una representación al interior del registro semiótico al que pertenece y las operaciones son las acciones que se aplican sobre las representaciones para suscitar dicha transformación (Duval, 1999).

representaciones que se accede a ellos y que según el tipo de representación empleado son privilegiadas unas u otras características matemáticas del objeto. En este sentido, la figura en estudio “se representa a sí misma y las relaciones geométricas utilizadas para su construcción pueden ser reutilizadas, parcial o totalmente... es posible leer las relaciones y hacer observaciones, como sobre un objeto real” (Mesquita, 1989, p. 21). Como se evidencia en esta investigación, el último de estos obstáculos no está presente de forma exclusiva en el estatus de objeto, Esto también sucede cuando los libros de texto recurren a las figuras y estas son asumidas bajos estatus distintos.

1.4 Control de acciones cognitivas.

Flavell (1976, citado por Garofalo y Lester, 1985, p. 163) asume la autorregulación y el control de las acciones cognitivas como elementos claves en el estudio de la metacognición. Particularmente, la autorregulación considera cómo los alumnos dirigen sus comportamientos proactivamente o seleccionan estrategias para alcanzar sus metas; considera también todo conjunto de retroalimentaciones afectivas, cognitivas, motivacionales y conductuales empleadas (Cleary y Zimmerman, 2004). En este sentido la literatura especializada ha puesto en evidencia que los estudiantes que tienen dificultades en su aprendizaje no suelen entender cómo seleccionar, evaluar y ajustar las estrategias erróneas cuando estas no son eficaces (Zimmerman, 2002) y que la aplicación de estrategias de autorregulación deficiente es un factor que influye significativamente en el bajo rendimiento escolar (Gettinger y Seibert, 2002). Otros estudios muestran que los estudiantes auto-regulados, por el contrario, tienden en sus estrategias de resolución de tareas, a fijar sus metas y aplicar procesos de auto-observación y auto-evaluación (Cleary y Zimmerman, 2004). También se señala que la autorregulación es susceptible de aprendizaje (Cleary y Zimmerman, 2004) y que los estudiantes que han logrado procesos de autorregulación muestran altos niveles de motivación en la escuela (Schunk, 1996).

En el campo de la educación matemática se ha insistido en la necesidad de distinguir entre conocimiento y autorregulación de la cognición para explicar y modificar el rendimiento matemático en la escuela (Garofalo y Lester, 1985). De la misma manera se destaca que la adquisición de conocimiento sobre los propios procesos de pensamiento y el desarrollo de actividades de autorregulación y de supervisión adecuados son elementos a considerar en el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1987, 1992). También hay estudios que muestran que los momentos propicios para el desarrollo de la autorregulación son los primeros grados de enseñanza de las matemáticas y la primera infancia (Schneider y Artelt, 2010; Whitebread y Coltman, 2010); incluso algunos investigadores establecen vínculos entre los procesos de autorregulación y el desarrollo de afecto (Malmivuori, 2006) y la disminución de la ansiedad (Kramarski, Weisse y Kololshi, 2010) en las clases de matemáticas. De igual forma hay investigaciones que evidencian que la descripción detallada de procesos de autorregulación puede ser un apoyo para la aplicación explícita en el aula de modelos socioculturales de enseñanza de las matemáticas. En este sentido,

Pape, Bell y Yetkin (2003) consideran como factores cruciales a considerar por los educadores matemáticos tanto el recurso a múltiples y enriquecedoras representaciones de los objetos en las tareas matemáticas propuestas, como el tipo de discurso usado en el aula, el ambiente de trabajo que propicie el comportamiento estratégico y el apoyo explícito e individualizado de los estudiantes.

Desde un punto de vista diferente, investigaciones como las realizadas por Lester (1982, citado por Schneider y Artelt, 2010) y Kramarski, Weisse y Kololshi (2010) han tratado la relación entre la resolución de problemas matemáticos y la autorregulación. Lester (1982) indica que el conocimiento de una persona acerca de su propia cognición, antes, durante y después de un período de resolución de problemas, así como su capacidad para mantener el control ejecutivo en el sentido de monitoreo y la autorregulación afectan significativamente a la resolución exitosa del problema en desarrollo. Kramarski et al. (2010) tras estudiar los efectos de un entrenamiento meta-cognitivo aplicado a estudiantes de menor y mayor nivel de éxito matemático considera, entre otros aspectos, que los estudiantes meta-cognitivamente entrenados evidencian mayor nivel de rendimiento al resolver problemas matemáticos que aquellos que no lo han sido. Esto también se ha señalado en los trabajos de Garofalo y Lester (1985) y Schoenfeld (1987).

El control de acciones cognitivas, aspecto a considerar en esta investigación, tiene en cuenta tanto la planificación de comportamientos y selección de acciones como la evaluación de las decisiones realizadas y los resultados de los planes ejecutados (Balacheff y Gaudin, 2010). Al respecto, se ha puesto en evidencia la existencia de *estructuras de control* a través de las cuales el control de acciones cognitivas se ve influenciado y/o dirigido mediante el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Una estructura de control es todo conjunto de elementos y estrategias que en el desarrollo y comprensión de una actividad matemática “permite expresar los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios [y que hace posible] decidir si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (Balacheff y Gaudin, 2010, p. 192). Independientemente de la acción cognitiva, una estructura de control está conformada por uno o varios elementos y/o estrategias que direccionan o enfatizan el control ejercido. A cada uno de estos elementos y/o estrategias se les designará, a lo largo de este documento, como elementos de control.

Nuestro interés recae exclusivamente en la caracterización de los elementos de control y en las clases de control que se suscitan en el desarrollo y comprensión de tareas sobre área de superficies planas. Su importancia radica, como haremos alusión en los párrafos siguientes, en que permite diferenciar los tipos de concepciones presentes en los estudiantes (Balacheff y Gaudin, 2010) y estudiar los procesos de refutación, validación y modelización (Burgermeister y Coray, 2008). Igualmente, hace posible discriminar los procesos de verificación (Mesa, 2004), razonamiento (Lithner, 2004) y visualización privilegiados en los manuales escolares al construir conocimiento matemático.

Para caracterizar las concepciones sobre las funciones que dos parejas de estudiantes franceses ponen en juego al desarrollar tareas específicas en ambientes de geometría dinámica (Cabri-Geometry II), Balacheff y Gaudin (2010) proponen un modelo de concepción en función de las interacciones entre el sujeto y el medio. En este sentido consideran que la caracterización del tipo de problemas propuestos, de las operaciones movilizadas en su desarrollo, de la estructura de control utilizada y de los sistemas de representación son elementos a considerar para discriminar unos tipos de concepción de otros. En este sentido, las concepciones evidenciadas por una y otra pareja de estudiantes en la investigación de Balacheff y Gaudin se caracterizaron por la presencia de dos estructuras de control de naturaleza distinta. En una se utilizaba esencialmente el sistema de representación algebraico, control algebraico, es decir, la atención recaía en la búsqueda de la escritura simbólica adecuada de la ecuación. En la otra, se prefiere un control gráfico vinculado a los sistemas de representación gráfico y algebraico.

En un sentido similar, la investigación de Burgermeister y Coray (2008) recae en la adquisición de estrategias eficaces para la selección y el control tanto en procesos de refutación y de validación, como de modelización. Se alude a la noción de proceso de control en términos semejantes a como lo hace Balacheff y Gaudin con la estructura de control: “conjunto de medios, adecuados o no, eficaces o no, utilizados por los alumnos en una situación de resolución de problemas para responder a sus dudas cuando una resolución está en proceso de ser elaborada” (Burgermeister y Coray, 2008, p. 68). En este sentido, se considera que el proceso de control está compuesto tanto por elementos prospectivos (estimación a priori del resultado a atender) como retrospectivos (verificación a posteriori) y se considera que los dos tipos de elementos pueden articularse, es decir, que la “confrontación a posteriori de una estimación a priori con el resultado de un cálculo” es posible. De esta manera se discriminan los elementos de control introducidos por estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad entre magnitudes a través de una doble clasificación. Una, de naturaleza temporal, la otra espacial. En la primera, se considera que un elemento del proceso de control puede aplicarse al inicio, en el desarrollo o al final de la resolución. En la clasificación espacial se tienen en cuenta los elementos del proceso de control que se desarrollan. Son tres los aspectos considerados: 1) la planificación del sistema a modelizar (texto del problema y los conocimientos sociales importados por el sujeto), 2) la planificación de los modelos potenciales (operaciones y algoritmos, pero sin las rutinas de la clase de matemática y de los elementos del contrato didáctico usuales que prevalecen) y 3) el espacio de la modelización introducido por los estudiantes, es decir, los elementos de control que se construyen tanto sobre el sistema a modelizar como sobre sus modelos. Fueron tres los elementos de control identificados: los relacionados 1) con el tipo de procedimiento a inicializar o desencadenar, 2) con el procedimiento en curso y 3) con la coherencia, es decir, si el resultado es coherente con el contexto o si el mismo resultado puede ser encontrado por dos procedimientos distintos. A manera de conclusión se considera, por un lado, que “la distinción entre los diferentes roles de los elementos de control – validar o refutar una selección, reforzar una convicción, jamás son tenidos en cuenta por los

alumnos... [y] a veces son poco evidentes para los propios profesores” (p. 98). Y, por otra parte, que en los problemas empleados en la enseñanza de proporcionalidad de magnitudes, los medios de validación del modelo adecuado residen, por lo general, o bien en la familiaridad del sujeto con el concepto y con el dominio de experiencias evocadas o en conocimientos científicos aún no estudiados. Estos aspectos, según los autores, se deben tener en cuenta en los manuales y por los educadores en la formulación de los enunciados de los problemas.

Investigaciones como las realizadas por Love y Pimm (1996), Mesa (2004, 2010) y Lithner (2004), así como la nuestra, han puesto en evidencia que los libros de texto ejercen control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática. Love y Pimm (1996) señalan que el texto escolar forma o controla la actividad matemática y las respuestas del lector a través de “sentencias escritas en modo imperativo “probar”, “calcular”, “encontrar”, “simplificar”..., junto a las preguntas y a las afirmaciones realizadas” (p. 381). Consideran además que en la estructura del texto se presume frecuentemente que la presencia de tales elementos basta para asegurar las formas de proceder privilegiadas por el libro, en consecuencia que “las funciones y tareas explícitas e implícitamente asignadas han sido satisfactoriamente seguidas por el lector” (p. 381). Por otra parte, en relación a la linealidad textual del flujo de lectura de un libro de texto, estos investigadores señalan que las respuestas presentadas al final del libro junto a las referencias mezcladas, apéndices y notas al pie y la existencia de márgenes son elementos que rompen la linealidad textual a privilegiar.

Mesa (2004) identifica tres criterios a través de los cuales los textos escolares permiten discriminar si la respuesta encontrada al resolver tareas sobre funciones es correcta o, por el contrario, el procedimiento desplegado es inadecuado. Los criterios identificados son: el *proceso* relacionado con la selección de estrategias de solución presentes en el desarrollo de tareas previas; el *contrato didáctico* (Brouseau, 1982) a través de pistas que suscitan la consideración de acciones y de resultados apropiados; y el *contenido*, es decir, la consideración de teoremas, definiciones o suposiciones en los que se apoya la solución al problema y que deben ser comprobadas para justificar una afirmación. Entre las tareas hay una mayor presencia en las que se establece el control como proceso (55%) frente a aquellas en las que el control es ejercido por el contrato didáctico (28%) o el contenido (17%). Igualmente, señala que entre los libros de texto analizados, muy pocos presentan de forma explícita los elementos que conforman la estructura de control y son menos aún los que incluyen “indicaciones explícitas para los estudiantes para controlar sus actividades... o problemas que sean resueltos de más de una forma... o recomendaciones de cuáles respuestas podrían mirar” (p. 281). En consecuencia, concluye que “las estrategias que muestran a los estudiantes cómo asegurarse de que el procedimiento o la noción usada son apropiadas o que la solución obtenida es correcta, o apropiada para el problema en juego” (p. 281) son muy limitadas.

En un segundo estudio, Mesa (2010), al centrar la atención en los ejemplos de valor inicial (determinación de la solución de una ecuación diferencial que satisface condiciones iniciales dadas) presentados en libros de textos de Cálculo utilizados en el primer año de pregrado, observó que en este tipo de tarea se “proporciona información explícita para decidir qué hacer para resolver el problema y determinar la respuesta con más frecuencia que para establecer discusiones que permitan reconocer que la solución es correcta o que tiene sentido para la situación dada” (p. 235). También destacó la plausibilidad, la corrección y la interpretación como los tres aspectos que tienden a considerarse mediante estrategias de control para verificar que la respuesta es correcta o que tiene sentido. La manera en que se expone la estructura de control en los libros de texto varía según las características del lector al que se dirige. Así, en los manuales escolares destinados a estudiantes de un mayor nivel matemático estos elementos se muestran de forma más explícita que en los destinados a estudiantes con un nivel matemático más bajo.

En un sentido distinto, Lithner (2004) centró su interés en la estructura de razonamiento asociada al estudio del Cálculo en libros de texto usados en Estados Unidos, considerando cuatro aspectos: la situación problemática planteada, la estrategia elegida para desarrollarla, la implantación de la estrategia a seguir y la conclusión encontrada. En esta investigación, a diferencia de Mesa (2004), el interés se centró en las consecuencias de la decisión o del tipo de razonamiento obtenidos y no en los criterios que rigen las decisiones que toman los estudiantes. Se concluye que la gran mayoría de los ejercicios presentes en los manuales estudiados exigían para su resolución la aplicación de razonamientos superficiales, es decir, tipos de razonamiento guiados por palabras claves, algoritmos o experiencias previas. Únicamente en el 10% de las tareas propuestas era necesario considerar en el proceso de razonamiento la aplicación del significado de los conceptos matemáticos en estudio.

1.5 Síntesis y conclusión.

La visualización es un asunto que está lejos de ser obvio y espontáneo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Marmolejo, 2007; Marmolejo y Vega, 2012). Diferentes investigaciones han puesto en evidencia que la capacidad visual de un individuo es susceptible de mejoría (Presmeg, 2006a; Marmolejo y Vega, 2012). Por tanto, se debe considerar el desarrollo de la visualización de forma paralela al estudio de las matemáticas (Villani, 1998; Presmeg, 2006a). Los libros de texto y el área se posicionan como tópicos para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas. Los primeros, al concretar las propuestas de enseñanza privilegiadas en el aula y dar vida a los lineamientos curriculares de una nación. El segundo, al ser un objeto matemático donde el acto de ver desempeña un papel fundamental para su comprensión y donde la visualización puede ser un objeto de desarrollo. Así, pues, la caracterización de las formas de ver que subyacen en la manera

como los manuales escolares motivan la enseñanza del área es un asunto a considerar en la investigación educativa. En este sentido es necesario:

- Reconocer la complejidad cognitiva que subyace al estudio de la visualización exige separar dos actos cognitivos de naturaleza diferente: la visión y la visualización.
- Distinguir entre los distintos tipos de aprehensión (perceptual, operatoria y discursiva) que permiten las figuras aquel (o aquellos) que sean pertinentes a la resolución de la tarea propuesta.
- Con respecto a la aprehensión operatoria es necesario reconocer y aprovechar, según sea el caso, la presencia de factores (de visibilidad) que aumentan o disminuyen la complejidad cognitiva que subyace al reconocimiento del tipo de operación a aplicar en ella (Padilla, 1992).
- Con relación al estudio de la visualización, propiciar actividades específicas de dos tipos de transformaciones (Duval, 2004): las transformaciones visuales de una figura a partir de unidades visuales de dimensión 2 y las transformaciones visuales internas que permiten pasar de una discriminación de unidades visuales de dimensión 2 a unidades visuales de dimensión 1 (deconstrucción dimensional de formas).
- Considerar que en matemáticas la visualización desempeña distintas funciones. Algunas pueden coexistir en ciertos tipos de actividades, pero no todas promueven que las figuras sean un importante soporte heurístico y, por el contrario, pueden llevar a que sean una trampa para la visualización, pues, pueden suscitar “la constatación de ciertas relaciones, sin permitir su justificación” (Mesquita, 1989, p. 20).
- En el desarrollo de una tarea se pueden considerar distintas clases de visualización acordes con el desarrollo de la problemática o de la tarea presentada, en consecuencia, es factible considerar procesos variados para su desarrollo o comprensión. Por ello es indispensable considerar las estructuras de control que los libros de texto utilizan para privilegiar algunas clases de visualización frente a otras.

CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES

Introducción.

Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la primera, se discuten las distintas formas en que la visualización se considera en el campo de la educación matemática; en la segunda sección, la atención recae en cómo la literatura educativa considera la visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales. En cuanto a la tercera y cuarta sección, se desarrollan las perspectivas desde las cuales los libros de texto y el concepto de área han sido considerados en el campo de la educación matemática.

2.1 Visualización en educación matemática. Un mismo término distintas acepciones.

La historia de las matemáticas puso en evidencia entre los siglos XIX y gran parte del siglo XX una “desvisualización” o “desespacialización” en la Geometría (Davis, 1993). Esa tendencia a dejar de lado la visualización se debió no solo a que no se la consideró necesaria sino a que se la consideró un obstáculo para el desarrollo de las matemáticas. Pero la aparición de los computadores gráficos y de los programas informáticos, junto al desarrollo de estudios sobre el funcionamiento de la mente, hicieron que el interés de los investigadores en el campo de la educación matemática por el papel e importancia que juega la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas creciera en los últimos decenios (Presmeg, 2006a, 2006b). Muchos investigadores de finales del siglo XX, entre los que destacamos a Zimmerman y Cunnighan (1991), afirmaron que estaban viviendo una etapa de renacimiento de la visualización. En la actualidad existe una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas (Villani, 1998; Arcavi, 2003; Duval, 2003; Presmeg, 2006a).

Son enormes y variados los aportes que la investigación educativa ha realizado en torno a la *visualización*. Entre ellos destacan los trabajos que asumen la *visualización* como un factor que guía el desarrollo analítico de una solución (Fischbein, 1993; Bishop, 1992; Duval, 1998a; Mesquita, 1989, Hershkowitz, 1998; Arcavi, 2003; Presmeg, 2006b; Gutiérrez, 1996), y aquellos que indagan cómo los estudiantes reconocen y aceptan el papel de la visualización en el las matemáticas (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Dreyfus,

1991; Stylianou, 2001). Hay, además, estudios que dan cuenta de las dificultades y obstáculos que la visualización puede generar en el aprendizaje de las matemáticas (Aspinwall y Shaw, 2002; Arcavi, 2003); y otros más que han considerado el rol de las representaciones visuales (diagramas, gráficos y dibujos) en la labor de los matemáticos (Sfard, 1994; Stylianou 2002). También hay estudios que han caracterizado diferentes maneras de *ver* (Presmeg, 1986a, 1986b; Duval, 1995; Laborde, 1998; Marmolejo y Vega, 2012) y distintas clases de visualización, por ejemplo, las visualizaciones matemática e icónica (Duval, 1995) y las homeomorfa, isomórfica, analógica y diagramática (Guzmán, 1996).

Las capacidades visuales de los profesores y sus creencias acerca de cómo los estudiantes aprenden a ver en matemáticas (Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006), junto al papel de los educadores en el desarrollo y uso de elementos visuales de los estudiantes (Presmeg, 1991; Warren y Cooper, 2008) también han sido objeto de interés en el campo de la educación matemática. Así mismo se han puesto en evidencia relaciones entre los gestos de un individuo y la visualización, por ejemplo; Sabena, Radford y Bardini (2005) consideran que los aspectos de naturaleza numérica, discreta y lineal se promueven a través del lenguaje, mientras que los relacionados con lo visual, lo geométrico y lo analógico surgen a través de gestos. Por otra parte, Chen y Herbst (2012) asumen que cuando la información que aporta una configuración geométrica es limitada para la resolución de un problema, los estudiantes recurren a los gestos y expresiones verbales para compensar dichas limitaciones, incluso para plantear y probar conjeturas.

La gran variedad de investigaciones que estudian el papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas han llevado a que sea considerada desde características y matices diferentes. Según la unidad visual (lugar donde recae la atención al hablar de visualización) asumida o la función que la visualización desempeña es posible agrupar en cinco las acepciones en que ha sido contemplada la *visualización* en la investigación educativa:

- Como el estudio de *imágenes* que un individuo tiene o crea en su mente acerca de un objeto matemático;
- Como el estudio de las *representaciones mentales* que tiene acerca de él;
- Como el estudio tanto de las *representaciones externas* de naturaleza espacial (gráficos, figuras, formulas...) como de las *representaciones mentales*;
- Como el estudio de los *registros de representación semiótica* de naturaleza analógica (gráficos cartesianos, figuras geométricas, tablas, esquemas) y,
- Como un proceso matemático que genera prueba de naturaleza matemática.

En lo que sigue describimos cada una de estas acepciones:

2.1.1 Visualización a través de imágenes mentales.

La imaginería mental, en todas sus modalidades (visual, auditiva, táctil...) ha sido estudiada en la Psicología desde el siglo XIX pero no fue hasta la segunda mitad del siglo XX que se empezó a considerar la modalidad visual en la educación matemática. En este sentido, destacan los trabajos de Clements (1981, 1982), Lean y Clements (1981) y Moses (1977,1980, en Lean y Clements, 1981) quienes desde la teoría psicológica de las imágenes en la mente consideran que los elementos que componen nuestras experiencias vividas son “registrados” internamente a través de imágenes ricamente pictóricas. En este sentido, se alude a la visualización como imaginería visual donde la producción y transformación de imágenes ocurren como fotos en los “ojos de la mente”.

Se considera que las imágenes visuales son unidades básicas de la visualización y se asumen como réplicas de los modelos a los que de manera previa se ha accedido sensorialmente, que se “activan” cuando necesitamos acceder a ellos sin que estén presentes. Clements fue uno de los primeros en promover el interés por el papel que juegan las imágenes mentales y la imaginería en el estudio de las matemáticas. Entre otros aspectos suscitó una reflexión sobre los referentes teóricos propios de la Psicología (Clements, 1981, 1982) y su consideración en la búsqueda de valorar el rol de la imaginería visual en el aprendizaje de las matemáticas (Clements, 1981, 1982; Lean y Clements, 1981). De igual manera hizo un llamamiento a la comunidad investigativa a considerar tópicos matemáticos y tipos de estudiantes dependiendo de la forma de usar la visualización en el aprendizaje de las matemáticas (Clements, 1981).

Clements junto a otros investigadores, por ejemplo, Moses (1977, 1980) y Lean y Clements (1981) se interesó en el diseño y aplicación de tests para medir el grado de visualización de los sujetos. Así estudió las relaciones entre el desempeño matemático, las habilidades espaciales (la habilidad para formular imágenes mentales y manipularlas en la mente) y el grado de visualización. Es el caso de la investigación realizada por Moses (1977), quien concluye que el nivel de habilidad espacial de un sujeto permite pronosticar su desempeño al resolver problemas. Asimismo esta autora afirma que “aunque los individuos con alta habilidad espacial usualmente hacían bien los problemas con lápiz y papel, las soluciones escritas no siempre daban una indicación apropiada del proceso de solución visual aplicado” (p.271). Por otro lado, Lean y Clements (1981) concluye que la habilidad espacial y el conocimiento de convenciones espaciales no ejercen una fuerte influencia en los desempeños matemáticos de los estudiantes.

También es importante señalar el interés que esta tendencia suscitó del rol que desempeña la instrucción en la mejora de las habilidades de visualización, Moses (1980, p. 271). Por ejemplo, encontró que la instrucción sobre el pensamiento visual “afecta la habilidad espacial... pero, no los desempeños en la solución de problemas o el grado de visualización”.

2.1.2 La visualización por medio de representaciones mentales.

También se ha considerado que las imágenes mentales no son creaciones mentales elaboradas sin ningún soporte físico o que son evocaciones de objetos ausentes a los que se ha accedido sensorialmente. Se consideran las imágenes mentales como representaciones mentales, es decir, tanto como imágenes mentales que han tenido una relación con la percepción (conceptos, nociones, ideas) como todo tipo de creencias y fantasías que el sujeto tiene alrededor de ellas; en palabras de Duval (1999, p.35) como “todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con su grupo particular o con sus propios deseos”.

Entre una amplísima variedad de investigaciones que centran su atención en las representaciones mentales, algunas se interesan por el rol de las imágenes como apoyo u obstáculo en la cosificación de conceptos matemáticos. Martin, La Croix y Fownes (2005), por ejemplo, consideran que el desarrollo de la comprensión matemática a partir de acciones es determinante para comprender cómo se forman las imágenes. Con respecto a la tenencia de imágenes, Martin et al. asumen que las imágenes que tiene un sujeto le permite generar planes mentales generales que guían el desarrollo de una actividad. A manera de conclusión se resalta que 1) las imágenes de conceptos matemáticos básicos que poseen los sujetos adultos son flexibles y profundas y 2) que volver atrás para modificar o crear nuevas imágenes necesarias para un contexto particular en que se desenvuelve un sujeto es esencial en el estudio de las matemáticas.

La construcción y manipulación de imágenes de conceptos matemáticos (*concept image*) tanto en estudiantes como en educadores en formación y en ejercicio es otro de los aspectos considerados. En este sentido, se describe la estructura cognitiva asociada al concepto en estudio y que incluye todas las fotos mentales y propiedades y procesos asociados. Se estudia la interacción entre el individuo y el camino empleado al concebir el mundo que lo rodea, se considera además que “en alguna fase solamente podemos dar sentido de nuestras observaciones usando la estructura cognitiva que tenemos” (Tall, 1989, p.37), lo que se desarrolla a través de “las conexiones formadas en nuestro cerebro gracias a impulsos externos y procesamiento interno” (Tall, 1989, p.37). De esta manera se asume que se da sentido a la información nueva que nos llega haciendo nuevas conexiones y reorganizando nuestra estructura cognitiva. Por otra parte, este autor señala que la imagen del concepto desarrollada por un individuo no es necesariamente coherente en todos los casos y que es posible activar en el cerebro una porción particular de la imagen del concepto en cuestión (imagen del concepto evocada); así, es posible la evocación de conflictos en las imágenes a las que accede el sujeto y que pueden constituirse en obstáculos para su aprendizaje. Las investigaciones realizadas por Rösken y Rolka (2006), Lee y Tso (2007), Topçu, Kertil, Akkoç, Yılmaz y Önder (2006) y Pinto y Tall (2002), entre otras, son ejemplos de esta tendencia.

También forman parte de esta acepción de visualización las investigaciones de Hermán, Ilucova, Kremsova, Priby, Ruppeldtova y Simpson (2004) y Nardi (2000). Los primeros estudian el papel de las imágenes en la comprensión de las fracciones. Concluyen que las imágenes que provienen de considerar la fracción como proceso (la fracción relacionada al proceso de fraccionamiento de un objeto) y la fracción en proceso (la fracción representada como un número-barra-número) son raras veces compatibles; en consecuencia, la enseñanza del símbolo de fracción como proceso y como objeto debe ser cognitivamente separado. Nardi (2000), centra su atención en la abstracción matemática, en particular en lo correspondiente a la teoría de grupos; la población de interés son los matemáticos novatos y entre diferentes aspectos analiza el uso ambivalente de imágenes geométricas como parte de los procesos para dotar de significado a la noción de clase.

2.1.3 Visualización por medio de la interacción entre representaciones mentales y representaciones externas.

En esta acepción de visualización la atención no es exclusiva de las imágenes mentales y de las representaciones mentales; también se consideran las representaciones externas, o sea “lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente observable” (Duval, 1999, p. 33). Así, son igualmente unidades visuales: las figuras, los gráficos, las tablas, las formulas, los despliegues de transformaciones algebraicas y los objetos físicos (maquetas y otros), y no solamente las representaciones mentales. En consecuencia, las representaciones externas y las imágenes visuales (consideradas como representaciones mentales) y/o su interacción, son un requisito indispensable en la comprensión y solución de problemas donde intervenga la visualización. Dentro de este grupo están la mayor parte de los estudios sobre visualización que se encuentran en la literatura especializada. Destacan, entre otros muchos trabajos, los desarrollados por Presmeg (1986a, 1986b, 2006a, 2006b), Senechal, 1988 (citada en Alsina, 1997), Alsina (1997), Bishop (1983, 1992), Zinnmermann y Cunnighann (1990); Zaskis, Dubinski y Dautermann, (1996), Dreyfus y Eisenberg (1990), Arcavi (2003), Souto y Gómez (2010), Cantoral y Montiel (2003), Gutierrez (1996) y Gorgorió (1998).

Presmeg (2006a, p. 206) siguiendo los estudios realizados por Piaget e Inhelder asume que “al crear una persona arreglos espaciales (incluyendo una inscripción⁹ matemática) existen imágenes visuales en su mente que guían su proceso de creación”. En consecuencia, considera la visualización como la construcción y transformación de imagería visual y de todo tipo de inscripciones matemáticas de naturaleza visual, pues, según esta investigadora, al igual que la imagería, las inscripciones matemáticas deben

⁹ Presmeg (2006a, p. 206) afirma preferir usar el término *inscripción* al de representación, pues, según ella, el segundo se encuentra impregnada de significados y connotaciones distintas según la evolución de los paradigmas reinantes en las últimas décadas y lo emplea tal cual como fue caracterizado por Roth (2004): “las representaciones gráficas, que en la sociología de la ciencia y en el discurso post-moderno ha llegado a ser conocido como inscripciones, son fundamentales para la práctica científica”.

ser consideradas como *sign vehicles* (representaciones particulares de un objeto matemático) que se constituyen en “instanciaciones de la visualización matemática, en la medida, en que decodifican la estructura espacial de los objetos matemáticos” (p. 22). En el mismo sentido, alude a que además de los diagramas (gráficos, figuras, etc.), las expresiones numéricas y algebraicas pueden ser “decodificadas a través de variados sign vehicles, al ser incluidos en una estructura espacial, por ejemplo, la formulas algebraicas” (p. 22).

Esta manera de concebir la visualización abarca, en palabras de Presmeg (2006a), todos los aspectos de naturaleza visual que provienen de los dos tipos de habilidades que según Bishop¹⁰ (1983, p. 177) deben ser contemplados en el desarrollo de pensamiento espacial: *interpreting figural information* y *visual processing*. Así, la visualización se interesa por la traslación de relaciones abstractas y datos no figurales en términos visuales (por manipulación y exploración de imágenes visuales y la transformación de unas imágenes en otras); así como por el conocimiento de las convenciones visuales y el “vocabulario” espacial usado en la Geometría a través de todo tipo de gráficas, tablas y diagramas (o por la lectura e interpretación de imágenes visuales, mentales o físicas) para obtener información que ayude en la resolución de un problema.

Presmeg (1986a, 1986b, 1991, 2006a) discrimina las imágenes visuales (concretas, kinaesthetics, dynamics, memory images of formulae, patterns) que emplean los estudiantes visualizadores¹¹ al estudiar las matemáticas. Entre diferentes aspectos señala que unas imágenes se privilegian más que otras, y que todas las dificultades matemáticas de los estudiantes visualizadores se relacionan con tareas de generalización, donde las imágenes Patterns y el uso de metáforas son quienes la determinan. También se afirma, en estas investigaciones, que es indispensable relacionar las imágenes concretas con rigurosos procesos de pensamiento analítico para que su uso sea efectivo en las matemáticas.

Presmeg (2006a, p. 227) plantea 13 “grandes preguntas de investigación” como cuestiones de vital importancia a considerar para describir y comprender los fenómenos del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y que se encuentran asociados a la visualización:

¹⁰ Bishop (1992) quien se interesa por el grado hasta el cual los estudiantes interiorizan y “capturan” intelectualmente sus experiencias espaciales considera que “en el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la geometría se encuentra el aspecto de la visualización” p.35 y afirma que la visualización debe considerar la interacción entre el individuo y el estímulo, es decir entre las representaciones internas y externas. Distingue entre visualización y visualizar, con el primer de los términos alude “al producto, el objeto, el “qué” de la visualización, las imágenes visuales” (Bishop, 1992, p. 36). Visualizar, por el contrario, en palabras del autor, “nos hace centrar la atención en el proceso, la actividad, la destreza, el “cómo” de la visualización” (Bishop, 1992, p. 36).

¹¹ “...individuos que prefieren usar métodos visuales cuando tratan de resolver problemas matemáticos que pueden ser solucionados tanto por métodos visuales y no visuales” Presmeg, 1986a, p. 42).

1. ¿Qué aspectos de la pedagogía son importantes tanto para la promoción de las fortalezas y para evitar las dificultades del uso de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas?
2. ¿Qué aspectos de la cultura del salón promueven el uso activo del pensamiento visual eficaz en matemáticas?
3. ¿Qué aspectos del uso de diferentes tipos de imagería y de visualización son eficaces en la solución de problemas matemáticos en los distintos niveles?
4. ¿Cuáles son las funciones de los gestos en la visualización matemática?
5. ¿Qué procesos de conversión son necesarias para desplazarse de manera flexible entre los distintos registros matemáticos, incluidos los de naturaleza visual, para combatir el fenómeno de la compartimentalización?
6. ¿Cuál es el papel de las metáforas en la conexión de registros diferentes de las inscripciones matemáticas, incluidas las de naturaleza visual?
7. ¿Cómo pueden los maestros ayudar a los estudiantes a hacer conexiones entre las inscripciones visuales y simbólicas de una misma noción matemática?
8. ¿Cómo pueden los maestros ayudar a los estudiantes a hacer conexiones entre la imagería visual e inscripciones idiosincráticas y los procesos matemáticos y anotaciones convencionales?
9. ¿Cómo puede el uso de las inscripciones y de la imagería visual facilitar u obstaculizar la reificación de los procesos como objetos matemáticos?
10. ¿Cómo puede la visualización ser aprovechada para promover la abstracción matemática y la generalización?
11. ¿Cómo puede el efecto generado por la imagería personal ser aprovechada por los profesores para aumentar el disfrute de aprender y hacer matemáticas?
12. ¿Cómo los aspectos visuales de la tecnología informática, cambian la dinámica del aprendizaje de las matemáticas?
13. ¿Cuál es la estructura y cuáles son los componentes de una teoría general de la visualización para la educación matemática?

Senechal (citada por Alsina, 1997, p. 40) y Alsina (1997) aluden a la visualización como el proceso de producción de imágenes y de representaciones externas que ilustran o representan determinados conceptos o propiedades matemáticas, y como todo tipo de lectura visual que se realiza a partir de representaciones externas. De esta forma visualizar alude no solo a la construcción de imágenes visuales sino también a la posibilidad de realizar acciones como “el dibujo de un tetraedro, dibujar un diagrama de árbol, trazar un histograma a partir de una tabla de valores apreciar que un dibujo plano corresponde a un determinado poliedro tridimensional...” (p. 40).

Bishop (1992) muestra interés en cómo se interiorizan y “capturan” intelectualmente las experiencias espaciales y considera que “en el núcleo de gran parte de la dificultad del aprendizaje de la Geometría se encuentra el aspecto de la visualización” (Bishop, 1992, p.35). Este autor distingue entre visualización y visualizar; con el primer de los términos alude “al producto, el objeto, el “qué” de la visualización, las imágenes visuales” (Bishop,

1992, p. 36). Visualizar, por el contrario “nos hace centrar la atención en el proceso, la actividad, la destreza, el “cómo” de la visualización” (p. 36). Asimismo, Bishop asume que la visualización, por lo menos en una primera instancia, debe considerar la interacción entre el individuo y el estímulo, pues, “nunca hay una manera única de llevar a cabo una tarea particular, debido a que cualquier tarea debe ser interpretada por cada individuo” (p.38), y que lo que viene a continuación depende de “la preferencia de la persona, de la memoria para las visualizaciones, de la habilidad para recordar o generar visualizaciones apropiadas o para escoger las apropiadas y finalmente de su habilidad para operar apropiadamente con las visualizaciones escogidas” (p.38).

Zimmermann y Cunnighann (1991) se interesan tanto por las representaciones mentales, como por las representaciones externas de los conceptos, principios y problemas matemáticos. Aluden a unas y otras en términos de representaciones geométricas y de representaciones gráficas, considerando tanto las representaciones (gráficas y geométricas) que se realizan o movilizan a mano alzada, como aquellas que son generadas a través del uso de ordenadores. La visualización bajo esta tendencia no puede ser asumida como una construcción ni uso exclusivo de imágenes mentales ni de representaciones externas, pues, en matemáticas, para estos investigadores, no es factible considerar independientemente las imágenes mentales ya que, “la restricción de que las imágenes que deben ser manipulados mentalmente, sin la ayuda de lápiz y papel, es algo artificial” (p.3). Tampoco, basta con focalizar el interés únicamente en los diagramas, debido a que, “visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del diagrama” (p.3). Por el contrario, la visualización matemática es considerada como el proceso de interacción, es decir, el contexto donde representaciones internas y externas se interrelacionan al producir y usar representaciones externas. Así, la visualización matemática alude a la “capacidad del estudiante para elaborar un diagrama adecuado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con un equipo) para representar un concepto matemático o un problema y utilizar el diagrama para lograr el entendimiento, y ver como este ayuda en la resolución de problemas” (p.3).

En la investigación de Zaskis, Dubinski y Dautermann (1996) se define la visualización como el “acto en el cual un individuo establece una fuerte conexión entre construcciones internas y cualquier cosa cuyo acceso se realiza a través de los sentidos” (p. 441). De esta forma, la atención recae en los procesos de transformación internos que se asocian a las construcciones mentales de un individuo, los objetos o eventos percibidos por él a través de sus experiencias sensomotrices; o, en sentido inverso, lo que el individuo a través de acciones sensomotrices transforma en algún medio externo (papel, tablero, pantalla del computador) y lo relaciona con objetos o eventos que asocia a objetos o procesos en su mente (p. 441). Desde este punto de vista se considera que la visualización “consiste en el hacer y no en el producto de lo que es dado” (p. 441); y que la alusión a construcciones internas se relaciona con la percepción de objetos ausentes a los que se ha accedido de forma previa; además, lo auditivo, lo táctil, etc. son aspectos que caracterizan la visualización.

En esta segunda acepción también hay estudios que consideran la visualización no solo como un tipo de proceso o un producto sino también como un tipo de habilidad. Dreyfus y Eisenberg (1990), por ejemplo, la consideran como la habilidad para traducir información simbólica en imágenes visuales; Arcavi (2003) y Souto y Gómez (2010), por su parte, la contemplan como la habilidad tanto de crear e interpretar imágenes y diagramas en la mente, en papel o en un formato electrónico, como de decodificar y comunicar información a partir de imágenes y diagramas. Para Arcavi, la visualización en particular permite pensar y desarrollar ideas desconocidas y pensamiento matemático avanzado.

Cantoral y Montiel (2003) al interesarse por la visualización asociada a las funciones reales de variable real consideran la visualización como “la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información en el pensamiento y en el lenguaje del que aprende” (p.6). En este sentido se describe la visualización como toda clase de actividades representacionales del espacio cartesiano, donde “la imagen mental del espacio cartesiano con la que los jóvenes actúan, se forma mediante una reconstrucción activa de los objetos a un nivel simbólico” (p.8). En este caso el interés recae en “las transformaciones mentales que van del espacio real al espacio de las representaciones del estudiante” (p.8); en particular en los atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y en cómo varían en el transcurso del curso escolar. Por último, se considera que la actividad de visualización exige la utilización de nociones matemáticas y el recurso de un lenguaje común para explicar fenómenos y para describir experiencias vivenciales (p. 6).

También destaca en esta acepción de visualización el trabajo de Gutiérrez (1996) donde se asume que las representaciones mentales ayudan a crear o transformar imágenes mentales y que las imágenes mentales, junto a las representaciones externas, las habilidades y procesos visuales son elementos a considerar en el estudio de la visualización 3D. Así, las primeras son consideradas como todo tipo de “acciones mentales o físicas donde las imágenes mentales se encuentran inmersas” (p. 10); las representaciones externas como “representaciones gráfica o verbales de conceptos o propiedades incluyendo imágenes, diagramas, etc.” (p. 10). En cuanto a las habilidades, se refiere entre otras a la discriminación de figuras específicas, a la constancia perceptual, a la percepción de posiciones y de relaciones espaciales y a la discriminación visual; y los procesos visuales son considerados en términos de “acciones mentales o físicas donde las imágenes mentales se encuentran inmersas” (p.10). Para Gutiérrez el proceso de visualización en el desarrollo de una tarea geométrica se inicia cuando el estudiante interpreta el enunciado o una representación externa que propicia imágenes mentales que conducen a la visualización. Es entonces cuando el estudiante, a través de sus habilidades visuales, inicia y desarrolla diversos procesos de visualización y donde nuevas imágenes mentales o representaciones externas pueden ser generadas.

Al igual que Gutiérrez (1996), Guillén (2010) muestra interés por el estudio de la visualización tridimensional (visualización 3D y deconstrucción dimensional de figuras 3D en formas 2D). Considera la Geometría como la “ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla...” (p.24), y asume que “las manos y el cerebro trabajan conjuntamente para responder a la cuestión de cómo está hecha una cosa concreta” (p.24). Se considera que la enseñanza de la Geometría ha de comenzar por el espacio y describe una gran variedad de contextos en los que se pueden presentar los sólidos.

En Guillén (2010) se asumen como unidades visuales tanto las imágenes y las representaciones externas en un soporte físico 2D como la representaciones de figuras 3D a través de maquetas o representaciones físicas. En este caso son cuatro los elementos que describen la visualización: las capacidades espaciales (imágenes mentales, representaciones externas, habilidades y procesos); los contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos, establecimiento de relaciones y resolución de problemas); las características individuales, de género y de cultura del sujeto; y la práctica del educador en términos de las tareas, propuestas, estrategias y estilos de enseñanza promovidos en la praxis educativa.

Desde esta perspectiva son cuestiones de interés las siguientes:

¿Qué habilidades/procesos visuales se ponen en juego al realizar determinadas tareas?
¿Cómo influye el que en las tareas se usen diferentes representaciones (modelos, armazones, dibujos, desarrollos,...)? ¿Qué contenidos geométricos están implicados en estas tareas?

¿Los estudiantes de primaria/secundaria frente a las tareas de habilidades espaciales o cuestiones geométricas que implican figuras de dos/tres dimensiones o representaciones planas de éstos, muestran la misma capacidad en todos los casos o se comportan de manera diferente? ¿Cómo influye que las tareas se planteen en un entorno dinámico?

¿Cómo se utilizan/interpretan las representaciones o imágenes visuales en el proceso de aprendizaje/enseñanza de determinados contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos, resolución de problemas)? ¿Cómo se utilizan/ interpretan en los diferentes niveles educativos?

¿Cómo influye el estilo de enseñanza del profesor en la habilidad de los estudiantes para visualizar, o en el uso o dificultad para utilizar determinadas estrategias para resolver problemas?

2.1.4 Visualización en representaciones semióticas de naturaleza analógica.

Duval (1999, 2003, 2004) considera que el aprendizaje de las matemáticas exige la utilización de variados sistemas de representación y la aplicación de actividades cognitivas como la conformación, el tratamiento y la conversión (Duval, 1999). Así se consideran que las imágenes mentales son representaciones semióticas interiorizadas, donde la visualización, a diferencia de las acepciones anteriores, considera las representaciones que provienen de registros semióticos analógicos (figuras, gráficos cartesianos, tablas, esquemas...) como unidades fundamentales. Así, la visualización se refiere a “la manera de ver las figuras o las representaciones del espacio”; en consecuencia, se alude tanto a la transformación de representaciones que se realizan en un mismo registro semiótico analógico como a la discriminación y focalización de sus partes constituyentes.

La literatura especializada ha reportado una gran cantidad de artículos relacionados con la visualización vinculada a los registros de representación analógicos como:

- Los gráficos cartesianos (Duval, 1988; Hewitt, 2003; Tracy Noble, Cara y Tracey, 2004; Yerushalmy, 2005; Bruno y Cabrera, 2006; Falduto, 2008; Biza, Nardi y Zachariades, 2008; Teixeira, de Mendonça y Ferreira, 2011; Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011;);
- Las figuras geométricas de naturaleza tridimensional (Gutiérrez, 1992, 1996; Gutierrez y Adela, 1992; Gorgorió, 1998; Boaques, 2009; Guillén, 2010, García y Guillén, 2010; Gonzato, Godino y Neto, 2011; Gonzato, Godino y Contreras, 2011; Gonzato, Godino y Neto, 2011; Rojas, Ramírez, Escalona, Estrada y Sánchez, 2012; Blanco, Godino y Pegito, 2012);
- Las figuras geométricas bidimensionales (Duval, 1995, 2003, 2004; Padilla, 1992; Mesquita, 1989; Lémonidis, 1991; Marmolejo y Vega, 2012);
- Las tablas (Martinez y Brizuela, 2006; Coppé, Dorier y Yavuz (2007); y
- Los esquemas (González y Castro, 2012).

En lo que corresponde a la Geometría se considera que la visualización junto al razonamiento y a la construcción son las tres actividades cognitivas que subyacen a su aprendizaje, cada una con funciones epistemológicas específicas y de naturaleza distinta (Duval, 1998a). En particular, se asume que la visualización alude a las representaciones espaciales (figuras geométricas, gráficos cartesianos) y que tiene como función ilustrar proposiciones, explorar heurísticamente situaciones complejas, favorecer vistazos sinópticos sobre ellas y permitir verificaciones subjetivas. Asimismo, se afirma que en el estudio de las tareas de geometría estas tres actividades se pueden realizar de manera separada; en ocasiones, la *visualización* puede ser guiada por la construcción, en otras, la *visualización* puede dirigir al razonamiento y en otras puede ser engañosa o imposible (Duval, 1998a). También se considera que la visualización adquiere matices y

características diferentes según el tipo de sistema de representación (Duval; 1988, 1995, 2003).

En esta investigación consideramos la visualización desde esta acepción y centramos la atención en la visualización vinculada al registro semiótico de las figuras geométricas, en particular, en las representaciones figurales de dos dimensiones.

2.1.5 Razonamiento visual.

En la enseñanza de las matemáticas, a la visualización se le asigna funciones de distinta naturaleza ya sea para dar miradas sinópticas del tema que se trata (Duval, 1998a), para realizar verificaciones subjetivas (Duval, 1998a) y crear sentimiento de auto-prueba y de inmediatez (Fischbein, 1987, citado por Arcavi, p. 220); o para explorar heurísticamente situaciones complejas (Duval, 1998a; Arcavi, 2003), dar forma mental o física a conceptos matemáticos (Alsina, 1997) o para comunicar (Alsina, 1997; Cantoral y Montiel, 2003; Arcavi, 2003), documentar (Cantoral y Montiel, 2003) o interpretar y decodificar información visual (Arcavi, 2003). Igualmente, la visualización es tomada como un legítimo elemento de prueba matemática (Davis, 1993; Hershkowitz; 1998; Hershkowitz, Arcavi y Bruckheimer, 2001; Arcavi, 2003; Richard, 2004).

En este sentido, una última acepción de visualización se relaciona con la última de las funciones anteriormente enunciadas. La evidencia visual es capaz de inspirar cuestiones matemáticas de una manera tradicional; así la visualización como un tipo de razonamiento (razonamiento visual), forma parte de un proceso discursivo donde se “verbalizan” las ideas que emergen al considerar las características perceptivas de la configuración en estudio que se articulan o que se desprenden o que refuerzan los conocimientos matemáticos de un sujeto.

Son dos los aspectos que explican el creciente interés que el razonamiento visual despierta en muchos investigadores. El primero, en palabras de Herskowitz (1998), relacionado con aproximaciones constructivistas y socioculturales que explican cómo el ser humano aprende; en este sentido, se han legitimado y promovido procesos de razonamiento en un sentido más amplio donde

Los aprendices, sus comprensiones y las interacciones con la comunidad de su clase, son centrales en la visión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Como consecuencia, los procesos de razonamiento son considerados actualmente como una variedad de acciones que realizan los alumnos con el fin de comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen (p. 30).

En consecuencia, según esta autora, entre las investigaciones que se interesan por el razonamiento geométrico, el razonamiento visual ha sido considerado como una de las de mayor importancia.

El segundo aspecto se relaciona con el creciente interés de una parte de la comunidad matemática por promover que el razonamiento visual sea considerado como una práctica totalmente aceptable y aceptada de razonamiento en el estudio de las matemáticas a tal punto que debe ser incluido en la prueba de teoremas matemáticos (Dreyfus, 1994, en Arcavi, 2003, p.227).

La visualización es asumida como un razonamiento de un nivel de estatus inferior a otros tipos de razonamiento (Dreyfus, 1991) “principalmente como un estadio intuitivo, de apoyo global y preliminar en los procesos de razonamiento en general, el cual en algunas ocasiones apoya razonamientos posteriores y algunas veces los obstruye” (Hershkowitz, 1998, p, 34). O, por el contrario, como un auténtico elemento de prueba matemática que no solo “organiza información en estructuras de pensamiento [o que] orienta el desarrollo analítico de una solución” (Arcavi, 2003, p.230), o que solo apoya razonamientos posteriores (Hershkowitz, 1998); sino como un proceso que “completa argumentos matemáticos rigurosos o que se combina con otras clases de razonamiento” (Hershkowitz, 1998, p, 34) o como “un proceso analítico en sí mismo que concluye con una solución que es formal y general” (Arcavi, 2003, p. 230).

En el primer caso, destaca el trabajo del matrimonio Van Hiele quienes desarrollan un modelo educativo de los niveles de pensamiento geométrico conformado por cuatro clases de razonamiento matemático (Van Hiele, 1986, Jaime y Gutiérrez, 1990) y que se caracteriza porque el paso de un nivel a otro se realiza de manera espontánea, secuencial, ascendente y constante. En este modelo la visualización es considerada un razonamiento informal presente en la base de la estructura (niveles I y II) y que sustenta el razonamiento deductivo formal; alude tanto al reconocimiento de formas como a la discriminación de unidades constituyentes de una figura. Este razonamiento permite por una parte “describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 308); y, por otra parte, “además de reconocer las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, [permite] deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación” (p. 308).

Son muchas las investigaciones que consideran la visualización como un auténtico elemento de prueba, utilizado de forma paralela y en combinación con otros tipos de razonamiento válidos en matemáticas y con estatus semejante al del razonamiento formal. En este sentido destacan, entre otros muchos, los trabajos de Hershkowitz (1998), Arcavi (2003), Dreyfus (1991), Gutierrez (1992, 1996), Davis (1993), Nelsen (1993) y Richard (2004). En los dos primeros se evidencia el papel que puede jugar el razonamiento visual en el desarrollo de tareas de generalización, no solo para identificar el tipo de

generalización a considerar, sino también para verificar y probar el proceso realizado y justificar el por qué se sostiene una generalización.

En cuanto a Dreyfus (1991) estudia el estatus que se asigna al razonamiento visual en las aulas escolares; entre variados aspectos, considera que el estatus de la visualización puede y debe ser actualizado a través de tipos de aprendizaje que promuevan su reconocimiento como una herramienta plena en el aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación, se evidencia en los estudiantes una muy fuerte “reluctancia” para recurrir a la visualización, y se asume que el bajo estatus asignado en las aulas escolares a los aspectos visuales de las matemáticas es el principal argumento que explica tal comportamiento. Dreyfus también resaltó la ventaja que introducen los ordenadores al brindar flexibilidad en relación al uso de razonamiento visual.

Gutiérrez (1996) considera la visualización como “una clase de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales, mentales o físicos, que ayuda a resolver problemas o probar propiedades” (p. 9); y Nelsen (1993) alude a la expresión “pruebas sin palabras” tanto para designar a las imágenes o diagramas que permiten a un observador reconocer tanto por qué un enunciado matemático es verdadero, como a la posibilidad que dichas imágenes o diagramas permitan al observador reconocer cómo puede realizar una prueba.

Davis (1993) considera que la visualización desempeña una función de prueba en los resultados matemáticos que se promueven a través de programas informáticos, en este sentido designa con la expresión “teoremas visuales” o “teoremas de tipo percibido” a,

la producción gráfica o visual de un programa de computador...que los ojos organizan en un marco coherente, en un todo identificable y que es capaz de inspirar cuestiones matemáticas de naturaleza tradicional o que contribuye de alguna manera al entendimiento o enriquecimiento de situaciones matemáticas o del mundo real (p. 333)

Y manifiesta que el término “teorema visual” puede ser considerado en una definición amplia o estrecha y asume que desde un punto de vista amplio se puede incluir bajo esta expresión tanto,

- Todos los resultados de geometría plana y sólida que aparecen intuitivamente obvios;
- Todos los teoremas de cálculo (o de disciplinas matemáticas más avanzadas) que tienen bases intuitivamente geométricas o visuales;
- Todas las conclusiones matemáticas puras o aplicadas que provienen de las pantallas gráficas (dibujadas a mano o de otra manera) que pueden ser derivadas prácticamente por simple inspección; y

- Los resultados gráficos de programas de computador que organizan el cerebro coherentemente en un camino determinado.

Davis describe tres efectos potenciales que suscita considerar los teoremas visuales como un concepto matemático legítimo. Por un lado, se restaura a la palabra “teorema” parte de su “sabor” original, pues, “la raíz griega de la palabra significa mirar” (p.341); por otro lado, se restaura el estatus de los procesos de descubrimiento matemático; por último, a nivel educativo, en particular en los niveles altos, permitiría a “la educación matemática llegar a un acuerdo con los aspectos de las matemáticas que son requeridos por los físicos, los ingenieros, etc. Y el criterio por el cual estas profesiones relacionadas validan sus trabajos” (p.342).

Por último Richard (2004) tras considerar que “un dibujo geométrico no está constituido solo por formas representadas... sino también por unidades significantes elementales que a su vez producen unidades significantes complejas” (p.233), asume que la visualización suscita o justifica ciertos pasos de razonamiento¹² (p. 252). En este sentido Richard alude al razonamiento gráfico como la composición, concomitancia y complementariedad entre la aprehensión operatoria y la expansión figural. La primera, relativa a toda transformación que se aplica sobre una figura y que generan modificaciones de distinta naturaleza; la segunda, relacionada con la extracción de relaciones matemáticas entre unidades constituyentes de la figura a partir de sus características perceptivas, por ejemplo, al estar representada una figura de cuatro lados sobre un fondo cuadrículado de tal manera que cada uno de sus lados coincida con las líneas que conforman el fondo, es posible, en palabras de Richard (2004), afirmar que la figura es un cuadrado, pues, por un lado, cada par de lados consecutivos de la figura se encuentran “inmersos” en los lados de cuadrados que conforman el fondo. En este mismo orden de ideas es posible considerar que cada par de lados consecutivos de la figura son rectos y como en los segmentos que conforman la figura hay igual número de cuadros a lo largo de cada lado, en consecuencia, también es posible decir que las longitudes de sus lados son iguales.

Entre las conclusiones Richard (2004) identificó riesgos del uso de las representaciones gráficas en el desarrollo de razonamiento matemático, entre las que destaca la existencia de problemas de comunicación y dificultades en educadores y en estudiantes, relacionadas con el proceso de evaluación de las producciones de los estudiantes y la comprensión de la diferencia entre los textos matemáticos que utilizan estos registros en su extensión discursiva, a cuando suscitan imágenes opcionales.

¹² Un paso de razonamiento “articula proposiciones en función de su *estatus* operatorio: modifica el valor epistémico de su conclusión. Un encadenamiento de paso de razonamiento articula *bloques* de proposiciones ya organizadas entre sí: asegura la continuidad entre las conclusiones obtenidas en cada paso y las que corresponden al enunciado-objeto” (Duval, 1996, p. 195)

2.2 Investigaciones sobre la visualización asociada a las figuras geométricas en el Campo de la educación Matemática.

En la investigación educativa se ha reconocido el papel que desempeña la visualización en el desarrollo de conocimiento matemático (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Dreyfus, 1991; Stylianou, 2001; Duval, 1999, 2003, 2004), se ha identificado una variedad de funciones que su aplicación promueve (Fischbein, 1993; Davis, 1993; Duval, 1998a; Hershkowitz, 1998; Hershkowitz, Arcavi y Bruckheimer, 2001; Arcavi, 2003; Richard, 2004) y se ha demostrado que no siempre la función que desempeña la visualización contribuye o ayuda al estudio de la actividad matemática (Mesquita, 1989). También, se ha señalado la existencia de dificultades y obstáculos en la aplicación de la visualización (Aspinwall y Shaw, 2002; Arcavi, 2003), se ha llamado a la comunidad educativa a considerar el desarrollo de esta actividad cognitiva en los currículos escolares (Villani, 1998, Presmeg, 2006a, Marmolejo y Vega, 2012) y se ha aportado pautas a considerar en su desarrollo en la escuela (Duval, 1998a; Marmolejo y Vega, 2012).

Lo anterior explica por qué la visualización es una de las actividades cognitivas que mayor interés genera en el Campo de la Educación Matemática y como lo indica una exhaustiva revisión de la literatura especializada, son muchos y variados los aportes que se han realizado en torno a ella. Así, son cinco los aspectos en que la investigación educativa ha centrado su atención, a saber: el papel de la visualización en el desarrollo de otras actividades cognitivas o de la construcción de conceptos matemáticos; el papel de los educadores y de los micro-mundos en el desarrollo de la visualización; la forma como los estudiantes o los educadores recurren a la visualización en el estudio de las matemáticas; formas de visualización de naturaleza distinta que se promueven, así como la complejidad que el acto de ver induce en el aprendizaje de las matemáticas; y verificación empírica de procesos cognitivos reportados en investigaciones relacionados con la visualización. En lo que sigue describimos las investigaciones que caracterizan estas tendencias de investigación.

Entre la alta variedad de estudios que tratan la visualización en matemáticas los que interesan por las relaciones entre la visualización y el desarrollo de otras actividades cognitivas (resolución de problemas, razonamiento deductivo, argumentación y modelación) son los más contemplados. Con relación a la resolución de problemas, destaca el trabajo de Figueiras y Deulofeu (2005) que consideran la aplicación de diferentes clases de visualización para validar o invalidar los procedimientos de resolución desplegados por los estudiantes. Asimismo, se llama la atención a que la naturaleza de la visualización considerada en la resolución de un problema se relaciona con el nivel de maduración matemático del sujeto que la considera. También se señala que para los estudiantes el reconocimiento y discusión de las clases de visualización promovidos por el resto de sus compañeros, determina el significado que otorga a la resolución del problema planteado, lo que constituye en un aspecto determinante que

resalta el papel que puede llegar a jugar la interacción social en el desarrollo de la visualización.

Estudios como los realizados por Sánchez (2003), Torregosa y Quesada (2007) y Torregosa, Quesada y Penalva (2010) consideran la sinergia visualización-razonamiento deductivo. En el primer caso, se estudia las dificultades de estudiantes universitarios al transitar de pruebas pragmáticas a pruebas intelectuales en ambientes de geometría dinámica. Las pruebas pragmáticas se “basan en acciones efectivas que concretan o llevan a cabo el contenido de una proposición” (Sánchez, 2003, p.33) y las intelectuales requieren “la expresión lingüística de los objetos” (Sánchez, 2003, p.33). Como conclusión se considera que la aplicación de la operación de reconfiguración es el principal causante de las dificultades de la mayoría de los estudiantes al intentar realizar la demostración planteada. En Torregosa y Quesada (2007), por su parte, la atención recae en la coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva (razonamiento configural). Entre las diferentes clases de coordinación identificadas en el estudio se asigna especial atención al truncamiento, es decir, a la coordinación entre la aprehensión operatoria y la discursiva para resolver deductivamente el problema planteado. Esta acción explica la conducta de los estudiantes al resolver problemas de geometría y constituye, en sí misma, un vínculo entre la visualización y el razonamiento. Como causas que favorecen o limitan el razonamiento configural destacan la presencia de configuraciones cuya organización perceptiva obstaculiza la discriminación de las sub-configuraciones claves, en consecuencia, impiden el desarrollo de una coordinación adecuada, propician un conocimiento insuficiente de las relaciones lógicas a considerar e introducen dificultades para la identificación y manipulación de las sub-configuraciones iniciales.

Otros estudios se interesan por el papel que juega la visualización en el desarrollo de argumentaciones. En esta perspectiva se enfatiza que el tipo de pregunta planteado a los alumnos junto a la clase de aprehensión considerada, el estatus asumido por la figura y la presencia, o no, de obstáculos heurísticos, son elementos que determinan la naturaleza de los argumentos desarrollados (Mesquita, 1989). Por otra parte, al estudiar las relaciones entre las diferentes clases de aprehensión que permiten las figuras y el desarrollo de razonamientos discursivos, León (2005) evidencia una reducida explicitación de la aprehensión operatoria y que la aprehensión discursiva destaca por su “dependencia de la aprehensión perceptual y su valor determinante en el surgimiento de las unidades apofánticas” (p. 310), aspecto que en su investigación determinó cómo los estudiantes matemáticamente inicializan el proceso de desarrollo de la actividad planteada y que “constituye la base para los procesos semánticos de comparación, razonamiento y enunciación” (p.310).

De igual manera, muchos estudios se interesan por el papel de la visualización en la discriminación de patrones y el desarrollo de generalizaciones. Por ejemplo, Yeap y Kaur (2008) consideran como factores cognitivos que facilitan el desarrollo de estrategias de

generalización la habilidad para discriminar estructuras y relaciones inmersas en secuencias figurales y el uso de organizaciones heurísticas. Otras investigaciones como la de Rivera y Becker (2007) estudian el papel de las secuencias de figuras bidimensionales representadas en distintas fases (modelos lineales de figuras) y de las representaciones aritméticas en procesos de abducción que apoyan y justifican inducciones que conducen a generalizaciones. En este sentido se discriminó, de acuerdo al tipo de representación privilegiado, diferencias significativas entre la manera en que los procesos abducidos son descubiertos, construidos y generalizados en términos simbólicos. Igualmente, se observó que los estudiantes que privilegian el desarrollo de abducciones a partir de las representaciones numéricas desarrollan un mayor número de estrategias que aquellos que lo hacen a partir de las figuras. Y, se llamó la atención que los estudiantes que privilegian las figuras como soporte para el desarrollo de generalizaciones mostraban mayor capacidad en la justificación de la viabilidad de formas abducidas, incluyendo los procedimientos más pertinentes y potentes.

En una segunda investigación Rivera y Becker (2008) describen la tendencia cognitiva imperante en el desarrollo de generalizaciones a partir de modelos lineales de figuras. Según el nivel de complejidad fueron tres las estrategias puestas en juego por la población participante: constructiva estándar, constructiva no estándar y deconstructiva. Las dos primeras, las de menor complejidad y de mayor aplicación, se relacionan con una visualización centrada en la discriminación de las unidades unidimensionales que componen las secuencias figurales y que determinan el patrón a considerar. La generalización por deconstrucción, al contrario, es la de mayor complejidad y de menor presencia, vinculada con la discriminación de composiciones de sub-figuras bidimensionales superpuestas entre sí, donde uno o varios de sus lados o vértices corresponden simultáneamente a dos o más sub-figuras. Se aplica, en este tipo de generalización, un proceso de separación de las sub-figuras a través de la composición y descomposición de las unidades unidimensionales o cero-dimensionales que determinan el patrón a considerar.

Igualmente destaca dentro de la tendencia que estudia el vínculo visualización-discriminación de patrones y desarrollo de generalizaciones, el estudio de Steele (2008). En este caso, tras un proceso de enseñanza centrado, entre otros aspectos, en ayudar a los estudiantes a “identificar y generalizar patrones de relaciones entre cantidades en crecimiento pictórico y problemas de cambio” (p. 97), se evidenció que los estudiantes usualmente inician sus procesos de identificación de patrones y de generalización a partir del dibujo de configuraciones geométricas, por ejemplo, secuencias de figuras. Es a través de ellos que discriminan los patrones en cuestión, luego los “transfieren” a números u operaciones numéricas, describen el patrón observado y lo representan a través de representaciones simbólicas. También se llama la atención en esta investigación al hecho que la mayor parte de la población realizó generalizaciones directamente de la información visual captada de los diagramas sin recurrir a otro tipo de representaciones de naturaleza analógica, por ejemplo, las tablas.

En cuanto al rol de la visualización en la construcción de diversos objetos matemáticos investigaciones como las realizadas por Lémonidis (1991) y León (2005) consideran el concepto de homotecia y las relaciones pitagóricas. En la primera se asume que el aprendizaje de la homotecia, en primera instancia, exige una experiencia previa que permita discriminar diferentes tipos de figuras; aspecto que demanda, a su vez, un análisis de naturaleza figurativo con fines matemáticos. Y, en segunda instancia, que para comprender la articulación entre lo figurativo y lo numérico, es necesario asumir independientemente cada uno de estos aspectos y, posteriormente, articularlos entre sí. León (2005), en un sentido diferente identificó una serie de fenómenos asociados a la Aprehensión perceptual que bloquean el establecimiento de relaciones de naturaleza pitagórica. Entre otros, la falsa percepción de formas iguales o diferentes y una percepción poco desarrollada de aspectos bidimensionales como los ángulos o de aspectos unidimensionales como los lados. Estos aspectos determinan distintos procesos de exploración que desvían la atención de la aprehensión operatoria y del razonamiento hacia maneras de proceder heurísticamente no pertinentes, e impiden que “la instanciación geométrica propicie las condiciones para la emergencia de las longitudes y las amplitudes como objeto de las reflexiones de los estudiantes” (p. 308).

Desde esta misma perspectiva hay trabajos que estudian el vínculo entre la visualización y el área¹³. Es el caso de Padilla (1992) quien, al igual que Lemonidis (1991), pone en evidencia el importante papel que juega la explicitación de elementos figurativos previos al aprendizaje de nociones matemáticas en estudio. A manera de conclusión Padilla (1991) afirma que este tipo de reflexiones introducidas previamente a la enseñanza del área disminuyen significativamente la confusión entre área y perímetro. Por otra parte, Marmolejo y Vega (2012) establecen que la manera de ver en una figura desencadena procedimientos diferentes al comparar dos figuras a partir de sus cantidades de área, entre ellos tratamientos y conversiones semióticas distintas, y que los estudiantes que no han reflexionado sobre las posibilidades heurísticas y operatorias de las figuras introducen procedimientos engorrosos y poco asertivos en mayor proporción que aquellos que sí han participado en dichos procesos de reflexión. Y Outhred y Mitchelmore (2000, 2004) señalan relaciones entre la forma en que los estudiantes descomponen un rectángulo en sub-figuras cuadradas de igual área y sus estrategias de enumeración. Por ejemplo, los estudiantes que representaron la estructura de una matriz en términos de filas y columnas tendían a contar por grupos (filas o columnas) o utilizando la multiplicación.

Algunas investigaciones ponen en evidencia que acciones visuales que promueven el estudio del área no son evidentes para los estudiantes sino que deben ser aprendidas por ellos. Entre otros, Battista, Clements, Kathryn y Auken (1998) y Outhred y Mitchelmore (2000) ponen en evidencia que la estructuración y enumeración de arreglos rectangulares 2D de figuras cuadradas generan complejidad en los estudiantes. En el mismo sentido,

¹³ Teniendo en cuenta que la investigación sobre el área ha asignado directa o indirectamente e implícita o explícitamente un lugar relevante a la visualización, la relación visualización-constitución del concepto de área es considerada en detalle y con mayor amplitud en el apartado de antecedentes del área.

estudios como los realizados por Outhred y Mitchelmore (1996) muestran, que muy pocos estudiantes de forma espontánea recurren a la multiplicación para calcular el área de un rectángulo cuya superficie está fraccionada en sub-figuras de forma cuadradas e igual cantidad de superficie. Outhred y Mitchelmore (2000), por su parte, afirman que disminuir complejidades como la descritas anteriormente exige un estudio de una serie de principios que en sí mismos conforman la comprensión intuitiva de la medida de área: cubrimiento completo (la superficie del rectángulo es totalmente recubierta por figuras de forma y cantidad de área igual a la unidad seleccionada); estructura espacial (las unidades son alineadas en serie con el mismo número de unidades en cada fila); relaciones de tamaño (tanto el número de unidades en cada fila y el número de filas puede ser determinado a través de la longitud de los lados del rectángulo); y estructura multiplicativa (el número de unidades en una matriz rectangular puede ser calculado a través del número de unidades en cada fila y en cada columna).

El papel que desempeñan los educadores y el software educativo en el desarrollo de la visualización es la segunda tendencia en que el estudio de la visualización ha sido contemplado en el campo de la Educación Matemática. De forma similar que la anterior, y en menor grado, se ha aportado en esta tendencia un significativo número de investigaciones. Es el caso de Presmeg (1986a, 1986b) y Gal y Linchevski (2010) quienes resaltan la importancia de que los profesores sean conscientes de las dificultades asociadas a la visualización, pues, según estos autores, es a través de su reconocimiento que es posible avanzar en el estudio de la Geometría. En particular, Gal y Linchevski (2010) llaman la atención en el desarrollo de un mayor número de investigaciones que consideren, por un lado, cómo los docentes que han sido expuestos a un conocimiento visual lo utilizan durante la instrucción en el aula; por otro lado, cómo estos educadores incorporan las teorías de la percepción visual en el análisis de las dificultades de los estudiantes y en su desarrollo profesional. Otros estudios, como los realizados por Warren y Cooper (2008) y Markovits, Rosenfeld y Eylon (2006) estudian respectivamente las acciones del maestro al ayudar a los estudiantes a visualizar y a describir patrones de crecimiento visual en términos de sus relaciones de posición, y evidencian que los educadores de pre-escolar y de los primeros grados de educación básica carecen de habilidades visuales bien desarrolladas y que las habilidades evidenciadas por ellos son similares a las explicitadas por sus estudiantes.

Por otra parte, Gal (2005, citado en Gal y Linchevski, 2010, p. 180) sugiere que los maestros que estaban “equipados con el conocimiento del contenido pedagógico” sobre la percepción visual, eran conscientes de las dificultades encontradas por sus estudiantes y eran capaces de lidiar con ellas. Estos maestros proporcionaron a sus alumnos distintas estrategias para encontrar, por ejemplo, las descomposiciones de las figuras deseables, para identificar las plantillas y para interpretar los datos dados en las figuras, elementos que permiten a sus estudiantes resolver las tareas propuestas de manera adecuada. Desde un punto de vista similar, Presmeg (1991) estudia el rol de los educadores para facilitar u obstaculizar que sus estudiantes recurran a los elementos visuales preferidos por ellos.

Tras observar durante un año escolar a un grupo de maestros que según sus preferencias por la visualización fueron clasificados en profesores visuales, no visuales y visualmente intermedios, se observó que si bien los profesores en el grupo intermedio utilizaron muchos de los métodos visuales característicos de los profesores visuales, también pusieron en evidencia creencias y actitudes que inducen en sus alumnos la creencia que la visualización no es necesaria o importante para el estudio de las matemáticas. Así mismo se observó que los estudiantes visualizadores que participaron en las clases de profesores no-visuales trataron de prescindir de sus métodos visuales preferidos en favor de los métodos no visuales aplicados por sus profesores.

Con relación a cómo los educadores de pre-escolar suscitan la enseñanza de la visualización anudada al estudio de la Geometría, Inan y Dogan-Temur (2010) reseñan que los profesores de Turquía privilegian visualizaciones de naturaleza estática en sus procesos de enseñanza, es decir, donde las figuras estudiadas no tienden a ser transformadas o discriminadas más allá de lo que se impone al primer golpe de vista. Un aspecto que caracterizan dichos procesos de enseñanza se relaciona con que los educadores, en gran proporción, consideran que la enseñanza de la Geometría en el pre-escolar debe privilegiar el reconocimiento de las figuras elementales a partir de sus formas y de las similitudes con objetos cotidianos. Solo una menor proporción de educadores consideran la discriminación de las características de las figuras y el establecimiento de diferencias y similitudes entre ellas. En relación a los materiales de mayor uso en sus clases, muy pocos introdujeron el uso de elementos y acciones que posibilite transformaciones en las figuras estudiadas, como es el caso de la utilización del tangram y el privilegio de acciones de recorte y pegado de papel.

Con respecto a la sinergia software-visualización Larios (2006) y Herrera (2011) han detectado dificultades en la visualización de los estudiantes en relación a la discriminación de las cadenas de figuras que evidencian la operación de arrastre y en la identificación de las características geométricas representadas en las configuraciones geométricas construidas con el software empleado; y, en un sentido distinto, Haas y Rosado (2011) y Kordaky (2003) han evidenciado el potente papel que desempeñan el software en el desarrollo de la visualización así como su rol en la constitución de conocimiento matemático, la congruencia y semejanza, y el área respectivamente.

La forma como los estudiantes o los educadores recurren a la visualización en el estudio de las matemáticas constituye la tercera de las tendencias que se inscribe el estudio de la visualización. En este sentido, la discriminación y clasificación de figuras bidimensionales por parte de los estudiantes ha sido un aspecto altamente considerado. Al respecto se ha concluido que al identificar, describir y clasificar formas los niños entre los 3 y 6 años reconocen componentes y propiedades simples en figuras estándar, forman esquemas basados en el análisis de las características de formas visuales y relacionan formas con prototipos visuales (Clements, Swaminathan, Zeitler y Sarama, 1999). Otros estudios donde se analiza cómo los estudiantes discriminan figuras cuadriláteras al ser

representadas, bien de manera diferente a como se realiza en los libros de texto (p.e. una orientación diferente) o bien de forma estereotipada presentan indicios de que “los dibujos estereotipados de estas figuras influyen en la valoración realizadas por los jóvenes en su reconocimiento”, y que al identificar figuras a partir de sus representaciones figurales algunos de los estudiantes aluden a la posición de la figura para justificar sus respuestas (Moriena y Scaglia, 2003). En el mismo sentido, Larios (2006) considera que para algunos estudiantes la orientación es un atributo importante en el desarrollo de un problema geométrico. Por ejemplo, en tareas donde las figuras son representadas en formas y orientaciones no prototípicas, algunos estudiantes suelen cambiar las figuras iniciales por otras cuya forma y orientación sea conocida y considerada como correcta para poder detectar el tipo de figura, sus relaciones espaciales y actuar sobre ella. Es sobre las segundas de las figuras, no sobre las primeras, que estos estudiantes se basan para resolver la actividad propuesta.

Otros trabajos estudian el papel del conocimiento prototípico y los atributos formales de algunas clases de figuras en las estrategias de clasificación de representaciones figurales, entre otros. Walcott, Mohr y Kastberg (2009) verifican que al comparar dos figuras con forma diferente e igual área representadas sobre una cuadrícula (un rectángulo y un paralelogramo), aproximadamente la mitad de los estudiantes asumieron ambas representaciones como una misma figura, mientras que el resto consideró que eran figuras distintas. En el primer caso se describieron las características comunes o se asoció una forma con la otra mediante la aplicación de acciones que evidencian la transformación de una en otra. Por el contrario, los que admitieron que eran dos figuras distintas centraron la atención en atributos formales o impuestos, en comparaciones con prototipos familiares: focalización en sus atributos (ángulos, lados, medidas, líneas paralelas...) o simplemente manifestaron que eran diferentes o que cada una pertenece a una clase de figuras distinta. Se concluye en la investigación que el primer grupo de estudiantes movilizó una visión dinámica de las figuras donde los atributos no vinculados a las definiciones fueron libremente manipulados, mientras que el segundo grupo puso en juego una visión estática de las figuras, asistiendo a atributos y propiedades como el tamaño (superficie) o el número de lados y/o los ángulos.

Ramírez (2012), por su parte, estudia las habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático en el aprendizaje de los movimientos en el plano, la igualdad de figuras y su unicidad. A manera de conclusión, Ramírez (2012) señala que los alumnos con talento matemático evidencian niveles de inteligencia y capacidad visual superior a otros tipos de estudiantes, y la aplicación de una alta variedad de habilidades visuales, es el caso de: percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, discriminación visual. Igualmente, se llama la atención en esta investigación a que durante el proceso de aprendizaje, las habilidades visuales tienden a evolucionar de forma diferente.

Como una cuarta tendencia de investigación se ha contemplado las variadas formas de ver que un sujeto puede promover así como la complejidad que subyace al acto de ver en el estudio de las matemáticas. Así, pues, los estudios realizados por la psicología de la Gestal (Rock, 1985), por ejemplo, consideran que nuestro cerebro espontánea y de forma específica tiende a organizar los elementos que perceptualmente llegan a él. En este sentido son varias las leyes (leyes gestálticas) que predicen la organización perceptual privilegiada por un individuo al centrar su atención sobre una configuración. Es el caso, por ejemplo, de la Ley de la Buena Continuidad, que alude a la “tendencia a reunir en una única estructura aquellas partes o unidades que parecen estar alineadas o en suave continuidad direccional unas respecto a otras sin que las demás cosas varíen” (Rock, 1985, p. 116) o la Ley de Cierre que alude a la “tendencia, sin que varíe el resto, a agrupar en estructuras unificadas aquellos elementos que juntos constituyen una entidad cerrada” (Rock, 1985, p.118). También se ha llamado la atención que no basta con estas maneras espontáneas de ver para dar cuenta de las exigencias visuales que subyacen al estudio de la Geometría, por el contrario, la actividad mental que ha de movilizarse al recurrir a la visualización pone en juego actividades mentales que van en total contravía de las que espontáneamente impone nuestro cerebro (Duval, 2004).

Duval (1995) ha puesto en evidencia que una figura permite aprehensiones de naturaleza diferente (Duval, 1995): perceptual, operatoria, discursiva y secuencial. Siendo las aprehensiones operatoria y discursiva las que determinan visualmente las tareas de demostración en matemáticas. Desde esta perspectiva se considera que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, en otros se relacionan y, en ciertos momentos se oponen (Duval, 2003). Por su parte, Marmolejo y Vega (2012) al estudiar el paso de la aprehensión perceptual a la operatoria discriminaron dos clases de visualización: local con pérdida de globalidad (la figura es percibida de forma "cuadrículada" como si fuese un mosaico de baldosas y las características globales de la figura en estudio son dejadas de lado) y local sin pérdida de globalidad (se consideran tanto las características internas como globales de la figura). Se puso de manifiesto en este estudio vínculos entre la manera de ver considerada y las formas de proceder, donde la visualización local sin pérdida de globalidad es la que determina los procedimientos matemáticos más potentes y económicos.

Desde un punto de vista distinto se ha evidenciado la complejidad que subyace al acto de ver en matemáticas. Se ha determinado que en la resolución de problemas matemáticos los estudiantes no suelen asumir las figuras como herramientas heurísticas (Duval, 1999; Clements, Swaminathan, Zeitler y Sarama, 1999; Moriena y Scaglia, 2003; Marmolejo, 2005; Markovits, Rosenfeld y Eylon, 2006; Walcott, Mohr y Kastberg, 2009; Marmolejo y Vega, 2012). Así mismo se ha reportado la presencia de factores que facilitan o dificultan la discriminación de operaciones visuales. Padilla (1992), por ejemplo, establece que la concavidad de la partes a reagrupar, el fraccionamiento de las partes claves dado al inicio, un reducido número de operaciones de rotación y traslación a considerar son elementos que facilitan la discriminación de la operación de

reconfiguración. Por el contrario, son elementos que obstaculizan su identificación: el obstáculo de desdoblamiento, la convexidad de las partes a reagrupar, el fraccionamiento de las partes claves no asignado y un alto número de operaciones de rotación y traslación a considerar. Marmolejo (2007), por su parte, resalta que las características del contorno de una figura junto a la orientación de los trazos que han de introducirse en ella, son aspectos que explican la dificultad que tienen los estudiantes para descomponer una figura en sub-figuras previamente determinadas. Estudios como los realizados por Duval (1995, 1998a), Grenier (1988, en Padilla 1992) y Küschemann (1981, en Padilla, 1992) igualmente forman parte de esta tendencia de investigación.

En relación con la posibilidad de discriminar en una figura las unidades de dimensión 1 y dimensión 2 que la conforman e “inferir” a partir de ellas las propiedades matemáticas relevantes al problema planteado, Duval (2005) y Gal y Linchevski (2010) han encontrado que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica, centrada en lo que “a primera a vista se ve” en la figura geométrica en estudio. De quedarse solo en esta manera de ver, la visualización no solo resulta insuficiente, sino que además dificulta la aplicación y desarrollo de conceptos y relaciones geométricas.

Las investigaciones que se interesan por la complejidad que subyace al acto de ver en matemáticas no solo centran su atención en los estudiantes, el interés también recaen en las dificultades que tienen los profesores. Es el caso de los estudios realizados por Guirette (2006) y Guirette y Zubieta (2010) donde, el primero, evidencia un incipiente dominio de la aprehensión operatoria en los profesores al tratar “Pruebas sin palabras”. El segundo reseña que para los educadores es complejo identificar en una configuración geométrica las unidades figurales 2D a considerar en el desarrollo de la tarea propuesta y que si bien discriminan las unidades figurales de una dimensión que constituyen las figuras, lo hacen de forma aislada nunca como un conjunto de elementos constituyentes de la figura en estudio lo que obstaculiza la identificación de la dimensión 2, en consecuencia, pues es necesaria para la extracción de información pertinente a las propiedades o relaciones matemáticas acordes al desarrollo de la problemática planteada. Esta investigación igualmente señala que, para los docentes, es complejo discriminar o introducir los trazos auxiliares que desencadenen la información relevante para el desarrollo de la tarea propuesta.

En una última tendencia de investigación sobre la visualización se encuentran los estudios que realizan verificaciones empíricas de algunos procesos cognitivos descritos por algunos investigadores. Por ejemplo, Deliyianni, Elia, Gagatsis, monoyiou y Panaoura (2009) confirman que los tres tipos de modificación expuestos por Duval (1995): mereologica, posicional y óptica, son niveles de jerarquía que permiten explicar en detalle la aprehensión de las figuras en el desarrollo y comprensión de tareas de geometría. Por otra parte, Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou y Michael (2009) revelan tanto diferencias en el desempeño de los estudiantes según el tipo de modificación considerado, como la falta de consistencia en la aplicación de un tipo de modificación en relación a

otros. Elia et al (2009) describieron, en el primer caso, rendimientos similares en la aplicación de modificaciones ópticas y posicionales, mas no en las modificaciones operatorias, y en el segundo caso, consistencia en la aplicación de las modificaciones mereológicas y ópticas, pero no en la de modificaciones posicionales, al respecto estos investigadores señalaron que “algunas de las tareas de modificación posicional... fueron abordadas de manera similar a tareas de modificación mereológica y el resto ... de manera similar a tareas de modificación óptica” (p. 6).

2.3 Investigaciones sobre el concepto de área de superficies planas en el Campo de la Educación Matemática.

El área juega un papel relevante en la construcción de nuevos conceptos matemáticos (fracciones, integración, porcentajes, volumen...) así como en el desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas (resolución de problemas, razonamientos, argumentaciones, visualización). De ahí que la mayoría de los programas curriculares la incluyan en sus orientaciones, se considere como objeto de evaluación en pruebas externas y sea asumida como una de las magnitudes a la que mayor atención se le asigna en los primeros grados de la educación básica. El área sin lugar a duda es un elemento de gran importancia para el estudio de las matemáticas, pero, son varios los aspectos que llevan a considerar que las propuestas de enseñanza tradicionalmente implementadas en las instituciones educativas no han logrado avances significativos en torno a su reflexión, entre otros, los bajos niveles de rendimiento de los estudiantes al resolver problemas de área en pruebas externas (Dickson, Brown y Gibson, 1991; Díaz, Gaviria, Torres y Guacaneme, 1997; Marmolejo, 2005, De Araújo y Dos Santos, 2009); el elevado número de reportes que resaltan las dificultades que tienen los estudiantes al tratar el área (Piaget et al, 1981; Freudenthal, 1983; Douady y Perrín, 1989; Turegano, 1994; Chamorro, 1997; Kordaki y Potari, 2002; Kordaki, 2003; Zacharos, 2006; Kamii y Kysh, 2006, entre otros), y el reconocimiento que tales dificultades persisten de un nivel escolar a otro, incluso en la universidad (Kospentaris, Spirou y Lappas, 2011).

Son variados los elementos que la investigación educativa considera que afectan el estudio del área. Por ejemplo, que “las propuestas de enseñanza tradicionalmente implementadas en las instituciones educativas no tienen en cuenta los variados matices en que se desarrolla el área y no suelen poner de manifiesto su conexión con otras partes de la matemática escolar” (Olmo, Moreno y Gil, 1989, p. 12), o bien que aspectos visuales u holísticos no son considerados en la construcción de este concepto matemático (Pitta-Pantazi y Cristou, 2009) y, por el contrario, la atención en la enseñanza del área normalmente comienza y se restringe a cuestiones aritméticas, dejándose de lado la verdadera naturaleza del concepto en consideración (Dickson et al, 1991; MEN, 1998). Otras investigaciones, señalan que en algunos textos escolares las técnicas que organizan matemáticamente el concepto de área deben ser realizadas o sistematizadas por los estudiantes (o los profesores), y muy pocas ocasiones son desplegadas por el propio texto

(De Araújo y Dos Santos, 2009); así mismo señala en estos materiales didácticos tareas relativas a la comparación de áreas brilla por su ausencia (De Araújo y Dos Santos, 2009). Olmo et al. (1989) afirman que en los textos se asume normalmente que el alumno descubre por sí mismo el concepto de área y se pasa a la medida, “o bien se define de manera más o menos abstracta de superficie, pero sin realizar actividades orientadas a que se distinga esta cualidad de las restantes o compare objetos respecto a la misma necesidad sin necesidad de medirlo” (p.46)

Todo lo anterior explica por qué el área es y ha sido un objeto de especial interés en el campo de la educación matemática. En consecuencia, son muchos los reportes de investigación que estudian los fenómenos que subyacen al estudio del área en la escuela. La revisión de investigaciones sobre el área que hemos realizado permite discriminar que su estudio en la investigación educativa se ha centrado en cuatro aspectos: pautas para el tratamiento y conceptualización del área en la escuela; conservación del área (Piaget et al, 1981); medida directa (replicación de la unidad de medida sobre la superficie a medir o conteo de las partes iguales en que la figura medida ha sido fraccionada) e indirecta (aplicación de fórmulas) así como el paso del primer tipo de medida al segundo, y articulación del área con otras magnitudes y conceptos matemáticos. En lo que sigue describimos las investigaciones que caracterizan estas tendencias de investigación.

Desde hace varias décadas y desde posturas distintas la investigación en el campo de la Educación Matemática ha generado pautas para el tratamiento del concepto de área en la escuela. Así, un importante número de estudios ha establecido jerarquías en la forma cómo se construye el concepto de área. Son exponentes de esta tendencia los trabajos de Piaget et al. (1981) y Wagman (1975). En el primer caso, se postula que en el aprendizaje del área se pasa por diferentes etapas de desarrollo (primitiva, intuitiva, operacional y analítica) y que se centra exclusivamente en las operaciones de conservación y transitividad. En el segundo caso, se establecieron cuatro etapas en el desarrollo del área, a saber: 1) habilidad de aplicar el conjunto entero de axiomas en casos perceptualmente fáciles y difíciles, 2) aplicación de axiomas en casos simples donde la exigencia perceptual es compleja o los estudiantes no son capaces de resolver la problemática planteada, 3) aplicación de algunos, pero no todos, los axiomas (los estudiantes de esta etapa conservan el área) y 4) considera el concepto de conservación de área pero no se aplica en todas las situaciones posibles y se consideran algunos de los axiomas de la medida del área.

Osborne (1976), al igual que Wagman (1975), asumiendo la existencia de una axiomática común entre el área y el perímetro así como la presencia de propiedades matemáticas comunes (función, aditividad, congruencia, comparación y unidad), apuestan por una construcción conjunta de estos dos tipos de magnitudes. De manera similar Rogalski (1982, en Olmo et al, 1988) estudió la dimensionalidad de las longitudes, las superficies y los volúmenes en el estudio de invariencias de algunas transformaciones (una semejanza de razón r , para la longitud asocia el invariante r , para la superficie r^2 , para el volumen

r³). Esta investigación concluyó que: 1) el modelo lineal funciona relativamente de forma precoz, pero existen grandes dificultades para superar este modelo y pasar a un tratamiento multidimensional apropiado a las medidas de superficie y de volumen; 2) una buena representación del carácter unidimensional de la longitud es necesario para alcanzar un éxito mediano en la superficie, pero está lejos de ser suficiente; 3) la adquisición de la bidimensionalidad de la superficie como concepto es un proceso largo y complejo; 4) la acción espontánea de pavimentar parece un factor importante para lograr un paso del pavimentado al cálculo de la medida y 5) las dificultades persistentes parecen estar relacionadas con la existencia de obstáculos cognitivos y epistemológicos que se refuerzan mutuamente (paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas y su construcción como un dominio propio, reconocimiento de la dimensionalidad relativa a los objetos geométricos, así como la noción de equivalencia que fundamenta la medida de formas no pavimentables y subtiende propiedades de continuidad, complejas, pero ciertas).

Freudenthal (1983), por su parte, considera que el principal objetivo educativo en torno al área debe apuntar a la constitución del objeto mental área sin tener la necesidad de llegar al concepto matemático mismo. De esta manera, considera su enseñanza centrada en la diferenciación y descripción de los distintos fenómenos que lo organizan, a saber, reparto justo (aprovechando las regularidades, estimando y midiendo), comparaciones y reproducciones en formas diferentes (por inclusión, por transformaciones de descomponer y recomponer, por estimación, por medición, por medio de transformación, es decir, congruencias, afinidades, cizallamientos) y mediciones (con agotamiento con una unidad, con subunidades más finas, por aproximación del interior y el exterior con rejillas fijas con figuras adaptadas, por conversión de transformaciones de rehacer y recomponer, a través de relaciones geométricas generales, por medio de fórmulas generales o de principios como el de Cavaliere).

Trabajos como los realizados por Douady y Perrín (1989) resaltan las bondades que suscita la enseñanza del área a partir de una diferenciación de los elementos matemáticos que le caracterizan: superficie, cantidad de área y medida. De esta manera se propone una enseñanza del área que privilegia la noción de área como una magnitud autónoma, desligando el área de la forma y diferenciando la cantidad de área, de la superficie y del número. Así mismo, se hizo especial énfasis en la medida de superficies (S) no pavimentables a través de una unidad determinada (A). Se privilegiaron en este caso acciones centradas en el recorte y pegado para fabricar una superficie S' de igual área que S y pavimentable con A, a la vez que aproximaciones desde el interior y exterior de S, a partir de la unidad A o de subdivisiones de ella. También, se dio tratamiento especial a acciones donde es necesario señalar las diferencias y establecer las similitudes entre área y longitud (perímetro), focalizando la atención en sus variaciones respectivas a lo largo de diferentes transformaciones.

Chamorro (1997), por su parte, señala que la complejidad que subyace al aprendizaje de la medida del área, como de otras magnitudes, se relaciona por la existencia de un

vocabulario flotante con el que se designan indistintamente acciones o conceptos muy diferentes en cuanto a su naturaleza matemática. Esta investigadora distingue distintos tipos de entornos a través de los cuales ha de pasar necesariamente el aprendizaje de la medida, siendo estos: objeto soporte, tipo de magnitud, valor particular o cantidad de magnitud, medida aplicación, medida imagen, medida concreta, la medición y el orden de magnitud. Desde esta perspectiva, se llama la atención al hecho de que cada uno de esos enfoques no conducen al mismo resultado, es más, se afirma la necesidad de discriminar la importancia de unos fenómenos en relación a otros. En cuanto al diseño de secuencias de enseñanza se considera como momentos de especial importancia la comparación entre áreas y la diferenciación entre perímetro y área. El primero, permite la constitución del área como objeto mental y el segundo porque lo que provoca el error en tareas de comparación de áreas es, según esta investigación, el perímetro. En consecuencia, se sugiere considerar ejemplos de figuras que, a pesar de desviaciones conducentes a error en las dimensiones lineales, tengan la misma área y ejemplos de figuras que, a pesar de desviaciones conducentes a error en las dimensiones lineales, tengan diferentes áreas.

Otras investigaciones asumen que el uso de herramientas culturales o constructos sociales (principio de superposición y el método euclidiano de comparación de áreas) junto a la mediación social son elementos que estructuran el concepto de área; mientras que otros estudios resaltan el papel de la visualización en el desarrollo de los argumentos en que se apoyan los estudiantes universitarios al justificar conjeturas sobre la noción de área. Por ejemplo, son aspectos que determinan los argumentos de los estudiantes el “cambio en la forma (al disminuir el número de lados de los polígonos) y de posición de las figuras al trasladar un punto, sin que cambie el área del polígono dado (Cabanas y Mejía, 2009). En algunos casos, el cambio de posición también conlleva al cambio de forma” (p.1284). Así mismo se ha determinado que los problemas geométricos sobre conservación de área proveen herramientas propicias para comprender el carácter dinámico del concepto de área (Kospentaris et al, 2011), es el caso de la comparación entre triángulos y paralelogramos con igual base y altura, el establecimiento de relaciones entre triángulos con un par de ángulos iguales y la transformación de formas lineales a formas cuadradas equivalente así como de figuras rectilíneas lineales y curvilíneas básicas. Por otra parte, estudios como los realizados por Pitta-Pantazi y Cristou (2009) han recalcado que el concepto de área es una red compleja de ideas, entre otras, la medición, estimación de áreas, unidad de área y equivalencia de unidades y otros han explorado el rol que desempeñan distintos recursos didácticos como es el caso de materiales manipulativos (Cass, Cates, Jackson y Smith, 2002; Fernández y Healy, 2010) y software informáticos (Kordaki y Potari, 2002).

El estudio de la conservación del área y su papel en el tratamiento del concepto de área constituye la segunda de las tendencias en que el área ha sido considerada en la investigación educativa. La conservación del área ha sido reconocida como un paso preliminar y obligado para la comprensión de la medida del área (Piaget et al, 1981;

Maher y Beattys, 1986) y ha evidenciado que su desconocimiento suscita dificultades para comprender la deducción de fórmulas, lo que conlleva a que éstas sean aplicadas de forma automática ignorándose en el proceso las relaciones entre la forma y las propiedades geométricas de las figuras en cuestión (Hutton, 1978, en Dickson et al, 1984). Así mismo, se ha concluido que los conceptos de compensación y de relación parte-todo (Piaget et al, 1960; Carpenter y Lewis, 1976) y de las nociones de reversibilidad y transitividad (Piaget et al, 1960) son fundamentales para el desarrollo de la conservación de área.

Además, se ha asumido que el corte, movimiento y pegado de superficies así como la re-organización de las partes de una figura para producir otra con superficie equivalente son acciones que promueven el desarrollo de la conservación del área (Douady y Perrín, 1986; Rahim y Olson, 1999; Chamorro, 1997; Kordaki, 2003). Y, por el contrario, investigaciones como las realizadas por Chamorro (1997) concluyen que las superficies prototípicas de los polígonos regulares estándares no promueven la identificación de una misma superficie por cambio de forma y que presentar las figuras dibujadas y no recortadas inhibe la aparición de procedimientos de comparación de superficies, elemento clave para el estudio de la conservación del área.

Pero sobre todo se ha insistido en la investigación en Educación Matemática que los estudiantes evidencian sendas dificultades para aceptar que dos figuras pueden tener la misma área así sus formas sean distintas, incluso, como lo señalan Popoca y Acuña (2011), cuando ante sus ojos una de las figuras es transformada en la otra. La forma y el área, pues, son cualidades indisociables y tributarias la una de la otra de tal manera que un cambio de forma conlleva a un cambio en el área de la figura (Chamorro, 1997; Popoca y Acuña, 2011). De esta manera, se ha reportado que algunos estudiantes aceptan la conservación en paralelogramos, pero muestran dificultades cuando las figuras son triangulares (Hughes y Rogers, 1979, en Kordaky, 2003) y que dificultades similares han sido observadas en las formas irregulares (Maher y Beattys, 1986). Igualmente se ha señalado que las dificultades de los estudiantes sobre la conservación de área permanecen de un grado de educación a otro, incluso a nivel universitario (Maher y Beattys, 1986). Por otra parte, también se ha resaltado que los estudiantes tienen problemas para comprender un área como la suma de sus partes (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Plata y Swafford, 1988), elemento clave para reflexionar sobre el concepto de conservación de área.

Las estrategias de los estudiantes en el desarrollo de tareas de conservación de área también se ha reportado en la literatura especializada. Se ha señalado, entre variados aspectos, elementos que caracterizan patrones de comportamiento en las estrategias de los estudiantes al verificar si dos formas distintas tienen la misma área mediante la aplicación del concepto de congruencia pieza por pieza (reconfiguración de una de las figuras sobre la superficie de la otra). Es el caso de la superposición de una región sobre otra y la discriminación de congruencias lineales y angulares para identificar el tipo de

disección a aplicar en una de las figuras (Rahin y Olson, 1998). Por otra parte, se considera en Mamona-Downs y Papadopoulos (2006) que los estudiantes recurren a acciones visuales y de medida para justificar sus procedimientos, pero que no se suele considerar la aplicación de propiedades geométricas; y, en Pitta-Pantazi y Cristou (2009) se consideran que a) el uso de ambientes de geometría dinámica y b) el estudio de tareas de medida de área de triángulos y paralelogramos donde la conservación del área está presente y donde se enfatiza la relación forma-área, son factores que afectan positivamente el rendimiento de los estudiantes. Así mismo, se ha señalado que los estudiantes al establecer diferencias y similitudes entre un paralelogramo y un rectángulo de igual área, promueven procedimientos centrados en ideas prototípicas flexibles que motivan asumir las figuras holísticamente y manipularlas mentalmente, o bien en ideas prototípicas no flexibles que inducen la focalización en partes individuales de la figura (Walcott, Mohr y Kastberg, 2009). Más recientemente Kospentaris et al (2011) afirman que el conocimiento geométrico formal, la percepción visual y las nociones intuitivas personales son factores que determinan las estrategias de los estudiantes en el estudio de la equivalencia de áreas. Por ejemplo, en esta investigación se detectó que la visualización interfiere de forma problemática con el razonamiento formal y que las nociones personales injustificadas se combinan con la escasez de conocimiento geométrico. Igualmente se determinó que la principal noción intuitiva que afecta las actitudes de los estudiantes fue el punto de vista que la equivalencia de áreas coincide con la congruencia.

Algunos estudios han reseñado que la conservación de área ha sido investigada independientemente de la medida del área y que su articulación es indispensable para comprender el concepto de área (Kordaky, 2003). Así mismo, se ha recalado que clases de figuras equivalentes e igual forma (clases de triángulos o paralelogramos equivalentes con bases comunes e iguales) así como y polígonos no-convexos no se suelen tener en cuenta en la investigaciones sobre este concepto (Kordaky, 2003). Y, que por el contrario, la atención de la literatura especializada ha considera de forma aislada figuras con formas estándar como cuadrados, rectángulos, triángulos y paralelogramos (Johnson, 1986). Finalmente, es importante señalar que a pesar de que muchas investigaciones han considerado que la conservación del área debe ser asumida de forma explícita en los currículos escolares, por ejemplo, Kospentaris et al (2011), el desarrollo de la conservación de área tiende a ser ignorado en la enseñanza tradicional (Clements y Stephan, 2004, en Kospentaris et al, 2011).

La tercera tendencia en que se inscriben las investigaciones que se han realizado sobre el área considera la medida directa e indirecta de áreas y el paso de un tipo de medida al otro. Esta tendencia de investigación, en relación a las demás, se impone como la de mayor difusión en el campo de la Educación Matemática. En este sentido, muchos estudios evidencian que el concepto de medición de áreas es complicado de comprender (Piaget et al, 1981; Maher y Beattys, 1986; Kamii y y Kysh, 2006) e involucra una red de conceptos que se relacionan de forma concomitante. Es el caso de la conservación del área, la unidad y su iteración, el recuento de unidades y el cálculo de fórmulas (Piaget et

al, 1981; Maher y Beattys, 1986). Así mismo, se ha enfatizado el importante papel que para la comprensión de la medida desempeñan la variedad de sistemas de representación utilizados, el contexto en que se expresan y la disponibilidad de herramientas (Kordaki y Potari, 1998).

Otros estudios señalan que las dificultades de los estudiantes en relación con la medida de área se atribuyen tanto a la forma fragmentada en que se estudia el área sin relacionarla dinámicamente con su perímetro (Moreira Baltar, 1997), como a la imposibilidad de llenar el vacío existente entre el uso de fórmulas y la manipulación cualitativa del área sin uso de números (Rahim y Sawada, 1990; Baturó y Nason, 1996). Por otra parte, algunos reportes de investigación señalan que la comparación (De Araújo y Dos Santos, 2009) y conservación de áreas (Piaget et al, 1981; Maher y Beattys, 1986; Douady y Perrín, 1986) son aspectos fundamentales y preliminares para la comprensión de la medición de áreas. Diferentes estudios también consideran que las acciones de corte, movimiento y pegado de superficies al transformar una figura en otra de igual área son fundamentales para la comprensión de la medida (Hirstein, Lamb y Osborn, 1978; Douady y Perrín, 1986; Olmo et al, 1989; Hirstein et al, 1978; Douady y Perrin, 1986).

Investigaciones como las realizados por Chamorro (1997) han reportado que muchas propuestas de enseñanza focalizan toda su atención en el desarrollo de tratamientos aritméticos y se ha llamado de atención a sus efectos en la comprensión de la medida de áreas,

“Bajo el título de actividades de medición, se esconde un amplio abanico de cuestiones que poco o nada tienen que ver con ella [...] los libros de texto, ejercicios y evaluaciones, evidencia que la medida es una excusa para trabajar actividades de domino aritmético, relativas a la numeración y al uso de los números naturales y decimales, produciéndose el remplazo de las magnitudes por los números, de la medición por el conteo, perdiéndose toda la estructura topológica subyacente [...] en el ámbito de la medida hay que asegurarse previamente de la igualdad de los objetos en relación con las transformaciones operadas, y puesto que estos aspectos se obvian a través del tratamiento aritmetizado, su comprensión y pertinencia, pasan a ser responsabilidad del alumno” (p. 231).

En la misma línea de ideas Kordaki y Potari (2002) afirman que en la escuela los estudiantes expresan sus conocimiento matemáticos exclusivamente en sistemas simbólicos como el de las fórmulas de áreas, mientras que otros sistemas de representación que enfatizan en el conocimiento intuitivo y en la medición de áreas a través del cubrimiento con unidades espaciales no son a menudo tenidos en cuenta. En consecuencia, los estudiantes no tienen oportunidad de dar sentido al concepto de acuerdo a su desarrollo cognitivo, ni a expresar piezas diferentes del conocimientos que poseen (Kordaki y Potari, 2002). Así mismo, trabajos como los realizados por Johnson (1986) y Douady y Perrín (1986) reseñan que las dificultades que se han observado en la medida, están relacionadas con la introducción prematura de un acercamiento cuantitativo a la medida del área mediante el uso de fórmulas, sin tener en cuenta el enfoque cualitativo que subraya el concepto de conservación de área sin el uso de números.

De forma más puntual algunas investigaciones han precisado los elementos que deben ser considerados en la construcción del concepto de unidad de medida, es el caso de Kordaky y Potari (2002) quien describe cuatro aspectos: comprensión de las características espaciales de la unidad, su invariabilidad durante el proceso de medición, su conservación a través de acciones de separación y recombinación y la relación inversa entre el tamaño y el número de unidades necesarias para cubrir una superficie. También hay estudios que evidencian que la cuadrícula no es espontáneamente utilizada en procesos de medida. Por ejemplo, en Chamorro (1997) se señala que esta herramienta no se tiene en cuenta para pavimentar la superficie de una figura a partir de una unidad asignada, ni para establecer relaciones entre la forma de la superficie a medir y la de la unidad a usar; tampoco para considerar que una misma unidad puede ser representada con figuras de forma diferente mediante la aplicación de descomposiciones y recomposiciones sobre ella. En esta investigación, se afirma, además, que comprender cómo puede funcionar la cuadrícula en tareas que promueven aspectos como los anteriormente citados requiere de un trabajo previo.

La investigación educativa igualmente ha evidenciado que la relación inversa entre el tamaño y el número de unidades necesarias para cubrir una superficie presenta dificultad en la comprensión de la medida de áreas (Carpenter y Lewis, 1976). Y, en un sentido diferente, estudios como los realizados por Hirstein et al (1978) llaman la atención que las unidades cuadradas suelen ser consideradas de forma rígida y discreta, aspecto que explica por qué en procesos de medida las unidades cuadradas no son transformadas en otras de forma distinta pero con igual área.

Igualmente un gran número de reportes resaltan la complejidad que subyace al reconocimiento de lo que es una unidad de medida y de la comprensión del área como pavimentación de una superficie. Brookes (1970, en Dickson et al, 1991) y Owens y Outhred (1997), entre otros, reportan las dificultades que tienen los estudiantes al calcular el área mediante la replicación de una unidad, por ejemplo, cuando en el proceso de pavimentación se dejan sin recubrir fracciones de la superficie a medir o cuando las figuras que representan a la unidad están superpuestas entre sí. Otras investigaciones llaman la atención que algunos estudiantes ignoran las fracciones de las unidades o las cuentan como si fueran unidades enteras (Zacharos, 2006; Marmolejo y Vega, 2012); mientras que otros estudios reportan dificultades al equilibrar cuartos de unidad para recomponer una unidad de forma cuadrada (Dickson et al, 1991; Marmolejo y Vega, 2012).

También hay reportes que evidencian que la forma de la unidad o de la figura a medir genera complejidad en el proceso de medición. En este sentido, se identifican problemas en el uso de unidades de forma no cuadrada (Chamorro, 1997; Kordaki, 2003; Zacharos, 2006; Kamii y Kysh, 2006) y se llama la atención sobre la complejidad de utilizar fracciones de unidad de forma triangular para conformar unidades cuadradas (Dickson et al, 1991). Igualmente se señala que los estudiantes recurren a unidades cuadradas para

calcular el área de figuras rectangulares o compuestas por formas rectangulares, pero no generalizan este procedimiento en figuras con formas irregulares (Maher y Beattys, 1986), y que a pesar de esto la enseñanza de la medida privilegia figuras geométricas típicas como cuadrados, rectángulos, paralelogramos y triángulos (Kordaky y Potari, 2002). Así mismo, se ha demostrado que las unidades cuadradas son usualmente seleccionadas para medir rectángulos y otras figuras con ángulos rectos, pero en figuras diferentes se recurre a otro tipo de unidades (Maher y Beattys, 1986). Por otra parte, se afirma que la forma de la figura medida afecta la selección de la forma de la unidad de medida (Heraud, 1987, en Kordaky y Potari, 2002; Zacharos, 2006), y se resalta la importancia del uso de unidades espaciales para la comprensión del concepto de medición de áreas (Piaget et al, 1981; Rahim y Sawada, 1990; Baturó y Nason, 1996).

En un sentido distinto se ha reportado que aplicar fórmulas de área (Kordaky, 2006; De Araújo y Dos Santos, 2009), extender la fórmula de área de una figura a otra (Dickson et al, 1991) y calcular el área de regiones irregulares (Carpenter et al, 1980, en Dickson et al, 1991) son actividades complejas para los estudiantes; mientras que otras investigaciones reseñan que la enseñanza de fórmulas de áreas tiene más que ver con la memorización y uso de fórmulas mnemotécnicas que con la comprensión de la fórmula (Pitta-Pantazi y Cristou, 2009); en el caso de los textos escolares, se ha insistido que la deducción de fórmulas de figuras elementales es considerada a través de un muy reducido número de tareas (De Carvalho, 2013). Por otra parte, Olmo et al (1989, p. 46) sugieren que presentar “la fórmula como un último paso, como un camino más corto para lograr el resultado que se ha obtenido antes por medios más espontáneos y laboriosos” es una decisión didáctica que potencia el uso comprensivo de las fórmulas en el tratamiento del área.

También, se ha señalado que el estudio de la medición centrado de forma generalizada y prematura en el algoritmo $A = \text{base} \times \text{altura}$ es una de las principales razones que explican por qué los estudiantes no comprenden el proceso de medición (Rahim y Sawada, 1990; Outhred y Mitchelmore, 1996). Además, se ha enfatizado que este tipo de prácticas promueven el estudio de la medida sin considerar las propiedades físicas que caracterizan el tipo de magnitud en estudio (la superficie para el caso del área) y, por el contrario, relacionan el área con elementos unidimensionales de la figura (Outhred y Mitchelmore, 1996).

En algunas investigaciones se ha afirmado que debe considerarse previamente a la introducción del algoritmo arriba señalado la reiteración y conteo de unidades cuadradas para cubrir una superficie (Martin y Strutchens, 2000, en Kamii y Kysh, 2006); mientras que otros estudios han mostrado que la transición de la medida mediante la replicación y conteo de unidades a un acercamiento a las fórmulas usando la multiplicación es un proceso complejo y no transparente para los estudiantes (Nunes et al, 1993, en Kordaki, 2003). Es más, se ha resaltado que algunos estudiantes tienen éxito en la replicación de una unidad de medida, pero al mismo tiempo evidencian dificultades en el uso de las fórmulas de áreas (Nunes et al, 1993, en Kordaki, 2003). O bien, que los estudiantes no

interpretan el significado físico del valor obtenido al aplicar una fórmula de área (Zacharos, 2006), es decir, que dicho valor representa el número de unidades cuadradas necesarias para cubrir la superficie de la figura medida. Así mismo, De Carvalho (2013) muestra que los libros, al tratar la fórmula $A = b \times h$, privilegian en gran medida tareas que promueven exclusivamente la sustitución de valores en ella y que, por el contrario, técnicas que privilegian comprender su significado son asumidas en menor frecuencia, por ejemplo, contar la cantidad de cuadros enfilados en una columna (o en una línea), contar la cantidad de columnas (o líneas), multiplicar el número de cuadrados en la columna (o línea) por la cantidad de columnas (o líneas).

En un sentido distinto se sostiene que la aplicación de procesos de reiteración y conteo de unidades no promueven la comprensión del algoritmo $A = \text{Base} \times \text{Altura}$ (Kamii y Kysh, 2006), es decir, que no permite entender cómo dos líneas (la longitud y el ancho) puede producir una área cuando son multiplicadas. Al respecto, Kami y Kysh afirman que la aplicación de dichos procesos ignora el carácter continuo del área y, por el contrario, promueven su comprensión de forma discreta. Estudios como los realizados por Piaget et al (1981) manifiestan que es a través del concepto de área como una matriz conformada por un conjunto infinito de líneas paralelas e infinitesimalmente cercanas unas de otras, que se asigna sentido al algoritmo anteriormente reseñado. Desde estas perspectivas se considera que solo cuando los estudiantes asumen el área como una matriz de líneas, la posibilidad de utilizar un cuadrado como unidad de área es factible (Kamii y Kysh, 2006).

Una última tendencia en que el estudio del área es tenido en cuenta considera su articulación con otros conceptos matemáticos (perímetro, volumen, fracciones, integrales, entre otros). En este sentido se ha reportado dificultades para diferenciar el área del perímetro en estudiantes (Dickson et al, 1991; Chamorro, 1997; Jaquet, 2000A, 2000B; De Araújo y Dos Santos, 2009; Estrada y Avila, 2009) y profesores (D'Amore y Fandiño, 2007); así como el desconocimiento de las relaciones entre estos dos tipos de magnitudes (Montis, Mallocci y Polo, 2003). Por el contrario, la literatura especializada ha evidenciado nociones intuitivas de los estudiantes que obstaculizan la comprensión de tales relaciones, es el caso de *a más perímetro, más área* (Kospentaris et al, 2011; Popoca y Acuña, 2011) o la noción inversa *a más área, más perímetro* (Babai et al, 2010, en Kospentaris et al. 2011) o *a igual área igual perímetro* (Olmo et al, 1989). Fandillo y D'Amore (2009), por su parte, también señala la existencia de ideas intuitivas sobre la relación área-perímetro y reconoce que buscar ejemplos donde dicha relación esté presente de diferentes formas promueve en los estudiantes y profesores un cambio de convicción. Además, se llama la atención en este estudio que, para los educadores, la búsqueda de ejemplos donde la relación *a menor perímetro mayor área* (y viceversa) generó especial complejidad; y que para los estudiantes de los niveles de escolaridad más alto (bachillerato y universidad) las relaciones *a mayor perímetro, menor área* (y viceversa) y *a menor perímetro, igual área* (y viceversa) no son aceptadas espontáneamente.

También se ha evidenciado que en la enseñanza secundaria el estudio de las relaciones entre el área y el perímetro es para los profesores uno de los temas más difíciles de inculcar (Dickson et al, 1991) y que los libros de texto promueven pocas oportunidades para considerar estos dos tipos de magnitud de forma articulada (De Carvalho, 2013). Por su parte, Chamorro (1997) considera que en la enseñanza de las matemáticas se privilegia la presentación de figuras dibujadas como parte integrante de la hoja de papel, y que es poco habitual encontrarlas recortadas. En palabras de Chamorro este hecho no favorece la delimitación entre longitud y superficie y constituye un claro obstáculo didáctico, puesto que lo que destaca ante los ojos de los estudiantes es la línea que constituye la frontera, sin que se reconozca la superficie como el interior delimitado por dicha frontera.

Otros estudios identifican obstáculos de naturaleza epistemológica como los principales responsables de la confusión área perímetro, entre otros, las dificultades en los cambios de dimensión y el estatus específico de las unidades de medida (Rogalski, 1979) y las relaciones que las unidades de superficie conservan con las unidades de longitud (Rogalski, 1979). D'Amore y Fandiño (2007), por su parte, consideran que la confusión área-perímetro no es solo de naturaleza epistemológica, sino básicamente de naturaleza didáctica, en palabras de estos autores dicha confusión responde a elecciones didácticas tales como 1) el uso exclusivo de figuras convexas y formas estándar, 2) que la relación entre el área y el perímetro nunca se muestra de forma explícita sobre una misma figura, 3) la diferenciación entre estas magnitudes recae exclusivamente en afirmaciones tales como “el perímetro se mide en metros y el área en metros cuadrados” y nunca en sus relaciones recíprocas y 4) la poca existencia de tareas que promuevan transformaciones sobre las figuras que conserven o modifiquen el área o el perímetro. En un sentido similar Chamorro (1997) considera que “la costumbre habitual de dar las superficies dibujadas y no recortadas, constituye un obstáculo didáctico que favorece la identificación perímetro/superficie” (p. 353).

Otras investigaciones resaltan que el estudio de las relaciones entre el área y el perímetro debe considerar un vocabulario más significativo (*la valla que rodea un jardín* para referirse al perímetro o el *jardín* para referirse al área) previo a la introducción de una terminología matemática (Dickson et al, 1991), o bien han caracterizado las dificultades de la comprensión del concepto de longitud y área desde un punto de vista lingüístico (Vee, 1999, en Zacharos, 2006). Además, estudios como el realizado por García, Patagones y Carrillo (2006) han señalado que tareas que permitan analizar la variabilidad del perímetro en figuras equivalentes sin recurrir a unidades de medida convencionales promueve la distinción entre estas dos magnitudes. Por otra parte, Rickard, College y Michigan (1996) evidencian que el uso que los profesores dan a la resolución de problemas al promover el estudio de las relaciones y diferencias entre el área y el perímetro, si bien suscita excelentes oportunidades para hacer conexiones matemáticas, también puede introducir situaciones que generan confusión e incertidumbre en los estudiantes. Así mismo hay reportes de investigación que afirman que la identificación precoz del área y del perímetro con la medida favorece su confusión, en palabras de

Dickson et al (1991). Por ejemplo, es posible que los alumnos no dispongan de suficientes oportunidades para la exploración práctica de los fundamentos espaciales de estos dos conceptos y de las relaciones que les ligan. En esta misma línea de ideas se encuentra el trabajo de Douady y Perrín (1989).

El tratamiento del área articulado a otros conceptos matemáticos distintos al perímetro también ha sido un objeto de estudio en el campo de la educación matemática. Tirosh y Stavy (1996), por ejemplo, identifican dificultades en la resolución de actividades donde el área y el volumen son tratados paralelamente, en particular, consideran el desarrollo de actividades de comparación de dos cilindros con áreas laterales iguales y volúmenes distintos. Esta investigación pone en evidencia que la mayoría de los estudiantes extienden la igualdad de las áreas laterales a la del volumen de los sólidos, es decir, que una vez reconocido que las áreas laterales de los dos sólidos son iguales, los estudiantes concluyen de forma inmediata y espontánea que a nivel de sus volúmenes la igualdad se mantiene. Turégano (1994, 1998, 2007) y Cabañas y Cantoral (2010, 2012), por su parte, analizan el papel que desempeña el área en la construcción del concepto de integral, la primera, por ejemplo, concluye que el cálculo de áreas superficies planas es determinante para el estudio del concepto de integración, pues, por un lado, determina las dificultades y concepciones de los estudiantes al tratar dicho concepto y, por otro lado, se impone como el principal elemento que organiza el estudio de la integral. En relación al segundo aspecto Turégano (1998) afirma que “la introducción de la integral definida mediante su definición geométrica permite establecer una relación integral-medida que favorece la transferencia a otros conceptos” (p. 245)

Otros estudios como los realizados por Yim (2010) consideran cómo los estudiantes abordan tareas de división de fracciones en contexto de áreas de figuras rectangulares y la manera como formulan algoritmos numéricos desde sus estrategias. Fueron tres las estrategias identificadas en la investigación: 1) mediante acciones de reducción y expansión a la base del rectángulo se le asigna como longitud a la base la unidad, 2) se transforma la base o la altura del rectángulo hasta que su área sea la unidad, y 3) se asignan tanto a la base como al área del rectángulo valores particulares. También se ha considerado en contextos de áreas de rectángulos tanto el estudio de las proporciones (Son, 2013) como de las fracciones equivalentes (Kamii y Clark, 1995).

2.4 Investigaciones sobre análisis de libros de texto de matemáticas en el Campo de la Educación Matemática.

Entre los diferentes materiales que se utilizan en la planificación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas así como en la articulación de las exigencias curriculares institucionales en el aula de clase, los textos escolares se imponen como el de mayor uso por parte de educadores y estudiantes. Tanto estudios de carácter local realizados en España (Gonzalez, 2002; Martinez y Penalba, 2006), China (Li, 2000), Alemania,

Inglaterra y Francia (Pepin, Haggarty y Keynes 2001), como investigaciones de carácter global: el segundo estudio internacional de matemáticas IEA (Robitaille y Garden, 1989) y el Tercer estudio internacional de las ciencias y las matemáticas (TIMSS) en Schmidt, W.H. McKNight, C.C., Valverde, G.A., Houang, R.T. y Wiley, D.E. (1996), evidencian que este fenómeno se encuentra presente en todo el mundo.

Por otro lado, los libros de texto reflejan, al menos en parte, las intenciones oficiales de los planes de estudio, dan forma a las omisiones presentes en los documentos oficiales (Schmidt et al, 1996), se constituyen en importantes referentes para los profesores quienes los utilizan al revisar o recordar los elementos matemáticos que deben enseñar (García y García, 2007). Igualmente son una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin, Haggarty y Keynes, 2001; Li, 2000), las formas como este se presenta en el aula escolar (Cobo y Batanero, 2004), la secuencias instruccionales asumidas por los educadores (Li, 2000) y los estilos pedagógicos adoptados por ellos (Pepin et al, 2001). Permiten entender el desarrollo de los contenidos curriculares (Martínez y Penalba, 2006) y proveen diferentes lentes para estudiar las relaciones existentes entre el contenido presentado en los libros de texto y sus efectos potenciales sobre los logros matemáticos de los estudiantes (Fuson, Stigler, y Bartsch, 1988, Li, 2000, Son, 2005 y Carpenter y Li, 1997 (citado por Li, 2000).

Los libros de texto cumplen un doble papel, irreductible uno del otro (Otte, 1986): de una parte, cumplen con una función comunicativa e interpretativa que asigna un carácter subjetivo tanto al punto de vista del autor como del lector; por otra, la estructura del conocimiento da un carácter eminentemente objetivo. Igualmente se constituyen en un instrumento de poder dado que contribuye a la uniformidad lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes (Chopin, 1980, citado en González y Sierra 2004) y establecen relaciones entre las matemáticas que se presentan en ellos y sus implicaciones en la comprensión de las dificultades inherentes a la enseñanza, aprendizaje y comprensión de los conceptos matemáticos (Mesa, 2004). Además, investigaciones como la de Sierra, González y López (1999) ponen en evidencia que los libros de texto reflejan la influencia de las corrientes internacionales propias de cada época y que términos de tal importancia en la enseñanza de las matemáticas como lo son intuición, aplicación de la matemática, matematización y rigor, muestran distintos sentidos en cada uno de los periodos considerados en esta investigación e incluso dentro de cada periodo se observan diferencias de un autor a otro.

Las anteriores facetas se constituyen en sí mismas en importantes argumentos que explican el marcado interés que en los últimos años la investigación en educación matemática ha puesto sobre el papel que juegan los manuales escolares en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

La revisión de investigaciones sobre textos escolares que hasta el momento se ha realizado permite discriminar tres líneas de marcada importancia. La primera, la de mayor

difusión, está centrada en cómo se presenta un determinado contenido matemático. En este sentido resaltan los trabajos de Dormolen (1986), Schmidt et al (1996), Mesa (2004) y Love y Pimm (1996) quienes determinan aspectos a considerar en el estudio de los libros de texto de matemáticas. Así, los tres primeros, respectivamente identifican los aspectos a considerar al analizar el conocimiento matemático en un texto (teórico, algorítmico, lógico, metodológico y comunicativo); clasifican la comprensión del contenido en términos de tres componentes: complejidad de los temas, complejidad de su desarrollo en términos de la secuenciabilidad y desarrollo de tópicos y las intenciones pedagógicas presentes en el texto e identifican aspectos a considerar en el análisis de contenido, a saber, teórico, algorítmico, lógico, metodológico y comunicativo. Por otra parte, en Love y Pimm (1996), se llama la atención sobre la importancia de considerar los elementos constitutivos de los libros (preguntas y ejercicios, estructuras de control e imágenes, entre otros), las funciones pedagógicas que desempeñan, los problemas que introducen, los niveles de autoridad que ejercen, su aplicación en el aula y la interactividad entre los usuarios del texto y las preguntas y ejercicios del libro.

También hay estudios respecto a la forma como los libros presentan los conceptos matemáticos y su relación con su significado en contextos matemáticos y cotidianos, en dicho sentido Garcia y Garcia (2007) concluyen que las definiciones dadas en los textos escolares están más próximas a su uso cotidiano que a uno de naturaleza matemática. Hay otros estudios como el de Manya (2004) que focaliza su interés en los conflictos que introducen los mensajes epistemológicos enviados por libros de textos de matemáticas de pre-caculo, cálculo y análisis en torno al tópico de continuidad. Este estudio se centra en la interacción entre los aspectos informales y formales de las definiciones, la importancia relativa a la manipulación de símbolos y el sentido o comprensión conceptual. Resaltan en esta primera línea de investigación de manuales escolares los trabajos que estudian las interacciones entre las matemáticas presentes en los libros y las maneras de proceder de los estudiantes. Es el caso de Mesa 2004, quien a través de un estudio comparativo entre 15 países establece una relación entre las matemáticas que presentan los textos y sus implicaciones en la comprensión de las dificultades inherentes a la enseñanza, aprendizaje y comprensión de los conceptos matemáticos. Los trabajos de Cantoral (1995), Filloy y Rojano (1984) y Puig (1994), por su parte, comparan algunos de los procesos utilizados por los alumnos en la comprensión del conocimiento matemático y los utilizados en los libros o textos históricos de matemáticas.

Hay estudios que se interesan por caracterizar los tipos de representación privilegiados en los manuales escolares desde perspectivas semióticas. Forman parte de esta tendencia el trabajo ya citado de González (2002) quien clasifica, según los sistemas de representación empleados, los manuales estudiados en expositivos, tecnológicos y comprensivos. La investigación de Harries y Sutherland (citada por Pepin et al, 2001) analiza la manera como los textos escolares de educación primaria tratan el número. Mesa (2004), por su parte, analiza las representaciones que se ponen en juego al trabajar con el

concepto de función en textos escolares de varios países; así como las necesarias para resolver las tareas propuestas en los textos analizados en torno a un mismo tópico.

Los estudios realizados por Pang y Hwang (2006), Ubuz (2006), Bruno y Cabrera (2006), Fuson y Li (2009), Li, Chen y An (2009), Kim (2012), y Coppé, Dorier y Yavuz (2007) caracterizan el rol que desempeñan las representaciones de naturaleza no discursivas en los libros de texto. Los dos primeros estudian la actividad de clasificar figuras en la introducción de conceptos relacionados con los tópicos de geometría y medición y el impacto potencial que los libros de texto tienen en el proceso de interacción entre elementos conceptuales y representaciones figurales. En relación a las representaciones gráficas, en particular, las líneas rectas, Bruno y Cabrera (2006) resaltan que los libros suelen recurrir a estas representaciones al introducir un nuevo sistema numérico, característica ausente en el estudio de las operaciones y el orden. Destacan que el tipo de representación privilegiado son las líneas rectas donde los números son resaltados a través de puntos, en cambio es menos frecuente la representación de los números por medio de flechas. Por otra parte, identifican como carencias presentes en los libros de texto que “las editoriales no mantienen una coherencia a lo largo de la escolaridad, es decir, un alumno, dependiendo del curso o del autor del libro de texto, tendrá un mayor o menor conocimiento de la recta” (p. 145); que los alumnos pueden aprender a representar sumas en la recta, pero no restas y multiplicaciones y jamás en la división; y “los libros de texto no planifican el tipo de representación que se va a utilizar a lo largo de la escolaridad, y que las representaciones se cambian de un curso a otro, por lo que no hay una perspectiva global del modelo de recta” (p.146).

Fuson y Li (2009), al reflexionar sobre el papel que desempeñan las representaciones lingüísticas, numéricas y visuales (imágenes y organizaciones espaciales de figuras) para dotar de significado a la adición y sustracción de números naturales, encontraron que la coherencia y el poder del contenido presentado en textos estadounidenses es similar al evidenciado en manuales chinos y que el acceso a los métodos matemáticos adecuados propuestos en los textos de uno y otro país variaban considerablemente en relación a la presencia de soportes numéricos (sin los cuales no es posible que los estudiantes comprendan el método expuesto) y soportes lingüísticos; requiriéndose pasos extras en los textos estadounidenses. Por otro lado, Li, Chen y An (2009) estudian cómo el tópico de división de fracciones se introduce en tres series de textos usados: una en Japón, otra en Estados Unidos y la tercera en China. Se observó que los manuales chinos y japoneses enfatizan la construcción del contenido a través de la resolución de problemas; en los primeros se suele recurrir a las representaciones pictóricas para apoyar los procesos de solución. Los textos japoneses utilizan representaciones numéricas y la escritura natural para desarrollar explicaciones; las representaciones pictóricas son consideradas únicamente en el desarrollo de demostraciones. Los manuales americanos centran su atención en la introducción de la división a través de procesos de cómputo donde las representaciones pictóricas desempeñan un papel determinante.

Las últimas dos investigaciones reseñadas en párrafos anteriores analizan, respectivamente, cómo los textos escolares recurren a las imágenes, las ilustraciones, los diagramas y los esquemas al movilizar conocimiento matemático en términos de su precisión, conectividad, contextualidad y concisión. En el segundo caso, Coppé, Dorier y Yavuz (2007) resaltan que las tablas de variaciones son tratadas de forma diversa solo en uno de los manuales estudiados, en menor medida en dos de ellos y prácticamente ignorada en el cuarto de los libros de texto analizados. Con respecto a las tablas de valores resaltan que, en la mayoría de los casos, su uso refuerza “en los alumnos una concepción discreta de la función y el trazo punto por punto de curvas” (p. 171) y que “la mayoría de los libros de texto dejan poco espacio para la reflexión sobre la representatividad de las tablas de valores, sobre la selección del número de valores y su repartición en el dominio de definición” (p. 171).

Dentro de esta línea de estudio también se encuentran aquellas investigaciones que desde una perspectiva ontosemiótica se interesan por los manuales escolares. Es el caso de las investigaciones de Ospina y Salgado (2010), Konic, Godino y Rivas (2010) y Contreras y Ordoñez (2006); quienes, en el primer caso, caracterizan las estructuras multiplicativas a partir de los aspectos que intervienen o emergen de los sistemas de prácticas ligados a la solución de un problema (elementos lingüísticos, situaciones problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Por su parte, Konic, Godino y Rivas (2010) se interesan por la concordancia entre la manera que un libro de texto suscita el estudio de los números decimales y los avances que en el campo de la educación matemática se han realizado en torno a su enseñanza. Entre diversos puntos de discordancia destacan el uso de la medida como contexto para introducir la enseñanza de los decimales. La investigación resalta la importancia de dicho contexto como un conocimiento previo a la enseñanza de los decimales y llama la atención sobre la importancia de una interpretación adecuada de las representaciones en él promovidas. En este sentido los autores destacan que el libro analizado recurre a la medida exclusivamente como forma abreviada de expresar medidas complejas, reforzando así la concepción de que el número decimal no es otra cosa que dos naturales separados por una coma, ocultando de esta forma el valor de posicional. Por último, Contreras y Ordoñez (2006) centran su atención en la discriminación de tramas de funciones semióticas en los textos escolares al suscitar el estudio del área de una región del plano al ser utilizada para el desarrollo de la integral definida. La atención recae en los procesos de comunicación explicitados en el libro. Se identifican en algunos apartados de los textos la imprecisión del lenguaje, la ausencia de significado, la falta de explicitación de la red de funciones semióticas pertinentes y el uso de ejemplos concretos con la idea que los lectores los generalicen; como espacios que suscitan conflictos semióticos potenciales en el aprendizaje de la integral definida.

En un sentido diferente y estudiándose la relación políticas curriculares-libros de texto se ha considerado que los libros representan una importante interface que explica las tensiones existentes entre las políticas curriculares de una nación y las prácticas de sus

educadores (Pepín, Gueudet y Trouche, 2013), así mismo se han establecido articulaciones entre los objetivos curriculares de una nación, por ejemplo Estados Unidos, los propósitos a alcanzar en las pruebas externas y el contenido de los libros de texto (Haggard, 1986). En una misma línea de ideas, Rico (1997) y García y Llinares (1995) estudian cómo los libros organizan el currículo de matemáticas o diseñan propuestas de enseñanza en torno al concepto de función.

En cambio, en Son (2005) se evidencia que las propuestas de enseñanza de los libros estadounidenses y coreanos si bien están en estrecha relación con los estándares propuestos en cada país, y generan sendas oportunidades para mejorar la comprensión conceptual de la multiplicación y división de fracciones, tienden a ignorar las sugerencias curriculares relativas al uso de contextos puramente matemáticos y de procedimientos centrados en el uso exclusivo de cálculos básicos. Más recientemente, Shield y Dole (2012) estudiaron si los libros australianos, de acuerdo a las políticas curriculares, promueven el estudio de las ideas matemáticas en profundidad y la interconexión entre conceptos matemáticos. La atención de la investigación recayó en cómo los libros inducen el desarrollo del razonamiento proporcional y se concluyó que los libros analizados no suelen suscitar tales oportunidades.

Por otra parte, Herbel-Eisenmann (2007) asume que los textos escolares son herramientas valiosas que aportan pautas para que los educadores adapten a la praxis los estándares propuestos a nivel institucional. De esta forma recurre, a través del uso de imperativos, pronombres, modos verbales y de expresión a caracterizar las relaciones entre el autor y el lector, discrimina que los textos analizados no introducen elementos de naturaleza ideológica propuestos en el NCTM (1991). Además, demostró que en los textos no se recurre a pronombres de primera persona (singular y plural) lo que indica que la presencia del autor como ser humano está en ellos oculta. En relación a los pronombres en segunda persona, se observa que a partir de su uso en los libros los autores ocultan el medio que tienen los objetos inanimados para desempeñar actividades animadas. La presencia de estos dos aspectos, sugieren que los manuales estudiados privilegian una imagen absolutista de las matemáticas como un sistema que puede actuar independientemente de los humanos.

En los lineamientos curriculares australianos se enfatiza que la enseñanza de las matemáticas debe promover el estudio de las ideas matemáticas en profundidad y la interconexión con los conceptos matemáticos, en este sentido, Shield y Dole (2012) analizan si tales consideraciones son asumidas en los libros australianos al suscitar el estudio del razonamiento proporcional. Los resultados de esta investigación concluyen que los libros no suscitan tales oportunidades, por el contrario, la manera como los libros inducen el desarrollo de problemas donde resaltar los vínculos entre diferentes tipos de problemas o de las estructuras subyacentes comunes a ellos suelen ser ignorados.

Desde una perspectiva histórica destacan las investigaciones que estudian tanto en libros históricos como en textos escolares la evolución en el tiempo de los objetos matemáticos. Resalta el trabajo de Schubring (1987) quien considera que el análisis de libros antiguos de matemáticas permiten, por un lado, conocer la manera como evolucionaron y se difundieron los saberes matemáticos en épocas específicas y, por otro, que tal conocimiento genera elementos de análisis en aras de interpretar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En torno a los libros de texto se encuentran las investigaciones de Sierra, González y López (1999, 2003) donde se estudia la evolución de los conceptos de límite y continuidad en textos escolares utilizados en España (en una investigación entre los años 1940-1995, en la otra, en la segunda mitad del siglo XX). Igualmente, los trabajos de González (2002), Esteves (2008) y Quispe, Gallardo y González (2010) son ejemplos de una tendencia de investigación de textos de naturaleza histórica. La primera, analiza libros históricos de texto de los siglos XVII y XVIII y libros escolares utilizados en España en cuatro periodos correspondientes a la aplicación sucesiva de planes de estudio diferentes. Identificó y caracterizó, por un lado, los sistemas simbólicos de representación presentes en las maneras en que ha sido introducido el concepto de punto crítico en la enseñanza secundaria española, de otro, los cambios que han tenido estos sistemas en la evolución desde sus orígenes del concepto de punto crítico. Por su parte, Esteves centra su atención en las maneras cómo históricamente surgen los problemas de optimización y la forma como han sido abordados en los manuales escolares utilizados en Portugal en los siglos XX y XXI. En la tercera de las investigaciones Quispe, Gallardo y González centran su atención en la evolución del concepto de fracción presente en textos escolares peruanos en el periodo 1963-2005. Se resalta una presencia progresiva de un mayor número de significados del concepto de fracción, del uso de ilustraciones con propósitos didácticos, la introducción de situaciones contextualizadas y una incipiente disminución del formalismo en la presentación de la fracción.

La investigación de los libros de texto con énfasis histórico también ha considerado el papel que desempeñan tanto los medios semióticos en la calidad de la comunicación entre los libros de texto y sus potenciales lectores (Richard y Sierpiska, 2004), como las valoraciones sociales establecidas por régimen político en una época concreta que determinan, parcialmente, el papel del educador en el uso de los textos escolares (Emmanuele, Gonzáles, Introncaso y Braccialarghe, 2010). De la misma manera, otros aspectos considerados son el predominio de situaciones reales como contexto para representar, justificar y explicar los números negativos en los manuales españoles publicados en los siglos XVIII y XIX (Maz y Rico, 2007) y la manera como los textos escolares de Brasil y Portugal interiorizaron las recomendaciones dadas por la OECE (Organización Europea de Cooperación Económica) en el año 1961, con el fin de suscitar la implementación de la matemática moderna en los textos escolares de la década de los 60's (Denice, Matos y Wielews, 2010). Por otro lado, estudios como los realizados por Li, Zhang y Ma (2009) se interesan por la sinergia existente entre 1) el cambio en las prácticas comunes y los criterios considerados para la selección, presentación y

organización del contenido matemático (considerados previa y posteriormente a la introducción de reformas educativas) y 2) los cambios políticos y sociales impuestos en el sistema educativo a través de elementos que caracterizan la reforma. En esta misma tendencia de investigación de textos escolares se encuentran los trabajos realizados por Schubring (1988), Sierra, Rico y Gómez (1997), Maz (2009) y Sáiz (2008).

Hay además serios estudios que reflexionan sobre el rol que los libros de texto asignan a las nuevas tecnologías en la comprensión y desarrollo de actividades matemáticas o del papel que puede llegar a jugar en ellos este tipo de tecnologías (Fernandez y Mejía, 2010 y Richard, Meavilla y Fortuny, 2010; Borba y Selva, 2013). Mientras que otros centrados en enfoques epistemológicos discriminan las “falsedades” y paradojas introducidas por los textos en la enseñanza de un objeto matemático y sus posibles efectos. Por ejemplo, Gómez (2011) afirma que en los textos donde se estudia los radicales estas paradojas afectan a la distinción entre raíz y radical, al doble uso del signo como operación o como resultado de una ecuación, los requisitos y restricciones para definir las potencias racionales, la concepción funcional de las operaciones y sus inversas. También hay estudios, como los realizados por Cordero y Florez (2007) y Cordero, Cen y Suárez (2010), que desde puntos de vista sociopistemológicos asumen que las gráficas de las funciones son el resultado de prácticas sociales que ha generado el concepto de función.

Igualmente, en el campo de la educación matemática, existen reportes centrados en las características físicas de los libros y la estructura de las lecciones que determinan la presentación de un contenido matemático. En este sentido, estudios como los realizados por Serrado y Azcárate (2003) establecen que la organización y secuenciación de los contenidos en los libros influyen en los modelos de enseñanza y de aprendizaje considerados en el estudio de las matemáticas, lo que determina variados enfoques de intervención en el aula. Alajmi (2012), por su parte, afirma que los textos de USA y Kuwait son, en tamaño, más grandes que los japoneses, consecuencia de una gran cantidad de repeticiones de conceptos que aparecen en los textos de esos dos países; mientras que, por ejemplo, los textos japoneses no consideran las fracciones sino hasta el tercer grado, los de USA y Kuwait inician su enseñanza desde el primer grado. Además, las fracciones en los libros japoneses se encuentran articuladas con el tema de la medición. El estudio de contenido en los manuales escolares también abarca aquellas investigaciones que consideran que las características culturales de una región influyen en las prácticas que se promueven en estos materiales didácticos. Este es el caso del estudio de Sun (2011) quien al comparar textos estadounidenses y chinos concluye que la estrategia de promover ejercicios y ejemplos que amplían los elementos introducidos en los ejemplos tratados, práctica arraigada a profundos principios filosóficos chinos (Daoismo y Confucionismo), es considerada en los manuales chinos de forma rutinaria, más no en los libros de Estados Unidos. Según esta investigación, este tipo de estrategias suscitan que en los problemas de variación presentados en contextos de fracciones “los conceptos nuevos sea básicamente presentados a través de problemas OPMC (de múltiples cambios) y sean consolidados por medio de problemas OPMC abreviados” (p.

75) y que los problemas OPMS (de múltiples soluciones) están encaminados a desempeñar “principalmente el papel de inducir la racionalidad así como el sistema de solución” (p. 77). Algunas investigaciones han analizado el tipo de matemáticas que se moviliza en los textos escolares, Chevallard (1985), Chevallard y Johsua (1982) y Bravo y Cantoral (2012) centran su atención en los aspectos relativos a la transposición didáctica que se refleja en los libros de texto. Bravo y Cantoral, por ejemplo, reportan vacíos explicativos, rupturas en la secuencia lógica de las explicaciones e incongruencias entre las definiciones formales y los ejemplos que se resuelven, al analizar las transformaciones que sufre el concepto de integral de funciones en línea (función es evaluada sobre una curva) de ecuaciones diferenciales lineales y de campos vectoriales. Otros estudios analizan la coherencia entre las relaciones matemáticas y la producción de conocimiento matemático en fenómenos propios a otras disciplinas. En este sentido destaca el trabajo de Malonga (2009) quien estudia el papel que desempeña la enseñanza de las matemáticas en los cursos de física (y viceversa) y las formas en que las relaciones matemáticas y físicas son tratadas en los manuales de cada una de estas dos disciplinas. Esta autora analiza situaciones de modelación de fenómenos físicos regidos por una ecuación diferencial lineal de primer orden. Su investigación permitió discriminar dificultades que van desde la formulación de los enunciados hasta su traducción matemática en tareas donde el cambio de marco de racionalidad¹⁴ está presente. Lo que se traduce en dos aspectos: 1) una “visibilidad aparente de una interacción entre las dos disciplinas: utilización y omnipresencia de las nociones matemáticas para explicar la física” (p. 355) y 2) “una brecha, ver un no sentido, cuando la interpretación que cada disciplina puede establecer sobre las nociones o expresiones matemáticas utilizadas” (p. 355).

Una última tendencia que centra su atención en cómo el contenido es presentado en los libros de texto se caracteriza por el marcado interés en los procesos y exigencias cognitivas que subyacen a la presentación del contenido matemático. Los estudios que conforman esta tendencia suelen interesarse en la actividad cognitiva de razonamiento. Es el caso de las investigaciones realizadas por Stacey y Vincent (2009) y Lithner (2003, 2004). La primera estudia los modos de razonamiento presente en textos explicativos donde se introducen nuevas reglas matemáticas o relaciones entre ellas (deducción a partir de un caso general, deducción a través de un caso específico, deducción por medio de modelos, concordancia entre la regla y el modelo, demostración experimental, apelación a la autoridad y analogías cualitativas). El segundo estudio, por su parte, analiza las características de los razonamientos de estudiantes de matemáticas, su relación con el éxito o fracaso en el desarrollo de ejercicios y lo que aprenden acerca de su forma de razonar al desarrollar ejercicios de los libros de texto. Entre una variedad de aspectos se concluye que las estrategias a aplicar en el desarrollo de las actividades de los manuales

¹⁴Entendido como el “conjunto coherente de funcionamientos del pensamiento cultural o personal” (Malafosse, Lerouge y Dusseau, 2001, citado en Malonga, 2009, p. 340-341) y que está caracterizado por cuatro componentes: el conjunto de los objetos conceptuales, el tipo de proceso de validación, los elementos de racionalidad y los registros semióticos.

se caracterizaron por estar más centradas en los procedimientos a imitar que en la aplicación de razonamientos.

En un sentido similar, Thompson, Senk y Johnson (2012) consideran la naturaleza y el alcance del razonamiento y la prueba en tareas donde intervienen los exponentes, los logaritmos y los polinomios. En este caso, se observó que solo la mitad de las tareas propuestas estaban justificadas y que de las tareas que el manual proponía para que fueran justificadas, en el 30% podía hacerse a través de argumentos generales y el 20% por medio de argumentos centrados en casos específicos. Las investigaciones de Ibañez y Ortega (2004) y Stacey y Vincent (2009) igual que las anteriores consideran el rol del razonamiento en los manuales escolares. En este caso concluyen que, cuando se presenta la función coseno, los manuales “emplean pocos recursos para hacer comprensibles las demostraciones planteadas, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización” (p. 29). Más recientemente, Jones y Fujita (2013) compararon textos japoneses e ingleses según la manera como se promueve el estudio tanto del razonamiento y la prueba matemática como de la resolución de problemas y la modelación matemática. Se concluye en la investigación que el estudio del razonamiento y la prueba matemática está disperso en los libros ingleses, considerándose tanto en los apartados donde se trata el número y el Álgebra como la Geometría; por el contrario, en los japoneses su estudio es asumido exclusivamente en los capítulos de geometría. Con respecto a la reflexión sobre la resolución de problemas y la modelación matemática está presente en los libros ingleses en lecciones específicas diseñadas para su estudio, mientras que en los libros japoneses no hay apartados específicos para su reflexión.

Otros estudios, en menor proporción, exploran las potenciales demandas cognitivas (memorización, procedimientos sin conexiones y procedimientos con conexiones), así como las expectativas de desempeño (respuesta única, explicación, justificación y evaluación) presentes en las tareas y ejemplos propuestos en los manuales escolares (Delaney, Charlambous, Hsu y Mesa, 2007); comparan los requerimientos cognitivos (práctica procedimental, entendimiento conceptual, resolución de problemas y requerimientos especiales) presentes en los manuales utilizados en diferentes países (Li, 2000) y caracterizan las estrategias utilizadas por estos materiales didácticos al ejercer control sobre la forma de proceder de sus lectores (Love y Pimm, 1996 y Mesa, 2010).

En relación a la actividad cognitiva de la visualización aún son incipientes los estudios que exploren el papel que desempeña la visualización en la construcción de conocimiento matemático privilegiada en los textos escolares. Los pocos trabajos identificados hasta el momento centran su atención en la visualización asociada a representaciones y/o a aspectos visuales y/o a tópicos de naturaleza diferentes a los aquí tratados. Es el caso de Yerushalmy (2005) y Falduto (2008) quienes exploran, por un lado, el rol de la designación visual en la forma en que los libros de texto interactivos suscitan el estudio de las funciones y por otro, tanto el papel de la visualización en la explicación de

procedimientos y conceptos algebraicos como la eficacia de las formas de comunicación visual adoptadas en los textos, considerando de forma exclusiva los gráficos cartesianos.

Una segunda línea de investigación sobre los textos escolares en el campo de la Educación Matemática centra sus esfuerzos en la tipificación y caracterización de elementos que afectan la comprensión de conocimiento matemático. Pero, a diferencia de las investigaciones previamente referenciadas, en las que conforman esta categoría los resultados no tienden a determinar la forma como un objeto o tópico matemático en particular es tratado en los manuales escolares. Es el caso del estudio de Dowling (1996), quien en un análisis sociológico de los extractos de texto de manuales escolares de Inglaterra y Gales centra su interés en la posición del sujeto según la forma como se dirige al lector (voz superior: orientada intelectualmente y voz subalterna: orientada manualmente), las prácticas de los sujetos que son guiadas por los mensajes (conocimiento matemático) enviados por cada voz (mensajes de dominio exotérico y de dominio público) y las estrategias textuales utilizadas por cada una de las prácticas de los sujetos (estrategias de posicionamiento: posición de las voces y estrategias de distribución: distribución de los mensajes en las respectivas voces). En el análisis se escogieron textos dirigidos a estudiantes de nivel relativamente alto (serie Y) y los correspondientes al nivel relativamente bajo (serie G). Como resultados se pone en evidencia, de una parte, que “*Las estrategias de posicionamiento* muestran una jerarquía de “capacidad” en las voces sobre la jerarquía de división de valores intelectual/manual” (p. 409) y que “*Las estrategias de distribución* asignan mensajes de dominio esotérico generalizados para los mensajes de voz superior y localiza mensajes de dominio público para adquirir voces subalternas” (p. 409). De otra parte, se manifiesta la presencia de fuertes diferencias entre los textos de cada serie, por ejemplo, en términos de contenido y de temas cubiertos. Los textos de la serie Y “a menudo permiten al lector inicializar [la actividad en cuestión] entrar a través del dominio público, pero rápidamente se subliman al dominio esotérico”. Por el contrario, la serie G “se constituyen, al menos en parte, como un desfile a un texto no pedagógico”. Además, en la primera de las series se tiende a transformar a los aprendices en matemáticos esotéricos, mientras que los correspondientes a la serie G centran la atención en el estudiante.

Hay otros estudios como los de Li, Zhang y Ma (2009), Ortega (1996) y Monterrubio y Ortega (2011) donde la atención recae, sea en consideraciones sociopolíticas, sea en diseño y evaluación de metodologías de valoración de textos que apoyen a los educadores a la hora de seleccionar un libro de texto. En dicho sentido, Li, Zhang y Ma establecen que tanto el cambio en las prácticas habituales como en las aproximaciones desarrolladas y usadas en la selección presentación y organización del contenido matemático presente en libros de textos chinos, previa y posteriormente a la introducción de reformas educativas, se relacionan con los cambios políticos y sociales impuestos en el sistema educativo a través de los elementos que caracterizan el tipo de reforma aplicada. Por otro lado, las otras dos investigaciones, establecen como elementos organizadores a considerar en el diseño de un modelo valoración de libros de texto, por un lado, los objetivos, el

contenido, las conexiones, las actividades, la metodología, el lenguaje y las ilustraciones, por otro, la motivación, las tecnologías de la información y de la comunicación, la evaluación, la enfatización, los aspectos formales, los recursos formales y el entorno.

Desde un punto de vista lingüístico, a partir de características gramaticales presentes en los textos escolares (pronombres personales, modalidad y clases de imperativos) y de elementos estructurales que les acompañan (imágenes y número de posibilidades presentadas), Wagner (2012) clasifica, según las posibilidades que brindan para suscitar el “diálogo” entre texto y lector de una manera efectiva, los libros de texto en cerrados y abiertos. Así mismo, pone en evidencia que los textos de matemáticas no suelen propiciar un diálogo con sus lectores. En un sentido similar, Weinberg y Wiesner (2011) consideran que “la comprensión de un texto no reside en el texto en sí mismo, sino que es generada por una relación entre el texto y el lector cuando el lector lee y responde a el texto” (p. 50). De acuerdo a lo anterior asume que los objetivos del lector, su motivación para la lectura y el contexto social e histórico en el que el acto de lectura se sitúa son elementos determinantes para comprender el significado de los textos presentes en los manuales escolares. En esta investigación se caracteriza y estudia el rol que desempeñan tres tipos de lectores, a saber, lector previsto (imagen que el autor tiene en su mente del lector), lector implícito (conjunto de cualidades requeridas del lector empírico con el fin de interpretar correctamente el texto) y lector empírico (persona que lee el texto). Se considera que un autor tiene éxito en el diseño de un manual escolar cuando los lectores previsto e implícito coinciden, así mismo consideran que el éxito de un libro como herramienta pedagógica depende de la coincidencia entre el lector empírico y el implícito.

En la tercera y última línea de investigación en la que se centra el análisis de textos escolares de matemáticas están los estudios cuyo interés recae en el uso del libro de texto. Destaca el trabajo de Pepin et al (2001) quien discrimina las relaciones existentes entre las “intenciones” matemáticas y pedagógicas que se reflejan en los libros de texto, el uso de los libros de texto de parte de los profesores, las pedagogías del profesor y las diferentes facetas de la tradición educativa en tres países (Inglaterra, Francia y Alemania). En un sentido similar Li, Chen y An (2009) resaltan la importancia de este tipo de estudios para la comprensión de las relaciones entre el currículo intencionado (el descrito por niveles en los documentos oficiales de un sistema educativo) y el currículo implementado. Entre variados aspectos, estudios como éste brindan visiones distintas que permiten comprender las diferencias existentes en la enseñanza de las matemáticas de un país a otro. Por otra parte, estudios como los realizados por Remillard (2009, en Mesa y Griffiths, 2012) llaman la atención que la relación entre el texto y el instructor es compleja, y que implica creencias de los profesores, el conocimiento, su capital social y humano, la cultura escolar, las influencias parentales y las oportunidades de desarrollo profesional.

Otras investigaciones como las realizadas por Ma (1999) ponen en evidencia que los profesores chinos y japoneses en comparación con los estadounidenses asignan más tiempo al estudio de los libros de texto y al desarrollo de lecciones que amplían las explicaciones

y representaciones presentes en los manuales. Más recientemente Mesa y Griffiths (2012) estudian el papel que desempeñan los libros de texto en la mediación entre el instructor y el diseño de la instrucción, la forma como se orienta hacia los demás y consigo mismo. Entre variados aspectos, concluyen por un lado que "... a medida que los instructores ganan experiencia enseñando con un libro particular, la mediación del libro con la instrucción cambia" (p.100); y, por otra parte, "que una relación de interdependencia entre las percepciones que tienen los instructores de sus estudiantes y del currículo podría emerger como un resultado de la mediación de los libros entre los instructores y los estudiantes" (p.101).

En cuanto a la exigencia cognitiva que subyace al desarrollo y comprensión de las tareas presentadas en los manuales y la expuesta en el desarrollo de las clases, Silver (2009) señala que no siempre se mantiene. Resalta, además, que mantener en la instrucción las demandas de alto nivel de las tareas de los textos que son cognitivamente desafiantes, es la característica principal que distingue la enseñanza en el aula en países donde los estudiantes muestran altos niveles de rendimiento, en comparación con aquellos donde el rendimiento fue menor. En estos últimos, los profesores rara vez mantienen las demandas cognitivas de las tareas de los libros durante la instrucción. Otro trabajo que destaca en esta línea de investigación, es el realizado por Li, Chen y Kulm (2009). En él el interés se focaliza en los procesos de planificación diaria de profesores chinos en contextos de división de fracciones, las prácticas asociadas a ellas y en las formas de pensar evidenciadas en el proceso. Se encontró que los manuales escolares y las guías de los educadores influyen significativamente en las planificaciones de los profesores y que la planificación de las lecciones permitió a los educadores conectar las guías curriculares y los textos escolares con el contenido a enseñar en el aula de clase. También, se observó que la planificaciones de los educadores que emplearon un único manual "fueron más consistentes en la secuenciación y estructuración del contenido para la enseñanza que aquellos que usaron varios textos escolares" (p. 729) y que el proceso de planificación permitió que el contenido presentado en estos materiales se transformara en un guion que establece relaciones entre el educador y sus estudiantes.

La exploración del uso que los estudiantes dan a los textos al estudiar matemáticas, igualmente es un asunto tratado dentro de esta última línea de investigación. Rezat (2010), por ejemplo, resalta que los estudiantes incorporan su libro de texto de matemáticas como un instrumento en las actividades de resolver tareas y problemas, consolidación, adquisición de conocimientos matemáticos e interés por las matemáticas. Además, llama la atención que según el tipo de actividad, los estudiantes recurren a los libros de texto de forma distinta. Para el caso de la primera de las actividades, por ejemplo, fueron tres los procedimientos identificados: los estudiantes 1) utilizan repetidamente bloques específicos del libro de texto como una ayuda para resolver tareas y problemas; 2) eligen secciones del libro de texto que muestran similitudes con la tarea y 3) buscan un título adecuado en el libro para empezar a leer desde allí hasta que encuentren información útil. Igualmente, se considera que el primer y tercer de los comportamientos anteriores está

relacionados, respectivamente, con la creencia de que un bloque específico del libro de texto es útil para resolver tareas y problemas y que los estudiantes esperan que la información útil relacionada con un tema se encuentre al comienzo de una lección del libro de texto.

2.5 Conclusión y síntesis.

Según la unidad visual (imágenes o representaciones mentales, representaciones mentales y externas o representaciones analógicas) o la función de la visualización esta actividad cognitiva se considera bajo distintas acepciones. En esta investigación asumimos las representaciones semióticas analógicas como unidades visuales, consideramos que la visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótico contemplado (2003) y que la visualización está vinculada al registro de las figuras geométricas bidimensionales.

Como lo indica este capítulo son enormes y variados los aportes que la investigación educativa ha realizado en torno a la visualización asociada a las figuras bidimensionales. Se ha estudiado, entre otros aspectos, el papel de la visualización en el desarrollo de otras actividades cognitivas (razonamiento deductivo, argumentación y modelación) y de conceptos matemáticos (homotecia y área). Hay además estudios sobre el interés de los educadores en el desarrollo visual; y otros más que se interesan por el papel de los entornos informáticos en el desarrollo de la visualización. También, hay estudios que señalan la existencia de dificultades y obstáculos en el uso de la visualización y otros que estudian el conocimiento prototípico de los estudiantes.

Sin embargo, no hay estudios que exploren cómo la visualización es promovida en los libros de texto al inducir el estudio de un concepto matemático. Por el contrario, la investigación en torno a los libros considera actividades (razonamiento) y exigencias cognitivas (demandas cognitivas, expectativas de desempeño, etc.) distintas a las contempladas en este estudio; incluso se tienen en cuenta visualizaciones vinculadas a registros semióticos distintos al de las figuras geométricas bidimensionales. En cuanto al último aspecto están los trabajos de Falduto (2008) y Yerushalmy (2005) quienes exploran la visualización asociada a los gráficos cartesianos, donde el primero se interesa en los conceptos y procedimientos algebraicos así como en la eficacia de las formas de comunicación visual adoptadas en los textos; y el segundo, analiza cómo en el tratamiento de las funciones los libros interactivos promueven la designación visual.

En cuanto al área, concepto matemático de interés en la investigación, se han contemplado pautas para su tratamiento y se ha estudiado de forma separada los fenómenos que subyacen al estudio de la conservación del área; la medida directa e indirecta así como en la transición del primer tipo de medida al segundo; y su articulación con otros tipos de magnitudes y conceptos matemáticos. Pero, si bien muchos de estas investigaciones

evidencian que la visualización desempeña un rol determinante en la comprensión del área, lo hacen de forma tangencial y puntual; y por el contrario, estudios que explícitamente consideren cómo el área induce el desarrollo de la visualización brillan por su ausencia.

Con relación a la conexión libros de texto y área de superficies planas se ha resaltado que las técnicas que organizan matemáticamente este concepto no son desplegadas en los textos y que son los estudiantes o los profesores quienes deben desarrollarlas o sistematizarlas (De Araújo y Dos Santos, 2009); asimismo, se ha señalado que las tareas relativas a la comparación de áreas no son consideradas por estos materiales didácticos (De Araújo y Dos Santos, 2009); y estudios como los realizados por Olmo et al. (1989) han resaltado que en los libros se asume que el alumno descubre por sí mismo el concepto de área y se pasa inmediatamente al estudio de la medida, o que se define de manera más o menos abstracta la superficie, y no se realizan actividades que distingan esta cualidad de otras o que propicien la comparación sin necesidad de medición

No hay reportes de investigación que focalicen su atención en el papel de la visualización en el tratamiento del área en los libros de texto; es pues una cuestión que no ha sido explorada en la literatura especializada, y que es determinante para comprender los fenómenos que subyacen al estudio de las matemáticas en los primeros grados de la educación básica, ya que en palabras de Marmolejo y Vega (2012) la visualización es compleja y susceptible de aprendizaje y el área es un tópico propicio para su desarrollo.

CAPÍTULO 3: MÉTODO

Introducción.

En este capítulo se describe la metodología utilizada para desarrollar la presente investigación. Se divide en cuatro apartados, en los tres primeros se formula el problema estudiado y se presentan tanto los objetivos a alcanzar como las hipótesis de trabajo asumidas en la investigación. En el cuarto apartado la atención recae en el desarrollo de la investigación, se describe en él la naturaleza de la investigación realizada, la población considerada, los instrumentos de recogida de datos y los criterios para seleccionar los libros de texto analizados. Así mismo, se consideran las fases en que se realizó la investigación, se pormenoriza la metodología de análisis implementada y el proceso seguido para su diseño y validación. Por último, se reseña la forma cómo se analizaron los datos obtenidos en la investigación.

3.1 Planteamiento del problema.

La actividad matemática en los cursos de Geometría durante la Educación Básica Primaria se realiza a través de varios tipos de registros semióticos entre los que distingue las figuras geométricas. Para algunos profesores el papel de ayuda o apoyo didáctico que juega este tipo de representación en la enseñanza de la Geometría, se fundamenta en la creencia popular que basta con verlas para acceder al contenido representado y, por tanto, no se consideran objetos de enseñanza (Marmolejo y Vega, 2012). En la única etapa escolar que existe una intencionalidad de enseñanza de este registro semiótico es en educación infantil, pero está más orientada al desarrollo de la motricidad fina y al reconocimiento de figuras por parte del alumno, que al desarrollo de algún tipo de racionalidad de orden geométrico. Posteriormente, en los cursos de educación básica primaria, los alumnos deben, a partir de ese reconocimiento visual y de esa actividad motora adquirida, entender todas las posibilidades que brindan las figuras. Sin embargo, ocurre con frecuencia que para los estudiantes, incluso para muchos educadores de educación primaria, no es fácil ver en una figura las relaciones o las propiedades necesarias para llegar a la solución buscada (Padilla, 1998; Marmolejo y Vega, 2012). La falsa proximidad entre los tratamientos figurales espontáneamente aplicados y los

matemáticamente pertinentes es uno de los aspectos a considerar para comprender los problemas en el aprendizaje de la Geometría (Duval, 1999).

La visualización, por tanto, no es un asunto de constatación inmediata y simple, sino una cuestión de tratamiento de la información cuya complejidad, para el caso particular del aprendizaje de la Geometría ha de ser estudiada (Duval, 1999; Marmolejo y Vega, 2012). Investigaciones como las realizadas por Duval y su grupo de colaboradores han permitido comprender que una misma figura puede dar lugar a aprehensiones de distinta naturaleza (Duval, 1999), que existen factores que aumentan o disminuyen la complejidad para ver sobre una figura geométrica (Duval, 1999; Padilla, 1992, Marmolejo, 2007) y, así mismo, que las figuras juegan diferentes estatus y funciones en el desarrollo de actividades geométricas (Duval, 2003). Lo anterior, junto a las dificultades de orden visual que evidencian los estudiantes en algunas pruebas regionales, nacionales e internacionales (Dupuis et al, 1978, citado por Duval, 1999; Marmolejo, 2005; M.E.N., 1998), son elementos suficientes que ponen en evidencia que ver relaciones en las figuras es un asunto que está lejos de ser obvio y espontáneo.

En el estudio de la Geometría en la Educación Básica Primaria quizá uno de los objetos matemáticos donde los alumnos encuentran mayor número de dificultades es en las magnitudes y las medidas asociadas a ellas. Esto se pone en evidencia en los resultados alcanzados por estudiantes de distintos países al desarrollar pruebas internacionales. Por ejemplo en las pruebas TIMSS se observa que los estudiantes, según el país al que pertenezcan, están preparados para resolver adecuadamente entre un 15% y un 50% de las preguntas relacionadas con la medición (MEN, 1998). En relación a los resultados de las preguntas que tienen que ver con el área, objeto de interés en la presente investigación, se encontró que estudiantes de algunos países no están familiarizados con la estrategia básica de descomposición de figuras en otras más simples. Así mismo se encontraron indicios de que existen confusiones entre los conceptos de área y perímetro y se observó dificultades con la discriminación y aplicación de fórmulas para calcular áreas de figuras elementales como en el caso del triángulo y el rectángulo (MEN, 1996. p. 125). Son dos los aspectos que explican tales dificultades. Por un lado, algunas características de la enseñanza de la Geometría como la falta de atención en la construcción de la magnitud (MEN, 1998). Del otro, las diversas dificultades que para los alumnos conlleva las ideas de nociones de medida (Dickson, Brown y Gibson, 1991), entre otras, la no comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad escogida y el número de veces necesario para recubriría en una superficie, el no uso de diferentes tipos de unidades para medir el área de una superficie dada, la no captación de la idea de conservación en los diferentes contextos de cada uno de los sistemas de medidas y la incapacidad de distinguir magnitudes diferentes. Aspectos unos y otros relacionados directamente con la visualización asociada a las figuras geométricas.

En consecuencia, el aprendizaje de la visualización es un asunto ineludible para lograr superar las dificultades observadas en el aprendizaje del área en la educación básica. Pero, aprender a ver requiere de procesos de enseñanza específicos y explícitos (Duval,

1995, 2003, 2004; Padilla, 1992; Lémonidis, 1991 y Marmolejo, 2007, 2010; Marmolejo y Vega, 2012), donde es importante considerar que no basta con unas cuantas sesiones para asegurar su aprendizaje, por el contrario, es necesario asignar en los currículos escolares tiempos adecuados su enseñanza (Marmolejo, 2010; Marmolejo y Vega, 2012; Villani, 1998). Entonces, ¿qué tópicos favorecen el recurso a procesos de enseñanza que permitan la reflexión sobre las posibilidades y papel que desempeña la visualización en el aprendizaje y enseñanza de la Geometría?

En esta investigación asumimos que el área es el lugar idóneo para trabajar la visualización en los primeros años de enseñanza de las matemáticas, pues su estudio moviliza los distintos tipos de aprehensión que permiten las figuras (perceptual, operatoria y discursiva) y suscita el paso de un tipo de aprehensión a otro, elementos claves a considerar en cualquier proceso de caracterización de la visualización (Duval, 1995). Además, el estudio del área, en sí mismo o articulado al de otros objetos matemáticos (p.e. las fracciones), es un lugar de reflexión constante y concomitante en la enseñanza de las matemáticas a lo largo de toda la educación básica. La visualización posibilita una mejor comprensión del área y su medida (Kordaky, 2003; Dickson et al, 1991; Douady y Perrín, 1989; Chamorro, 2003, Turegano, 1994, 1998; Outhred y Mitchelmore, 1996, 2000, 2004; Owens y Outhred, 1997; Padilla, 1992; Zacharos, 2006; Marmolejo y Vega, 2012).

Los manuales escolares son el material didáctico al que recurren en gran medida los profesores para planificar, preparar y desarrollar sus clases de matemáticas (Schmidt et al, 1996; Gonzalez, 2002); aspecto que, obviamente, influye en qué y cómo se aprende (García y Rodeja, 1997). Éste es motivo suficiente para considerar los libros de texto como importantísimos referentes para comprender los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entre ellos la sinergia visualización y construcción de conocimiento matemático. Sin embargo, si bien es amplio el número de informes en la literatura especializada donde esta sinergia ha sido objeto de estudio, son muy pocos aquellos que se interesan por la manera en que se aparece reflejada en los libros de texto (Falduto, 2008; Yerushalmy, 2005). En estos casos la atención recae sobre objetos matemáticos (funciones) y registros de representación (gráficos cartesianos, tablas, escritura aritmética) de naturaleza distintos a los estudiados en esta investigación; en ningún caso se consideran las posibilidades que ofrece la construcción de los objetos matemáticos, en particular el área, para el estudio de la visualización en los primeros grados de la educación básica. La visualización, en este sentido, es una cuestión totalmente inexplorada.

3.2 Objetivos de la investigación

En lo que sigue se procede a describir los objetivos que se pretenden alcanzar con esta investigación al igual que la descripción de las hipótesis de trabajo y de investigación asumidas.

Objetivo general: Aportar elementos de reflexión sobre el diseño y uso de textos escolares de España y Colombia con relación al papel de la visualización como objeto de reflexión en el tratamiento del área.

Objetivos específicos:

1. Caracterizar cómo los libros colombianos y españoles promueven en el tratamiento del área el desarrollo de la visualización.
2. Determinar si los libros colombianos y españoles al tratar el área inducen distintos niveles de complejidad visual.
3. Identificar en los libros colombianos y españoles las diferentes funciones que juega la visualización en la enseñanza del área.
4. Determinar los elementos y estrategias utilizados por los textos colombianos y españoles para controlar la visualización en el estudio del área.
5. Caracterizar las estructuras de control visual promovidas por los libros colombianos y españoles al suscitar el estudio del área.

Cuestiones que guían el desarrollo de la investigación:

1. ¿Al tratar el concepto de área los libros de texto promueven el desarrollo de la visualización? ¿De qué forma los libros al tratar el área inducen distintos niveles de complejidad visual?

Cuestiones que serán consideradas a partir de las siguientes:

- ¿Cuáles son los tipos de visualización que imperan, cuáles no, en el tratamiento del área en los libros de texto?
- ¿De qué forma los libros al tratar el área promueven el desarrollo de la visualización e inducen distintos niveles de complejidad visual?
- ¿En cuáles ciclos y en qué tópicos cada una de las editoriales analizadas inducen el desarrollo de la visualización y qué niveles de complejidad visual promueven?
- ¿Qué similitudes y diferencias hay en los libros colombianos y españoles al tratar el área según la complejidad visual introducido y las posibilidades de desarrollo visual que promueven?

2. ¿Cómo se caracterizan las tareas de área de los libros en términos de la función que desempeña la visualización? ¿Cuáles podrían ser sus efectos o consecuencias para el desarrollo de la visualización?

Las respuestas a las siguientes preguntas permitirán responder a las dos cuestiones anteriormente planteadas:

- ¿Qué tipo de funciones visuales predominan, cuáles no, en el tratamiento que los libros de texto hacen del concepto de área?
- ¿De qué forma los libros promueven que las funciones visuales contribuyan u obstaculicen el desarrollo de la visualización?
- ¿En qué ciclos de enseñanza y a través de qué tópicos de área las editoriales analizadas promueven que las funciones visuales contribuyan u obstaculicen el desarrollo de la visualización?
- ¿Existen diferencias en la forma en que los libros colombianos y españoles promueven que las funciones visuales contribuyan u obstaculicen el desarrollo de la visualización?

3. ¿Cómo son organizadas las estructuras y tipos de control visuales en las tareas donde los libros tratan el área? ¿De qué forma tal organización podría influir en el desarrollo de la visualización?

Cuestiones que serán abordadas de forma puntual a través de las siguientes:

- ¿Qué estructuras y clases de control aparecen en las tareas de los libros al tratar el concepto de área y de qué forma?
- ¿Según los tópicos de área y los ciclos de enseñanza cuáles son las estructuras y tipos de control visual privilegiados por cada una de las editoriales consideradas en la investigación, y en qué forma?
- ¿Qué similitudes y diferencias hay en la manera en que los libros colombianos y españoles recurren a las estructuras y tipos de control visual al tratar el concepto de área?

3.3 Hipótesis de trabajo

1. Existen diferencias significativas en cómo los libros colombianos y españoles al tratan el concepto de área para promover el desarrollo de la visualización.
2. Los libros de texto promueven altos niveles de complejidad visual en los tópicos donde el área es considerada independientemente del perímetro mientras que donde se contemplan los dos tipos de magnitudes el nivel de complejidad es menor.

3. Los libros, al tratar el área promueven que la visualización desempeñe distintas funciones y en la mayoría de los casos permiten que las figuras contribuyan o ayuden al proceso de resolución o comprensión de la tarea planteada.
4. Los libros de texto al suscitar el estudio del área ejercen control sobre las clases de visualización consideradas y en el proceso recurren a variadas estructuras de control visual.

3.4 Metodología

En este último apartado de este capítulo se describen los elementos que caracterizan la metodología abordada en la investigación. Se compone de nueve apartados, a saber: aproximación metodológica, población, instrumentos de recogida de datos, fases de la investigación, instrumento metodológico, proceso de diseño y validación del instrumento metodológico, ejemplo de codificación y análisis de datos. En lo que sigue describimos en detalle cada uno de estos tópicos.

Para guiar la lectura de este apartado se presenta en la tabla 3.1 de forma sintética la metodología empleada en la investigación. Posteriormente, se describen y explican en detalle cada uno de los momentos a los que refiere la tabla.

<i>Esquema general del diseño metodológico utilizado en la investigación</i>	
Momentos	Caracterización
Tipo de investigación	Mixta (cualitativa-cuantitativa), comparativa, descriptiva, interpretativa y básica.
Captación y selección de datos	Mixta (inductiva-deductiva). Capítulos de geometría y medición donde explícita o implícitamente se considera el área, su medida y la relación entre el área y el perímetro de figuras planas.
Población considerada	2.561 tareas de 16 libros colombianos y 15 españoles (grados primero a sexto).
Unidades de información	presentación de contenido, las actividades desarrolladas y las actividades a desarrollar
Diseño, consecución y validación del instrumento de análisis	Categoría 1: Elementos constitutivos de la visualización (operaciones, cambios figurales, cambios dimensionales, cambios de focalización bidimensional y flujos visuales). Categoría 2: Funciones visuales (heurística, inductiva e informativa). Categoría 3: Elementos generadores de control (procedimiento, contenido, iconismo y visibilidad) Categoría 4: Tópicos de área Categoría 5: Unidades de análisis
Método de análisis de datos	Complejidad y desarrollo visual (Máximo, intermedio compuesto, intermedio simple, mínimo) Funciones visuales (informativa y no informativa) Estructuras de control visual (Discursiva, iconismo y visibilidad) Clases de control visual (simple o disjunto, refuerzo y ambiguo)

Tabla 3.1. Aspectos generales del método implementado en la investigación

3.4.1 Aproximación metodológica.

En cuanto a la selección y categorización de las categorías de análisis la investigación es cualitativa y con respecto a cómo los datos son analizados es de carácter cuantitativo. Conforme el objetivo propuesto es de naturaleza comparativa, descriptiva e interpretativa, ya que, el propósito es, por un lado, comparar visualmente las maneras de proceder que los manuales escolares de España y Colombia privilegian al suscitar la construcción del concepto de área en la educación básica y, por otro lado, se pretende describir y explicar la situación sometida a estudio. Así mismo, considerando el grado de abstracción se trata de una investigación básica, pues, en el momento no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio. La captación y selección de los datos se realizó de forma mixta: inductiva y deductivamente. Su interpretación consideró tanto, el análisis funcional propuesto por Duval (1995, 1999, 2003, 2004) en relación a la actividad cognitiva vinculada a los registros semióticos, en particular lo relacionado con las figuras geométricas y la visualización asociada a ellas, como la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010).

3.4.2 Población, criterios de selección y unidades de análisis.

Se analizaron 35 libros de texto de seis editoriales de España y Colombia utilizados para la enseñanza de las matemáticas en los primeros seis grados de educación básica obligatoria (Anexo 3.1). Se consideraron los capítulos de Geometría y Medición, en particular los apartados donde los manuales construyen, explícita o implícitamente, el área, su medida y la relación entre el área y el perímetro de figuras planas. Un total de 2561 tareas fueron analizadas. De ellas 1281 (50.02%) pertenecen a los textos de las editoriales españolas y 1280 (49.08%) a los manuales de las editoriales colombianas.

En cada uno de los libros de texto estudiados para esta investigación se fotografiaron todas las páginas que conforman las secciones donde se suscita el estudio de la Geometría y la medición. Se generó, pues, un archivo electrónico por cada sección registrada, según la editorial y el grado en el que aparecen. El análisis se realizó directamente de los archivos electrónicos. Las unidades de análisis consideradas en la investigación y su caracterización según las categorías de análisis establecidas, y que detallaremos más adelante, fueron registradas en columnas de doble entrada en una hoja de Excel.

En esta investigación se han considerado como **unidades de información**, los lugares de los manuales escolares de los cuales se extrajeron los datos para el análisis de los textos escolares. En este sentido, según la manera cómo los textos escolares presentan, ejemplifican y aplican el contenido presentado son tres las unidades de información consideradas en la investigación: la presentación de contenido, las actividades desarrolladas y las actividades a desarrollar. A continuación se definen cada una y se discriminan los elementos que las caracterizan:

-Presentación del Contenido: es el lugar en el que el libro de texto introduce el contenido matemático correspondiente a la enseñanza del área. Suele incluir definiciones, formulas, propiedades y resúmenes.

-Tareas desarrolladas: forman parte de estas unidades las tareas que son propuestas y desarrolladas por el libro de texto y que aparecen en los manuales de formas diversas. A saber:

- Posteriormente a una definición, propiedad matemática, fórmula, sugerencia o comentario. En tal caso se pone en evidencia la manera como se aplica el contenido matemático antes presentado, se amplían y/o complementan los aspectos puestos en juego en el contenido o explicación previamente expuesto o se justifica el porqué de las afirmaciones de una definición o de las relaciones presentes en ellas. Así mismo forman parte de este grupo las tareas donde se representa una figura y el lector debe verificar que en ellas procedimientos o propiedades previamente explicitadas.
- De manera previa a la exposición del contenido matemático en estudio. En este caso los elementos que acompañan a la actividad presentada permiten al lector familiarizarse con elementos o maneras de proceder propias al contenido a estudiar.
- A un lado o en medio de una actividad propuesta para ser desarrolladas por el lector. En este caso se supone que quien vaya a resolver la actividad propuesta debe reproducir la manera de proceder explicitada en la actividad desarrollada por el libro. En algunos casos este tipo de actividades explicitan nuevas maneras de proceder, en otros, se recuerdan las previamente estudiadas en tópicos, capítulos o grados previos.
- Así mismo se encuentra en este tipo de actividades aquellas que son propuestas para que el estudiante siga ciertas indicaciones dadas en ella. Por lo general su propósito es familiarizar al lector con nuevas maneras de proceder o introducir nuevos elementos matemáticos.

-Tareas a desarrollar: propuestas por el libro de texto para que el lector las resuelva. Según la exigencia, intencionalidad y ubicación en el libro de texto este tipo de actividades aparecen en los textos escolares de tres maneras distintas:

- *Ejercitación:* tareas presentadas a continuación de una definición, explicación, descripción o ejemplo que se plantean para ejercitar el conocimiento o manera de proceder previamente aludida.
- *Reflexión:* tareas presentadas cerca de definiciones, explicaciones, descripciones o ejemplos y que suscitan, a través de su resolución, establecer relaciones entre elementos tratados previamente pero que fueron presentados de forma separada o la introducción de reflexiones y/o elementos matemáticos nuevos.

- *Evaluación:* tareas propuestas con el objetivo de evaluar las exigencias, conocimientos y maneras de proceder previamente estudiados. Se presentan al final del capítulo en estudio o lugares posteriores a él. Las actividades de este grupo según su exigencia se clasifican en dos sub-grupos: 1) *por réplica* si el desarrollo de este tipo de actividades exige proceder de igual manera a la evidenciada en los ejemplos o definiciones abordadas y 2) *sin réplica* si el desarrollo de la actividad exige la aplicación de maneras de proceder que no han sido antes objeto de reflexión explícita o la articulación de maneras de proceder tratadas en momentos distintos.

Para la selección de los libros de texto a analizar en este estudio se tuvieron en cuenta cuatro criterios:

El primero fue el conocimiento por parte del investigador de los programas educativos de los países considerados y la facilidad de acceso a los libros de texto.

El segundo, que los libros escolares fuesen usados en países hispano-hablantes; como es el caso de los textos escolares de España y Colombia. Fueron dos los aspectos que suscitaron esta elección entre otras posibles:

- Los intereses profesionales del investigador. Tanto el problema de investigación junto a los resultados alcanzados deben realizar aportes significativos a las prácticas o diseño de materiales didácticos privilegiados en la región en que se desenvuelve el investigador. Más aún cuando la investigación se encuentra financiada por instituciones educativas del país del que se proviene. De esta manera, los manuales escolares utilizados en Colombia se constituyen ineludiblemente en uno de los referentes a considerar.
- Teniendo en cuenta que la característica principal de los estudios comparativos radica en la comprensión de los fenómenos estudiados mediante el establecimiento de similitudes y diferencias entre la manera en que se observa en una y otra parte a comparar, e intentando privilegiar más las segundas que las primeras, se eligieron entre los distintos países de habla hispana a uno cuya separación geográfica, condiciones socio-económicas y resultados en pruebas internacionales fueran radicalmente diferentes. España se constituyó en uno de los países hispano-hablantes que cumple con este criterio de selección. Es un país europeo, con un alto nivel socio-económico comparado con Colombia y cuyos resultados en pruebas como PISA y TIMSS son muy diferentes a los mostrados por estudiantes colombianos. Además debido a la ubicación geográfica donde se realiza la investigación (España) la elección, a nivel práctico, se constituyó en el lugar ideal a considerar en el proceso de comparación.

El tercero, alude a las editoriales seleccionadas. Se consideraron los libros de texto de tres de las editoriales de mayor trascendencia tanto en Colombia como en España. Para

escoger las tres editoriales españolas, en primera instancia, se tuvieron en cuenta las editoriales referenciadas en investigaciones previas (González, 2002; Vega, Vázquez y Salas, 2003; Cobo y Batanero, 2004; Bruno y Cabrera, 2006; Ibáñez y Ortega, 2004; Gómez, 2011). Fueron seis las editoriales descritas en estos estudios como las de mayor trascendencia en España. Para reducir el número de editoriales se aplicó, posteriormente, una encuesta informal a profesores de matemáticas de educación básica que trabajan en instituciones educativas de la provincia de Salamanca (Castilla y León).

En relación a la selección de las editoriales colombianas y teniendo en cuenta el reducido, casi inexistente, número de reportes que se interesan por el papel que desempeñan los textos colombianos en la comprensión de los fenómenos que subyacen al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, se consideró como único recurso de selección la aplicación de una encuesta informal a un grupo de profesores de matemáticas de educación básica que trabajan en instituciones educativas del sur-occidente colombiano. En ella se presentaron como opciones a escoger todas las editoriales que diseñan manuales para la enseñanza de las matemáticas en los primeros grados de la educación básica.

De esta forma se seleccionaron en España las editoriales Anaya, Santillana y SM; en Colombia las editoriales Voluntad, Santillana y Norma. Sin embargo, teniendo en cuenta que en una primera instancia el interés de la presente investigación consideró simultáneamente al estudio de los libros de texto de los estudiantes, los manuales usados por los educadores, se pidió a las distintas editoriales seleccionadas el acceso a esos materiales (el proceso inicialmente se desarrolló en Colombia). Sin embargo no se recibió respuesta por parte de una de las editoriales colombianas (Norma), lo que obligó a recurrir a una cuarta editorial. Finalmente, la editorial SM fue seleccionada en sustitución de la editorial Norma. Los criterios de selección en este caso fueron dos: 1) es una de las editoriales que ofrecen libros de matemáticas con mayor volumen de ventas en Colombia y 2) es una propuesta totalmente nueva en el ambiente educativo colombiano (la entrada de esta editorial en relación a libros escolares de matemáticas no sobrepasaba los tres años en el inicio del estudio). Finalmente, el hecho que ninguna de las editoriales españolas dio respuesta a las solicitudes realizadas implicó que al final el interés por los manuales de los educadores fuese dejado de lado.

El cuarto, se relaciona con la selección de los grados de escolaridad a considerar. Inicialmente se tuvieron en cuenta los grados donde las políticas educativas españolas y colombianas sugerían desarrollar la enseñanza del objeto matemático en estudio. Así fueron siete los grados seleccionados en España: 1° de primaria a 1° de la ESO; y ocho en Colombia: 1° a 8° de educación básica (Anexo 3.2). Ahora, teniendo en cuenta, por un lado, que el propósito de la investigación es comparar los textos según el grado de escolaridad y que en España no hay alusión a la enseñanza del área en el grado 2° de la ESO, entonces, no se consideró en el estudio los textos colombianos del grado equivalente, es decir, los de grado octavo. Por otro lado, considerando que nuestro interés radica en el registro semiótico de las figuras geométricas, y dado que el estudio del área

en los libros de texto colombianos de grado séptimo se desarrolla a través del registro semiótico de los gráficos cartesianos, entonces, los libros de texto colombianos de grado siete junto a sus equivalentes españoles (1° ESO), tampoco fueron tenidos en cuenta en la investigación. Así, pues, fueron 36 los manuales utilizados en el estudio. Sin embargo, uno de ellos, correspondiente a la editorial española Anaya y dirigido a estudiantes de primer grado de escolaridad, no consta de tareas que explícita o implícitamente susciten la reflexión sobre el objeto métrico en estudio en la investigación, lo que finalmente implicó que se consideraran un total de 35 manuales escolares para el desarrollo de esta investigación.

3.4.3 Fases de la investigación.

El presente estudio se desarrolló en cuatro etapas. Describimos a continuación cada una de ellas:

- **Planteamiento general de la investigación.** En esta primera fase se revisaron los avances realizados en la literatura especializada sobre los tres aspectos cuya sinergia determina el desarrollo de la investigación: visualización, áreas y textos escolares. Así mismo, se elaboró un estudio a fondo de los elementos teóricos propios del registro semiótico de las figuras geométricas, de los procesos de visualización que le subyacen y del papel que desempeña el control en el desarrollo de distintas actividades cognitivas. De forma paralela, se establecieron las preguntas a las que se pretendía dar respuesta, los objetivos que se pretendían alcanzar y se establecieron las hipótesis de trabajo. Posteriormente, se seleccionaron y adquirieron los textos escolares a analizar en la investigación.
- **Diseño de la metodología de análisis y validación.**
- **Desarrollo de la investigación.** Se aplicó el instrumento metodológico en las tareas de los capítulos de geometría y medición de los libros considerados en el estudio. Una vez recogidos los datos se establecieron los criterios a considerar para su análisis.
- **Escritura de informe final.** Como última fase de la investigación, se analizaron y discutieron los resultados de la investigación, se establecieron las conclusiones del trabajo realizado y se realizó la escritura del documento final.

3.4.4 Proceso de diseño del instrumento de análisis

El diseño del instrumento de análisis que expondremos más adelante y que sintéticamente esquematizamos en la tabla 3.2 fue un proceso largo y minucioso que se desarrolló en tres etapas.

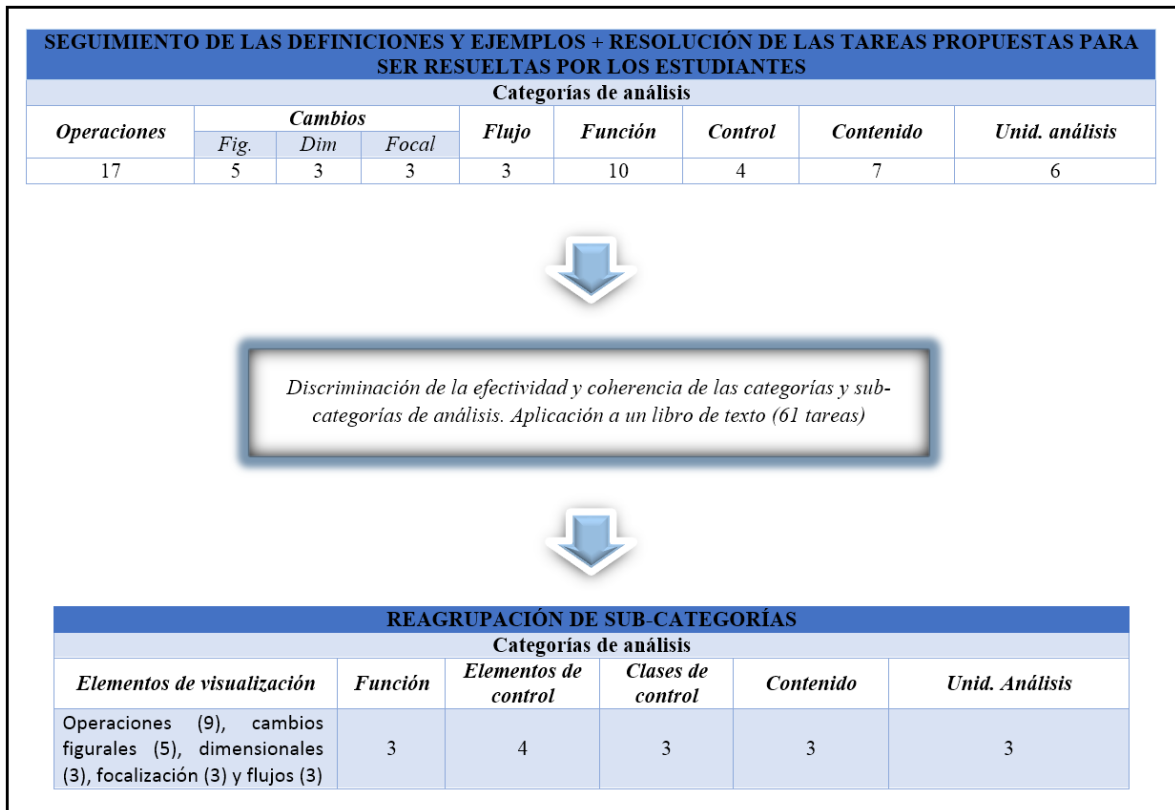


Tabla 3.2. Fases del diseño del instrumento metodológico

En la primera etapa, con el propósito de discriminar las categorías de análisis a considerar en la investigación e identificar los elementos que permitiesen caracterizar en detalle las tareas de los libros en términos visuales, se realizó un meticuloso seguimiento de las indicaciones dadas en las definiciones y en los procedimientos desarrollados en los ejemplos de los libros. Igualmente, fueron desarrolladas las actividades propuestas por los manuales para ser resueltas por los estudiantes. Siguiendo los presupuestos de Duval (2003, 2004) se evidenció, en primera instancia, la presencia de **operaciones visuales**, **cambios figurales** y **cambios de naturaleza dimensional**. Cada uno de estos tres aspectos se consideró como una categoría de análisis. Prestos a identificar nuevas categorías y discriminar las sub-categorías que los conforman se observó que los procedimientos presentados y exigidos en el desarrollo y comprensión de las tareas de los manuales escolares correspondientes a la enseñanza del área, exigían considerar dos categorías adicionales para describir los *tipos de visualización* asociados a este tipo de tareas: **cambio de focalización** y **flujo visual**.

En esta etapa se discriminaron 17 operaciones visuales (*reconfiguración simple, reconfiguración por exceso, reconfiguración por ensamblaje de partes, configuración simple, configuración por reiteración, configuración por simetría, agrandamiento, achicamiento, por arrastre, traslación, rotación, simetría axial, cuadratura, superposición directa, superposición inversa, fraccionamiento y re-fraccionamiento*), 5

cambios figurales (*real, intermitente, parcial, intrínseco y no real*), 3 cambios dimensionales (*fijo, operatorio y desdoblamiento*), 3 cambios de focalización bidimensional (*configural, intrafigural y mixto*) y 3 flujos visuales (*discreto, lineal, circuito*). Todas las sub-categorías fueron extraídas total y directamente del análisis de las unidades de información analizadas de los textos escolares.

La discriminación de los elementos que conforman cada una de las categorías anteriormente referenciadas en las tareas donde los estudiantes deben resolver las problemáticas planteadas por el texto, al contrario de aquellas donde se presentan el contenido matemático y los ejemplos, se caracterizó por ser una faena de extremada complejidad. Como se ha señalado antes una misma tarea en la que se ve involucrada una figura geométrica puede suscitar diferentes formas de ver para resolverla. Ahora, considerando que nuestra investigación es un estudio de cómo se presenta el contenido en los manuales escolares, nuestro interés radica exclusivamente en las formas de ver que promueve el texto escolar, no en todas las visualizaciones asociadas a la tarea propuesta. En consecuencia, teniendo en cuenta que estos materiales didácticos generan control sobre las formas de proceder y las actividades cognitivas inmersas en la construcción del contenido matemático (Mesa, 2004, 2010) y con el propósito de discriminar solo las visualizaciones propiciadas por los libros de texto, fue necesario considerar como una categoría adicional las **estructuras de control visual** y los **tipos de control visual** privilegiados por los manuales estudiados. En el primer caso, se incluye el conjunto de estrategias y elementos utilizados por los textos escolares para guiar a sus lectores en las maneras de ver a considerar en el desarrollo o comprensión de las tareas estudiadas. Así, fueron cuatro los elementos de control visual identificados en los textos: *contenido, procedimiento, visibilidad e iconismo*. Los dos primeros coincidieron con los expuestos por Mesa (2004) al describir la estructura de control relacionada con la discriminación de procesos de verificación inmersos en la construcción de funciones en los manuales escolares. En relación a los tipos de control visual teniendo en cuenta los elementos de control visual utilizados por los libros promueven más de un tipo de visualización y si estas visualizaciones son pertinentes o coherentes al proceso matemático a seguir. Fueron tres los tipos de control visual evidenciados por los libros en el estudio del área: *simple o disjunto, por refuerzo y ambiguo*.

Finalmente, considerando que en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas la visualización desempeña distintos tipos de función (Duval, 1998a), es decir, son variadas las maneras en que esta actividad cognitiva tiende a soportar o guiar el desarrollo de un problema planteado o permitir la comprensión del despliegue de un procedimiento dado se consideró que no era suficiente con discriminar la estructura visual y la estructura de control visual en las tareas de los libros para caracterizarlas visualmente. Es necesario, además considerar el tipo de función que desempeña la visualización en el desarrollo o comprensión de las tareas presentadas en los manuales al construir el área. En este sentido, fueron diez las **funciones visuales** extraídas de las tareas de los manuales

escolares: *sinóptica, verificativa, prueba, informativa, ilustrativa, elicitativa, globalidad, exploratoria, descriptiva y discriminativa.*

En una segunda etapa del diseño de la metodología de análisis y con el doble objetivo de discriminar tanto la efectividad y coherencia de las categorías y sub-categorías diseñadas como de identificar las estructuras visuales imperantes en el desarrollo o comprensión de las tareas propuestas en los manuales escolares, se procedió a revisar las tareas propuestas en uno de los manuales analizados escogido al azar. Fueron consideradas un total de 61 tareas y para ello se construyó una tabla que permitiera registrar el análisis de esas tareas. Cada entrada correspondió a una tarea. Se establecieron seis entradas: estructura visual, función visual, estructura de control visual, clase de control, contenido y tipo de unidad de análisis. La segunda, tercera y cuarta entrada estaban compuestas por diez¹⁵, cuatro¹⁶ y cuatro¹⁷ sub-categorías. Las categorías de contenido y de unidad de análisis en siete y seis¹⁸ sub-categorías cada una. Para caracterizar la primera de las categorías (estructura visual) se introdujeron 31 columnas adicionales según los elementos que en los libros de texto analizados caracterizan cada una de las sub-categorías consideradas, a saber: 17 para las operaciones, 3 para los flujos visuales y 5 para los cambios figurales, 3 para los dimensionales y 3 para los de focalización.

Si bien el proceso realizado no puso en evidencia dificultades, ni incoherencias en la aplicación del instrumento de análisis diseñado, si llamó la atención el considerable número de combinaciones presentes en algunas de las categorías: estructura visual y función visual. Esto podría suscitar futuros obstáculos tanto en el análisis de los datos como en su interpretación. En consecuencia, se tomó la decisión, en una tercera y última etapa del proceso de diseño del instrumento de análisis, de reducir el número de operaciones y de funciones visuales para asegurar un número de estructuras y de funciones visuales más manejable. Para ello fueron agrupadas según características comunes quedando en definitiva un total de nueve operaciones (reconfiguración, configuración, anamorfosis, traslación, rotación, simetría axial, cuadratura, superposición y fraccionamiento) y tres funciones visuales (heurística, informativa e inductiva).

En el mismo sentido, se consideró oportuno reagrupar las sub-categorías correspondientes al contenido y a las unidades de análisis considerando finalmente solo tres sub-categorías en el primer caso (cantidad de área, medida de área y relación área-perímetro) y dos en el segundo (tareas que eran resueltas o desarrolladas por el texto y tareas que el lector debía desarrollar).

¹⁵ Sinóptica, verificativa, prueba, informativa, ilustrativa, elicitativa, globalidad, exploratoria, descriptiva y discriminativa.

¹⁶ Contenido, procedimiento, iconismo y visibilidad.

¹⁷ simple, disjunto, refuerzo y ambiguo.

¹⁸ Contenido: magnitud, medida directa, medida indirecta simple, medida indirecta compleja, medida directa a indirecta, medida indirecta y relación perímetro área; Unidad de análisis: presentación de contenido, actividades desarrolladas, actividades a desarrollar tipo ejercicios o reflexivas y actividades evaluativas con replica o sin ella.

De acuerdo a los anteriores presupuestos y con el propósito de dar respuesta a las inquietudes presentadas en este estudio se establecieron un total de diez categorías de análisis, según la naturaleza de cada una de ellas fueron re-agrupadas en cinco: **elementos constitutivos de la visualización, funciones asociadas a la visualización, elementos generadores de control y tipos de control visual, y contenido**. La primera, conformada por las **operaciones figurales, los cambios figurales, dimensionales y de focalización bidimensional** así como **el flujo visual** caracteriza las tareas propuestas en los manuales escolares según el tipo de visualización movilizado en ellas (en consecuencia los niveles de complejidad visual y las posibilidades de desarrollo visual promovidas) y corresponden al primero y segundo de los objetivos específicos planteados en la investigación. Las dos categorías siguientes consideran, por un lado, el tipo de función que desempeña la visualización y, por otro, tanto los elementos utilizados por los textos para generar control en las formas de ver a aplicar en el desarrollo o comprensión de las tareas propuestas en ellos, como las clases de control visual que estos elementos determinan en estas tareas. La categoría de “funciones asociadas a la visualización” permitirá alcanzar el segundo de los objetivos específicos planteados en la investigación, mientras que a través de la categoría “elementos generadores de control y tipos de control visual” será posible alcanzar los dos últimos objetivos específicos. Finalmente, en la cuarta categorías se describe cómo el contenido matemático “área de superficies planas” es presentado en los capítulos de geometría y medición de los libros.

3.4.5 Instrumento de análisis.

A continuación, de forma amplia se definen cada una de las categorías y sub-categorías de análisis consideradas en la investigación. Para su mejor comprensión se presentan ejemplos de cada una de ellas.

Categoría 1: Elementos constitutivos de la visualización. El estudio del papel que juega la visualización en geometría implica, según Duval (1998a), la consideración de al menos uno de los tres cambios que realiza el individuo para comprender aquello que ve: *cambio figural, cambio dimensional y cambio de anclaje*. En el presente estudio, con el propósito de caracterizar las actividades propuestas en los libros de texto analizados, hemos considerado como categorías de análisis, en un sentido similar a Duval (1998a) tanto el *cambio figural*, como el *cambio dimensional*. El *cambio de anclaje*, por su parte, ha sido asumido, como lo indicaremos más adelante, de forma distinta y con mayor amplitud.

Así mismo, hemos introducido dos categorías adicionales: *operaciones y cambio de anclaje bidimensional*. La primera, correspondiente a las acciones que se aplican en las figuras; no siempre, su aplicación promueve cambios en la organización perceptiva de una figura, y de hacerlo, una misma operación puede generar *cambios figurales* de naturaleza distinta. El *cambio de anclaje bidimensional*, por su parte, ha sido considerado,

pues la descripción de las características visuales de las figuras presentes en las tareas de áreas, exige considerar la aplicación de saltos perceptivos de naturaleza bidimensional que permitan focalizar la atención tanto en sub-figuras de una o varias figuras, como en establecer comparaciones perceptivas entre dos o más figuras en estudio. Estos aspectos están presentes, por ejemplo, en tareas de medida directa de la cantidad de área de una figura, es decir, donde es necesario considerar la unidad de medida superficial asignada y recubrir con ella la superficie de la figura a medir, así como en actividades donde es necesario comparar directamente dos figuras de igual cantidad de área a partir de las sub-figuras que le conforman o transformar una figura en otra con igual cantidad de área.

En relación al *cambio de anclaje* lo hemos valorado, como se señaló arriba, de manera diferente, no sólo como el insistente paso de transformar una figura a focalizar la atención en unidades constituyentes de dimensión 0 o 1, y viceversa sino, además como la forma en que se organizan las distintas maneras de ver en la figura y que han sido asumidas en la investigación (cambio figural, cambio dimensional, cambio de focalización bidimensional) y las operaciones aplicadas sobre ella. Para evitar confusiones con los otros tipos de cambios estudiados en esta investigación aludimos a él en términos de flujo visual.

Determinar los *tipos de visualización* predominantes en los primeros grados de la enseñanza de las matemáticas exige distinguir dos aspectos: los elementos que describen la visualización y la forma en que se articulan. En este sentido, las clases de visualización presentes en los libros de texto se determinaron a través de la 5-upla (Op, CFg, CD, CFB, Fl); donde Op es la operación aplicada en la figura, CFg es el cambio figural que se produce al aplicar una operación figural determinada, CD el cambio dimensional, CFB el cambio de anclaje bidimensional a considerar al desarrollar o comprender la tarea propuesta y Fl el flujo visual. Las cuatro primeras componentes aluden a los elementos que caracterizan la visualización y la última a la manera en que se articulan. Cada una de las componentes de la 5-upla se asume como los elementos que determinan los *tipos de visualización* que se promueven en los libros de texto al tratar el área (elementos constitutivos de la visualización en el tratamiento del área). En este sentido, un tipo de visualización es la forma como se organizan los elementos constitutivos de la visualización en el estudio de una tarea. En los siguientes párrafos se definen y se ejemplifican cada elemento y los aspectos que los determinan.

Para identificar los elementos que permiten caracterizar visualmente las tareas de los libros de texto se procedió, en primera instancia, a seguir meticulosamente las indicaciones dadas en las definiciones y en los procedimientos desarrollados en los ejemplos de los libros; así mismo se realizaron las actividades propuestas por los manuales para ser resueltas por los estudiantes.

Siguiendo los presupuestos presentados por Duval (2003, 2004), se evidenció la presencia de operaciones visuales, cambios figurales producidos por la aplicación de

transformaciones de naturaleza mereológica, óptica y posicional, y cambios de naturaleza dimensional. Cada uno de estos tres aspectos se consideró como una categoría de análisis. Como se pondrá en evidencia a continuación, fueron nueve las operaciones, cinco los cambios figurales y tres los cambios dimensionales discriminados en los libros de texto al construir el área. Los procedimientos presentados y exigidos en el desarrollo y comprensión de las tareas de los manuales escolares conllevaron, como se ha indicado anteriormente, la consideración de dos categorías adicionales: cambio de focalización y flujo visual, siendo tres los cambios de focalización y dos los flujos visuales determinados.

Además, para la discriminación de los aspectos que caracterizaron cada una de las categorías, se consideró la estructura de control visual (Marmolejo y González, 2013a) privilegiada en los libros analizados en los temas correspondientes al área. Es decir, se tuvieron en cuenta los elementos y estrategias utilizados por los libros de texto para inducir unas maneras de ver sobre otras: el despliegue de procedimientos, la presentación de contenidos, el uso de figuras que aluden a objetos o acciones físicas y el recurso de elementos que mejoran la visibilidad de la visualización puesta en juego (presencia de fondo cuadriculado, concavidad o convexidad en el contorno de una figura, introducción de colores, punteado, etc.).

A continuación, se definen detalladamente cada uno de los elementos constitutivos de la visualización en el tratamiento del área así como las características que los describen. Para su mejor comprensión se presentan ejemplos de cada una de ellos.

Operaciones. Las figuras permiten distintos tipos de modificaciones. Para cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística (Duval, 1999, p.156). Según el papel que juegan las operaciones a aplicar en las figuras en la comprensión y desarrollo de tareas matemáticas, Duval (1995) centró la atención en cinco clases: *reconfiguración*, *traslación*, *rotación*, *achicamiento* y *agrandamiento*. En los libros de texto al construir el área se introducen adicionalmente cinco operaciones de naturaleza distinta: *configuración*, *rotación externa*, *cuadratura*, *superposición* y *fraccionamiento*. Por otra parte, en el presente estudio se considera las operaciones *achicamiento* y *agrandamiento* como elementos que forman parte de una única operación denominada como *anamorfosis*. En consecuencia, son 9 las maneras como hemos clasificado las formas operar encontradas en los libros de textos estudiados.

En relación con el rol de las operaciones visuales en el tratamiento del área, es su aplicación la que induce la manipulación del área de forma cualitativa, acción determinante para la comprensión del concepto de área, puesto que promueve su estudio como magnitud (Freudenthal, 1983) y asigna sentido a su medida (Chamorro, 1997; Zacharos, 2006). Sin embargo, a pesar de la importancia de la manipulación cualitativa del área no es considerada en el tratamiento de este concepto matemático en la escuela

(Kidman y Cooper, 1997, en Kordaki, 2003 y Kamii y Kysh, 2006). Esto explica, entre otros aspectos, las dificultades que tienen los estudiantes para diferenciar el área del perímetro (Padilla, 1992) y comprender las propiedades matemáticas que caracterizan al área y su medida; así como de prácticas de enseñanza donde el área es una excusa para reflexiones de naturaleza aritmética relativas a la numeración y al uso de los números naturales y decimales. Tal es el caso tanto del conteo de unidades y la aplicación de conversiones (Chamorro, 1997) como de la sustitución de valores numéricos en fórmulas de área (Kamii y Kysh, 2006).

Lo anterior es una faceta que resalta la importancia de esta primera categoría de análisis no solo en cuestiones de naturaleza visual, también en el papel que la visualización desempeña en la comprensión del concepto de área. En la tabla 3.3 se presentan las operaciones que los libros movilizan al suscitar el estudio del área así como algunas de las tareas y propiedades matemáticas en las que su aplicación puede apoyar la comprensión del área.

Operación	Tarea	Propiedad
Reconfiguración	Transformación de una figura en otra de con diferente contorno visual e igual área (Rec. simple). Comparación entre regiones poligonales de igual área y diferente forma (Rec. Simple) Calculo de área de regiones poligonales irregulares o que representan una fracción de una figura regular (Rec. por exceso). Calculo de área de sub-configuraciones (Rec. por ensamblaje).	Relación de equivalencia (Rec. simple). Relación de orden (Rec. por exceso). Adición de áreas (Rec. por ensamblaje).
Configuración	Producción de regiones poligonales rectilíneas a partir de la unión regiones previamente dadas (Conf. simple, por simetría y por reiteración). Duplicación de áreas (C. por simetría).	Adición de áreas (Conf. simple y por simetría) Producto de un número natural por una cantidad de área (Conf. por reiteración).
Anamorfosis	Variación del área y conservación de la forma (Anam. Por achicamiento y por agrandamiento). Conservación del área (Anam. por arrastre).	Relación de orden (Anam. por achicamiento y por agrandamiento). Relación de equivalencia (Anam. por arrastre)
Traslación	Comparación entre regiones poligonales. Reproducción de figuras con igual área.	Relación de equivalencia
Rotación	Comparación entre regiones poligonales. Reproducción de figuras con igual área.	Relación de equivalencia
Simetría axial	Calculo de área de regiones poligonales irregulares y de sub-figuras de una figura	Producto de un número racional por una cantidad de área
Cuadratura	Elección de unidades de medida adecuadas. Aproximación de la medida: acotación de áreas por valores superiores o inferiores y exhaución con unidades	
Superposición	Pavimentación de superficies (Sup. directa) Calculo de área de regiones sombreadas (Sup. inversa)	Medida de área y unidad de medida (Sup. directa).

Fraccionamiento	Repartos equitativos de regiones poligonales (simple, por inhibición y re-fraccionamiento). Calculo de área de regiones poligonales (simple) y de sub-figuras o sub-configuraciones irregulares (por inhibición y re-fraccionamiento). Comprensión de la fórmula $A = B \times H$ (re-fraccionamiento).
------------------------	---

Tabla 3.3. Tareas y propiedades del área donde intervienen las operaciones visuales

En lo que sigue describimos cada una de las operaciones visuales consideradas en la investigación:

-Reconfiguración: consiste “en la *división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente*” (Duval, 1999. p. 156). Son tres las clases de reconfiguración presentes en los manuales escolares de Colombia y España al desarrollar el área, a saber:

- *Reconfiguración simple:* la figura de partida se transforma en otra de forma distinta e igual cantidad de área. Las unidades 2D que le conforman (o algunas de ellas) son re-ubicadas bajo la acción de traslaciones y/o rotaciones y/o reflexiones en lugares distintos al inicialmente ocupado por ellas. En la ilustración 1 se reconfigura un cuadrado en un triángulo isósceles.

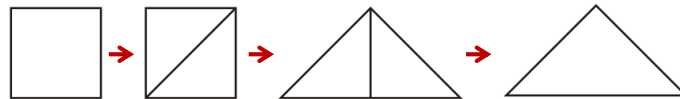
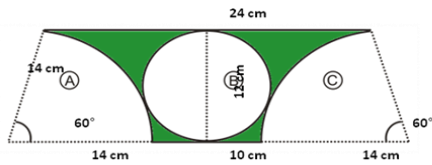


Ilustración 3.1: reconfiguración simple de un cuadrado en un triángulo isósceles. Ejemplo diseñado por los autores

- *Reconfiguración por exceso:* en el proceso toda la superficie de la figura de partida o una de sus partes pasa a conformar una fracción de la superficie de la figura total. En el despliegue del proceso presentado en la Ilustración 2 se pone en evidencia una reconfiguración donde la figura de partida es transformada en otra figura con mayor cantidad de área.

CALCULAR EL ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

Halla el área coloreada



Primero. Descomponemos la figura en otras figuras cuyas áreas sepamos calcular.

Figuras A y C → Sector circular de radio 14 cm y ángulo 60°.

Figura B → Círculo de radio $\frac{12}{2} = 6$ cm.

Figura D → Trapecio de altura 12 cm y bases de 24 cm y $10 + 14 + 14 = 38$ cm.

$$A_{\text{Total}} = A_{\text{figuraD}} - A_{\text{figuraA}} - A_{\text{figuraB}} - A_{\text{figuraC}}$$

Segundo. Calculamos cada una de las áreas.

$$A_{\text{figuraA}} = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 14^2 \cdot 60}{360} = 102,57 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{figuraC}} = 102,57 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{figuraB}} = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113,04 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{figuraD}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(38+24) \cdot 12}{2} = 372 \text{ cm}^2$$

Tercero. Sumamos y restamos para obtener el área total.

$$A_{\text{Total}} = A_{\text{figuraD}} - A_{\text{figuraA}} - A_{\text{figuraB}} - A_{\text{figuraC}} = 372 - 102,57 - 113,04 - 102,57 = 53,82 \text{ cm}^2$$

Ilustración 3.2: Reconfiguración por exceso de una figura curvilínea a otra figura de forma trapezoidal. En Matemáticas 1 ESO (Santillana, España), p. 221

- *Reconfiguración por ensamblaje de partes* (Padilla, 1992): alude a que algunas o todas las sub-figuras en que una figura se encuentra fraccionada, o que por acción de un fondo cuadrilado se destacan en la figura de inicio, se ensamblan entre sí conformando nuevas sub-figuras. En el proceso, la forma de la figura de inicio se conserva, pero cambia su organización interna.

En la siguiente figura discriminar un trapecio



Ilustración 3.3: Reconfiguración por ensamblaje de partes de sub-figuras de un triángulo pasando de cuatro triángulos congruentes a un triángulo y un trapecio. Adaptación de tarea propuesta en Matemáticas 4 (Anaya, España), p, 157

Este tipo de reconfiguración se muestra en la Ilustración 3 donde se solicita que se fusionen tres de las sub-figuras del triángulo de la izquierda para resaltar visualmente una sub-figura de forma trapezoidal.

-*Configuración:* alude al ensamblaje de un conjunto de figuras independientes entre sí para representar una nueva, cuya superficie está compuesta por la unión de las superficies de las figuras dadas. A diferencia de la reconfiguración, la atención no recae en un proceso compuesto (descomposición y reorganización figural). Por el contrario, la focalización apunta a un único proceso de naturaleza más sencilla (organizar las figuras en un todo); aquí, las figuras de partida asumen el rol de sub-figuras en la figura finalmente “construida”. En lo que sigue presentamos las maneras diversas en que se caracteriza la presencia de esta operación en los manuales escolares estudiados en la investigación:

- *Configuración simple*: son varias las figuras de partida y su ensamblaje genera una nueva figura. No todas las figuras representadas tienen igual forma y magnitud. En la Ilustración 4 se muestra un ejemplo de este tipo de operación.

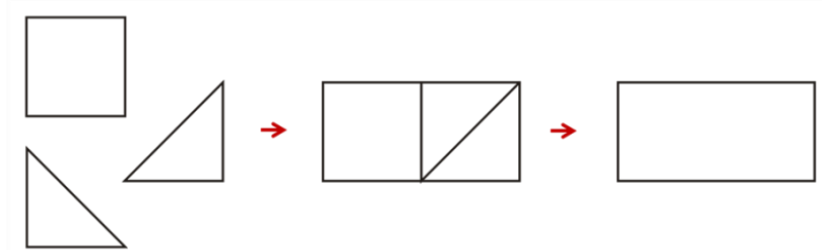


Ilustración 3.4: Configuración simple aplicada a un cuadrado y dos triángulos para formar un rectángulo. Ejemplo diseñado por los autores

- *Configuración por reiteración*: en este caso únicamente hay una única figura de inicio y se requiere generar n copias de ella, colocarlas unas al lado de otras, sin superposición, mediante la aplicación de traslaciones o rotaciones o reflexiones. La cantidad de área de la figura de llegada es n -veces la de la figura de partida. Un ejemplo de tarea¹⁹ que privilegia esta manera de configuración es la siguiente: “dibuja un triángulo y utilizándolo como unidad de medida, construye una nueva figura cuya área sea cinco veces la unidad de medida asignada”.
- *Configuración por simetría*: se solicita implícita o explícitamente completar una figura, donde –a diferencia de la configuración por reiteración– no se requiere aplicar composiciones de traslaciones o rotaciones en el plano para formar la figura en cuestión. Este tipo de configuración se observa en despliegues de procedimientos donde la figura dada es mentalmente “rotada por fuera del plano”, asumiendo un “eje” de rotación. El resultado es una figura isométrica cuya área duplica la de la figura de partida (Ilustración 5).

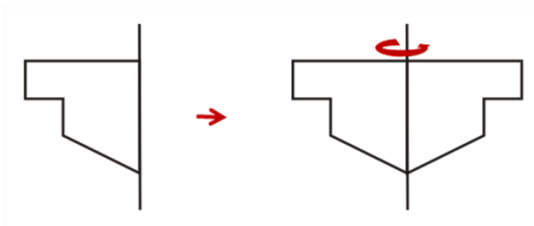


Ilustración 3.5: Configuración por simetría de un hexágono en un eneágono. Ejemplo diseñado por los autores

Al colocar el borde de un espejo sobre el eje de una figura simétrica, se ve la figura completa

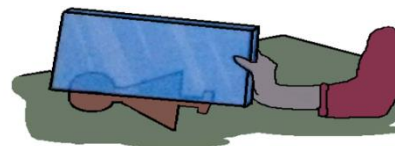


Ilustración 3.6: Configuración por simetría mediante la aplicación de espejos. En Matemáticas 4 (Anaya, España), p. 166

¹⁹ Tarea diseñada por los autores y aplicada en cursos de cualificación de profesores donde se reflexiona sobre el papel que desempeña la visualización en el estudio de las matemáticas.

De la misma forma suscitan la operación de configuración por simetría las tareas donde se introduce el uso de espejos y estos se colocan en uno de los lados del contorno de la figura de inicio (Ilustración 6). En estos casos la unión de la figura de partida y la imagen en el espejo representan una figura simétrica con doble cantidad de área que la figura de inicio.

La configuración por simetría está presente en tareas donde si bien la consigna no alude explícitamente al área sí promueve la duplicación del área de una figura. Esta operación destaca, entre todas las detectadas en la investigación, por ser la menos propicia para la enseñanza del área, pues, el estudio del área considera estrictamente el plano en que la figura es representada; mientras que la configuración por simetría suscita la aplicación de un “giro” por fuera de él. Esta ambivalencia bien podría generar dificultades y obstáculos en la objetivación del concepto de área.

- *Anamorfosis*: Se aplica sobre la figura de partida un proceso de deformación continuo. Aparece en los manuales escolares de tres formas diferentes, por *agrandamiento*, cuando el proceso de deformación mantiene invariante la forma de la figura y las relaciones entre sus unidades constituyentes y ocasiona un aumento en su cantidad de superficie. Por *achicamiento*, donde el proceso de deformación mantiene invariante la forma y las relaciones entre sus unidades constituyentes y promueve una disminución en su cantidad de área y por *arrastre*, en los casos donde la cantidad de superficie de la figura de partida permanece invariante, mientras que su forma o relaciones entre las unidades constituyentes varía. En la Ilustración 7 se muestra cómo, mediante un arrastre, se transforma un rectángulo en un trapecoide.



Ilustración 3.7: Transformación de un rectángulo en un romboide por aplicación de una anamorfosis tipo arrastre. Ejemplo diseñado por los autores

En las dos primeras formas en que aparece la anamorfosis son posibles dos maneras de proceder: una que focaliza la atención en las unidades 1D constituyentes de la figura, la otra únicamente en su superficie. En la primera hay un agrandamiento o achicamiento a través de una dilatación o contracción de los lados de la figura (incremento o reducción homogénea de las longitudes de los lados que conforman el contorno de la figura de partida). En la segunda, se asume una figura como un aumento o achicamiento superficial de otra (es el caso de actividades donde se presenta la figura original al lado de la figura agrandada o mermada).

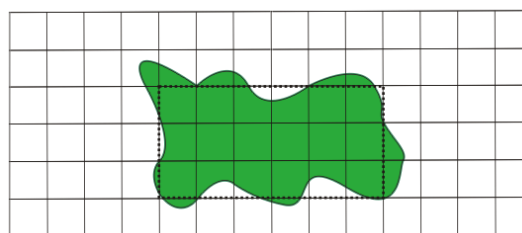
-*Traslación*: la figura de llegada es una imagen de la figura de partida bajo la aplicación de desplazamientos verticales, horizontales o de composiciones entre ellos. La forma, la cantidad de área y las relaciones existentes entre las unidades constituyentes se conserva.

-*Rotación*: la figura de llegada es una imagen de la figura de inicio bajo la aplicación de un giro o una composición de giros (rotación en el plano).

-*Simetría axial*: presente en tareas donde se muestra una figura y se pide discriminar su eje de simetría o cuando se solicita verificar si una figura es simétrica con respecto a un cierto eje. Se aplica sobre la figura una “rotación por fuera del plano”. A diferencia de la reconfiguración por simetría la figura final conserva, en este caso, el mismo contorno global y la misma área que la figura de inicio. En caso de que sea necesario introducir un eje de simetría en la figura inicial, la única diferencia entre esta y la figura final es que la superficie de la segunda, por acción del eje de simetría aplicado, estará dividida en dos partes isométricas entre sí, mientras que la superficie de la figura de inicio es presentada de forma no fraccionada.

-*Cuadratura*: el contorno de la figura de partida es curvilíneo y se representa sobre un fondo cuadrículado. Calcular de manera exacta y de forma directa su área no es posible. Es necesario aplicar una estimación. Teniendo en cuenta el contorno de la figura de partida y las líneas que conforman el fondo cuadrículado, se dibuja una nueva figura de contorno rectilíneo, sobre la cual sí es factible calcular la medida de su área. La cantidad de área de la figura de llegada es mayor o menor que la de la figura de partida. Se calcula el área sobre la figura rectilínea y no sobre la figura inicialmente dada. En la actividad presentada en la Ilustración 8 se muestra la transformación de una figura curvilínea en una rectilínea de forma rectangular.

El área de las figuras no poligonales se calcula de forma aproximada.



$A \approx 18m^2$ [cada cuadrado de la cuadrícula en que resalta la figura tiene por medida 1 cm^2]

Ilustración 3.8: Cuadratura de una figura curvilínea en una rectangular. En Matemáticas 5 (Anaya, España), p. 179

-*Superposición*: aparece en los libros de texto de dos maneras distintas. En la primera se representan dos figuras con sus superficies disjuntas entre sí. En este caso el desarrollo de la tarea exige solapar una de ellas con la superficie de la otra. Por tanto, es necesario comparar las dos representaciones a partir de sus segmentos y ángulos: centrar la atención en aquellos que en una figura y otra coinciden en sus medidas y, posteriormente, ponerlos en correspondencia entre sí. La aplicación de rotaciones y traslaciones en el proceso de

comparación igualmente son aspectos que caracterizan la operación de superposición. En el segundo caso, de manera inversa, la configuración que acompaña a la tarea propuesta (figura de inicio) se caracteriza por estar descompuesta en sub-figuras o sub-configuraciones. El proceso de desarrollo demanda discriminar la figura de inicio como la superposición de dos o más figuras, considerar de manera independiente una y otra, y establecer una relación entre sus respectivas áreas.

Designamos con los términos superposición directa e inversa a las dos maneras en que aparece esta operación en los textos. El primer tipo tiende a aparecer en tareas donde se solicita calcular el área de una figura mediante la replicación de una unidad de medida. En tal caso es necesario sobreponer la figura que representa la unidad en la figura a medir (Ilustración 9). La superposición inversa, por su parte, se presenta en tareas de “áreas sombreadas” donde se solicita calcular la medida de la cantidad de área de una parte de la configuración en estudio (Ilustración 10). Presente en actividades donde se solicita calcular áreas de regiones sombreadas con forma irregular (figura de la izquierda en la Ilustración 10), es necesario, para su desarrollo o comprensión, separar unas configuraciones de otras (semicírculo y círculo de la derecha). En este caso el área de la región sombreada se encuentra mediante sustracción de las medidas de área de las sub-configuraciones citadas.

Calcula la medida del área del cuadrado utilizando el octágono como unidad de medida

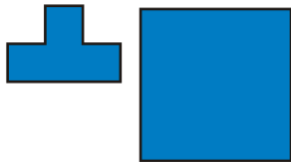


Ilustración 3.9: La superposición del octágono en el cuadrado es la operación a aplicar para calcular el área de la segunda figura a partir de la primera. Ejemplo diseñado por los autores

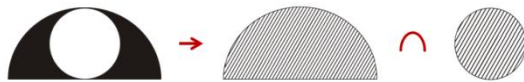


Ilustración 3.10: Aplicación de una superposición inversa para calcular el área de la región sombreada a partir de las áreas del semicírculo y círculo que le delimitan. Ejemplo diseñado por los autores

-Fraccionamiento: descomposición bidimensional de una figura en sub-figuras o sub-configuraciones. Este tipo de operaciones está presente en tareas donde se solicita transformar una figura en otra de contorno distinto e igual área, dividir la cantidad de área de una figura en partes iguales y calcular el área de figuras irregulares mediante la aplicación de fórmulas de área básicas (cuadrado, triángulo, rectángulo, entre otras). Aparece de tres formas distintas. La primera, en tareas donde se solicita dividir la superficie de la figura de partida en partes previamente determinadas o sin determinar (*fraccionamiento simple*). Es el caso de la descomposición de la superficie de un cuadrado en dos sub-figuras triangulares mediante la introducción de una de sus diagonales (Ilustración 1). La segunda, cuando la figura de inicio se da de manera fraccionada y es necesario reorganizar internamente la figura en estudio (*fraccionamiento por inhibición de trazos*); es decir, introducir un tipo de fraccionamiento distinto al inicialmente

representado. En consecuencia, es necesario inhibir trazos en la figura. Es el caso de tareas en las que se alude a que una figura tiene varios ejes de simetría y la representa con dos ejes sobre ella (Ilustración 11). Quien lee la actividad ha de verificar la afirmación realizada y, en consecuencia, debe inhibir uno de los ejes para reconocer en el otro a un eje de simetría. Por tanto, aplica una simetría axial para verificar que las dos partes en que el eje divide la figura coinciden entre sí (de esta manera se define eje de simetría en los libros estudiados) y, posteriormente, debe pasar a centrar la atención en el segundo eje y repetir el proceso.

Una figura puede tener varios ejes de simetría

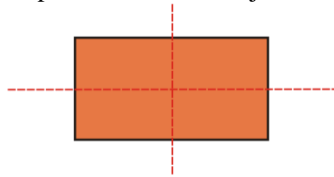


Ilustración 3.11: Fraccionamiento por inhibición de trazos. En Matemáticas 4 (Anaya, España), p. 167

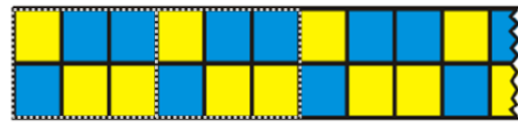


Ilustración 3.12: Re-fraccionamiento que enfatiza la discriminación de sub-configuraciones rectangulares. En Matemáticas 4 (Anaya, España), p. 170

Por último, el fraccionamiento también aparece cuando es necesario resaltar algunas de las líneas en que inicialmente está descompuesta la figura en estudio y que inducen discriminar en ella nuevas sub-figuras (*re-fraccionamiento*). Por ejemplo, la Ilustración 12 forma parte de una tarea en la que solicita discriminar alguna regularidad en la figura representada; para ello es necesario resaltar algunos trazos verticales para que se pase de destacar sub-figuras cuadradas designadas con colores azul y amarillo, a ver en la figura sub-configuraciones de forma rectangular compuestas cada una por tres cuadrados azules y tres amarillos.

Cambio figural. Para Duval (1999) el cambio figural alude al efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual y determina la naturaleza de la aprehensión operatoria. Son tres los tipos de cambio figura identificados por Duval (1995): *mereológico*, cuando la modificación pone en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo y se transforma el contorno global de la figura de inicio; *posicional*, al conservar la forma de la figura de partida y cambiar su posición en el plano; *óptico*, si la "transformación, que es realizable como un juego de lentes o de espejos, puede conservar la forma de partida o alterarla" (Duval, 1999, p.62). En la manera en que los textos escolares analizados inducen el estudio del área se observó la presencia de tres cambios figurales adicionales: *interior*, *intermitente*, *no real*. Igualmente, se identificaron transformaciones que aplicadas sobre la figura de partida transformaban el contorno global de la figura de inicio pero no a través de una reorganización de las partes que la conforman (Ilustración 7). En este sentido, hemos preferido hablar de modificaciones *reales*, en lugar de mereológicas. En lo que sigue definimos cada una de las modificaciones encontradas en los libros de texto:

-*Real*, es un tipo de modificación figural que transforma la figura de inicio en otra de contorno global distinto y en el proceso puede o no conservarse la cantidad de área. Este tipo de modificación no es exclusivo de la reubicación de partes bidimensionales de la figura de partida. Está presente en tareas donde se solicita calcular el área de una figura de forma irregular cuya fórmula es desconocida. Es necesario, pues, transformarla en otra de distinta forma, igual área y cuya fórmula de cálculo de área sea conocida. Son cambios figurales reales los mostrados en las ilustraciones 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 8.

-*Parcial*, alude a modificaciones de naturaleza óptica y posicional. En estos casos la forma y el contorno de la figura de partida permanecen invariantes. Únicamente cambia, o bien el área o su posición en el plano. Este tipo de transformación es el efecto de la aplicación de operaciones de rotación, traslación, agrandamiento o achicamiento sobre una figura.

-*Intermitente*, las modificaciones se aplican sobre unidades constituyentes de dimensión 2 de la figura de partida. La organización perceptiva de las unidades cambia momentáneamente pero la figura de partida no sufre transformación alguna. Se encuentra en tareas donde se solicita calcular mediante conteo el área de una figura que está descompuesta en sub-figuras, algunas de ellas con forma y cantidad de área iguales a la unidad asignada, otras con forma distinta y con una fracción del área de la unidad de medida: un medio, un cuarto, etc. La resolución de la actividad propuesta exige la unión de algunas de las fracciones de unidad y el conteo de las veces que la unidad seleccionada es necesaria para cubrir la superficie de la figura. En la tarea de la Ilustración 13 se induce un cambio figural intermitente, pues, para calcular el área de la figura es necesario considerar las sub-figuras triangulares y asumir en la unión de cada par de ellas a una superficie igual a la unidad de medida considerada.

Calcular el área de la siguiente figura
[Como unidad de área se asume uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadrículado en se representa la figura]

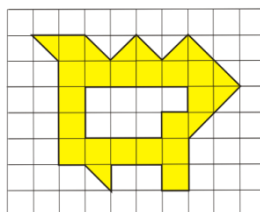


Ilustración 3.13: Modificación intermitente que permite calcular el área de una figura. En Matemáticas 5 (Santillana, España), p. 190

-*Intrínseco*, cuando la organización perceptiva de la figura de partida se transforma a nivel interno bajo la introducción o inhibición de trazos. Es decir, no se aplica cambios en los contornos sobre ninguna de las unidades 2D constituyentes o sub-figuras o sub-configuraciones o a la figura inicial. Se identifica en tareas donde se debe calcular el área de una figura y es necesario fraccionarla en sub-figuras de forma y área igual a la unidad de medida asignada. También, cuando hay que discriminar ejes de simetría o figuras simétricas y cuando se solicita descomponer por fraccionamiento una figura dada.

-*No real*, alude a la discriminación de sub-configuraciones en la figura de partida y a su correspondiente comparación. Todas las sub-configuraciones relevantes están dadas en la figura inicial y, en consecuencia, no es necesario añadir o transformar nada en ella. Es el caso de la actividad presentada en la Ilustración 14, donde se solicita comparar dos sub-figuras a partir de sus áreas.

En la siguiente figura compara las áreas de los dos rectángulos sombreados.

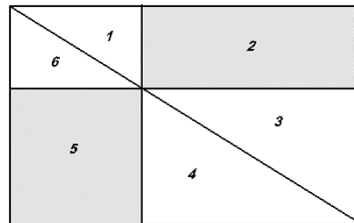


Ilustración 3.14: Transformación no real que permite comparar las superficies de sub-figuras de forma diferente. Figura utilizado en Duval (1998) para definir la aprehensión operatoria de las figuras

Para el desarrollo de esta tarea no es posible comparar las dos sub-figuras en cuestión de manera directa (rectángulos 2 y 5), es necesario hacerlo de forma indirecta. Así, la atención ha de recaer tanto en los triángulos 123 y 456, como en los pentágonos 64 y 13. Posteriormente se debe aplicar perceptivamente una sustracción entre las superficies del primero de los triángulos y el primero de los pentágonos y repetir el proceso para el segundo de los triángulos y de los pentágonos.

Cambio dimensional: las figuras bidimensionales imponen, según la primera de las leyes gestálticas de organización y reconocimiento perceptivo de las formas, una prioridad en la discriminación de unidades 2D sobre unidades 1D y 0D (Duval, 2004). Esto quiere decir que sobre una figura bidimensional, en primera instancia, se reconoce una forma de esa misma dimensión y sólo en segundo lugar, se pasan a discriminar los lados que la constituyen; además, en este proceso, se perciben como bordes no separables de la figura (Duval, 2004). “La descomposición por deconstrucción dimensional se refiere al acto de vencer esta particularidad de las figuras bidimensionales y consiste en descomponer la figura en unidades figúrales de dimensión inferior a la figura de partida” (Duval, 2003, p.20). Son tres las clases de cambio dimensional presentes en los libros de texto analizados:

-*Fijo*: si bien superficie y unidades figúrales de dimensión 1 y 0 son asumidas una y otras como piezas constitutivas de la figura. Las segundas tienden a ser reconocidas como elementos fijos, estáticos, no separables de la primera. A manera de ejemplo, están las actividades donde se solicita calcular el área de figuras elementales en las que se representan sobre la figura números que aluden a la longitud de la base y de la altura. Basta con pasar de centrar la atención en la figura como una gestalt a hacerlo en los lados de la figura.

-*Operatorio*: por lo menos una de las unidades de dimensión 1 o 0 que constituyen la figura de inicio es discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual forma parte. Además, es asumida como una unidad constitutiva de naturaleza dinámica sobre la cual se aplican operaciones de naturaleza unidimensional o cero dimensional: dilataciones, contracciones, sustracciones (quitar a un segmento otro segmento), rotaciones, traslaciones. En caso de que la modificación operatoria de una figura esté caracterizada por la dilatación o contracción de los lados de la figura, esta debe ser proporcional entre sí obteniéndose así una figura semejante a la inicial. Es el caso de la Ilustración 15 donde se solicita aplicar un agrandamiento sobre una figura dada a partir de la dilatación o contracción de sus lados. Este cambio figural también puede producirse por un achicamiento de la figura a partir de la contracción de sus lados o cuando la traslación o rotación de una figura se realiza bajo la aplicación de traslaciones o rotaciones sobre sus vértices (operación cero dimensional).

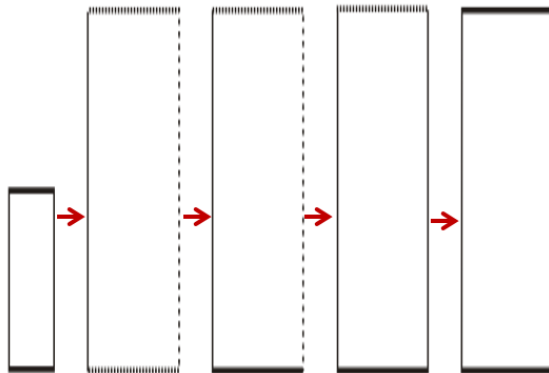


Ilustración 3.15: Agrandamiento de un rectángulo mediante la dilatación de sus lados. Ejemplo diseñado por los autores

Aprende

Así calculamos el área de este trapecio:



ÁREA ZONA AZUL $\rightarrow \frac{7 \times 20}{2} = 70 \text{ cm}^2$

ÁREA ZONA ROJA $\rightarrow 22 \times 20 = 440 \text{ cm}^2$

ÁREA ZONA AMARILLA $\rightarrow \frac{19 \times 20}{2} = 190 \text{ cm}^2$

ÁREA TOTAL $\rightarrow 70 + 440 + 190 = 700 \text{ cm}^2$

Ilustración 3.16: Cambio dimensional por desdoblamiento. En Matemáticas 5 (Anaya, España), p.183

-*Desdoblamiento*: por lo menos una de las unidades de dimensión 1 que constituyen la figura de partida es discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual forma parte, a la vez que es asumida como un elemento constitutivo en dos o más sub-figuras o sub-configuraciones distintas presentes en la figura de inicio y sobre las cuales se reflexiona. Sucede en tareas donde se pide calcular el área de figuras irregulares (Ilustración 16) y es necesario descomponer su superficie en partes cuyas formas permitan aplicar fórmulas de área previamente establecidas (dos triángulos y un rectángulo). Algunas de las sub-figuras en que ha de dividirse la figura de inicio comparten entre sí unidades de dimensión 1 que han de ser consideradas en la aplicación de las fórmulas. Es el caso del segmento de longitud 20 cm que debe ser asumido simultáneamente como la altura de las tres figuras a considerar en el desarrollo de la tarea: los triángulos azul y amarillo y el rectángulo rojo.

Cambio de focalización bidimensional. Son las distintas maneras en que sobre la figura en estudio se aplican cambios en la manera de ver en ella centrados en unidades visuales 2D. Es decir, se pasa de centrar la atención en las características globales 2D de la figura

de partida a hacerlo en sus partes 2D constituyentes (sub-figuras o sub-configuraciones). En caso de haber varias figuras de partida, se pasa de centrar la atención de una a otra o considerar simultáneamente la forma y contorno de la figura de partida y la de la figura de llegada. Son tres las maneras en que en los libros de texto se aplican cambios de focalización 2D:

-*Configural*, alude a un proceso de comparación entre dos o más figuras a partir de sus características globales, sean entre la figura de partida y de llegada o entre varias figuras de partida. El proceso de comparación guía la manera de ver a considerar en el desarrollo o comprensión de la actividad propuesta. Se usa en tareas donde hay que reconfigurar la figura de partida en otra de características globales distintas. La forma de la figura de llegada guía el proceso de transformación y se alude a ella figural o discursivamente. En la Ilustración 17 se muestra una tarea donde se solicita a partir de una figura dada (la amarilla) “armar” otra figura (la anaranjada) semejante y de área mayor. Por ello, es necesario, primero, generar mental o físicamente copias de una de ellas (figura amarilla) y, luego, organizarlas para armar la figura pedida (figura anaranjada). La comparación de las características perceptivas globales (tanto de forma como de contorno) de la primera de las figuras con respecto a las de la segunda guía el proceso de resolución de la tarea propuesta.

Recorta cuatro fichas como la amarilla y arma la figura anaranjada.

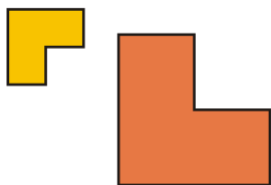


Ilustración 3.17: Cambio de focalización configural. En *Fórmula 2* (Voluntad, Colombia), p.118

Busca parejas de figuras simétricas, copia y dibuja el eje de simetría en cada caso.

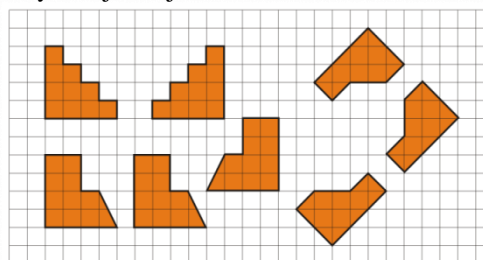


Ilustración 3.18: Cambio de focalización configural. En *Matemáticas 4* (Anaya, España), p.169

Igualmente este tipo de cambio de focalización está presente en tareas donde se solicita, a partir de varias figuras “armar” una nueva cuya área es igual a la suma de las áreas de las figuras inicialmente dadas (Ilustración 4). Por ejemplo, en la Ilustración 18 se pide discriminar si dos o más figuras son simétricas entre sí. La atención recae en comparar, según la orientación, sentido y cantidad de superficie las dos figuras en estudio. Basta, pues, con centrar la atención en aspectos globales de las figuras en cuestión.

-*Intrafigural*, en este caso se dejan en un segundo plano las características globales de la figura de partida. La atención recae en sus unidades 2D constituyentes, sub-figuras o sub-configuraciones, sean en las representadas en la figura de inicio o en aquellas que el lector debe introducir en el proceso de desarrollo o comprensión de la actividad planteada. Queda caracterizado tanto en tareas donde se solicita descomponer por fraccionamiento una figura como en aquellas donde se pide identificar si una figura es simétrica o se

solicita discriminar en ella algún eje de simetría (Ilustración 11). Así mismo esta clase de cambio de focalización se observa al aplicar una reconfiguración por ensamblaje de partes (Ilustración 3) o un re-fraccionamiento (Ilustración 12) en la figura de inicio o cuando basta con centrar la atención en las partes 2D en que una figura está descompuesta (Ilustración 16).

-*Mixto*, cuando el inicio de la tarea propuesta exige, de entrada, considerar simultáneamente las características perceptivas globales e internas de la figura de partida y de llegada. La comparación se realiza: 1) a través de las partes 2D constituyentes de las dos representaciones (Ilustración 19 o 2) o considerando únicamente la forma de la figura de llegada (determinada figuralmente o en lengua natural) y en la de partida sus partes internas 2D (Ilustración 20).

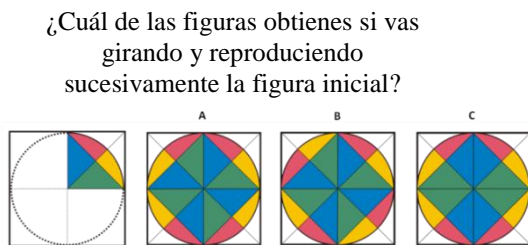


Ilustración 3.19: Cambio de focalización mixto. En Matemáticas 4 (Anaya, España), p. 163

Arma las siguientes figuras con el tangram de la página 210



Ilustración 3.20: Cambio de focalización mixto. En Fórmula 2 (Voluntad, España), p. 118

Este cambio de focalización también está presente en tareas donde se solicita determinar el área de una figura que no ha sido fraccionada y se da otra figura que representa la unidad de medida de área. Es el caso de las figuras representadas en la Ilustración 17 y donde la consigna solicita averiguar por recubrimiento cuál es el área de la figura anaranjada tomando como unidad de medida a la figura amarilla. En este sentido, quien resuelve la actividad planteada debe no solo comparar globalmente las dos figuras en cuestión sino que además es necesario considerar las características perceptuales de las sub-figuras que ha ido “introduciendo” en la superficie de la figura anaranjada y de las sub-figuras que faltan por introducir.

Flujo visual. Alude a la secuencia visual aplicada en el desarrollo de las actividades propuestas en los textos escolares; es decir, a la manera como en el desarrollo de la tarea propuesta se organizan los distintos cambios (figural, dimensional, focalización 2D) y operaciones considerados en el desarrollo o comprensión de la actividad planteada. Para que haya flujo visual es necesario la presencia de al menos dos de los elementos antes citados, o uno de ellos y la aplicación de una operación. Son dos los flujos visuales discriminados:

-*Lineal*, cuando la atención recae en una de las partes constituyentes (0D, 1D, 2D) de la configuración de partida y, a continuación, se aplica sobre ella un cambio en la manera de ver o una operación. En este caso las características perceptivas de la figura de partida

son puestas en segundo plano y la atención recae únicamente en las características perceptivas de la parte de la configuración privilegiada. A manera de ejemplo, en la Ilustración 21 se solicita, en la figura de la izquierda, encontrar un cuadrado. En consecuencia, es necesario aplicar un cambio de focalización (pasar de centrar la atención en las características globales de la configuración de partida: un triángulo grande formado por cuatro triángulos pequeños o un triángulo pequeño dentro de un triángulo grande, a hacerlo en dos de sus sub-figuras). Luego se requiere aplicar sobre las partes focalizadas una operación (reconfiguración por ensamblaje de partes), generando así una nueva figura, y sobre esta, aplicar una nueva operación (rotación) para identificar que la figura encontrada es en realidad un cuadrado. En el proceso de búsqueda no es necesario considerar las características perceptivas de la figura de inicio, la atención recae en su totalidad en las partes 2D de la figura.

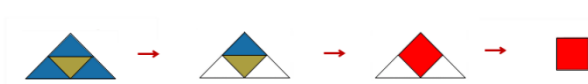


Ilustración 3.21: Flujo lineal. Parte del procedimiento de resolución de tarea presentada en Matemáticas 4 (Anaya, España), p, 157

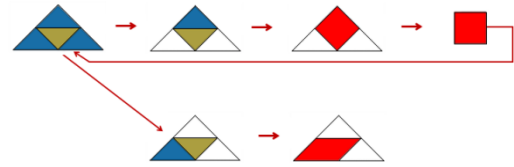


Ilustración 3.22: Flujo en circuito. Parte del procedimiento de resolución de tarea presentada en Matemáticas 4 (Anaya, España), p, 157

-Circuito, alude al hecho de que en algún momento del flujo visual es necesario apoyarse en más de una ocasión en alguna(s) de las características perceptivas de la figura de partida. En consecuencia, es indispensable retornar la configuración de inicio. Sucede cuando:

- de manera similar que en el flujo lineal, la atención recae en una de las partes constituyentes de la configuración de partida y se aplica en ella un cambio en la manera de ver o una operación. Además, a continuación, se consideran las características perceptivas de la figura de inicio y se inicia un nuevo flujo de naturaleza lineal;
- es indispensable tener en cuenta diferentes partes de la configuración inicial (unidades 0D, 1D, sub-figuras, sub-configuraciones) y se aplican sobre algunas de ellas, no en todas, cambios en la manera de ver u operaciones.

En la Ilustración 22 se ejemplifica el flujo visual exigido en el desarrollo de una tarea donde se pide discriminar en la configuración de la parte superior izquierda un cuadrado y un romboide. Una vez encontrada la primera de las figuras es necesario considerar de nuevo las características perceptuales de la figura de partida para dar inicio a la búsqueda de la segunda figura.

En la tabla 3.4 se presentan sintéticamente las cinco categorías previamente descritas, así como el aspecto de la visualización que caracterizan, los elementos que les constituyen y el tipo de aprehensión en el que influyen.

Categorías de análisis	Aporte	Elementos	Aprehensión
<i>Operación</i>	Determina la naturaleza de los cambios figurales introducidos e inducen la comprensión de propiedades y conceptos de área.	Reconfiguración, configuración, traslación, rotación, anamorfosis, cuadratura, simetría axial, superposición y fraccionamiento.	Operatoria.
<i>Cambio figural</i>	Caracteriza la aprehensión operatoria.	Real, parcial, intermitente, intrínseco y no real.	Operatoria.
<i>Cambio dimensional</i>	Promueve la deconstrucción dimensional de las formas.	Fijo, operatorio y desdoblamiento.	Discursiva.
<i>Cambio de focalización 2D</i>	Suscita cambios en la visualización centrados en unidades visuales de naturaleza bidimensional.	Configural, intrafigural y mixto.	Operatoria y perceptual.
<i>Flujo</i>	Establece el orden y sentido del tipo de visualización aplicado.	Lineal y en circuito.	Operatoria y discursiva.

Tabla 3.4: Categorías de análisis: rol, elementos y aprehensiones que les caracterizan

Categoría 2: Funciones visuales. Son variadas las funciones que se le ha asignado a la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta actividad cognitiva permite dar miradas sinópticas o realizar verificaciones subjetivas (Duval, 1998a) o suscitar la exploración heurística de situaciones complejas (Duval, 1998a; Arcavi, 2003). Igual, puede ser asumida como un elemento legítimo de prueba matemática (Davis, 1993; Arcavi, 2003) o como una actividad cognitiva que permite extraer datos y relaciones matemáticas (Richard, 2004) o que puede generar un sentimiento de auto-prueba e inmediatez (Fischbein, 1987, citado por Arcavi, 2003, p. 220). La visualización, pues, permite ilustrar proposiciones, relaciones e ideas; suscita elementos matemáticos y/o preguntas a tener en cuenta en el desarrollo de una tarea; ayuda a discernir entre las distintas maneras de proceder aquellas que habrán de tenerse en cuenta en el desarrollo de un procedimiento; inspira bosquejos globales de estrategias que van más allá de lo meramente procedimental y, finalmente, ajusta nuestras 'malas intuiciones' para poder armonizarlas con el razonamiento. En los capítulos de los textos escolares que tratan el tema del área que fueron analizados, se identificaron tres funciones que desempeña la visualización de naturaleza: heurística, inductiva e informativa. A continuación, describimos y ejemplificamos en detalle cada una de ellas:

Función heurística. Esta función se cumple cuando la visualización, a partir de la información estrictamente perceptiva de la figura, genera ideas o suscita (o posibilita) maneras de proceder que apoyan o guían la comprensión del tema que se expone o de la tarea propuesta y su desarrollo. Según el apoyo heurístico que suscita la visualización en

las tareas que se presentan en los textos escolares esta función puede darse de cuatro maneras distintas:

- *Instantánea*: asociada con las características perceptivas de la figura en estudio y los factores de visibilidad asociados a ella. Unos y otros permiten identificar de golpe la manera de proceder en el desarrollo o comprensión de la tarea propuesta. Es el caso de la actividad presentada en la ilustración 23. En ella se solicita calcular la medida del área de una figura, pero, su forma no permite aplicar ninguna de las fórmulas que previamente han sido objeto de reflexión en el manual escolar (fórmulas de área para figuras cuadradas, rectangulares, triangulares y romboidales, entre otras). En consecuencia, es necesario, transformarla en otra figura cuya forma sí lo permita. Quien resuelve esta tarea no necesita realizar exploraciones sobre la figura para determinar ni la forma de la figura de llegada, ni la naturaleza de las operaciones a aplicar, por el contrario, es a través de las características del contorno, junto con la presencia de ciertos segmentos punteados sobre la figura lo que suscita la aplicación de rotaciones sobre las partes semicirculares que destacan en la figura, para su transformación en una figura rectangular con igual cantidad de área.

Determinar el área de la siguiente figura,

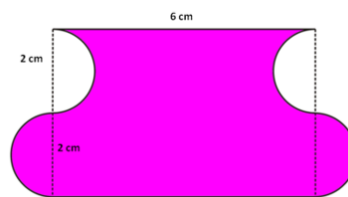


Ilustración 3.23: Función visual instantánea. En Matemáticas 1E.S.O (Santillana, España), p. 226

-*Exploratoria*: cuando las características perceptivas de la figura en estudio no privilegian ningún tipo de transformación que conduzca a la resolución de la problemática planteada y es indispensable operar sobre la figura para llegar a una solución de la problemática expuesta. En la ilustración 24 se muestra una tarea donde es necesario explorar perceptivamente la figura en cuestión, pero, en este caso, la figura no guía la visualización a considerar, por el contrario, quien resuelve la tarea debe realizar búsquedas o aplicar transformaciones al azar sobre ella hasta dar con la manera de ver que suscite la respuesta al cuestionamiento propuesto.

¿Qué fracción del área del rombo ocupa la zona coloreada?



Ilustración 3.24: Función visual exploratoria. En Matemáticas 1E.S.O (Santillana, España), p. 227

-*Verificativa*: cuando permite comprobar de manera subjetiva que los argumentos o afirmaciones que van presentándose en el desarrollo de una tarea son válidos; así mismo, cuando permite comprobar que la tarea ha quedado adecuadamente desarrollada. En la actividad abajo presentada (ilustración 25) es necesario recurrir a las características perceptivas de dos figuras para comprender por qué es posible calcular el área del rombo mediante la multiplicación de las longitudes de una de sus diagonales y la mitad de la otra.

Para calcular el área de un rombo, se multiplica una diagonal por la mitad de la otra

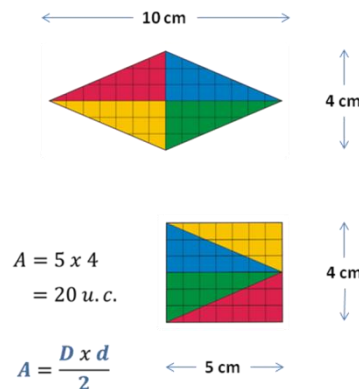


Ilustración 3.25: Función verificativa. En Matemáticas 5 (Anaya, España), p. 181

-*Sintética*: cuando permite ignorar, resumir o esquematizar las consignas, descripciones, explicaciones o aclaraciones en lengua natural que acompañan a la figura en estudio. En la ilustración 26 se alude a la transformación de una figura en otra, pero, para el lector no es necesario leer la consigna para identificar la acción aplicada.

Con un rombo, hacemos un rectángulo

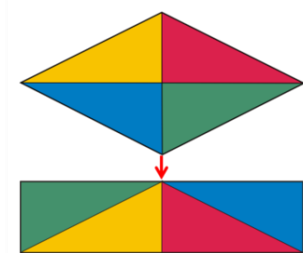


Ilustración 3.26: Función sintética. En Matemáticas 3 (Anaya, España), p. 183

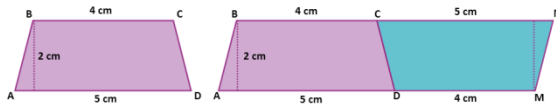
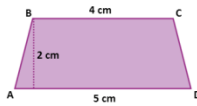
Función inductiva: Se da esta función cuando al manejar la figura pertinente para realizar la tarea es necesario considerar información ajena a las características perceptivas de la figura de partida; son estos, no la figura, los que dirigen la forma de visualización a considerar. Esta función aparece en tareas donde el libro de texto guía visualmente al lector, sea a través del despliegue de procedimientos (función inductiva por despliegue de procedimientos. Ilustración 27) o de la enunciación en la consigna de la acción figural a aplicar (función inductiva por enunciación. Ilustración 28) o a través de la alusión a definiciones previamente tratadas. Es el caso de tareas donde se alude a calcular la medida del área de una figura o se pide verificar si una figura es simétrica y el libro de texto, ha

introducido previamente la fórmula o definición a considerar. Quien resuelve la problemática planteada ha de considerar la definición presentada pues en ella se determina la manera de ver a privilegiar.

Área del trapecio

Ejemplo. ¿Cuál es el área de este trapecio?

Para hallar el área del trapecio ABCD, colocamos un trapecio idéntico, pero invertido, y obtenemos el romboide de vértices ABNM.



La base del romboide es la suma de las bases del trapecio; su medida es 5 cm + 4 cm, y su altura es la del trapecio, 2 cm.

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Área del romboide} = \frac{1}{2} \cdot [5 + 4] \cdot 2 = 9 \text{ cm}^2$$

El área del trapecio es igual a la mitad de la suma de sus bases B + b por su altura h, expresadas en la misma unidad.

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

5 Copia estos polígonos y busca la manera de dividirlos de forma que todas las partes que se obtengan sean paralelogramos.

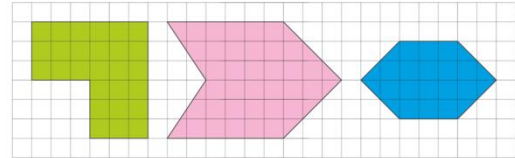
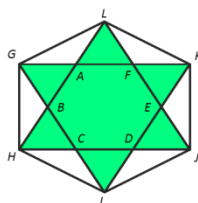


Ilustración 3.27: Función inductiva por despliegue de procedimientos. En Matemáticas 1ESO (SM, España), p. 206

Ilustración 3.28: Función inductiva por enunciación. Matemáticas 3 (Anaya, España), p. 181

Igualmente, la función inductiva está presente en actividades propuestas por el texto para ser desarrolladas por el lector en las que se presenta parcialmente el proceso a considerar. Esto sucede cuando se representa la figura de partida y la de llegada descompuestas en diferentes partes y es necesario discriminar la operación aplicada o el proceso seguido para realizar la transformación adecuada (ilustración 25 y 26). También se presenta esta función cuando se plantea una problemática donde el lector ha de seguir paso a paso indicaciones dadas por el texto para darle respuesta (función inductiva por pautas. Ilustración 29) o sencillamente cuando el proceso de resolución es iniciado por el manual (función inductiva por despliegue parcial de procedimiento. Ilustración 30) y el lector debe continuar el proceso.

88. El lado del hexágono regular ABCDEF mide 8 cm y su apotema 6,9 cm.



- a) ¿Cuál es el área del hexágono ABCDEF?
- b) ¿Y el área de la figura coloreada?
- c) ¿Cuál será el área del hexágono GHIJKL?
- d) ¿Qué fracción del hexágono GHIJKL representa el área de la figura coloreada?

Ilustración 3.29: Función inductiva por pautas. En Matemáticas 1E.S.O (Santillana, España), p. 225

Copia y completa para que las figuras resultantes sean simétricas respecto al eje que se señala

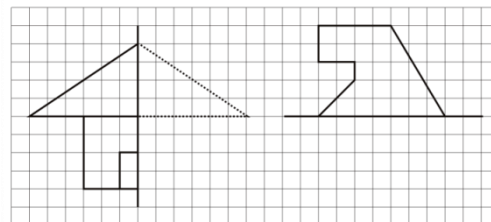


Ilustración 3.30: Función inductiva por despliegue parcial de procedimiento. En Matemáticas 4 (Anaya, España), p. 167

Función informativa: se cumple cuando la figura asume estatus de objeto (Duval, 2003) y de manera espontánea, se introduce sobre ella acciones físicas de medida o se reconoce

en ella información o datos adicionales y complementarios (longitudes, formas, unidades de medida, etc.) a los aportados en la consigna y que resultan relevantes para la comprensión o desarrollo de la tarea propuesta. Es el caso de las tareas presentadas en las ilustración 31 donde se solicita calcular la medida del área de dos figuras mediante la aplicación de fórmulas, pero, el manual, no alude en la consigna, ni a sus formas, ni a las medidas de uno de los lados en la primera de las figuras, ni a la base y altura en la segunda. En consecuencia, quien intenta resolver la tarea debe preceptivamente extraer estos datos de las representaciones dadas y de los índices que les acompañan (función informativa por extracción de datos).

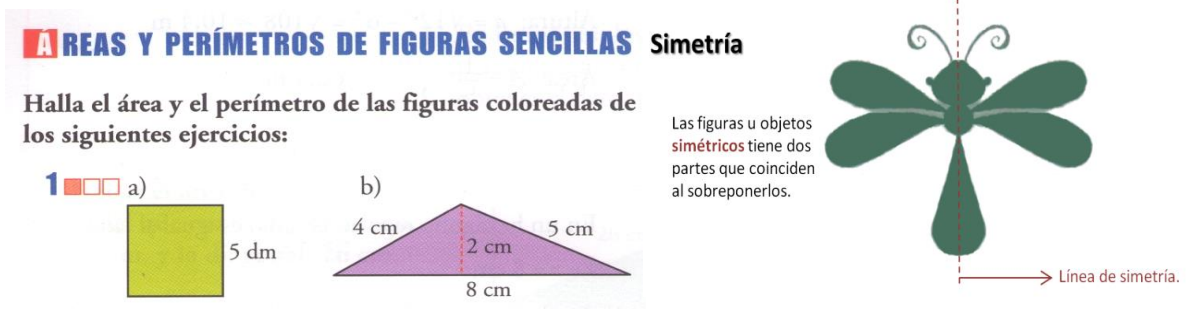


Ilustración 3.31: Función informativa por extracción de datos. En Matemáticas 1 (Anaya, España), p. 250

Ilustración 3.32: Función informativa por alusión a objetos o situaciones físicas. En Fórmulas 2. Matemáticas (Voluntad, Colombia), p. 92

Finalmente, la función informativa también está presente en tareas donde la figura de inicio alude a objetos o situaciones cotidianas (función informativa por alusión a objetos o situaciones cotidianas). De esta forma las acciones que desempeña el objeto representado o los rasgos físicos que le caracterizan o situación aludida determinan aspectos visuales a considerar. En la ilustración 32, por ejemplo, se introduce la definición de simetría mediante una figura que representa una libélula. En la consigna se induce al lector a sobreponer una parte de la figura en la otra y verificar su coincidencia, pero, no se detalla la forma a través de la cual es posible tal superposición. La acción que caracteriza a una libélula es la de volar, al hacerlo cada pareja de sus alas tienden a sobreponerse entre sí. De esta forma, el doblar una de las partes para hacerla coincidir sobre la otra (rotación por fuera del plano) se constituye en la manera como el texto tiende a suscitar la superposición señalada.

Categoría 3: Elementos generadores de control y clases de control visual asociadas al estudio del área. Investigaciones como las realizadas por Mesa (2004, 2010) han mostrado que los libros de texto introducen estrategias que guían las decisiones a tener en cuenta para decidir si una acción es relevante cuando se resuelve un problema, para determinar que una respuesta ha sido encontrada y para determinar que la respuesta es correcta, es decir, existen elementos y estrategias que en términos de Balacheff (1998) generan control sobre las maneras de proceder en el desarrollo de una actividad matemática.

En tal sentido considerar el papel que desempeña la visualización en los textos escolares en el aprendizaje de cualquier objeto matemático, en particular el área, exige tener en cuenta en primera instancia, las maneras cómo estos materiales didácticos ejercen control sobre las formas de ver que se movilizan (control visual), pues, es a través de su discriminación que es posible identificarlas en el desarrollo de las tareas propuestas y determinar, entre distintas maneras de ver posibles, las más probables. Además se debe considerar la naturaleza de las clases de control visual que se generan en el desarrollo o comprensión de las tareas propuestas en los libros de texto. En este sentido, esta investigación, pone en evidencia, que según el número de elementos de control presentes en las actividades propuestas en los textos escolares, así como de la cantidad de visualizaciones a privilegiar por ellos, es posible distinguir tipos de control visual de naturaleza distinta.

Estructura de control visual. Son cuatro los elementos generadores de control visual encontrados en los libros de texto. Para su definición se considera tanto el lugar de donde proviene el control ejercido, como los elementos o estrategias empleados para guiar al lector en el tipo de visualización a tener en cuenta en la comprensión y/o desarrollo de tareas propias del área. En lo que sigue describimos cada uno de ellos

Procedimiento: Se alude al tipo de visualización “mostrado” en una tarea y el control es ejercido de forma directa, por réplica o por referencia.

En el control de forma directa la tarea es planteada y resuelta en el propio libro de texto, de esta forma se evidencia en el despliegue del procedimiento la secuencia visual privilegiada. Aparece este tipo de control cuando una tarea es propuesta y resuelta en el texto escolar, cuando se divide un problema en otros de menor complejidad que hay que resolver en el orden establecido o cuando la tarea está propuesta para que se sigan ciertas indicaciones dadas en las que se orienta el procedimiento enunciado a usar. Este último es el caso de tareas de construcción de figuras. También se contemplan dentro de este tipo de control las tareas en las que el libro presenta parcialmente el procedimiento a seguir (ilustración 30). Asimismo está presente cuando se representa junto a la consigna de la tarea tanto la figura de partida como la figura de llegada, ambas descompuestas en los mismos tipos de sub-figuras. En este caso basta con comparar entre sí las partes internas de cada una de las figuras para identificar la manera de transformar una en otra.

En el procedimiento por réplica la tarea propuesta por el libro de texto no señala el tipo de desarrollo que se debe realizar, quien resuelve la tarea debe revisar tareas previas resueltas en el libro de texto para reproducirlas. Para considerar la réplica como un elemento de control debe tenerse en cuenta que la manera de “replicar” debe aparecer previamente a la tarea que se debe resolver. En la siguiente tarea (ilustración 33) está presente el procedimiento como réplica, puesto que de forma paralela en la propia tarea se presentan figuras que, si bien, no determinan en su totalidad la secuencia visual a considerar, sí determinan aspectos particulares.

Observa la figura. Marisa dice que aquí ve dos triángulos, dos cuadriláteros y dos pentágonos. ¿Los ves tú? Dibújalos por separado.

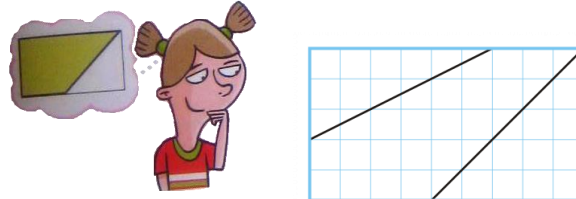


Ilustración 3.33: Procedimiento por replica. En Matemáticas 3 (Anaya, España), p. 169

La réplica también se encuentra presente cuando de manera explícita en la consigna se alude a otra tarea que estructuralmente es distinta o cuando en la tarea propuesta se introduce el mismo tipo de visualización mostrado, evidenciado o sugerido en el desarrollo de tareas previas. En el segundo caso, aunque no se hace referencia explícita a proceder visualmente de igual forma que en tareas anteriormente resueltas, la similitud entre las características de las tareas en cuestión (igual organización perceptiva de la figura, mismo tipo de pregunta, igual procedimiento a considerar) son los elementos que implícitamente condicionan al lector.

El procedimiento por referencia alude a que de manera explícita en la consigna de la tarea, en lengua natural o figuralmente se designan ciertas acciones a aplicar sobre la figura de inicio y/o a los elementos de la figura a considerar, lo que suscita una manera de ver a privilegiar. En lengua natural se puede aludir a *acciones* que determinan la operación a aplicar sobre la figura, entre otros: doblar, completar, ampliar, trazar, armar, construir, dividir, descomponer,...), a *características* de la figura de llegada, por ejemplo, forma de la figura de llegada (designada en lenguaje verbal o figuralmente), partes o número de partes en que se ha de descomponer la figura de partida o unidades bidimensionales, unidimensionales o cero dimensionales que se deben considerar (número de trazos a introducir para fraccionar una figura, número de sub-configuraciones existentes en una configuración dada), la medida de la cantidad de área de la figura de llegada (número de cuadritos, medios cuadrados, 7 cm^2 , área= ...■) o se realizan ciertas sugerencias que señalan la forma de ver las figuras en cuestión.

La ilustración 28 ejemplifica el procedimiento por referencia como elemento de control visual. Son dos los elementos que lo caracterizan, por un lado, en la consigna se hace explícito la acción a considerar (“dividirlos”), por otro, se caracteriza de entrada las partes en que se han de dividir las figuras en cuestión (“sean paralelogramos”). Uno y otro aspecto determinan la forma de ver a considerar en el desarrollo de la tarea propuesta.

Contenido. El contenido hace referencia a la visualización, que explícita o implícitamente, subyace en el contenido a tratar, por ejemplo cuando se hace 1) alusión a las definiciones de objetos matemáticos, fórmulas o propiedades que el desarrollo de la tarea propuesta exige aplicar o 2) se alude, bien en la consigna de la tarea propuesta, bien en el proceso de desarrollo mostrado, a definiciones, propiedades o relaciones de otros objetos distintos a los objetos métricos en estudio que han sido previamente estudiados

en el libro de texto y que deben considerarse para discriminar instancias particulares de la secuencia visual a privilegiar. Es el caso de las definiciones, entre otras, del área como medida directa y de unidad de medida estándar. En el primer caso, la figura medida tiende a ser vista como una composición de partes de igual forma y tamaño, donde su organización global es ignorada. En el segundo, se induce una visualización de naturaleza estática: la figura que representa la unidad estándar no tiene poder de transformación, por ejemplo, 1 cm^2 tiende a ser asumido exclusivamente como un cuadrado de lados 1 cm , excluyéndose cualquier posibilidad de ser representado a través de figuras de forma distinta (1 cm^2 de forma triangular o rectangular).

Visibilidad. La introducción de ciertos elementos en la figura o la consideración de algunas de sus características privilegian u obstaculizan unas formas de ver en detrimento de otras. Son varios los elementos introducidos en los libros de texto que afectan positivamente a la visibilidad en tareas de áreas: factores de visibilidad (Padilla, 1992; Duval, 1995), elementos de contraste e índices.

Los factores de visibilidad destacan el atributo de forma en una configuración y suscitan la aplicación de operaciones particulares. Por ejemplo, son factores que privilegian la visibilidad (Padilla, 1992; Duval, 1995) el representar la figura de partida fraccionada en las partes a considerar, que las sub-figuras claves sean convexas, que haya complementariedad entre las formas de las partes a reorganizar y que una misma sub-figura no deba ser considerada simultáneamente en dos configuraciones que se comparan entre sí (obstáculo de desdoblamiento). Igualmente se destacan como factores de visibilidad el grado de inclinación de una figura o sub-figura (Duval, 1995; Pellegrino y Kail, 1982 y Shepard y Metzler, 1971, citados en Duval, 1999, pp. 154 y 165), la ubicación del centro de homotecia (Duval, 1995), las características del contorno de la figura en estudio (Padilla, 1992; Duval, 1995; Marmolejo, 2007) y el grado de inclinación del eje de simetría de una figura simétrica (Rock, 1985, p.127).

Los elementos de contraste son estímulos que destacan atributos de color y textura en la configuración de partida, es el caso del *contraste en tono y grosor* entre las unidades de dimensión 1 que conforman el contorno de la figura en estudio y las que constituyen el fondo cuadrulado sobre el cual se representa la figura. Esta particularidad suscita reconocer una figura que se encuentra representada en un fondo cuadrulado como un todo global y no ver en ella una composición de cuadrados (Marmolejo, 2007). En las figuras propuestas en las ilustraciones 34 y 35 se puede discriminar el papel que desempeña en uno y otro caso la presencia o no de este tipo de contraste. En el primer caso las figuras resaltadas en un tono oscuro tienden espontáneamente a ser discriminadas como la unión de un gran número de pequeños cuadrados. En este caso, figura y fondo se funden en un mismo objeto, el fondo no es un soporte, sino una parte de la figura. En la segunda de las ilustraciones destacan las figuras como si estuviesen “encima” del fondo. Perceptivamente, en este caso, no hay una fusión entre la figura y el fondo.

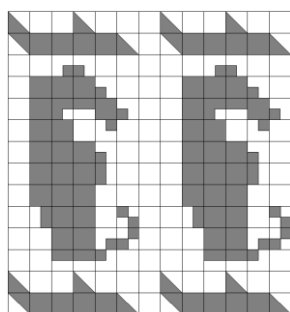


Ilustración 3.34: ausencia de contraste en tono y grosor entre los segmentos que constituyen el contorno de la figura y los que conforman el fondo cuadrículado.

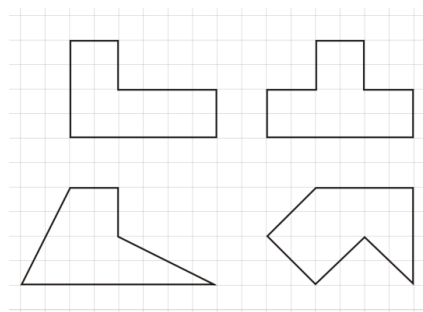


Ilustración 3.35: contraste de tono y grosor entre los segmentos que constituyen el contorno de la figura y los que conforman el fondo cuadrículado.

Otro elemento de contraste es el *color* que resalta ciertas partes de una figura. También destaca como elemento de contraste el *punteado*, es decir, cuando se introducen trazos discontinuos en la figura para centrar la atención, por ejemplo, en posibles fraccionamientos o en los ejes de simetría que sobresalen respecto de la figura en estudio, por tanto, se puede ver a la “vez” tanto las partes como el todo (ilustración 36).

Figura con eje de simetría.
Una figura tiene cuando se puede doblar por la mitad y las dos mitades coinciden.

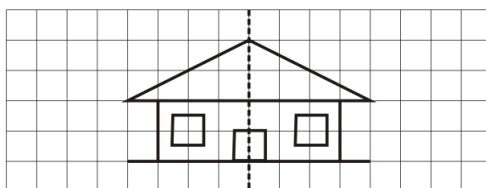


Ilustración 3.36: Punteado. En Matemáticas 4 (Anaya, España), p. 170

Finalmente se destaca como un elemento que genera una buena visibilidad en las figuras propuestas en los textos, la introducción de elementos suplementarios que resaltan unidades a considerar, o que guían la manera de ver (índices), por ejemplo, letras, segmentos continuos, puntos sobredimensionados, flechas curvas y rectas, trazos, nombres de las unidades a las que se alude, valor de la medida de unidad (por ejemplo, 5 cm) y espacios en blanco.

Iconismo. La figura representa o alude a un objeto físico o a una acción física. Las características del objeto o de la acción planteada guían la manera de proceder visualmente.

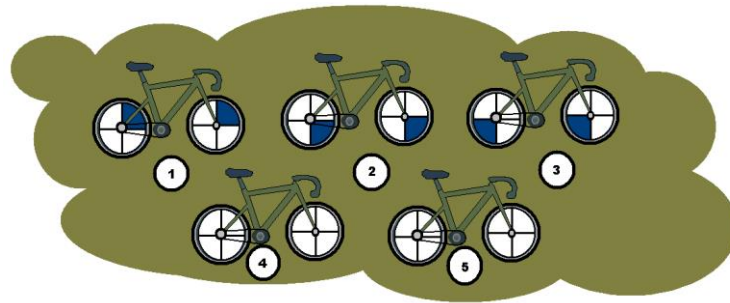


Ilustración 3.37: Iconismo. En Matemáticas 2 (Anaya, España), p. 172

Este elemento de control se refleja en la tarea presentada en la ilustración 37. En este caso el manual escolar suscita discriminar y completar una secuencia figural, para lo que se introducen cinco figuras isométricas entre sí. Quien resuelve la tarea debe centrar su atención en las tres primeras y discriminar la rotación como la operación figural a privilegiar. Las figuras introducidas en el texto representan en cada caso a un mismo objeto físico, la acción que lo caracteriza determina el tipo de secuencia en cuestión: las bicicletas tienden a desplazarse hacia adelante mediante la rotación de sus llantas, de esta forma el punto de rotación es interno a ella y está determinado por el buje de la llanta. Considerar esta particularidad introducida por las particularidades inmersas al objeto que representan las figuras en estudio es la manera como el libro de texto guía al lector en la forma de ver a tener en cuenta en el desarrollo de la tarea planteada.

En la tabla 3.5 se presentan sintéticamente los elementos generadores de control descritos en la investigación y las formas en que cada uno ejerce control sobre el tipo de visualización a contemplar.

Elemento generador de control visual	Forma de control
Procedimiento	<p><i>Directo:</i> despliegue (total o parcial) de procedimientos; descomposición de problemas complejos en otros de menor complejidad y establecimiento de un orden de resolución; indicaciones a seguir en el desarrollo del problema; y representación de la figura de partida junto a la de llegada.</p> <p><i>Replica:</i> procedimientos previos.</p> <p><i>Referencia:</i> acciones y sugerencias que determinan la operación a considerar y característica (figurales y de medida de área) de la figura de llegada.</p>
Contenido	Alusión o presentación de definiciones de conceptos matemáticos, fórmulas y propiedades geométricas.
Visibilidad	<p><i>Factores de visibilidad:</i> fraccionamiento dado, sub-figuras convexas, complementariedad de formas, desdoblamiento, grado de inclinación de la figura o de un eje de simetría, ubicación del centro de homotecia y características del contorno.</p> <p><i>Elementos de contraste:</i> color, punteado y contraste en el tono y el grosor del contorno de una figura y el del fondo cuadrículado en que se representa.</p> <p><i>Índices:</i> letras, segmentos continuos, puntos sobredimensionados, flechas curvas y rectas, trazos, nombres de las unidades a las que se alude, valor de la medida de unidad y espacios en blanco.</p>
Iconismo	Características del objeto o acción física representada o aludida.

Tabla 3.5. Elementos generadores de control visual en el tratamiento del área en los libros de texto

Tipos de control visual. Según el número de elementos de control presentes en las actividades propuestas en los textos escolares, así como de la cantidad de visualizaciones a privilegiar por ellos, es posible distinguir tres tipos de control visual:

Control simple o disjunto. Se considera este control si el elemento o los elementos generadores de control presentes en la actividad suscitan la manera de ver específica y pertinente a la resolución de la tarea planteada. En caso de ser un solo elemento (control simple), éste, por sí mismo, impone el tipo de visualización a considerar. Ahora, si son varios los elementos generadores de control (control disjunto), entonces, cada uno genera control en partes distintas de la secuencia visual, de esta manera su aplicación de manera secuencial impone la manera de ver a establecer.

Ejemplo: en una actividad se pide dividir un cuadrado que ha sido representado sobre un fondo cuadrículado en dos triángulos rectángulos (Actividad tomada de Matemáticas 3. Editorial Anaya (España), p. 179). Sobre la figura inicial hay que realizar un fraccionamiento en dos triángulos (ilustración 38) y pasar de centrar la atención en el cuadrado a hacerlo en las sub figuras introducidas. Para verificar que cada uno cumple con la condición exigida (ser triángulos rectángulos) es necesario pasar de centrar la atención en las características perceptivas globales de cada uno de los triángulos a hacerlo en sus partes internas (ángulos rectos). El fraccionamiento introducido hace que uno de los triángulos (“verde”) esté representado en una posición no habitual a la que se acostumbra, por tanto, es necesario aplicar sobre él, de manera previa al segundo cambio de focalización, una operación de rotación.

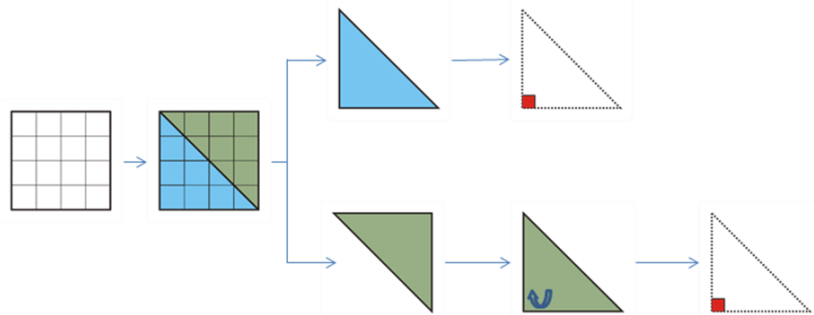


Ilustración 3.38: Despliegue del tipo de visualización a considerar al fraccionar un cuadrado en dos triángulos rectángulos.

En este caso, son tres los elementos a los que recurre el libro de texto en la presentación de esta actividad para ejercer control sobre la manera de ver a privilegiar en ella: el procedimiento, el contenido y la visibilidad. El primero exige la aplicación de una descomposición por fraccionamiento de la figura de inicio: en lenguaje verbal se introduce la acción “descomponer”. Además, se indican tanto la forma como el número de partes en que ha de ser fraccionada la figura de partida. Con respecto al contenido, hay que hacer un nuevo cambio de focalización relacionado con la definición de triángulo rectángulo para comprobar si las figuras obtenidas cumplen la definición. Por último, la

representación de uno de los triángulos en una posición distinta de la habitual exige la aplicación de una rotación.

Control por refuerzo- Cuando son varios los elementos generadores de control introducidos en la actividad o tarea propuesta, que en conjunto imponen una única manera de ver pertinente a su desarrollo o comprensión, se habla de control por refuerzo. A diferencia del control disjunto, en este caso más de un elemento de la estructura de control suscita focalizar la atención en un mismo aspecto de la secuencia visual a considerar.

En el ejemplo presentado en la ilustración 26 se pone en evidencia la transformación de un rombo en una figura rectangular con igual área. Figuralmente se representan ambas figuras descompuestas en cuatro sub-figuras de forma triangular (todas con igual cantidad de área). Se incluye además una flecha para indicar la dirección de la transformación aplicada. El texto escolar realiza un despliegue parcial del procedimiento de resolución aplicado: representa las figuras de inicio y de llegada, las “muestra” descompuestas en las partes claves a considerar en la transformación e introduce colores iguales para designar las sub-figuras correspondientes de ambas.

Para comprender cuál fue el camino seguido para transformar una figura en la otra, quien sigue el desarrollo de la tarea debe asumir las figuras de inicio y de llegada y compararlas entre sí. Además hay que comparar las sub-figuras, lo que viene condicionado por la utilización de los mismos colores para realizar dicha comparación. De esta manera, se pone en evidencia, que las sub-figuras designadas con color rojo y amarillo fueron trasladadas verticalmente hacia abajo en el proceso de reconfiguración, mientras que a la verde y la azul, se les aplicó una composición de traslaciones (vertical y horizontal). Esto supone que primeramente hay que considerar la figura de inicio, centrar la atención en una de sus sub-figuras y reconocer la operación aplicada en ella, regresar a la figura de partida y repetir el proceso y replicar esta manera de proceder un par de veces más.

En este caso son dos los elementos de control introducidos por el libro de texto: procedimiento y visibilidad. El primero aparece en la consigna de la actividad cuando se señala la acción a considerar y cuando tanto figura de partida como de llegada se muestran descompuestas una y otra en sus partes claves para comprender cómo fue realizada la transformación. Por último, la visibilidad, está demarcada por la introducción de colores, marcas (flecha) y fraccionamiento. Estos elementos minimizan la complejidad que subyace para identificar cómo fue reconfigurada una representación en otra.

Control ambiguo: cuando varios elementos ejercen control sobre la manera de ver en la figura, aunque, mientras unos introducen maneras de ver pertinentes para la resolución de la tarea propuesta, otros, por el contrario, suscitan visualizaciones de naturaleza distinta a las tratadas en tópico en estudio y/o no pertinentes a la resolución de la tarea propuesta se produce un control ambiguo. Así mismo, la ambigüedad puede introducirse por la presencia parcial de elementos de control.

Obtén el área de la siguiente figura

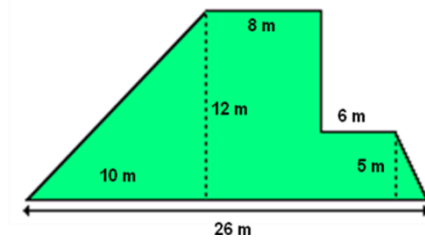


Ilustración 3.39: control ambiguo. Tarea tomada de Matemáticas 1ESO. Editorial Santillana (España), p. 215.

La tarea presentada en la ilustración 39 se pide calcular la medida de la cantidad de área de un polígono irregular para el que no se ha dado una fórmula a aplicar, por tanto, es necesario realizar previamente un fraccionamiento en figuras para las que se conozcan fórmulas del cálculo de área.

Esta figura a medir es susceptible de dos tipos de descomposición, a saber:

- Por un lado, la figura está parcialmente fraccionada por la introducción de ciertas medidas lineales. Se encuentra dividida en dos triángulos (uno de base 10 cm y altura 12 cm, el otro, de altura 5 cm y base desconocida). Por otra parte, las características del contorno de la figura de inicio junto a la presentación previa al tópico de área en estudio de la fórmula de área de figuras rectangulares, suscita la descomposición del resto de la figura en dos sub-figuras más: un rectángulo de altura 12 cm y otro de base 6 cm.
- Teniendo en cuenta que la tarea está en el tema en el que se introduce la fórmula para calcular áreas de trapecios, se puede dividir la figura en dos sub-figuras de forma trapezoidal (uno de altura 12 m, el otro de altura 5 m).

Sea cual fuese el fraccionamiento elegido por quien intenta resolver la tarea es necesario, en ambos casos, ser consciente del fraccionamiento inicial, centrar la atención en las sub-figuras en que fue dividida la figura y aplicar en cada una de ellos la fórmula correspondiente. Pero, no se han dado todos los datos necesarios para sustituir directamente en la fórmula correspondiente. Por ejemplo, si el fraccionamiento se hace en dos trapecios las longitudes de las bases mayores hay que calcularlas previamente comparando la base total de la figura a medir (26 m) con las bases menores de los dos trapecios y con la de uno de los triángulos lo que implica operar y aplicar desdoblamiento sobre algunas de las unidades unidimensionales.

En este caso, son dos los elementos de control introducidos por el libro de texto: contenido y visibilidad. El primero aparece a través de la consigna de la actividad haciendo referencia al concepto de área, a través de una medida indirecta lo que implica necesariamente la descomposición de la figura de inicio en una cualquiera de las dos maneras antes descritas y hacer luego un cambio dimensional. La visibilidad, por su parte, está demarcada por la introducción de flechas, líneas punteadas, fraccionamiento en

partes claves y características del contorno de la figura, que no sólo centran la atención en algunas de las unidades unidimensionales a considerar, sino, que guían una de las maneras de descomposición posibles.

La ambigüedad en el control es introducida en la primera parte del desarrollo de la tarea. De los fraccionamientos posibles de la figura de inicio, el segundo es coherente con el tópico en estudio pero el primero, no. Al estar la actividad presentada en un apartado donde se introduce la fórmula de área de un trapecio, es lógico esperar que al resolver las tareas presentadas en él, su aplicación sea un elemento a considerar, en consecuencia, que la figura, al ser un polígono irregular, sea descompuesta en zonas trapezoidales. El primer fraccionamiento, por su parte, si bien es el que espontáneamente se impone, se relaciona con la fórmula del triángulo y del rectángulo, elementos matemáticos previamente tratados al área de figuras trapezoidales. De esta manera, el contenido, por un lado, suscita un tipo de visualización acorde al tópico en estudio, a la vez, que hace posible junto a la visibilidad, una segunda manera de ver, en este caso de naturaleza distinta a la temática tratada.

En la tabla 3.6 se presentan sintéticamente las clases de control visual descritas en la investigación así como los elementos que las caracterizan.

Tipo de control visual	Descripción
<i>simple disjunto</i> ^o	Determina el tipo de visualización pertinente al estudio de la tarea propuesta a través de un elemento de control (control simple) o de varios (control disjunto). En caso de ser varios los elementos de control cada uno fija partes distintas de la secuencia visual en juego.
<i>por refuerzo</i>	Varios elementos de control fijan un mismo aspecto de la secuencia visual contemplada.
<i>Ambiguo</i>	Varios elementos de control determinan distintos tipos de visualización pero no todos son pertinentes o coherentes al desarrollo de la tarea propuesta.

Tabla 3.6. Clases de control visual en los libros de texto al tratar el área

Categoría 4: Organización del contenido área, en esta cuarta categoría de análisis se presentan los tópicos a través de los cuales el área tiende a ser construida en los libros de texto. Son tres los momentos considerados en este estudio, a saber:

-Cantidad de área: considera el estudio del área como un tipo de magnitud sin mediación alguna de elementos numéricos. Alude a los momentos en que los libros operan con superficies sin recurrir a medidas o datos numéricos: unión, sustracción, duplicación, descomposición de superficies, comparación entre superficies con o sin cambio de formas, entre otras. Se observó en los textos analizados que la reflexión del área como una clase de magnitud tiende a darse implícitamente y suele estar presente en el estudio de operaciones geométricas donde se actúa sobre la superficie de la figura (traslaciones, rotaciones, congruencias, semejanzas, simetrías, etc.).

-Medida de área: se refiere a los momentos en que se mide el área sea de manera directa sea de forma indirecta (Vergnaud, 2003). En el primer caso mediante la replicación de unidades superficiales sobre la figura que se desea medir, y en el segundo a través de la focalización en unidades de dimensión 1 de la figura en estudio y la aplicación de fórmulas de área.

-Relación perímetro-área: presente en las tareas de los libros donde se trata simultáneamente el área y el perímetro y donde la relación entre los dos tipos de magnitud puede, o no, ser objeto de estudio.

3.4.6 Validación de la metodología de análisis

El proceso de validación del instrumento se realizó en seis momentos y se esquematiza en la tabla 3.7.

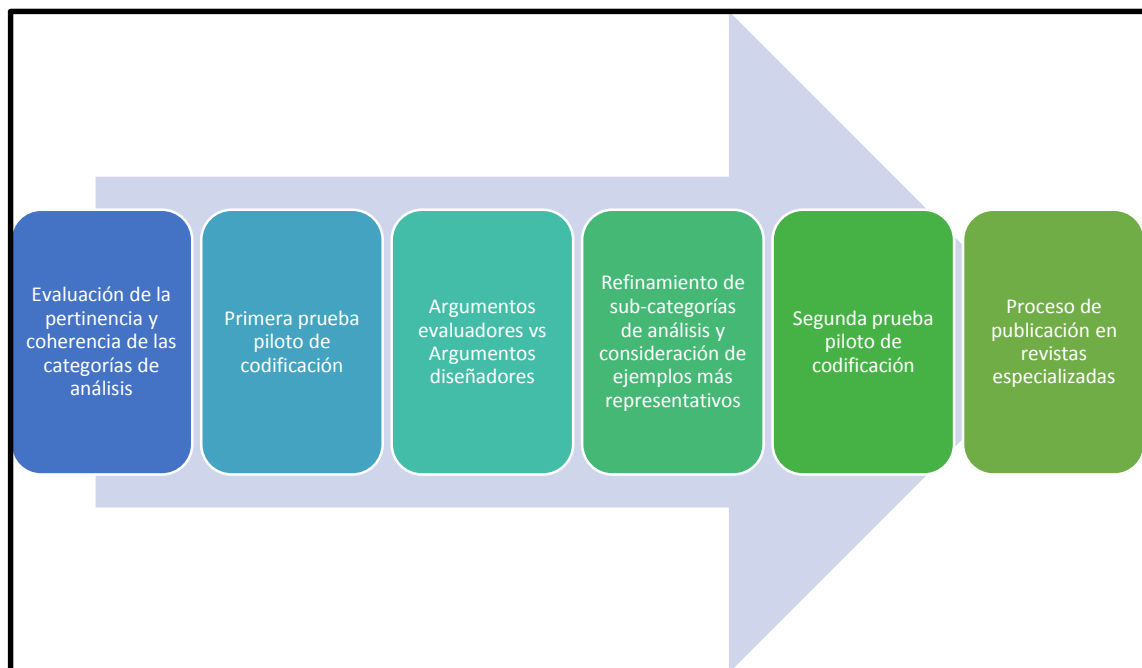


Tabla 3.7. Esquema del proceso de validación del instrumento de análisis

Inicialmente se solicitó a un grupo de tres investigadores especializados en el campo de la educación matemática, en particular, en aspectos visuales y en análisis de textos escolares, evaluar la pertinencia y coherencia de las categorías previamente mencionadas. Solo dos de los investigadores presentaron un informe detallado. En ambos casos se resaltó el grado de utilidad y el nivel de detalle del instrumento. En ninguno de los casos fueron detectadas incoherencias, ni dificultades ni en las definiciones de las categorías y sub-categorías, ni en los ejemplos presentados. Uno de los investigadores sugirió realizar una prueba piloto de codificación con el propósito de garantizar que el sistema de clasificación propuesto fuera ‘reliable’, es decir, que pueda ser utilizado por investigadores ajenos al proceso de diseño del instrumento.

En consecuencia, en un segundo momento se puso en práctica la sugerencia de uno de los investigadores mencionados anteriormente realizándose una prueba piloto de

codificación. De manera arbitraria y al azar se seleccionaron 8 tareas presentes en dos capítulos de dos libros de una de las editoriales estudiadas. Tanto la editorial como los dos libros considerados fueron seleccionados de forma aleatoria. Se elaboró un documento con cada una de las categorías y sub-categorías consideradas, para que otras personas pudieran utilizarlo para codificar las tareas de áreas presentes en los manuales. Se diseñó una rejilla para determinar la estructura visual, la función o funciones visuales, la estructura y tipo de control visual, el tópico y la unidad de análisis en cada una de las tareas escogidas. Para la codificación de dichas tareas, tanto las copias digitales de los capítulos seleccionados como el resumen y la rejilla fueron entregadas a tres investigadores a los que se informó sobre el problema de investigación y el proceso que estaba en curso. Solo uno de ellos caracterizó y entregó, en las fechas estipuladas, las actividades propuestas.

Tras comparar el análisis de los diseñadores con el propuesto por el investigador que participó en el proceso piloto de codificación se observó diferente grado de acuerdo dependiendo de las categorías establecidas en el análisis tal como se indica a continuación:

- En los tipos de visualización fue del 87.5% para los cambios figural y de focalización, el 100% para el cambio dimensional y el flujo visual y el 62.5% para las operaciones.
- En cuanto a las funciones visuales el grado de similitud fue del 75% para la función heurística, del 50% para la función informativa y el 100% para la función inductiva.
- Control visual fue del 87.5% para el contenido, iconismo y visibilidad y 75% para el procedimiento.
- Para el contenido matemático fue del 100% en las tres sub-categorías
- En cuanto a las unidades de análisis fue el 100% en las dos sub-categorías.

Esto significa que el instrumento es consistente y valido para la mayoría de las sub-categorías de análisis consideradas en el estudio, salvo para las sub-categorías de operaciones, función heurística e informativa y el elemento de control de procedimiento.

A continuación, con el propósito de identificar las razones que expliquen por qué no hubo un alto porcentaje de acuerdo en las sub-categorías de operaciones, función heurística, función informativa y la del elemento de control visual de procedimiento y en un tercer momento del proceso de validación del instrumento se entregó a la evaluadora una tabla de doble entrada donde se expusieron los argumentos utilizados por los diseñadores para considerar en las ocho tareas en estudio las operaciones, funciones y elementos de control asignados. La evaluadora consignó en la misma tabla los argumentos seguidos por ella para caracterizar las tareas según las sub-categorías antes referenciadas. De esta manera,

al comparar los análisis realizados por los diseñadores del instrumento y la investigadora participe del proceso de codificación, se identificó que:

- En la sub-categoría de operaciones la no coincidencia recayó en tres de las tareas donde la investigadora participe en el proceso piloto de codificación consideró, a diferencia nuestra, la presencia de la operación de superposición. Al realizar un estudio exhaustivo del análisis hecho por ella y comparar sus argumentos con los nuestros se identificó que la inconsistencia y falta de precisión provenía, no solo, de la forma en que se redactó la definición de la operación de superposición, sino también de la forma como esta fue ejemplificada.
- En el caso de la función heurística fueron dos las tareas en que no hubo coincidencia. En este caso, las interpretaciones inadecuadas de la evaluadora suscitadas por la forma como se despliegan los procedimientos en los ejemplos presentados en el documento base, explican la causa de dicha diferencia.
- En la sub-categoría de función informativa, la diferencia entre el análisis hecho por la evaluadora y los diseñadores estuvo presente en 4 tareas. La inconsistencia y falta de precisión con que se redactó la definición de esta sub-categoría fue, en este caso, el motivo que indujo tan alto nivel de incompatibilidad.
- Por último en la sub-categoría de control visual por procedimiento se observó que la evaluadora en las dos tareas donde no hubo coincidencia no se percató que de forma previa el libro había presentado un ejemplo y una actividad a desarrollar cuya estructura eran similares a las dos tareas analizadas. En relación a la actividad a desarrollar. si bien el procedimiento había sido parcialmente desarrollado por el libro de texto, la forma de ver a considerar había sido total y concretamente explicitada.

Estos resultados se utilizaron para refinar las categorías y para seleccionar ejemplos más representativos que caracterizasen de manera adecuada y contundente la operación de superposición y la función heurística. Para el caso de la función informativa solo fue necesario reorganizar discursivamente su definición. En relación al control por procedimiento únicamente fue necesario enfatizar en su definición que la alusión a este tipo de control no solo estaba presente en la explicitación de un procedimiento dado en un ejemplo, también era necesario considerar aquellos procedimientos que, presentados de forma total o parcial, explicitaban maneras de ver a usar en tareas posteriores. Para terminar el proceso de codificación piloto, en una quinta fase, se solicitó a un nuevo evaluador codificar las mismas 8 actividades. Para ello solo se consideraron las sub-categorías que habían mostrado debilidades en el primer estudio piloto de codificación. En este caso los niveles de acuerdo llegaron al 100% en la sub-categoría de operaciones, función heurística y control por procedimiento y al 87.5% para la función informativa, lo que significa que el instrumento en todas sus categorías y sub-categorías es consistente y válido.

Una última fase de validación se relaciona con el proceso de evaluación realizado en tres revistas especializadas en educación matemática (Educación Matemática, Integración y RELIME) del instrumento de análisis diseñado. Para ello el instrumento fue dividido en tres apartados según los objetivos de la investigación a los que permite dar respuesta: elementos constitutivos de la visualización, funciones visuales y elementos generadores de control visual y tipos de control visual. Cada uno permitió la escritura de tres artículos en mención. En el proceso de evaluación por pares ciegos en cada revista no hubo consideración alguna acerca del instrumento, de sus categorías, sub-categorías y de los ejemplos considerados. Los tres artículos ya han sido publicados: Marmolejo y González (2013a, 2013b) y Marmolejo y González (2014).

3.4.7 Consideraciones para la síntesis de los datos.

Con el propósito de analizar e interpretar los datos de la investigación y dar respuesta a cuestión ¿cómo promueven los libros de texto el desarrollo de la visualización a través del tratamiento del área?, se construyó una tabla para analizar los datos. Cada entrada correspondió a una tarea. Se establecieron cinco categorías: tipo de visualización, función visual, estructura de control, clase de control y contenido. La primera estaba dividida en cinco sub-categorías (operación figural, cambio figural, cambio dimensional, cambio de anclaje 2D y flujo). La función visual en tres (heurística, informativa e inductiva), la estructura de control en cuatro (procedimiento, contenido, visibilidad e iconismo), la clase de control en tres (simple, refuerzo y ambiguo) y el contenido en tres (cantidad de área, medida de área y relación perímetro-área). En particular, para caracterizar los tipos de visualización se introdujeron 21 columnas adicionales según los elementos que en los libros determinan cada una de las 5 sub-categorías, a saber: 9 para las operaciones (reconfiguración, configuración, anamorfosis, cuadratura, superposición y fraccionamiento), 5 para los cambios figurales (real, parcial, intermitente, intrínseco y no real), 3 en los cambios dimensionales (fijo, por desdoblamiento, operatorio), 3 en cambio de focalización bidimensional (configural, intrafigural y mixto) y 2 en el flujo (lineal y en circuito).

De esta forma fue posible detectar en las 2561 tareas de los 35 libros analizados 311 tipos de visualización (Anexo 3.3), 5 clases de función visual (Anexo 3.4), 12 estructuras de control visual (Anexo 3.5), 3 clases de control visual (una por cada tipo de control visual discriminado en la investigación) y 3 clases de contenido (una por cada apartado de área asumido en la investigación).

El considerable número de combinaciones arriba expuesto generó dificultad tanto en el análisis de los datos como en su interpretación. En consecuencia, se reorganizaron las categorías anteriormente citadas siguiendo tres consideraciones, a saber: 1) complejidad visual y desarrollo de la visualización; 2) función visual informativa y no informativa, 3) estructuras de control y tipos de control visual. Para el caso de las clases de control visual

no fue necesario reorganizar las respectivas categorías en cuanto son disjuntas entre sí. La primera consideración está relacionado con las estructuras visuales discriminadas en el estudio; la segunda con la naturaleza de las funciones que la visualización tiende asumir en el estudio del área; y la tercera corresponde tanto al tipo de estructura de control considerado como los tipos de control. Por medio de estos criterios de análisis de datos fue posible dar respuesta a la pregunta anteriormente planteada.

El proceso seguido para la síntesis de los datos se presenta de forma esquemática en la tabla 3.8.

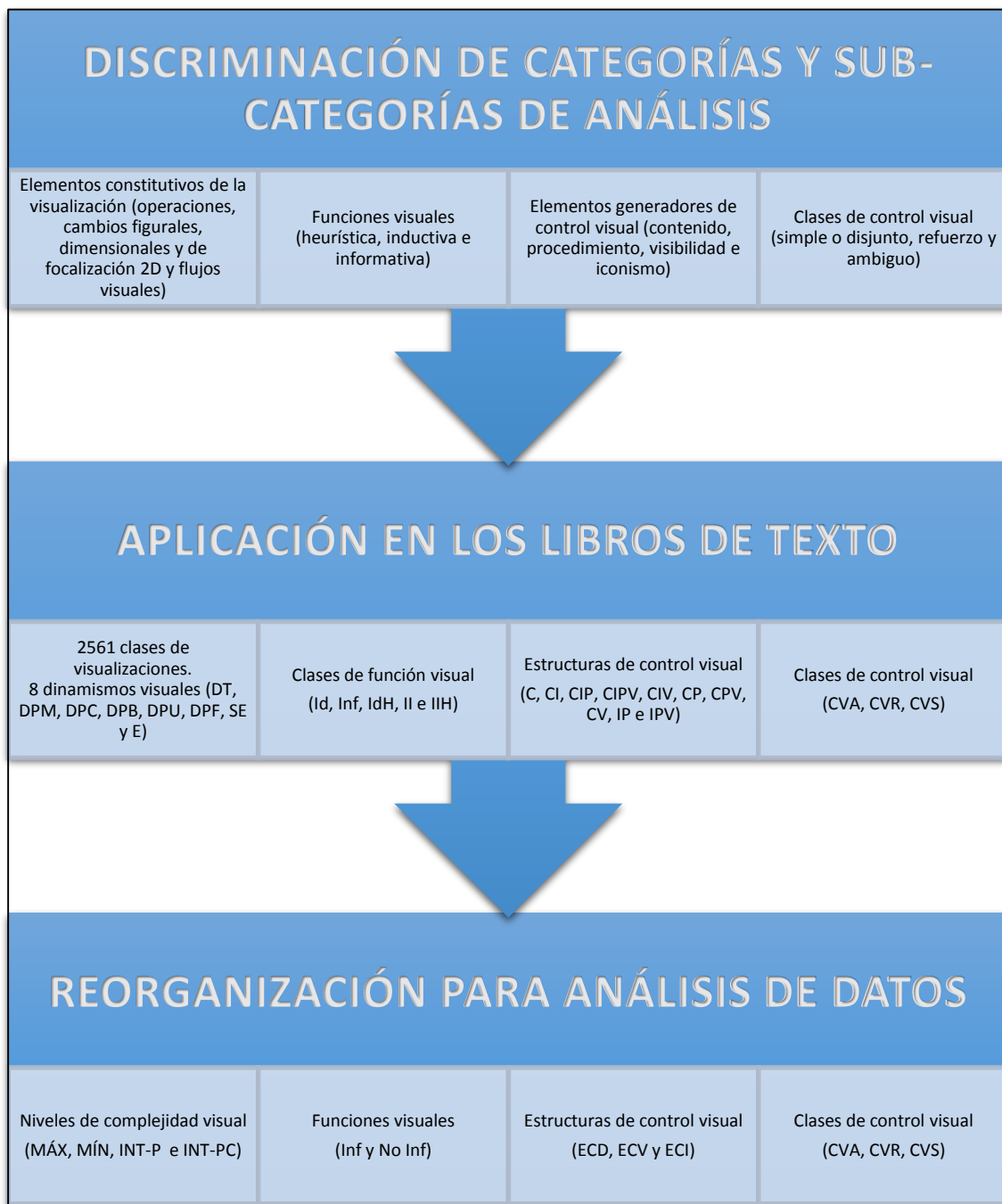


Tabla 3.8. Proceso para la síntesis de los datos

Primera consideración de síntesis de datos: complejidad visual y desarrollo de la visualización.

Esta consideración alude a la naturaleza de los tipos de visualización promovidos en las tareas de los libros analizados y tiene como propósito aportar elementos que den respuesta a cuestiones: ¿en qué medida y de qué forma los libros inducen distintos niveles de complejidad visual al tratar el área? y ¿al tratar el concepto de área los libros de texto promueven el desarrollo de la visualización? En este sentido se fusionaron los 311 tipos de visualización discriminados en la investigación en ocho grupos. Para la reagrupación se consideró *nivel de dinamismo* que la visualización promueve en la figura en estudio, es decir, el carácter dinámico o estático que desempeña la(s) figura(s) o sus unidades constituyentes en la tarea propuesta.

A continuación, se definen los tipos de dinamismo figural identificadas en los libros de texto:

- ***Dinamismo total (DT)***. Está conformado por tipos de visualización de naturaleza bidimensional y unidimensional. Las estructuras visuales de DT están determinadas por la aplicación simultánea de operaciones y cambios figurales, cambios dimensionales de naturaleza operatoria o de desdoblamiento, cambios de focalización 2D y flujos visuales. Son 51 los tipos de visualización que conforman este primer nivel de dinamismo (Anexo 3.3).
- ***Dinamismo parcial mixto (DPM)***. Está conformado por un total de 10 tipos de visualización (Anexo 3.3), y se caracteriza por movilizar elementos visuales de naturaleza bidimensional y unidimensional, considerar en las estructuras visuales donde están presentes tanto operaciones y cambios figurales como cambios dimensionales de naturaleza operativa. En este caso pueden, o no, existir cambios de focalización 2D o flujos visuales pero nunca de forma simultánea.
- ***Dinamismo parcial compuesto (DPC)***. Igual que en el DT está caracterizado por la presencia de elementos visuales tanto de naturaleza bidimensional como unidimensional. Pero, a diferencia, el cambio dimensional es de naturaleza fija y pueden o no existir cambios de focalización o flujos visuales. Son 101 los tipos de visualización que constituyen este tipo de dinamismo (Anexo 3.3).
- ***Dinamismo parcial bidimensional (DPB)***. Forman parte de este grupo los tipos de visualización que movilizan elementos de naturaleza estrictamente bidimensional. La aplicación de cambios dimensionales nunca está presente en este tipo de dinamismo. Puntualmente, la presencia de operaciones y cambios figurales determinan al DPB. En relación a cambios de focalización 2D o flujos visuales, estos pueden, o no, estar presentes. El DPB está conformado por 129 tipos de visualización (Anexo, 3.3).
- ***Dinamismo parcial unidimensional (DPU)***. Está compuesto por ocho tipos de visualización (Anexo, 3.3). Forman parte de este grupo los tipos de visualización caracterizadas por la presencia de cambios dimensionales por desdoblamiento u

operativos. No se considera la aplicación de operaciones y cambios en la figura. Igual que en el dinamismo anterior pueden estar presentes, o no, cambios de focalización 2D o flujos visuales. El DPU puede ser de naturaleza exclusivamente unidimensional o mixta (unidimensional y bidimensional). En el segundo caso la naturaleza bidimensional aparece por la aplicación de cambios de focalización intrínsecos o mixtos, introducidos con el único propósito de discriminar en la figura o figuras las sub-figuras o sub-configuraciones donde están presentes las unidades 1D a tener en cuenta en la tarea propuesta.

- ***Dinamismo parcial focal (DPF)***. Se caracteriza por la presencia de elementos visuales de naturaleza estrictamente bidimensional y se consideran las estructuras visuales en las que están presentes cambios de focalización de cualquier naturaleza. Pueden o no existir flujos visuales, nunca operaciones, ni cambios figurales. El DPF está caracterizado por 5 tipos de visualización (Anexo 3.3).
- ***Dinamismo semi-estático (SE)***. Forman parte de este grupo los tipos de visualización que involucran la aplicación de cambios dimensionales fijos, cambios de focalización y flujo visual, pero no la introducción de operaciones, ni de cambios figurales. Igual que en el DPU este puede ser de naturaleza exclusivamente unidimensional o mixta (unidimensional y bidimensional). Si la resolución o comprensión de la tarea propuesta exige la aplicación de una visualización bidimensional, se hace a través de la aplicación de un cambio de focalización (intrínseco, configural o mixto). Al igual que en DPU el cambio de focalización es aplicado con un único propósito: discriminar en la figura o figuras en estudio aquellas sub-figuras o sub-configuraciones donde están presentes las unidades 1D a tener en cuenta en la resolución o comprensión de la tarea propuesta. Son seis los tipos de visualización que conforman el dinamismo SE (Anexo 3.3).
- ***Dinamismo estático (DE)***. Es de naturaleza estrictamente unidimensional. Está conformado por estructuras visuales caracterizadas por la presencia exclusiva de cambios dimensionales de naturaleza fija. Solo un tipo de estructura visual determina este tipo de dinamismo (Anexo 3.3).

Según la manera como se agrupan los niveles de dinamos u otros es posible dar respuesta a las dos cuestiones anteriormente señaladas. Así, los ocho dinamos anteriormente definidos fueron agrupados en cuatro categorías según el grado de complejidad introducido; de mayor a menor grado de complejidad visual son:

- Máximo (MÁX), las figuras desempeñan un dinamismo total o parcial mixto.
- Intermedio compuesto (INT-PC), alude a las tareas donde las figuras desempeñan un dinamismo parcial compuesto.
- Intermedio (INT-P), las figuras promueven un dinamismo parcial (bidimensional o unidimensional o focal). Como se expondrá a continuación las tareas que

inducen un nivel de complejidad INT-PC son las que promueven el desarrollo o enseñanza de la visualización.

- Mínimo (MÍN), el dinamismo que se promueve en las figuras es semi-estático o estático.

Para desarrollo o enseñanza de la visualización y, siguiendo los presupuestos de Duval (1995, 1999, 2004), se deben considerar dos formas de discriminar información en las figuras geométricas: la aprehensión operatoria y la aprehensión discursiva. Como se ha hecho mención en el capítulo de referentes teóricos, la primera corresponde a la transformación de una figura en otra mediante la aplicación de operaciones figurales, y la segunda relacionada con la descomposición de una figura en unidades figurales de dimensión inferior al de la figura.

Son dos los aspectos que caracterizan este par de aprehensiones. Por un lado, entre los diferentes tipos de discriminación que permiten las figuras, la aprehensión operatoria y la discursiva son las que suscitan mayor complejidad cognitiva en el estudio de las matemáticas (Duval, 1999, 2004). Por otro, una y otra aprehensión caracterizan los tipos de visualización que son coherentes con el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2004). En consecuencia, el desarrollo de la visualización asociada al registro semiótico de las figuras exige centrar la atención en la reflexión tanto en la aprehensión operatoria como en la discursiva.

Investigaciones como las realizadas por Duval (1999, p. 167) ponen en evidencia que el desarrollo de la aprehensión operatoria ha de considerar, entre otros aspectos, el diseño de tareas donde el proceso de resolución no exija aplicar cambios dimensionales en la manera de ver la secuencia de sub-figuras explicitada. En relación a la deconstrucción de formas, Duval (2004) señala que no basta con la realización de tareas que susciten la aplicación de cambios dimensionales en la figura de partida y que las unidades unidimensionales no sean separables de la superficie que delimitan. El desarrollo de la deconstrucción dimensional de las formas exige, por el contrario, la aplicación de operaciones sobre las unidades de dimensión 1 que constituyen la figura en estudio. Tal es el caso de los cambios dimensionales operatorios y de desdoblamiento identificados en la investigación. Por otra parte, Duval (1999, 2004) señala que para el desarrollo de la visualización ha de considerarse de forma separada el estudio de estos dos tipos de aprehensión.

Además de los dos tipos de aprehensión arriba citados, como un tercer aspecto, se ha considerado el cambio de focalización, puesto que determina, por un lado, la aprehensión operatoria ya que no es posible aplicar este tipo de aprehensión sin considerar en el proceso un cambio de focalización bidimensional, y por otro, su uso genera altos niveles de complejidad en las tareas y promueve la aplicación de transformaciones semióticas y procedimientos matemáticos de distinta naturaleza (Marmolejo y Vega, 2012). En este sentido asumiremos que el cambio de focalización bidimensional puede propiciarse a

través de tareas que movilicen tipos de visualización donde no estén presentes la aplicación ni de operaciones ni de cambios dimensionales, pero, donde estén presentes cambios de focalización de cualquier naturaleza.

En este sentido las tareas de los libros que promueven los dinamismos parcial bidimensional, parcial unidimensional y parcial focal suscitarán el desarrollo de la visualización. De esta forma, las posibilidades de reflexionar sobre la aprehensión operatoria será a través de tareas que induzcan un DPM. Por su parte, las tareas que movilicen un DPU determinaran las opciones de enseñanza de la aprehensión discursiva, y las tareas que promuevan un DPF caracterizarán la enseñanza del cambio de focalización. Por el contrario, las tareas donde los cinco dinamismos restantes estén presentes (DT, DPM, DPS, SE y E), no permiten que la visualización, en sí misma, sea un objeto de reflexión sino de aplicación.

Segunda consideración de síntesis de datos: función visual informativa y no informativa en los manuales escolares.

Son cinco las funciones visuales promovidas por los libros de texto al tratar el área, a saber: Inductiva (Id), Informativa (If), Inductiva e informativa (II), Inductiva y heurística (IdH) e Inductiva, informativa y heurística (IIH). Para dar respuesta a las cuestiones ¿cómo se caracterizan las tareas sobre el área de los libros en términos de la función que desempeña la visualización? y ¿Cuáles podrían ser sus efectos o consecuencias para el desarrollo de la visualización?, hemos reagrupado estas cinco funciones visuales en dos nuevas categorías: *informativa* y *no informativa*. La primera conformada por las funciones If, II, IIH, la segunda compuesta por las funciones Id y IdH.

Tareas informativas: la función informativa permite caracterizar el papel que desempeña la visualización en cuanto al estudio del área y los efectos en el aprendizaje de esta actividad cognitiva y del registro semiótico de las figuras. Si bien cuando la función visual es informativa la visualización desencadena procedimientos que guían la realización de la tarea planteada, no son las características perceptivas de la figura las que imponen dichas formas de proceder. Por el contrario, estas son promovidas por las similitudes de la figura con objetos, acciones o situaciones cotidianas o por la necesidad o exigencia explícita de extraer datos directamente de las características perceptivas de dicha representación. Esto conlleva que la figura sea asumida de forma concreta y no como una representación genérica de una situación matemática (estatus de objeto). Por ello tareas donde la función visual es informativa (T.Inf) se promueve la confusión entre el representante y lo representado, lo que constituye la base de la gran mayoría de las dificultades y obstáculos de los alumnos (Duval, 1999). En consecuencia, las T.Inf no solo introducen un conflicto de naturaleza semiótica, sino que además entorpecen, en mayor o menor medida, la comprensión del objeto métrico en estudio y el desarrollo de la visualización.

Además, las T.Inf donde las figuras al representar un objeto matemático aluden simultáneamente a objetos, acciones o situaciones cotidianas motivan un aprendizaje erróneo de las figuras y de la visualización asociada a ellas, pues, si bien este tipo de tareas promueven la aplicación y reflexión de operaciones y tratamientos figurales, lo hacen sin tener en cuenta el registro usado. Por tanto, las propiedades de dicho registro no son objeto de reflexión y, por el contrario, se promueven la aplicación de acciones y propiedades que si bien son legítimas y posibles en el objeto o situación física aludida, no lo son para el registro movilizado.

Por otra parte, las T.Inf donde los datos o propiedades geométricas a considerar no se introducen de forma discursiva, no solo promueven la confusión antes mencionada, sino que además dejan de lado dos características fundamentales de las figuras geométricas:

- a) “Una figura representa una situación geométrica solo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas de entrada” (Duval, 1999, p. 159), y
- b) Es absolutamente necesaria una “indicación verbal para anclar la figura como representación de tal o cual objeto matemático” (Duval, 1999, p. 160).

Así, pues, no basta con el simple reconocimiento perceptivo de una figura para considerar las propiedades del objeto representado, al menos para justificar matemáticamente los razonamientos a aplicar.

Las T.Inf, pues, al introducir acciones físicas de medida y cambios dimensionales fijos promueven la idea que tales acciones son tratamientos propios al registro de las figuras y que basta con tal cambio dimensional para dar respuesta a las exigencias visuales que requieren las matemáticas. Pero, esto está lejos de la realidad, pues, por un lado, dichas acciones no son pertinentes al tratamiento y conformación de las figuras y, por otro lado, los cambios dimensionales sobre los que se sustenta el estudio de la visualización promueven niveles de complejidad distintos y más exigentes que los inducidos en el cambio dimensional fijo (Duval, 2004). Con respecto al último aspecto, la movilización de conocimiento matemático en el aula exige considerar cambios dimensionales de tipo operatorio o de desdoblamiento, cuyo uso disminuye en las T.Inf.

Las tareas en las cuales es necesario recurrir a las características perceptivas de la figura para identificar la fórmula de área a aplicar tampoco propician reflexiones figurales adecuadas; pues, por un lado, la introducción de una figura debe ser discursiva (Duval, 1999), es decir, en la consigna de la tarea y no sobre la figura se deben presentar los datos a considerar para su resolución (Duval, 1999) y por otro lado, el reconocimiento de formas simples que no forman parte de una configuración geométrica, es trivial y espontáneo y no corresponde a las exigencias visuales que deberían exigirse en la realización de una tarea matemática (Duval, 1999). En este sentido, las T.Inf de esta

naturaleza tampoco desempeñan un rol determinante para el desarrollo de la visualización.

Las T.Inf suscitan además a) la constatación de relaciones matemáticas sin exigir su justificación, y b) en muchos casos los procedimientos a considerar privilegian exclusivamente la aplicación de tratamientos aritméticos y de cálculo, dejando de lado cualquier consideración de orden visual. Esto junto a lo expuesto en los párrafos previos permite afirmar que las T.Inf son un obstáculo para que las figuras y la visualización sean asumidas en el lugar que les corresponde para el desarrollo de la visualización, pues, no solo suscitan que la función que desempeña la visualización no contribuya o ayude a la comprensión y desarrollo de la tarea matemática sino que además se constituyen en una trampa para ella. Es en estos casos cuando decimos que la 'intuición' puede ser peligrosa o engañosa.

Tareas no informativas. Por el contrario las tareas donde la función visual es no informativa (T.No.Inf) se caracterizan porque la visualización actúa heurística o inductivamente. Si la visualización desempeña una función heurística entonces las figuras permiten la conducta de abducción o suscitan la exploración heurística de situaciones complejas o favorece el reconocimiento de la situación matemática planteada, y se privilegia la aprehensión operatoria; pero, si la visualización promueve una función inductiva entonces las figuras o bien juegan el rol e inducen el tipo de aprehensión anteriormente reseñado, o bien suscitan la aplicación de la aprehensión discursiva.

El desarrollo de demostraciones en geometría exige una efectiva articulación entre la aprehensión operatoria y la aprehensión discursiva. En dicho proceso las figuras pueden, o no, contribuir o ayudar al estudio de la tarea planteada. Pero, articular estos tipos de aprehensión y hacer de las figuras verdaderos soportes heurísticos es complejo para la mayoría de los estudiantes (Duval, 1998a, 1998b; Lemonidis, 1991; Padilla, 1992; Duval, 1999; Marmolejo y Vega, 2012). Por tal motivo, la literatura especializada enfatiza que uno y otro aspecto deben ser objetos de explícita reflexión desde los primeros años de la educación obligatoria. En este sentido, el principal aspecto a tener en cuenta para promover el desarrollo de la visualización es el estudio por separado de los tratamientos y particularidades que determinan cada tipo de aprehensión (Duval, 1999). Así, las T.No.Inf cuya función visual es de naturaleza heurística cumplen con tal exigencia para el caso de la aprehensión operatoria. La aprehensión discursiva, por su parte, está presente en T.No.Inf donde la función visual es inductiva, tareas donde el texto guía al lector a través de la enunciación en lengua natural de la acción a aplicar o de las propiedades geométricas o métricas a considerar. Por otra parte, las T.No.Inf donde la función heurística e inductiva están presentes, especialmente en aquellas tareas donde el libro de texto muestra el despliegue de procedimientos, evidencian que las figuras pueden ser soportes heurísticos para la realización de tareas matemáticas. Lo anterior pone de relieve que las T.No.Inf, a diferencia de las T.Inf desempeñan un importante papel en el estudio

de la Geometría, de las figuras geométricas y del desarrollo de la visualización asociada a ellas.

Es claro, pues, que caracterizar los distintos tipos de función que desempeña la visualización en la forma en que los textos inducen el estudio del área; así como determinar sus posibles efectos en la enseñanza de esta actividad cognitiva, es un asunto de invaluable importancia para reflexionar sobre los fenómenos que subyacen a la enseñanza de la visualización en la educación básica.

Tercera consideración de síntesis de datos: estructuras de control visual y tipos de regulación visual en los libros de texto al construir el área.

Son dos los aspectos a considerar en este criterio de análisis, por un lado, las estrategias y elementos utilizados por los textos para controlar la visualización en el estudio del área y por, la forma en que el control visual es promovido. El primero está relacionado con el objetivo específico: “determinar las estructuras de control utilizados por los libros textos escolares para controlar la visualización en la comprensión de los conceptos y en la resolución de las actividades propuestas sobre el área de superficies planas”. Y el segundo aspecto está vinculado con el último de los objetivos específicos planteados en la investigación, es decir: “caracterizar los tipos de control visual ejercidos por lo libros de texto al suscitar el estudio del área de superficies planas”. De acuerdo a lo anterior, esta tercera consideración de síntesis de datos permitirá responder a las cuestiones ¿cómo son organizadas las estructuras y tipos de control visuales en las tareas donde los libros tratan el área? y ¿de qué forma tal organización podría influir en el desarrollo de la visualización?

En lo que sigue describimos los dos aspectos que caracterizan este criterio de análisis:

Grupos de control visual presentes en los libros de texto al construir el área: visibilidad, iconismo y discursividad.

Las estructuras de control que se encuentran en los libros se caracterizan según cómo se combinan, o no, los elementos de control considerados en el estudio (contenido, procedimiento, visibilidad e iconismo). Se identificaron un total de 12 estructuras en las tareas analizadas (Anexo 3.5). Igual que en el caso de las funciones visuales hemos reagrupado las estructuras de control según la naturaleza de la actividad envuelta. En este caso se consideró la presencia, composición o ausencia de la visibilidad y el iconismo. Uno de dichos controles es determinante para el desarrollo de la visualización vinculada a las figuras geométricas, el otro un obstáculo para ella.

En cuanto a la visibilidad hay que tener en cuenta que el tipo de visualización acorde a la tarea propuesta es mayor o menor según el grado de visibilidad introducido (Padilla,

1992; Duval, 1999). Para el desarrollo de la aprehensión operatoria, por ejemplo, una condición mínima es la exigencia que las tareas se propongan en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad que facilite o retarde su discriminación (Padilla, 1992; Duval, 1999). Esta consideración es determinante en la promoción de “tratamientos figurales en todos los casos de figura y para reforzar la conducta de abducción... [pues]... es esta condición lo que permite organizar un aprendizaje específicamente centrado en los tratamientos propios del registro de las figuras” (Duval, 1999, p. 167).

Con respecto a los elementos de contraste (color, intensidad y grosor) y los índices (notaciones suplementarias) si bien no son variables visuales semióticamente pertinentes²⁰ son utilizados por los libros para mejorar la discriminación de unidades constituyentes y del tipo de aprehensión operatoria a considerar. En los libros estos elementos resaltan la presencia de algunos factores de visibilidad o actúan en sí mismos como factores de visibilidad que inducen la operación y el tipo de transformación a contemplar. Los manuales también consideran los elementos de contraste y los índices para guiar o reforzar la aplicación de cambios dimensionales. Esto determina el tipo de aprehensión discursiva a aplicar. Igualmente, los flujos visuales y el cambio de focalización suele ser positivamente influenciados mediante la introducción de elementos de contraste y de notaciones suplementarias.

El iconismo es el segundo elemento de control al que se asignó un lugar relevante al agrupar las estructuras evidenciadas en los manuales. A través de él los textos suscitan visualizaciones específicas por medio de las características de los objetos o las situaciones cotidianas aludidas. Por tanto, las tareas donde el iconismo está presente suscitan una falsa reflexión sobre la visualización asociada al registro semiótico de las figuras, pues, esta actividad cognitiva es inducida sin tener en cuenta el registro usado. En consecuencia, las propiedades que caracterizan la conformación y el tratamiento de las figuras son ignoradas. Este aspecto es inconcebible desde un punto de vista semiótico y cognitivo ya que la visualización adquiere connotaciones propias según la clase de registro de representación en juego (Duval, 2003). No respetar tal consideración, aumenta aún más la complejidad cognitiva que subyace al acto de ver y afecta el carácter heurístico que desempeñan las figuras en el estudio de las matemáticas. El iconismo, pues, es un obstáculo para el estudio de la visualización.

El iconismo es inducido a través de tareas donde la figura es o forma parte de una ilustración; representación que en los libros constituye la tercera parte de las representaciones analógicas y que se utilizan para introducir contextos realistas con la

²⁰ Pues, en el primer caso “no son susceptibles de representar intrínsecamente relaciones proyectivas o topológicas” (Duval, 1999, p. 149) y en el segundo “no permiten hablar solo en términos de variables visuales” (Duval, 1999, p. 149)

esperanza de que sean útiles en el estudio de las matemáticas (Kim, 2012). Si bien estos son elementos que se podrían posicionar en un lugar privilegiado, no es así, pues la abundancia de ilustraciones no siempre facilita la comprensión de los conceptos en estudio (Quílez y Martínez, 2005; Goldin y Shteingold, 2001, en Kim, 2012); y, al contrario, pueden producir efectos distintos al que tradicionalmente se les atribuye, especialmente cuando es alta la complejidad del tema en estudio (Quílez y Martínez, 2005). Por otra parte, el uso de ilustraciones en los textos se caracterizan por evidenciar bajos niveles de precisión, conectividad y concisión en relación a representaciones de naturaleza figural o gráficas (Kim, 2012, p. 181). Y por si fuera poco, muchas ilustraciones tienden a ser utilizadas de forma decorativa (Kim, 2012), y los estudiantes evidencian dificultades en diferenciar qué es lo importante en una ilustración y qué es lo accesorio” (Quílez y Martínez, 2005 y Kim, 2012)

De acuerdo a todo lo anterior el iconismo como elemento de control no solo genera ambivalencias de naturaleza semiótica y cognitiva, sino que introduce ambivalencias contextuales y serias dificultades para el desarrollo no solo de la visualización sino de los contenidos matemáticos tratados en la escuela. Así, pues, las estructuras de control donde este elemento está presente son las menos potentes para acompañar y direccionar el estudio de la visualización en la educación básica.

En las tareas donde ni la visibilidad ni el iconismo están presentes es la lengua natural quien determina de forma exclusiva los tipos de visualización siendo el contenido y/o el procedimiento los elementos de control incluidos. La lengua natural desempeña un papel determinante para el estudio de la geometría permite enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis...; y su articulación simultánea y de forma interactiva con las figuras geométricas es absolutamente necesaria para la geometría (Duval, 1999, p. 147). En cuanto a la visualización, la deconstrucción dimensional de formas se hace necesariamente en articulación con una actividad discursiva” (Duval, 2004, p. 181); y al ser la deconstrucción dimensional la que desde “las primeras enunciaciones de las propiedades de las figuras organiza todos los procesos geométricos que las matemáticas requieren (Duval, 2004); es claro, que la lengua natural también desempeña un papel determinante en el estudio de la visualización.

Una de las condiciones para el desarrollo de la aprehensión operatoria se relaciona con que las operaciones relativas a las modificaciones de las figuras sean solicitadas de forma explícita y sistemática (Duval, 1999). Las tareas donde la lengua natural determina el tipo de visualización no solo propician la deconstrucción dimensional de formas. En ocasiones, la aplicación de cambios figurales también es el elemento en consideración, siendo en estos casos donde se alude de forma explícita a la operación en juego y se caracteriza el flujo visual desplegado. Los libros, por tanto, a través de la lengua natural también contribuyen a desarrollar los tipos de visualización relativos a la modificación figural. Es más, considerando que estos tipos de visualización son promovidos cuando se define el contenido matemático y se aplica dicha definición en los ejemplos, es claro que

han de ser incluidas las operaciones que los determinan de forma sistemática en el estudio de nuevas tareas así como en la comprensión de futuras ideas matemáticas. En este sentido, los manuales a través del contenido y/o el procedimiento, en ausencia de cualquier elemento de visibilidad, también contribuyen al desarrollo de la visualización.

Son tres los grupos en que hemos reorganizado las estructuras control visual identificadas en el estudio, a saber: *discursivo, visibilidad e iconismo*:

- ***Estructuras de control visual discursivo (ECD)***. Está conformado por las estructuras de control donde la visibilidad y el iconismo no están presentes. Es decir, en las tareas donde la visualización es inducida a través del despliegue de procedimientos o la designación (en lengua natural o figuralmente) de las acciones a aplicar o los elementos figurales a considerar. Son tres las estructuras de control visual que forman parte de este primer grupo: procedimiento, contenido y contenido-procedimiento.
- ***Estructuras de control visual por Visibilidad (ECV)***. Está conformado por las estructuras de control donde la visibilidad junto al procedimiento o el contenido determinan el tipo de visualización a considerar. Es decir, en las tareas donde la visualización es promovida a través de factores de visibilidad y elementos de contraste, índices, definiciones, propiedades o procedimientos. Son tres las estructuras de control visual que forman este grupo: contenido-procedimiento-visibilidad, contenido-visibilidad y procedimiento-visibilidad.
- ***Estructuras de control visual por Iconismo (ECIco)***. Según la presencia, o no, de la visibilidad, el control por iconismo aparece en los libros de texto de dos formas distintas: iconismo-otros (IO) e iconismo-visibilidad-otros (IVO). En las estructuras de control IO son el contenido o el procedimiento junto al propio iconismo quienes inducen el tipo de visualización a considerar (contenido-procedimiento-iconismo, contenido-iconismo y procedimiento-iconismo), mientras que en las estructuras IVO son la visibilidad y el iconismo unidos al procedimiento o al contenido quienes la determinan (contenido-procedimiento-iconismo-visibilidad, iconismo-procedimiento-visibilidad y contenido-iconismo-visibilidad).

Las figuras de las tareas donde la estructura de control es IO se distinguen por formar parte de una fotografía o de un dibujo figurativo. Éste último, es una “ilustración donde prima la representación orgánica, mostrando los objetos mediante imitación de la realidad” ((Peralez y Jiménez, 2002, p. 376). Por su parte, en las estructuras IVO la figura desempeña un estatus de dibujo figurativo+signos, lo que constituye un tipo de ilustración que en los libros de texto “representan acciones o magnitudes inobservables en un espacio de representación heterogéneo” (p. 376). Son los “signos” los que resalta la acción o magnitud en consideración. Fotografías, dibujos figurativos y dibujos figurativos+signos se imponen como las ilustraciones usados por los libros para simbolizar conceptos con

bajos niveles de iconicidad (Peralez y Jiménez, 2002), “cuando mayor es la iconicidad de una ilustración, menos explicaciones se requieren para su comprensión” (p. 281).

Las estructuras de control IVO aparecen de dos formas distintas, a saber:

-IVO1: la visualización se determina a través de las similitudes del objeto o situación aludida por la figura y la introducción de índices o elementos de contraste (color y punteado).

-IVO2: la visualización se caracteriza por medio del iconismo junto a la presencia de índices o elementos de contraste (color o punteado) y factores de visibilidad.

Un ejemplo de estructura IVO1 es la tarea propuesta en la ilustración 37 (p. 114). En ella se evidencia el sentido en que se desplaza una bicicleta, acción que conlleva la discriminación de la operación visual en cuestión (rotación de la figura circular que representa a una de las llantas de la bicicleta). Los “signos” utilizados por el texto para hacer visible la operación cuestionada son a) la secuencia de números que designan a cada uno de los momentos en que se desarrolla el desplazamiento de la bicicleta, y b) la designación de una fracción del círculo que representa la llanta de la bicicleta en color azul.

Las tareas que le caracterizan la estructura IVO2 son aquellas donde los libros introducen la operación geométrica de simetría y la figura designa un objeto físico. En este caso los elementos que determinan el tipo de operación visual a aplicar son: a) las características físicas del objeto simbolizado, b) un factor de visibilidad (figura representada con el eje de simetría perpendicular al horizonte del libro) y c) elementos de contraste (línea punteada, a veces designadas en colores fuertes, para marcar el eje de simetría). El último de los elementos suscita un cambio dimensional e induce el fraccionamiento de la figura en dos partes isométricas; dicho fraccionamiento, es así mismo un factor de visibilidad que ayuda a la discriminación de la operación en juego.

Las representaciones analógicas (figuras, gráficos, ilustraciones, fotografías, entre otros) pueden ocasionar dificultades en la comprensión de los conceptos (Goldin y Shteingold, 2001, en Kim, 2012). La introducción de muchos detalles en la figura disminuye el nivel de concreción y orden en la presentación de un concepto (Kim, 2012), reduce el interés en el contenido visual y aumenta la complejidad para entender el concepto (Pettersson, 2001, en Kim, 2012). Por el contrario, cuando un nuevo concepto se introduce a través de representaciones analógicas simples, hay mayores posibilidades de transmitir el significado y la idea de manera clara y efectiva (Kim, 2012). Esto pone en evidencia que las estructuras IVO pueden generar altos niveles de complejidad y ambigüedad en el papel que juega la figura, no solo para el estudio de la visualización sino también para la conceptualización del objeto matemático en estudio, en este caso el área.

3.5 Síntesis y conclusiones.

El objetivo general de la investigación alude a la caracterización de la visualización como objeto de reflexión en los libros de texto al tratar el concepto de área. Hemos considerado cuatro categorías de análisis a través de las cuales es posible tal caracterización: elementos constitutivos de la visualización, funciones visuales, elementos generadores de control y tipos de control visual y tópicos en que se induce el estudio del área. Para su definición y ejemplificación, por un lado, se adaptaron los referentes teóricos de Duval (1995, 2003, 2004) acerca de la visualización y la definición de estructuras de control de Balachef y Gaudin (2010); y, por otro lado, de forma inductiva, se tuvo en cuenta cómo los libros de las tres editoriales de mayor uso en España y Colombia (35 libros de texto de los grados 1 a 6) promueven esta actividad cognitiva en el estudio del área. El alto número de combinaciones presentes en los tres primeras categorías de análisis llevó a que fueran reorganizadas en función de tres criterios, a saber: nivel de complejidad visual introducido (MÁX, MÍN, INT-PC e INT-P); función visual informativa y no informativa; y estructuras de control por visibilidad, iconismo y discursividad, así como las clases de control visual imperantes (simple o disjunto, refuerzo y ambigüedad). Así, pues, la aplicación de la metodología de análisis propuesta en este capítulo permitirá explorar en qué forma y en qué nivel los textos españoles y colombianos promueven la visualización a través del concepto de área.

CAPÍTULO 4: DESARROLLO Y COMPLEJIDAD VISUAL

Introducción.

La visualización no se adquiere de forma inmediata ni simple, al contrario, es una cuestión de tratamiento de información susceptible de aprendizaje, para lo que se requiere una reflexión en la que se contemplen qué aspectos suscitan su desarrollo. En esta investigación asumimos que los libros de texto y el área se posicionan como tópicos para sondear cómo se promueve el desarrollo de la visualización en la enseñanza de las matemáticas, es decir, cómo se incluye el estudio de la aprehensión operatoria y de la aprehensión discursiva. En este sentido, el presente capítulo tiene como propósito caracterizar cuáles son los niveles de complejidad visual que promueven los textos y cómo estos materiales suscitan el desarrollo de la visualización en relación con el concepto área. Como se ha señalado en el capítulo de metodología las cuestiones anteriores serán abordadas de forma puntual a través de las siguientes:

1. ¿Cuáles son los tipos de visualización que imperan, cuáles no, en el tratamiento del área en los libros de texto?
2. ¿En qué medida y de qué forma los libros al tratar el área promueven el desarrollo de la visualización e inducen distintos niveles de complejidad visual?
3. ¿En cuáles ciclos y en qué tópicos cada una de las editoriales analizadas inducen el desarrollo de la visualización y qué niveles de complejidad visual promueven?
4. ¿Qué similitudes y diferencias hay en los libros colombianos y españoles al tratar el área según la complejidad visual introducido y las posibilidades de desarrollo visual que promueven?

Para abordar las cuestiones anteriores los datos serán considerados desde tres niveles de análisis (tabla 4.1). En el primero, de forma general e independientemente del país de procedencia de los libros se compara el número de tareas que inducen cada nivel de complejidad (**análisis general unificado**). En el segundo, desde la misma perspectiva, se clasifican, caracterizan y comparan entre sí las seis editoriales consideradas en el estudio (**análisis comparativo por editoriales**). En el último nivel de análisis se discute la relación entre el número de tareas que favorecen el estudio del área en los libros de texto colombianos y sus contrapartes españolas (**análisis comparativo por países**).

En cada uno de estos niveles de análisis se asumen como elementos de contraste los contenidos asociados al concepto de área CA (cantidad de área), MA (medida de área) y PA (relación perímetro-área), y los ciclos de enseñanza C1 (grados primero y segundo), C2 (grados tercero y cuarto) y C3 (grados quinto y sexto). Según como se contemplen estos elementos de contraste sea de forma articulada, sea de manera independiente, hablaremos de **análisis local** y de **análisis global**.

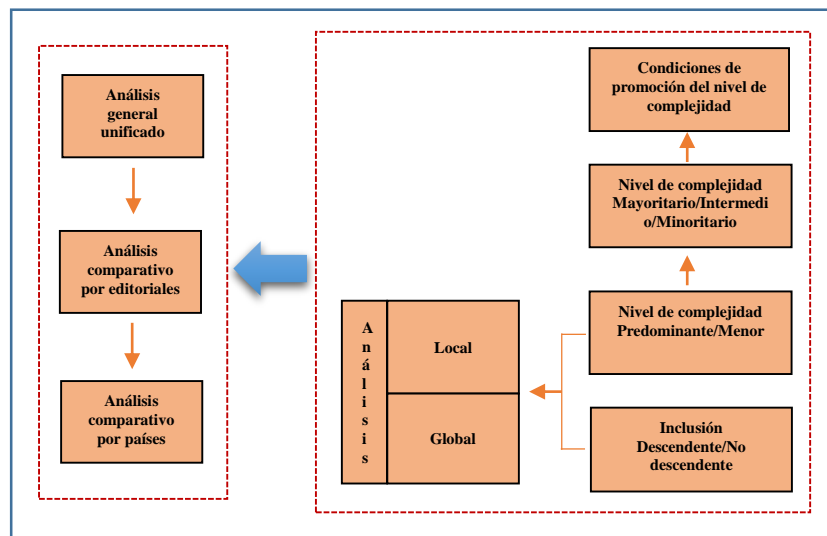


Tabla 4.1. Representación esquemática del análisis y discusión de los datos

En el análisis local se describe cómo los tipos de visualización detectados en la investigación aparecen en las tareas asociadas al concepto de área. En este tipo de análisis cada tópico se describe según la frecuencia de tareas que induce cada uno de los niveles de complejidad estudiados en la investigación (MÁX, MÍN, INT-PC e INT-P) y que caracterizan cada uno de los ciclos de enseñanza; así, son dos los aspectos a considerar:

- La mayor o menor presencia de tareas que promueven las complejidades MÁX, MÍN, INT-PC e INT-P en cada ciclo de enseñanza. En este sentido se considerarán tres aspectos: **complejidad visual mayoritaria (CVM)**, si en la mayoría de los ciclos del tópico en estudio la complejidad en cuestión es la más considerada; **complejidad visual intermedia (CVI)** si sucede solo en uno de los ciclos; y **complejidad visual minoritaria (CVm)** si no están en mayor proporción en ninguno de los ciclos o no son contempladas.
- Además se considera la variación de un ciclo a otro que los libros promueven para el desarrollo de la visualización o cómo inducen los distintos niveles de complejidad contemplados en la investigación. Así, son tres las clases de desarrollo visual o caracterización de la complejidad cognitiva imperante en los libros de texto: 1) **ascendente**: el porcentaje de tareas que promueven el desarrollo de la visualización o que inducen distintos niveles de complejidad son en C1 menores que en C2 y en C2 menores que en C3; 2) **descendente**: el porcentaje de tareas de uno y otro tipo disminuye del primero de los ciclos al último; y 3) **cíclico**:

los porcentajes de tareas de una y otra naturaleza en C2 son mayores o menores que en C1 y C3).

En el análisis global se considera los niveles de complejidad de dos formas distintas y disjuntas entre sí: 1) los tópicos de área independiente del ciclo de enseñanza y 2) los ciclos de enseñanza sin tener en cuenta la naturaleza del tópico en cuestión. De forma similar al análisis local, en el global diremos que el desarrollo visual o la complejidad visual es mayoritaria, intermedia o minoritaria; así como ascendente, descendente y cíclica. De forma similar que en el análisis local diremos que a nivel global que una **complejidad es mayoritaria (CVM)** cuando al menos en uno de los apartados y en uno de los ciclos la proporción de las tareas que la promueven es mayor, cuando solo sucede en uno de los casos diremos que es **intermedia (CVI)**, y cuando no son las más contempladas en ninguno de los ciclos ni de los tópicos entonces será **minoritaria (CVm)**.

Tanto en el análisis local como en el global hablaremos de **complejidad predominante** (o **nivel predominante**) para identificar la complejidad más considerada en un ciclo (análisis local y global) o en un tópico (análisis global). Por el contrario, aludiremos al **nivel menor** (o **complejidad menor**) a la complejidad menos promovida en un ciclo o en un tópico según sea el caso.

Así mismo diremos que unos libros al inducir un nivel de complejidad lo hacen en **condiciones más propicias** (o lo **promueven en mejores condiciones**) que otro si:

- A nivel local, en la mayor parte de los ciclos del primer grupo de libros, el nivel de complejidad en cuestión es una CVM mientras que en los segundos es una CVI o una CVm; así mismo, si en los primeros es una CVI mientras que en los segundos es una CVm.
- En cuanto al análisis global, de forma similar que en el local, si en el primer grupo de libros la complejidad es una CVM mientras que en el otro grupo es una CVI o una CVm; asimismo, si en el primero es una CVI y en el segundo una CVm.
- Si la forma como se promueve un nivel de complejidad ni es una CVM ni una CVI en los dos grupos de libros, entonces el número de ciclos donde uno u otro es una CVm será el criterio a contemplar: cuantos más ciclos tengan esta característica menos condiciones se ofrece para que dicho nivel sea contemplado.
- Si en ambos grupos de libros la complejidad es de igual naturaleza entonces el criterio a considerar será el número de ciclos (análisis local) y de ciclos y tópicos (análisis global) donde es mayor o menor: si es mayor en más cantidad de ciclos o si es menor en menos cantidad de ciclos entonces hay condiciones más propicias para que el nivel de complejidad sea promovido.

Previo a la presentación y discusión de los datos caracterizaremos (de forma general y global) cómo los elementos constitutivos de la visualización (operaciones visuales, cambios figúrales, dimensionales o de focalización, y flujos visuales) se organizan en los libros de texto. Son estos elementos los que han permitido detectar diferentes tipos de visualización en las tareas de los libros. El único propósito de esta parte previa es contextualizar al lector sobre cómo se contemplan las operaciones, los cambios y flujos visuales en la forma en que los libros tratan el concepto de área; qué operaciones, cambios y flujos están menor o mayormente presente; y cuál es su influencia para el desarrollo de la visualización. En cuanto a la categoría de operaciones, y teniendo en cuenta que su aplicación induce la manipulación del área de forma cualitativa lo que resulta determinante para la comprensión de este objeto métrico (Freudenthal, 1983; Chamorro, 1997; Zacharos, 2006), se hará una alusión especial a sus efectos o consecuencias en relación con el concepto de área. Con relación a los cambios figural y de focalización y sus efectos serán tratados de forma breve y puntual.

4.1 Descripción general de los elementos constitutivos de la visualización en el tratamiento del área.

En esta investigación se detectó una alta variedad de formas en que la visualización aparece en los libros al inducir el estudio del área (Anexo 3.3). Para su caracterización se asumieron como elementos constitutivos de la visualización nueve operaciones, cinco cambios figúrales, tres cambios dimensionales, igual número de cambios de focalización y 2 flujos visuales (apartados 3.4.5). En lo que sigue trataremos de responder a las preguntas ¿cómo estos elementos se organizan en cuanto al concepto de área?; ¿cuáles de ellos están más o menos presentes?; y ¿cuál es su influencia para el desarrollo de la visualización, incluso para el estudio del área?

Operaciones. Es a través de la aplicación de operaciones visuales que los textos escolares tienen la oportunidad de generar sentido del concepto de área y suscitar que las figuras asuman un carácter dinámico (Marmolejo y Vega, 2012); en consecuencia, que permitan que estas representaciones se constituyan en soportes heurísticos en el estudio de las matemáticas.

Como era de esperar un gran número de tareas inducen la aplicación de una o varias operaciones visuales (70.7%); en el resto de tareas (29.3%) la sustitución de valores numéricos en fórmulas y la aplicación de procedimientos tipo cálculo son las formas de proceder. Si bien, menos de la tercera parte de las tareas no promueven la aplicación de operaciones visuales, podrían reforzar la idea arraigada en algunos educadores de que el estudio de las magnitudes y sus medidas se reduce a la mera asignación numérica, donde los conceptos aparecen en situaciones cuyo propósito es enseñar y aprender el número (Osborne, 1976), y no los aspectos cualitativos necesarios para introducir el concepto de área (Chamorro, 2003).

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

<i>Análisis general y global unificado. Elementos constitutivos de la visualización. Operaciones</i>		
Operación	Frec	%
Reconfiguración	135	5.27
Configuración	211	8.24
Anamorfosis	65	2.54
Traslación	240	9.37
Rotación	131	5.12
Simetría axial	206	8.04
Cuadratura	7	0.27
Superposición (Sup=Sup.Inv)	92	3.59
Fraccionamiento	221	8.63
Nulo	750	29.3
Anamorfosis + Configuración	2	0.08
Anamorfosis + Fraccionamiento	9	0.35
Anamorfosis + Reconfiguración	8	0.31
Anamorfosis + Rotación	6	0.23
Anamorfosis + Superposición	2	0.08
Configuración + Fraccionamiento	4	0.16
Configuración + Reconfiguración	7	0.27
Configuración + Rotación	3	0.12
Configuración + Superposición	2	0.08
Cuadratura + Fraccionamiento	3	0.12
Cuadratura + Reconfiguración	5	0.2
Cuadratura + Superposición	2	0.08
Fraccionamiento + Reconfiguración	7	0.27
Fraccionamiento + Rotación	9	0.35
Fraccionamiento + Simetría axial	244	9.53
Fraccionamiento + Superposición	12	0.47
Fraccionamiento + Traslación	2	0.08
Reconfiguración + Rotación	29	1.13
Reconfiguración + Superposición	19	0.74
Reconfiguración + Traslación	15	0.59
Rotación + Simetría axial	3	0.12
Rotación + Superposición	19	0.74
Rotación + Traslación	19	0.74
Simetría axial + Superposición	1	0.04
Simetría axial + Traslación	9	0.35
Anamorfosis + Configuración + Reconfiguración	1	0.04
Anamorfosis + Fraccionamiento + Reconfiguración	1	0.04
Anamorfosis + Fraccionamiento + Rotación	1	0.04
Anamorfosis + Reconfiguración + Rotación	11	0.43
Configuración + Fraccionamiento + Simetría axial	1	0.04
Cuadratura + Fraccionamiento + Reconfiguración	1	0.04
Fraccionamiento + Reconfiguración + Simetría axial	2	0.08
Fraccionamiento + Reconfiguración + Superposición	2	0.08
Fraccionamiento + Rotación + Simetría axial	25	0.98
Fraccionamiento + Rotación + Superposición	2	0.08
Fraccionamiento + Rotación + Traslación	4	0.16
Fraccionamiento + Simetría axial + Superposición	1	0.04
Reconfiguración + Rotación + Superposición	2	0.08
Reconfiguración + Rotación + Traslación	1	0.04
Reconfiguración + Simetría axial + Superposición	1	0.04
Rotación + Simetría axial + Traslación	1	0.04
Rotación + Superposición + Traslación	2	0.08
Fraccionamiento + Simetría + Superposición + Traslación	3	0.12
Total	2561	100

Tabla 4.2. Operaciones visuales en los libros colombianos y españoles al tratar el área

Según el tipo o tipos de operaciones considerados se identificaron 53 maneras distintas en que las operaciones aparecen en los libros al tratar el área: el 51.07% exige la consideración de una operación, mientras que en el 19.63% se realiza la aplicación conjunta de dos o más de ellas. En el primer caso, destacan por una mayor presencia la traslación, el fraccionamiento, la configuración y la simetría; la reconfiguración, la rotación, la superposición, la anamorfosis y la cuadratura, al contrario, son las menos usadas (tabla 4.2). En este sentido, son inapreciables las opciones que brindan los textos para considerar la cuadratura (0.27%) y la anamorfosis (2.54%) en cuanto al concepto de área; operaciones que inciden, respectivamente, en el estudio de tareas de cálculo aproximado de áreas de figuras curvilíneas y de conservación de área. En cuanto a la reconfiguración y a la superposición, operaciones que determinan el desarrollo del concepto de área (Zacharos, 2006), no son de las más utilizadas; solo el 5.27 % y 3.59% de las tareas recurren a ellas.

Si nos centramos en las tareas que exigen la aplicación conjunta de dos o más operaciones destaca por su mayor presencia la composición fraccionamiento-simetría axial (9.53%). Este tipo de tareas se encuentra en los tópicos de geometría donde se estudia la simetría de figuras planas. En dichos casos, si bien se promueve la comparación cualitativa de superficies suele hacerse por fuera del plano, por ello, este tipo de tareas podrían desvirtuar la comprensión del concepto de área. En este sentido, es importante resaltar que en las tareas que promueven la aplicación de una única operación, la simetría también es una de las operaciones más habituales en los libros de texto (8.04%).

Con respecto a las composiciones donde la reconfiguración está presente, si bien esta operación aparece en un significativo número de composiciones (16 de las 42 composiciones discriminadas en la investigación caracterizan por este aspecto) solo está presente en el 3.06% de las tareas. La superposición también aparece en un considerable número de composiciones (14 de las 42 composiciones tienen esta cualidad) pero con porcentajes extremadamente reducidos, solo el 2.01% de las tareas induce su aplicación. La anamorfosis y la cuadratura, por su parte, están presentes en un pequeño grupo de composiciones (9 y 4 respectivamente) y los porcentajes con que aparecen igualmente son reducidos: el 1.21% en el primer caso, el 0.44% en el segundo.

Así, pues, tampoco en las tareas donde los libros suscitan la aplicación simultánea de más de una operación visual, la reconfiguración, la superposición, la anamorfosis y la cuadratura son consideradas por los libros de texto como elementos suficientemente significativos y recurrentes para tenerlos en consideración. En consecuencia, afirmamos que el tratamiento del área asumido por los textos escolares promueve limitadas posibilidades para reflexionar sobre los aspectos visuales relativos a la aproximación y la conservación del área así como de la medida de este tipo de magnitud.

Con respecto a la visualización, es importante resaltar el reducido nivel de oportunidades que brindan los libros de texto para el estudio de la reconfiguración, operación

fundamental para la aprehensión matemática de las figuras (Duval, 1999) y que se impone como una de las más complejas a considerar en el estudio de la Geometría (Padilla, 1992). Solo el 8.33% de las tareas inducen la aplicación de esta operación.

Cambio figural. La mayoría de las tareas analizadas inducen la aplicación de cambios en la organización perceptiva de las figuras, solo en el 29.3% de las tareas, este tipo de cambio no aparece. Igual que en las operaciones, los cambios figurales suelen considerarse tanto independientemente (cambio simple) como a través de combinaciones (cambio compuesto). Así, son cinco los cambios figurales que caracterizan las tareas que incentivan un cambio simple y 14 las que introducen un cambio compuesto (tabla 4.3). Los cambios simples son más habituales que aquellos de naturaleza compuesta. En el primer caso aparecen en más de la mitad de las tareas (53.92%) y el segundo solo en el 16.79% de ellas.

<i>Análisis general y global unificado. Elementos constitutivos de la visualización. Cambio figural</i>		
Cambio figural	Frec	%
Real	281	10.97
Parcial	565	22.06
Intermitente	55	2.15
Intrínseco	315	12.3
No real	165	6.44
Nulo	750	29.29
Intermitente + Intrínseco	38	1.48
Intermitente + No real	3	0.12
Intermitente + Parcial	14	0.55
Intermitente + Real	3	0.12
Intrínseco + No real	268	10.46
Intrínseco + Parcial	37	1.45
Intrínseco + Real	6	0.23
No real + Parcial	4	0.16
No real + Real	9	0.35
Real + Parcial	14	0.55
Intermitente + Intrínseco + Real	1	0.04
Intrínseco + No real + Parcial	29	1.13
Intrínseco + No real + Real	3	0.12
Intrínseco + Parcial + Real	1	0.04
Total	2561	100

Tabla 4.3. Cambios figurales en los libros colombianos y españoles al tratar el área

Un total de 19 cambios figurales están presentes en las tareas de área destacándose, por una mayor presencia, los de naturaleza parcial (22.06%), intrínseca (12.3%), real (10.97%) y la composición de cambios intrínseco y no real (10.46%). El resto de cambios figurales (14 en total) se caracterizan por tener una frecuencia de aparición reducida que varía entre el 0.04% y el 2.15 %, salvo el cambio no real que representa el 6.44% de las tareas analizadas.

Los resultados anteriores muestran que los libros promueven una gran variedad de cambios en las figuras a la vez que evidencian pocas oportunidades para considerar que en una figura es factible introducir una serie de cambios de naturaleza diferente. Este

aspecto se debe tener en cuenta tanto para el desarrollo de la visualización como del área, puesto que si bien la consideración de cambios simples evidencia los efectos de la aplicación de acciones cualitativas sobre la superficie de una figura, la aplicación de series de cambios, uno a continuación de otro, claramente induce un mayor dinamismo figural y una alta complejidad cognitiva, pues, no solo se transforma la figura de partida en otra de llegada, sino que esta última pasa a ser una nueva figura de partida sobre la cual ha de introducirse un nuevo cambio figural y, en ocasiones, la nueva figura de llegada se constituye en una tercera figura de partida sobre la cual se considera de nuevo un tipo de transformación.

Los cambios figurales de naturaleza simple fomentan dos clases de transformaciones: en el contorno global de la figura (cambios externos) y en las partes 2D que le conforman (cambios internos). Los cambios real y parcial corresponden al primero de los casos; los cambios intrínseco, intermitente y no real caracterizan, por su parte, las modificaciones internas. En este sentido, el tratamiento del área en los libros promueve la aplicación de cambios internos en el 20.89% de las tareas, mientras que en el 33.03% de ellas los cambios son de naturaleza externa. El estudio del área en los libros por lo tanto, no solo lleva a focalizar la atención en la totalidad de la superficie de la figura en cuestión, sino que además suscita, aunque en menor grado, considerar el área de partes de la figura, es decir, de algunas de sus sub-figuras y sub-configuraciones.

Los cambios de naturaleza compuesta también introducen dos tipos de cambios: interno (Intermitente-intrínseco, Intermitente-no real e Intrínseco-no real) y externo-interno (cambios en la figura tanto en su contorno global como en las partes 2D que le constituyen). Son cambios externos-internos aquellos de naturaleza intermitente-parcial, intermitente-real, intrínseco-parcial, intrínseco-real, no real-parcial, no real-real, real-parcial, intermitente-intrínseco-real, intrínseco-no real-parcial, intrínseco-no real-real e intrínseco-parcial-real. Los cambios que se aplican sobre las sub-figuras o sub-configuraciones aparecen en mayor medida (12.06%) que los cambios externos-internos (4.74%).

Estos resultados muestran que los manuales al tratar el concepto de área muestran tareas que promueven la aplicación de cambios de naturaleza externa y que este tipo de tareas suscitan en su resolución o comprensión cambios figurales simples. Por otra parte, las posibilidades que los libros brindan para que se focalice la atención en el área de sub-figuras o sub-configuraciones de la figura a medir o a comparar, aparecen de forma similar al caso anterior (32.95%), pero como diferencia estas tareas inducen tanto cambios figurales simples (20.89%) como compuestos (12.06). Respecto a los momentos que los textos generan para que las transformaciones no solo se apliquen de forma externa sino también de forma interna, son en extremis reducidos, solo el 4.74% de las tareas permiten tal reflexión, todas caracterizadas por la aplicación compuestas de cambios figurales.

Cambio dimensional. La aplicación de cambios dimensionales se fomenta en la mayoría de tareas, solo en el 31.55% de ellas no está presente. Son tres los cambios dimensionales detectados en las tareas de los libros: fijo, por desdoblamiento y operatorio (pp. 120 - 121). La tabla 4.4 muestra que más de la mitad de las tareas suscitan un cambio dimensional de naturaleza fija (58.34%). En contraste, son reducidos los cambios dimensionales de naturaleza dinámica por desdoblamiento u operatorio; el 2.34 % y el 7.77% del total de las tareas reflejan, respectivamente, estos cambios de dimensión.

<i>Análisis general y global unificado. Elementos constitutivos de la visualización. Cambio dimensional</i>		
Cambio Dimensional	Frec	%
Fijo	1494	58.34
Por desdoblamiento	60	2.34
Operatorio	199	7.77
Nulo	808	31.55
Total	2561	100

Tabla 4.4. Cambios dimensionales en los libros colombianos y españoles al tratar el área

Si bien el cambio dimensional fijo promueve la discriminación de unidades constitutivas de dimensión 1 y 0 también lleva a que sean considerados como elementos no separables de la superficie que delimitan (Duval, 2004). De las tareas expuestas en los libros de texto solo aquellas donde el cambio dimensional es por desdoblamiento u operatorio propician una deconstrucción dimensional de las formas. Esta es una actividad cognitiva importante para el estudio de la Geometría pues a través de ella se organizan todos los procesos geométricos inmersos en una demostración (Duval, 2004).

La deconstrucción dimensional no se puede efectuar en el marco de actividades manuales, como sí es posible en el caso de las operaciones y de los cambios figurales donde la manipulación implica la conservación del número de dimensiones del soporte material utilizado. Además, el número de dimensiones no se puede mostrar, solamente nombrar, por tanto, sólo aquellos estudiantes que tienen conciencia de lo que designan, serán capaces de darse cuenta a qué se está haciendo referencia (Duval, 2004). La aplicación de operaciones sobre las unidades 1-dimensionales (dilatación, rotación, desplazamiento, desdoblamiento...) que caracterizan tanto al cambio dimensional operatorio, como al de desdoblamiento, permiten no sólo focalizar la atención exclusiva en las unidades de dimensión 1 y 0, sino también asumir en ellas elementos dinámicos, susceptibles de transformación y, de esta manera, considerarlos de forma independiente de la superficie que delimitan.

Es claro, pues, que tanto el cambio dimensional operatorio como el de desdoblamiento son elementos sobre los que ha de centrarse el desarrollo de la visualización. Sin embargo, como se evidencia en los resultados anteriormente presentados, son escasas las oportunidades que brindan los libros para que la deconstrucción dimensional de formas sea un objeto de reflexión, y solo en el 10.11% de las tareas esta situación es factible. Así, por lo menos en este aspecto, las tareas de los textos no fomentan que las figuras sean

asumidas como representaciones dinámicas. En consecuencia, desde este punto de vista, también serían pocas las oportunidades que brindan los textos para que las figuras sean asumidas como herramientas heurísticas que contribuyan o ayuden al estudio de las matemáticas.

Cambio de focalización bidimensional, Un gran número de las tareas analizadas estimulan la aplicación de cambios de focalización bidimensional (tabla 4.5), y solo el 26.24% de las tareas no incentiva la aplicación de cambio figurales. Las tareas que promueven cambios de focalización de naturaleza intrafigural son las más habituales (44.86%), seguidas de las que suscitan cambios de focalización mixto y configural con el 17.84% y 11.05% respectivamente.

<i>Análisis general y global unificado. Elementos constitutivos de la visualización. Cambio de focalización</i>		
Cambio focalización 2D	Frec	%
Configural	283	11.05
Intrafigural	1149	44.86
Mixto	457	17.84
Nulo	672	26.24
Total	2561	100

Tabla.4.5. Cambios de focalización en los libros colombianos y españoles al tratar el área

Las tareas que alientan la aplicación de cambios intrínsecos y mixtos promueven formas de proceder que permiten vencer la aprehensión perceptiva de las figuras, forma de discriminación figural que por efecto de la Ley de Cierre privilegia el discernimiento de algunas sub-figuras en detrimento de otras (Duval, 1999) y que son la base de dificultades como las reportadas por Battista et al. (1998), Outhred y Mitchelmore (1996, 2000) y Marmolejo y Vega (2012), donde el cálculo del área de rectángulos o cuadrados fraccionados en partes cuadradas de igual área no es determinado mediante la aplicación de sumas reiteradas o conteos por grupos (de filas o columnas) o a través de la multiplicación; por el contrario, se hace por medio del conteo uno a uno.

Los resultados anteriores evidencian, pues, que el tratamiento del área en los libros favorece la aplicación de procedimientos como el descrito en el párrafo anterior. El 62.7% de las tareas estimula sobrepasar los límites perceptivos que impone la aprehensión perceptiva de las figuras. Así, desde esta perspectiva los textos escolares favorecen el desarrollo de la visualización y aportan elementos que, por un lado, permiten considerar formas de proceder económicas y consistentes al comparar figuras a partir de la medida de sus áreas (Marmolejo y Vega, 2012), y, por otro lado, podrían ayudar a comprender el significado de la fórmula $A = b \times h$ (Outhred y Mitchelmore, 1996, 2000) y en consecuencia, el paso de la medida directa a la medida indirecta; cuestión que ha sido referenciada por la literatura especializada como compleja para la mayoría de los estudiantes (Nunes et al, 1993, en Kordaki, 2003; Kamii y Kysh, 2006).

Las tareas de los libros que inducen cambios de focalización configural y mixto se caracterizan por presentar el concepto de área por medio de dos o más figuras. Es través de ellas que los libros pueden suscitar la comparación entre las superficies de dos o más figuras, aspecto de vital importancia, pues, junto a acciones como el reparto justo, la reproducción de formas diferentes y la medida (Freudenthal, 1983), incluso el establecimientos de relaciones entre el área y el perímetro (Chamorro, 1997) permiten la constitución del concepto área.

Los resultados anteriormente reseñados muestran que la comparación entre dos o más figuras a partir de sus cantidades de área es una práctica poco habitual en los libros de texto, solo el 28.9% de las tareas analizadas fomenta tal tipo de comparación. La investigación de De Araújo y Dos Santos (2009) muestran que esta tendencia no es exclusiva de los textos españoles y colombianos igual ocurre en los manuales escolares brasileños.

Flujo visual. Son dos los flujos visuales considerados en el estudio: lineal y en circuito. Aunque la diferencia no es muy grande el porcentaje de tareas de los textos escolares que promueven el flujo en circuito (27.53%) es mayor que aquellas que suscitan un flujo lineal (22.8%). Por el contrario, alrededor de la mitad de las tareas no exigen para su estudio la aplicación de flujo visual alguno.

En la tabla 4.6 se presentan las frecuencias y porcentajes de las tareas que inducen uno y otro flujo visual.

<i>Análisis general y global unificado. Elementos constitutivos de la visualización. Flujo visual</i>		
Flujo visual	Frec	%
Lineal	584	22.8
Circuito	705	27.53
Nulo	1272	49.67
Total	2561	100

Tabla.4.6. Flujos visuales en los libros colombianos y españoles al tratar el área

Teniendo en cuenta que el flujo en circuito exige posteriormente a la aplicación de un flujo lineal retornar a la figura de inicio, y a continuación, considerar una nueva operación o un nuevo cambio de naturaleza figural, dimensional o de focalización, incluso un nuevo flujo lineal, es claro que la aplicación de un flujo en circuito genera mayor complejidad que la de uno de naturaleza lineal. En un sentido similar asumimos que las tareas donde los flujos visuales no están presentes generan menos complejidad cognitiva en su desarrollo o comprensión que en aquellas donde sí están presentes. Desde esta perspectiva, los resultados muestran que las tareas de los libros que implican flujos visuales de alta complejidad, como es el caso del flujo en circuito, son poco habituales, mientras que el resto de tareas (72.47%) al promover flujos lineales o no introducir ningún tipo de flujo visual, reflejan una complejidad cognitiva de menor grado.

4. 2 Análisis general unificado: complejidad visual y desarrollo de la visualización.

En este apartado abordamos dos de las cuatro cuestiones consideradas en el capítulo: ¿Cuáles son los tipos de visualización predominantes y cuáles no, en el tratamiento del concepto de área en los libros de texto? ¿En qué medida y de qué forma los libros al tratar el área promueven el desarrollo de la visualización e inducen distintos niveles de complejidad visual?

Como se ha indicado en el capítulo de metodología según la manera en que se articulan los elementos constitutivos de la visualización en los libros es posible distinguir 311 formas diferentes en que la visualización tiende a ser mostrada (Anexo 3.3). Para dar respuesta a los objetivos de la investigación hemos agrupado estas formas de expresión visual en cuatro categorías, según el grado de complejidad introducido (de mayor a menor grado) son: visualización dinámica total (complejidad MÁX), visualización dinámica parcial simple (complejidad INT-PC), visualización dinámica parcial (complejidad INT-P) y visualización estática (complejidad MÍN); siendo la visualización dinámica parcial la categoría donde el desarrollo de la visualización es factible (pp. 147-148).

En primer lugar se caracterizarán las tareas de los libros en función de los niveles de complejidad promovidos, de los tópicos de área y de los ciclos de enseñanza considerados; y, posteriormente, se presentará una síntesis con los datos extraídos de este nivel de análisis y se plantearán algunas conclusiones.

4.2.1 Caracterización unificada de las tareas de los libros de texto.

En la tabla 4.7 se evidencia que el nivel de complejidad más promovido es INT-PC seguido de INT-P, segundo, y de MÍN, tercero, mientras que el MÁX es el menos incluido y solo se hace en menos del 8% de las tareas.

<i>Análisis general unificado. Tipos de visualización. 2561 tareas</i>			
Complejidad	Descriptor	Frec	%
MÁX	61	202	7.89
INT-PC	101	937	36.6
INT-P	142	863	33.66
MÍN	7	559	21.83
Total	311	2561	100

Tabla 4.7. Niveles de complejidad visual promovidos en los libros colombianos y españoles

Estos resultados indican que los manuales escolares favorecen niveles de complejidad intermedios (INT-PC e INT-P) mientras que el mayor (MÁX) y el menor (MÍN) son menos habituales. En cuanto a que la visualización sea un objeto de desarrollo, es decir, que la visualización DP (o complejidad INT-P) sea considerada, lo es de forma considerable en una tercera parte de las tareas.

Análisis local. En CA (tabla 4.8) no existen diferencias significativas en cómo los libros promueven las complejidades MÁX y MÍN pues en ningún caso el porcentaje supera el 9% y, en particular, en C1 es inferior al 1%. Los niveles de complejidad intermedia son los más contemplados con porcentajes de tareas entre el 41,88% y el 60,56% para INT-PC y entre el 27,23% y el 56,85% para INT-P. En cuanto a la complejidad predominante es INT-PC en el segundo y tercer ciclo, e INT-P en el primero; y la menor es MÍN en el primero, MÁX en el tercero y tanto MÍN como MÁX en el segundo ciclo.

Los porcentajes de MÁX y MÍN aumentan de un ciclo al siguiente mientras que los niveles de complejidad intermedios aparecen de forma cíclica pero de manera distinta: en INT-P los porcentajes más altos están en el primer y tercer ciclo y el menor en el segundo, mientras que INT-PC alcanza su máxima expresión en el segundo ciclo.

<i>Análisis general unificado. Local. Complejidad visual y desarrollo de visualización. 2561 tareas</i>								
Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	3	0.76	39	6.1	31	7.42	73
	INT-PC	165	41.88	387	60.56	227	54.31	779
	INT-P	224	56.85	174	27.23	124	29.66	522
	MÍN	2	0.51	39	6.1	36	8.61	77
Total		394	100	639	99.99	418	100	1451
MA	MÁX	0	0	27	12.16	85	13.62	112
	INT-PC	6	8.95	15	6.76	116	18.59	137
	INT-P	58	86.57	89	40.09	179	28.68	326
	MÍN	3	4.48	91	40.99	244	39.1	338
Total		67	100	222	100	624	99.99	913
PA	MÁX	1	3.7	0	0	16	15.84	17
	INT-PC	2	7.41	12	17.39	7	6.93	21
	INT-P	5	18.52	1	1.45	9	8.91	15
	MÍN	19	70.37	56	81.16	69	68.32	144
Total		27	100	69	100	101	100	197

Tabla 4.8. Complejidad y desarrollo visual. Análisis general y local

En la MA en los ciclos segundo y tercero las complejidades MÍN e INT-P son las más contempladas con porcentajes superiores al 29%, en el primer caso, y al 39%, en el segundo. MÁX e INT-PC aparecen con porcentajes inferiores al 14% y 19% respectivamente. En el primer ciclo, INT-P es la complejidad más promovida y MÍN la menos considerada y mientras que menos del 10% de las tareas inducen a INT-PC, en ninguna de las tareas tiene en cuenta a MÁX a. Los porcentajes de tareas donde INT-PC y MÍN aparecen considerados de forma cíclica siendo el tercer ciclo donde está el mayor para INT-PC y el segundo ciclo para MÍN. Por el contrario, MÁX es promovido de forma ascendente e INT-P descendientemente. MÍN es el nivel de complejidad predominante en el segundo y tercer ciclo mientras que en el primero lo es INT-P. De forma distinta, el nivel de complejidad menor corresponde a MÁX en los ciclos primero y tercero y a INT-PC en el segundo.

En cuanto a PA, MÍN es la complejidad imperante en todos los ciclos mientras que MÁX es la menor en los dos primeros e INT-PC en el último. Aunque todos los niveles de complejidad aparecen de forma cíclica el comportamiento difiere de un caso a otro: los porcentajes de MÁX e INT-P disminuye del primer ciclo al segundo y aumentan en el tercero mientras que en MÍN e INT-PC el mayor está en C2.

Análisis global. En cuanto a los tópicos el comportamiento de los textos varía de uno a otro (tabla 4.9). Para CA los libros consideran las complejidades MÁX y MÍN con porcentajes pequeños pero sin llegar a ser despreciables mientras que INT-PC es asumida en más de la mitad de las tareas e INT-P con aproximadamente la tercera parte de las tareas. El nivel de complejidad predominante es INT-PC y el menor es MÁX. Estos resultados muestran, por un lado, que los libros privilegian niveles de complejidad intermedios mientras que los niveles MÁX y MÍN aparecen en bajos porcentajes (que no superan el 6% de las tareas). Por lo tanto más de la tercera parte de las tareas de la CA promueven el desarrollo de la visualización.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis general unificado. Global. Tópicos- 2561 tareas</i>							
Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	73	5.03	112	12.27	17	8.63	202
INT-PC	779	53.69	137	15	21	10.66	937
INT-P	522	35.97	326	35.71	15	7.61	863
MÍN	77	5.31	338	37.02	144	73.1	559
Total	1451	100	913	100	197	100	2561

Tabla 4.9. Complejidad y desarrollo visual. Análisis general global por tópicos

En MA la complejidad INT-P también es incluida en más de la tercera parte de las tareas y, si bien la diferencia entre los porcentajes de INT-P y de MÍN es despreciable, es MÍN la más consideradas para este tópico. En cambio, las tareas con los niveles de complejidad MÁX e INT-PC aparecen con los porcentajes más bajos. En MA el nivel de complejidad predominante es MÍN y el menor es MÁX.

En el tópico donde se consideran las relaciones entre el área y el perímetro, MÍN es el nivel de complejidad predominante mientras que los demás se tienen en cuenta en pequeños porcentajes pero no despreciables y que en ningún caso alcanzan el 11%, siendo INT-P el nivel de complejidad menor.

Si hacemos el estudio según los ciclos de enseñanza (tabla 4.10) se evidencia que en el primer ciclo el nivel de complejidad predominante es INT-P y MÁX el menor. INT-PC después de INT-P es la más contemplada con un porcentaje del 35.45%, y MÍN solo en el 4.92% de las tareas.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis general unificado. Global. Ciclos-2561 tareas</i>							
Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	F	%	F	%	F	%	
MÁX	4	0.82	66	7.1	132	11.55	202
INT-PC	173	35.45	414	44.52	350	30.62	937
INT-P	287	58.81	264	28.38	312	27.3	863
MÍN	24	4.92	186	20	349	30.53	559
Total	488	100	930	100	1143	100	2561

Tabla 4.10. Complejidad y desarrollo visual. Análisis general global por ciclos

En el segundo y tercer ciclo la complejidad MÁX es la menor e INT-PC la predominante. MÍN aparece de forma distinta mientras que en los dos primeros ciclos es la segunda menos considerada, en el ciclo 2 ocupa el segundo lugar entre las más contempladas. Aunque INT-P aparece con porcentajes similares en el segundo y tercer ciclo, en el segundo es la más considerada después de la complejidad predominante y en el tercer ciclo es la tercera más contemplada. En el segundo y tercer ciclo el desarrollo de la visualización es promovido en menos de la tercera parte de las tareas.

Mientras que para MÁX y MÍN los porcentajes aumentan de un ciclo al siguiente, para INT-PC se consideran cíclicamente y para INT-P descendentemente.

4.2.2 Síntesis y conclusión.

A manera de síntesis y con el propósito de plantear algunas conclusiones que se desprenden del análisis general unificado reorganizaremos la información en cuatro frentes (uno por cada nivel de complejidad). El primero caracteriza cómo los libros inducen el desarrollo de la visualización, es decir, cómo la complejidad INT-P es promovida; el segundo y el tercero muestran cómo las tareas de área donde es necesario aplicar lo visualmente aprendido son consideradas por los textos, en otras palabras, cómo se promueven los niveles de complejidad MÁX e INT-PC; y el cuarto, considera cómo se induce la complejidad MÍN.

Desarrollo de la visualización (complejidad INT-P). Solo en dos ciclos (uno en CA otro en MA) es promocionado a través de más de la mitad de las tareas mientras que en PA la mayor parte de los ciclos lo inducen en menos del 10% de ellas.

En CA y MA la enseñanza de la visualización se promueve de forma diferente que en PA. Mientras que en los dos primeros tópicos es una CVI y es el nivel de complejidad imperante en uno de los ciclos, en PA es una CVm. Además, no representa el nivel de complejidad menor en ninguno de los ciclos de ninguno de los tópicos. Para MA los porcentajes descienden mientras que en CA y PA se consideran de forma no descendente. Desde el análisis local, pues, el desarrollo visual es contemplado en condiciones más propicias para CA y MA que para PA.

En cuanto al análisis global, el desarrollo visual es contemplado en más de la mitad de las tareas en uno de los ciclos (C1) y en menos del 10% en uno de los tópicos (PA). Además, es una CVI para la que los porcentajes de tareas descienden de un ciclo a otro y es el nivel de complejidad predominante en uno de los ciclos y el menor en uno de los tópicos (PA). Por ello, en CA y MA se generan condiciones más propicias que en PA para el desarrollo de la visualización.

Por otra parte, en CA y C1 están los porcentajes mayores de tareas que permiten el desarrollo visual, y en PA y en C3 los menores.

En la tabla 4.1.1 se representa el tópico y el ciclo dónde las tareas que incluyen cada nivel de complejidad son incluidas con el mayor y el menor porcentaje (análisis global). Son tres los aspectos a considerar: el nivel de complejidad y dos pares ordenados, en el primero la primera componente del par alude al tópico y la segunda al ciclo donde está el mayor porcentaje; y en el segundo par, la primera componente considera el tópico y la segunda el ciclo donde está el menor porcentaje.

<i>Análisis general unificado. Global. Mayor y menor desarrollo visual</i>		
Complejidad	Mayores porcentajes	Menores porcentajes
	(T,C)	(T,C)
MAX	(MA,C3)	(CA,C1)
INT-PC	(CA,C2)	(PA,C3)
INT-P	(CA,C1)	(PA,C3)
MIN	(PA,C3)	(CA,C1)

Tabla 4.11. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen cada nivel de complejidad

Complejidad MÁX. Solo en dos ciclos de enseñanza en relación con MA y uno relativo a PA más del 10% de las tareas la promueven mientras que no se contempla en uno relativo a MA y en otro a PA.

El análisis local también muestra que en todos los tópicos es inducida de igual manera siendo una CVm donde los porcentajes no disminuyen entre los ciclos y en dos es el nivel de complejidad menor.

A nivel global se incluye en más del 10% de las tareas solo en uno de los tópicos (MA) y uno de los ciclos (C3) aunque tampoco disminuye entre los ciclos. Es CVm y en dos de los tópicos (CA y MA) y en todos los ciclos es la que tiene un menor porcentaje. De esta forma, tanto local como globalmente, en relación a los tópicos CA y MA la complejidad MÁX se promueven en condiciones menos propicias que en PA. Por otra parte, para MA y C3 hay un mayor porcentaje de tareas que suscitan a MÁX estando en CA y C1 los menores.

Complejidad INT-PC. Es tenida en cuenta en más de la mitad de las tareas en dos ciclos de CA y en menos del 10% en dos ciclos de MA y dos de PA.

CA es el tópico donde más se contempla este nivel de complejidad mientras que en MA y PA lo hace en menor medida. Es una CVM predominante en dos ciclos de CA y en ninguno de MA siendo en PA una CVm. Solo en MA es el nivel de complejidad menor en uno de los ciclos y en los tres tópicos se considera con porcentajes que no disminuyen de un ciclo al siguiente.

El análisis global muestra que solo en uno de los tópicos (CA) supera la mitad de las tareas que lo promueven mientras que en otro (PA) es inferior a la décima parte. En CA se dan las condiciones más propicias para que sea contemplada siendo CVM, no descendente y predominante en ese tópico y en dos ciclos. Los mayores porcentajes de tareas donde aparece es en CA y C2 y los menores están en PA y en C3 (tabla 4.11).

Complejidad MÍN. Es contemplado en menos del 10% de las tareas en todos los ciclos en cuanto a CA y en uno en lo relativo a MA.

En PA y MA es una CVM. En todos los ciclos en PA y en dos en MA el porcentaje de tareas en las que se considera este nivel de complejidad lo hace con el mayor porcentaje. Es el nivel de complejidad menor en dos ciclos de CA (y en ninguno de MA y PA). Aparece en condiciones más propicias en PA seguido de MA y de CA.

Con respecto al análisis global, en uno de los ciclos (C3) supera la mitad de las tareas mientras que en otro ciclo (C1) y un tópico (CA) es no alcanza la décima parte de ellas. En la MA y PA es considerada de forma más propicia que en CA. En ninguno de los tópicos es el nivel de complejidad menor. A nivel de ciclos, en ninguno es predominante, ni se considera con el menor porcentaje siendo PA y C3 donde es menos contemplada y CA y C1 donde aparece con más frecuencia.

MÍN es considerado local y globalmente de forma no descendente.

De forma sintética se condensa en la tabla 4.12 la información presentada en los análisis local y global, donde cada nivel de complejidad es caracterizado en función de los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (CVM, CVI y CVm), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis general unificado. Complejidad visual. Local y global. Síntesis</i>				
Complejidad	Análisis local			Análisis global
	CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)				
MÁX	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,5)
INT-PC	CVM+ND+(2,0)	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,0)	CVm+ND+(0,3)
INT-P	CVI+ND+(1,0)	CVI+D+(1,0)	CVm+ND+(0,0)	CVI+D+(1,1)

MÍN	CV _m +ND+(0,2)	CVM+ND+(2,0)	CVM+ND+(3,0)	CVM+ND+(2,0)
------------	---------------------------	--------------	--------------	--------------

Tabla 4.12: Síntesis de la caracterización de los niveles de complejidad

4.3 Análisis comparativo por editoriales: complejidad visual y desarrollo de la visualización.

En este apartado abordamos la tercera de las cuestiones consideradas en el capítulo: ¿En qué ciclos y para qué tópicos cada una de las editoriales inducen el desarrollo de la visualización y qué niveles de complejidad visual promueven? En este sentido, se caracterizarán inicialmente las editoriales consideradas en la investigación: tres colombianas (CS, CSM y CV) y tres españolas (ES, ESM y EA) según sean contemplados los cuatro niveles de complejidad y posteriormente, con el propósito de sintetizar y plantear algunas conclusiones de los datos extraídos, se compararan las editoriales a partir de cada uno de los niveles de complejidad.

4.3.1 Caracterización de las editoriales.

En las editoriales colombianas MÍN, en primer lugar, y MÁX, en segundo, son los niveles de complejidad menos promovidos (tabla 4.13); y en las españolas, MÁX es la que menos se considera y MÍN ocupa la tercera posición en una de las editoriales y la segunda en las restantes. En cuanto a INT-PC es la más promovida en las editoriales españolas pero en solo una de las colombianas y en las restantes representa el segundo de los niveles más contemplados.

Editorial	MÁX		INT-PC		INT-P		MÍN		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CS	35	8.43	117	28.19	190	45.78	73	17.59	415
CSM	13	3.07	153	36.08	143	33.73	115	27.12	424
CV	20	4.52	166	37.56	213	48.19	43	9.73	442
ES	54	13.5	128	32	104	26	114	28.5-2	400
ESM	31	6.78	210	45.95	85	18.6	131	28.66-2	457
EA	49	11.58	163	38.53	128	30.26	83	19.62-3	423

Tabla 4.13. Complejidad y desarrollo visual por editoriales

Los datos de la tabla anterior también demuestran que las tareas que incluyen el desarrollo de la visualización (complejidad INT-P) aparecen con los mayores porcentajes en dos editoriales colombianas pero en ninguna de las españolas. En la mayoría de las editoriales españolas es la tercera de las formas de complejidad más promovidas. En una de las editoriales colombianas y en una de las españolas los porcentajes de tareas que inducen el desarrollo visual ocupan el segundo lugar.

En los anexos 4.1 al 4.5 se señalan la frecuencia y porcentaje de las tareas de cada editorial según el tipo de complejidad visual así como el apartado y el grado educativo considerado.

Editorial CS

Análisis local. Para el tópico CA (tabla 4.14) se puede comprobar que se promueve la complejidad visual de forma similar en el segundo y tercer ciclo; en ellos INT-P e INT-PC son las más contempladas mientras que MÍN y MÁX son las menos consideradas. Las tareas que inducen a MÁX y MÍN no representan en ninguno de los ciclos la quinta parte de las tareas mientras que en INT-P e INT-PC varían entre el 26.12% y el 52.72%. En el primer ciclo, INT-P es la de mayor porcentaje mientras que cada una de las tres restantes están presentes en porcentajes despreciables.

El nivel de complejidad predominante es INT-PC tanto en el segundo como en el tercer ciclo mientras que el menor es MÁX en el segundo ciclo y MÍN en el tercero donde no es considerada. En el primer ciclo la complejidad imperante es INT-P y MÁX, MÍN e INT-PC tienen un porcentaje escaso representadas en cada caso por un 2.5% de las tareas.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Local. CS-415 tareas</i>								
Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	2	2.5	11	8.21	11	20	24
	INT-PC	2	2.5	62	46.27	29	52.72	93
	INT-P	74	92.5	35	26.12	15	27.27	124
	MÍN	2	2.5	26	19.4	0	0	28
Total		80	100	134	100	55	99.99	
MA	MÁX	0	0	9	15.5	2	4.54	11
	INT-PC	2	6.66	4	6.9	16	36.36	22
	INT-P	26	86.66	24	41.4	16	36.36	66
	MÍN	2	6.66	21	36.2	10	22.72	33
Total		30	99.98	58	100	44	99.98	
PA	MÁX	0	0	0	0	0	0	0
	INT-PC	0	0	2	100	0	0	2
	INT-P	0	0	0	0	0	0	0
	MÍN	4	100	0	0	8	100	12
Total		4	100	2	100	8	100	415

Tabla 4.14. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial CS

Con porcentajes de MÁX que van del 2.5% en el primer ciclo al 20% en el tercero y de INT-PC que fluctúan entre el 2.5% en el primero al 52.72% en el tercero, MÁX e INT-PC son incluidas ascendentemente. INT-P y MÍN, por su parte, lo son cíclicamente.

En cuanto al desarrollo de la visualización, al menos en uno de los ciclos el porcentaje de tareas que lo promueven es el mayor; además, como se resaltó anteriormente, la visualización es incluida cíclicamente siendo el primer ciclo donde más se enfatiza mientras que en los restantes menos del 28% de las tareas lo consideran.

En cuanto a MA, mientras que en el primer ciclo INT-P es la complejidad más considerada, INT-PC y MÍN son poco contempladas y MÁX no se tienen en cuenta. En el segundo ciclo las tareas más consideradas son (en su orden) la que incluyen a INT-P y MÍN, mientras que las que promueven a MÁX e INT-PC solo son tenidas en cuenta en pequeños porcentajes. Y, en el tercer ciclo, tanto INT-P como las INT-PC son las más contempladas seguidas de MÍN y MÁX; las tareas que incluyen a MÁX solo representan el 4.54% en el tercer ciclo.

Los resultados anteriores demuestran que en MA la complejidad visual subyace de forma distinta de un ciclo a otro mientras que el MÁX no supera el 16% de las tareas en ninguno de los ciclos, MÍN está en porcentajes mayores en el segundo y tercer ciclo y es poco considerada en el primero. En cuanto a INT-PC aparece de forma considerable en el tercer ciclo pero no en los restantes donde solo el 10% de las tareas la incluyen.

Con respecto al nivel de complejidad menor hay diferencias entre el primer y tercer ciclo, y el segundo; mientras que en los dos primeros ciclos es MÁX en el tercero es INT-PC. Por el contrario, el nivel predominante, como se puso en evidencia anteriormente, coincide en todos los ciclos (INT-P).

También se observan similitudes en cómo se promueve la complejidad visual en los niveles MÁX y MÍN y diferencias en cómo se hace en los INT-PC y INT-P. Las dos primeras están incluidas de forma cíclica mientras que en las segundas los porcentajes ascienden de un ciclo a otro para INT-PC y descienden para INT-P. Los ciclos donde más se promueve MÁX y MÍN son el segundo y el primero mientras que en el tercero se considera con un mayor porcentaje de tareas INT-P e INT-PC. Por otra parte, en el primer ciclo es donde se induce MÁX, MÍN e INT-PC con el menor porcentaje de tareas, la INT-P, por su parte, tiene esta cualidad en el tercero de los ciclos, pero, mientras que en los tres primeros casos el porcentaje siempre es inferior al 7% en el último asciende al 36.36%.

El desarrollo de la visualización es considerada con el mayor porcentaje de tareas en todos los ciclos apareciendo con porcentajes que decrecen de un ciclo a otro.

En el tópico donde se consideran las relaciones entre el área y el perímetro la complejidad visual se comporta de igual forma en el primer y tercer ciclo donde MÍN es la única promovida; mientras que en el segundo ciclo INT-PC es el único nivel de complejidad considerado. INT-PC y MÍN son promovidos cíclicamente y MÁX e INT-P no son

contemplados en este tópico. El desarrollo de la visualización no es tenida en cuenta en ninguno de los ciclos de PA.

Análisis global. En cuanto a los tópicos (tabla 4.15) mientras que en CA y MA se promueven todos los niveles de complejidad, en PA solo se asumen el INT-PC y el MÍN siendo el primero el nivel de complejidad menor y el segundo el predominante.

En CA y MA tanto el nivel predominante (INT-DP) como el menor (MÁX) coinciden y en ambos casos el porcentaje de tareas que los induce son similares entre sí. En cuanto al INT-PC y al MÍN se consideran de forma distinta de un tópico a otro. Mientras que en CA el INT-PC es el segundo más promovido en MA es uno de los menos considerados; inversamente, el MÍN es el segundo más enfatizado en MA uno de las menos tratados en CA.

*Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.
Tópicos. CS- 415 tareas*

Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	24	8.92	11	8.33	0	0	35
INT-PC	93	34.57	22	16.67	2	14.28	117
INT-P	124	46.1	66	50	0	0	190
MÍN	28	10.41	33	25	12	85.71	73
Total	269	100	132	100	14	99.99	415

Tabla 4.15. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial CS

Así, pues, el desarrollo de la visualización es considerado de forma prioritaria en CA y MA y no es tenido en cuenta en C3. MA es el tópico donde está la mayor proporción de tareas que promueven el desarrollo de la visualización seguido de CA.

Con relación a dónde se induce con mayor énfasis la complejidad MÍN es en PA mientras que en CA solo el 10.41% de las tareas la promueven. En cuanto a MÁX e INT-PC son más enfatizadas en MA y CA y menos consideradas en PA.

Si nos centramos en los ciclos (tabla 4.16) el segundo y el tercero promueven la complejidad visual de forma similar. En ambos el nivel de complejidad predominante es INT-PC, el menor es MÁX, e INT-P y MÍN son tratados de forma similar (segundo y tercero más considerados).

*Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.
Ciclos. CS- 415 tareas*

Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	2	1.75	20	10.31	13	12.15	35
INT-PC	4	3.51	68	35.05	45	42.06	117
INT-P	100	87.72	59	30.41	31	28.97	190
MÍN	8	7.02	47	24.23	18	16.82	73
Total	114	100	194	100	107	100	415

Tabla 4.16. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial CS

En el primer ciclo el nivel de complejidad menor también es MÁX pero en este caso el predominante es INT-P y los niveles INT-PC y MÍN son, respectivamente, el tercero y el segundo más considerados. Por otra parte, en el tercer ciclo es donde INT-P e INT-PC son más promovidos; y los ciclos 1 y 2 donde la INT-P y la MÍN (respectivamente) son mayormente contemplados. Por el contrario, en el primer ciclo, MÁX, MÍN e INT-P son menos considerados y en el tercero el MAX tiene esta característica. Los niveles de complejidad MÁX e INT-PC son incluidos con porcentajes de tareas que aumenta de un ciclo al siguiente mientras que en el INT-P y el MÍN respectivamente descienden o son cíclicos.

En cuanto a cómo CS promueve el desarrollo de la visualización globalmente y a nivel de ciclos, es predominante en un ciclo (C1) y tenida en cuenta con porcentajes que disminuyen de un ciclo al siguiente. En C1 es donde se enfatiza el mayor porcentaje de tareas que lo incluyen (más de la mitad de las tareas de este ciclo cumplen tal función) mientras que en los otros ciclos menos de la tercera parte lo consideran.

EDITORIAL CSM

Análisis local. En CA (tabla 4.17) el primero y el segundo ciclo es donde la complejidad visual se comporta de forma similar, el porcentaje de MÁX y MÍN o es nulo o es despreciable mientras que en el tercer ciclo asciende al 12.94% y al 10.59% respectivamente; siendo MÍN en el primer ciclo y junto a MÁX en el segundo la segunda de las complejidades menos consideradas; según el caso, cada nivel es incluido de un ciclo a otro cíclica o ascendentemente.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Local. CSM-424 tareas</i>								
Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	1	1.04	0	0	11	12.94	12
	INT-PC	49	51.04	61	74.39	36	42.35	146
	INT-P	46	47.92	21	25.61	29	34.12	96
	MÍN	0	0	0	0	9	10.59	9
Total		96	100	82	100	85	100	263
MA	MÁX	0	0	1	1.41	0	0	1
	INT-PC	4	14.28	1	1.41	2	5	7
	INT-P	23	82.14	21	29.58	3	7.5	47
	MÍN	1	3.57	48	67.6	35	87.5	84
Total		28	99.99	71	100	40	100	139
PA	MÁX	0	0	0	0	0	0	0
	INT-PC	0	0	0	0	0	0	0
	INT-P	0	0	0	0	0	0	0
	MÍN	11	100	7	100	4	100	22
Total		11	100	7	100	4	100	22

Tabla 4.17. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial CSM

Los niveles intermedios, al contrario, son los más tenidos en cuenta siendo INT-PC el nivel imperante de un ciclo a otro e INT-P el segundo más considerado. El segundo ciclo es donde el porcentaje de INT-PC alcanza el mayor valor mientras que en el primero y en el tercero solo llega al 51.04% y al 42.35%. Tanto INT-PC como INT-P son incluidos de forma cíclica.

El desarrollo de la visualización no es promovido en ninguno de los ciclos con la más alta proporción de las tareas y se suscita de forma cíclica. En este sentido, en el primer y tercer ciclo se induce con un mayor porcentaje de tareas que en el segundo; en los dos primeros casos con más de la tercera parte de las tareas y en el segundo con alrededor de la cuarta parte.

Con respecto al tópico MA, el ciclo 1 destaca porque las tareas que inducen a INT-PC y a MÍN son poco contempladas, las que consideran a MÁX no se tienen en cuenta y las que incluyen a INT-PC son las más consideradas. La situación es diferente en el tercer ciclo donde MÁX, INT-PC e INT-P, en su orden, son poco o nulamente consideradas (0%, 5% y 7.5% respectivamente). En el segundo ciclo son dos los tipos de tareas que menos se tienen en cuenta, las que consideran a MÁX y a INT-PC mientras que las que promueven a MÍN y a INT-P son mayormente promovidas. Estos resultados muestran que mientras que el nivel de complejidad menor es el mismo en todos los ciclos (MÁX), el predominante es (MÍN) en el segundo y tercer ciclo y en el primero es (INT-P)

Los porcentajes de tareas que incluyen a MÁX e INT-PC son de un ciclo al siguiente cíclicos mientras que los relativos a INT-PC son descendentes y los de MÍN ascendentes. Solo en el segundo ciclo se inducen tareas con un nivel de complejidad MÁX pero se hace con un porcentaje despreciable de tareas. El primer ciclo, por su parte, es donde la INT-PC es más contemplada, en los otros, las tareas que lo incluyen varían entre 1.41% y el 5%. Por último, MÍN es muy considerado en el segundo ciclo y tercer ciclo y poco en el primero.

Con relación a INT-P en el primer ciclo se promueve con el mayor porcentaje de tareas, en el tercero con el menor y en el segundo con alrededor del 30%. Esos resultados indican que el desarrollo de la visualización en MA es altamente considerado en el primer ciclo pero no en el tercero y que los porcentajes de tareas que lo incluyen descienden de un ciclo a otro.

En cuanto al tópico PA, la complejidad visual se comporta de igual forma en todos los ciclos. En ningún ciclo MÁX, INT-PC e INT-P son promovidas y la totalidad de las tareas incluyen a MÍN siendo el nivel de complejidad predominante mientras que el resto son los menores.

Análisis global. A nivel de tópicos (tabla 4.18) en CA y MA se incluyen todos los niveles de complejidad mientras que en PA solo se contempla a MÍN. En los dos primeros tópicos

tanto el nivel predominante como el menor son de naturaleza diferente: si en CA el porcentaje de tareas que incluyen a INT-PC es el mayor, en MA el mayor porcentaje promueve a MÍN; y si en CA el porcentaje de MÍN es el menor, en MA el menor es para MÁX.

*Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.
Tópicos. CSM- 424 tareas*

Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	12	4.56	1	0.72	0	0	13
INT-PC	146	55.51	7	5.03	0	0	153
INT-P	96	36.5	47	33.81	0	0	143
MÍN	9	3.42	84	60.43	22	100	115
Total	263	99.99	139	99.99	22	100	424

Tabla 4.18. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial CSM

Las complejidades MÁX, INT-PC e INT-P son enfatizadas en CA y la MÍN en MA. En PA no hay tareas que promuevan los niveles MÁX, INT-PC e INT-P mientras que en CA solo el 3.42% de las tareas inducen a MÍN. El desarrollo de la visualización es mayormente considerado en CA que en MA y no se tiene en cuenta en PA.

Si nos centramos en los ciclos de educación (tabla 4.19) el nivel de complejidad menor es MÁX siendo el tercer ciclo donde más se considera y el segundo ciclo donde menos se hace. Esta complejidad es la única que se promueve cíclicamente y la que menos se tiene en cuenta. El nivel predominante, por el contrario, es distinto de un ciclo a otro mientras que en el primero es INT-P, en el segundo es INT-PC y en el tercero es MÍN.

*Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.
Ciclos. CSM- 424 tareas*

Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	1	0.74	1	0.62	11	8.52	13
INT-PC	53	39.36	62	38.75	38	29.46	153
INT-P	69	51.1	42	26.25	32	24.81	143
MÍN	12	8.89	55	34.37	48	37.21	115
Total	135	100	160	99.99	129	100	424

Tabla 4.19. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial CSM

En cuanto a las complejidades INT-PC y MÍN la primera se considera en mayor proporción en el primer y segundo ciclo y la segunda en el segundo y tercero; y son incluidas con porcentajes de tareas que descienden de un ciclo a otro para INT-PC y que aumentan para MÍN.

En cuanto a las tareas que inducen el desarrollo de la visualización se contemplan con porcentajes de tareas que aumentan entre ciclos siendo en el primero donde más de la mitad de las tareas lo contemplan mientras que en los otros ciclos el porcentaje no superan el 27%.

EDITORIAL CV

Análisis local. En CA (tabla 4.20) la complejidad visual es promovida de forma similar en cada uno de los ciclos analizados donde INT-P e INT-PC son las más consideradas con intervalos que varían entre el 43.38% y el 65.35%, y el 34.64% y el 51.47% respectivamente; y las complejidades MÁX y MÍN, al contrario, con porcentajes entre el 0% y el 5.15% y el 0 y el 11.63% son las menos contempladas.

En el primer y tercer ciclo INT-P es el nivel de complejidad predominante, INT-PC es el segundo más considerado y MÁX no es contemplado. En el primer ciclo, MÁX también es la menos inducida. En el segundo ciclo, INT-PC es la complejidad predominante con más de la mitad de las tareas, INT-P el segundo más contemplado, MÍN no es considerado, y MÁX solo es tenido en cuenta en el 5.15% de las tareas.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Local. CV-442 tareas</i>								
Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	0	0	7	5.15	1	1.16	8
	INT-PC	44	34.64	70	51.47	30	34.88	144
	INT-P	83	65.35	59	43.38	45	52.32	187
	MÍN	0	0	0	0	10	11.63	10
Total		127	99.99	136	100	86	99.99	349
MA	MÁX	0	0	11	22	0	0	11
	INT-PC	0	0	10	20	1	16.66	11
	INT-P	9	100	10	20	0	0	19
	MÍN	0	0	19	38	5	83.33	24
Total		9	100	50	100	6	99.99	65
PA	MÁX	1	10	0	0	0	0	1
	INT-PC	2	20	9	60	0	0	11
	INT-P	5	50	0	0	2	66.66	7
	MÍN	2	20	6	40	1	33.33	9
Total		10	100	15	100	3	99.99	28

Tabla 4.20: Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial CV

Los porcentajes de tareas que incluyen a MÁX, INT-P e INT-PC son considerados entre ciclos de forma cíclica mientras que MÍN lo es ascendentemente.

En cuanto a dónde se promueve el mayor y el menor número de tareas que inducen uno u otro nivel de complejidad, MÁX y MÍN son consideradas con pequeños porcentajes en el segundo y tercer ciclo y no se tienen en cuenta en el primero (MÍN tampoco es incluida en el segundo ciclo). Con más de la mitad de las tareas la complejidad INT-PC es la más contemplada en el segundo ciclo y con alrededor de la tercera parte de las tareas la menos consideradas en primer ciclo. INT-P que promueven el desarrollo de la visualización se enfatizan en el primero de los ciclos con más de las dos terceras partes de las tareas y es menos contemplada en el segundo ciclo con el 43.38% de ellas.

Los resultados anteriores muestran que más de la mitad de las tareas de los ciclos 1 y 3 y un 43.38% en C2 promueven el desarrollo de la visualización, y que el desarrollo visual en CA es incluido de forma cíclica. Además, que la enseñanza de la visualización tiende a ser enfatizada en gran medida.

En MA, por su parte, resaltan diferencias significativas en torno a cómo la complejidad visual es promovida de un ciclo a otro. Mientras que en el primero solo se consideran a INT-P, en el tercero se tienen en cuenta las INT-PC y la MÍN, y en el segundo los cuatro niveles de complejidad consideradas en la investigación son contemplados. Además, MÁX tiende a ser promovido en mayor medida en C2 con un 22% de las tareas y no es contemplado ni en el primero ni en el tercero de los ciclos; INT-PC se enfatiza en el segundo ciclo con la quinta parte de las tareas y no se contempla en el primero; MÍN es más considerado en el tercero con porcentajes superiores al 80% de las tareas y no introducido en el primer ciclo; e INT-P es considerado en la totalidad de las tareas en el primer ciclo y no está presente en el tercero.

En cuanto a los niveles imperantes mientras que es el mismo MÍN en los ciclos 2 y 3, en el primero es INT-P el que cumple tal característica. El nivel de complejidad menor varía de un ciclo a otro, si en C1 son MÁX INT-PC y MÍN, en C2 son INT-P e INT-PC, y en C3 tanto MÁX como INT-P tienen dicha cualidad. Por otra parte, MÁX e INT-P son promocionados de igual forma (cíclicamente); e INT-P y MÍN son inducidos, según el caso, con porcentajes de tareas que desciende o ascienden de un ciclo al siguiente.

El desarrollo visual en este tópico se caracteriza por ser decreciente siendo el ciclo 1 donde se promueve con el mayor énfasis mientras que en C3 no es considerada, y en C2 solo el 20% de las tareas lo consideran.

En PA, la mitad o más de la mitad de las tareas de los ciclos 1 y 3 inducen a INT-PC que es el nivel de complejidad predominante mientras que el 20% y el 33.33% de las tareas en uno y otro caso promueven el MÍN; para el primer ciclo el mismo porcentaje de tareas corresponde a INT-P mientras que en el tercero no se promueve; el nivel de complejidad menor en ambos casos es MÁX siendo en C3 donde no se contempla y, como se indicó anteriormente, la INT-PC no es contemplada en el tercer ciclo.

Las complejidades INT-P, INT-PC y MÍN son promovidas cíclicamente mientras que MÁX lo es con porcentajes que descienden de un ciclo al siguiente.

En el primer ciclo es donde se induce el mayor número de tareas que incluyen a MÁX, en el segundo INT-PC y MÍN caracterizan por este hecho, y en el tercer ciclo es donde INT-P es más considerada con las dos terceras partes de las tareas. Por el contrario, en el primer ciclo MÍN tiende a ser menos contemplada; en el segundo, MÁX e INT-P lo son; y en el tercero, MÁX e INT-PC tienen tal característica.

El desarrollo de la visualización caracteriza por ser incluido de forma cíclica, siendo los ciclos 1 y 3 donde más se enfatiza y el segundo donde no se contempla.

Análisis global. La complejidad se introduce de forma distinta de un tópico a otro (tabla 4.21) mientras que en CA y PA, MÁX es el nivel de complejidad menor; en MA, tanto MÁX como INT-PC cumplen con esta característica. El nivel predominante, por su parte, es INT-P en CA, MÍN en MA e INT-PC en PA.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global. Tópicos. CV- 442 tareas</i>							
Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	8	2.29	11	16.92	1	3.57	20
INT-PC	144	41.26	11	16.92	11	39.28	166
INT-P	187	53.58	19	29.23	7	25	213
MÍN	10	2.86	24	36.92	9	32.14	43
Total	349	99.99	65	99.99	28	99.99	442

Tabla 4.21. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial CV

Las complejidades MÁX y MÍN son las menos consideradas en CA y más contempladas en MA. En cuanto a INT-PC es CA donde más se promueve y MA donde menos se tiene en cuenta.

INT-P, por su parte, es promovida en mayor medida en CA siendo menos considerada en PA y con el 29.23% de las tareas en MA. En consecuencia, el desarrollo de la visualización es inducido en los tres tópicos pero es en CA donde se enfatiza.

Con relación a los ciclos de enseñanza (tabla 4.22), en el primero y en el tercero tanto el nivel de complejidad predominante (INT-P) como el menor coinciden (MÁX), en C2 el nivel menor también es MÁX pero el predominante es INT-PC.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global. Ciclos. CV- 442 tareas</i>							
Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	1	0.68	18	8.95	1	1.05	20
INT-PC	46	31.51	89	44.28	31	32.63	166
INT-P	97	66.44	69	34.33	47	49.47	213
MÍN	2	1.37	25	12.44	16	16.84	43
Total	146	100	201	100	95	99.99	442

Tabla 4.22. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial CV

Los niveles MÁX, INT-PC e INT-P son incluidos de un ciclo a otro de forma similar (cíclicamente) mientras que MÍN lo es ascendentemente. En el segundo ciclo se enfatiza las complejidades MÁX e INT-PC y en el primero es donde menos se hace; MÍN es menormente considerado en el primer ciclo y más contemplada en el tercero (16.84%). Por otra parte, MÁX caracteriza por ser la complejidad menos promovida.

INT-P está mayormente presente en el primer ciclo mientras que en el segundo es menos contemplada, en el tercer ciclo alrededor de la mitad de las tareas incluyen esta complejidad. En este sentido, el desarrollo visual es incluido en más de una tercera parte de las tareas de cada ciclo, incluso en el primero a través de más de la mitad de las tareas puesto que en el tópico CA y en dos de los ciclos (C2 y C3) las tareas que consideran a INT-P representan las más considerada.

EDITORIAL ES

Análisis local. En CA (tabla 4.23) el nivel de complejidad predominante en los tres ciclos es INT-PC siendo el primer ciclo donde el porcentaje es mayor seguido del tercero y del segundo. Esta complejidad es por tanto cíclica. En cuanto al nivel de complejidad menor en el segundo ciclo es MÍN, en el tercero es MÁX y en el primero tanto MÍN como MÁX lo son, no habiendo tareas en estos casos con complejidades MÁX o MÍN.

Las complejidades MÁX e INT-P, igual que la INT-PC, aparecen cíclicamente. Es el segundo ciclo es donde MÁX aparece con el mayor porcentaje de tareas mientras que en los demás ciclos no hay tareas con este tipo de complejidad. INT-P, por su parte, a diferencia de la complejidad anterior, es considerada en los tres ciclos, siendo el segundo donde se enfatiza en mayor grado y en el primero donde se hace en menor medida. Las tareas que incluyen la complejidad MÍN aparecen solo en el último ciclo.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Local. ES-400 tareas</i>								
Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	0	0	14	25	0	0	14
	INT-PC	22	95.65%	27	48.21	44	72.13	93
	INT-P	1	4.35	15	26.78	7	11.47	23
	MÍN	0	0	0	0	10	16.39	10
	Total		23	100	56	99.99	61	99.99
MA	MÁX	0	0	5	14.28	35	16.91	40
	INT-PC	0	0	0	0	35	16.91	35
	INT-P	0	0	27	77.14	54	26.09	81
	MÍN	0	0	3	8.57	83	40.1	86
	Total		0	0	35	99.99	207	100.01
PA	MÁX	0	0	0	0	0	0	0
	INT-PC	0	0	0	0	0	0	0
	INT-P	0	0	0	0	0	0	0
	MÍN	0	0	9	100	9	100	18
	Total		0	0	9	100	9	100

Tabla 4.23. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial ES

Los resultados anteriores evidencian que el desarrollo de la visualización en CA es considerado entre ciclos de forma cíclica. Esta editorial, en relación a las anteriores, promueve pocas posibilidades de desarrollo de la visualización puesto que el porcentaje

de tareas que lo consideran en cada uno de los ciclos no superan el 27%, incluso en C1 solo es del 4.35%.

Únicamente en el segundo y tercer ciclo se consideran tareas de la MA. En el primer caso, las más contempladas son las que incluyen a INT-P con más de las dos terceras partes, seguidas de las promueven a MÁX (menos del 15%) y a MÍN (solo el 8.57%), mientras que INT-PC no es contemplada. Así, pues, el nivel de complejidad predominante en el segundo ciclo es INT-P y el menor INT-PC y en el tercer ciclo el predominante es MÍN mientras que MÁX e INT-P representan al menor.

Las complejidades MÁX, MÍN e INT-PC son promovidos entre ciclos con porcentajes que ascienden mientras que para INT-P los porcentajes varían cíclicamente. Por otra parte, el tercero de los ciclos se caracteriza por promover los mayores porcentajes de tareas que inducen complejidades MÁX, MÍN e INT-PC, mientras que INT-P es más considerado en C2.

De acuerdo a lo anterior el desarrollo de la visualización varía cíclicamente y no es considerado en el primer ciclo, mientras que el 77.14% y el 26.09% de las tareas del segundo y tercer ciclo sí lo hacen.

En cuanto a PA, igual que en MA, no hay tareas en el primer y segundo ciclo mientras que en el tercero la totalidad promueven un nivel de complejidad MÍN (nivel predominante). Por tanto el desarrollo de la visualización no es considerado en PA.

Análisis global. Teniendo en cuenta los tópicos independientemente de los ciclos (tabla 4.24) el nivel de complejidad predominante es MÍN en MA y PA mientras que es INT-PC lo es en CA. En cuanto al nivel menor es MIN en CA e INT-PC en MA, en PA son tres los niveles que cumplen con esta característica, ninguno de ellos promovido, a saber: MÁX, INT-PC e INT-P.

Los niveles MÁX e INT-P aparecen en mayor proporción en MA que en el resto de los tópicos y menos tenidos en cuenta en PA donde no son contemplados; por el contrario, INT-PC no es inducido en PA y es el de mayor porcentaje en CA; MÍN, por su parte, está presente en todas las tareas de PA y en menos del 8% de las de CA.

Los resultados previos muestran que el desarrollo de la visualización desde este punto de vista se contempla en mayor medida en las tareas de MA seguido de CA y no es tenido en cuenta en PA; además, en ninguno de los tópicos representa el nivel de complejidad predominante.

*Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.
Tópicos. ES- 400 tareas*

Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	14	10	40	16.53	0	0	54
INT-PC	93	66.43	35	14.46	0	0	128
INT-P	23	16.43	81	33.47	0	0	104
MÍN	10	7.14	86	35.54	18	100	114
Total	140	100	242	100	18	100	400

Tabla 4.24. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial ES

Si nos centramos en los ciclos (tabla 4.25) en el primero solo se contemplan a INT-PC e INT-P teniendo INT-PC los porcentajes mayores. Por el contrario, en el segundo al igual que en el tercer ciclo se consideran los cuatros niveles de complejidad asumidos en el estudio. En C2, INT-P, seguido de INT-PC son los más contemplados y MÍN el menos considerado; mientras que en C3, MÍN en primer lugar e INT-PC en segundo son los de más altos porcentajes y MÁX el que menos se tiene en cuenta. Lo anterior muestra que la complejidad predominante varía de un ciclo a otro: INT-PC (C1), INT-P (C2) y MÍN (C3); igual sucede con el nivel de complejidad menor: MÁX y MÍN (C1), MÍN (C2) y MÁX (C3).

*Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.
Ciclos. ES- 400 tareas*

Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	0	0	19	19	35	12.63	54
INT-PC	22	95.65	27	27	79	28.52	128
INT-P	1	4.35	42	42	61	22.02	104
MÍN	0	0	12	12	102	36.82	114
Total	23	100	100	100	277	99.99	400

Tabla 4.25. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial ES

Si nos centramos en dónde se enfatiza uno y otro nivel de complejidad es en el segundo ciclo donde aparecen en mayor medida MÁX e INT-P, mientras que en el primero y en el tercero son INT-PC y MÍN las que cumplen con esta cualidad. Por el contrario, en el primer ciclo donde MÁX y MÍN no son considerados y solo un 4.35% de las tareas generan una complejidad INT-P, y en el segundo ciclo donde la INT-PC es menos contemplada que en el resto de los ciclos.

Las complejidades MÁX, INT-PC e INT-P varían entre ciclos de forma cíclica mientras que la MÍN lo hace ascendentemente.

En cuanto a las tareas que promueven el desarrollo de la visualización en esta editorial solo en uno de los ciclos (C2) y en ninguno de los tópicos constituyen el mayor porcentaje, y como se mencionó previamente se incluye de forma cíclica. En el segundo ciclo es donde está el mayor porcentaje de tareas que lo promueven, mientras que en el primero menos del 5% lo hacen y en el tercero alrededor de la quinta parte de las tareas lo consideran.

EDITORIAL ESM

Análisis local. En CA las complejidades MÁX y MÍN son las menos incluidas mientras que INT-P e INT-PC son las más consideradas; en el segundo caso con porcentajes que varían entre el 58.54% y el 90.38%, y entre el 8.65% y el 38.08% respectivamente. INT-PC es el nivel de complejidad predominante en los tres ciclos y MÁX y MÍN, al no ser contempladas, respectivamente en el primer, y en el segundo y tercer ciclo, representan el menor.

Las complejidades MÁX y MÍN son incluidas con el mayor porcentaje de tareas en el tercer ciclo pero con valores reducidos, INT-PC lo es en el segundo con un porcentaje muy considerable e INT-P tiene tal particularidad en el primero y se asume en el 38,38% de las tareas. En cuanto a los ciclos donde menos se tienen en cuenta cada una de las complejidades, en el segundo y tercero es donde respectivamente INT-P e INT-PC se comportan de tal forma, mientras que en el primero y segundo respectivamente MÁX y MÍN no son contempladas.

Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Local. ESM-457 tareas

Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	0	0	1	0.96	8	9.76	9
	INT-PC	26	61.9	94	90.38	48	58.54	168
	INT-P	16	38.09	9	8.65	21	25.6	46
	MÍN	0	0	0	0	5	6.1	5
Total		42	99.99	104	99.99	82	100	228
MA	MÁX	0	0	0	0	22	12.72	22
	INT-PC	0	0	0	0	39	22.54	39
	INT-P	0	0	1	100	36	20.81	37
	MÍN	0	0	0	0	76	43.93	76
Total		0	0	1	100	173	100	174
PA	MÁX	0	0	0	0	0	0	0
	INT-PC	0	0	0	0	3	12.5	3
	INT-P	0	0	1	3.45	1	4.17	2
	MÍN	2	100	28	96.55	20	83.33	50
Total		2	100	29	100	24	100	55

Tabla 4.26. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial ESM

Las complejidades MÁX y MÍN son incluidas con porcentajes de tareas que no ascienden entre ciclos mientras que INT-PC e INT-P lo hacen de forma cíclica. El desarrollo visual, pues, es incluido de forma cíclica siendo el segundo de los ciclos donde se induce en menor grado mientras que en el primero y en el tercero se hace con un mayor porcentaje de tareas que en ambos casos superan la cuarta parte de ellas.

La MA no es contemplada en el primer ciclo mientras que en el segundo INT-P es la única complejidad considerada siendo el nivel predominante mientras que MÁX, MÍN e INT-PC representan el nivel menor. En el tercer ciclo los cuatro niveles de complejidad

son promovidos siendo MÍN el nivel predominante y MÁX el menor mientras que INT-PC e INT-P son incluidas en un poco más de la quinta parte de las tareas. En cuanto a las complejidades MÁX, MÍN e INT-PC se presentan con porcentajes que ascienden de un ciclo al siguiente mientras que INT-P es contemplada de forma cíclica

El desarrollo de la visualización, pues, es promovido en el segundo y tercer ciclo mas no en el primero y es en el segundo donde más se incluye y se hace con la totalidad de las tareas mientras que en el tercero es donde menos se contempla.

En PA, al no ser incluido MÁX en ninguno de los ciclos, INT-PC en los dos primeros e INT-P en el tercero son, según el caso, el nivel de complejidad menor. MÍN, por su parte, es el predominante en todos los ciclos con porcentajes que descienden de uno a otro y que varían entre el 100% y el 83, 33%. Por otra parte, INT-PC solo es considerada en el tercer ciclo con un porcentaje de tareas que apenas superan el 10% e INT-P es promocionada en el segundo y tercer ciclo con porcentajes muy pequeños. Tanto INT-PC como INT-P son incluidas con porcentajes que ascienden de un ciclo al siguiente mientras que en MÍN son considerados de forma decreciente.

Los resultados anteriores indican que el desarrollo de la visualización no es prioritario en PA pues o no es incluido o de serlo es a través de pequeños porcentajes de tareas que en ningún caso superan el 5%. También se observa que el desarrollo visual es promovido de forma cíclica.

Análisis global, teniendo en cuenta los tópicos (tabla 4.27) hay similitudes en MA y PA. En ambos MÍN es el nivel de complejidad predominante y MÁX el menor. En CA tanto el nivel predominante como el menor son de naturaleza diferente: INT-PC y MÍN respectivamente.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.</i>							
<i>Tópicos. ESM- 457 tareas</i>							
Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	9	3.95	22	12.64	0	0	31
INT-PC	168	73.68	39	22.41	3	5.45	210
INT-P	46	20.17	37	21.26	2	3.64	85
MÍN	5	2.19	76	43.68	50	90.91	131
Total	228	99.99	174	99.99	55	100	457

Tabla 4.27. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial ESM

La MA es el tópico donde las complejidades MÁX e INT-P son más consideradas pero se incluyen con porcentajes poco representativos mientras que INT-P es más contemplado en CA y MÍN en PA teniéndose cuenta, en uno y otro caso, en la gran mayoría de las tareas. Con relación a qué tópicos fomentan en menor proporción estos niveles de complejidad, en PA, MÁX no es inducido mientras que INT-PC e INT-P lo son con

porcentajes reducidos y en CA es donde esta situación se da para MÍN siendo un porcentaje despreciable de tareas quien lo considera.

El desarrollo de la visualización, por su parte, no se caracteriza por ser promovido en la mayoría de las tareas de ninguno de los ciclos, por el contrario, es con porcentajes muy pequeños que varían entre 3.64% en PA y el 21.26% en MA que esta editorial suscita el desarrollo de la visualización. En cuanto a CA el desarrollo visual es contemplado en el 20.17% de las tareas.

Con respecto a cómo en los ciclos de enseñanza (tabla 4.28) se promueve uno u otro nivel de complejidad, los niveles predominante y menor coinciden tanto en el primer ciclo como en el segundo, siendo INT-PC el predominante y MÁX el menor. También en el tercer ciclo MÁX es el menor pero en este caso MÍN es el predominante.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.</i>							
<i>Ciclos. ESM- 457 tareas</i>							
Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	0	0	1	0.74	30	10.75	31
INT-PC	26	59.1	94	70.15	90	32.25	210
INT-P	16	36.36	11	8.21	58	20.79	85
MÍN	2	4.54	28	20.89	101	36.2	131
Total	44	100	134	99.99	279	99.99	457

Tabla 4.28. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por ciclos de la editorial ESM

La complejidad MÁX es la menos considerada y es promovida con porcentajes que ascienden entre ciclos, no se contempla en el primero de ellos y en el tercero solo el 10.75% de tareas la incluyen; MÍN también es inducida entre ciclos de forma ascendente pero con porcentajes que varían entre el 4.54% y el 36.2%. INT-PC se considera cíclicamente siendo el segundo ciclo donde más se enfatiza y el tercero donde menos se hace.

El desarrollo de la visualización se promueve en mayor proporción en el primer ciclo donde casi las dos terceras partes de las tareas lo contemplan y en menor proporción en el segundo ciclo. En este sentido el desarrollo de la visualización se incluye de un ciclo a otro de forma cíclica. En ninguno de los ciclos ni de los tópicos el porcentaje de tareas que promueven el desarrollo visual es el mayor.

EDITORIAL EA

En CA (tabla 4.29), el segundo ciclo es el único donde se promueven todos los niveles de complejidad; en el tercero no se tiene en cuenta a MÁX y en el primero MÍN y MÁX tampoco son considerados. En el primer ciclo MÍN y MÁX, son los niveles de

complejidad menores, y en el tercero lo es MÁX. En cuanto al nivel de complejidad predominante, es el mismo en los tres ciclos (INT-PC) siendo el primero y el tercero donde se promueve en mayor proporción mientras que en el segundo las tareas que lo inducen desciende. La complejidad INT-PC es inducida por tanto cíclicamente.

Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Local. EA-423 tareas

Tópico	Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	MÁX	0	0	6	4.72	0	0	6
	INT-PC	22	84.61	73	57.48	40	81.63	135
	INT-P	4	15.38	35	27.56	7	14.29	46
	MÍN	0	0	13	10.24	2	4.08	15
Total		26	99.99	127	100	49	100	202
MA	MÁX	0	0	1	14.29	26	16.88	27
	INT-PC	0	0	0	0	23	14.94	23
	INT-P	0	0	6	85.71	70	45.45	76
	MÍN	0	0	0	0	35	22.72	35
Total		0	0	7	100	154	99.99	161
PA	MÁX	0	0	0	0	16	30.19	16
	INT-PC	0	0	1	14.29	4	7.55	5
	INT-P	0	0	0	0	6	11.32	6
	MÍN	0	0	6	85.71	27	50.94	33
Total		0	0	7	100	53	100	60

Tabla 4.29. Complejidad y desarrollo visual. Análisis local de la editorial EA

Los tres niveles de complejidad restantes también son promovidos cíclicamente siendo MÁX y MÍN enfatizadas en el segundo ciclo y a través de pequeños porcentajes de tareas. En los otros ciclos MÁX, como se indicó previamente, no se tiene en cuenta y MÍN solo es considerada en el tercero con un porcentaje del 4.08%.

La complejidad INT-P que promueve el desarrollo de la visualización es incluida en los tres ciclos, pero es en el segundo donde más se enfatiza aunque en menos de la tercera parte de las tareas, mientras que en el tercer ciclo es donde menos se hace; en el primero, por su parte, el 15.38% de las tareas inducen este tipo de complejidad. El desarrollo de la visualización se caracteriza por ser cíclico.

En MA, no hay tareas en el primer ciclo mientras que en el segundo solo se consideran las que incluyen a MÁX e INT-P donde MÁX representa el nivel de complejidad menor e INT-P el predominante.

En el tercer ciclo el nivel predominante también es INT-P y el menor INT-PC; MÁX y MÍN son tenidos en cuenta respectivamente a través del 16.88% y del 22.72% de las tareas. Con relación a qué ciclos enfatizan cada uno de los niveles de complejidad, en el tercero es donde MÁX, MÍN e INT-PC son más promovidos, por el contrario, en el segundo es donde menos se consideran. En cuanto a los porcentajes de tareas que inducen las complejidades MÁX, MÍN e INT-PC ascienden entre ciclos mientras que en INT-P se contempla cíclicamente.

La complejidad INT-P es más promovida en el segundo ciclo, no se tiene en cuenta en el primero y en el tercero es incluida en menos de la mitad de las tareas. Esto indica que en el segundo ciclo es donde se prioriza el desarrollo de la visualización mientras que en el primero no se tiene en cuenta, y que se promueve de forma cíclica.

Para PA, igual que en el tópico anterior, no hay tareas en el primer ciclo, y en el segundo solo se inducen los niveles de complejidad INT-DPC y MÍN donde el primero representa el nivel de complejidad menor y el segundo el predominante. En el tercer ciclo el predominante es MÍN con más de la mitad de las tareas e INT-PC el menor; INT-P y MÁX están presentes en el 11.32% y en el 30.19% de las tareas.

Las complejidades MÁX e INT-P son incluida de forma ascendente con porcentajes que van del 0% al 30.19% en el primer caso y del 0% al 11.32% en el segundo, mientras que INT-PC y MÍN son consideradas de forma cíclica con porcentajes que varían según el caso entre el 0% y el 14,29% y el 0% y el 85,71%.

Estos resultados indican que el desarrollo de la visualización tiende a ser promovido solo en el tercero de los ciclos y a través de un porcentaje de tareas que apenas supera el 10% y se caracteriza por ser incluido con porcentajes que ascienden de un ciclo al siguiente.

Análisis global. A nivel de tópicos (tabla 4.30) INT-PC es el nivel de complejidad predominante en CA, INT-P en MA y MÍN en PA. En cuanto al menor, es MÁX en CA, INT-PC en MA e INT-PC en PA.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.</i>							
<i>Tópicos. EA- 423 tareas</i>							
Complejidad	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	6	2.97	27	16.77	16	26.67	49
INT-PC	135	66.83	23	14.28	5	8.33	163
INT-P	46	22.77	76	47.2	6	10	128
MÍN	15	7.42	35	21.74	33	55	83
Total	202	99.99	161	99.99	60	100	423

Tabla 4.30. Complejidad y desarrollo visual. Análisis global por tópicos de la editorial EA

Los niveles de complejidad MÁX y MÍN son promovidos con un mayor porcentaje de tareas en PA y con el menor en CA. INT-PC e INT-P son más contemplados en CA y MA; por el contrario, ambos son tenidos en cuenta de forma minoritaria en PA donde menos de la décima parte de las tareas los contemplan. En MA la complejidad INT-P es la que más se considera mientras que en CA y en PA un poco más de la quinta y décima parte de las tareas la incluyen.

Con relación a los ciclos de enseñanza (tabla 4.31) en todos MÁX es el nivel de complejidad menor, no promovido en el primer ciclo, con un porcentaje poco

representativo en el segundo y con el 16.41% de las tareas en el tercero. En cuanto a MÍN tampoco es considerado en el primer ciclo.

<i>Complejidad visual y desarrollo de visualización. Análisis comparativo por editoriales. Global.</i>							
<i>Ciclos. EA- 423 tareas</i>							
Complejidad	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
MÁX	0	0	7	4.96	42	16.41	49
INT-PC	22	84.61	74	52.48	67	26.17	163
INT-P	4	15.39	41	29.08	83	32.42	128
MÍN	0	0	19	13.47	64	25	83
Total	26	100	141	99.99	256	100	423

Tabla 4.31. Complejidad y desarrollo visual. Análisis glocal por ciclos de la editorial EA

INT-PC es el nivel de complejidad predominante en el primero y segundo ciclo considerándose con porcentajes entre el 84.61% y el 52.48%, mientras que INT-P lo es en el tercero con un porcentaje del 32.42%.

Los porcentajes de tareas que incluyen a MÁX, INT-P y MÍN ascienden de un ciclo al siguiente, al contrario, INT-PC es considerada de forma descendente.

MÁX es contemplada en el tercer ciclo con menos de la quinta parte de las tareas y no es tenida en cuenta en primero; INT-P y MÍN también son enfatizadas en el tercer ciclo y menos consideradas o no tenidas en cuenta en el primero; por el contrario, INT-PC se enfatiza en el primer ciclo y es menormente considerada en el tercero.

El desarrollo de la visualización en esta editorial caracteriza por ser priorizado en MA y en el tercero de los ciclos, se incluye ascendentemente de un ciclo a otro y es menos considerada en el primer ciclo.

4.3.2 Resultados por niveles de complejidad.

A manera de síntesis y con el propósito de plantear algunas conclusiones que se desprenden del análisis comparativo por editoriales reorganizaremos la información en cuatro apartados (uno por cada nivel de complejidad visual).

Complejidad MÁX. El bajo porcentaje de tareas que inducen este nivel de complejidad es una de las características que ha surgido en la investigación. En CA una editorial colombiana y dos españolas no lo consideran en más del 10% de las tareas mientras que el resto lo hacen en solo uno de los ciclos y en ningún caso tal porcentaje es mayor o igual al 50%; en el tópico MA, todas las editoriales españolas y la mayoría de las colombianas lo consideran en al menos uno de los ciclos con porcentajes mayores del 10% y que tampoco superan el 50%; y en PA, únicamente en una editorial de cada país aparece en

uno de los ciclos en menor o igual proporción al 10% de las tareas mientras que el resto de editoriales no lo contemplan.

El análisis global indica que en ninguno de los tópicos o ciclos MÁX es contemplada con porcentajes de tareas mayores al 50%. Las editoriales colombianas, en la mayoría de los tópicos y en al menos uno de los ciclos, y la mayoría de las españolas, en un tópico y en un ciclo, lo consideran con porcentajes menores del 10%, mientras que en la española restante se hace así solo en uno de los tópicos.

Según la forma como las editoriales promueven este nivel de complejidad los libros de las editoriales analizadas se pueden agrupar en dos grupos, en uno este tipo de complejidad está incluida en todos los tópicos y en el otro sólo en los tópicos CA y MA pero no en PA.

Grupo 1: CV y EA son las editoriales que forman parte de este grupo. A nivel local, en ambas la complejidad MÁX es una CVm incluida en CA y PA con porcentajes de tareas que no descienden entre ciclos, mientras que en MA en la primera de las editoriales se consideran de forma descendente y en la segunda no descendentemente. En CV, representa el nivel de complejidad menor en la mayoría de los ciclos de CA y de MA, y en todos de PA; en cuanto a EA, es el nivel menor en todos los ciclos de CA y en la mayoría de PA, y en MA solo en uno esta característica se mantiene.

Desde el análisis global MÁX es considerada de forma distinta de una editorial a otra; mientras que en CV es el nivel de complejidad menor en todos los ciclos y los tópicos, es decir, es una CVm, en EA es el menor en todos los ciclos y solo en uno de los tópicos mientras que es la predominante en uno de los tópicos (CVI). Por otra parte, si en las dos editoriales el menor porcentaje de tareas promueven una complejidad MÁX en CA y C1, CV considera mayores porcentajes de tareas que lo hacen en MA y C2, y EA, en PA y C3 (tabla 4.32).

Grupo 2: La mayor parte de las editoriales constituyen este grupo: CS, ES, CSM y ESM. En todas MÁX es una CVm y se promueve con porcentajes que no descienden entre ciclos. En CS y ES aparece de forma similar en los tópicos CA y MA donde es el nivel de complejidad menor en la mayoría de los ciclos; en CSM la situación es similar pero en este caso es el menor en uno de los ciclos; mientras que en ESM se considera de una forma en CA, nivel menor en un ciclo, y de otra en MA, nivel menor en todos los ciclos.

El análisis global indica, por un lado, que la mayoría de las editoriales (CS, CSM y ESM) inducen la complejidad MÁX con porcentajes que no decrecen entre ciclos, que en ningún ciclo es predominante (CVm) y que en la mayoría de los tópicos y en todos los ciclos es el nivel de complejidad menor. En cuanto a ES, la complejidad MÁX es incluida descendentemente no siendo en ninguno de los ciclos el nivel predominante y solo en uno de los tópicos y en dos de los ciclos es mayor.

El análisis global también muestra que PA es el tópico donde todas las editoriales consideran un menor porcentaje de tareas que inducen una complejidad MÁX mientras que el primer ciclo es donde la mayoría de ellas lo hacen (CSM lo propicia en C2). En cuanto al tópico CA es en el que porcentaje es el más alto en la mayoría de las editoriales (CS, CSM y ESM) y MA donde solo una lo tiene en cuenta (ES). En el tercer ciclo, por su parte, es donde esto sucede en la mayor parte de las editoriales (CS, CSM y ESM) mientras que en el segundo solo pasa en una de ellas (ES).

En la tabla 4.32 se comparan las editoriales de cada grupo según el tópico y el ciclo dónde son consideradas (análisis global) con el mayor y menor porcentaje de tareas. Cada editorial es caracterizado en función de tres aspectos, a saber: el grupo de editoriales al que pertenece y dos pares ordenado, en el primero la primera componente del par alude al tópico y la segunda al ciclo donde está el mayor porcentaje; y en el segundo par, la primera componente considera el tópico y la segunda el ciclo donde está el menor porcentaje.

<i>Complejidad MÁX. Análisis comparativo por editorial. Global. Mayor y menor desarrollo visual</i>			
Grupo	Editorial	+	-
		(T,C)	(T,C)
1	CV	(MA,C2)	(CA,C1)
	EA	(PA,C3)	(CA,C1)
2	CS	(CA,C3)	(PA,C1)
	CSM	(CA,C3)	(PA,C2)
	ES	(MA,C2)	(PA,C1)
	ESM	(MA,C3)	(PA,C1)

Tabla 4.32. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la complejidad MÁX

Todo lo anterior indica que MÁX no es el nivel predominante en ninguna de las editoriales de los dos grupos y en todas es incluida de forma no descendentemente.

En resumen, las editoriales de los dos grupos considerados inducen condiciones muy similares para la complejidad MAX. En el primer grupo, CV en los tópicos CA y PA promueve más condiciones que EA para que MÁX sea considerada, mientras que en MA la situación es inversa. En el segundo de los grupos, en CA tanto CSM y ESM como ES y CS promueven entre sí condiciones similares pero es en la editoriales del primer grupo donde son más propicias. En MA, tanto CSM, CS y ES como ESM (en ese orden) son quienes mejores condiciones brindan para que MÁX sea contemplada mientras que en PA no es contemplada.

Globalmente, se evidencia que EA en primer lugar, ES en segundo y ESM y CSM en tercero, son las que generan condiciones más propicias para que este nivel de complejidad sea tenida en cuenta; mientras que en CS y CV es promovida de una forma menos propicia.

MÁX es promovida no descendientemente en todas las editoriales del primer grupo y la mayoría del segundo (salvo ES) y en ningún caso es el nivel de complejidad imperante.

MA es el tópico donde la mayoría de las editoriales promueven porcentajes mayores de MÁX (una en el primero y dos en el segundo), mientras que PA es donde menos se considera (4 del primer grupo). En cuanto a los ciclos, en el tercero es donde más se contempla (una del grupo 1 y tres del grupo 2) y en el primero donde menos se hace (tres del primer grupo y una del segundo)

En la tabla 4.33 se condensa la información presentada en los análisis local y global. Cada nivel de complejidad es caracterizado en función de cuatro aspectos, a saber: los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (CVM, CVI y CVm), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis comparativo por editorial. Complejidad MÁX. Local y global. Síntesis.</i>					
Grupo	Editorial	Análisis local			Análisis global
		CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)					
1	CV	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+D+(0,3)	CVm+ND+(0,6)
	EA	CVm+ND+(0,3)	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,2)	CVI+ND+(1,4)
2	CS	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+NC ²¹ +(0,3)	CVm+ND+(0,6)
	CSM	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,1)	CVm+NC+(0,3)	CVm+ND+(0,5)
	ES	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+NC+(0,3)	CVm+ND+(0,3)
	ESM	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,3)	CVm+NC+(0,3)	CVm+ND+(0,5)

Tabla 4.33. Caracterización de MÁX según las editoriales (análisis local y global)

Desarrollo visual (complejidad INT-P): En CA una editorial colombiana lo considera en menos de la mitad de las tareas como mínimo en uno de los ciclos y siempre con porcentajes que exceden el 10% mientras que dos editoriales lo incluyen en más de la mitad en uno o dos ciclos. Al contrario, las españolas nunca lo promueven con más de la mitad de las tareas de un ciclo, incluso en dos se incluye con porcentajes menores al 10% en uno de los ciclos. En cuanto a MA, las españolas y la mayoría de las colombianas lo asumen con más de la mitad de las tareas en un ciclo y con menos en los restantes, incluso con porcentajes inferiores al 10% o no se considera en uno de los ciclos. En PA solo se incluye en una de las editoriales colombianas a través de la mitad o más de la mitad de las tareas en dos de los ciclos, mientras que la mayoría de las españolas lo consideran; una con porcentajes inferiores al 10% en dos ciclos, la otra solo en uno con más de la mitad de las tareas.

Y, desde el análisis global no es contemplado en un ciclo de dos editoriales colombianas y en uno de una de las españolas. En su caso lo hace en más de la mitad de las tareas y en

²¹ No considerada

al menos en un tópico o un ciclo de las tres colombianas pero en ninguno de las españolas, y con menos del (o igual al) 10% en uno o dos lugares solo en las españolas, nunca en las colombianas.

Las editoriales analizadas promueven la enseñanza de la visualización de dos formas distintas: a través de los tres tópicos o por medio de dos. En este sentido son dos los grupos a tener en cuenta. En lo que sigue describimos cada uno de los grupos considerados:

Grupo 1: Mientras dos de las editoriales españolas (ESM y EA) suscitan el desarrollo de la visualización en todos los tópicos, solo una de las colombianas lo permite (CV). Las editoriales españolas se comportan de igual forma para CA y PA donde INT-P es una CVM que se incluye de forma descendente. En ninguno de los ciclos de estos tópicos INT-P es el nivel de complejidad predominante, mientras que es el menor en uno de los ciclos de ESM y en dos de EA. En cuanto a CV el desarrollo visual es una CVM cuyos porcentajes son considerados no descendientemente de un ciclo al siguiente en CA y PA, siendo el nivel predominante en dos de los ciclos de cada tópico y el menor en uno de PA.

Para MA también hay similitudes entre las dos editoriales españolas: se promueve el desarrollo visual de forma no descendente e INT-P es el nivel de complejidad menor en uno de los ciclos, además en CV los porcentajes de tareas que la inducen descienden de un ciclo a otro y es la complejidad menos considerada en dos de los ciclos. Tanto en CV como en ESM el desarrollo visual es una CVI que representa el nivel predominante en dos ciclos mientras que en EA es una CVM y son dos los ciclos donde es imperante.

El análisis global muestra similitudes entre CV y EA, en ambos casos el desarrollo de la visualización es una CVM, en algunos de los ciclos (2 en CV y 1 en EA) o de los tópicos (1 en CV y 1 en EA) INT-P es el nivel de complejidad predominante, y en ninguno es el menor. En ESM el desarrollo visual es una CVM y en ninguno de los ciclos INT-P es predominante ni menor. En ESM, al igual que en CV y EA, los porcentajes de tareas que incluyen el desarrollo visual no descienden entre ciclos.

El análisis global también muestra que MA es el tópico donde CS y ES enfatizan el desarrollo de la visualización mientras que en CA es donde CSM lo considera. En cuanto a los ciclos, C1 es quien tiene esta característica para las tres editoriales. Con respecto a dónde hay menores porcentajes de tareas que inducen el desarrollo visual, es PA en las tres editoriales; en relación a los ciclos es C3 tanto en CS como en CSM y C1 en ES.

Grupo 2: Dos de las editoriales colombianas (CS y CSM) y una de las españolas (ES) inducen la enseñanza de la visualización a través de CA y MA pero no de PA. El análisis local indica que CSM y ES se comportan de forma similar: en ellas el desarrollo de la visualización es una CVM en CA y una CVI en MA e INT-P no es el nivel predominante

en ninguno de los ciclos de CA. Pero en ES, INT-P es el menor en uno de los ciclos de MA mientras que en CSM ninguno tiene tal característica.

La editorial CS promueve mejores oportunidades para el desarrollo de la visualización que CSM y ES, en ella se privilegia una CVI en CA y una CVM en MA; además, en un ciclo en CA y en tres en MA la complejidad INT-P es la predominante, y en ningún caso la menor.

El análisis global también resalta que en CS hay más opciones de desarrollo visual que en las demás editoriales, mientras que en CS se promueve de manera CVM siendo tres los ciclos o tópicos donde INT-P es predominante; en CSM y ES se hace de forma CVI y solo uno de los ciclos INT-P es predominante. En las tres editoriales las tareas que promueven el desarrollo visual son incluidas con porcentajes que no descienden entre ciclos y en uno de los ciclos o de los tópicos representa el nivel de complejidad menor.

El análisis local muestra que las editoriales ESM, EA y CV inducen de forma distinta la enseñanza de la visualización que CS, CSM y ES. Con respecto al primer grupo, el análisis local indica que en CA y PA la editorial CV promueve condiciones más propicias que las españolas mientras que en MA es EA quien lo hace.

En cuanto al análisis global, es CV y EA donde se promueven las condiciones más propicias.

En la tabla 4.34 se comparan las editoriales de cada grupo según el tópico y el ciclo dónde son consideradas (análisis global) con el mayor y menor porcentaje de tareas.

<i>Análisis comparativo por países. Mayor y menor desarrollo visual (Complejidad INT-P). Global</i>			
INT-PC		+	-
Grupo	Editorial	(T,C)	(T,C)
1	ESM	(MA,C1)	(PA,C2)
	EA	(MA,C3)	(PA,C1)
	CV	(CA,C1)	(PA,C2)
2	CS	(MA,C1)	(PA,C3)
	CSM	(CA,C1)	(PA,C3)
	ES	(MA,C2)	(PA,C1)

Tabla 4.34. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen a INT-P

Los resultados anteriores también demuestran que en los dos niveles de análisis (local y global) CS es quien genera las condiciones más propicias respecto a este nivel de complejidad. El análisis global también indica que MA y C1 son los dos grupos de editoriales que promueven mayores porcentajes de tareas que inducen el desarrollo visual y PA es donde menos se hace; C1 en el primer grupo y C2 en el segundo son los ciclos donde estas tareas están en menor proporción.

El análisis global indica asimismo que en MA y C1 la mayoría de las editoriales (en el primer caso, todas las españolas y una de las colombianas; y en el segundo, una española y todas las colombianas) se contempla el mayor porcentaje de tareas en las que se procura el desarrollo visual mientras que para PA es donde todas las editoriales lo hacen a través de los porcentajes más pequeños de tareas. En cuanto al ciclo donde se contemplan los porcentajes más pequeños de tareas INT-P, es C1 en el caso de las editoriales españolas y C3 en relación con las colombianas.

En la tabla 4.35 se condensa la información presentada en los análisis local y global. Cada nivel de complejidad es caracterizado en función de cuatro aspectos, a saber: los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (CVM, CVI y CVm), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis comparativo por editoriales. Enseñanza de la visualización (complejidad INT-P). Local-Global</i>					
Grupo	Editorial	Análisis local			Análisis global
		CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)					
2	CS	CVI+ND+(1,0)	CVM+D+(3,0)	CVm+NC+(0,3)	CVM+ND+(3,1)
	CSM	CVm+ND+(0,0)	CVI+D+(1,0)	CVm+NC+(0,3)	CVI+ND+(1,1)
	ES	CVm+ND+(0,0)	CVI+ND+(1,1)	CVm+NC+(0,3)	CVI+ND+(1,1)
1	CV	CVM+ND+(2,0)	CVI+D+(1,2)	CVM+ND+(2,1)	CVM+ND+(3,0)
	ESM	CVm+ND+(0,0)	CVI+ND+(1,1)	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,0)
	EA	CVm+ND+(0,0)	CVM+ND+(2,1)	CVm+ND+(0,2)	CVM+ND+(2,0)

Tabla 4.35. Caracterización de las editoriales según la complejidad INT-P (análisis local y global)

Complejidad visual MÍN. Todas las editoriales (salvo una española) la consideran en más del 10% de las tareas en uno de los ciclos de CA. De ellas una colombiana y una española lo contemplan en menos del 10% de las tareas en un segundo ciclo, y ninguna editorial lo hace en más de la mitad de las tareas. En cuanto a MA, la mayoría de las colombianas la incluyen en más de la mitad de las tareas en uno o dos ciclos (y con menos del 50% en uno de los ciclos), mientras que la mayoría de las españolas no lo hacen en dos de los ciclos y en el tercero la consideran en menos del 10% de las tareas. Finalmente, en PA, las editoriales españolas y la mayoría de las colombianas la contemplan en más de la mitad de las tareas en todos o la mayoría de los ciclos, y la restante lo hace con porcentajes inferiores al 10% en todos los ciclos.

En cuanto al análisis global indica que las editoriales españolas incluyen la complejidad MÍN en más de la mitad de tareas en uno de los tópicos y las colombianas hacen lo propio en un ciclo o en un tópico, y con porcentajes menores del 10% es asumido en un ciclo y en un tópico en las españolas y en la mayoría de las colombianas.

Las editoriales inducen la complejidad MÍN de dos maneras diferentes: 1) se enfatiza en PA y C3 y es menos considerada en CA y C1, y 2) MA o C2 es uno de los lugares donde más se tiene en cuenta o C2 es uno donde menos se hace. Así, son dos los tipos de editoriales a considerar.

A continuación describimos cada uno de los grupos de editoriales considerados en cuanto al estudio de la complejidad MÍN.

Grupo 1: Está conformado por dos editoriales españolas (ES y ESM) y una colombiana (CSM).

El análisis local indica que en todas las editoriales la complejidad MÍN se promueve de igual manera en CA siendo una CVM que se incluye con porcentajes que no descienden entre ciclos y es el nivel de complejidad menor en la mayoría. En cuanto a MA, las editoriales españolas se comportan de igual forma, en ellas es una CVI donde representa el nivel de complejidad predominante en uno de los ciclos y el menor en al menos uno, mientras que en la colombiana es una CVM, en dos de los ciclos es predominante y en ninguno la menor. En las tres editoriales MÍN es incluido de un ciclo al siguiente de forma no descendente.

Con respecto a PA, las tres editoriales consideran en todos los tópicos un mayor número de tareas que inducen una complejidad MÍN (CVM); pero, mientras que ES y CSM le incluyen entre ciclos de forma no descendente, ESM lo hace descendente. En las tres editoriales MÍN es el nivel de complejidad predominante en la mayoría de los ciclos (tres en CSM y ESM y dos en ES) y en ES es la única donde MÍN es el menor en alguno de los ciclos (un ciclo).

El análisis global también resalta que las tres editoriales promueven la complejidad MÍN no descendente y que al menos en dos cuestiones (tópicos o ciclos) es el nivel predominante: dos de los tópicos y uno de los ciclos en ES y dos de los tópicos en CSM y ESM. Por otra parte, es ínfima en uno de los tópicos de CSM y ESM y en un tópico y dos de los ciclos en ES. En cuanto a dónde se promueve un mayor número de tareas que inducen la complejidad MÍN, las tres editoriales lo hacen en PA y C3 por el contrario en CA y C1 es donde menos se considera.

Grupo 2: Este grupo está constituido por las editoriales EA, CS y CV.

El análisis local muestra que, independientemente del tópico todas las editoriales de este grupo promueven la complejidad MÍN con porcentajes de tareas que no descienden entre ciclos. Para CA las dos editoriales colombianas (CV y CSM) se caracterizan porque MÍN es el nivel de complejidad menor en dos de los ciclos, mientras que en la española (EA) esto sucede en uno de ellos. Las tres editoriales promueven MÍN de la misma forma siendo una CVM donde en ninguno de los ciclos la complejidad MÍN es la predominante.

En MA y PA las editoriales EA y CS se comportan de forma similar. En MA, MÍN es una CVm y no es el nivel de complejidad predominante en ninguno de los ciclos. En PA, en ambas editoriales MÍN es una CVM y en dos de los ciclos es el predominante. En cuanto a dónde MÍN es el nivel de complejidad menor hay diferencias entre las dos editoriales: para MA dos de los ciclos de EA cumplen con esta característica, mientras solo lo cumple uno para CS; y para PA, uno de los ciclos en CS y ninguno en EA asumen a MÍN de esta manera. En cuanto a CS, en uno y otro tópico es una CVM pero en MA en ninguno de los ciclos es el nivel de complejidad menor o imperante; y en PA, mientras que en dos de los ciclos es predominante en el otro es el menor.

El análisis global indica que la complejidad MÍN es promovida de igual forma en las tres editoriales (CVI, incluida no descendentemente y solo en uno de los tópicos o de los ciclos es el nivel de complejidad predominante), y que en ninguno de los ciclos o tópicos ni en CV ni en CS es la menor, mientras que en EA sí lo es en uno de ellos. Con relación a dónde se induce el mayor número de tareas MÍN, CV es la única de las seis editoriales que lo considera en MA (el resto lo hace en PA) y CS lo hace en el ciclo 2 (el resto lo hacen en C3). Por otra parte, EA es la única que induce en menor medida la complejidad MÍN en C2 (el resto lo hace en C1).

En la tabla 4.36 se comparan las editoriales de cada grupo según el tópico y el ciclo dónde son consideradas (análisis global) con el mayor y menor porcentaje de tareas.

<i>Análisis comparativo por editoriales. Complejidad MÍN. Global. Mayor y menor desarrollo visual</i>			
Grupo	MÍN	+	-
	Ed	(T,C)	(T,C)
1	CSM	(PA,C3)	(CA,C1)
	ES	(PA,C3)	(CA,C1)
	ESM	(PA,C3)	(CA,C1)
2	EA	(PA,C3)	(CA,C2)
	CV	(MA,C3)	(CA,C1)
	CS	(PA,C2)	(CA,C1)

Tabla 4.36. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen a MÍN

Los resultados anteriores indican que las editoriales del grupo 1 promueven en las mismas condiciones la complejidad MÍN en CA; CSM genera condiciones más propicias en MA mientras que CSM y ESM lo hacen en PA. En el mismo nivel de análisis todas las editoriales del grupo 2 en CA también promueven en las mismas condiciones para la complejidad MÍN; CV es quien genera condiciones más propicias en MA. Y en PA tanto EA como CS son las que lo hacen. Por otra parte, ESM es la única editorial de las seis analizadas donde la complejidad MÍN es incluida de forma descendente.

El análisis global muestra que las editoriales del primer grupo promueven de la misma forma la complejidad MÍN siendo PA y C3 donde aparecen los porcentajes mayores de T.E,? y en CA y C1 donde están los más pequeños. En cuanto al segundo grupo, las

editoriales promueven la complejidad MÍN de una manera distinta a como se hace en el primer grupo. PA es el tópico donde dos de las editoriales tienen el mayor porcentaje de tareas que promueven una complejidad MÍN y MA donde la tercera de las editoriales posee esta característica. En cuanto a los ciclos, mientras que dos de las editoriales lo contemplan en C3 la tercera lo hace en C2. Independientemente del grupo, todas las editoriales colombianas y la mayoría de las españolas consideran los porcentajes menores de tareas que promueven una complejidad MÍN en CA y C1, y solo una de las españolas lo hace en CA y C2.

En la tabla 4.37 se condensa la información presentada en los análisis local y global donde los niveles de complejidad se caracterizan de acuerdo a cuatro aspectos: los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (CVM, CVI y CVm), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Complejidad MÍN. Análisis comparativo por editoriales. Local y global. Síntesis</i>					
		Análisis local			Análisis global
Grupo	Editorial	CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)					
1	CSM	CVm+ND+(0,2)	CVM+ND+(2,0)	CVM+ND+(3,0)	CVM+ND+(2,1)
	ES	CVm+ND+(0,2)	CVI+ND+(1,1)	CVM+ND+(2,1)	CVM+ND+(3,3)
	ESM	CVm+ND+(0,2)	CVI+ND+(1,2)	CVM+D+(3,0)	CVM+ND+(2,1)
2	EA	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,2)	CVM+ND+(2,0)	CVI+ND+(1,0)
	CV	CVm+ND+(0,2)	CVM+ND+(2,1)	CVm+ND+(0,0)	CVI+ND+(1,0)
	CS	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,0)	CVM+ND+(2,1)	CVI+ND+(1,0)

Tabla 4.37. Caracterización por editoriales según la complejidad MÍN (análisis local y global)

Complejidad INT-PC. Es considerado en CA por las editoriales españolas en la mayor parte de las tareas y en dos o tres de los ciclos. Solo una de las colombianas lo contemplan de esta forma y el resto lo hace en uno de los ciclos. En cuanto a MA, ninguna editorial lo asume de la forma antes citada: en todas las españolas y en la mayoría de las colombianas se incluye en menos del 10% de las tareas en uno de los ciclos y no se contempla en los restantes, y solo en una de las colombianas se tiene en cuenta de esta forma en dos de los ciclos. Y en PA, dos editoriales colombianas lo incluyen en la mayoría de las tareas en uno de los ciclos y una española lo hace en dos de ellos, la tercera de las colombianas no lo promueve mientras que las otras dos españolas lo hacen en uno o dos de los ciclos con porcentajes siempre inferiores al 50%.

El análisis global demuestra que la complejidad INT-PC es tenido en cuenta en las editoriales españolas en dos o tres ciclos o tópicos con porcentajes mayores al 50% y solo en una de las colombianas se considera de esta forma en un ciclo o en un tópico, mientras que en todas las editoriales es incluido en menos del 10% de las tareas en uno de los ciclos.

Las editoriales analizadas promueven la complejidad INT-PC de dos formas diferentes (cada una determina un grupo de editoriales): a través de los tres tópicos de área o por medio de dos.

Grupo 1: Este grupo está conformado por dos editoriales colombianas (CS y CV) y dos españolas (ESM y EA). De un tópico a otro ESM y EA promueven la complejidad INT-PC de igual forma. Para CA es el nivel predominante en todos los ciclos siendo una CVM que se incluye de forma no descendente. Para PA es el nivel de complejidad menor en dos ciclos, el predominante en ninguno (CVM) y se induce entre ciclos de forma descendentes. En cuanto a MA, es incluida de forma no descendente, en ninguno de los ciclos es el predominante (CVM) y en la mayoría es el menor (dos ciclos en ESM y tres en EA).

El análisis global indica que en ambas editoriales INT-PC es una CVM siendo en ambos casos el nivel de complejidad predominante en uno de los tópicos y en dos de los ciclos; en EA, es inducida con porcentajes que descendentes de un ciclo al siguiente y en uno de los tópicos es el nivel predominante (CVI). Con respecto a dónde hay mayor proporción de tareas que promueven a INT-PC, CA es el tópico donde ambas editoriales lo hacen, mientras que C2 y C1 es donde ESM y EA respectivamente lo consideran. Por el contrario, en PA y C3 está la menor proporción de tareas que suscitan la complejidad INT-PC.

En cuanto a CS y CV inducen INT-PC de forma diferente a como lo hacen ESM y EA. En PA ambas editoriales se comportan de igual manera (incluida de forma no descendente y es una CVI) e INT-PC es el nivel de complejidad menor en dos ciclos en CS y en uno de ES. En CA y MA, INT-PC se considera de forma diferente. En el primer tópico, es una CVM en CS además en dos de los ciclos es el nivel predominante y en uno el menor; en CV, por el contrario, es una CVI, en uno de los ciclos es la predominante y en ninguno la menor. En las dos editoriales INT-PC es incluida con porcentajes que no descendentes entre ciclos en CA. En el segundo tópico, CS es una CVI, predominante y menor en uno de los ciclos, mientras que en CV es una CVM y la menor en uno de los ciclos.

El análisis global evidencia que INT-PC es el nivel de complejidad predominante en dos de los ciclos (CS) o en uno de los ciclos y uno de los tópicos (CV), es una CVM que se incluye de forma no descendente y que en ningún momento representa el nivel menor. CA es el tópico donde mayor proporción de INT-PC hay en ambas editoriales mientras que C3 es el ciclo para CS y C1 para CV. Por otra parte, PA es el tópico donde las dos editoriales contemplan la menor proporción de tareas que la inducen esa complejidad, y C1 para CS y C2 para ES los ciclos donde esta característica está presente.

Grupo 2: Este grupo está conformado por una editorial colombiana y otra española (CSM y ES) que para CA y MA contemplan la complejidad INT-PC de igual manera. Para CA

no descendientemente, predominante en los tres ciclos (CVM) y para MA, no descendente, una CVm y el nivel de complejidad menor en un ciclo de CSM y en dos en ES.

El análisis global muestra que en ambas editoriales INT-PC es predominante en uno de los tópicos y uno de los ciclos siendo una CVM y es el nivel menor en uno de los tópicos. Es incluida de forma descendente en CSM y no descendente en ES. CA es el tópico donde mayor porcentaje de INT-PC hay, mientras que C1 y C2 son los ciclos donde sucede en CSM y ES (respectivamente). En C3, CSM y ES inducen los menores porcentajes de T.DPC, y PA y MA son los tópicos donde CSM y ES, respectivamente, lo hacen.

De un tópico a otro las editoriales ESM y EA promueven la complejidad INT-PC de igual forma.

En la tabla 4.38 se comparan las editoriales de cada grupo según el tópico y el ciclo dónde son consideradas (análisis global) con el mayor y menor porcentaje de tareas.

<i>Análisis comparativo por editoriales. Mayor y menor complejidad INT-PC. Global</i>			
Grupo	MÍN	+	-
	Ed	(T,C)	(T,C)
1	CS	(CA,C3)	(PA,C1)
	ES	(CA,C1)	(PA,C2)
2	ESM	(CA,C2)	(PA,C3)
	EA	(CA,C1)	(PA,C3)
3	CSM	(CA,C1)	(PA,C3)
	CV	(CA,C2)	(MA,C3)

Tabla 4.38. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la complejidad INT-PC

Lo anterior evidencia que en el primer grupo ESM y EA, según el tópico, promueven la complejidad INT-PC de igual forma; CS y ES, por su parte, suscitan condiciones más propicias que en ESM y EA para que INT-PC sea considerada. Para PA, CS y ES lo hacen de igual forma y en CA y MA es CS quien presenta mejores condiciones que ES. En la misma línea de ideas, las editoriales del segundo grupo generan condiciones propicias para contemplar la complejidad INT-PC en CA, pero, no tanto en MA (siendo CV quien en menor medida lo realiza); y no es considerada en PA. A nivel global, se evidencia que en el primer grupo ESM y EA generan mejores condiciones que en CS y ES; en cuanto al segundo grupo, CSM y CV lo hacen de igual forma y en menores condiciones que las editoriales del primer grupo.

CA es el tópico donde todas las editoriales analizadas promueven mayores porcentajes de INT-PC. En cuanto a los ciclos, en el primer grupo, C1 es donde más se contempla (2 editoriales) seguido de C2 (1 editorial) y C3 (1 editorial); y en el segundo, tanto C1 como C2 generan tal posibilidad. Por otra parte, EA en el primer grupo y CSM en el segundo son las únicas editoriales que inducen la complejidad INT-PC de forma descendente.

De forma sintética se condensa en la tabla 4.39 la información presentada en los análisis local y global, donde cada nivel de complejidad es caracterizado en función de los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (CVM, CVI y CVm), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Complejidad INT-PC. Análisis comparativo por editoriales. Local y global. Síntesis</i>													
Grupo	País	Análisis local						Análisis global					
		CA		MA		PA							
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)													
1	CS	CVM	ND	(2,1)	CVI	ND	(1,1)	CVI	ND	(1,2)	CVM	ND	(2,0)
	CV	CVI	ND	(1,0)	CVm	ND	(0,1)	CVI	ND	(1,1)	CVM	ND	(2,0)
	ESM	CVM	ND	(3,0)	CVm	ND	(0,2)	CVm	ND	(0,2)	CVM	ND	(3,0)
	EA	CVM	ND	(3,0)	CVm	ND	(0,3)	CVm	ND	(0,2)	CVM	D	(3,1)
2	CSM	CVM	ND	(3,0)	CVm	ND	(0,1)	CVm	-	(0,3)	CVM	D	(2,1)
	ES	CVM	ND	(3,0)	CVm	ND	(0,2)	CVm	-	(0,3)	CVM	ND	(2,1)

Tabla 4.39. Caracterización por editoriales según la complejidad INT-PC (análisis local y global)

4.4. Análisis comparativo por países: complejidad visual y desarrollo de la visualización.

En este apartado abordamos la última de las cuestiones consideradas en el capítulo: ¿según la complejidad y desarrollo visual promovido cuáles son las similitudes y diferencias entre los libros colombianos y los españoles? Igual que en los apartados previos se caracterizará, en primera instancia cómo los cuatro niveles de complejidad son contemplados de un país a otro; y luego se sintetizará la información y se plantearán algunas conclusiones de los datos extraídos.

4.4.1 Caracterización de las tareas por países.

Las frecuencias y porcentajes de las tareas de los textos colombianos y españoles independientemente del tópico de área y del ciclo de enseñanza son presentadas en la tabla 4.40.

<i>Análisis comparativo por países. Complejidad visual y desarrollo de visualización- 2561 tareas</i>				
Complejidad	Colombia		España	
	Frec	%	Frec	%
MÁX	68	5.31	134	10.47
INT-PC	436	34.03	501	39.14
INT-P	546	42.62	317	24.76
MÍN	231	18.03	328	25.62
Total	1.281	99.99	1.280	99.99

Tabla 4.40. Complejidad y desarrollo visual (Colombia vs España)

Como lo indica la tabla anterior existen diferencias significativas en cómo la complejidad visual es incluida en los libros de texto colombianos y españoles. El control INT-P se considera con mayores porcentajes de tareas en los libros colombianos que en los españoles, y las tareas que consideran los niveles de complejidad MÁX e INT-PC son más contempladas en los libros españoles que en los colombianos. En cuanto a los porcentajes de tareas donde la visualización no desempeña un rol determinante (complejidad MÍN) son mayores en el caso español que en el colombiano.

Si se realiza una comparación entre las tareas donde aparecen los distintos niveles de complejidad, en los libros colombianos las que consideran a INT-P e INT-PC son en ese orden las más consideradas mientras que en el español lo son, primero, las que incluyen a INT-PC y, segundo, las que consideran a MÍN. Por otro lado, las tareas que inducen las complejidades MÍN y MÁX son en el caso colombiano las menos contempladas, mientras que en el español lo son aquellas donde aparece las complejidades INT-P y MÁX.

Lo anterior demuestra que los libros colombianos son quienes más enfatizan el desarrollo de la visualización mientras que los españoles son quienes más oportunidades brindan para aplicar las habilidades visuales desarrolladas (tareas donde los controles MÁX e INT-PC aparecen), y que en el caso español, más que en el colombiano, se tienen en cuenta un mayor número de tareas donde la visualización al ser de naturaleza estática (tareas que inducen una complejidad MÍN) no desempeña un papel determinante en el estudio de las matemáticas.

De manera detallada, considerando los tópicos de área y los ciclos de enseñanza, se comparan a continuación las tareas de los libros colombianos y españoles. Igual que se ha hecho a lo largo del capítulo consideramos los niveles de análisis local y global, y como elementos de contraste los ciclos de enseñanza en que se desarrollan cada uno de los tópicos.

Análisis local. A la vista de los resultados presentados en la tabla 4.41 no hay diferencia en cómo los libros de los dos países incluyen los niveles de complejidad en el estudio de CA. Los porcentajes de tareas donde aparecen las complejidades MÁX y MÍN son bajos, en algunos casos despreciables o nulos. En el caso español no se tienen en cuenta en el primer ciclo y en el colombiano se hace con menos del 1%, mientras que en los demás ciclos el porcentaje varía entre el 4.17% y el 10.18% para MÁX y entre 4.53% y 8.85% para MÍN. En cuanto a los niveles de complejidad intermedio los porcentajes de tareas son los mayores. En el segundo y tercer ciclo INT-PC es más considerado que INT-P mientras que en el primer ciclo el orden se invierte.

La complejidad INT-P para el caso colombiano y la INT-PC para el español es la imperante en el primer ciclo mientras que en los libros de ambos países INT-PC lo es en el segundo y tercer ciclo. En cuanto a los niveles de complejidad que se incluyen con el menor porcentaje de tareas, son MÍN y MÁX en el primer ciclo en ambos países, en el

segundo ciclo MÁX lo es en el colombiano y MÍN en el español, y en el tercer ciclo MÍN lo es en el caso colombiano y MÁX en el español.

Análisis comparativo por países. Local. Complejidad visual y desarrollo de visualización. CA-1451 tareas

Complejidad	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
MÁX	3	0.9	0	0	18	5.11	21	7.32	23	10.18	8	4.17
INT-PC	95	31.35	70	76.92	193	54.83	194	67.59	95	42.03	132	68.75
INT-P	203	66.99	21	23.08	115	32.67	59	20.56	89	39.38	35	18.23
MÍN	2	0.76	0	0	26	7.39	13	4.53	19	8.41	17	8.85
Total	303	100	91	100	352	100	287	100	226	100	192	100

Tabla 4.41. Tareas CA (Colombia vs España). Análisis local

Al contemplar cómo se promueve de un ciclo al siguiente los niveles de complejidad se evidencia en ambos países similitudes en cuanto a las complejidades MÍN e INT-PC. La primera se incluye con porcentajes de tareas que aumentan de un ciclo a otro y la segunda se considera de forma cíclica. Para MÁX e INT-P la situación es diferente; mientras que en el caso colombiano los porcentajes son respectivamente ascendentes y cíclicos; en el español son cíclicos y descendentes.

El desarrollo de la visualización es considerado de forma distinta en los libros de un país y otro. Mientras que los españoles en todos los ciclos asignan porcentajes de tareas entre el 18.23% y el 23%; en los colombianos varían entre el 32.67% y el 66.99%. En el primero de los ciclos ambos países contemplan el mayor porcentaje de tareas que enfatizan el desarrollo de la visualización mientras que en el segundo ciclo, en el caso colombiano, y en el tercero, en el español, es donde está el menor.

Los resultados anteriores evidencian que el desarrollo visual es predominante en el primero de los ciclos para el caso colombiano mientras que no lo es en ningún ciclo del español, siendo además incluido de forma distinta de un caso a otro pues es no descendente en el colombiano y descendente en el español. Así, pues, los libros colombianos promueven con mayor énfasis el desarrollo de la visualización que los españoles.

Si se realiza una comparación entre las tareas que inducen cada nivel de complejidad, en los ciclos donde se incluye el estudio de la MA, en el segundo y tercero los libros colombianos se comportan de forma similar a como lo hacen los españoles en el tercer ciclo (tabla 4.42). Las tareas donde las complejidades MÍN e INT-P aparecen son las de porcentajes más altos mientras que las que incluyen a INT-PC y MÁX se tienen en cuenta con los porcentajes más bajos.

Análisis comparativo por países. Local. Complejidad visual y desarrollo de visualización. MA-913 tareas

Complejidad	C1		C2				C3					
	Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.			
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%		
MÁX	0	0	0	0	21	11.73	6	13.95	2	2.22	83	15.54
INT-PC	6	8.95	0	0	15	8.38	0	0	19	21.11	97	18.16
INT-P	58	86.57	0	0	55	30.73	34	79.07	19	21.11	160	29.96
MÍN	3	4.48	0	0	88	49.16	3	6.98	50	55.55	194	36.33
Total	67	100	0	0	179	100	43	100	90	99.99	534	99.99

Tabla 4.42. Tareas MA (Colombia vs España). Análisis local

En cuanto al primer ciclo en el caso colombiano y al segundo en el español las tareas que consideran una complejidad INT-P son las de porcentajes más altos seguidas por las que tienen en cuenta a INT-PC en los libros colombianos y a MÁX en los españoles. Los porcentajes de MÍN son reducidos mas no despreciables, mientras que MÁX no es considerada en el caso colombiano e INT-PC en el español. Los libros españoles no promueven tareas de la MA en el primer ciclo mientras que los colombianos sí lo consideran en todos los ciclos.

Por tanto en los dos primeros ciclos el comportamiento de los libros de uno y otro país es distinto. En el primer ciclo los colombianos contemplan las complejidades INT-P, INT-PC y MÍN, y es donde hay el mayor porcentaje de tareas que inducen el desarrollo visual y donde menos aparece la complejidad MÍN. Por el contrario, en los españoles, como se indicó anteriormente, en el primer ciclo el estudio de MA no se contempla y en el segundo ciclo se considera un alto porcentaje de INT-P y uno bajo de MÍN, mientras que en los colombianos MÍN aparece con el mayor porcentaje. En el tercer ciclo los libros de ambos países se comportan de forma similar. Se consideran mayores porcentajes de tareas para MÍN e INT-P mientras que MÁX es tenido en cuenta en menor proporción; en cuanto a INT-PC tiene el mismo porcentaje de tareas que INT-P en el caso colombiano y en el español es la segunda menos inducida.

Los resultados anteriores evidencian que en los libros de ambos países el nivel de complejidad imperante difiere de un ciclo a otro. Mientras que en el primer ciclo INT-P es imperante para el caso colombiano, en el español no hay tareas MA, y si en el segundo ciclo MÍN es imperante en los libros colombianos, en los españoles lo es INT-P. Solo en el tercer ciclo la complejidad imperante es la misma en los dos países (MÍN). En cuanto al nivel de complejidad menor, en ambos países es INT-PC en el segundo ciclo y MÁX en el tercero; y en el primer ciclo es MÁX y MÍN en el español y MÁX en el colombiano.

Los niveles de complejidad MÁX, INT-PC e INT-P se incluyen de forma distinta en los libros de ambos países mientras que MÍN se hace de igual forma. En el caso colombiano los porcentajes de tareas donde aparecen las complejidades MÁX e INT-PC son cíclicos y los relativos a INT-P decrecen de un ciclo a otro. En cuanto a los españoles, incluyen porcentajes de MÁX, INT-PC y MÍN que aumentan de un ciclo a otro

En los libros de los dos países el desarrollo de la visualización se tiene en cuenta de forma distinta. Mientras que en el primer ciclo los libros colombianos plantean altos porcentajes de tareas que la promueven, en los españoles no hay tareas de este tipo. En el segundo ciclo, en los colombianos se contempla en menos de la tercera parte de las tareas mientras que en los españoles se hace en más de las dos terceras partes. En el tercer ciclo la situación es similar en los libros de los dos países donde el porcentaje de INT-P no sobrepasa la tercera parte de las tareas.

Así pues en el primer ciclo los libros colombianos y en el segundo los españoles promueven más oportunidades para el desarrollo de la visualización mientras que en el tercero para el caso colombiano y el segundo para el español se incluye pero en menor medida. En este sentido en los libros de ambos países el desarrollo visual es considerado de forma similar pero se incluye de forma distinta, mientras que en los colombianos los porcentajes de tareas disminuyen de un ciclo al siguiente, en el español se consideran cíclicamente.

En cuanto a PA, la complejidad MÍN se promueve con porcentajes de tareas entre el 54.17% y el 86.66% en el caso colombiano y entre el 65.12% y el 100% en el español. En ambos países MÁX es en un ciclo el nivel de complejidad menos considerado y en el resto de los ciclos no hay tareas con este tipo de complejidad. En los libros españoles INT-PC es tomada en cuenta con porcentajes pequeños en el tercer ciclo, despreciables en el segundo y no se contempla en el primero, mientras que en los colombianos se asume con porcentajes considerables en el segundo ciclo, pequeños mas no despreciables en el primero y no se incluye en el tercero. La complejidad INT-P, por su parte, aparece en porcentajes que no superan el 20% en la mayoría de los ciclos del caso colombiano (C2 y C3) mientras que en el español solo llegan al 9% en la mayoría de ellos (C2 y C3).

Análisis comparativo por países. Local. Complejidad visual y desarrollo de visualización. PA-197 tareas

Complejidad	C1		C2				C3						
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.		
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	
MÁX	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	18.6
INT-PC	2	8	0	0	11	45.83	1	2.22	0	0	7	8.14	
INT-P	5	20	0	0	0	0	1	2.22	2	13.33	7	8.14	
MÍN	17	68	2	100	13	54.17	43	95.55	13	86.66	56	65.12	
Total	25	100	2	100	24	100	45	99.99	15	99.99	86	100	

Tabla 4.43. Tareas PA (Colombia vs España). Análisis local

En los libros colombianos y españoles en el segundo y tercer ciclo la complejidad MÍN es la predominante y la INT-PC la menor (tabla 4.43). En el primer ciclo MÍN es la complejidad predominante en ambos casos mientras que MÁX es la menor en el caso colombiano e INT-PC, INT-P y MÁX no son contempladas en el español (niveles de complejidad menor).

Mientras que en los libros españoles las complejidades MÁX e INT-PC son incluidas con porcentajes que aumentan de un ciclo a otro, en los colombianos descienden o son cíclicos respectivamente. Y cuando a INT-P y MÍN son cíclicos en el caso colombiano y en el español son, respectivamente, ascendentes y descendentes.

Los resultados también demuestran que en la mayoría de los ciclos los porcentajes de tareas que inducen el desarrollo visual son bajos o despreciables o nulos, solo en un ciclo de los libros colombianos llegan al 20% siendo en el primer ciclo del caso colombiano y en el tercero del español donde es contemplado con el mayor porcentaje, mientras que en el segundo ciclo (libros colombianos) junto al primero (libros españoles) no se considera. En este sentido, aunque los porcentajes de tareas que inducen el desarrollo visual son pequeños en los libros colombianos y españoles, son los primeros quienes lo promueven en mayor medida. Como se evidenció en el párrafo anterior, los porcentajes de tareas que promueven el desarrollo visual son considerados de forma cíclica en el caso colombiano y ascendente en el español.

Análisis global. En CA los libros colombianos y españoles promueven las complejidades MÁX y MÍN con porcentajes muy pequeños de tareas (Tabla 4.44); por el contrario, en las tareas que inducen a INT-PC e INT-P el comportamiento es distinto de un país a otro. En el primer caso, mientras que en los colombianos solo llegan al 43.47% en los españoles asciende al 69.47%; y en el segundo, mientras en el caso colombiano representan el 46.20%, en el español apenas alcanza el 20.17%. De esta forma, en CA los libros de los dos países incluyen los niveles de complejidad INT-PC e INT-P con porcentajes mayores de tareas que MÁX y MÍN.

Si nos centramos en el nivel de complejidad predominante es INT-P en el caso colombiano e INT-PC en el español. MÁX, por el contrario, es considerado con el menor porcentaje de tareas en ambos casos.

En cuanto al desarrollo visual, los resultados anteriores también indican que los libros colombianos lo enfatizan en mayor proporción que los españoles y en el primer caso los porcentajes de tareas que lo promueven duplican los considerados en el segundo.

*Análisis comparativo por países. Global. Tópicos. Complejidad visual y desarrollo de visualización.
2.561 tareas*

Complejidad	CA				MA				PA			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
MÁX	44	4.99	29	5.09	23	6.84	89	15.42	1	1.56	16	12.03
INT-PC	383	43.47	396	69.47	40	11.91	97	16.81	13	20.31	8	6.01
INT-P	407	46.20	115	20.17	132	39.28	194	33.62	7	10.93	8	6.01
MÍN	47	5.33	30	5.26	141	41.96	197	34.14	43	67.19	101	75.94
Total	881	99.99	570	99.99	336	99.99	577	99.99	64	99.99	133	99.99

Tabla 4.44. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por tópicos

En MA, las complejidades MÁX e INT-PC son incluidas con porcentajes pequeños de tareas (generalmente no despreciables) mientras que INT-P y MÍN lo son en porcentajes considerables en la mayoría de los ciclos. Así, pues mientras que en los libros de los dos países se enfatiza a MÍN e INT-P los porcentajes correspondientes a MÁX e INT-PC son reducidos.

En los libros de ambos países la complejidad MÍN es la predominante siendo en los colombianos donde el porcentaje es mayor mientras que MÁX es el nivel de complejidad menor con el 6.84% de las tareas en el caso colombiano y con el 15.42% en el español.

En este tópico también se evidencia que los libros colombianos contemplan mayores porcentajes de tareas que promueven el desarrollo de la visualización que sus contrapartes españolas.

En el tópico donde se considera las relaciones entre el área y el perímetro el nivel de complejidad predominante también es el mismo en los libros de ambos países (MÍN) siendo los textos españoles quienes lo consideran en mayor porcentaje que los colombianos. En cuanto al nivel de complejidad menor es MÁX en los libros colombianos e INT-P e INT-PC en los españoles. Estos resultados muestran que el desarrollo de la visualización es promovido a través de pequeños porcentajes de tareas en los libros de los dos países, pero son los colombianos, al igual que en los tópicos anteriores, quienes lo consideran en mayor medida.

Si nos centramos en los ciclos (tabla 4.45) en los dos primeros, los libros de los dos países se comportan de manera similar pues las complejidades INT-PC e INT-P son contempladas en mayores proporciones de tareas que MÁX y MÍN. La complejidad predominante en C1 es INT-P en el caso colombiano e INT-PC en el español y en el segundo ciclo es INT-PC en los libros de ambos países. El nivel de complejidad menor es MÁX y es considerado con porcentajes despreciables en el caso colombiano y no contemplado en el español.

En el tercer ciclo, mientras que en los libros colombianos la complejidad INT-PC es incluida con el mayor porcentaje de tareas, en los españoles es MÍN quien es asumida de tal forma. El nivel de complejidad menor es MÁX en ambos casos. Con respecto a INT-P es considerada en alrededor de la tercera parte de las tareas en los libros colombianos y en casi la cuarta parte en los españoles. Y las complejidades MÍN, libros colombianos, e INT-PC, libros españoles, lo son con el 24.77% y el 29.06% de las tareas respectivamente.

Análisis comparativo por países. Global. Ciclos. Complejidad visual y desarrollo de visualización. 2.561 tareas

Complejidad	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
MÁX	4	1.01	0	0	39	7.03	27	7.2	25	7.55	107	13.17
INT-PC	103	26.07	70	75.27	219	39.46	195	52	114	34.44	236	29.06
INT-P	266	67.34	21	22.58	170	30.63	94	25.07	110	33.23	202	24.88
MÍN	22	5.57	2	2.15	127	22.88	59	15.73	82	24.77	267	32.88
Total	395	99.99	93	100	555	100	375	100	331	99.99	812	99.99

Tabla 4.45. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por ciclos

Si comparamos los libros de ambos países según cómo incluyen los niveles de complejidad de un ciclo al siguiente el comportamiento varía según el nivel de complejidad. Mientras que en el caso colombiano INT-PC y MÍN se consideran cíclicamente, en el español los porcentajes respectivamente descienden o ascienden de un ciclo a otro. MÁX, por su parte, es incluida cíclicamente en los libros españoles y ascendentemente en los colombianos. La complejidad INT-P es promovida de forma cíclica en los libros de ambos países.

Los libros colombianos generan mayores oportunidades para el desarrollo visual en el primer ciclo mientras que los españoles hacen lo propio en el segundo, pero la diferencia entre los porcentajes es considerable siendo en los colombianos donde es mayor. Por el contrario, en los colombianos es en el segundo ciclo donde está el menor porcentaje de tareas que inducen el desarrollo visual mientras que en el español lo es en el primero. En este caso la diferencia entre los porcentajes no es muy considerable pero también son los libros colombianos quienes consideran el mayor número de tareas.

Finalmente, en los libros colombianos el desarrollo visual es predominante en un tópico (CA) y en un ciclo (C1) mientras que en los españoles en ningún ciclo ni tópico lo es y tampoco representa el nivel de complejidad menor. Desde este punto de vista, también los libros colombianos contemplan mejores posibilidades que los españoles para el desarrollo visual.

4.4.1 Síntesis y conclusión.

A manera de síntesis y con el propósito de plantear algunas conclusiones que se desprenden del análisis comparativo por países reorganizaremos la información anterior según cada nivel de complejidad

Desarrollo visual (complejidad INT-P). En CA es considerado en más de la mitad de las tareas en solo uno de los ciclos de los libros colombianos; en MA, sucede en uno de los ciclos tanto en los libros españoles como colombianos; y en PA, o no es contemplado o

se hace con menos del 10% de las tareas en todos los ciclos en el caso español y solo en uno del colombiano.

En los tópicos CA y MA los libros colombianos y españoles incluyen la complejidad INT-P de forma diferente. Mientras que en CA en España los porcentajes de tareas descienden de un ciclo a otro y es una CVm, en Colombia no descienden y es una CVI. En cuanto a MA, si es descendente en el caso colombiano, en el español es no descendente (en ambos casos es una CVI). En PA el comportamiento es igual en los dos países donde los porcentajes de tareas no descienden de un ciclo a otro y es una CVm.

En cada uno de los tópicos de área los libros colombianos ofrecen mejores condiciones que los españoles para que la visualización sea desarrollada. En el caso colombiano, tanto en CA como en MA la complejidad INT-P es predominante en uno de los ciclos y en ninguno es considerada con el menor porcentaje de tareas. En el caso español ni es predominante ni es el nivel de complejidad menor. En CA y es predominante y contemplada con el menor porcentaje de tareas en un ciclo de MA. En cuanto a PA, no es predominante en ninguno en los ciclos de los dos países, pero sí el nivel de complejidad menor en un ciclo de los libros colombianos y en dos de los españoles.

El análisis global también demuestra que el desarrollo de la visualización es promovida en menos del 10% de las tareas de PA del caso español y en más de la mitad de en uno de los ciclos (C1) en los libros colombianos. Y que los libros colombianos ofrecen mejores condiciones para el desarrollo visual que los españoles puesto que en uno de los tópicos (CA) y en uno de los ciclos (C1) INT-P es la complejidad predominante y en ninguno la menor. En los españoles es la menor en uno de los tópicos (PA) y la predominante en ninguno de los ciclos ni de los tópicos.

INT-P es incluida de forma distinta de un país a otro, si en el caso colombiano los porcentajes de tareas descienden de un ciclo a otro y es CVM; en el español no descienden y es CVm. Además, si en el primer ciclo es donde los textos colombianos promueven los mayores porcentajes (Tabla 4.46), en los españoles es en el tercero donde se contempla; y si en el tercer ciclo es donde los colombianos consideran el menor porcentaje, los españoles lo hacen en el primero.

<i>Análisis comparativo por países. Mayor y menor desarrollo visual</i>			
Complejidad	MÍN	+	-
	Ed	(T,C)	(T,C)
INT-P	COL	(CA,C1)	(PA,C3)
	ESP	(MA,C3)	(PA,C1)
MÁX	COL	(MA,C3)	(PA,C1)
	ESP	(MA,C3)	(CA,C1)
INT-PC	COL	(CA,C2)	(MA,C3)
	ESP	(CA,C1)	(PA,C3)
MÍN	COL	(PA,C2)	(CA,C1)
	ESP	(PA,C3)	(CA,C1)

Tabla 4.46. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la complejidad visual

Complejidad MÁX. En CA es contemplada en menos del 10% de las tareas en todos los ciclos de los libros españoles y en la mayoría de los colombianos; mientras que para MA lo es en la mayoría de los ciclos del caso colombiano y en uno del español y para PA se hace en todos los ciclos de los libros colombianos y en la mayoría de los españoles.

En los tópicos CA y MA los textos de ambos países la promueven de forma similar siendo una CVm incluida a través de porcentajes de tareas que no descienden de un ciclo al siguiente, en ningún ciclo es el nivel de complejidad predominante y en al menos uno es el menor. En PA, es CVm en los libros de los dos países, en ningún ciclo es la predominante y en al menos dos es la menor, pero, en los colombianos se incluye con porcentajes que descienden de un ciclo al siguiente mientras que en el español no son descendentes.

En CA es el nivel de complejidad menor en dos ciclos en el caso español y en uno del colombiano mientras que en MA lo es en la mayoría de los ciclos en ambos casos y en PA lo es en todos los ciclos en el caso colombiano y en dos del español.

Así, pues, desde el análisis local en CA los textos colombianos brindan mejores condiciones para que la complejidad MÁX sea contemplada que los españoles, mientras que los españoles lo hacen en PA; y en MA es igual de un país a otro.

El análisis global demuestra que a nivel de tópicos, es contemplada en menos del 10% de las tareas en todos en los libros colombianos y solo en uno (CA) en los españoles, y a nivel de ciclos es tenida en cuenta en menos del 10% de las tareas en todos en los libros colombianos y solo en uno (C2) en los españoles mientras que en el primer ciclo no es contemplada.

En los libros de ambos países MÁX es incluida con porcentajes que no descienden de un ciclo al siguiente y que en la mayoría de los tópicos y ciclos es el nivel de complejidad menor: en todos los tópicos y ciclos en Colombia (VCm) y en dos de los tópicos (CA y MA) y todos los ciclos en España (CVm). En este sentido, los libros colombianos ofrecen condiciones menos propicias para inducir a MÁX que los españoles.

Independientemente del país MÁX es considerado con los mayores porcentajes en PA y en el tercero de los ciclos mientras que es asumido con los menores porcentajes en el primer ciclo en ambos países, en PA para Colombia y CA para España.

Complejidad INT-PC. Para CA es asumida en más de la mitad de las tareas en todos los ciclos de los libros españoles y solo en uno de los colombianos; para MA, en cada uno de los casos no es promovida en la mayor parte de los ciclos o lo es a través de porcentajes pequeños de tareas; y en PA, es considerado en menos del 10% en la mayoría de los ciclos en el caso colombiano y en todos del español.

En MA y PA los libros de los dos países promueven este nivel de complejidad de forma muy similar siendo una CVM que en al menos en uno de los ciclos representa el menor porcentaje de tareas y en ninguno el mayor y que se tiene en cuenta con porcentajes que no descienden de un ciclo a otro. Pero, es en los libros colombianos donde se contempla en condiciones más propicias; en ellos es el nivel de complejidad menor en uno de los ciclos de cada tópico mientras que en los españoles son dos los ciclos que tienen esta característica.

En CA, se considerable forma distinta de un país a otro. Mientras que en los colombianos es una CVM y es el nivel predominante en dos de los ciclos y el menor en ninguno, en los españoles es una CVM que en todos los ciclos es incluida con el menor porcentaje de tareas. En cuanto a cómo se consideran de un ciclo a otro los porcentajes de tareas donde aparece INT-PC en ambos países no descienden de un ciclo a otro. Así, pues, igual que en los tópicos anteriores los libros colombianos generan mejores condiciones que los españoles para que este nivel de complejidad sea contemplado

El análisis global resalta a nivel de tópicos, que INT-PC se tiene en cuenta en el caso español en más de la mitad de las tareas de uno (CA) y en menos del 10% de PA mientras que en el caso colombiano no se considera en ninguno de los tópicos. En cuanto a los ciclos, este nivel de complejidad es contemplado en todos con porcentajes mayores del 10%.

Las condiciones para que INT-PC sea promocionada es similar de un país a otro pues en el español son dos los ciclos (C1 y C2) y uno de los tópicos (CA) donde es imperante y en un ciclo o un tópico donde es la menor, y en los colombianos es imperante en dos de los ciclos (C2 y C3) y la menor en ninguno. Por otra parte, en CA y C2 en el caso colombiano, y en CA y C1 en el español es donde se encuentran los mayores porcentajes de INT-PC, mientras que en MA y C3 (Colombia) y en PA y C3 (España) es donde son menores.

En el caso español INT-PC aparece incluido con porcentajes que descienden entre ciclos y es una CVM, mientras que en el colombiano los porcentajes no descienden y es una CVM. En este sentido, INT-PC es promovido de forma diferente de un caso al otro.

Complejidad MÍN. En CA o no es contemplada o se hace en porcentajes pequeños (inferiores al 10%) en todos los ciclos de los libros de ambos países. Para MA, no se tienen en cuenta o se considera en porcentajes pequeños de tareas (inferiores al 10%) en la mayoría de los ciclos del caso español y en uno del colombiano, y en más de la mitad de las tareas solo en uno de los ciclos de los libros colombianos. Y para en PA más de la mitad de las tareas de todos los ciclos lo promueven.

El análisis local también demuestra que en CA las condiciones que ofrecen los libros colombianos y españoles para inducir a MÍN son iguales, pues, en ambos es una CVM que se incluye con porcentajes que no descienden de un ciclo al siguiente y que en dos

ciclos es considerada con el menor porcentaje de tareas. En MA y PA, son los libros colombianos quienes consideran condiciones más propicias, pues, en ellos es el nivel de complejidad predominante en dos ciclos del primer tópico y en ninguno es el menor, mientras que en los españoles solo es el predominante en un ciclo y el menor en otro. En cuanto a PA mientras que en todos los ciclos los libros colombianos la consideran con el mayor porcentaje de tareas, en los españoles se hace con el menor.

En lo relativo a los tópicos el análisis global muestra que en ambos países se contempla en menos del 10% de las tareas en uno de los tópicos (CA) y en más de la mitad en otro (PA). En cuanto a los ciclos, sólo se asume con porcentajes inferiores al 10% en el primero de los ciclos y mayores al 50% en ninguno.

El análisis global también demuestra que esta complejidad es promovida de igual manera en los libros de ambos países: es una CVM incluida con porcentajes de tareas que no descienden de un ciclo al siguiente. Pero, los libros españoles son quienes inducen mejores condiciones para que sea contemplada, en ellos dos de los tópicos (MA y PA) y en uno de los ciclos (C3) es contemplada con el mayor porcentaje de tareas, mientras que en los colombianos esto sucede solo en dos de los tópicos (MA y PA). Por otra parte, en ambos países, PA es el tópico donde están los mayores porcentajes MÍN, y CA donde están los menores. En cuanto a los ciclos, en C2 (Colombia) y C3 (España) están los mayores porcentajes, y en C1 (Colombia y España) están los menores.

Para terminar, los tópicos donde hay menos porcentajes de tareas que inducen cada uno de los niveles de complejidad arriba descritos son en CA para MÁX (Colombia) y MÍN (ambos países); en MA para IN-PC (Colombia); y en PA para INT-P (ambos países), MÁX (Colombia) e INT-PC (España). En cuanto a los ciclos, son C1 para MÁX y MÍN (ambos países) e INT-P (España); C3 para INT-P (Colombia) e INT-PC (ambos países); y en C2 ninguno de los niveles de complejidad tiene esta característica.

En la tabla 4.47 se condensa la información presentada en los análisis local y global. Cada nivel de complejidad es caracterizado en función de cuatro aspectos, a saber: los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (CVM, CVI y CVM), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis comparativo por países. Niveles de complejidad. Local y global. Síntesis.</i>					
Complejidad	País	Análisis local			Análisis global
		CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)					
MÁX	COL	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,2)	CVm+D+(0,3)	CVm+ND+(0,6)
	ESP	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,2)	CVm+ND+(0,5)
INT-PC	COL	CVM+ND+(2,0)	CVm+ND+(0,1)	CVm+ND+(0,1)	CVM+ND+(2,0)

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

	ESP	CV _m +ND+(0,3)	CV _m +ND+(0,2)	CV _m +ND+(0,2)	CVM+D+(3,1)
INT-P	COL	CVI+ND+(1,0)	CVI+D+(1,0)	CV _m +ND+(0,1)	CVM+ND+(2,0)
	ESP	CV _m +D+(0,0)	CVI+ND+(1,1)	CV _m +ND+(0,2)	CV _m +ND+(0,1)
MÍN	COL	CV _m +ND+(0,2)	CVM+ND+(2,0)	CVM+ND+(3,0)	CVM+ND+(2,0)
	ESP	CV _m +ND+(0,2)	CVI+ND+(1,1)	CV _m +D+(0,3)	CVM+ND+(3,0)

Tabla 4.47. Síntesis de la caracterización de los niveles de complejidad por país

CAPÍTULO 5: FUNCIONES VISUALES EN EL TRATAMIENTO DEL ÁREA.

Introducción.

La visualización tiende a soportar o guiar el desarrollo o comprensión de un problema matemático de diferentes maneras (Duval, 1998a; Arcavi, 2003; Davis, 1993; Richard, 2004). No obstante, en muchas de las tareas que se proponen a los estudiantes la función que desempeña no siempre contribuye o ayuda en el proceso de resolución de la actividad planteada (Mesquita, 1989). En tareas de este tipo las figuras en palabras de Mesquita (1989) no suelen ser un soporte para la 'intuición', por el contrario, son una trampa para ella; a tal punto, que la 'intuición' llega a ser engañosa. En consecuencia, caracterizar las funciones visuales y determinar sus efectos potenciales en el desarrollo de la visualización es un asunto a considerar.

Desde la perspectiva de los libros de texto determinaremos las funciones visuales asociadas al concepto de área así como sus potenciales efectos para el estudio de la visualización. Según el criterio considerado para estudiar la relación *función visual-desarrollo de la visualización* es posible analizar y discutir los datos de la investigación desde tres frentes de naturaleza diferente: carácter multifuncional de las figuras, rol de los lectores de los libros de texto, y funciones informativas y no informativas. Si bien en el presente capítulo describimos en primera instancia cada uno de los frentes anteriormente citados, la presentación y discusión de los datos se hará desde la perspectiva del papel que representan las funciones de naturaleza informativa y no informativa en el estudio de la visualización.

En este sentido son cuestiones a considerar en este capítulo:

- ¿Qué tipo de funciones visuales predominan, cuáles no, en el tratamiento que los libros de texto hacen del concepto de área?
- ¿De qué forma los libros promueven que las funciones visuales contribuyan u obstaculicen el desarrollo de la visualización?
- ¿En qué ciclos de enseñanza y a través de qué tópicos de área las editoriales analizadas promueven que las funciones visuales contribuyan u obstaculicen el desarrollo de la visualización?

- ¿Existen diferencias en la forma en que los libros colombianos y españoles promueven que las funciones visuales contribuyan u obstaculicen el desarrollo de la visualización?

5.1 Funciones visuales que aparecen en los libros de texto al promover el estudio del área.

La función que se asigna a la visualización en las tareas según el tratamiento que los libros realizan en el estudio del área está determinada por un total de cinco categorías. Las dos primeras se caracterizan por la presencia de un único tipo de función visual: inductiva (Id) o informativa (Inf). Las tres restantes, dan cuenta de la composición de dos y tres funciones visuales; es el caso de la presencia simultánea de las funciones inductiva e informativa (II), informativa y heurística (IIH) e inductiva e heurística (IdH).

<i>Funciones visuales en los libros de texto</i>		
Función visual	Frec	%
Id	486	19
Inf	27	1
IdH	215	8
II	1102	43
IIH	731	29
Total	2561	100

Tabla 5.1. Funciones visuales en los libros de texto

La función visual II destaca por una mayor presencia en la construcción del concepto de área en los libros analizados. En el 43% de las tareas de este estudio la función que desempeña la visualización es de esta naturaleza. Por el contrario, las funciones Id, IdH e Inf son las menos privilegiadas puesto que les corresponde en el primer caso un 19%, el segundo con el 8% y en el tercero con apenas el 1% de la totalidad de tareas. IIH es la función que ocupa el segundo lugar respecto de las más usadas en los libros al estar presente en el 29% de las tareas (tabla 5.1).

En cuanto a los tres frentes de naturaleza diferente que señalan los efectos potenciales que para el desarrollo de la visualización induce la presencia de unas y otras funciones hemos de hacer las siguientes consideraciones:

Carácter multifuncional y monofuncional de las figuras. Los resultados presentados en la tabla 5.1 muestran que las figuras geométricas constituyen en mayor medida un registro de representación multifuncional en el estudio del área. El 80% de las tareas sobre el área de los manuales cumplen esta característica, es decir, movilizan composiciones de funciones visuales de naturaleza IdH, II e IIH. Por el contrario, un carácter monofuncional de las figuras (Id e Inf) solo es considerado en una quinta parte de las tareas analizadas en los libros.

En la presentación del concepto de área sea construida en los manuales se privilegia la consideración simultánea de variadas funciones visuales lo que debe tenerse en cuenta por profesores, estudiantes y diseñadores de libros de texto, pues, el carácter multifuncional de la visualización está determinado por el diferente estatus que desempeñan las figuras en la actividad matemática considerada (Duval, 2003). Por tanto, según sea el estatus privilegiado, las operaciones y los tratamientos admisibles tienden a ser diferentes (Mesquita, 1989). Igual sucede con el tipo de ambivalencia introducido, al respecto. Duval (2003) señala que al resolver o comprender una tarea matemática no es posible considerar sobre una misma figura estatus de naturaleza diferente, pues, además de introducirse distintos tipos de ambivalencias, pueden ser entre sí totalmente incompatibles. Además, desde este punto de vista es importante considerar que la dificultad de hacer de las figuras verdaderos soportes heurísticos para el estudio de las matemáticas radica en que el estatus de la figura no sea explícitamente bien interpretado; es el contexto en que se presenta la tarea el que permite determinarlo, de forma objetiva y, en principio, no ambigua (Duval, 2003). Lo anterior explica por qué las figuras geométricas deben ser consideradas con relativo cuidado, pues, su uso introduce una variedad de aspectos que pueden generar serias dificultades en el desarrollo o comprensión de la actividad matemática planteada.

Papel visual del lector. Por otra parte, que la visualización juegue una función inductiva y/o informativa, más no heurística, en el desarrollo y comprensión de una actividad matemática indica que la visualización tiende a ser guiada por el propio texto. No es necesario que el lector, al intentar comprender o desarrollar una tarea deba introducir por sí mismo, por decisión propia, visualización alguna. Por el contrario, le basta seguir el despliegue de procedimientos o las indicaciones dadas en la consigna de la tarea o recurrir a las características de objetos físicos a los que aluden las figuras presentadas para resolver la tarea. En un sentido totalmente distinto, las tareas donde la función heurística está presente promueven que en algún momento el lector juegue un papel activo en el tipo de visualización a considerar. En este sentido afirmamos que la función visual determina cómo ha de enfrentarse el alumno a la tarea. Por tanto, en el primer caso decimos que el papel del lector es pasivo, mientras que en el segundo es de naturaleza activa. En consecuencia, se promueve un papel activo en los lectores por medio de tareas donde la función visual es Id.H e IIH y pasivo en aquellas donde la función es Id, Inf o II.

Que solo el 37% de las tareas propuestas por los libros analizados promuevan un rol visual activo, mientras que el 63% susciten un rol visual pasivo en cuanto a la tarea matemática propuesta, muestra que los libros promueven pocas oportunidades para que sus usuarios, de manera independiente y autónoma, exploren a partir de las características perceptivas de las figuras diversas formas de proceder, aspecto de gran importancia para el desarrollo de la visualización, pues, es ahí donde los usuarios de los libros, por un lado, tienen la libertad de aplicar, articular o adaptar las maneras de ver que de manera explícita han sido “mostradas” en los libros, o bien introducir otras formas de ver que en ningún momento han sido objetos de explícita reflexión en los textos. Por otro lado, pueden establecer

criterios que les permitan reconocer y privilegiar entre toda la gama de formas de ver que favorecen las figuras aquellas que sean acordes, pertinentes y económicas en el estudio de la actividad matemática planteada.

Por el contrario, si bien las tareas donde es necesario seguir de forma exclusiva las indicaciones dadas por el texto para reconocer la forma de ver aplicada o a aplicar son importantes para introducir a los usuarios en el estudio de la visualización; estas tareas, por sí mismas, no son suficientes para desarrollar la visualización en los alumnos, pues son mínimos los niveles de libertad y creatividad de que se dispone. Hay que tener en cuenta que: a) si bien la visualización puede promover que las figuras sean una herramienta heurística, no siempre es el caso y que b) a pesar que esta actividad cognitiva cumpla tal función, puede suceder que las formas de ver consideradas desplieguen procedimientos de resolución o comprensión incoherentes, antieconómicos y no pertinentes a la actividad matemática propuesta.

Funciones informativas y no informativas. Como se ha señalado reiteradamente en esta investigación que las figuras geométricas sean potentes herramientas heurísticas en matemáticas está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo (Duval, 1999; Padilla, 1992; Lémonidis, 1991; Marmolejo y Vega, 2012). Por el contrario, se debe considerar que en las tareas que se proponen a los estudiantes las funciones visuales no siempre contribuyen o ayudan al estudio de la actividad matemática propuesta. Entre las variadas funciones visuales que pueden coexistir en ciertos tipos de actividades matemáticas algunas conducen a la identificación de ciertas relaciones sin permitir su justificación o introducen relaciones geométricas falsas (Mesquita, 1989). Incluso, refuerzan la confusión entre lo representado y el representante y el estudio de operaciones y tratamientos figurales sin tener en cuenta el registro en uso. En las tareas donde la función visual es Inf, II y III el área tiende a ser tratada en los libros analizados por medio de acciones y formas de proceder que ponen en entredicho el papel que debe desempeñar la visualización en las matemáticas. Por el contrario, en las tareas donde la función es Id e IdH se contempla en su máxima expresión el que las figuras pueden ser herramientas heurísticas que contribuyen al estudio de la actividad planteada, y que es a través de ellas que el desarrollo de la visualización es promovido (pp. 150-151).

Todo lo anterior deja claro que determinar la función o funciones que desempeña la visualización en los libros al tratar el área es un requisito ineludible para analizar cuáles son las posibilidades de desarrollo visual que estos materiales brindan en los primeros grados de la educación básica.

5.2 Función informativa y no informativa.

Cada registro de representación semiótico posee propiedades inherentes que tienden a ser movilizadas durante la conformación y transformación de las representaciones. Respetar

esas propiedades en matemáticas es un asunto a considerar en el campo de la Educación Matemática. De no hacerse, el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas inevitablemente ha de enfrentar una gran variedad de obstáculos y dificultades (Duval, 1999). En tal sentido, un aspecto a tener en cuenta en la investigación en Educación Matemática será responder a la pregunta ¿dichas propiedades son consideradas en menor o mayor grado en el tratamiento de los contenidos matemáticos en la escuela?

Se tratará de dar respuesta a dicha pregunta centrándonos en el registro de representación semiótico de figuras geométricas bidimensionales y su papel en el tratamiento del concepto de área tal como aparece en los libros colombianos y españoles. Para ello, como se ha indicado en el capítulo de metodología (sesión 3.4.7), se han agrupado los distintos tipos de funciones que desempeña la visualización en cuanto al concepto de área propuesto en los manuales de España y Colombia en dos categorías: tareas informativas (T.Inf.) y tareas no informativas (T.No.Inf.). Las tareas que en su desarrollo o comprensión favorecen las funciones tipo Inf, II y III constituyen la primera categoría. Las tareas que, por el contrario, incluyen las funciones Id y IdH forman parte de la segunda categoría.

En las tareas informativas las figuras geométricas ni la visualización asociada a ellas son asumidas en el lugar que les corresponde para el desarrollo de la visualización, pues, entre variados aspectos, suscitan acciones impropias del registro de representación de las figuras bidimensionales y de la propia Geometría (pp. 148-150). Por el contrario, en las T.No.Inf los elementos figurales y visuales a considerar, así como la manera de asumir las figuras, permiten que la visualización pueda ser desarrollada (pp. 150-151). Obviamente, si las tareas de área expuestas en los libros son en mayor proporción T.Inf, entonces, la manera como en estos materiales se suscita el estudio del concepto de área podría no conducir, desde el inicio de la enseñanza obligatoria, a hacer de la visualización una herramienta fundamental para el estudio de las matemáticas.

Con el propósito de discriminar cuáles son las posibilidades que brindan los manuales para promover que en el tratamiento del área la visualización sea desarrollada proponemos, igual que en el capítulo anterior, tres niveles de análisis (tabla 5.2). En el primero de forma general e independientemente del país se compara el número de tareas que tienden a promover una u otra tendencia (**análisis general unificado**). En el segundo nivel de análisis en función de las posibilidades que se brindan para introducir en las figuras tratamientos se clasifican, se caracterizan y comparan entre sí las seis editoriales consideradas en el estudio (**análisis comparativo por editoriales**). En el último nivel de análisis y con el objetivo de detectar la existencia, o no, de diferencias en los libros de un país a otro, se discute la relación existente entre el número de tareas que privilegian que la visualización contribuya, o no, al estudio de las matemáticas en los libros colombianos y sus contrapartes españolas (**análisis comparativo por países**).

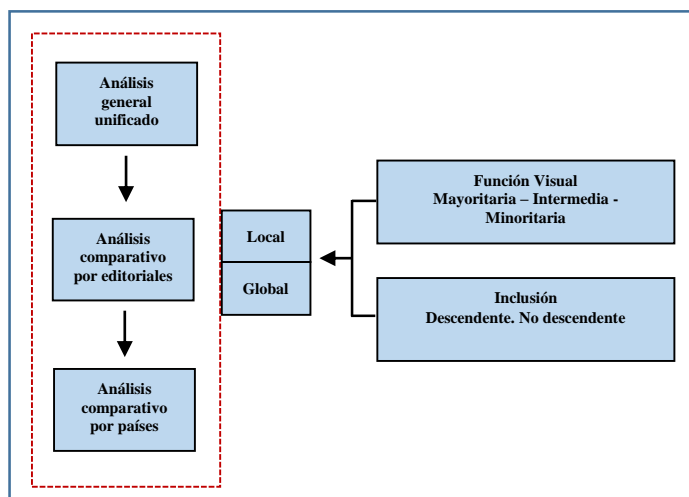


Tabla 5.2. Representación esquemática del análisis y discusión de los datos

Tal como se hizo en la presentación y análisis de los datos en el capítulo anterior, en éste los libros serán caracterizadas en función de dos elementos de contraste: los tópicos de área (CA, MA, PA) y los ciclos educativos (C1, C2, C3). Según como se consideren estos elementos de contraste, sea de forma articulado, sea de manera independiente, hablaremos de **análisis local** y de **análisis global**.

En el análisis local se describe la presencia de T.Inf y T.No.Inf según el tópico de área considerado. Cada tópico de área se describe a partir de la frecuencia de tareas presentes en cada uno de los ciclos educativos en que son presentadas. Para discriminar los libros de forma local consideraremos dos criterios:

- La mayor o menor presencia de T.Inf en cada ciclo de enseñanza. En este sentido se considerarán tres aspectos, a saber: **función totalmente informativa (FTI)**, si en cada uno de los ciclos en que se presentan las tareas de un tópico de área la mayoría son T.Inf; **función parcialmente informativa (FPI)**, si por lo menos uno de los ciclos en que una editorial presenta las tareas de un apartado suscita un mayor número de T.No.Inf; y **función totalmente no-informativa (FTNI)**, en el caso de que la mayor parte de las tareas presentes en cada uno de los ciclos en que se desarrolla un tópico de área son T.No.Inf. La presencia de la primera de las funciones en uno o varios tópicos pone en evidencia que el libro o libros de texto inducen a considerar que las funciones de la visualización a mediano o largo plazo, pueden constituir un obstáculo para el desarrollo de la visualización. Por el contrario, las otras dos clases de función permiten que la visualización sea desarrollada; la presencia de una FTNI, obviamente, brinda mayor oportunidad hacia el desarrollo de la visualización que la FPI.
- La relación entre los porcentajes de T.Inf de un ciclo de educación y el siguiente. Si el porcentaje de T.Inf en el primer ciclo es siempre mayor que en el segundo y este mayor que en el tercero decimos que las T.Inf son consideradas de forma **descendente**. En este caso, el libro de texto brinda de un ciclo educativo a otro

posibilidades para el desarrollo de la visualización sea considerado, pues, a medida que un usuario utiliza los libros de primer a sexto grado de una misma editorial, la diferencia en la proporción de tareas que son de naturaleza T.No.Inf y T.Inf tienden a decrecer, generándose de un ciclo de enseñanza al siguiente más opciones de que el desarrollo de la visualización sea incluido. Por el contrario, cuando esta situación no está presente entonces las T.Inf son consideradas de forma **ascendente** o **cíclica**. En el primer caso los porcentajes de TInf aumenta de un ciclo a otro, en el segundo, los porcentajes en C2 son mayores o menores que en C1 y C3. En ambos casos consideramos que la posibilidad de que las figuras contribuyan o ayuden al proceso de resolución o comprensión de la actividad propuesta es en extremis limitada. De dos formas diferentes los libros inducen un equilibrio entre las tareas que promueven que las visualización sea desarrollada y aquellas que lo ignoran, o bien de un ciclo a otro la cantidad de T.Inf es cada vez menor, o bien la mayoría de las tareas en uno de los tópicos es T.No.inf.

En el análisis global se considera la presencia de T.inf y T.No.inf de dos formas distintas y disjuntas entre sí: 1) los tópicos de área independiente del ciclo de enseñanza al que pertenezcan las tareas y 2) los ciclos educativos asumidos en el estudio sin tener en cuenta el tópico de área considerado. De forma similar al análisis local, en el global consideramos que las funciones que desempeñan la visualización en los libros puede ser, por un lado, **FTI, FPI y FTNoI**; y, por otro lado, **ascendente, descendente o cíclica**. La **FTI** está presente cuando en todos los tópicos de área y en todos los ciclos educativos la presencia de tareas T.Inf es mayor que las de T.No.Inf. Por el contrario, es FPI cuando al menos en uno de los apartados o en uno de los ciclos hay una mayor parte de T.No.inf que T.Inf. Es claro que el primer caso garantiza mayores opciones, que el segundo, de hacer de la visualización una actividad cognitiva fundamental en matemáticas. De forma exclusiva para el análisis global de los ciclos de aprendizaje, y de forma idéntica al análisis local, consideramos un uso descendente o cíclico de las tareas informativas. El primero, en relación a los otros dos, brinda mayores posibilidades a los usuarios de los libros de asumir cómo las figuras y la visualización intervienen en las matemáticas.

5.3 Análisis general unificado: función informativa y no informativa.

Como muestra la tabla 5.3 las tareas de los libros colombianos y españoles para tratar el área no promueven el desarrollo de la visualización. Cerca de las tres cuartas partes de las tareas son T.Inf y solo el 27.57% son T.No.Inf. De acuerdo a la discusión planteada en el capítulo de metodología estos resultados demuestran que la mayor parte de las tareas de los libros colombianos y de los españoles promueven la confusión representante-representado, la constatación de relaciones matemáticas sin permitir su justificación, la enseñanza de operaciones y tratamientos figurales sin tener en cuenta el sistema de representación usado, así como también algunos de ellos ajenos a los exigidos en el estudio de la Geometría. La presencia de unos y otros de estos aspectos pueden

constituirse en verdaderos obstáculos para la visualización, incluso generar trampas para ella.

<i>Funciones informativa y no informativa en las tareas de área de los libros de texto</i>		
Tarea	Fec	%
T.Inf	1.855	72.43
T.No.Inf	706	27.57
Total	2.561	100

Tabla 5.3: Funciones visuales. Análisis General unificado

Las editoriales deberían tener esto en cuenta, pues puede ayudar a controlar el número de tareas que suscitan que sus lectores desarrollen habilidades visuales. Además, los maestros deben analizar, seleccionar y graduar, de forma previa, las tareas de los libros que proponen a los alumnos para la construcción del concepto de área privilegiando tareas donde las figuras contribuyan de forma efectiva al estudio de la actividad planteada.

5.3.1 Caracterización unificada de las tareas de los libros de texto.

En lo que sigue describimos las similitudes y diferencias en la forma en que las tareas privilegian una función informativa, así como los potenciales efectos que tienen para la enseñanza. Como se indicó previamente los tópicos identificados en relación con el concepto de área y los ciclos de educación asumidos en el estudio se constituyen en los elementos de contraste.

Análisis local. En los tópicos CA y MA se evidencia un equilibrio en relación al tipo de tarea mayoritario en cada uno de los ciclos. En ambos casos la visualización considera una FTI (Tabla 5.4).

<i>Análisis general unificado. Local. Función informativa y no informativa. 2561 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	362	91.88	537	84.04	273	65.31	1172
	T.No.Inf..	32	8.12	102	15.96	145	34.69	279
Total		394	100	639	100	418	100	1451
MA	T.Inf.	56	83.58	124	55.85	430	68.91	610
	T.No.Inf..	11	16.42	98	44.15	194	31.09	303
Total		67	7.4	222	24.45	624	68.17	913
PA	T.Inf.	18	66.66	21	30.43	39	38.61	78
	T.No.Inf..	9	33.33	48	69.57	62	61.39	119
Total		27	99.99	69	100	101	100	197

Tabla 5.4. Funciones visuales. Análisis general y local

Más de la mitad de tareas propuestas en los tres ciclos en cada uno de estos tópicos suscitan que la función visual sea informativa. Pero, es en el primer ciclo para CA y MA y en el segundo para CA donde los porcentajes que la inducen son mayores, mientras que en el tercero para CA y MA y el segundo para MA descienden siendo siempre superiores al 55%.

Si bien hay un mayor número de T.Inf en el primer ciclo de PA (igual que en CA y MA) son varios los aspectos que evidencian un desequilibrio entre este tópico y los previamente analizados. Solo en uno de los ciclos la mayor parte de las tareas de PA son T.Inf y en ninguno superan el 80% de las tareas. Así, pues, a nivel local los libros consideran una FPI en cuanto a PA.

Los resultados reseñados también demuestran que solo en CA los libros suscitan ciertas oportunidades para que las figuras contribuyan de forma efectiva al estudio de la actividad planteada. En este apartado la frecuencia de T.Inf disminuye a medida que los ciclos educativos van aumentando. Por el contrario, en MA y PA son consideradas cíclicamente. De esta manera en MA y PA se refuerzan tanto al inicio como al final de los ciclos educativos los cuatro aspectos reseñados en el primer párrafo de este apartado; lo que lleva a asumir que en estos tópicos el desarrollo de la visualización no tiende a ser enfatizado.

Análisis global. Los tópicos CA y MA de los libros colombianos y españoles proponen los mayores porcentajes de tareas que no promueven el desarrollo de la visualización (tabla 5.5).

<i>Función informativa y no informativa. Análisis general unificado. Global. Tópicos- 2561 tareas</i>							
Tarea	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf.	1172	80.77	605	66.26	78	39.59	1855
T.No.Inf.	279	19.23	308	33.73	119	60.41	706
Total	1451	100	913	99.99	197	100	2561

Tabla 5.5. Funciones visuales. Análisis general global por tópicos

Aproximadamente en el 80% de las tareas de CA y del 67% de MA las figuras no promueven que la visualización desempeñe el papel que el estudio de las matemáticas requiere. Por el contrario, en PA menos del 40% de sus tareas induce tal concepción.

Si nos fijamos en los ciclos educativos podemos observar que las T.Inf son incluidas cíclicamente. En el primer y tercer ciclo los porcentajes de T.Inf representan más de la mitad de las tareas (tabla 5.6), lo que no induce a que la visualización sea desarrollada. En el segundo tópico, si bien el porcentaje de este tipo de tareas desciende sigue siendo superior al 70%.

<i>Función informativa y no informativa. Análisis general unificado. Global. Ciclos- 2561 tareas</i>							
Tarea	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf.	436	89.34	682	73.33	737	79.24	1855
T.No.Inf.	52	10.66	248	26.67	406	20.76	706
Total	488/2561	17.49	930/2561	36.31	1143/2561	44.63	2561

Tabla 5.6 Funciones visuales. Análisis general global por ciclos

Los resultados anteriores ponen en evidencia que a nivel global la visualización desempeña una FPI.

5.3.2 Síntesis y conclusión.

Los resultados expuestos muestran que las tareas de área propuestas en los libros analizados promueven pocas oportunidades para incentivar el desarrollo de la visualización. Menos de la tercera parte de las tareas promueven tal característica.

Un análisis general realizado a nivel global y local pone en evidencia que en los libros no existe un equilibrio entre las T.Inf en los ciclos de estudio donde se consideran a CA y MA y su contraparte PA. Es en PA donde los libros generan oportunidades para que la visualización sea desarrollada. A nivel global solo el 10.78% de las tareas de dicho apartado son de naturaleza no informativa. A nivel local, es en el primer ciclo y en el segundo donde las frecuencias de tareas en las que las figuras promueven el desarrollo visual son mayores. Además, CA y MA promueven, en cada ciclo formas de proceder no adecuadas con el registro semiótico de las figuras geométricas, donde la visualización podría pasar de ser un soporte a constituirse en un obstáculo para el estudio de las matemáticas.

Los resultados presentados en el análisis local también indican que las T.Inf son promovidas de forma distinta de un tópico a otro. Mientras que en MA y PA se hace de forma cíclica, en CA los porcentajes de tareas que la incluyen decrecen entre ciclos. Lo que induce a considerar que en CA las figuras pueden contribuir al desarrollo de la visualización. Por el contrario, en los otros dos tópicos, si bien en el segundo de los ciclos el porcentaje de T.Inf tiende a disminuir en relación al primer ciclo, en el tercero dicha idea tiende a ser nuevamente reforzada.

Al considerar las tareas de área según el ciclo educativo e independientemente del tópico de área movilizado se pone en evidencia que no existe un ciclo de enseñanza donde las figuras y la visualización desempeñen el papel que las matemáticas requieren. Si bien el uso de tareas informativas disminuye de un ciclo a otro, más del 73% de las tareas en cada uno de los ciclos es de naturaleza T.Inf, siendo el primer ciclo donde la mayor parte de las tareas es de esta naturaleza. Casi el 90% de las tareas presentadas en el primer ciclo son de naturaleza no informativa.

En resumen, los libros para construir el concepto de área consideran los tópicos PA y CA como lugares donde la visualización puede ser desarrollada. En PA las T.Inf tienen frecuencias menores a la mitad de las tareas en dos de los tres ciclos y en CA son promovidas con porcentajes que descienden de un ciclo al siguiente (Tabla 5.7).

<i>Función informativa y no informativa. Análisis general unificado. Síntesis. Local-Global. 2561 tareas</i>		
Tópico	Análisis local	Análisis global
CA	FTI+D	
MA	FTI+ND	FTI+ND
PA	FPI(2/3)+ND	

Tabla 5.7. Funciones visuales. Síntesis

Teniendo en cuenta que más de la mitad del total de las tareas de los manuales forman parte de CA (57%), mientras que el 8% corresponden a PA, es a través de CA donde los libros ofrecen mayores recursos y donde las figuras contribuyen a que la visualización sea desarrollada. Sin embargo, los resultados anteriormente presentados y discutidos ponen también en evidencia que las oportunidades que ofrecen estos libros para que sus lectores reflexionen sobre el potente papel que puede jugar la visualización es en extremis limitado. Una mayor frecuencia de T.Inf sobre sus contrapartes T.No.inf en cada tópico y ciclos educativos considerado (análisis global) y en la mayoría de los tópicos (análisis local), muestra que los textos escolares promueven, entre otros aspectos, la confusión representante-representado y la constatación de relaciones matemáticas sin permitir su justificación; elementos que obstaculizan el estudio de las matemáticas (ver pp. 148-150). Se debe tener en cuenta estos aspectos de las tareas que aparecen en los libros para aplicar los correctivos necesarios de forma que la construcción del concepto de área no llegue a constituirse en un obstáculo y una trampa para la visualización.

5.4 Análisis comparativo por editoriales: función informativa y no informativa.

Este apartado se inicia con la caracterización de las editoriales colombianas en función de la presencia, o no, de T.Inf. Posteriormente, consideraremos las editoriales españolas. Como se señaló previamente el análisis se realizará teniendo en cuenta dos niveles; uno local y otro global. Al final del apartado y a partir de los resultados descritos se presenta un resumen y se extraen algunas conclusiones.

En los anexos 5.1 al 5.5 se señalan de forma detallada y puntualmente la frecuencia y porcentaje de las tareas de cada editorial según el tipo de función visual privilegiada así como el apartado del concepto de área a los que se refieren y el ciclo de educación considerado.

5.4.1 Caracterización de tareas por editoriales.

Mientras que en todas las editoriales colombianas las T.Inf son promovidas en porcentajes mayores al 74%, en dos españolas son consideradas en menos del 69% y en la restante el 72.81% de las tareas son de este tipo. El porcentaje de T.Inf en las editoriales colombianas es pues mayor que en las españolas (tabla 5.8).

<i>Función visual en las editoriales colombianas y españolas</i>					
Editorial	T.Inf		T.No.Inf		Tareas
	Frec	%	Frec	%	
CS	309	74.46	106	25.54	415
CSM	314	74.06	110	25.94	424
CV	352	79.64	90	20.36	442
ES	259	64.75	141	35.25	400
ESM	308	72.81	115	27.19	423
EA	313	68.49	144	31.51	457

Tabla 5.8. Funciones visuales por editoriales

Estos resultados indican que las editoriales españolas se promueven mejores condiciones que las colombianas para que las figuras y la visualización sean consideradas en el lugar que les corresponde para el estudio de las matemáticas.

Editorial CS

Análisis local. Tanto para CA como para MA se contempla en todos los ciclos un mayor porcentaje de T.Inf que T.No.Inf (tabla 5.9) siendo los dos primeros ciclos para CA y el primero y el tercero para MA donde hay los mayores porcentajes de T.Inf. En ambos tópicos, pues, la visualización desempeña una FTI.

Si bien en los dos tópicos la función visual es una FTI el hecho que para CA las T.Inf sean incluidas con porcentajes que descienden entre ciclos mientras que para MA se consideran cíclicamente, sugiere que en el primer tópico es donde se promueven las mejores oportunidades para que la visualización sea desarrollada.

<i>Función visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. CS-415 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Fec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	70	87.5%	106	79.1%	35	63.63%	211
	T.No.Inf..	10	12.5%	28	20.9%	20	36.37%	58
Total		80	100	134	100	55	100	269
MA	T.Inf.	25	83.33%	37	63.79%	34	77.27%	96
	T.No.Inf..	5	16.66%	21	36.2%	10	22.72%	36
Total		30	99.99	58	99.99	44	99.99	132
PA	T.Inf.	2	50%	0	0%	0	0%	4
	T.No.Inf..	2	50%	2	100%	8	100%	12
Total		4	100	2	100	8	100	16

Tabla 5.9. Funciones visuales. Análisis local de la editorial CS

En cuanto a PA, es el tópico más propicio para considerar las figuras como soportes heurísticos que promueven el desarrollo de la visualización, pues, en él la visualización desempeña una FPI y las T.Inf son incluidas con porcentajes que descienden de un ciclo a otro, incluso en el segundo y tercer ciclo el 100% de las tareas son T.No.Inf.

Análisis global. Como se evidencia en las tablas 5.10 y 5.11 en el tópico CA y en el primer ciclo son incluidos los mayores porcentajes de T.Inf mientras que los menores están en PA y en el tercer ciclo. Solo para PA este tipo de tareas representan menos de la mitad de tareas. Por tanto CS promueve que la visualización desempeñe una FPI donde las T.Inf son incluidas con porcentajes que descienden de un ciclo al siguiente con porcentajes que varían entre el 85,08% y el 64,48%.

Tarea	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	211	78.44	96	72.72	2	14.28	309
T.No.Inf	58	21.56	36	27.27	12	85.71	106
Total	269	100	132	99.99	14	99.99	415

Tabla 5.10. Funciones visuales. Análisis glocal por tópicos de la editorial CS

Lo anterior demuestra que en esta editorial en ninguno de los ciclos se promueve un equilibrio entre el número de T.Inf y T.No.Inf y, por el contrario, se promueve la introducción de obstáculos que entorpecen el desarrollo de la visualización.

Tarea	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	97	85.08	143	73.71	69	64.48	309
T.No.Inf	17	14.91	51	26.28	38	35.51	106
Total	114	99.99	194	99.99	107	99.99	415

Tabla 5.11. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial CS

Con relación a los tópicos, solo en PA se trata de suscitar tal equilibrio. Pero, es importante resaltar que en CS el número de tareas en las que se plantea el estudio de la relación perímetro-área es extremadamente reducido (14 de 415 tareas).

Editorial CSM

Análisis local. La visualización en la gran mayoría de las tareas que conforman el tópico CA desempeña una función informativa; en particular, en los dos primeros ciclos el 89.58% y el 90.24% tienen esta naturaleza, mientras que en el tercero la mayoría de las tareas suscitan la misma característica pero con un porcentaje menor. Con relación a MA, al igual que en CA, gran parte de las tareas de los tres ciclos son T.Inf pero en este tópico los ciclos que las privilegian son el primero y el tercero con frecuencias significativamente menores que las correspondientes al tópico CA. Este tipo de tareas son las más habituales en los tres ciclos en lo que se refiere a CA y a MA; pero, en ambos casos, en uno de los ciclos el porcentaje es significativamente menor que en los restantes.

<i>Función visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. CSM-424 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	86	89.58%	74	90.24%	56	65.88%	216
	T.No.Inf..	10	10.41%	8	9.75%	29	34.11%	47
	Total	96	99.99	82	99.99	85	99.99	263
MA	T.Inf.	22	78.57%	38	53.52%	28	70%	88
	T.No.Inf..	6	21.42%	33	46.47%	12	30%	51
	Total	28	99.99	71	99.99	40	100	139
PA	T.Inf.	8	72.72%	2	28.57%	0	0%	10
	T.No.Inf..	3	27.27%	5	71.42%	4	100%	12
	Total	11	99.99	7	99.99	4	100	22

Tabla 5.12. Funciones visuales. Análisis local de la editorial CSM

En cuanto a PA, y al igual que en CS, en CSM la visualización considera una FPI. Solo en el primer ciclo se enfatiza la introducción de obstáculos que entorpecen el desarrollo de la visualización; en los otros dos el porcentaje de T.No.Inf es reducido o nulo: en el segundo ciclo menos de la tercera parte de las tareas suscitan dicho tratamiento y en el tercero ninguna lo considera.

Los resultados previamente presentados y sintetizados en la tabla anterior evidencian que de forma similar que en CS en CSM se promueve que la visualización asuma una FTI para CA y MA mientras que para PA es FPI. Pero, en CSM, y a diferencia de CS, solo en uno de los tópicos las T.Inf son incluidas con porcentajes que descienden entre ciclos siendo PA donde se cumple tal característica (tabla 5.12). En este sentido, el análisis local determina que PA es el único tópico donde es posible promover el desarrollo de la visualización.

Análisis global. Para CA y MA la editorial CSM promueve que la visualización desempeñe una FTI (tabla 5.13) siendo CA donde esta característica está presente con mayor énfasis (el 82.12% de las tareas de CA). En cuanto a MA, el 63.35% de las tareas son T.Inf y menos de la mitad de PA son de este tipo. Al igual que en CS la editorial aquí en estudio hace de PA el tópico donde el desarrollo de la visualización es posible.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Tópicos- CSM- 424 tareas</i>							
Tarea	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	216	82.12	88	63.3	10	45.45	314
T.No.Inf	47	17.87	51	36.69	12	54.54	110
Total	263	99.99	139	99.99	22	99.99	424

Tabla 5.13. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial CSM

Si nos centramos en los ciclos, el tratamiento que han hecho CS y CSM es diferente. Mientras que en CS el porcentaje de T.No.Inf es el mayor en uno de los ciclos; en ninguno de CSM se enfatiza este tipo de tareas. Por el contrario, en los tres ciclos la mayoría de las tareas son del tipo T.Inf (tabla 5.14).

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Ciclos- CSM- 424 tareas</i>							
Tarea	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	116	85.92	114	71.25	84	65.11	314
T.No.Inf	19	14.08	46	28.75	45	34.89	110
Total	135	100	160	100	129	100	325

Tabla 5.14. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial CSM

Con respecto a los ciclos concluimos que hay una tendencia en esta editorial para promover un equilibrio entre las T.Inf y las T.No.Inf donde las primeras son contempladas con porcentajes que descienden entre ciclos; sin embargo, en ninguno de los ciclos las T.Inf aparecen en menor porcentaje que las T.No.Inf. En cuanto a los tópicos, es en PA donde la frecuencia de T.No.Inf es mayor que la correspondiente a las T.Inf. En resumen, el estudio del área en CSM se hace de forma similar que en la editorial previamente analizada, es decir, la visualización asume una FPI y los porcentajes de T.Inf son considerados de forma descendente.

Todo lo anterior demuestra que el único tópico en el que la editorial CSM logra cierto equilibrio entre los dos tipos de tareas es PA. Pero, es importante resaltar, que al igual que en la editorial anteriormente analizada, el número de tareas que se plantean para el estudio de la relación perímetro-área es extremadamente reducido (22 de 224 tareas). Así, pues, en esta editorial también son pocas las oportunidades que se ofrecen para promover que la visualización sea desarrollada.

Editorial CV

Análisis local. Esta editorial hace un tratamiento de las figuras distinto a las dos precedentes. En todos los ciclos de CA y PA considera un mayor porcentaje de T.Inf (tabla 5.15). En CA, en todos los ciclos más de las tres cuartas partes de las tareas son T.Inf y es donde los porcentajes decrecen de un ciclo al siguiente. En PA se enfatiza este tratamiento en el primer y tercer ciclo con porcentajes considerables mientras que en el segundo descienden. En PA, pues, las T.Inf son incluidas de forma cíclica. Ahora bien, aunque CV promueve que la visualización desempeñe una FTI tanto para CA como para PA, es en el segundo tópico donde hay menos oportunidades para que la visualización sea desarrollada, pues en él las T.Inf son incluidas cíclicamente mientras que en CA se hace descendentemente.

<i>Función visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. CV-442 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	115	90.55%	119	87.5%	66	76.74%	300
	T.No.Inf..	12	9.44%	17	12.5%	20	23.25%	49
Total		127	99.99	136	100	86	99.99	349

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

MA	T.Inf.	9	100%	22	44%	1	16.66%	32
	T.No.Inf..	0	0%	28	56%	5	83.33%	33
Total		9	100	50	100	6	99.99	65
PA	T.Inf.	8	80%	9	60%	3	100%	20
	T.No.Inf..	2	20%	6	40%	0	0%	8
Total		10	100	15	100	3	100	28

Tabla 5.15. Funciones visuales. Análisis local de la editorial CV

En MA, por el contrario, se realiza un esfuerzo para que el estudio de las figuras y el desarrollo de la visualización sean considerados. La presencia de las T.Inf disminuye del 100% al 44% y luego al 16.66%. En consecuencia, se promueve que la visualización desempeñe una FPI donde las T.Inf son incluidas de una forma descendente.

Análisis global. CV es la única editorial donde la visualización tiene una FTI. En cuanto a cómo son incluidas las T.Inf, se hace de forma descendente (Tabla 5.16), y con respecto a los tópicos donde se enfatiza la promoción de obstáculos que entorpecen el desarrollo de la visualización es en CA. También en los otros dos tópicos se consideran las figuras de esta forma pero en frecuencias menores.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Tópicos- CV- 442 tareas</i>							
Tarea	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	300	85.95	32	58.18	20	71.42	352
T.No.Inf	49	14.05	33	41.81	8	28.57	90
Total	349	100	65	99.99	28	99.99	442

Tabla 5.16. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial CV

En los tres ciclos la visualización desempeña en la mayoría de las tareas una función informativa (Tabla 5.17) siendo el primero donde más del 90% de las tareas son T.Inf mientras que en el segundo y tercero descienden al 74.62% y el 73.68% respectivamente.

Si hay un tópico donde CV promueve que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización es MA, pues, en él está el menor porcentaje de T.Inf. En los tópicos CA y PA la situación es totalmente distinta en ellos más del 71% de las tareas suscitan tal interpretación.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Ciclos- CV- 442 tareas</i>							
Tarea	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	132	90.41	150	74.62	70	73.68	352
T.No.Inf	14	9.58	51	25.37	25	26.31	90
Total	146	99.99	201	99.99	95	99.99	442

Tabla 5.17. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial CV

CV, a diferencia del resto de las editoriales colombianas, no promueve en PA un equilibrio entre las T.Inf y las T.No.Inf; es en MA donde se produce esta situación. Pero,

en esta editorial las tareas que conforman a MA son pocas (65 de 442 tareas son MA). En consecuencia, también en CV son limitadas las ocasiones que tienen los usuarios de los textos para realizar tareas que promuevan el desarrollo de la visualización.

Editorial ES

Análisis local. Para CA (tabla 5.18), la minoría de las tareas en el tercer ciclo son T.Inf mientras que todas en el primero y la gran mayoría en el segundo se consideran de tal forma. La visualización, pues, desempeña una FPI donde los porcentajes de T.Inf decrecen a medida que los ciclos educativos aumentan.

<i>Función visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. ES-400 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	23	100%	47	83.93%	22	36.06%	92
	T.No.Inf..	0	0%	9	16.07%	39	63.94%	48
Total		23	100	56	100	61	100	140
MA	T.Inf.	0	0%	22	62.86%	139	65.15	161
	T.No.Inf..	0	0%	13	37.14%	68	32.85	81
Total		0	0	35	100	207	100	242
PA	T.Inf.	0	0%	6	66.66%	0	0%	6
	T.No.Inf..	0	0%	3	33.33%	9	100	12
Total		0	0	9	99.99	9	100	18

Tabla 5.18. Funciones visuales. Análisis local de la editorial ES

Para MA, las T.Inf se incluyen en el segundo y tercer ciclo mientras que en el primero no se contemplan. La función visual es una FTI siendo las T.Inf incluidas con porcentajes que ascienden de un ciclo al siguiente. Esto evidencia que para MA las opciones para que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización son más restringidas que en CA.

En PA, igual que en la mayoría de las editoriales colombianas, la visualización desempeña una FPI. En este caso, solo en el segundo ciclo se promueven un mayor porcentaje de T.Inf mientras que en el tercero no son consideradas y en el primero no se incluye ningún tipo de tarea.

El comportamiento de ES difiere del evidenciado en las editoriales colombianas. En solo uno de los tópicos (MA) las T.Inf se incluyen de forma mayoritaria en la mayoría de los ciclos mientras que en los otros (CA y PA) se considera así en solo un ciclo. En el primer caso la función visual es una FTI y en el segundo una FPI.

Análisis global. ES se comporta de manera similar a la mayoría de las editoriales colombianas. La visualización asume una FTI, igual que en CS y CSM, y las T.Inf son incluidas con porcentajes que descienden a medida que los ciclos educativos aumentan.

Para CA y para MA se promueve en la mayoría de las tareas obstáculos que entorpecen el desarrollo de la visualización (tabla 5.19). MA en primer lugar y CA en segundo son los tópicos donde esta característica se da con los mayores porcentajes. En cuanto a PA, las posibilidades de que la visualización ocupe el lugar que le corresponde en el estudio de las matemáticas son mayormente enfatizadas, siendo las dos terceras partes de las tareas quienes lo promueven.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Tópicos- ES- 400 tareas</i>							
Tarea	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	92	65.71	161	66.52	6	33.33	259
T.No.Inf	48	34.29	81	33.47	12	66.66	141
Total	140	100	242	99.99	18	99.99	400

Tabla 5.19. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial ES

Las T.Inf son incluidas con porcentajes que decrecen de un ciclo al siguiente pero es en los dos primeros donde respectivamente la totalidad o la gran mayoría de las tareas son de tal naturaleza; si bien en el tercer ciclo las T.Inf también son las más considerada, en este caso el porcentaje desciende alrededor del 60%.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Ciclos- ES- 400 tareas</i>							
Tarea	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	23	100	75	75	161	58.12	259
T.No.Inf	0	0	25	25	116	41.88	141
Total	23	100	100	100	277	100	400

Tabla 5.20. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial ES

El análisis local demuestra que la editorial ES para los tópicos CA y PA promueve una FPI y para CA las T.Inf son incluidas de forma descendente. En cuanto al análisis global, indica que esta editorial brinda iguales oportunidades que CS y CSM pero mayores que CV para que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización. Igual que sucede en las editoriales colombianas tal nivel de oportunidad no es el mejor pues MA, tópico que considera el mayor número de tareas en ES, promueve que la visualización considere una FTI y que las T.Inf sean incluidas de forma ascendente.

EDITORIAL EA

Análisis local. Para MA, no hay tareas en el primer ciclo mientras que en el segundo y tercero la mayoría es T.Inf pero es en el tercero donde este porcentaje es mayor (tabla 5.21). Para CA, al menos el 70% de las tareas en todos los ciclos son T.Inf y es en el primero y en el tercero, en ese orden, donde están los mayores porcentajes. Con respecto a PA, no hay tareas en el primer ciclo mientras que en los restantes los porcentajes de

T.Inf ascienden a medida que los ciclos educativos aumentan pero sin alcanzar el 60% de las tareas.

<i>Función visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. EA-423 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	26	100	89	70.07	43	87.75	158
	T.No.Inf..	0	0	38	29.93	6	12.24	44
	Total	26	100	127	100	49	99.99	202
MA	T.Inf.	0	0	4	57.14	116	75.32	120
	T.No.Inf..	0	0	3	42.86	38	24.67	41
	Total	0	0	7	100	154	99.99	161
PA	T.Inf.	0	0	1	14.29	29	54.72	30
	T.No.Inf..	0	0	6	85.71	24	45.28	30
	Total	0	0	7	100	53	100	60

Tabla 5.21. Funciones visuales. Análisis local de la editorial EA

Lo anterior indica que solo en un tópico (PA) la función visual es una FPI mientras que en los demás es una FTI y que independientemente del tópico las T.Inf son incluidas con porcentajes que no descienden a medida que los ciclos educativos aumentan. En conclusión, entre las seis editoriales analizadas EA es donde menos oportunidades hay para que el desarrollo de la visualización sea promovido.

Análisis global. En dos de los tópicos no se promueve que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización (tabla 5.22). Esto sucede para CA y MA donde más (o alrededor) de las tres cuartas partes de las tareas son T.Inf mientras que para PA solo la mitad generan tal condición.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Tópicos- EA- 423 tareas</i>							
Tarea	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	158	78.22	120	74.53	30	50	308
T.No.Inf	44	21.78	41	25.46	30	50	115
Total	202	100	161	99.99	60	100	423

Tabla 5.22. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial EA

A diferencia del resto de editoriales, en cada uno de los ciclos más del 60% de las tareas son T.Inf (tabla 5.23) siendo en el primer ciclo donde la totalidad de las tareas son de tal naturaleza mientras que en el segundo es donde está el menor porcentaje.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Ciclos- EA- 423 tareas</i>							
Tarea	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
T.Inf	26	100	94	66.66	188	73.44	308
T.No.Inf	0	0	47	33.33	68	26.56	115
Total	26	100	141	99.99	256	100	423

Tabla 5.23. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial EA

Si bien esta editorial considera la visualización como una FPI al igual que la mayoría de las editoriales, los porcentajes de T.Inf son considerados de un ciclo al siguiente de forma cíclica. Entonces, también desde el análisis global EA es una de las dos editoriales que menos oportunidades ofrece para que la visualización sea desarrollada.

EDITORIAL ESM

Análisis local. ESM junto a ES son las editoriales españolas que más oportunidades brindan para reflexionar sobre el papel que desempeña la visualización en las matemáticas. En la editorial aquí en cuestión la visualización asume una FTI en CA y MA mientras que considera una TNo.Inf en PA. En relación a cómo se incluyen las T.Inf de un ciclo al siguiente se hace de forma descendente para CA y PA y cíclica para MA (Tabla 5.24).

Un gran número de tareas de CA promueven obstáculos que entorpecen que el desarrollo de la visualización sea promovido. Particularmente en el primer y segundo ciclo los porcentajes de T.Inf son los más alto siendo más del 98% de las tareas las que generan tal condición. Esta tendencia se mantiene en el tercer ciclo pero con un porcentaje significativamente menor y en más de la mitad de las tareas. En cuanto a MA, las T.Inf se focalizan en el segundo y tercer ciclo con porcentajes del 100% y del 61.85% respectivamente.

<i>Función visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. ESM-457 tareas</i>								
Tópico	Tarea	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	T.Inf.	42	100	102	98.1	51	62.19	195
	T.No.Inf..	0	0	2	1.9	31	37.8	33
Total		42	100	104	100	82	99.99	228
MA	T.Inf.	0	0	1	100	107	61.85	108
	T.No.Inf..	0	0	0	0	66	38.15	66
Total		0	0	1	100	173	100	174
PA	T.Inf.	0	0	3	10.34	7	29.16	10
	T.No.Inf..	2	100	26	89.66	17	70.83	45
Total		2	100	29	100	24	99.99	55

Tabla 5.24. Funciones visuales. Análisis local de la editorial ESM

Con relación a todas las editoriales analizadas ESM evidencia a nivel local un rasgo totalmente distinto. En todos los ciclos la mayor parte de las tareas de PA son T.No.Inf. En consecuencia, esta editorial privilegia en un tópico específico y en cada uno de sus ciclos que la visualización sea desarrollada. Entonces es a través de PA donde se ofrecen opciones reales para que las figuras sean tratadas tal cual como las matemáticas lo requieren.

Análisis global. ESM, al igual que cuatro de las editoriales analizadas, se distingue porque la función visual es una FPI y las T.Inf son incluidas con porcentajes que descienden entre ciclos (tablas 5.25 y 5.26). Dos de los tópicos promueven que las figuras no contribuyan al desarrollo de la visualización siendo CA es donde más se enfatiza seguido de MA. Al contrario, en PA no se promueve esta condición pues menos del 20% de las tareas son T.Inf.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Tópicos- ESM- 457 tareas</i>							
Tarea	CA		MA		PA		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
Inf	195	85.52	108	62.07	10	18.18	313
No.Inf	33	14.47	66	37.93	45	81.81	144
Total	228	99.99	174	100	55	99.99	457

Tabla 5.25. Funciones visuales. Análisis global por tópicos de la editorial ESM

En el primer ciclo es donde está el mayor porcentaje de T.Inf. En el segundo al tercer ciclo las T.Inf también son el tipo de tarea mayoritariamente contemplado pero con porcentajes que de uno a otro ciclo decrecen hasta el 59.14% de las tareas.

<i>Función de la visualización. Análisis por editoriales. Global. Ciclos- ESM- 457 tareas</i>							
Tarea	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
Inf	42	95.45	106	79.1	165	59.14	313
No.Inf	2	4.55	28	20.09	114	40.86	144
Total	44	100	134	99.99	279	100	457

Tabla 5.26. Funciones visuales. Análisis global por ciclos de la editorial ESM

5.4.2 Síntesis y conclusión.

Los resultados anteriores muestran que ES y ESM ofrecen oportunidades similares para que el desarrollo de la visualización sea promovido. A nivel local, en ES son dos los tópicos donde la visualización asume una FPI y en uno las T.Inf son incluidas entre ciclos de forma descendente. En cuanto a ESM, uno de los tópicos considera una FTNoI y en dos las T.Inf se consideran con porcentajes que disminuyen entre ciclos. En ambos casos el comportamiento global también es igual.

CS introduce menos opciones para que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización en relación a ESM, pues, si bien en cada uno de los tópicos ambas editoriales consideran más T.Inf que T.No.Inf, en CS la función que desempeña la visualización es FPI. De esta forma, ES y ESM por parte de las editoriales españolas y CS por parte de las colombianas son las que más oportunidades generan para que la función que asume la visualización contribuya a su desarrollo.

Si bien la editorial colombiana CV dispone de dos tópicos donde las T.Inf son incluidas de forma descendente y uno donde la función visual es FPI, el hecho que a nivel global la visualización considere una FTI nos permite afirmar que esta editorial ofrece menos oportunidades que las tres anteriores para introducir una enseñanza de la visualización acorde a las exigencias propias de las matemáticas.

En relación a la última de las editoriales colombianas (CSM) propicia un equilibrio entre las T.Inf y las T.No.inf solo a través de PA; en él tanto la función que asume la visualización (FPI) como la forma en que se incluyen de un ciclo a otro las T.Inf (descendentemente) privilegian tal equilibrio. CSM es pues la editorial colombiana que menos oportunidades brindan a sus lectores para hacer de la visualización una actividad cognitiva de verdadera importancia.

Por último, EA, entre todas las editoriales es quien ofrece las oportunidades más limitadas para que el desarrollo de la visualización sea considerado, pues, si bien en uno de los tópicos la función visual es una FPI en ninguno las T.Inf son incluidas de forma descendente y a nivel global es la única donde las T.Inf son contempladas entre ciclos de forma no descendente.

Es claro que las editoriales analizadas ofrecen oportunidades distintas para que el desarrollo de la visualización sea incluido en el tratamiento del área.

Los párrafos previos igualmente muestran que es posible caracterizar las editoriales según las oportunidades que ofrecen para que la visualización sea un elemento de importancia en el estudio de las matemáticas. Así, dependiendo del tipo de función que desempeñe la visualización y de cómo las T.Inf son incluidas es posible categorizar las editoriales en tres grupos:

Con el objetivo de evidenciar y determinar cada uno de estos grupos con la mayor claridad posible esquematizamos y sintetizamos en la tabla 5.27 los elementos que a nivel local y global caracterizan cada una de las editoriales.

Análisis comparativo por editoriales. Síntesis: análisis local y global²²									
Grupo	Editorial	Análisis local						Análisis global	
		Función			Inclusión de T.Inf			Inclusión de T.Inf	
		CA	MA	PA	CA	MA	PA	Estatus	
1	ES	PI(2/3)	TI(2/2)	PI(1/2)	D	ND	ND	PI(2/3)	D
	ESM	TI(3/3)	TI(2/2)	TNI(0/3)	D	ND	D	PI(2/3)	D
	CS	TI(3/3)	TI(3/3)	PI(1/3)	D	ND	D	PI(2/3)	D
2	CV	TI(3/3)	PI(1/3)	TI(3/3)	D	D	ND	TI(3/3)	D

²² En Tabla 5.27 se caracterizan las editoriales según la función que desempeña la visualización y la forma como se promueven las T.Inf. En cada caso se representa en escritura fraccionaria la relación entre el número de ciclos donde cada tópico es considerado y dónde hay más T.Inf que T.No.Inf.

3	CSM	TI(3/3)	TI(3/3)	PI(1/2)	ND	ND	D	PI(2/3)	D
	EA	TI(3/3)	TI(2/2)	PI(1/2)	ND	ND	ND	PI(2/3)	ND

Tabla 5.27. Funciones visuales. Síntesis

Grupo 1. Están las editoriales que brindan mayores oportunidades para que la visualización sea un soporte para las matemáticas. Son tres las editoriales que forman parte de este grupo: ES, ESM y CS (dos españolas, una colombiana). En ellas como máximo en uno de los tópicos la visualización asume una FTI o las T.Inf son incluidas de un ciclo a otro de forma no descendente

ES es la única que dispone de un tópico (CA) donde la visualización considera una FPI y las T.Inf son incluidas de forma descendente y que también promueve el desarrollo de la visualización en un segundo tópico (PA), donde el porcentaje de T.No.Inf es el mayor en la mitad de los ciclos. En cuanto a ESM, es la única que en todos los ciclos de un mismo apartado (PA) considera porcentajes mayores de T.No.Inf y que promueve que el porcentaje de T.Inf disminuya de un ciclo al siguiente; además, ESM por medio de un uso descendente de T.Inf en CA permite reflexionar sobre el hecho que las figuras como soportes heurísticos promueven el desarrollo visual. Con relación a CS, lo considera en PA y CA siendo PA donde la visualización considera una FPI y en ambos casos las T.Inf son incluidas con porcentajes que descienden a medida que los ciclos educativos aumentan.

En las tres editoriales la función que asume la visualización a nivel global es FPI y las T.Inf se promueven descendentemente.

Grupo 2, La editorial colombiana CV conforma la segunda categoría. En este caso, el estudio de las tareas suscita un nivel intermedio de posibilidades para que los usuarios de los textos reflexionen sobre los tratamientos figurales. En esta editorial, si bien en dos de los tópicos (CA y MA) los porcentajes de T.Inf decrecen de un ciclo al siguiente y en uno de ellos (MA) la función visual es FPI y globalmente la visualización es una FTI. Es decir, a diferencia de las editoriales del primer grupo, en esta a nivel global hay menos oportunidades para que el desarrollo de la visualización sea contemplado.

Grupo 3, En este grupo se encuentran las editoriales que brindan limitadas posibilidades para promover el desarrollo de la visualización y el estudio de las figuras geométricas. Es el caso de CSM y EA (una editorial colombiana, la otra española). En la primera editorial, PA es el único lugar donde es posible resaltar o reforzar la visualización como un soporte para las matemáticas: la función visual es FPI y las T.Inf son incluidas entre ciclos de forma descendente. En cuanto a EA, es la que menos oportunidades brinda para que se explore la el papel de la visualización en el estudio de las matemáticas. En este caso, en PA la visualización tiene en cuenta una FPI y, a nivel global, las T.Inf son incluidas con porcentajes que no descienden entre ciclos.

En resumen, al tratar el área la mayor parte de las editoriales colombianas brindan menor cantidad de tareas que las españolas donde la enseñanza de la visualización puede ser promovida. Solo una de las colombianas pertenece al primer grupo; el resto, forma parte del segundo y tercer grupo. En las editoriales españolas, la situación es distinta; solo una de las editoriales, al igual que el caso colombiano, tiende a promover, en mayor medida, obstáculos que entorpecen el desarrollo visual y el estudio de las figuras geométricas.

Es importante recalcar que aún en las editoriales del primer grupo las posibilidades mencionadas no tienden a ser generadas en un alto nivel, pues, en la mayoría el tópico donde la función visual es FPI o FTNoI es al que corresponde un menor número de tareas, es decir PA. Para el caso de ES y CV en CA y MA en una editorial y en otra no representan los tópicos donde hay un mayor número de tareas con una función de este tipo. En consecuencia, las posibilidades de hacer de la visualización una actividad cognitiva de vital importancia a través del estudio del área en los manuales escolares son reducidas.

5.5. Análisis comparativo por países: función informativa y no informativa.

Las frecuencias y porcentajes de las tareas de área propuestas en los textos colombianos y españoles independientemente del tópico y del ciclo considerado son presentadas en la tabla 5.28.

<i>Análisis comparativo por países. Función de la visualización - 2561 tareas</i>				
Tarea	Colombia		España	
	Frec	%	Frec	%
T.Inf.	975	76.11	880	68.75
T.No.Inf.	306	23.89	400	31.25
Total	1281	99.99	1280	100

Tabla 5.28. Función visual en los libros colombianos y españoles

Cerca de las tres cuartas partes de las tareas de las editoriales de un país y otro promueven que la visualización no sea desarrollada. Si bien la diferencia entre la proporción de T.Inf en los libros colombianos y sus contrapartes españoles no es muy significativa, es en los primeros donde se enfatiza esta característica en mayor medida. Estos resultados muestran que las editoriales colombianas, en relación a las españolas, promueven en mayor medida formas de proceder ajenas al registro de las figuras geométricas siendo poco coherentes y pertinentes.

5.5.1 Caracterización de tareas por países.

De manera detallada y considerando los tópicos de área y los ciclos de educación asumidos en la investigación se compararán las tareas de los libros colombianos y

españolas. Igual que se ha hecho a lo largo de este capítulo consideraremos de forma paralela dos niveles de análisis: local y global.

Análisis local. Para CA, las editoriales colombianas y españolas consideran la visualización desde una FTI (tabla 5.29).

<i>Función visual. Análisis comparativo por países. Local. CA: 1.499 tareas</i>												
Tarea	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%
T.Inf.	271	89.44	91	100	299	84.94	238	82.93	157	69.47	116	60.42
T.No.Inf.	32	10.56	0	0	53	15.06	49	17.07	69	30.53	76	39.58
Total	303	99.99	91	100	352	100	287	100	226	100	192	100

Tabla 5.29. Tareas CA (Colombia vs España). Análisis local

En ambos países se promueven las T.inf en los tres ciclos y en la mayoría (C2 y C3) los libros colombianos consideran mayores porcentajes de T.Inf que los españoles. Por el contrario, en el primer ciclo las T.Inf de los manuales españoles alcanzan el 100%, mientras que en los colombianos el porcentaje es del 89.44%. Estos resultados también evidencian que si bien las T.Inf en ambas editoriales son incluidas descendientemente entre ciclos su porcentaje en cada una de ellas jamás es inferior al 59%.

En MA, igual que para el tópico anterior las editoriales de los dos países consideran la visualización desde una FTI (tabla 5.30).

<i>Función visual. Análisis comparativo por países. Análisis local. MA: 908 tareas</i>												
Tarea	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%
T.Inf.	56	83.6	0	0	97	84.2	27	62.8	63	70	362	67.79
T.No.Inf.	11	16.4	0	0	82	15.8	16	37.2	27	30	172	32.21
Total	67	100	0	0	179	100	43	100	90	100	534	100

Tabla 5.30. Tareas MA (Colombia vs España). Análisis local

Para MA los libros colombianos promueven mayores porcentajes de T.inf en todos los ciclos que sus contrapartes españoles. En el primer caso, estos porcentajes varían entre el 84.2% y el 70%, siendo el segundo ciclo y el primero donde se proponen con mayor frecuencia (tabla 5.30). Por el contrario, en los libros españoles los porcentajes disminuyen al 62.8% y el 67.79% en el segundo y tercer ciclo respectivamente. En resumen, los libros colombianos en los tres ciclos consideran en mayor proporción tareas donde la visualización no contribuye al estudio de las matemáticas, mientras que en las españolas esta situación es exclusiva de los ciclos 2 y 3.

Los resultados anteriores también evidencian que en las editoriales de cada país las T.Inf son promovidas de forma distinta. Mientras que en los españoles se consideran con porcentajes que ascienden entre ciclos, en los colombianos se asumen cíclicamente.

En los libros de ambos países y en todos los ciclos (salvo en el primero para las editoriales españolas) el número de T.Inf representan más de la mitad de las tareas consideradas.

En PA, a diferencia de los tópicos anteriores, consideran la visualización desde una FPI (tabla 5.31).

<i>Funciones visuales. Análisis comparativo por países. Local. PA: 197</i>												
Tarea	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	Fre	%	Fre	%	Fre	%	Fre	%	Fre	%	Fre	%
T.Inf	18	72	0	0	11	45.83%	10	28.57%	3	20%	36	41.86%
T.No.Inf	7	28	2	100	13	54.17%	35	71.43%	12	80%	50	58.14%
Total	25	100	2	100	24	100	45	100	15	100	86	100

Tabla 5.31. Tareas PA (Colombia vs España). Análisis local

De forma similar que en CA, en PA al menos uno de los ciclos de los libros españoles consideran mayores porcentajes de T.Inf que los colombianos, pero, en dicho caso, son menores del 50%. En los libros españoles el 41.86% de las tareas PA propuestas en el tercer ciclo son T.Inf, mientras que en los colombianos solo la quinta parte cumple con dicha característica. En los ciclos 1 y 2 la situación es diferente puesto que en los libros colombianos estos porcentajes son mayores que en los españoles. En el primer ciclo superan el 50%, mientras que en el segundo alcanzan el 45.83%. En los libros españoles menos de la tercera parte de las tareas son T.Inf y en el primer ciclo no son contempladas.

Para PA, las T.Inf son incluidas de forma distinta de un país a otro. Mientras que los colombianos lo hacen con porcentajes que descienden de un ciclo al siguiente en los españoles se consideran de forma ascendente.

Análisis global. A nivel de los tópicos los libros colombianos y españoles se comportan de forma similar (tabla 5.32). En las editoriales de uno y otro país CA es el tópico donde hay mayor frecuencia de T.Inf. Alrededor de las dos terceras partes de las tareas tienen dicha característica y es en los libros colombianos donde su frecuencia es mayor. MA, por su parte, es el segundo de los tópicos donde la frecuencia de T.Inf es mayor tanto en los textos colombianas como en los españoles. En MA, a diferencia de CA, la frecuencia es ligeramente mayor en los españoles que en los colombianos.

<i>Función visual. Análisis comparativo por países. Global. Tópicos. 2561 tareas</i>												
Tarea	CA				MA				PA			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	Fec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%
T.Inf	727	82.52	445	78.07	216	64.28%	389	67.42	32	50	46	34.59
T.No.Inf	154	17.48	125	21.92	120	35.72%	188	32.58	32	50	87	65.41
Total	881	100	570	99.99	336	100	577	100	64	100	133	100

Tabla 5.32. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por tópicos

PA es donde las T.Inf aparecen en menores porcentajes. Así, para el caso de los libros colombianos la mitad de las tareas para PA promueven obstáculos que entorpecen el desarrollo de la visualización y el estudio de las figuras geométricas, mientras que menos de la mitad en los españoles generan dicha característica. De igual manera, PA es el único tópico donde los libros de ambos países o privilegian las T.No.Inf o las consideran en igual proporción que las T.Inf

Al considerar los ciclos de educación se evidencia que en los libros de los dos países las T.Inf son incluidas de forma descendente (tabla 5.33), y que en ninguno el porcentaje es menor del 50%; solo en el primero es mayor en los libros españoles que en los colombianos. En el tercer ciclo la situación se invierte, el 67.31 de las tareas en los colombianos y el 63.3% en los españoles son T.Inf. En el segundo ciclo la frecuencia de T.Inf es igual en ambos casos.

<i>Función visual. Análisis comparativo por países. Global. Ciclos. 2561 tareas</i>												
Tarea	C1				C2				C3			
	COL		ESP		COL		ESP		COL		ESP	
	Fre	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Frec	%
T.Inf.	345	87.34	91	97.84	407	73.33	275	73.33	223	67.31	514	63.3
T.No.Inf.	50	12.66	2	2.16	148	26.67	100	26.67	108	32.69	298	36.7
Total	395	100	93	100	555	100	375	100	331	100	812	100

Tabla 5.33. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por ciclos

Los resultados anteriores evidencian que en ambos países la visualización es asumida desde una FTI.

5.5.2 Síntesis y conclusión.

A nivel general se evidencia que los libros de los dos países promueven pocas oportunidades para que la visualización guíe la resolución de las tareas correspondientes al concepto de área de figuras planas. Porcentajes cercanos al 30% de T.No.Inf en un país y otro justifican tal afirmación. Aunque la diferencia entre las frecuencias de T.Inf en los dos países no es muy grande, son los colombianos quienes consideran en mayor medida este tipo de tareas; alrededor de las tres cuartas partes de las tareas de los libros colombianos son T.Inf, mientras que en los españoles el 68.75% son de este tipo. Así, pues, a nivel global, los libros españoles promueven mejores oportunidades para que en el tratamiento del área las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización. Pues, si bien en las editoriales de ambos países la visualización asume una FTI, es en los españoles donde las T.Inf son promovidas con porcentajes que descienden entre ciclos.

En la tabla 5.34 se presentan las funciones que asumen la visualización y la forma como se consideran las T.Inf en los libros de cada país.

<i>Función visual y promoción de T.Inf. Análisis comparativo por países. Local y global. Síntesis</i>								
Editorial	Análisis local						Análisis global	
	Función			Inclusión			Función	Inclusión
	CA	MA	PA	CA	MA	PA		
Colombia	FTI	FTI	FPI(2/3)	D	ND	D	FTI	D
España	FTI	FTI	T.No.I	D	ND	D	FPI	D

Tabla 5.34. Análisis comparativo por país. Análisis local y global. Síntesis

Un análisis global comparativo pone también en evidencia que en los libros de ambos países, CA seguido de MA son los tópicos donde están los mayores porcentajes de T.inf. En PA, por el contrario, están los más pequeños. Los libros colombianos y españoles brindan por tanto en CA y MA menos oportunidades que en PA para que la visualización sea desarrollada. Por otra parte, en CA y PA los libros colombianos promueven más que los españoles dicha característica. En MA, por el contrario, son los españoles los que mayoritariamente imponen esta cualidad. En cuanto al uso de T.Inf es decreciente en los libros de los dos países, y cada uno de los ciclos no es menor al 50%. El primer ciclo es donde los libros españoles generan menores posibilidades que los colombianos para reflexionar sobre el aspecto anteriormente citado. En el tercero la situación se invierte y en el segundo no existe diferencia entre las posibilidades que brinda los libros de un país y otro.

Los resultados anteriores implican que PA es donde los textos colombianos y españoles promueven que la visualización pueda ser desarrollada, siendo los españoles los que animan en mayor medida esta situación. En los colombianos alrededor del 50% de las tareas son T.No.inf, mientras que los españoles el 65.22% cumplen dicha característica.

Que los libros de ambos países promuevan de un ciclo al siguiente con porcentajes menores de T.Inf podría asumirse como una manera en que estos materiales didácticos invitan a reflexionar sobre el papel de las figuras en la adquisición de los conceptos matemáticos.

El análisis local también resalta que en CA y MA las editoriales de los dos países promueven pocas oportunidades para que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización. En todos los ciclos en que se desarrollan estos tópicos, el mayor porcentaje de tareas son T.Inf. En los textos colombianos la mayor parte de los ciclos en que se promueve el estudio de CA y MA la frecuencia de T.Inf es mayor que en los españoles. Esto sucede en todos los ciclos en que se propone el estudio de MA; en CA solo en el primer ciclo la situación es diferente. En cuanto a PA, por lo menos uno de los ciclos en una y otra editorial induce mayores frecuencias de tareas donde la función que desempeña la visualización promueve el desarrollo visual. Igual que sucede en MA, la frecuencia de T.Inf en PA es mayor en todos los ciclos en los libros colombianos que en los españoles. De esta forma, PA, en ambos países, es el tópico que posibilita opciones reales de que las figuras contribuyan al desarrollo de la visualización: en el tercer ciclo en los textos

colombianos y en el primero en los españoles es donde esta oportunidad se enfatizan con mayor fuerza.

Desde un punto de vista diferente el análisis local también indica, por un lado, que el uso de T.Inf en los libros colombianos y españoles varía de un tópico a otro. En CA los libros colombianos y españoles incluyen de igual forma las T.Inf (con porcentajes que descienden de un ciclo al siguiente); en MA y PA, es diferente de un país a otro. En los libros colombianos se hace, respectivamente, de forma cíclica y descendente, y en los españoles ascendentemente. Por otro lado, si considerar que la inclusión descendente de T.Inf es una de las formas en que los libros suscitan un equilibrio entre la aplicación de un tipo de tareas y otro; entonces, los resultados previos muestran que los libros españoles suscitan en menor medida que los colombianos tal equilibrio: mientras que los primeros lo hacen en un único tópico (CA), los segundos lo consideran en los tópicos CA y PA.

Todo lo anterior muestra dos formas en que los libros promueven un equilibrio entre los porcentajes de tareas donde las figuras contribuyen al desarrollo de la visualización y aquellos donde este hecho es ignorado (inclusión descendente de T.Inf a medida que los ciclos aumentan y que en al menos uno de los tópicos la mayor proporción de las tareas sean T.No.inf). En este sentido, a nivel local los libros colombianos propician en mayor medida que los españoles el primero de los aspectos, mientras que en los colombianos lo hacen en CA y PA, los españoles recurren a él en CA. El segundo aspecto, está más presente en los libros españoles que en los colombianos puesto que en los españoles se realiza a través de los tres ciclos donde se estudia las relaciones perímetro-área y en los colombianos sólo en dos de los ciclos donde se trata el tópico PA.

Teniendo en cuenta que el número de tareas que propician el estudio de las relaciones área-perímetro es menor que el correspondiente al estudio de CA, podemos afirmar que es a través de CA donde los libros colombianos ofrecen mayores recursos para que el desarrollo de la visualización y el estudio de las figuras geométricas sean considerados.

Los resultados anteriores también llaman la atención que las oportunidades que ofrecen los libros colombianos y españoles para que se reflexione sobre el papel que desempeña la visualización en matemáticas es bastante limitado. Una mayor frecuencia de T.Inf que sus contrapartes T.No.Inf tanto en el análisis local como en el global evidencia tal afirmación.

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

CAPÍTULO 6: ESTRUCTURAS DE CONTROL VISUAL

Introducción.

Los textos escolares son un importante referente para comprender muchos fenómenos asociados al estudio de las matemáticas en particular las cuestiones relacionadas con el rol de la visualización en el tratamiento del área. Teniendo en cuenta que en muchas de las tareas sobre áreas una misma figura puede desencadenar diferentes formas de ver, algunas pertinentes a la tarea planteada, mientras que otras no (Marmolejo y Vega, 2012), es necesario, diferenciar las formas de visualización que los libros tienden a privilegiar en las tareas propuestas. Por tanto, determinar cómo y de qué forma los libros generan control sobre los tipos de visualización en el estudio del área es la base para discriminar las formas de visualización privilegiadas por los textos al construir este concepto matemático. Para dar respuesta a la cuestión anterior se caracterizan en el presente capítulo las estructuras y tipos de control visual utilizados en los libros para promover el recurso de la visualización en el tratamiento del área. Así, pues las cuestiones que se pretende responder son las siguientes:

5. ¿Qué estructuras de control aparecen en las tareas de los libros al tratar el concepto de área y de qué forma?
6. ¿Según los tópicos de área y los ciclos educativos cuáles son las estructuras de control visual privilegiadas por cada una de las editoriales consideradas en la investigación, y en qué forma?
7. ¿Qué similitudes y diferencias hay en la manera en que los libros colombianos y españoles recurren a las estructuras de control visual al tratar el concepto de área?

Para abordar las cuestiones anteriores los datos serán considerados, igual que en los dos capítulos previos, realizando tres niveles de análisis: **análisis general unificado, análisis comparativo por editoriales y análisis comparativo por países**; los tópicos de área y los ciclos educativos serán contemplados como elementos de contraste, y según la forma como se consideren se hablará de **análisis local** y de **análisis global**.

En el análisis local se describe cómo las estructuras de control visual considerados en la investigación son tenidos en cada uno de los ciclos en que se promueven cada uno de los

tópicos de área. De forma similar a los capítulos anteriores son dos los aspectos a considerar:

- Según el mayor o menor porcentaje de tareas que en cada ciclo promueven las estructuras de control visual. En este sentido, son tres los aspectos a considerar: **estructura de control mayoritaria (ECM)** si en la mayoría de los ciclos de un tópico el mayor porcentaje de tareas induce una misma estructura de control visual; **estructura de control intermedia (ECI)** cuando la estructura representa el porcentaje más alto en solo uno de los ciclos educativos; y **estructura de control minoritaria (ECm)** si no están en mayor proporción en ninguno de los ciclos o no son contemplados.
- En el segundo aspecto se considera cómo de un ciclo a otro los libros promueven las estructuras de control visual detectadas en la investigación. Decimos que las estructuras de control visual son promovidas **ascendentemente** cuando el porcentaje de tareas que los induce son en C1 menores que en C2 y en C2 menores que en C3, 2); **descendentemente** cuando el porcentaje de tareas disminuye del primero de los ciclos al último; y **cíclicamente** si los porcentajes en C2 mayores o menores que en C1 y C3.

En el análisis global se consideran de dos formas distintas y disjuntas entre sí: 1) los tópicos de área independiente del ciclo de enseñanza y 2) los ciclos educativos sin tener en cuenta la naturaleza del tópico en cuestión. De forma similar al análisis local, en el global haremos referencia a que las estructuras de control son promovidas de forma mayoritaria, intermedia y minoritaria; así como cíclica y ascendente y descendentemente. En el primero de los casos será **mayoritario (ECM)** cuando al menos en uno de los apartados y en uno de los ciclos la estructura en cuestión está presente en el mayor porcentaje de tareas, cuando solo sucede en uno de los casos diremos que es **intermedia (ECI)**, y cuando no son las más contempladas en ninguno de los ciclos ni de los tópicos entonces será **minoritaria (ECm)**.

Tanto en el análisis local como en el global hablaremos de **estructura de control** predominante para identificar la estructura de control visual más considerado en un ciclo (análisis local y global) y en un tópico (análisis global). Por el contrario, aludiremos a la **estructura de control** menor a la complejidad menos promovida en un ciclo o en un tópico según sea el caso.

Así mismo diremos que unos libros al promover una estructura de control lo hacen en **condiciones más propicias** (o lo consideran o lo **promueven en mejores condiciones**) que otros, si:

- A nivel local, en la mayor parte de los ciclos del primer grupo de libros la estructura en cuestión es una ECM mientras que en los segundos es una ECI o una

ECm; así mismo, si en los primeros es una ECI mientras que en los segundos es una ECM.

- En cuanto al análisis global, de forma similar al local, si en el primer grupo de libros la estructura es una ECM mientras que en el otro grupo es una ECI o una ECM; asimismo, si en el primero es una ECI y en el segundo una ECM.
- Si la forma como se promueve la estructura en cuestión ni es ECM ni ECI en los dos grupos de libros, entonces, el número de ciclos donde uno u otro es ECM será el criterio a contemplar; cuantos más ciclos tengan esta característica menos condiciones se ofrece para que dicha estructura sea contemplada.
- Si en ambos grupos de libros la complejidad es de la igual naturaleza entonces el número de ciclos (análisis local) y de ciclos y tópicos (análisis global) donde es imperante o ínfimo será el criterio a considerar; si es predominante en un mayor número de ciclos o si es la menor en un menor número de ciclos entonces hay condiciones más propicias para que la estructura sea promovido.

En la tabla 6.1 se esquematiza el proceso seguido para caracterizar las tareas de los libros en función de las estructuras de control visual discriminadas en el estudio

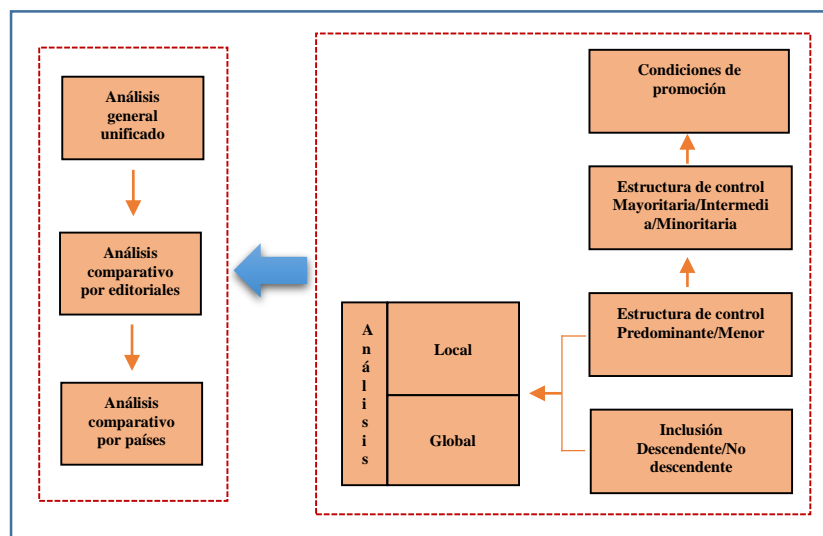


Tabla 6.1. Representación esquemática del análisis de los datos

6.1 Análisis general unificado: estructuras de control visual.

En este apartado abordamos la cuestión ¿Qué estructuras de control son utilizadas en las tareas de los libros al tratar el concepto de área y de qué formase promueven? Según como se organizan los elementos de control fueron 12 las estructuras de control (Anexo 3.5) identificadas en la investigación. Para responder a la pregunta anterior se han agrupado las estructuras de control en tres categorías: visibilidad (ECV), iconismo (ECIco) y discursiva (ECD) que fueron definidas en el apartado 3.4.7. ECV si el tipo de visualización considerado es en mayor o menor grado acorde con el nivel de visibilidad

introducido (p. 152). En cuanto a la ECD, establece el tipo de visualización a contemplar mediante referencias hechas en lengua natural (pp. 153-154). ECICO si promueve ambivalencias y dificultades en el desarrollo de la visualización y en el estudio de las figuras geométricas (pp. 152-154). Solo las dos primeras estructuras de control visual son quienes contribuyen a que la visualización sea efectivamente desarrollada.

Inicialmente se caracterizarán las tareas de los libros en función de las estructuras de control visual, de los tópicos de área y de los ciclos educativos y, posteriormente, se presentará una síntesis de los datos extraídos de este nivel de análisis y se plantearán algunas conclusiones.

6.1.1 Caracterización unificada de las tareas de los libros de texto.

La tabla 6.2 indica que la ECV es la más considerada y la ECICO la menos contemplada y que existe un marcado desequilibrio entre el alto número de tareas que incluyen la primera estructura y el reducido número que lo hace para la segunda. Más de la mitad de las tareas contemplan a la ECV y menos del 9% a la ECICO. En cuanto a la ECD, la más promovida después de la ECV, aparece en alrededor de la tercera parte de las tareas.

<i>Análisis general unificado. Local.</i>		
<i>Estructuras de control visual. 2561 tareas</i>		
Visualización	Frec	%
ECV	1461	57.05
ECICO	222	8.67
ECD	878	34.28
Total	2561	100

Tabla 6.2. Estructuras de control promovidos en los libros de texto

Estos resultados indican que la visibilidad, primero, y el contenido o el procedimiento mediante el uso exclusivo de la lengua natural, segundo, son los elementos de control más incluidos en los libros. Más del 90% de las tareas consideran uno u otro elemento de control. En el primer caso, determinando el grado de potencia heurística de las figura o resaltando las unidades claves de dimensión 1 o 0. En el segundo, enfatizando que la deconstrucción dimensional de formas se hace en articulación con una actividad discursiva o evidenciando las operaciones en cuestión y el flujo visual en que se articulan. El iconismo, al contrario, es mínimamente considerado lo que conlleva a que los limitantes visuales y figurales asociados a él no sean significativamente promocionadas. Lo anterior demuestra que desde la perspectiva de las estructuras de control los libros contribuyen significativamente al desarrollo de la visualización.

Análisis local. A la vista de los resultados presentados en la tabla 6.3 el desequilibrio entre el alto número de tareas que consideran una ECV y las pocas que contemplan la ECICO persiste en todos los ciclos de todos los tópicos; y la ECV siempre es la más incluida seguida de la ECD, segunda, y de la ECICO, tercera. El análisis local también

demuestra que los libros brindan opciones reales para que el desarrollo de la visualización sea promovido donde el aspecto más considerado es el relativo a que la visibilidad es quien determina el grado de potencia heurística de las figuras y promueve el cambio dimensional.

<i>Análisis general unificado. Local. Estructuras de control visual. Tópicos y ciclos. 2561 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	168	42.64	368	57.59	198	47.37	734
	ECIco	109	27.66	38	5.95	33	7.89	180
	ECD	117	29.69	233	36.46	187	44.74	537
Total		394	99.99	639	100	418	100	1451
MA	ECV	39	58.21	145	65.31	440	70.51	624
	ECIco	2	2.98	6	2.7	23	3.68	31
	ECD	26	38.8	71	31.98	161	25.8	258
Total		67	99.99	222	99.99	624	99.99	913
PA	ECV	10	37.04	33	47.83	60	59.4	103
	ECIco	7	25.92	0	0	4	3.96	11
	ECD	10	37.04	36	52.17	37	36.63	83
Total		27	100	69	100	101	99.99	197

Tabla 6.3. Estructuras de control. Libros de texto. Análisis local

En el estudio de la CA, la ECV es una ECM predominante en todos los ciclos incluida de un ciclo al siguiente de forma cíclica y solo en un ciclo es promovida por más de la mitad de las tareas. La ECD es una ECM que aparece con porcentajes de tareas que ascienden de un ciclo al siguiente y que varían entre el 29.69% y el 44.74%. La ECIco también es una ECM pero inducida cíclicamente con porcentajes que en la mayor parte de los ciclos no supera el 8% y que en todos representan el menor. En cuanto a los ciclos donde se inducen los porcentajes de tareas mayores que consideran cada estructura de control, la ECV lo es en el segundo ciclo, la ECD en el tercero y la ECIco en el primero. Por otro lado, los ciclos donde están los porcentajes más pequeños son el primero para la ECV y la ECD y el segundo para la ECIco.

En el estudio de la MA, en todos los ciclos la ECV es considerada en más de la mitad de las tareas mientras que la ECIco lo es en menos del 4% de ellas; y la ECD es promovida en proporciones de tareas que exceden la cuarta parte pero que nunca superan la mitad. Además, la ECV se caracteriza por ser la ECM incluida entre ciclos con porcentajes de tareas que ascienden entre ciclos estando el mayor en el tercer ciclo y el menor en el primero, mientras que en la ECD el comportamiento es inverso: en el primer ciclo es donde el porcentaje es mayor y en el tercero donde es menor. En cuanto a la ECIco, el tercer ciclo y el segundo es donde tiene mayor y menor porcentaje respectivamente pero con valores que en ninguno de los casos supera el 4% de las tareas.

En este tópico, pues, las tres estructuras de control son incluidas de un ciclo al siguiente de forma distinta, mientras que la ECV lo es con porcentajes que ascienden, en la ECD descenden y en la ECIco se consideran cíclicamente; e igual que en la CA la primera de

las estructuras es una ECM predominante en los tres ciclos y las ECico y ECD son unas ECM donde la primera siempre es incluida con los menores porcentajes.

En PA, la ECV y la ECD se consideran de forma distinta a como se hace en los tópicos anteriores. La ECV es una ECM donde los porcentajes de tareas que la incluyen son los mayores en dos de los ciclos y es promovida de un ciclo a otro de forma ascendente con porcentajes entre el 37.04% y el 59.4%. La ECD también es una ECM predominante en dos de los ciclos incluida de forma cíclica y que se considera en más de la tercera parte de las tareas en dos de los ciclos y más de la mitad en el restante. Por su parte la ECico es una ECM incluida con el porcentaje menor en todos los ciclos e incluida de forma cíclica de un ciclo al siguiente y que se tiene en cuenta en menos del 4% de las tareas en la mayoría de los ciclos. En cuanto a dónde se contemplan los porcentajes mayores y menores de tareas que promueven cada estructura de control, en la ECV lo son respectivamente el tercero y el primero, mientras que para la ECico lo es en el primero y el segundo y la ECD en el segundo y el tercero.

Los resultados anteriores demuestran que ambivalencias y dificultades relativas al uso de del iconismo como elemento de control solo son enfatizadas en uno de los ciclos de la CA y de PA donde más de la cuarta parte de las tareas incluyen una ECico. En cuanto a que la visibilidad sea quien guíe los tipos de visualización siempre se considera de forma mayoritaria en el estudio de la CA y la MA, mientras que en solo en un ciclo de PA es la lengua natural a través de la definición del contenido y del despliegue de procedimientos quien actúa de tal forma.

Análisis global. También en este nivel de análisis la ECV siempre es incluida con el mayor porcentaje de tareas mientras que la ECD ocupa el segundo lugar y la ECico es la menos contemplada (tablas 6.4 y 6.5).

En lo relativo a los tópicos (tabla 6.4) igualmente existe un claro desequilibrio entre los porcentajes de tareas que inducen la ECico y los que consideran al resto de estructuras. Mientras que la ECV está presente en más de la mitad de las tareas en todos los tópicos siendo MA donde más se contempla y CA donde menos se hace, la ECD es incluida con porcentajes que varían entre el 28.26% y el 42.13% respectivamente para MA y PA; la ECico lo es en menos del 6% de las tareas en la mayoría de los tópicos (MA y PA), y solo en más del 10% en el restante (CA).

Lo anterior evidencia que solo en el estudio de la CA los libros podrían promover ambivalencias y dificultades relativas con la inclusión del iconismo como elemento de control obstaculizando de esta manera el desarrollo de la visualización; pero, que solo el 12,4% de tareas lo consideren conlleva a que no se promueva de forma significativa.

<i>Análisis general unificado. Estructuras de control visual. Global. Tópicos. 2.561 tareas</i>							
Estructuras	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	734	50.58	624	68.35	103	52.28	1461
ECIco	180	12.4	31	3.39	11	5.58	222
ECD	537	37.01	258	28.26	83	42.13	878
Total	1451	99.99	913	100	197	99.99	2561

Tabla 6.4. Estructuras de control. Libros de texto. Análisis global por tópicos

En cuanto a los ciclos (tabla 6.5), en la mayoría la ECV es contemplada en más de la mitad de las tareas, la ECIco en menos del 6%, y en todos los ciclos la ECD es incluida en alrededor de la tercera parte de las tareas. Es en el tercer ciclo donde la ECV aparece con el mayor porcentaje de tareas y en el primero donde está el menor. En cuanto a la ECIco lo es, respectivamente, en el primer y segundo ciclo y la ECD en el segundo y primero. Solo en el primer ciclo se promueve de forma considerable que el iconismo como elemento de control sea enfatizado, en consecuencia, que surjan las dificultades que introduce su inclusión para el desarrollo de la visualización y de las figuras.

<i>Análisis general unificado. Estructuras de control visual. Global. Ciclos. 2.561 tareas</i>							
Estructuras	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	217	44.47	546	58.71	698	61.07	1461
ECIco	118	24.18	44	4.73	60	5.25	222
ECD	153	31.35	340	36.56	385	33.68	878
Total	488	100	930	100	1143	100	2561

Tabla 6.5. Estructuras de control. Libros de texto. Análisis global por ciclos

El análisis global demuestra que en todos los ciclos y tópicos persiste un marcado desequilibrio entre el alto número de tareas que incluyen la ECV y el bajo donde lo es la ECIco. Donde la ECV es la ECM (siempre incluida con el mayor porcentaje de tareas) mientras que la ECIco (siempre con el menor porcentaje) y la ECD son las ECM. Los libros, pues, contribuyen a que la visualización sea objeto de reflexión siendo el aspecto más promocionado el relativo a que la visibilidad. Este nivel de análisis también demuestra que de un ciclo al siguiente la ECIco y la ECD se incluyen de forma similar (cíclicamente) mientras que la ECV lo es de forma distinta (ascendentemente).

6.1.2 Síntesis y conclusión.

A manera de síntesis y con el propósito de plantear algunas conclusiones que se desprenden del análisis general unificado reorganizaremos la información en tres frentes (uno por cada estructura de control).

Estructura de control por visibilidad. El análisis global indica que en todos los tópicos y en la mayoría de los ciclos (salvo el primero) se considera en más de la mitad de las tareas y el análisis local que lo es de esta forma en un ciclo de CA y PA y en todos de MA.

El análisis local también demuestra que en la CA y la MA se incluye de igual manera siendo una ECM; es la estructura de control con mayor porcentaje en todos los ciclos y descienden a medida que los ciclos educativos aumentan. En PA, también es una ECM inducida no descendentemente pero en uno de los ciclos es la segunda más contemplada y en otro comparte el primer lugar con la ECD. Hay, pues, mejores condiciones para la promoción de la ECV en el estudio de la CA y de la MA que en el de PA.

En la CA y la MA es la estructura de control que en los libros se promueve con las condiciones más propicias mientras que en PA comparte tal característica con la ECD.

Pero, el análisis global resalta que entre todas las estructuras de control consideradas en el estudio la ECV es quien se tiene en cuenta en las condiciones más propicias y se considera de igual forma en todos los tópicos y ciclos, siendo incluida con el mayor porcentaje de tareas en cada uno de ellos y descendiendo de un ciclo a otro.

Estructura de control por iconismo. En análisis global indica que solo en uno de los ciclos (C1) y de los tópicos (CA) las tareas que la promueven superan el 10% pero nunca con más de la mitad de las tareas. Y, el análisis local evidencia que en dos ciclos de la CA, en todos los de la MA y en uno de PA menos del 10% de las tareas se consideran mientras que en uno de PA no es contemplada; en ninguno es incluida con más de la mitad de las tareas y solo en uno de la CA y de PA se promociona con más de la cuarta parte de las tareas.

Es incluida de igual forma en todos los tópicos tanto en el análisis global como en el local. En el análisis local es considerada con el menor porcentaje de tareas en todos los ciclos y en todos los ciclos y tópicos en el análisis global. Además, es una ECM que se promueve de un ciclo al siguiente con porcentajes que no decrecen, siendo la estructura de control que en relación a las demás se induce con las condiciones menos propicias.

Estructura de control discursiva. El análisis global evidencia que en ningún tópico y ciclo está presente en más de la mitad de las tareas ni con menos del 10% de ellas, mientras que el análisis local demuestra que solo en uno de los ciclos de PA se considera en más de la mitad de las tareas y que en ningún ciclo de ninguno de los tópicos se incluye en menos del 10% de ellas.

En PA se promueve de forma más propicia que en la CA y la MA. Para PA, en dos de los ciclos es incluida con el mayor porcentaje de tareas mientras que para la CA y la MA no lo es en ninguno. Así, pues, la ECD es una ECM en la CA y la MA así como una ECM en PA. En cuanto a cómo se promueve, se hace de igual forma en la CA y en PA (con porcentajes de tareas que no decaen de un ciclo al siguiente) mientras que en la MA se considera descendentemente. Y a nivel global, es una ECM que entre ciclos se contempla no descendentemente y no es la estructura de control predominante ni la menor en ninguno de los ciclos ni de los tópicos.

Finalmente, en lo relativo a los tópicos donde están los mayores y menores porcentajes de tareas que incluyen cada estructura de control, el mayor para la ECV así como el menor para la ECico y la ECD es la MA; el mayor para la ECico y el menor para la ECV es la CA; y el mayor para la ECD es PA. Con respecto a los ciclos, en el primero está el mayor porcentaje de tareas que incluyen una ECico y el menor en el caso de la ECV y de la ECD; en el segundo ciclo, el mayor para la ECD y el menor para la ECico; y en el tercer ciclo, el mayor para la ECV.

En la tabla 6.6 se comparan las editoriales de cada grupo según el tópico y el ciclo dónde son consideradas (análisis global) con el mayor y menor porcentaje de tareas que incluyen cada estructura de control. Cada editorial es caracterizado en función de tres aspectos, a saber: el grupo de editoriales al que pertenece y dos pares ordenado, en el primero la primera componente del par alude al tópico y la segunda al ciclo donde está el mayor porcentaje; y en el segundo par, la primera componente considera el tópico y la segunda el ciclo donde está el menor porcentaje.

<i>Análisis general unificado. Global. Mayores y menores porcentajes de tareas</i>		
MÍN	+	-
Estructura	(T,C)	(T,C)
ECV	(MA,C3)	(CA,C1)
ECico	(CA,C1)	(MA,C2)
ECD	(PA,C2)	(MA,C1)

Tabla 6.6 Porcentajes mayores y menores de tareas que promueven cada estructura de control

De forma sintética se condensa en la tabla 6.7 la información presentada en los análisis local y global, donde cada estructura de control visual es caracterizada en función de los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la estructura (ECV, ECico y ECD), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis general unificado. Estructuras de control visual. Local y global. Síntesis</i>				
Estructuras	Análisis local			Análisis global
	CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)				
ECV	ECM+ND+(3,0)	ECM+ND+(3,0)	ECM+ND+(2,0)	ECM+ND+(6,0)
ECico	ECm+ND+(0,3)	ECm+ND+(0,3)	ECm+ND+(0,3)	ECm+ND+(0,6)
ECD	ECm+ND+(0,0)	ECm+D+(0,0)	ECM+ND+(2,0)	ECm+ND+(0,0)

Tabla 6.7. Comparación por estructuras de control. Ciclos y tópicos. Síntesis

En conclusión, el análisis general unificado demuestra que la ECV es la más incluida mientras que la ECico es la menos contemplada incluso con porcentajes despreciables en todos los ciclos de la MA. Las condiciones para promover la ECD son más propicias (análisis local y global) que las consideradas para inducir a la ECico; y lo son menos que

las que caracterizan a la ECV, salvo en PA (análisis local) donde son similares. Independientemente del tópico y del nivel de análisis (local y global) también existe un claro desequilibrio entre un alto número de tareas que consideran una ECV y uno bajo donde aparece la ECico.

La caracterización anterior evidencia que los libros en cuanto a la inclusión de las distintas clases de control visual y desde un análisis general unificado promueven de forma significativa que la visualización sea objeto de reflexión en el tratamiento del concepto de área.

Y, por otra parte, solo la ECD es incluida entre ciclos de forma distinta a como lo hacen el resto de estructuras de control visual (descendentemente), lo cual sucede en el estudio de la MA. Esto evidencia que a medida que los ciclos educativos aumentan se consideran menos tareas donde la visualización es guiada exclusivamente por la lengua natural. Es decir tareas donde los libros o presentan el contenido matemático o despliegan procedimientos en lengua natural sin alusión alguna ni a figuras donde la visibilidad está presente ni a contextos o situaciones cotidianas. El segundo tipo de tarea aparece menos que el primero. Por tal motivo, el comportamiento de la ECD en la MA es más que contradictorio, pues, a medida que el estudio de las matemáticas pasa de un ciclo a otro la alusión al contenido matemático (definiciones de propiedades y fórmulas) ha de ser más enfatizada, lo cual no sucede en los libros al tratar la medida del área.

6.2 Análisis comparativo por editoriales: estructuras de control visual.

En este apartado abordamos la segunda de las cuestiones consideradas en el capítulo, es decir: ¿según los tópicos de área y los ciclos educativos cuáles son las estructuras y tipos de control visual privilegiados por cada una de las editoriales consideradas en la investigación y en qué forma? En primera instancia, se caracterizará cada una de las editoriales en estudio según cómo se presentan las tres estructuras de control y, posteriormente, con el propósito de sintetizar y plantear algunas conclusiones de los datos extraídos se compararán las editoriales según cada estructura de control.

Según el número de tareas consideradas todas las editoriales españolas y la mayoría de las colombianas asumen las estructuras de control de igual forma donde la ECV es la más contemplada, la ECD la segunda y la ECico la última (tabla 6.8). Únicamente, una editorial (colombiana) considera las estructuras de control de forma diferente siendo en este caso la ECD la más empleada, la ECV la segunda y la ECico la menor.

Editorial	ECV		ECico		ECD		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CS	181	43.61	25	6.02	209	50.36	415
CSM	229	54	33	7.78	162	38.21	424
CV	195	44.12	86	19.46	161	36.42	442
ES	278	69.5	14	3.5	108	27	400

ESM	264	57.77	36	7.88	157	34.35	457
EA	314	74.23	28	6.62	81	19.15	423

Tabla 6.8. Estructuras de control. Editoriales

Con respecto a la ECico, no es promovida en más del 8% de las tareas en todas las editoriales españolas y en la mayoría de las colombianas. Solo en una editorial colombiana representa alrededor de la quinta parte de las tareas. La ECV, al contrario, es considerada en más de la mitad de las tareas en todas las editoriales españolas y solo en una de las colombianas, mientras que en las otras dos colombianas varía entre el 43.61% y el 44.12%; y la ECD es considerada en más de la mitad de las tareas en una editorial (colombiana) y en el resto nunca sobrepasa el 39%.

Estos resultados demuestran que en todas las editoriales existe un claro desequilibrio entre los altos porcentajes de tareas que promueven las ECV y la ECD y los menores que consideran las ECico. Esto contribuye de forma significativa a que la visualización sea desarrollada pues las tareas que promueven obstáculos o dificultades de naturaleza semiótica y cognitiva son no solo las menos consideradas sino que hacen con valores reducidos. Solo en una de las editoriales (colombiana) tal porcentaje es considerable.

6.2.1 Caracterización de las tareas por editoriales

En los anexos 6.1 al 6.5 se señalan la frecuencia y porcentaje de las tareas de cada editorial según la estructura de control visual así como el apartado y el grado educativo considerado.

EDITORIAL CS

Análisis local. En todos los ciclos de la CA, la ECD es incluida con el mayor porcentaje de tareas y la ECico con el menor (tabla 6.9). La ECD al aparecer en más de la mitad de las tareas en cada uno de los ciclos es la estructura más contemplada, la ECico la menos considerada con porcentajes menores del 11% y la ECV con porcentajes que varían entre el 20% y el 38.8% es la que más se tiene en cuenta después de la ECD.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. CS- 415 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tarea
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	16	20	52	38.8	19	34.54	87
	ECico	8	10	6	4.48	6	10.91	20
	ECD	56	70	76	56.72	30	54.54	162
Total		80	100	134	100	55	99.99	269
MA	ECV	19	63.33	37	63.8	37	84.09	93
	ECico	2	6.67	3	5.17	0	0	5

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

	ECD	9	30	18	31.03	7	15.9	34
Total		30	100	58	100	44	99.99	132
PA	ECV	1	25	0	0	0	0	1
	ECIco	0	0	0	0	0	0	0
	ECD	3	75	2	100	8	100	13
Total		4	100	2	100	8	100	14

Tabla 6.9. Estructuras de control. Análisis local de la editorial CS

La ECV y la ECIco son ECM, incluidas de un ciclo al siguiente de forma cíclica. En la ECV, el segundo ciclo es donde está el mayor porcentaje de tareas que la induce y el primero donde está el menor. En la ECIco, es el tercer ciclo donde es más promovida y el segundo donde es menormente considerada. Con respecto a la ECD, es una ECM contemplada con el mayor porcentaje de tareas en todos los ciclos y se induce de un ciclo al siguiente descendentemente siendo en el primero donde está el mayor porcentaje de tareas que la considera y el tercero donde es menor.

Para la MA, la ECV es incluida con el mayor porcentaje de tareas en todos los ciclos y la ECIco con el menor. En consecuencia, la ECV es una ECM mientras que la ECIco es una ECM. En el primer caso los porcentajes de tareas ascienden de un ciclo al siguiente mientras que en el segundo descenden. La ECD, por su parte, es una ECM y es considerada de forma cíclica.

Los porcentajes de tareas que inducen una ECV son mayores del 60% en todos los ciclos. Los que promueven a la ECIco no superan el 7% en ninguno de los casos. La ECD es tenida en cuenta a través de porcentajes de tareas que rondan el 30% en el primero y segundo ciclo y es inferior al 16% en el restante. Así, pues, la ECV es la más contemplada, la ECD la segunda y la ECIco la menos promovida.

En cuanto a dónde se induce los mayores y menores porcentajes de tareas que promueven cada una de las estructuras de control, la ECV es más considerada en el tercero, la ECD en el segundo y la ECIco en el tercero; y, por el contrario, la ECV es menos contemplada en el primero y la ECD y la ECIco lo es en el tercero.

Para PA, la ECD es una ECM incluida con el mayor porcentaje de tareas en todos los ciclos y descendiendo de un ciclo al siguiente con porcentajes que van del 75% (primer ciclo) al 100% (segundo y tercer ciclo). Por el contrario, la ECV es una ECM que se induce con porcentajes de tareas que descenden a medida que los ciclos aumentan y que solo en uno de los ciclos (primer ciclo) se considerada través del 25% de las tareas. En cuanto a la ECIco no es tenida en cuenta en ninguno de los ciclos. En resumen, la ECD es la que más se contempla, seguida de la ECV y la ECIco no es incluida.

El análisis local demuestra que en todos los tópicos se contribuye al desarrollo de la visualización de forma efectiva pues de un ciclo a otro persiste el desequilibrio entre los mayores porcentajes de tareas que incluyen a las ECD y la ECV, y los menores que lo

hacen para la ECICO. En consecuencia, en esta editorial las posibilidades de incluir obstáculos semióticos y cognitivos al considerar al iconismo como elemento de control son reducidas. En cuanto a los elementos de control que favorecen el desarrollo visual, es el contenido y el procedimiento a través de la lengua natural los más contemplados en la mayoría de los tópicos (CA y PA), mientras que la visibilidad lo es en uno solo.

Análisis global. La ECD aparece con el mayor porcentaje de tareas para la CA y el PA mientras que la ECV lo es para la MA mientras que la ECICO lo es con el menor porcentaje en todos los tópicos (tabla 6.10).

Estructuras	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	87	32.34	93	70.45	1	7.14	181
ECICO	20	7.43	5	3.79	0	0	25
ECD	162	60.22	34	25.76	13	92.86	209
Total	269	99.99	132	100	14	100	415

Tabla 6.10. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial CS

La ECICO independientemente del tópico es la menos contemplada con porcentajes de tareas inferiores al 8% en la CA y en la MA y no es considerada en PA, siendo la CA donde está el mayor porcentaje de tareas que le promueve. Al contrario, la ECD es la que más se tiene en cuenta en la CA y el PA, mientras que la ECV lo es en la MA. La ECD es considerada con porcentajes mayores del 60% en la CA y en PA y del 25.76% en la MA. PA es el tópico donde el porcentaje de tareas que induce a la ECD es mayor. La ECV aparece con porcentajes de tareas entre el 7.14% en PA y el 70.45% en la CA.

A nivel de ciclos, la ECD es la más incluida en los dos primeros y la ECV en el tercero mientras que en todos la ECICO es la menos considerada en todos son incluidas con el mayor porcentaje de tareas en el primer ciclo y la ECV en el tercero mientras que la ECV en el primer ciclo, la ECICO en el segundo y la ECD en el tercero aparecen con el menor porcentaje de tareas (tabla 6.11).

Estructuras	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	36	31.58	89	45.88	56	52.34	181
ECICO	10	8.77	9	4.64	6	5.6	25
ECD	68	59.65	96	49.48	45	42.06	209
Total	114	100	194	100	107	100	415

Tabla 6.11. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial CS

Igual que en los tópicos la ECICO es la menos considerada pues está presente en alrededor del 9% de las tareas en cada ciclo siendo promovida de forma cíclica y es en el primer ciclo donde el porcentaje es mayor y el segundo donde lo es menor. En cuanto, a la ECD es la que más se tiene en cuenta en la mayoría de los ciclos (primero y segundo), se promueve con porcentaje de tareas que descienden a medida que los ciclos aumentan y a

través de porcentajes superiores al 40%. Por último, la ECV se enfatiza en el tercer ciclo y se induce ascendentemente con porcentajes que varían entre el 31,58% y el 52,34%.

El análisis global demuestra que esta editorial se caracteriza porque la ECD y la ECV son una ECM: la primera incluida con el mayor porcentaje de tareas en dos de los tópicos y dos de los ciclos y la segunda en uno de los tópicos y uno de los ciclos. La ECico por su parte es una ECM. En este sentido, la ECD es la más considerada en la mayoría de los tópicos y de los ciclos (CA y PA; C1 y C2), y la ECV en el tópico y ciclo restante (MA y C3), mientras que la ECico es la menos tenida en cuenta tanto a nivel de tópicos como de ciclos.

También desde el análisis global se demuestra que en esta editorial se contribuye de forma significativa al desarrollo visual siendo la visibilidad el elemento de control más incluido en la MA, mientras que el contenido o el procedimiento (mediante el uso exclusivo de la lengua natural) lo son en la CA y el PA.

EDITORIAL CSM

Análisis local, en todos los ciclos de la CA (tabla 6.12) la ECV es incluida con el mayor porcentaje de tareas mientras que la ECico lo es con el menor.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. CSM- 424 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	54	56.25	54	65.85	44	51.76	152
	ECico	17	17.71	0	0	3	3.53	20
	ECD	25	26.04	28	34.15	38	44.7	91
Total		96	100	82	100	85	99.99	263
MA	ECV	11	39.28	44	61.97	16	40	71
	ECico	0	0	0	0	7	17.5	7
	ECD	17	60.71	27	38.02	17	42.5	61
Total		28	99.99	71	99.99	40	100	139
PA	ECV	1	9.09	1	14.28	4	100	6
	ECico	6	54.54	0	0	0	0	6
	ECD	4	36.36	6	85.71	0	0	10
Total		11	99.99	7	99.99	4	100	22

Tabla 6.12. Estructuras de control. Análisis local de la editorial CSM

La ECV es una ECM donde los porcentajes de tareas que la tienen en cuenta varían de forma cíclica y se tiene en cuenta en más de la mitad de las tareas de cada uno de los ciclos siendo el segundo donde está el porcentaje más alto mientras que en el tercero está el menor. La ECico, por su parte, es una ECM también considerada cíclicamente con un porcentaje de tareas reducido en el tercer ciclo, nulo en el segundo y en el primero aparece con el mayor porcentaje. En cuanto a la ECD, en todos los ciclos es la más considerada

después de la ECV y se incluye con porcentajes que ascienden a medida que los ciclos y con valores que varían entre el 26.04% y el 44.7%.

La EC_{Ico} es pues la estructura menos contemplada en cada uno de los ciclos mientras que en su orden la ECV y la ECD son las más promovidas.

En la MA, el comportamiento es distinto en torno a cuáles son las estructuras predominantes mas no en la que representa a la menor. La ECV es incluida con el mayor porcentaje de tareas solo en uno de los ciclos (el segundo), la ECD en los dos restantes y la EC_{Ico} aparece con el menor porcentaje en todos los ciclos. La ECV es pues una EC_I mientras que la ECD es una ECM y la EC_{Ico} una EC_m.

La ECV y la ECD son consideradas cíclicamente; la primera, con el mayor porcentaje de tareas en el segundo ciclo y el menor en el primero. En cuanto a la segunda, el primer ciclo es donde está el más alto porcentaje de tareas que la inducen mientras que en el segundo está el menor. La EC_{Ico}, una vez más, es la estructura de control menos promocionada en cada uno de los ciclos y solo es considerada en el tercer ciclo.

El tópico PA es el único donde la EC_{Ico} es la predominante en uno de los ciclos y la menor en los dos restantes. Los porcentajes de tareas que la tienen en cuenta varían de forma descendente a medida que los ciclos aumentan y solo en el primer ciclo es considerada.

La ECD y la ECV son incluidas con el mayor porcentaje de tareas en el segundo y tercer ciclo respectivamente e inducidas la primera cíclicamente y la segunda ascendentemente. En el primer caso, el segundo ciclo es donde está el mayor porcentaje de tareas que la promueve y en el tercero el mínimo. Y, en el segundo caso, apenas es considerada en el primer ciclo y es tenida en cuenta en todas las tareas del tercero.

La ECD es pues una ECM mientras que la ECV y la EC_{Ico} son EC_I.

El análisis local demuestra que en la presente editorial la mayoría de los tópicos se contribuye al desarrollo de la visualización. De un ciclo a otro persiste el desequilibrio entre los mayores porcentajes de tareas que incluyen a las ECD y la ECV, y los menores que lo hacen para la EC_{Ico}. Solo en PA, y en uno de los ciclos, tal desequilibrio no es persistente. En este tópico, pues, son altas las posibilidades de que el tratamiento del área promueva la inclusión de obstáculos semióticos y cognitivos que afecten al desarrollo visual. En cuanto a la presencia de elementos de control que favorecen el desarrollo visual su inclusión varía de un tópico a otro.

Análisis global. A nivel de tópicos (tabla 6.13) la ECV es incluida con el mayor porcentaje de tareas en la CA y la MA y la ECD en PA. Por su parte la EC_{Ico} aparece

con el menor porcentaje en todos los tópicos y la ECV en solo uno (PA). En este sentido, en la CA y la MA, la ECV es la que más se tiene en cuenta; la ECD, la segunda, y la ECICO la que menos lo es. En cuanto a PA, la ECD supera a la ECV y a la ECICO quienes están presente en el mismo porcentaje de tareas.

Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Tópicos. CSM- 424 tareas

Estructuras	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	152	57.79	71	51.08	6	27.27	229
ECICO	20	7.6	7	5.03	6	27.27	33
ECD	91	34.6	61	43.88	10	45.45	162
Total	263	99.99	139	99.99	22	99.99	424

Tabla 6.13. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial CSM

Más de la mitad de las tareas en la CA y la MA consideran a la ECV pero en PA el porcentaje de tareas no llega al 30%. En cuanto a la ECICO, menos del 8% de las tareas la consideran en la CA y la MA mientras que en PA asciende hasta 27.27%; y la ECD es tenida en cuenta en más de la tercera parte de las tareas en todos los tópicos. Así, pues, en PA están los mayores porcentajes de tareas que inducen a la ECICO y a la ECD mientras que en la MA está el menor para la ECICO y en la CA para la ECD. En este sentido, la ECV es más considerada en la CA y menos en PA.

En torno a los ciclos educativos (tabla 6.14), en todos la ECV aparece con el mayor porcentaje de tareas y la ECICO con el menor. De este modo, la ECV es la que más se promueve en esta editorial seguida de la ECD, y de la ECICO.

Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Ciclos. CSM- 424tareas

Estructuras	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	66	48.89	99	61.87	64	49.61	229
ECICO	23	17.04	0	0	10	7.75	33
ECD	46	34.07	61	38.12	55	42.63	162
Total	135	100	160	99.99	129	99.99	424

Tabla 6.14. Estructuras de control visual. Análisis global por ciclos de la editorial CSM

En cuanto a cómo se promueven las estructuras de control, la ECV y la ECICO son consideradas con porcentajes de tareas que entre ciclos varían cíclicamente mientras que la ECD lo es de forma ascendente. La ECV a través de porcentajes alrededor del 50% en el primer y tercer ciclo, y mayores del 60% en el segundo. La ECICO no es considerada en el segundo ciclo y se hace con porcentajes que van del 7.75% al 17.04% y la ECD en más de la tercera parte de las tareas en cada ciclo.

El primer ciclo es donde está el porcentaje menor de tareas que inducen una ECV y una ECD y el mayor que considera una ECICO. En cuanto al segundo ciclo, es donde está presente el porcentaje más alto que contemplan una ECV y el menor que inducen una ECICO. Por último, en el tercer ciclo es donde tal porcentaje es el más alto para la ECD.

Los resultados del análisis global demuestran que la ECV es una ECM (predominante en todos los ciclos y en la mayoría de los tópicos) mientras que la ECD es una ECI (predomínate en un tópico) y la ECICO es una ECM. Así, pues, la ECV es la más contemplada, la ECD solo lo es en uno de los tópicos y la ECICO la menos tenida en cuenta.

Desde el análisis global también se evidencia que en esta editorial se contribuye de forma significativa al desarrollo visual en la mayoría de los tópicos, siendo en la CA y la MA donde el elemento de control más contemplado es la visibilidad. En PA, si bien el contenido o el procedimiento (mediante el recurso exclusivo de la lengua natural) son los elementos de control de mayor consideración, el porcentaje de tareas que incluye tanto al iconismo como a la visibilidad es el mismo, y, además, representan más de la cuarta parte de las tareas. Por tanto, en el estudio de PA la inclusión de obstáculos semióticos y cognitivos podría ser promovida considerablemente, y, por tanto, obstaculizar el desarrollo de la visualización.

EDITORIAL CV

Análisis local. Para CA (tabla 6.15) cada una de las estructuras de control son incluidas con el mayor porcentaje de tareas en uno de los ciclos: la ECICO en el primero, la ECV en el segundo y la ECD en el tercero. En cuanto a las estructuras menos consideradas la ECICO lo es en el segundo y tercer ciclo, y la ECD en el primero.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. CV- 442 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	46	36.22	68	50	21	24.42	135
	ECICO	52	40.94	20	14.70	13	15.12	85
	ECD	29	22.83	48	35.29	52	60.46	129
Total		127	99.99	136	99.99	86	100	349
MA	ECV	9	100	32	64	0	0	41
	ECICO	0	0	1	2	0	0	1
	ECD	0	0	17	34	6	100	23
Total		9	100	50	100	6	100	65
PA	ECV	8	80	11	73.33	0	0	19
	ECICO	0	0	0	0	0	0	0
	ECD	2	20	4	26.67	3	100	9
Total		10	100	15	100	3	100	28

Tabla 6.15. Estructuras de control. Análisis local de la editorial CV

Tanto la ECV como la ECICO son ECI y se promueven de un ciclo al siguiente con porcentajes de tareas que varían cíclicamente. La ECD también es una ECI pero se induce ascendentemente. La ECV es contemplada con porcentajes que van del 24.42% en el tercer ciclo al 50% en el segundo, mientras que la ECICO lo es con porcentajes menores; del 16% en el segundo y tercer ciclo y un porcentaje del 40.94% en el primero. En el

segundo ciclo es donde la proporción de tareas que inducen una ECICO es la menor. En cuanto a las tareas que incluyen una ECD están entre el 22.83% en el primer ciclo y el 60.46% en el tercero.

Para la MA, la ECV es la más incluida en los dos primeros ciclos y la ECD lo es en el tercero. Con respecto a la estructuras cuyos porcentajes de tareas son los menores, la ECD y la ECICO lo son en el primer ciclo (no son consideradas), la ECICO en el segundo ciclo y la ECV y la ECICO en el tercero donde no son contempladas.

La ECV es una ECM incluida a medida que los ciclo aumentan con porcentajes de tareas que descienden siendo en el primer ciclo donde la totalidad de las tareas la considera. La ECD es una ECI inducida ascendentemente; en la totalidad de las tareas en el tercer ciclo (la totalidad de las tareas la contemplan) y no contemplada en el primero. Por último, ICO es una ECM inducida con porcentajes de tareas que varían cíclicamente siendo en el segundo ciclo donde está el mayor porcentaje de tareas que la contempla, y como se dijo antes en el primer y segundo ciclo no es tomada en cuenta.

Una vez más la ECICO es la menos contemplada en cada uno de los ciclos y tanto la ECV como la ECD las más promovidas, la primera en dos de los ciclos y la segunda en uno.

En PA, la ECICO no es contemplada en ninguno de los ciclos (estructura de control menor) mientras que la ECV no lo es en el tercero (la menor). La ECD es la única de las estructuras que se contempla en todos los ciclos. Es predominante en el tercer ciclo, promovida entre ciclos ascendentemente y es una ECI que es enfatizada en la totalidad de las tareas del tercer ciclo siendo menos considerada en el primero. Con respecto a la ECV es una ECM pues es la predominante en los dos primeros ciclos, es tomada en cuenta con porcentajes que descienden entre ciclos y siempre superiores al 73% en la mayoría de ellos. La ECV es mayormente considerada en el primer ciclo con un porcentaje de tareas del 80% seguido de C2 con el 73,33% de las tareas.

En esta editorial el análisis local demuestra que tanto en la MA como en PA se contribuye a un desarrollo efectivo de la visualización. En uno y otro caso, y en todos los ciclos, persiste un claro desequilibrio entre un mayor porcentaje de tareas que consideran elementos de control que favorecen el desarrollo visual y uno menor que lo obstaculizan. Solo en CA la inclusión de obstáculos semióticos y cognitivos asociados al iconismo pueden influenciar de forma negativa y de manera significativa al desarrollo visual. En este tópico, y en uno de los ciclos, los porcentajes de tareas que incluyen al iconismo son los mayores. En lo relativo a los elementos de control que sí favorecen el desarrollo visual son incluidos de forma distinta de un tópico a otro.

Análisis global. A nivel de los tópicos (tabla 6.16) ECV es una ECM incluida con el mayor porcentaje de tareas en todos los tópicos. Aparece en alrededor de la tercera parte

de las tareas de la CA y de las dos terceras partes en los otros dos tópicos y el tópico donde es más tenida en cuenta es PA siendo menos considerada en la CA.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Tópicos. CV- 442 tareas</i>							
Estructuras	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	135	38.68	41	63.08	19	67.86	195
ECIco	85	24.35	1	1.54	0	0	86
ECD	129	36.96	23	35.38	9	32.14	161
Total	349	99.99	65	100	28	100	442

Tabla 6.16. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial CV

La ECIco es incluida con el menor porcentaje de tareas en todos los tópicos, con porcentajes muy pequeños o nulos en la MA y en PA respectivamente siendo en la CA donde más se considera; con el 24.35% de las tareas. En cuanto a la ECD es asumida en alrededor de la tercera parte de las tareas en todos los ciclos, es más contemplada en MA con más de la mitad de las tareas y menos en PA con casi la tercera parte de las tareas.

En todos los ciclos la ECV es pues la estructura de control más contemplada, la ECD es la segunda y la ECIco la que menos se introduce.

En cuanto a los ciclos (Tabla 6.17) mientras que la ECV es la predominante en los dos primeros y la ECD en el tercero, la ECIco es la menos contemplada en los dos últimos y la ECD en el primero. De este modo, la ECV es la que más se promueve en el primer y segundo ciclo mientras que la ECD lo es en el tercero. La ECD es la menos tenida en cuenta en el primer ciclo y la ECIco en los ciclos restantes.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Ciclos. CV- 442tareas</i>							
Estructuras	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	63	43.15	111	55.22	21	22.1	195
ECIco	52	35.62	21	10.45	13	13.68	86
ECD	31	21.23	69	34.33	61	64.21	161
Total	146	100	201	100	95	99.99	442

Tabla 6.17. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial CV

La ECV y la ECIco son promovidas cíclicamente y la ECD ascendentemente. La ECV a través de porcentajes de tareas entre el 22.1% (tercer ciclo) y el 55.22% (segundo ciclo) y la ECIco entre el 10.45% (segundo ciclo) y el 35.62% (primer ciclo). En cuanto a la ECD aparece en mayor medida en el tercer ciclo y menormente en el primero.

Los resultados del análisis global muestran, por un lado, que la ECV es una ECM (predominante en todos los tópicos y en la mayoría de los ciclos) mientras que la ECD es una ECI (predominante en un ciclo) y la ECIco es una ECm. Así, pues, también en esta editorial la ECV es la más contemplada, la ECD lo es solo en uno de los ciclos y la ECIco es la menos incluida. Y, a diferencia del análisis local, el análisis global resalta que en

todos los tópicos el desarrollo visual puede ser efectivamente enfatizado siendo en todos los casos la visibilidad el elemento de control más contemplado.

EDITORIAL ES

Análisis local. Para la CA (tabla 6.18) la ECV es incluida con el mayor porcentaje de tareas en todos los ciclos mientras que la ECico lo es con el menor en el segundo y tercero y la ECD en el primero. También en esta editorial hay un desequilibrio entre los mayores porcentajes de tareas que incluyen elementos de control que contribuyen al desarrollo visual, y los menores donde se promueve obstáculos semióticos y cognitivos que le entorpecen. Pero, en este caso tal desequilibrio no está presente en todos los ciclos siendo en el primero donde las tareas donde aparece una ECico son las segundas más consideradas. El desarrollo visual, pues, es más enfatizado en el segundo y tercer ciclo que en el primero.

La ECV es una ECM que se considera con porcentaje que varían cíclicamente a medida que los ciclos educativos aumentan y siempre incluida en más de la mitad de las tareas siendo el segundo ciclo donde más se promueve y el tercero donde menos se hace. En cuanto a la ECico y a la ECD también son inducidas cíclicamente pero en ambos casos son una ECM. La ECico es la única que no se contempla en todos los ciclos siendo en el primero donde más aparece y en el tercero donde menos lo hace pero en ningún caso con más de la cuarta parte de las tareas. La ECD, por su parte, es tenida en cuenta con el mayor porcentaje en el segundo ciclo seguido del tercero y del primero, y tampoco es incluida en más de la cuarta parte de las tareas.

Al comprar las ECD y la ECico, la segunda es más contemplada en el primer ciclo mientras que la primera lo es en los restantes.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. ES-400 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	16	69.56	43	76.78	39	63.93	98
	ECico	5	21.74	0	0	8	13.11	13
	ECD	2	8.69	13	23.21	14	22.95	29
Total		23	99.99	56	99.99	61	99.99	140
MA	ECV	0	0	26	74.28	141	68.11	167
	ECico	0	0	1	2.86	0	0	1
	ECD	0	0	8	22.86	66	31.88	74
Total		0	0	35	100	207	99.99	242
PA	ECV	0	0	7	77.78	6	66.67	13
	ECico	0	0	0	0	0	0	0
	ECD	0	0	2	22.22	3	33.33	5
Total		0	0	9	100	9	100	18

Tabla 6.18. Estructuras de control. Análisis local de la editorial ES

En los ciclos 2 y 3 de la MA el comportamiento es igual que en el tópico anterior siendo la estructura de control predominante la ECV y la menor la ECICO. Pero, en el primer ciclo no hay tareas que movilicen este tópico y en el tercero la ECICO no es contemplada. Lo anterior evidencia que la ECV es la más considerada seguida de la ECD y la ECICO es la que menos se tiene en cuenta.

Se observan similitudes en cómo es promovida la ECV y la ECICO y diferencia en la ECD. Las dos primeras están incluidas entre ciclos con porcentajes que varían de forma cíclica siendo el segundo ciclo donde está el mayor, mientras que la ECD lo es ascendentemente. Pero, la ECV aparece en más de las dos terceras partes de las tareas en el segundo y tercer ciclo mientras que la ECICO solo es incluida en el segundo ciclo y de forma no significativa, y la ECD es promovida en los dos primeros ciclos pero siempre con menos de la tercera parte de las tareas. Así, la ECV es una ECM mientras que la ECICO y la ECD son ECm siendo la ECICO la menor en todos los ciclos.

En el tópico donde se considera las relaciones entre el área y el perímetro las estructuras de control son promocionadas de forma muy similar a como sucede en la MA. No hay tareas de PA en el primer ciclo, en los dos restantes la ECV es la incluida con el mayor porcentaje de tareas mientras que la ECICO lo es con el menor. La ECV y la ECICO son promovidas con porcentajes que entre ciclos varían de forma cíclica y la ECD se hace de forma ascendente. La ECV seguida de la ECD son las estructuras más contempladas y la ECICO la menos inducida. Por otra parte, la ECV al ser la predominante en la mayoría de los ciclos es una ECM mientras que la ECICO y la ECD son ECm.

En cuanto a dónde se promueven los mayores y los menores porcentajes de tareas que tienen en cuenta cada una de las estructuras de control, la ECV tiende a ser más considerada en el segundo ciclo y menos en el tercero. Mientras que la ECD de forma inversa es más promovida en el tercero y menos en el segundo. La ECICO no es considerada en ninguno de los ciclos de este tópico.

El análisis local demuestra que solo en la CA, y para uno de los ciclos, el porcentaje de tareas que consideran al iconismo como elemento de control es significativo, y al superar el correspondiente a las tareas donde aparece o el contenido o el procedimiento influye negativamente para el desarrollo de la visualización. No es así en el resto de tópicos donde siempre está presente un claro desequilibrio entre un mayor número de tareas que incluyen a los elementos de control que contribuyen al desarrollo visual, y aquellos que como el iconismo inducen obstáculos semióticos y cognitivos. Así, pues, en esta editorial se promueve el desarrollo visual de forma efectiva tanto en la MA como en el PA, y de forma más restringida en la CA.

Análisis global. Independientemente del tópico la ECV se incluye en más de la mitad de las tareas siendo en PA donde está el mayor porcentaje de tareas que la inducen y la MA

donde está el menor. La ECico es considerada en la CA con un porcentaje de tareas inferior al 10%, en la MA menos del 1% de las tareas lo contemplan y en PA no es tomada en cuenta. Así, pues, en todos los tópicos la ECV es la estructura que más se tiene en cuenta y la ECico la que menos (tabla 6.19).

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Tópicos. ES-400 tareas</i>							
Estructuras	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	98	70	167	69.01	13	72.22	278
ECico	13	9.28	1	0.41	0	0	14
ECD	29	20.71	74	30.58	5	27.78	108
Total	140	99.99	242	100	18	100	400

Tabla 6.19. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial ES

En cuanto a la ECD es considerada en más de la quinta parte de las tareas y es la más incluida después de la ECV siendo en la MA donde el porcentaje de tareas que la consideran es mayor y en la CA donde está el menor, y solo en PA menos de la tercera parte de las tareas la contemplan.

A nivel de los ciclos educativos la ECV es incluida con el mayor porcentaje de tareas en todos los ciclos considerados y la ECico con el menor en el segundo y tercero mientras que la ECD lo es en el primero (tabla 6.20).

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Ciclos. ES-400 tareas</i>							
Estructuras	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	16	69.56	76	76	186	67.14	278
ECico	5	21.74	1	1	8	2.89	14
ECD	2	8.69	23	23	83	29.96	108
Total	23	99.99	100	100	277	99.99	400

Tabla 6.20. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial ES

Se observan similitudes en cuanto a cómo las tres estructuras son incluidas de un ciclo al siguiente. Todas aparecen entre ciclos con porcentajes de tareas que varían cíclicamente pero mientras que la ECV en el segundo ciclo lo es con el mayor porcentaje y en el tercero con el menor, en la ECico el mayor está en el primer ciclo y el menor en el segundo. Finalmente, la ECD se promueve con el mayor porcentaje en el tercero de los ciclos y con el menor en el primero.

Lo anterior muestra que mientras la ECV es la más contemplada a nivel de ciclos la ECico es la menos incluida seguida de la ECD.

El análisis global demuestra que la ECV es una ECM (predominante en todos los ciclos y los tópicos) mientras que la ECico y la ECD son ECm. La ECV es pues la estructura de control que más se contempla y la ECico la que menos se tiene en cuenta.

Los resultados del análisis global también demuestran que en todos los tópicos el desarrollo visual tiende a ser promovido de forma eficaz siendo en todos los casos el iconismo el elemento de control menos incluido, y la visibilidad el más considerado.

EDITORIAL ESM

Análisis local. Para la CA se puede comprobar que cada estructura de control aparece con el mayor porcentaje de tareas en uno de los ciclos educativos: la EC_{Ico} en el primero, la ECV en el segundo y la ECD en el tercero mientras que solo la ECD en el primer ciclo y la EC_{Ico} en los restantes se consideran con el menor porcentaje (tabla 6.21). Cada estructura de control es predominante en uno de los ciclos en consecuencia cada una de ellas es una ECI. Las estructuras de control son consideradas de forma diferenciada según el ciclo educativo contemplado siendo la EC_{Ico}, la ECV y la ECD en ese orden las más promocionadas en el primer ciclo; la ECV, la ECD y la EC_{Ico} en el segundo; y la ECD, la ECV y la EC_{Ico} en el tercero. Donde la ECV aparece con porcentaje de tareas superiores al 43% en todos los ciclos, la EC_{Ico} con el 47,61% en el primer ciclo y con valores despreciables en los restantes, y la ECD varían entre el 7,14% y el 52,44%.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. ESM-457 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	19	45.24	68	65.38	36	43.9	123
	EC _{Ico}	20	47.61	3	2.88	3	3.66	26
	ECD	3	7.14	33	31.73	43	52.44	79
Total		42	99.99	104	99.99	82	100	228
MA	ECV	0	0	0	0	119	68.79	119
	EC _{Ico}	0	0	1	100	8	4.62	9
	ECD	0	0	0	0	46	26.59	46
Total		0	0	1	100	173	100	174
PA	ECV	0	0	11	37.93	11	45.83	22
	EC _{Ico}	1	50	0	0	0	0	1
	ECD	1	50	18	62.07	13	54.17	32
Total		2	100	29	100	24	100	55

Tabla 6.21. Estructuras de control. Análisis local de la editorial ESM

En cuanto a cómo se incluyen cada estructura de control, se observan similitudes en cómo se hace con la ECV y la EC_{Ico} y diferencias a como se contempla la ECD. Las dos primeras se promueven de un ciclo al siguiente con porcentajes de tareas que varían cíclicamente mientras que en la tercera de las estructuras lo es ascendentemente. El ciclo donde más se promueve la ECV y a EC_{Ico} son el segundo y el primero respectivamente mientras que la ECD es el tercero, y donde menos se consideran son el tercero para la ECV, el segundo para la EC_{Ico} y el primero para la ECD.

En el tópico donde se considera la MA no hay tareas en el primer ciclo, la ECICO es la única incluida en el segundo y la ECV seguida de la ECD y de la ECICO son en ese orden consideradas en el tercero. Esto demuestra que las estructuras predominantes son la ECICO en el segundo ciclo y la ECV en el tercero mientras que las menores son la ECV y la ECD en el primer ciclo y la ECICO en el tercero

Se observan similitudes en cómo se incluyen entre ciclos la ECV y la ECD y diferencias en cómo se hace para la ECICO. En las dos primeras con porcentajes de tareas que aumentan de un ciclo al siguiente siendo en el tercer ciclo donde está el mayor porcentaje y el segundo donde no son contempladas. Pero, la ECV es una ECM y la ECD es una ECM. Con respecto a la ECICO es una ECI promocionada cíclicamente y es en el segundo ciclo donde está el mayor porcentaje mientras que en el tercero está el menor.

En el tópico donde se consideran las relaciones entre el área y el perímetro la ECICO es incluida solo en el primer ciclo, la ECV en el segundo y tercero mientras que la ECD lo es todos los ciclos y con porcentajes iguales o superiores al 50%. La ECD es quien aparece con el mayor porcentaje en todos los ciclos y para la ECICO sucede igual en el primero. Mientras que las estructuras que aparecen con el menor porcentaje de tareas son la ECV y la ECICO, la primera en el primer ciclo y la segunda en los restantes.

Con respecto a cómo se incluyen las estructuras de control se hace de forma diferenciada. La ECV es una ECM considerada entre ciclos de forma ascendentemente, la ECICO es una ECI que se promociona descendentemente y la ECD es una ECM que aparece cíclicamente. Entonces, mientras que la ECD es la más promovida en todos los ciclos, la ECICO es la menor en la mayoría y la ECV en solo uno. Además, en el primer ciclo es donde las tareas que promueven una ECV y una ECD están en la menor proporción. Mientras que la mayor proporción está presente en el tercero y en el segundo respectivamente. En cuanto a la ECICO el porcentaje de tareas que le representan es el mayor en el primer ciclo y no es considerada en el segundo y tercero.

Estos resultados indican que en PA la ECD es la más promovida mientras que la ECICO es la menos contemplada.

El análisis local evidencia que en uno de los ciclos para cada tópico el icono como elemento de control es el más incluido. En esta editorial se enfatiza pues la introducción de obstáculos semióticos y cognitivos que influyen negativamente en el desarrollo de la visualización. En el estudio de la cantidad y de la medida de área, y para uno de los ciclos, la visibilidad es el elemento de control más incluido, mientras que el contenido y/o el procedimiento lo son en uno de los ciclos de la cantidad de área y en la mayoría de la relación área y perímetro. Así, pues, el desarrollo de la visualización en esta editorial tiene unas características muy distintas al de las anteriormente analizadas.

Análisis global, en cuanto a los tópicos de área existe diferencia en cuanto al porcentaje de tareas que consideran cada estructura de control. Mientras que la ECV es incluida en la CA y en la MA con el mayor porcentaje de tareas, la ECD solo lo es en PA. En cuanto a la ECico se promueve de igual forma independientemente del tópico, siendo en todos la menos incluida (tabla 6.22).

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Tópicos. ESM- 457 tareas</i>							
Estructuras	CA		MA		PA		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	123	53.95	119	68.39	22	40	264
ECico	26	11.40	9	5.17	1	1.82	36
ECD	79	34.65	46	26.44	32	58.18	157
Total	228	100	174	100	55	100	457

Tabla 6.22. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial ESM

Los tópicos donde más se promueve la ECV y la ECD son la MA y la CA respectivamente. En el primer caso con más de las dos terceras partes de las tareas y en el segundo con algo más de la décima parte; mientras que la ECD con más de la mitad de las tareas lo es en PA. Por otro lado, en la MA con alrededor de la cuarta parte de las tareas es donde menos se promueve la ECD y en PA sucede igual. En el primer tópico el porcentaje de ateads con este control son del 40% de las tareas y en el segundo con un porcentaje de tareas despreciable.

En resumen, la ECV es la más considerada en la CA y en la MA, y la ECD en PA, mientras que la ECico es la menos contemplada en los tres tópicos.

Con relación a los ciclos educativos (tabla 6.23) la ECico es la predominante en el primero y la ECV en los dos restantes mientras que la ECD es la menor en el primero y la ECico en los demás.

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Ciclos. ESM- 457 tareas</i>							
Estructuras	C1		C2		C3		Total
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	19	43.18	79	58.95	166	59.50	264
ECico	21	47.73	4	2.98	11	3.94	36
ECD	4	9.09	51	38.06	102	36.56	157
Total	44	100	134	99.99	279	100	457

Tabla 6. 23. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial ESM

La ECV es incluida con porcentajes de tareas que ascienden a medida que los ciclos aumentan con porcentajes mayores del 43% en todos los ciclos. En el tercer ciclo es donde se consideran la mayor proporción de tareas que la movilizan y en el primero donde está la menor. La ECico es considerada cíclicamente y se enfatiza a través del 47.73% de las tareas en el primer ciclo siendo poco contemplada en los dos restantes. La ECD también es incluida cíclicamente, es considerada en más de la tercera parte de las tareas en el segundo y tercer ciclo y en el primero con menos de la décima parte de ellas. En el

segundo ciclo es donde hay un mayor porcentaje de tareas que promueven la ECD y en el primero es está el menor.

La ECV es una ECM siendo la predominante en la mayoría de los tópicos (CA y MA) y de los ciclos (C2 y C3), mientras que la ECICO (predominante en un ciclo: C1) y la ECD (predominante en un tópico: PA) son ECI. Esto demuestra globalmente que la ECV es la más contemplada y las ECICO y la ECD las menos incluidas.

El análisis global también muestra que en todos los tópicos persiste un desequilibrio entre un mayor número de tareas que incluyen elementos de control que favorecen el desarrollo de la visualización y uno menor donde se obstaculiza. En este sentido, esta editorial contribuye de forma significativa al desarrollo de la visualización siendo en la mayoría de los tópicos la visibilidad el elemento de control más incluido. En consecuencia, la potencia heurística de las figuras es alta o el cambio dimensional es enfatizado perceptualmente. Solo en PA no se considera el desarrollo visual así; al contrario, se enfatiza que la deconstrucción dimensional de formas está articulada a una expansión discursiva, o se enuncia en lengua natural tanto la operación que promueve la transformación como el flujo visual en cuestión.

Editorial EA

Análisis local. Igual que en la mayoría de las editoriales la ECV es la más contemplada en todos los ciclos del tópico donde se considera la cantidad de área, pero, en este caso la ECICO es la menos incluida en segundo y tercer ciclo, mientras que la ECD lo es en el primero (tabla 6.24).

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Local. EA-423 tareas</i>								
Tópico	Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
		Frec	%	Frec	%	Frec	%	
CA	ECV	17	65.38	83	65.35	39	79.59	139
	ECICO	7	26.92	9	7.09	0	0	16
	ECD	2	7.69	35	27.56	10	20.41	47
	Total	26	99.99	127	100	49	100	202
MA	ECV	0	0	6	85.71	127	82.47	133
	ECICO	0	0	0	0	8	5.19	8
	ECD	0	0	1	14.28	19	12.34	20
	Total	0	0	7	99.99	154	100	161
PA	ECV	0	0	3	42.86	39	73.58	42
	ECICO	0	0	0	0	4	7.55	4
	ECD	0	0	4	57.14	10	18.87	14
	Total	0	0	7	100	53	100	60

Tabla 6.24. Estructuras de control. Análisis local de la editorial EA

La ECV y la ECD son promovidas entre ciclos con porcentajes que varían cíclicamente mientras que la ECICO lo es descendentemente. Así, pues, las estructuras de control que contribuyen al desarrollo de la visualización son incluidas de forma distinta a como se considera en la que lo obstaculiza. Siendo la ECV la ECM mientras que la ECICO y la ECD son las ECI. En cuanto a la ECD presente en más de la quinta parte de las tareas es la segunda más contemplada en los dos últimos ciclos mientras que la ECICO con algo más de la cuarta parte de las tareas es la segunda en el primero. Y, en todos los ciclos la ECV es la de mayores porcentajes lo que incluye casi las dos terceras partes de las tareas. En cuanto a dónde se promueve el mayor y el menor porcentaje de tareas que inducen una ECV, lo son en el tercero y el segundo ciclo respectivamente mientras que la ECD lo es en el segundo y en el primero respectivamente, y la ECICO en primero y no es considerada en el tercero.

En el tópico donde se considera la medida de área no hay tareas en el primer ciclo y tanto en el segundo como en el tercero la ECV es la predominante y la ECICO la menor. Con porcentajes que superan el 80% la ECV es la más considerada, la ECD con porcentajes menores del 15% es la segunda más contemplada, y la ECICO la menos tenida en cuenta (en este caso solo se contempla en uno de los ciclos y en menos de la décima parte de las tareas).

Las dos estructuras de control que contribuyen al desarrollo de la visualización también son incluidas entre ciclos con porcentajes de tareas que varían cíclicamente mientras que la ECICO lo es ascendentemente. La ECV es una ECM promovida con el mayor porcentaje en la mayoría de los ciclos siendo el segundo donde está el más alto y el tercero donde está el menor pero siempre en más del 80% de las tareas. En cuanto a la ECICO, es en el tercer ciclo donde es más incluida pero de forma poco significativa mientras que en el segundo no es considerada. Por último, la ECD se tiene en cuenta con porcentajes que varían entre el 12,34% y el 14,28% siendo más tenida en cuenta en el segundo ciclo y menos en el tercero. Tanto la ECICO como la ECD son ECI.

Para el tópico PA se puede comprobar que la ECV y la ECD son consideradas de forma distinta a como se realiza en la CA y la MA: ambas incluidas con el mayor porcentaje de tareas en solo un ciclo. Por otra parte, la ECICO es la menos considerada en la mayoría de los ciclos (segundo y tercero) mientras que en el primero no hay tareas PA. La ECV y la ECD, pues, son una ECI y, por el contrario, la ECICO es una ECM.

En cuanto a cómo las estructuras de control son incluidas entre ciclos en PA, mientras que la ECV y la ECICO lo son con porcentajes de tareas que varían ascendentemente, la ECD lo es cíclicamente. Siendo el tercer ciclo y el segundo donde las ECV y la ECICO son respectivamente mayor y menormente incluidas mientras que la ECD de forma inversa lo es en el segundo y tercer ciclo.

Lo anterior evidencia que el uso de las estructuras de control varía de un ciclo a otro siendo en el segundo donde la ECD es la más considerada seguida de la ECV mientras que en el tercero la situación se invierte. En cuanto a la ECico es la menos contemplada en los dos ciclos. Lo anterior demuestra que tanto en la MA como de PA se enfatizan las estructuras de control que contribuyen al desarrollo de la visualización pero en la CA, y en al menos un ciclo, no es así pues las tareas que promueven obstáculos semióticos y cognitivos que obstaculizan el papel de la visualización son las segundas más incluidas. Así mismo, se muestra que en la mayoría de los tópicos se recurre a la visibilidad para aumentar el grado de potencia heurística de las figuras y se mejora la “lectura” de las figuras en torno a algunas de sus unidades constituyentes de dimensión 1 o 0.

Análisis global. Las estructuras de control se incluyen de forma similar de un tópico a otro siendo la ECV la más promocionada y la ECico la menos considerada (tabla 6.25). Para la ECV es en la MA donde está el mayor porcentaje de tareas que la promueve mientras que en la CA está el menor, y la ECico es considerada en todos los tópicos con porcentajes poco significativos pero es en la CA donde más se contempla y la MA donde menos lo es. En cuanto a la ECD es inducida con porcentajes que varían entre el 12,42% (en la MA) y el 23,27% (en la CA).

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Tópicos. EA-400 tareas</i>						
Estructuras	CA		MA		PA	
	Frec	%	Frec	%	Frec	%
ECV	139	68.81	133	82.60	42	70
ECico	16	7.92	8	4.97	4	6.67
ECD	47	23.27	20	12.42	14	23.33
Total	202	100	161	99.99	60	100

Tabla 6.25. Estructuras de control. Análisis global por tópicos de la editorial EA

En cuanto a los ciclos educativos e independientemente de los tópicos la ECV es la predominante en cada uno mientras que la ECico es la menor en el segundo y tercer ciclo, y la ECD lo es en el primero (tabla 6.26).

<i>Estructuras de control visual. Análisis comparativo por editoriales. Global. Ciclos. EA- 423 tareas</i>							
Estructuras	C1		C2		C3		Tareas
	Frec	%	Frec	%	Frec	%	
ECV	17	65.38	92	65.25	205	80.08	314
ECico	7	26.92	9	6.38	12	4.69	28
ECD	2	7.69	40	28.37	39	15.23	81
Total	26	99.99	141	100	256	100	423

Tabla 6.26. Estructuras de control. Análisis global por ciclos de la editorial EA

La ECV y la ECD son incluidas entre ciclos con porcentajes de tareas que varían cíclicamente mientras que en la ECico se considera descendientemente. A nivel global, pues, las estructuras que contribuyen al desarrollo de la visualización son incluidas de igual forma mientras que la que lo obstaculiza lo es de manera distinta. Por otra parte, la ECV es promocionada con el mayor y el menor porcentaje en el tercer ciclo y en el

segundo respectivamente, la ECICO según el caso en el primero y en el tercero; y la ECD en el primero y en el segundo respectivamente.

El análisis global evidencia que la ECV es una ECM que en todos los ciclos y tópicos, es la estructura predominante, mientras que la ECD y la ECICO son ECm siendo la primera de ellas la estructura menor en la mayoría de los ciclos. Así, pues, globalmente en todos los tópicos y ciclos educativos la ECV es la más incluida y, salvo en el primer ciclo, la ECICO es la menos considerada. En este sentido, el análisis global demuestra que en la presente editorial el desarrollo visual es promovido de forma significativa pues las tareas que promueven obstáculos para la visualización son en todos los tópicos las menos consideradas.

6.2.2 Síntesis y conclusión.

Estructura de control por visibilidad. Su promoción difiere en las editoriales de un país y otro. Mientras que solo una editorial española la considera en un tópico (PA) y un ciclo (C1) con menos de la mitad de las tareas, todas las colombianas lo hacen al menos en dos de ellos. Ninguna de las editoriales españolas la asume con porcentajes inferiores al 10% pero sí una de las colombianas quien lo hace en un tópico. El análisis local permite comprobar que para la CA la mayoría de las editoriales españolas y solo una colombiana promueven esta estructura en todos los ciclos con más de la (o igual a la) mitad de las tareas, y una española junto a una colombiana hacen lo propio en solo uno de los ciclos. Para la MA, una colombiana la considera en todos los ciclos, otra en dos (C1 y C2) y la tercera en uno (C2), y la mayoría de las españolas lo hacen en dos ciclos (C2 y C3) y solo la tercera lo considera en uno. En PA no hay diferencias significativas en cómo esta estructura de control es promovida en las editoriales de ambos países; en este caso aparece en la mayoría de las tareas en dos de los ciclos para una editorial y en un ciclo para otra.

Según cómo la ECV es considerada, las editoriales pueden ser agrupadas en tres grupos: el primero conformado por una de las editoriales colombianas y dos españolas (CV, ES y EA), el segundo por una española y una colombiana (ESM y CSM) y el tercero por una colombiana (CS).

El primer grupo se caracteriza porque en la mayoría de los tópicos (análisis local) y a nivel global la ECV es una ECM. El análisis global demuestra que la editorial ES es quien en todos los tópicos la incluye como una ECM siendo en la MA y en PA donde se hace con porcentajes de tareas que descienden a medida que los ciclos aumentan mientras que en la CA lo es de forma no descendente. En cuanto a EA y CV, se asume como una ECM en la mayoría de los tópicos (CA y MA, y MA y PA respectivamente) y como una ECI en el tercero. En todos los tópicos para EA y CV, al igual que en la CA para ES, se promueve entre ciclos de forma no descendente.

En el tópico donde se considera la cantidad de área son las editoriales españolas quienes en todos los ciclos promueven a la ECV como la predominante mientras que la colombiana lo hace en solo uno; al contrario, en la MA, las tres editoriales la asumen como la estructura predominante en la mayor parte de los ciclos; y en PA, CV y ES en dos mientras que EA solo en uno. A nivel de la estructuras que son incluidas con el menor porcentaje de tareas, CV también se distingue por ser la única donde la ECV es la menor en algunos de los ciclos de algunos de los tópicos (en uno de los ciclos tanto de la MA como de PA); mientras, que en las editoriales españolas no lo es en ninguno de los ciclos.

A nivel global, es una ECM que en todas las editoriales se induce entre ciclos de forma no descendente. De igual forma que en el análisis local la editorial colombiana se diferencia de las españolas, pues, en las segundas es la estructura de control predominante en todos los tópicos y los ciclos mientras que en la colombiana no lo es en uno de los ciclos (C3).

El segundo grupo de editoriales se caracteriza porque en la mayoría de los tópicos (análisis local) la ECV es una ECI y a nivel global es una ECM. El análisis local permite comprobar que en todos los tópicos y entre ciclos las dos editoriales promueven esta estructura con porcentajes de tareas que varían no descendentemente. También que en la MA es una ECI mientras que en la CA es una ECM para CSM y en PA una ECm para ESM.

En el tópico donde se considera la cantidad de área ninguna de las editoriales promueve la ECV con el menor porcentaje de tareas mientras que en la MA solo CSM cumple tal característica. En PA, la ECV es la menos promocionada en uno de los ciclos para ambas editoriales y en la MA solo lo es en un ciclo para ESM. En cuanto, a la ECV como estructura de control menos incluida, lo es en uno de los ciclos de la MA para ambas editoriales, en uno de la CA para ESM y en todos para CSM, y en un ciclo de PA para CSM.

A nivel global, se evidencian diferencias entre ambas editoriales. Mientras que en CSM es la estructura de control más incluida en todos los ciclos y en la mayoría de los tópicos (CA y MA) y la menos en el tópico restante, en ESM es la más promocionada en la mayoría de los ciclos (C2 y C3) y de los tópicos (CA y MA) pero en ningún caso es la menos considerada.

En el tercer grupo la ECV es una ECM para la MA donde es la más incluida en todos los ciclos mientras que es la ECm tanto en la CA como en PA siendo la menos considerada en dos ciclos del último de los tópicos. Solo en PA la ECV es promocionada con porcentajes de tareas que entre ciclos varían descendentemente. Y, a nivel global, es una ECM promovida no descendentemente, es la predominante en un ciclo (C2) y un tópico (MA) y en ninguno es la menos contemplada.

Si nos fijamos en los ciclos en los que hay mayor y menor porcentaje de tareas en las que la ECV está presente (tabla 6.27), el análisis global indica que en para el primer grupo de libros PA y C2 es donde hay más porcentaje para CV y ES, mientras que lo es en MA y C3 para EA. En el segundo grupo, una de las editoriales (CSM) considera el mayor porcentaje en CA y C2 mientras que la otra (ESM) lo hace en MA y C3. En el último grupo, al igual que en el segundo, PA y C1 es donde está el menor porcentaje pero el mayor es incluido en CA y C3. Con respecto a donde VIS es promovida con el menor porcentaje de tareas, en el primer grupo las editoriales CV y ES lo hacen en MA y C mientras que EA lo considera en CA y C2; y en el segundo y tercer grupo es contemplado en PA y C1.

<i>Análisis comparativo por editorial. Global. Mayor y menor uso de estructuras de control VIS</i>			
Grupo	MÍN	+	-
	Ed	(T,C)	(T,C)
1	CV	(PA,C2)	(MA,C3)
	EA	(MA,C3)	(CA,C2)
	ES	(PA,C2)	(MA,C3)
2	CSM	(CA,C2)	(PA,C1)
	ESM	(MA,C3)	(PA,C1)
3	CS	(CA,C3)	(PA,C1)

Tabla 6.27. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la ECV

En la tabla 6.28 se condensa la información presentada en los análisis local y global. Cada estructura de control visual es caracterizada en función de cuatro aspectos, a saber: los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la complejidad en cuestión (ECM, ECI y ECm), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis comparativo por editorial. ECV. Local y global. Síntesis</i>									
G	Edit.	Análisis local						Análisis global	
		CA		MA		PA		Promoción	(Imp, Ínf)
		Promoción	(Imp, Ínf)	Promoción	(Imp, Ínf)	Promoción	(Imp, Ínf)	Promoción	(Imp, Ínf)
1	CV	ECI+ND	(1,0)	ECM+D	(2,1)	ECM+D	(2,1)	ECM+ND	(5,0)
	ES	ECM+ND	(3,0)	ECM+ND	(2,0)	ECM+ND	(2,0)	ECM+ND	(6,0)
	EA	ECM+ND	(3,0)	ECM+ND	(2,0)	ECI+ND	(1,0)	ECM+ND	(6,0)
2	CSM	ECM+ND	(3,0)	ECI+ND	(1,0)	ECI+ND	(1,1)	ECM+D	(5, 1)
	ESM	ECI+ND	(1,0)	ECI+ND	(1,1)	ECm+ND	(0,1)	ECM+ND	(4, 0)
3	CS	ECm+ ND	(0,0)	ECM+ND	(3,0)	ECm+D	(0,2)	ECM+ND	(2,0)

Tabla 6.28. Caracterización por editoriales de la estructura de ECV (análisis local y global)

En conclusión, el análisis global demuestra que el primer grupo (G1) de editoriales genera mayores condiciones para promover una ECV que el segundo (G2) y éste que el tercero (G3). Y, el análisis local permite afirmar que en G1 es la CA y la MA donde las editoriales españolas inducen mejores condiciones que la colombiana, mientras que en PA una de

las españolas es quien lo hace sobre la colombiana y ésta sobre la segunda de las españolas. En cuanto a G2 en todos los tópicos la colombiana se impone sobre la española.

Estructura de control discursiva. El análisis global demuestra que todas las editoriales españolas la incluyen con menos del 10% de las tareas en uno de los ciclos (C1) mientras que solo una lo hace en más de la mitad de las tareas (y solo en uno de los tópicos). Por su parte, las editoriales colombianas en ningún caso el porcentaje es inferior al 10% y en la mayoría de ellas, y al menos en un ciclo o un tópico, es mayor del 50% (2 tópicos y 1 ciclo en una y 1 ciclo en la otra). En cuanto al análisis local, evidencia que la ECD es promovida en la CA en más de la mitad de las tareas en uno o en todos los ciclos de la mayoría de las editoriales colombianas mientras que en ninguna de las españolas sucede de tal forma. Además, en un ciclo de cada editorial española el porcentaje no supera el 10%. Para la MA sucede así solo en un ciclo de dos editoriales colombianas mientras que en PA una editorial de cada país lo hace en todos los ciclos y dos editoriales colombianas junto a otra española lo hacen en uno.

Igual que en la estructura de control anterior las editoriales pueden ser consideradas en tres categorías. La primera conformada por una de las editoriales colombianas (CS), la segunda por dos colombianas y una española (CSM, CV y ESM) y la tercera por dos españolas (ES y EA).

El primer grupo se caracteriza porque la ECD es una ECM en la mayoría de los tópicos tanto en el análisis local como en el análisis global. Para CS es una ECM en la CA y en PA mientras que en la MA es una ECm, y que en la MA y en PA se promueve con porcentajes de tareas que entre ciclos no descienden mientras que en la CA se hace descendientemente. Asimismo es la estructura más considerada en todos los ciclos de la CA y de PA pero en ninguno de MA, y no es la menos incluida en ninguno de los ciclos de ninguno de los tópicos. A nivel global, es una ECM promovida de un ciclo al siguiente de forma descendente y es la más contemplada en la mayoría de los ciclos (C1 y C3) y de los tópicos (CA y PA) pero en ningún caso es la menos considerada.

El segundo grupo está determinado por las editoriales donde a nivel global y por lo menos en uno de los tópicos a nivel local la ECD es una ECI promovida entre ciclos con porcentajes que no decrecen.

El análisis local comprueba que CV induce la ECD como una ECM en todos los tópicos mientras que las editoriales CSM y ESM lo hacen solo en uno. En el primer caso, en PA (en la CA es una ECm y en la MA una ECM) y en el segundo en la CA (en la MA es una ECm y en PA es una ECM). En cuanto al tópico donde se contempla la cantidad de área, las editoriales CV y ESM la promueven como la estructura predominante y la menor en uno de los ciclos mientras que CSM en ningún caso lo hace de tal forma. En cuanto a la MA, mientras que en CSM es la más incluida en dos ciclos y en ninguno es la menos considerada, en CV es la menos contemplada en un ciclo y la más incluida en otro, y en

ESM es la menor en uno y la mayor en ninguno. Y, a nivel global, en CV y ESM, es la estructura de control más incluida en uno de los ciclos (C3) o en uno de los tópicos (PA) respectivamente y la menos contemplada en uno de los ciclos (C1); en CSM es la predominante en uno de los tópicos (PA) pero en ninguno es la menor.

En el tercer grupo la ECD es una ECm en el análisis global y en la mayoría de los tópicos en el local siendo promovida no descendientemente en todos los tópicos (análisis local) y en todos los ciclos (análisis global). El análisis local evidencia que en ES, es una ECm en todos los tópicos mientras que en EA lo es en la CA y en la MA (en PA es una ECI). En la CA y en la MA, ninguna de las editoriales promueve esta estructura de control como la predominante y en PA solo en EA se considera así (un ciclo), mientras que en ambas editoriales es la menor solo en uno de los ciclos de la CA. A nivel global, las dos editoriales la incluyen como la estructura de control menor en uno de los ciclos (C1) y en ninguno es la predominante.

En cuanto a dónde cada una de las editoriales promueve los mayores y menores porcentajes de tareas en las que la ECD es la más contemplada (tabla 6.29), el análisis global indica que en el primer grupo PA y C1 es donde más se hace y la MA y C3 donde menos. En el segundo grupo, el tópico donde más se considera es PA (una editorial española y otra colombiana) seguido de la MA (una colombiana), y donde menos es CA (1 española y una colombiana) seguido de PA (una colombiana). Y, a nivel de ciclos, C1 es donde las tres editoriales menormente contemplan a la ECD, mientras que en C3 (editoriales colombianas) seguido de C2 (editorial española) es donde más se hace. Y, en el último de los grupos, en las dos editoriales es PA donde están los porcentajes más altos que la inducen y en la MA los más bajos; C1 y C2, por su parte, son los ciclos donde están los más altos porcentajes mientras que los menores están en C3 y C2.

<i>Análisis comparativo por editorial. Global. Mayor y menor uso de estructuras de control DIS</i>			
Grupo	MÍN	+	-
	Ed	(T,C)	(T,C)
1	CS	(PA,C1)	(MA,C3)
2	CSM	(PA,C3)	(CA,C1)
	CV	(MA,C3)	(PA,C1)
3	ESM	(PA,C2)	(CA,C1)
	ES	(PA,C1)	(MA,C3)
	EA	(PA,C2)	(MA,C2)

Tabla 6.29. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la ECD

A manera de síntesis, en la tabla 6.30 se muestra cómo las editoriales analizadas consideran DIS para guiar los tipos de visualización a contemplar en el tratamiento del área.

<i>Análisis comparativo por editorial. ECD. Local y global. Síntesis</i>									
G	Edit.	Análisis local						Análisis global	
		CA		MA		PA		Promoción	(Imp, Inf)
		Promoción	(Imp, Inf)	Promoción	(Imp, Inf)	Promoción	(Imp, Inf)		
1	CS	ECM+D	(3,0)	ECm+ND	(0,0)	ECM+ND	(3,0)	ECM+D	(4, 0)
2	CSM	ECm+ND	(0,0)	ECM+ND	(2,0)	ECI+ND	(1,1)	ECI+ND	(1, 0)
	CV	ECI+ND	(1,1)	ECI+ND	(1,1)	ECI+ND	(1,0)	ECI+ND	(1, 1)
	ESM	ECI+ND	(1,1)	ECm+ND	(0,1)	ECM+ND	(3,0)	ECI+ND	(1, 1)
3	ES	ECm+ND	(0,1)	ECm+ND	(0,0)	ECm+ND	(0,0)	ECm+ND	(0; 1)
	EA	ECm+ND	(0,1)	ECm+ND	(0,0)	ECI+ND	(1,0)	ECm+ND	(0, 1)

Tabla 6.30. Caracterización por editoriales de la ECD (análisis local y global)

En conclusión, el análisis global demuestra que el primer grupo de editoriales (G1: 1 editorial colombiana) es quien promueve las mejores condiciones para que la ECD sea incluida seguido del segundo grupo (G2: 2 colombianas y 1 española), mientras que el tercer grupo (G3: 2 españolas) es donde menos se considera. En cuanto al análisis local, evidencia que en G2, la MA y PA las editoriales colombianas incluyen a la ECD en condiciones más propicias que la española mientras que en la CA una colombiana y una española lo hacen de igual forma y en mejor condición que la segunda de las colombianas. Y, que en G3 es incluida en las dos editoriales españolas en igualdad de condiciones tanto en la CA como en la MA mas no en PA.

Estructura de control por iconismo. En ninguno de los tópicos ni de los ciclos de ninguna de las editoriales es incluida en más de la mitad de las tareas. Todas las editoriales españolas en la mayoría de los ciclos y tópicos (salvo en el primer ciclo donde ninguna lo hace) la contemplan con menos del 10% de las tareas, mientras que en las colombianas solo una lo hace de tal forma y el resto o la consideran e tal forma a lo sumo en tres de los ciclos y/o tópicos, o en solo uno de ellos. Y, el análisis local demuestra que en la CA, la mayoría de las editoriales la consideran de forma similar siendo en ningún caso incluida con porcentajes mayores del 50% pero sí con menos o alrededor del 10% (en al menos un ciclo). Solo en una editorial (colombiana) el porcentaje es superior al 10% en todos los ciclos pero siempre inferior del 50%. Para la MA, para todas las editoriales aparece en todos o la mayoría de los ciclos en menos del 10% de las tareas y solo en una de ellas (española), y únicamente en un ciclo, es contemplada con más de la mitad de las tareas. En cuanto a PA, solo una editorial de cada país la considera en más del 50% (o en el 50%) de las tareas en uno de los ciclos y una de las españolas en menos del 10% en uno de los ciclos.

Igual que en los dos casos anteriores las editoriales analizadas son asumidas en tres grupos: el primero conformado por una de las editoriales españolas (ESM), el segundo por una colombiana y dos españolas (CS, ES y EA) y el tercero por dos colombianas (CSM y CV).

El primero se caracteriza porque la EC_{Ico} es una ECI tanto en el análisis global como en todos los tópicos para el análisis local siendo la estructura de control predominante solo

en uno de los ciclos tanto a nivel global como local. Es promovida entre ciclos con porcentajes que no descienden en la CA y la MA mientras que se considera descendente en PA. A nivel global, también es considerada no descendente. Asimismo, es la estructura de control menos promocionada en la mayoría de los ciclos de la CA y de PA mientras que lo es así solo en uno de la MA; y a nivel global se considera de esta forma en todos los tópicos y en la mayoría de los ciclos (salvo C1).

El segundo grupo se caracteriza porque en el análisis local no es la estructura de control predominante en ninguno de los ciclos, y a nivel global en ninguno de los ciclos ni de los tópicos. Es, pues, una ECm de ambos niveles de análisis. A nivel local, CS y EA inducen la ECico descendente en uno de los tópicos (MA y CA respectivamente) mientras que en todos la tercera editorial la considera no descendente. Lo mismo sucede en PA, para EA, mientras que en CS no es considerada en PA. Por otra parte, mientras que en CS, es la estructura de control menos incluida en los tres ciclos de todos los tópicos, las editoriales españolas lo son en dos; y a nivel global, CS es la menos promocionada en todos los ciclos y tópicos mientras que el único lugar donde las editoriales españolas no lo contemplan sí es en C1.

En el tercer grupo, a nivel global la ECico es una ECm y a nivel local también lo es en la mayoría de los tópicos pero no en todos. En este grupo de editoriales cuando la ECico no es una ECm entonces es una ECI. A nivel local, no es una ECm en PA de CSM y en la CA de CV. Por otra parte, mientras que en PA es promovida entre ciclos de forma descendente en CSM y no es tenida en cuenta en CV; en la CA y en la MA es contemplada no descendente. En dos de los tópicos cada una de las editoriales promueve la ECico como la estructura de control menor en todos los ciclos y no es la predominante en ninguno (CA y MA en CSM; y MA y PA en CV). Al contrario, en PA de CSM y en la CA de CV, es la predominante en un ciclo y la menor en dos. A nivel global, las dos editoriales contemplan la ECico no descendente siendo además la menos considerada en todos los tópicos. A nivel de ciclos, CSM la asume como la estructura de control menor en todos mientras que CV lo hace en solo dos (menos en C1).

En cuanto a dónde promueve cada una de las editoriales los mayores y menores porcentajes de tareas en las que la ECico es contemplada (tabla 6.31), el análisis global indica que en el primer grupo la CA y C1 es donde más se hace y PA y C2 donde menos se considera. En el segundo grupo, todas las editoriales utilizan los mayores porcentajes de tareas que inducen a la ECico en la CA y C1, mientras que los menores están PA y C2 (una editorial colombiana y una española) y en la MA y C3 (una editorial). Y en el último de los grupos, en C1 ambas editoriales consideran el porcentaje mayor de tareas y en C2 el menor. Y a nivel de tópicos, PA y la CA es donde cada una de las editoriales más lo contemplan y en la MA y PA donde menos se hace.

<i>Análisis comparativo por editorial. Global. Mayor y menor uso de estructuras de control ICO</i>			
Grupo	MÍN	+	-
	Ed	(T,C)	(T,C)
1	ESM	(CA,C1)	(PA,C2)
2	CS	(CA,C1)	(PA,C2)
	ES	(CA,C1)	(PA,C2)
3	EA	(CA,C1)	(MA,C3)
	CSM	(PA,C1)	(MA,C2)
	CV	(CA,C1)	(PA,C2)

Tabla 6.31. Porcentajes mayores y menores de tareas que inducen la ECico

A manera de síntesis en la tabla 6.32 se muestra cómo las editoriales analizadas consideran la estructura de control ICO para guiar los tipos de visualización a contemplar en el estudio de las tareas de área que en ellos se induce.

<i>Análisis comparativo por editorial. ECico. Local y global. Síntesis</i>									
G	Edit.	Análisis local						Análisis global	
		CA		MA		PA		Promoción	(Imp, Inf)
		Promoción	(Imp, Inf)	Promoción	(Imp, Inf)	Promoción	(Imp, Inf)	Promoción	(Imp, Inf)
1	ESM	ECI+ND	(1,2)	ECI+ND	(1,1)	ECI+D	(1,2)	ECI+ND	(1, 5)
2	CS	ECm+ND	(0,3)	ECm+D	(0,3)	ECm+-	(0,3)	ECm+ND	(0,6)
	ES	ECm+ND	(0,2)	ECm+ND	(0,2)	ECm+ND	(0,2)	ECm+ND	(0,5)
	EA	ECm+D	(0,2)	ECm+ND	(0,2)	ECm+ND	(0,2)	ECm+D	(0,5)
3	CSM	ECm+ND	(0,3)	ECmND	(0,3)	ECI+D	(1,2)	ECm+ND	(0,6)
	CV	ECI+ND	(1,2)	ECm+ND	(0,3)	ECm+-	(0,3)	ECm+ND	(0,5)

Tabla 6.32. Caracterización por editoriales de la ECico (análisis local y global)

En conclusión, el análisis global demuestra que la ECico es entre todas las estructuras de control analizadas en la investigación la que se incluye en condiciones menos propicias. Pero, es en el primer grupo de editoriales (G1) donde lo es en menor medida mientras que en los dos grupos restantes (G2 y G3) se considera de forma similar. En cuanto al análisis local, evidencia que en G2 las editoriales españolas promueven en todos los tópicos condiciones más propicias que la colombiana para que la ECico sea promovida. Mientras que en G3 las dos editoriales lo hacen de igual forma solo en la MA.

6.3 Análisis comparativo por países: estructuras de control visual.

En este apartado abordamos la última de las cuestiones consideradas en el capítulo: ¿Qué similitudes y diferencias hay en la forma en que los libros colombianos y españoles recurren a las estructuras y tipos de control visual al tratar el concepto de área? Igual que en los apartados previos se caracterizará, en primera instancia cómo las tres estructuras de control visual son contempladas de un país a otro; y luego se sintetizará la información y se plantearán algunas conclusiones de los datos extraídos.

6.3.1 Caracterización de tareas por países

Independientemente del tópico y del ciclo educativo se presenta en la tabla 6.33 las frecuencias y porcentajes de las tareas de los textos colombianos y españoles que consideran cada estructura de control.

<i>Análisis comparativo por países. Estructuras de control visual- 2561 tareas</i>				
Estructuras	Colombia		España	
	Frec	%	Frec	%
ECV	605	47.23	856	66.87
ECIco	144	11.24	78	6.09
ECD	532	41.53	346	27.03
Total	1.281	100	1.280	99.99

Tabla 6.33. Estructuras de control (Colombianos vs España)

En los libros colombianos y españoles la ECV, primero, la ECD, segundo, son las más consideradas mientras que la ECIco es la menos contemplada. Un desequilibrio entre el alto número de tareas que incluyen la primera de las estructuras y el pequeño que promueven a la tercera se percibe en los libros de ambos países, siendo en los españoles donde es mayor. En los libros colombianos las tareas que incluyen una ECD y una ECIco son contempladas con mayores porcentajes que en los españoles mientras que las que promocionan la ECV lo son más en los españoles que en los colombianos.

Lo anterior indica que los libros de ambos países promueven el desarrollo de la visualización de forma considerable pero privilegiándose aspectos de naturaleza distinta. Mientras que en los españoles se enfatiza con más de las dos terceras partes de la tareas donde la visibilidad es asumida como un el elemento de control que determina el grado de potencia heurística de una figura, en los colombianos se considera con porcentajes similares al de las tareas donde el aprendizaje de la deconstrucción dimensional de formas es inducido a través, y exclusivamente, de la lengua natural. En cuanto a las dificultades que induce el iconismo como el elemento de control, es más en los libros colombianos que en los españoles donde se incluyen.

Análisis local. Para CA (Tabla 6.34), en los libros españoles la ECV es incluida en la mayor parte de las tareas en todos los ciclos mientras que en los colombianos sucede así en dos de los ciclos y en un tercero es la ECD quien se considera de tal forma. La ECIco es la menor en todos los ciclos para el caso colombiano y en dos en el español mientras que la ECD es la menor en un ciclo. En cuanto al desequilibrio entre las tareas que inducen la ECV y la ECIco persiste de un país a otro y en todos los ciclos, pero, en la mayoría de los ciclos es mayor para los libros españoles que para los colombianos.

Lo anterior demuestra que la ECV es la más incluida en los libros españoles que en los colombianos, que en un ciclo, y solo para el caso colombiano, la ECD es la más promocionada y que la ECIco, independientemente del país y del ciclo, es la menos contemplada. Y que si bien el iconismo es poco contemplado en ambos países, es en el

colombiano donde más se incluye; por tanto, donde más opciones hay de que dificultades asociadas al uso de este elemento de control sean inducidas.

Así, pues, en la CA ambos países promueven el desarrollo visual pero de forma distinta. Mientras que los libros españoles se enfatiza que la visibilidad es el factor que determina el grado de potencia heurístico de una figura, los colombianos, en al menos un ciclo, hacen lo propio con que la deconstrucción dimensional de formas se hace necesariamente en articulación con una actividad discursiva.

<i>Análisis comparativo por países. Local. Estructuras de control visual. CA-1451 tareas</i>												
Estructuras	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
ECV	116	38.28	52	57.14	174	49.43	194	67.59	84	37.17	114	59.37
ECIco	77	25.41	32	35.16	26	7.39	12	4.18	22	9.73	11	5.73
ECD	110	36.30	7	7.69	152	43.18	81	28.22	120	53.1	67	34.89
Total	303	99.99	91	99.99	352	100	287	99.99	226	100	192	99.99

Tabla 6.34. Tareas CA (Colombia vs España). Análisis local

Solo en el segundo ciclo el orden en que las estructuras de control son incluidas es igual en los libros de ambos países. Mientras que en el caso colombiano cerca de la mitad de las tareas consideran a la ECV en el español cerca del 70% lo hacen. Por otro lado, la ECD está representado por un porcentaje mayor de tareas en los libros colombianos que en los españoles, y el porcentaje de tareas que incluyen la ECIco es menor del 8% en ambos casos.

En los dos ciclos restantes el comportamiento varía de un país a otro. En el primero la ECV es la predominante en ambos países pero en el colombiano la ECD es la segunda más tenida en cuenta y la ECIco la menor; en el español, el orden se invierte. En el tercer ciclo la ECD es la predominante en el caso colombiano mientras que en el español la ECV tiene tal característica; y en ambos caso la ECIco es la menos promovida.

La ECV siempre es incluida en más de la mitad de las tareas en los libros españoles mientras que la ECIco lo es con valores despreciables solo en uno de los ciclos; al contrario, en los colombianos las tareas que promueven la primera estructura nunca superan la mitad, y las que incluyen a la segunda lo hacen con porcentajes no despreciables. En lo relativo a la ECD solo en el tercer ciclo del caso colombiano se incluye en más del 50% de las tareas y en los demás casos se considera en menos de la mitad de las tareas pero con porcentajes mayores al 10%.

Al contemplar dónde las estructuras de control se consideran con los mayores porcentajes de tareas se evidencia similitudes en ambos países siendo en el segundo ciclo donde la ECV más se incluye y el primero donde lo es para la ECIco. En cuando a dónde se incluye el menor porcentaje de tareas son el tercer (caso colombiano) y primer ciclo (caso español) para la ECV, y el segundo (caso colombiano) y el tercero (caso español) para

la ECICo. En la ECD los ciclos donde están los mayores y menores porcentajes de tareas se consideran de forma inversa, el primero y el segundo según el caso.

En conclusión en ambos países las estructuras de control son incluidas entre ciclos de igual forma pero mientras que la ECV y la ECICo se consideran cíclicamente, la ECD se asume ascendentemente; y en ambos países la ECV es la ECM y la ECICo es la ECM; en cuanto a la ECD es una ECI en el caso colombiano y una ECM en el español que en ningún representa a la estructura de control menor.

En la MA (tabla 6. 35), en todos los ciclos para los libros colombianos y en la mayoría para los españoles (en uno la medida de área no es considerada) la ECV es contemplada con el mayor porcentaje de tareas y la ECICo con el menor. Esto demuestra que el desarrollo de la visualización se promueve en los libros de ambos países y se considera de forma similar, enfatizándose un mayor número de tareas donde la visibilidad es quien determina el grado de potencia en heurístico de una figura, que aquellas donde se induce que la deconstrucción dimensional de formas se hace en articulación con una actividad discursiva.

En cuanto al desequilibrio entre las tareas que inducen las ECV y la ECICo también persiste en todos los ciclos de este tópico y en ambos países, siendo mayoritariamente enfatizado en dos de los ciclos en los libros españoles y solo en uno de los colombianos. Esto demuestra que si bien el iconismo es poco contemplado en ambos países, es en el colombiano donde más se incluye, en consecuencia donde más opciones de que introduzcan dificultades asociadas al uso de este elemento de control y que obstaculizan el estudio de las figuras y el desarrollo visual.

<i>Análisis comparativo por países. Local. Estructura de control visual. MA-913 tareas</i>												
Estructuras	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
ECV	39	58.21	0	0	113	63.13	32	74.42	53	58.89	387	72.47
ECICo	2	2.98	0	0	4	2.23	2	4.65	7	7.78	16	3
ECD	26	38.8	0	0	62	34.64	9	20.93	30	33.33	131	24.53
Total	67	99.99	0	0	179	100	43	100	90	100	534	100

Tabla 6.35. Tareas MA (Colombia vs España). Análisis local

Independientemente del país y en todos los ciclos donde la MA es tratada la ECV es incluida en más de la mitad de las tareas siendo en el caso español donde se considera con mayores porcentajes. En el caso colombiano el porcentaje más alto de tareas que la promueven está en el segundo ciclo mientras que el menor aparece en el primero; y en el español, el mayor está en el segundo ciclo y el menor en el tercero.

En cuanto a la ECICo solo se incluye con porcentajes inferiores al 10% en los libros de ambos países siendo en los colombianos y en la mayoría de los ciclos donde más se contempla. Pero, es en el tercero donde los libros colombianos introducen el mayor

porcentaje de tareas que le promueven mientras que en los demás, así como en todos donde los libros españoles lo consideran, se hace a través de porcentajes despreciables.

La ECD se tiene en cuenta en la tercera parte, o más de la tercera parte, de las tareas en todos los ciclos para el caso colombiano y en el español es así en uno de los ciclos. En todos los ciclos el porcentaje es mayor en los libros colombianos que en los españoles, y es en el primer y el tercer ciclo donde están, respectivamente, los mayores y menores porcentajes para el caso colombiano, y en el segundo y tercero sucede igual para el español.

A la vista de los resultados previos, se concluye que en los libros de ambos países la ECV es la ECM (predominante en todos los ciclos) mientras que la ECD y la ECICo son las ECM siendo la última de ellas quien siempre se incluye con el menor porcentaje de tareas; y mientras que la ECV y la ECICo son incluidas de igual forma en ambos países (cíclicamente) la ECD lo es de forma diferente (descendente en el caso colombiano y cíclica en el español).

En PA (tabla 6.36), mientras que en el caso colombiano la ECV y la ECD son incluidas con los mayores porcentajes en dos ciclos, la ECV lo es con el más bajo en uno y la ECICo en los dos restantes; en el español, la ECD es la más incluida en la mayor parte de los ciclos y tanto la ECV como la ECICo en solo uno.

En lo relativo al desequilibrio entre las tareas que inducen las ECV y la ECICo, a diferencia de los tópicos anteriores, no se mantiene en solo uno de los ciclos y para el caso español. En los ciclos donde el desequilibrio persiste son los libros españoles quienes más lo enfatizan.

Los resultados anteriores indican, por un lado, que mientras que en los libros colombianos enfatizan tanto que la visibilidad determina el grado de potencia heurístico de una figura, como que la deconstrucción dimensional de formas se hace en articulación con una actividad discursiva; en los españoles, el segundo de estos aspectos es más considerado. Y, por otro lado, que en la mayoría de los ciclos los libros españoles son quienes más contribuyen a que el iconismo sea un elemento de control. Por tanto, el desarrollo visual es promovido en mejores condiciones en los libros colombianos que en los españoles. Entonces, la forma como las estructuras de control son promovidas conlleva a que el desarrollo visual sea contemplado en condiciones y de manera totalmente distinta al resto de tópicos.

<i>Análisis comparativo por países. Local. Estructuras de control visual. PA-197 tareas</i>												
Estructuras	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
ECV	10	40	0	0	12	50	21	46.67	4	26.67	56	65.12
ECIco	6	24	1	50	0	0	0	0	0	0	4	4.65
ECD	9	36	1	50	12	50	24	53.33	11	73.33	26	30.23
Total	25	100	2	100	24	100	45	100	15	100	86	100

Tabla 6.36. Tareas PA (Colombia vs España). Análisis local

Al contemplar cómo se promueven las estructuras de control también se evidencian diferencias de un país a otro. Mientras que en los libros colombianos la ECD es incluida con porcentajes de tareas que aumentan entre ciclos, la ECIco se hace de forma decreciente y la ECV cíclicamente; en los españoles se considera de forma cíclica en las dos primeras y ascendentemente en la última.

Tampoco existen similitudes en cuanto a dónde la ECV y la ECD son consideradas con el más alto porcentaje de tareas. En Colombia es en el segundo ciclo para la primera de las estructuras y el tercero para la segunda; y en España lo es en el tercero para la ECV y el segundo para la ECD. En ambos casos y en ambos países con la mitad, o más de la mitad, de las tareas. El porcentaje menor de tareas en el caso colombiano está presente en el tercer ciclo para la ECV y en el primero para la ECD; y en el español en el primer y tercer ciclo respectivamente. Por último, en ambos países la ECIco es incluida con el más alto porcentaje en el primer ciclo para ambos países pero nunca con más de la mitad de las tareas, y no es contemplado en el segundo ciclo de España y en el segundo y tercero en Colombia.

La ECV en los libros colombianos es contemplada en todos los ciclos con porcentajes de tareas entre el 26.67% y el 50%, mientras que los españoles lo hacen en solo dos ciclos con porcentajes entre el 46.67% y el 65.12%. La ECIco en el caso colombiano es incluida solo en un ciclo y con la cuarta parte de las tareas. En el español está presente en dos ciclos; en uno con la mitad de las tareas y en el otro solo con el 4.65% de ellas. Finalmente, la ECD el porcentaje varía en el caso colombiano entre el 36 y el 73.33% y en el español entre el 30.25% y el 53.33%.

Estos resultados demuestran que en el estudio de las relaciones entre el perímetro y el área las ECV y la ECD son incluidas de forma distinta de un país a otro. En el caso colombiano son en ese orden la ECM (predominantes en dos ciclos), mientras que en los españoles son la ECI y la ECM esta última la predominante en dos de los ciclos. La ECIco es la ECM en el caso colombiano (la menor en dos ciclos) y la ECI en el español. En lo relativo a cómo son incluidas entre ciclos todas se consideran de forma distinta de un país a otro.

Análisis global. A nivel de tópicos (tabla 6.37) en todos la ECV es la más promovida en los libros españoles y solo en la medida de área para los colombianos, mientras que la ECD lo es en la cantidad de área y en la relación perímetro-área para los colombianos y la ECico es la menos contemplada en todos los tópicos para los libros de ambos países. En cuanto al desequilibrio entre un alto porcentaje de tareas que incluyen la ECV y uno menor donde la ECico es la contemplada persiste en todos los tópicos para los libros de ambos países; pero, es en los españoles donde siempre es mayor. Entonces, la visualización es promovida de forma significativa en los libros de ambos países pero en uno y otro caso se enfatiza aspectos de naturaleza distinta. En los libros colombianos que la deconstrucción dimensional de formas ha de considerarse articulada con una actividad discursiva; y en los españoles que la visibilidad determina el grado de productividad heurística de una figura. Cuestiones ambas determinantes para que la visualización pueda ser desarrollada.

<i>Análisis comparativo por países. Global. Tópicos. Estructuras de control visual. 2.561 tareas</i>												
Estructuras	CA				MA				PA			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
ECV	374	42.45	360	63.16	205	61.01	419	72.62	26	40.62	77	57.89
ECico	125	14.19	55	9.65	13	3.87	18	3.12	6	9.37	5	3.76
ECD	382	43.36	155	27.19	118	35.12	140	24.26	32	50	51	38.34
Total	881	100	570	100	336	100	577	98.44	64	99.99	133	99.99

Tabla 6.37. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por tópicos

En los libros de los dos países, la ECico es la menos contemplada en MA y PA con porcentajes inferiores al 10% mientras que en CA esta particularidad está presente solo en el caso español y en el colombiano tal porcentaje es del 14.15%. La ECV, en el caso español es contemplada en más de la mitad de las tareas de los tres tópicos, y en el colombiano solo en uno (MA) y en los otros tópicos se considera en alrededor del 40% de las tareas. Con respecto a la ECD, en España es considerado entre el 24.26% y el 38.34% mientras que en colombiano solo en uno de los tópicos (MA) el porcentaje de tareas está en dicho intervalo, en los tópicos restantes es superior al 43%.

En cuanto a en qué tópicos se contemplan el mayor y menor porcentaje de tareas que inducen cada una de las estructuras, los libros de los dos países se comportan de igual forma: MA es donde el porcentaje de tareas es mayor para la ECV, CA para lo es para la ECico y PA para la ECD y en PA está el menor porcentaje de tareas para la ECV y MA tanto para la ECico como para la ECD.

Y a nivel de ciclos (tabla 6.38), en los libros de ambos países la ECV es la predominante en todos y la ECico la menor en dos ciclos (C2 y C3) en los españoles y en todos en los colombianos, y la ECD solo lo es en uno (C1) para los españoles.

Análisis comparativo por países. Global. Ciclos. Complejidad visual y desarrollo de visualización. 2.561 tareas

Estructuras	C1				C2				C3			
	Col.		Esp.		Col.		Esp.		Col.		Esp.	
	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%	F	%
ECV	165	41.77	52	55.91	299	53.87	247	65.87	141	42.6	557	68.60
ECIco	85	21.52	33	35.48	30	5.40	14	3.73	29	8.76	31	3.82
ECD	145	36.71	8	8.6	226	40.72	114	30.4	161	48.64	224	27.59
Total	395	100	93	99.99	555	99.99	375	100	331	100	812	100

Tabla 6.38. Tareas (Colombia vs España). Análisis global por ciclos

La ECV es incluida en los libros españoles con porcentajes de tareas que ascienden a medida que los ciclos aumentan y de forma cíclica en los colombianos, la ECIco lo es cíclicamente en ambos casos y la ECD cíclicamente en el primero y ascendente en el segundo. Para la ECIco, en ambos países el primer ciclo es donde se consideran el mayor porcentaje de tareas siendo en el caso español donde más se contempla, mientras que en el segundo ciclo está el menor siendo en los libros colombianos donde más se incluye. Es contemplado con el menor porcentaje de tareas que al resto de las estructuras de control en todos los ciclos en los libros colombianos y en la mayoría de los españoles, solo en el primero tal porcentaje es mayor del 10% en uno y otro caso.

En cuanto a la ECV es promovido por más de la mitad de las tareas en todos los ciclos de los libros españoles mientras que en los colombianos sucede en solo el segundo de los ciclos y en los restantes representan alrededor del 40% de las tareas. En el caso español, el segundo ciclo es donde el porcentaje de tareas que inducen la ECV es el más alto y en el primero donde es menor y en el caso colombiano en el segundo y el primer ciclo es donde las tareas que lo consideran están respectivamente en el mayor y menor porcentaje.

En ambos países, la ECD es contemplada con los porcentajes más bajos de tareas en el primer ciclo siendo mayores en los libros colombianos. En el segundo ciclo para los libros españoles y en el tercero para los colombianos es donde está el mayor porcentaje donde los libros colombianos lo consideran con mayores porcentajes que los españoles. En el primer caso, en todos los ciclos menos de la tercera parte de las tareas inducen la ECD, mientras que en el segundo más de la tercera parte lo contemplan.

Los resultados anteriores demuestran que el uso de las estructuras de control visual en los libros está caracterizado por que la ECV es la única ECM en el caso español mientras que tanto la ECV como la ECD lo son en el colombiano. En este sentido, en ambos países la ECV es la que cuenta con las mejores condiciones para ser promovida, la segunda es la ECD (en el caso español solo representa el nivel predominante en uno de los ciclos) y la ECIco es la que menos se considera siendo la menor en todos los ciclos de los libros colombianos y en la mayoría de los españoles; y en todos los tópicos en ambos países. El análisis global también evidencia que en los libros de ambos países todas las estructuras de control son incluidas de un ciclo a otro de la misma forma (no descendientemente).

6.3.2 Síntesis y conclusión.

Estructura de control por visibilidad. Es promocionada en más de la mitad de las tareas en todos los tópicos y ciclos en los libros españoles y solo en un tópico (MA) y un ciclo (C2) de los colombianos. En la CA y en todos los ciclos de los libros españoles se considera en más de la mitad de las tareas mientras que en los colombianos no sucede en ninguno de los ciclos. Para la MA, son los colombianos quienes la consideran así en todos los ciclos y los españoles en dos y en uno no es promovida. Y en PA, en ambos países se incluye de tal forma en solo uno de los ciclos y no se contempla en un ciclo de los libros españoles.

En ambos países se promueve de igual forma en la CA y en la MA siendo la ECM predominante en la mayor parte de los ciclos, incluida con porcentajes que no descienden a medida que los ciclos aumentan y en ninguno caso con el menor porcentaje de tareas. En PA es diferente de un país a otro, mientras que en el español es una ECI que se incluye no descendientemente y que es predominante en un ciclo y la menor en otro; en los colombianos, es una ECM promocionada entre ciclos de forma no descendente y predominante en la mayoría y en ninguno la menor. Lo anterior demuestra que en la CA y la MA los libros de ambos países ofrecen condiciones similares para que la ECV sea promovida, y solo en PA son los colombianos quienes generan mejores condiciones que los españoles.

A nivel global, si bien en ambos países es una ECM incluida con porcentajes que no descienden a medida que los ciclos aumentan y que no es promocionada con el menor porcentaje en ninguno de los tópicos ni de los ciclos; es en los españoles donde se las condiciones para que sea promovida son mejores puesto en todos los ciclos y tópicos es la estructura de control predominante mientras que en los colombianos no sucede en dos de los tópicos o ciclos.

Para ambos países la MA y la PA son los tópicos donde el porcentaje de tareas que promueven a la ECV es mayor y menor respectivamente. En el primer ciclo, por su parte, es donde aparece el menor porcentaje de tareas. En cuanto al ciclo donde está el mayor, es el segundo en el caso colombiano y el tercero en el español.

Estructura de control por iconismo. En dos ciclos (C2 y C3) para ambos países y en dos tópicos en el caso colombiano (MA y PA) y en todos del español, menos del 10% de las tareas consideran esta estructura de control. En la CA es promocionada en menos del 10% de las tareas en dos de los ciclos de los libros de ambos países y en la MA en todos los ciclos en el caso colombiano y en dos del español (en el tercero no es considerada); y en PA, tanto para el caso colombiano como el español lo es en un ciclo (en uno del colombiano y en dos del español no se contempla).

También en esta estructura de control los libros colombianos y españoles proceden de forma similar en los tópicos CA y MA donde es la ECm que varía entre ciclos de forma no descendente es la menos incluida en la mayoría (España) o en todos (Colombia). En PA, en los colombianos es una ECm considerada descendentemente siendo la estructura menor en todos los ciclos; en los españoles es una ECI que entre ciclos se promueve de forma no descendente y que es la predominante en un ciclo y menor en dos. Esto evidencia que todos los tópicos los libros españoles promueven mejores condiciones que los colombianos para que la ECico sea promovida.

En lo relativo al análisis global para ambos países la CA y en C1 son los lugares donde el porcentaje de tareas que promueven la ECico es mayor mientras que en la MA y en C2 es donde está el menor. Además, tanto en los libros colombianos como españoles la ECico es una ECm que se incluye con porcentajes de tareas que no disminuyen de un ciclo al siguiente. Pero, mientras que en el caso colombiano siempre es considerada con el menor porcentaje de tareas, en el español no sucede así en uno de los ciclos.

Estructura de control discursiva. El análisis global indica que considerada en menos del 10% de las tareas en solo uno de los ciclos (C1) para los libros españoles y en ninguno con más con más de la mitad de las tareas tanto en los colombianos como en los españoles. En la CA es considerada en menos del 10% de las tareas en uno de los ciclos del caso colombiano y en más del 50% en uno del español. En la MA no es contemplada en uno de los ciclos del caso español y en PA más de la mitad de las tareas en dos de los ciclos de los libros de ambos países la asumen como estructura de control.

En esta estructura es PA donde los libros de los dos países se comportan de igual forma: es una ECM, en dos de los ciclos el porcentaje de tareas que le incluyen es el mayor y se tiene en cuenta con porcentajes de tareas que no descienden a medida que los ciclos aumentan. En MA para ambos países es una ECm que en ninguno de los ciclos se incluye con el mayor o menor porcentaje de tareas, pero en cada uno se contempla con porcentajes que varían de un ciclo a otro de forma distinta, mientras que en el caso español se consideran no descendentemente en el colombiano se hace descendentemente. Y en CA si en el caso colombiano es una ECI que en ningún ciclo se incluye con el menor porcentaje de tareas, en el español es una ECm contemplada con el menor porcentaje de tareas en uno de los ciclos. Por otra parte, en los libros de ambos países, la ECD es incluida con porcentajes que no descienden entre ciclos y en ningún caso es la estructura de control predominante.

Lo anterior evidencia que los libros de los dos países generan en relación al resto de estructuras de control las mejores condiciones para que la ECD sea considerada en PA y las menos propicias en la MA. En ambos casos se hace de forma similar. En cuanto a la CA, son los libros colombianos los que proponen mejores condiciones que los españoles para la aplicación de la ECD.

A nivel global, la ECD es incluida en ambos países con porcentajes de tareas que no desciende a medida que los ciclos aumentan; pero, en el caso colombiano es una ECM siendo además la estructura de control predominante en dos de los tópicos o de los ciclos y la menor en ninguno; y en el español es una ECm promovida con el menor porcentaje de tareas en solo uno de ellos mientras que en ninguno es el mayor.

En PA tanto los libros colombianos como españoles consideran el mayor porcentaje de tareas que inducen una ECD. En cuanto a los ciclos donde esto sucede, el tercero es para el caso colombiano y el segundo para el español. Por lo que se refiere a la MA y C1 son los lugares donde los libros de ambos países la promueven con el porcentaje más pequeño de tareas.

De forma sintética se condensa en la tabla 6.39 la información presentada en los análisis local y global, donde cada estructura de control visual es caracterizada en función del país donde pertenecen los libros analizados, los tópicos analizados en la investigación, la naturaleza de la estructura (ECV, ECico y ECD), la forma como se promueve de un ciclo a otro (descendente: D y no descendente: ND) y un par ordenado donde la primera componente del par alude al número de ciclos o tópicos donde la complejidad es la predominante y la segunda donde es la menor.

<i>Análisis comparativo por países. Estructuras de control visual. Local y global. Síntesis</i>					
Grupo	Edit.	Análisis local			Análisis global
		CA	MA	PA	
Naturaleza del nivel de complejidad + forma en que se induce + (# de ciclos donde es imperante, # de ciclos donde es menor)					
ECV	COL	ECM+ND+(2,0)	ECM+ND+(3,0)	ECM+ND+(2,0)	ECM+ND+(4,0)
	ESP	ECM+ND+(3,0)	ECM+ND+(2,0)	ECI+ND+(1,1)	ECM+ND+(6,0)
ECico	COL	ECm+ND+(0,3)	ECm+ND+(0,3)	ECm+D+(0,3)	ECm+ND+(0,6)
	ESP	ECm+ND+(0,2)	ECm+ND+(0,2)	ECI+ND+(1,2)	ECm+ND+(0,5)
ECD	COL	ECI+ND+(1,0)	ECm+D+(0,0)	ECM+ND+(2,0)	ECM+ND+(2,0)
	ESP	ECm+ND+(0,1)	ECm+ND+(0,0)	ECM+ND+(2,0)	ECm+ND+(0,1)

Tabla 6.39. Síntesis de la caracterización de las estructuras de control por país

En resumen, la caracterización anterior demuestra que para ambos países la ECV es quien se incluye en mejores condiciones que el resto de las estructuras de control pero que en la mayoría de los tópicos son los libros colombianos quienes mejor lo consideran mientras que los españoles solo lo hacen en uno. En consecuencia, en la mayor parte de los ciclos los libros colombianos son quienes incluyen en mayor medida a la visibilidad como elemento de control, contribuyendo a que la visibilidad sea asumida como el aspecto que determina el grado de potencia heurístico de las figuras en el estudio de las matemáticas y que promueve el cambio dimensional. Pero, es importante resaltar que en la mayoría de los casos los porcentajes de tareas que en los libros de ambos países consideran la ECV son significativos.

En cuanto a la ECico ambos análisis demuestran que entre todas las estructuras de control es la quien se promueve en las condiciones menos propicias para ambos países pero que son los libros españoles quienes la incluyen en mejores condiciones que los colombianos; por tanto son los primeros quienes contribuyen en mayor grado que el iconismo sea contemplado y, en consecuencia, que las dificultades que para el estudio de la visualización y de las figuras promueven su inclusión sean mayormente enfatizadas. Sin embargo, es importante resaltar que si bien es así, los porcentajes de tareas que lo consideran no suelen ser muy representativos.

La forma como la ECD es considerada en los libros indica que es el segundo tipo de estructura de control cuya consideración es promovida en las mejores condiciones y, que además, solo en uno de los tópicos los libros colombianos la promueven de forma más efectiva que los españoles mientras que en los demás es incluida de igual manera en ambos países. Y, además, que en un tópico es el tipo de estructura cuyas condiciones de promoción son iguales (caso colombiano) o superiores (caso español) a la de la ECV.

Se demuestra pues que los libros contribuyen a que la visualización sea efectivamente desarrollada siendo la visibilidad el elemento control más considerados. Por tanto, el desarrollo visual se enfatiza mediante una manipulación de elementos de visibilidad que aumentan (o disminuyen) el grado de potencia heurística de las figuras, y que en ocasiones propician la deconstrucción dimensional de formas. En cuanto a que la deconstrucción dimensional de formas se hace necesariamente en articulación con una actividad discursiva, o que la reflexión en torno a la aprehensión operatoria debe considerar la designación en lengua natural de las operaciones aplicadas y la caracterización de los flujos visuales en juego, también son incluidos en los libros y son el segundo tipo de tarea más contemplado salvo en PA donde el número de tareas con respecto a los demás tópicos es el menor.

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

Introducción

Esta memoria responde a la preocupación del investigador por indagar cómo los libros de texto de matemáticas promueven el desarrollo de la visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales, y de qué forma lo hacen los libros de distintos países al tratar el concepto de área.

Este trabajo aporta líneas novedosas de investigación por cuanto que:

- Ninguna investigación ha considerado las diferencias y similitudes existentes en los libros colombianos y españoles al promover la enseñanza de las matemáticas.
- No hay estudios que exploren cómo la visualización asociada a las figuras geométricas bidimensionales es considerada en los libros de texto, ni cómo estos materiales ejercen control sobre esta actividad cognitiva.
- No se ha analizado cómo el tratamiento del concepto de área de superficies planas puede promover el desarrollo de la visualización.
- Los libros y el área se posicionan como lugares para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas. Los primeros, al tipificar las propuestas de enseñanza privilegiadas en el aula y dar vida a los lineamientos curriculares de una nación. El segundo, al ser un objeto matemático donde el acto de ver desempeña un papel fundamental para su comprensión y donde la visualización puede ser un objeto de desarrollo.

Estos son los motivos que nos han llevado a interesarnos en el estudio de libros de texto, en particular, cómo promueven el desarrollo de la visualización a través del tratamiento del área de superficies planas. En este sentido, algunas cuestiones de interés que se han tratado de abordar son las siguientes: ¿en los textos escolares la visualización se plantea como un asunto de reflexión en la construcción del área de superficies planas? ¿La visualización asociada a las figuras desempeña un papel determinante en la manera en que los textos escolares construyen el área de superficies planas? De ser así, entonces, ¿qué tipo de tareas, según las exigencias visuales que subyacen a su desarrollo o comprensión, son propuestas por los libros de textos en el estudio del área de superficies planas? ¿En qué tópicos del área se privilegian un tipo de tareas sobre otros? ¿Qué

funciones desempeña la visualización en los capítulos donde los textos escolares construyen el área? ¿Es el área un lugar donde es posible el desarrollo de la visualización o, por el contrario, se recurre a ella sin que medie de manera previa cualquier tipo de reflexión que suscite su adquisición? ¿Son los libros de texto el mejor recurso didáctico para favorecer la construcción del concepto de área de figuras planas a través de la visualización? ¿Cómo y a través de qué estrategias o elementos estos materiales didácticos suscitan el recurso de la visualización en la comprensión y desarrollo de las tareas propuestas sobre el concepto de área?

Hemos partido de los referentes teóricos expuestos por Duval (1995, 1999, 2003, 2004) sobre la visualización asociada a las figuras geométricas que consideran que la visualización no es obvia ni espontánea, que es susceptible de un aprendizaje específico y que adquiere matices distintos según el registro semiótico contemplado; y de la noción de estructura de control de Balacheff y Gaudin (2010) que resalta la existencia de elementos y estrategias que guían las maneras de proceder de los estudiantes al enfrentarse con actividades matemáticas. Hemos comprobado que en los libros de texto la mayoría de los tópicos en que se circunscribe el tratamiento del área permiten que el desarrollo de la visualización sea promovido, que la enseñanza de la visualización es considerada de forma distinta en los libros (y editoriales) de los países en estudio, que los libros ejercen control sobre algunos o todos los elementos constitutivos de la visualización que intervienen en las tareas de área, y que la visualización es considerada a través de distintos niveles de complejidad y promocionada con funciones de distinta naturaleza.

En esta investigación se ha analizado cómo los libros de educación básica de tres editoriales colombianas y tres españolas promueven la enseñanza de la visualización de un ciclo de enseñanza a otro (C1: primer y segundo grado, C2: tercero y cuarto, y C3: quinto y sexto). Tres fueron los tópicos de área considerados en el estudio (definidos en el apartado 3.4.5-categoría 4): cantidad de área (CA), medida de área (MA) y relaciones entre el área y el perímetro (PA); y, la caracterización de los libros se asumió desde tres frentes de diferente naturaleza: desarrollo y complejidad visual (capítulo 4), funciones visuales (capítulo 5) y estructuras de control visual (capítulo 6).

Para caracterizar las tareas de los libros se realizaron tres niveles de análisis, a saber: análisis general unificado (apartados 4.2, 5.3 y 6.1), análisis comparativo por editoriales (apartados 4.3, 5.4 y 6.2) y análisis comparativo por países (apartados 4.4, 5.5 y 6.3); y en cada uno de ellos se contemplaron dos sub-niveles de análisis: local y global. En el primero se tiene en cuenta el comportamiento visual en cada uno de los ciclos de los tres tópicos, mientras que en el segundo tanto los tópicos como los ciclos son contemplados pero unos independientemente de los otros.

7.1 Consecución de los objetivos de la investigación.

En este apartado analizaremos en qué medida han sido alcanzados los objetivos que nos habíamos planteado al inicio de este trabajo

Objetivos 1 y 2: Determinar de qué forma los libros colombianos y españoles al tratar el área promueven el desarrollo de la visualización e inducen distintos niveles de complejidad visual.

En el capítulo 3, apartado 3.4.5 han sido definidos, caracterizados y ejemplificados los elementos constitutivos de la visualización considerados por los libros al tratar el área. Fueron identificados un total de nueve operaciones, cinco cambios figurales, tres dimensionales y tres de focalización bidimensional así como dos flujos visuales. Según la forma como se articulan los elementos constitutivos de la visualización se detectaron 311 tipos de visualización, que fueron agrupadas en ocho grupos definidos en el apartado 3.4.7, y que a partir del nivel de complejidad fueron reagrupados en cuatro categorías: MÁX, INT-PC, INT-P y MÍN también definidas en el apartado 3.4.7. Las tareas que incluyen un nivel de complejidad INT-P son quienes promueven el desarrollo visual, es decir, la adquisición de habilidades visuales básicas como la aprehensión operatoria, la deconstrucción dimensional de formas y el cambio de focalización bidimensional, mientras que las que contemplan las complejidades MÁX e INT-PC promueven su ejercitación e integración. En cuanto a las tareas que inducen una complejidad MÍN en ellas la visualización es de naturaleza estática y no desempeña rol alguno. En el capítulo 4, de forma paralela al estudio de la complejidad visual se determinó cómo el desarrollo de la visualización es incluido en los libros de texto.

Un estudio comparativo de libros por tópicos y ciclos nos permitió comprender, a partir de las similitudes y diferencias encontradas entre los libros colombianos y españoles cómo la visualización es asumida en las tareas de área. En este sentido, el análisis de los datos ha arrojado una serie de resultados cuya interpretación desvela algunas conclusiones entre las cuales merecen ser destacadas las siguientes:

El análisis general unificado demuestra que los niveles de complejidad intermedios son los más considerados siendo el relativo al desarrollo visual el segundo más contemplado mientras que el mínimo es el tercero y el máximo es minoritariamente incluido. La enseñanza de la visualización se caracteriza, pues, por considerar un significativo número de tareas que promueven el desarrollo visual, uno menor donde la visualización no desempeña un rol determinante, y mediante un claro desequilibrio entre el número de tareas que incluyen a las complejidades INT-PC y MÁX. En cuanto al análisis local evidencia que tal desequilibrio está presente en todos los tópicos de los libros colombianos y españoles, y el análisis local indica que persiste en todos o la mayoría de

los ciclos de cada tópico. Tanto el análisis local como el global también resaltan, por un lado, que de un tópico a otro los niveles de complejidad son promovidos en condiciones distintas, siendo MÁX el que es considerado en más ocasiones de la forma menos propicia mientras que INT-P y MÍN lo son de la manera más propicia. Asimismo, evidencian ambos niveles de análisis que en la mayoría de los casos los niveles de complejidad se incluyen entre ciclos de igual forma siendo este aspecto más enfatizado en los libros colombianos que en los españoles.

A continuación precisamos cómo en los libros se incluyen las tareas donde el desarrollo de la visualización es promovido y donde la visualización no desempeña un rol determinante. Así mismo consideramos cómo el desequilibrio entre las tareas que promueven las complejidades INT-PC y MÁX tiende a ser incluido:

- En cuanto a las tareas que promueven el desarrollo visual se enfatizan en el estudio de la cantidad y medida de área más no en el de las relaciones perímetro-área siendo en los libros colombianos donde se promueve en mayor medida. Esto demuestra que en los tópicos donde el área es tratada independientemente del perímetro se induce el desarrollo visual. Pero, en la mayoría de los casos no se contempla mayoritariamente. En consecuencia, si bien los libros promueven el desarrollo visual, lo hacen de forma limitada.
- En los tópicos de medida de área y de relación perímetro-área es donde se enfatiza el nivel de complejidad MÍN, en consecuencia, se presenta una visualización de naturaleza estática que no desempeña un rol determinante en las matemáticas. Esta tendencia se mantiene en los libros de ambos países siendo el estudio de las relaciones perímetro-área donde más está presente. Estos resultados indican que en la enseñanza de la medida del área y de la relación perímetro-área se descuida el estudio de los aspectos cualitativos que dan sentido a la construcción del concepto de área (Moreira Baltar, 1997; Freudenthal, 1983; Chamorro, 1997, entre otros); y, que no permiten que la visualización sea considerada de forma determinante en el tratamiento del área. Lo que conlleva a que la aplicación de tratamientos aritméticos tipo conteo y la sustitución de valores en formulas sean las acciones más promovidas. La aritmetización de la medida (Dickson et al, 1991; MEN, 1998; Chamorro, 1997) es por tanto promovida en estos tópicos de forma significativa. Tampoco desde este punto de vista el desarrollo de la visualización tiende a ser mayormente priorizada.
- Si asumimos que las tareas que permiten la integración de los tipos de visualización que determinan el desarrollo visual contribuyen al despliegue de nuevas y cada vez más complejas, a la vez que potentes, habilidades visuales, entonces las que incluyen las complejidades INT-PC y MÁX son las que lo promueven. Pero, en todos los tópicos las tareas donde INT-PC aparece son

mayoritariamente consideradas mientras que aquellas donde MÁX es incluida lo hace de forma minoritaria, siendo las últimas quienes caracterizan los tipos de visualización que las matemáticas requiere, es decir, donde la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas aparecen de forma articulada. Tal desequilibrio persiste en todos los tópicos siendo en los libros colombianos donde más se incluyen; y bien podría promover que las nuevas habilidades desarrolladas no permitan afrontar las tareas de los libros cuya complejidad es la mayor, en consecuencia, que los estudiantes sean inoperantes en su comprensión y desarrollo, lo que a su vez obstaculizaría el desarrollo de nuevas habilidades visuales y por tanto la consideración de tipos de visualización cada vez más complejos y elaborados. En breve, este desequilibrio puede suscitar que las habilidades visuales desarrolladas no correspondan a las exigencias cognitivas que las matemáticas requieren.

Estos resultados son una importante herramienta para comprender cómo el desarrollo de la visualización es promovido en la enseñanza de las matemáticas. Los libros de texto y el área se posicionan como tópicos para sondear cuál es el papel que se asigna a la visualización en la enseñanza de las matemáticas. Los primeros, al tipificar las propuestas de enseñanza privilegiadas en el aula (Pepin, Haggarty y Keynes, 2001; Cobo y Batanero, 2004) y dar vida a los lineamientos curriculares de una nación (Schmidt et al, 1996). El segundo, al ser un objeto matemático donde el acto de ver desempeña un papel fundamental para su comprensión y donde la visualización puede ser un objeto de desarrollo (Marmolejo y Vega, 2012). Lo anterior, unido a que la muestra contemplada corresponde a los libros dirigidos a estudiantes de los seis primeros grados de educación básica, realza aún más la importancia de caracterizaciones como las aquí reseñadas, pues, la visualización puede privilegiarse en la enseñanza escolar básica de la geometría como la puerta de entrada, soporte e impulso para las actividades de razonamiento y de construcción geométrica (Duval, 1998).

Si el propósito es desarrollar habilidades visuales básicas que permitan el desarrollo visual entonces las tareas que en los libros incluyen una complejidad INT-P son las que se deben considerar. Pero, si el objetivo es evaluar las habilidades visuales adquiridas entonces es necesario una disminución radical del número de tareas donde la complejidad es MÍN, y si la idea es considerar tipos de visualización más complejos que promuevan el desarrollo de nuevas habilidades, en tal caso las tareas que inducen una complejidad MÁX son las indicadas. Pero, teniendo en cuenta que la visualización es una actividad compleja para los estudiantes incluso para algunos educadores, entonces los libros de texto no generan condiciones adecuadas que garanticen el tránsito de tareas que promueven una complejidad INT-PC a aquellas donde MÁX es la contemplada, pues, el número de tareas que inducen la MÁX son muy reducidos en comparación a aquellas donde INT-PC lo es.

Por otra parte, si se pretende generar sentido al estudio del área a través de la visualización entonces es determinante reducir el número de tareas donde la complejidad MÍN está presente, privilegiando aquellas donde INT-P, INT-PC y MÁX son incluidas. Es en ellas donde la superficie de una figura incluso los bordes que la delimitan son mental o físicamente manipulados. Ignorar tal condición no solo entorpece que la visualización sea efectivamente considerada sino que además conlleva a que el estudio del área sea sumido de forma aritmetizada, promoviéndose que la construcción de este concepto recaiga en acciones como el conteo uno a uno y la sustitución de valores en fórmulas; así como que el estudio de la relación perímetro-área se restrinja al cálculo de la medida de una y otra magnitud, y, por tanto, que el estudio de las relaciones entre estas magnitudes determinado por la aplicación de transformaciones figurales, no sea objeto de reflexión.

En cuanto al uso excesivo de acciones aritméticas como el conteo uno a uno y la sustitución de valores en fórmulas tal como sucede en el estudio de la medida de área, y que han sido previamente reseñados en investigaciones previas (De Carvalho (2013), contribuye a que cuestiones que dificultan u obstaculizan su estudio sean enfatizadas, por ejemplo, que el área como objeto mental no sea constituido (Freudenthal, 1983; Chamorro, 1997), que no se promueva una transición entre la manipulación cualitativa del área sin el uso de números y la aplicación de fórmulas (Rahim y Sawada, 1990; Baturó y Nason, 1996) así como de la medida directa de áreas a la constitución de la fórmula $A = b \times h$ (De Carvalho, 2013; Martin y Strutchens, 2000, en Kamii y Kysh, 2006), y que se promuevan procedimientos engorrosos y no pertinentes (Marmolejo y Vega, 2012). En consecuencia, que operaciones como la superposición, el refraccionamiento y la reconfiguración, acciones que contribuyen y determinan el aprendizaje de la medida del área (Zacharos, 2006; De Carvalho, 2013; Outhred y Mitchelmore, 1996, 2000, 2004; Douady y Perrín, 1986; Rahim y Olson, 1999; Chamorro, 1997; Kordaki, 2003; Zacharos, 2006) no sean contempladas.

En fin, una excesiva consideración de tratamientos eminentemente aritméticos conllevan a que la enseñanza de la medida de área comience y se restrinja a cuestiones aritméticas que ignoran la verdadera naturaleza del concepto de área (Dickson et al, 1991; MEN, 1998), y que aspectos visuales u holísticos determinantes para su enseñanza y aprendizaje no sean contemplados (Pitta-Pantazi y Cristou, 2009).

En lo relativo a la relación perímetro-área, los libros consideran pocas oportunidades para que estas magnitudes sean promovidas de forma articulada (De Carvalho, 2013) y, como se evidencia en la investigación, en las pocas tareas de los libros donde sí se considera, los tipos de visualización que subyacen no promueven que las figuras sean superficial y linealmente transformadas. Es decir, ni el área ni el perímetro son “manipulados”. Lo anterior conlleva a que los usuarios de los libros no cuenten con elementos que les permita enfrentar algunas de las dificultades que los estudiantes tienen para diferenciar el área del perímetro (Dickson et al, 1991; Chamorro, 1997; Jaquet, 2000A, 2000B; De Araújo y Dos Santos, 2009; Estrada y Avila, 2009). Estas características han de tenerse en cuenta,

pues, por un lado, tales relaciones no son espontáneamente contempladas ni por los estudiantes (Fandillo y D'Amore, 2009; Montis, Mallocci y Polo, 2003; entre otros) ni por algunos educadores (Fandillo y D'Amore, 2009). Y, por otro lado, que las dificultades de los estudiantes relativas al estudio del área se relacionan con la forma fragmentada en que su estudio se considera sin considerarla dinámicamente con el perímetro (Moreira Baltar, 1997, Douady y Perrín, 1989; Chamorro, 1997; Osborne, 1976; Wagman, 1975). Con respecto a la forma como los libros inducen el estudio de la cantidad de área las tareas que incluyen una complejidad MÍN no son las más contempladas, por tanto, es este tópico donde las propiedades físicas que caracterizan la magnitud área pueden ser objeto de reflexión. En este sentido, es aquí, no en la medida de área ni en la relación perímetro-área donde la constitución del objeto mental área (Freudenthal, 1983; Chamorro, 1997) puede ser recreada en los libros de texto. Pero, la mayoría de las tareas de la cantidad de área están presentes en los capítulos de geometría, y en ellos, si bien la superficie de las figuras son mental o físicamente manipuladas se hace sin alusión explícita al concepto de área; así, pues, los estudiantes interactúan con el área pero no son conscientes de ello. Entonces, desde este punto de vista el papel que puede desempeñar la visualización para el estudio del área también podría ser en extremis limitado.

En resumen, para comprender si la visualización tiende, o no, a ser enseñada en la educación básica los resultados de la investigación demuestran que es determinante considerar, por lo menos en una primera instancia, cuáles son los niveles de complejidad que los libros incluyen en el tratamiento del área, cuáles permiten (o no) el desarrollo visual, cómo se organizan en los tópicos y ciclos educativos donde su estudio se contempla, qué relación existe entre el número de tareas donde aparece unos niveles de complejidad y otros, y que si bien los los libros al tratar este concepto matemático promueven el desarrollo visual lo hacen en condiciones muy limitadas.

Objetivo 3: Identificar en los libros colombianos y españoles las diferentes funciones que juega la visualización en la enseñanza del área.

En el capítulo 3.4.5 (categoría 2) se definieron, caracterizaron y ejemplificaron las distintas funciones que la visualización asume en los libros al tratar el área: heurística, inductiva, e informativa. Según cómo aparecen las funciones visuales en el estudio de las tareas de área un total de cinco clases de funciones fueron contempladas: Inductiva, Informativa, Inductiva e informativa, Inductiva y heurística e Inductiva, informativa y heurística. Para dar respuesta a las cuestiones ¿cómo se caracterizan las tareas de área de los libros en términos de la función que desempeña la visualización? y ¿Cuáles podrían ser sus efectos o consecuencias para el desarrollo de la visualización?, se reagruparon en dos categorías: informativa y no informativa, y que fueron definidas en el apartado 3.4.7 (segunda consideración de análisis de datos). Finalmente, en el capítulo 4 se determinan

con detalle cómo los libros de texto promueven a través del tratamiento del área estas dos clases de función visual.

Como se ha resaltado a lo largo de esta memoria las figuras son herramientas heurísticas que dotan de sentido al estudio de las matemáticas y son variadas las maneras en que la visualización asociada a ellas guía el desarrollo de un problema o permite la comprensión del despliegue de un procedimiento. Pero, no en todas las funciones que desempeña la visualización las figuras contribuyen de forma efectiva al estudio de la actividad planteada por el contrario en algunas pueden constituir una trampa para que la visualización desempeñe el papel que las matemáticas requieren (Mesquita, 1989). En consecuencia, determinar qué funciones de la visualización promueven que las figuras contribuyan a que esta actividad cognitiva desempeñe el papel que las matemáticas requieren (cuáles no) y como son organizadas en los tópicos y ciclos educativos donde se incluye el concepto de área, son aspectos a considerar para comprender si el desarrollo de la visualización es mayor o menormente promovido en relación a este concepto.

Como ya se ha indicado en la investigación hemos demostrado la existencia de dos clases de funciones visuales: función informativa y función no informativa. Las tareas que promueven la función no informativa desempeñan un importante papel para la visualización asociada a las figuras geométricas mientras que las que incluyen una función informativa promueven obstáculos y dificultades de naturaleza semiótica y cognitiva, entre otros, la confusión entre lo que se representa y lo representado, la promoción de la visualización sin considerar las propiedades del registro usado, la no consideración de las características fundamentales de las figuras geométricas, la constatación de relaciones matemáticas sin exigir su justificación.

En lo que sigue hacemos algunas consideraciones que son relevantes para considerar cómo el desarrollo de la visualización a través del estudio del área puede ser promovido, o entorpecido, en los libros de texto:

- El análisis general unificado demuestra que las tareas que promueven la función informativa son más consideradas que las que inducen una función no informativa siendo menos de la tercera parte quienes incluyen el segundo tipo de función. Pero, es en el estudio de la cantidad de área donde los mayores porcentajes de tareas que inducen la función informativa están presentes mientras que en el de la relación perímetro-área están los menores. El único tópico donde la función no informativa es promovida en la mayoría de las tareas es donde se considera el estudio de las relaciones perímetro-área. El análisis global y local demuestran que en la mayoría de los tópicos la función informativa es más contemplada que la no informativa. La relación entre el área y el perímetro es el único tópico donde tal característica no persiste mientras que el de la cantidad de área es donde más se considera. Además, el análisis local también resalta que en todos los tópicos son los libros

colombianos quienes consideran, en la mayoría o en todos los ciclos, mayores porcentajes de tareas que los españoles para promover la función informativa.

Lo anterior evidencia que los libros promueven un desequilibrio entre un mayoritario número de tareas donde la función visual es informativa y uno minoritario donde la función no informativa es incluida. Esto demuestra que los libros al tratar el área no contribuyen, o de hacerlo lo consideran de forma poco significativa, a que la visualización sea desarrollada. Al contrario, se promueve, en la mayoría de los tópicos y ciclos educativos y de forma reiterativa y enfática, obstáculos semióticos que conllevan a que ni las figuras ni la visualización desempeñen el papel que las matemáticas requieren. Solo donde se contempla el estudio de la relaciones entre el área y el perímetro tal desequilibrio no es promovido, por tanto, es a través de este tópico donde el desarrollo visual podría ser eficazmente incluido, siendo en los libros españoles donde más se promueve. Pero, las tareas donde la relación perímetro-área es incluida son las menos consideradas en el estudio del área.

Los libros de ambos países promueven entre ciclos la función informativa de igual forma. Para la cantidad de área y la relación perímetro-área se incluye con porcentajes de tareas que disminuyen a medida que los ciclos educativos aumentan, y solo para la medida de área se contempla de forma no descendente. Esto demuestra que en los primeros ciclos para la cantidad de área y en los últimos para la medida de área es donde se enfatiza la promoción de obstáculos como los ya reseñados. En cuanto al tópico de perímetro-área el desarrollo visual es más promocionado en los primeros ciclos que en los últimos. Estos resultados también demuestran que los libros para el estudio de la cantidad de área y de la relación perímetro-área intentan promover de un ciclo educativo a otro mayores posibilidades para reflexionar sobre el hecho de que las figuras son soportes intuitivos, pues, a medida que un usuario utiliza los libros de primer a sexto grado de una misma editorial, la diferencia en la proporción de tareas que son de naturaleza no informativa e informativa tienden a decrecer, generándose de un ciclo de enseñanza al siguiente más opciones de asumir que las figuras desempeñan un rol intuitivo real en las matemáticas.

Objetivo 4: Determinar los elementos y estrategias utilizados por los libros de texto para controlar la visualización en el estudio del área

En muchas de las tareas sobre áreas de superficies planas una misma figura puede desencadenar diferentes formas de ver, algunas pertinentes a la tarea planteada mientras que otras no. Por tanto, para tipificar cómo los libros de texto promueven la enseñanza de la visualización es necesario, en primera instancia, diferenciar las formas de visualización privilegiados por estos materiales didácticos, de todas aquellas que pueden, asertiva o no asertivamente, aplicarse en la resolución o comprensión de las tareas de área. Es decir dar respuesta a la cuestión ¿cómo y a través de qué estrategias o elementos estos materiales

didácticos suscitan el recurso de la visualización en la comprensión y desarrollo de las tareas propuestas sobre el concepto de área? Es esta la base para discriminar las formas de visualización privilegiadas por los textos al construir el concepto de área de superficies planas, y por tanto, responder a las preguntas planteadas en la investigación.

Nuestra investigación pone en evidencia la existencia de una serie de estrategias y elementos presentes en la manera en que se construye el concepto de área en los libros, a través de los cuales se privilegia (explícita o implícitamente) unas formas de ver sobre otras. Según el lugar de donde proviene el control ejercido como los elementos o estrategias empleados por los libros para guiar al lector en el tipo de visualización a considerar, se detectaron cuatro elementos generadores de control visual: contenido, procedimiento, visibilidad e iconismo (en el apartado 3.4.5-categoría 3 se definieron, tipificaron y ejemplificaron cada uno de estos elementos).

Los resultados presentados en el capítulo 6 y en el Anexo 7 demuestran que los elementos de control no solo permiten caracterizar los tipos de visualización incluidos en el tratamiento del área, sino que además hacen posible identificar formas distintas en que el control visual es incluido. Pero, además, como se enfatiza en el presente capítulo y en el de metodología, la naturaleza de la estructura de control promovida está directamente relacionada con las posibilidades de desarrollo visual que permiten los libros de texto.

Objetivo 5: Caracterizar las estructuras de control visual promovidas por los libros colombianos y españoles al suscitar el estudio del área.

Según la forma como se organizan los elementos generadores de control, se discriminaron un total de 12 estructuras. Para considerar el objetivo planteado en el trabajo en torno a cómo los libros inducen control sobre los tipos de visualización que promueven y según la naturaleza de las estructuras identificadas se agruparon en tres categorías definidas en el apartado 3.4.7 (tercera consideración de análisis de datos), a saber: visibilidad (ECV), discursiva (ECD) e iconismo (ECIco). La forma como las dos primeras estructuras de control guían los tipos de visualización potencia y promueve un desarrollo efectivo de la visualización; al contrario, la tercera es una fuente de obstáculos y dificultades para su inclusión. En el capítulo 6 se caracterizaron cómo las estructuras de control visual son incluidas en los libros de texto.

El análisis de los datos ha dilucidado una serie de resultados cuya interpretación promueve algunas conclusiones entre las cuales destacamos las siguientes:

- El análisis general unificado demuestra que las tareas de los libros donde la visibilidad como elemento de control visual está presente son la mayoría mientras que aquellas donde lo es la iconicidad lo son minoritariamente. En cuanto al

análisis global indica que el desequilibrio entre los porcentajes de tareas que incluyen a la visibilidad y al iconismo como estructuras de control, estando la primera incluida con mayores porcentajes que la segunda, se mantiene en todos los tópicos para los libros de ambos países. Y, el análisis local evidencia que tal desequilibrio se mantiene en la mayoría de los tópicos.

- En lo relativo al análisis global también se evidencia que todas las estructuras de control son incluidas entre ciclos de igual forma. No es así para el análisis local donde solo una de las estructuras lo es en todos los tópicos mientras que en las demás estructuras sucede de tal forma en la mayoría de ellos. Los análisis global y local también demuestran que la visibilidad es quien se promueve en las condiciones más propicias mientras que el iconismo lo es en las menores condiciones. La visibilidad en todos los tópicos para el caso colombiano o la mayoría en el español, y el iconismo en todos los tópicos en los libros de ambos países.

Es claro que un mayor número de tareas que incluyan la estructura de control por visibilidad en contraste a uno menor donde lo es el iconismo contribuye de forma efectiva a que la visualización sea un objeto de reflexión. Pero, también que si el desequilibrio entre los porcentajes en que aparecen estas dos estructuras es mayor en un grupo de libros que en otro; entonces, en el primer grupo el desarrollo visual es más promovido que en el segundo. Tanto lo uno como lo otro sucede más en los libros españoles que en los colombianos, por tanto, es en los primeros, más que en los segundos, donde el desarrollo de la visualización es más considerado.

Lo anterior unido a que el iconismo entre todas las estructuras de control es quien se promueve en las condiciones menos propicias, demuestra que los libros no contribuyen de forma significativa a la promoción de ambivalencias y de dificultades que obstaculicen la enseñanza de la visualización y del estudio de las figuras; es decir, donde el iconismo mediante la alusión a situaciones o acciones cotidianas sea quien guíe el tipo de visualización en estudio. Al contrario, la visibilidad es el elemento de control visual predominante. Los libros contribuyen por tanto a que el desarrollo de la visualización se desarrolle enfatizando, de una parte, la aplicación de factores de visibilidad (Duval, 1999; Padilla, 1992) junto a algunos elementos de contraste e índices que actúan como tales, y que según sea el caso aumentan o disminuyen el grado de productividad heurística de la figura. Y, por otra parte, propiciando el discernimiento de algunas unidades de dimensión 1 y de ciertas relaciones entre ellas que son claves para el estudio de la actividad propuesta. Estos aspectos son determinantes para el desarrollo de la visualización. En el primer caso para la aprehensión operatoria (Duval, 1999; Padilla, 1992) y en el segundo para la aprehensión discursiva, pues, una y otra aprehensión constituyen los cimientos que determinan cómo la visualización puede ser desarrollada en la enseñanza de las matemáticas (Duval, 1995, 1999, 2003, 2004); y donde su aplicación en ningún caso es

obvia ni espontanea tanto en los estudiantes (Duval, 1999, 2003, 2004; Padilla, 1992; Marmolejo y Vega, 2012) como en algunos profesores (Marmolejo y Vega, 2012).

Las tareas donde es incluido el discurso como estructura de control son consideradas con los porcentajes más altos después de las que promocionan a la visibilidad. Esta cuestión es de gran importancia para el desarrollo visual y tan determinante como las señaladas en los párrafos anteriores. En estas tareas la lengua natural al determinar el tipo de visualización, enfatiza que la deconstrucción dimensional de formas está articulada con una actividad discursiva y/o alude a la operación y flujo visual que determina el tipo de transformación figural. Estos aspectos también contribuyen al estudio de los dos tipos de aprehensión previamente reseñados. En el primer caso porque es la deconstrucción dimensional de formas quien organiza todos los procesos geométricos que las matemáticas requieren (Duval, 2004); y en el segundo, ya que una de las condiciones básicas para que la aprehensión operatoria pueda ser desarrollada se relaciona con que “las operaciones relativas a la modificación de las figuras debe solicitarse explícita y sistemáticamente” (Duval, 1999, p. 167). Con respecto al segundo aspecto, este tipo de tareas no solo explicitan el tipo de operación sino que además caracterizan su aplicación determinando cómo interviene en el flujo visual en cuestión. Además, si consideramos, por un lado, que en estas tareas se define el contenido matemático o se ejemplifica su aplicación; y, por otro lado, que el contenido matemático junto a los tipos de visualización asociados a su definición o aplicación se consideran en el estudio de nuevas tareas o en el aprendizaje de nuevos elementos matemáticos, entonces es claro que las tareas donde está la estructura de control por discurso contribuye al desarrollo tanto de la deconstrucción dimensional de formas, como de la aprehensión operatoria.

Esta tendencia se mantiene en todos los tópicos de los libros españoles pero en los colombianos lo es en el estudio de la medida de área mientras que en el de la cantidad de área y el de la relación perímetro-área se consideran con el porcentaje más alto. Pero, solo en uno de los ciclos de la medida de área para el caso colombiano es el tipo de estructura más incluido y en la relación perímetro-área lo es en los libros de ambos países en la mayoría de los ciclos. Lo anterior permite concluir que desde esta perspectiva los libros también inducen serias posibilidades para que la visualización sea desarrollada, pero, que son los libros colombianos quienes desde esta perspectiva más lo propician.

En términos generales concluimos que, a diferencia cómo los libros consideran los niveles de complejidad y las funciones visuales, la forma en que organizan las estructuras de control visual contribuye de forma significativa a que la visualización sea desarrollada.

Es claro que los objetivos de la investigación han sido alcanzados pues queda totalmente determinado no solo cuáles son los niveles de complejidad, las funciones que desempeña la visualización y las estructuras de control que se promueven en los libros al suscitar el estudio del área; sino que además se ha demostrado cómo influyen para la visualización sea asertiva, o no asertivamente, desarrollada.

7.2 Hipótesis de investigación.

En este apartado analizaremos las hipótesis de investigación establecidas en torno a los resultados alcanzados en los estudios que conforman la investigación

Hipótesis 1: Existen diferencias significativas en cómo los libros colombianos y españoles tratan el concepto de área promueven el desarrollo de la visualización.

Hemos visto que los libros de los dos países promueven de distinta forma (salvo en perímetro-área donde algunas de las características coinciden) el desarrollo de la visualización siendo los colombianos los que tienen mayores porcentajes de tareas y condiciones más propicias que los españoles para tal fin. Asimismo, se ha identificado tanto en los libros colombianos como en los españoles que las posibilidades de que la visualización sea un objeto de enseñanza a través del estudio del área es real y recae en dos de los tópicos (Cantidad de área y medida de área). En el tercero (Perímetro-área) es poco contemplada.

Hipótesis 2: Los libros de texto promueven altos niveles de complejidad visual en los tópicos CA y MA mientras que en PA son mínimos.

Se ha constatado que, en la mayoría de los tópicos, los libros de texto al tratar el área privilegian los niveles de complejidad intermedio y mínimo mientras que el de mayor complejidad es poco contemplado. Los libros colombianos y españoles promueven de forma distinta los tres niveles de complejidad. Mientras que en el primer caso se enfatizan los niveles intermedios, en el segundo se hace lo propio con los intermedios y los mínimos.

También se ha constado que en la cantidad y medida de área el nivel de complejidad máximo está lejos de ser el más contemplado siendo en el segundo de los tópicos es donde más se considera. Esta tendencia se mantiene en los libros de ambos países donde la complejidad mayor es apenas promovida en el estudio de la cantidad de área, y se considera de igual forma en el de la medida de área para el caso colombiano, pero, es en el español donde más se contempla y se hace a través de pequeños porcentajes de tareas.

Con respecto a MÍN, la hipótesis sí ha sido validada pues la complejidad mínima es promovida en la mayoría de las tareas de PA y son los libros españoles los que asignan mayores porcentajes de tareas para tal fin que los colombianos

Hipótesis 3: Los libros al tratar el área promueven que la visualización desempeñe distintas funciones permitiendo en la mayoría de los casos que la visualización guíe o apoye el estudio de la actividad planteada.

Se ha constatado que en el tratamiento del área los libros asignan a la visualización funciones que desempeñan roles contradictorios para el estudio de las figuras geométricas y de la visualización asociada a ellas. Por un lado, las funciones que se asignan a la visualización pueden propiciar que las figuras contribuyan a que la visualización actúe de forma efectiva en el estudio de las matemáticas o, por el contrario, que se constituya en un obstáculo o suscitar que las propiedades del registro semiótico de las figuras no sean contempladas en la enseñanza de la Geometría.

En los libros analizados la mayoría de las tareas promueven que la visualización desempeñe funciones que no contribuyen a que la visualización soporte o guíe el estudio de la actividad planteada, y que las propiedades que caracterizan a las figuras geométricas sean consideradas. En cuanto a los países en los que los libros promueven en mayor medida este tipo de características, son los colombianos quienes lo consideran en una mayor proporción de tareas. Este tipo de características tienden a ser mayormente promovidas para la cantidad y la medida de área en los libros de ambos países mientras que para el estudio de la relación perímetro-área son consideradas en menor medida. Son los libros colombianos los que más lo enfatizan para la cantidad de área mientras que los españoles lo consideran en la medida de área, y en cuanto a la articulación entre el área y el perímetro las posibilidades que al respecto brindan los libros de ambos países, son similares.

Hipótesis 4: Los libros de texto al suscitar el estudio del área ejercen control sobre las clases de visualización consideradas y en el proceso recurren a variadas estructuras de control visual

Es claro que los libros ejercen control sobre las formas de ver que promueven y que recurren a estructuras de control de naturaleza distinta para hacerlo. En todos los tópicos, la visibilidad es la estructura de control más promovida mientras que la de naturaleza icónica es la menos contemplada. También hemos visto que la visibilidad es contemplada como estructura de control en la mayoría de las tareas en todos los tópicos siendo la medida de área donde más se promociona y donde la icónica es apenas considerada.

En cuanto a los países de origen de los libros en estudio, los españoles en todos los tópicos contemplan en mayor medida que los colombianos a la visibilidad como estructura de control, siendo MA donde los libros de ambos países más enfatizan esta estructura de control. Al contrario, en todos los tópicos la iconicidad es más contemplada en los libros

colombianas que en los españoles y CA es donde los libros de ambos países más la contemplan.

7.3 Limitaciones del trabajo y futuras investigaciones.

En el diseño del instrumento de análisis se constató la presencia de un considerable número de aspectos a contemplar para determinar con detalle cómo la visualización es considerada en el tratamiento que los libros hacen del concepto de área. Lo anterior junto a las limitantes del investigador en cuanto a los tiempos que dispone para la presentación de esta memoria han llevado a que se deje de lado, o se hayan tratado tangencialmente, algunas cuestiones de importancia, por ejemplo, cómo los elementos constitutivos de la visualización son incluidos en los tópicos y ciclos educativos donde los libros promueven el estudio del área; cómo intervienen las distintas reorganizaciones que los tipos de función visual permiten en la enseñanza de la visualización; sobre qué elementos constitutivos de la visualización se ejerce control, sobre cuáles no, así como de qué forma los tipos de control son contemplados; y si los tipos de visualización, funciones visuales, estructuras y tipos de control considerados por los estudiantes y los educadores coinciden con los promovidos por los libros.

Tomando en consideración este estado de cosas enunciamos a continuación y de forma puntual algunos de las cuestiones que no fueron abordadas en esta memoria pero que la metodología de análisis diseñada permite considerar:

- A pesar de que se ha dado respuesta a las preguntas ¿los libros promueven el desarrollo de la visualización en la forma en que tratan el área de superficies planas?, y ¿en qué tópicos de área y ciclos educativos lo consideran en mayor o menor medida?; es necesario realizar investigaciones más puntuales que caractericen cuáles son los elementos de la visualización que tienden a ser más o menos promovidos, y que puedan determinar cómo y en dónde tienden a ser más o menos desarrollados. Es el caso de la aprehensión operatoria, la deconstrucción dimensional y el cambio de focalización, elementos de la visualización que determinan tres de los tipos de visualización identificados en el estudio, a saber: dinamismo parcial bidimensional, dinamismo parcial unidimensional y dinamismo parcial focal (definidos en el apartado 3.4.7-Primera consideración de análisis de datos).
- Si bien se han hecho consideraciones acerca de cómo los libros favorecen o, por el contrario, obstaculizan el estudio del área (apartados 4.1 y 6.1), solo se ha considerado de forma general o de forma global a través de los tópicos de cantidad de área, medida de área y la relación perímetro-área, ignorándose cuestiones particulares cuya reflexión se promueve en las tareas que inducen el estudio de cada tópico. Es el caso de las propiedades matemáticas que caracterizan al área como un tipo de magnitud, el estudio de la conservación de área, la medida directa e indirecta del área así como la

transición de un tipo de medida a otro, la constitución de la unidad de medida estándar, la extensión de las fórmulas de área del cuadrado y el rectángulo a otras clases de polígonos y la conversión de múltiplos y sub-múltiplos del metro cuadrado. Estos elementos son considerados por la literatura especializada como determinantes para la construcción del concepto de área, y son la base para dar respuestas entre otras a cuestiones a si los libros son el mejor recurso didáctico para favorecer la construcción del concepto de área a través de la visualización, si la visualización (elementos constitutivos, funciones visuales, estructuras y tipos de control visual) es considerada en la enseñanza de los aspectos antes citados, y de qué forma estos recursos didácticos favorecen o entorpecen la construcción autorregulada del concepto de área. En consecuencia, investigaciones de naturaleza local que permitan caracterizar cómo la visualización es incluida en cada uno de estos aspectos han de ser precisadas.

- Como se mencionó en la introducción del capítulo 5, la consideración contemplada para estudiar la relación función visual-enseñanza de la visualización se debería discutir desde tres frentes de naturaleza diferente: carácter multifuncional de las figuras, rol de los lectores de los libros de texto y funciones informativas y no informativas. Pero, en esta memoria la atención recayó exclusivamente sobre el tercero de los frentes. En consecuencia, es necesario considerar en nuevas investigaciones los otros dos frentes y así poder caracterizar con mayor detalle las posibilidades que brindan los libros para que la visualización sea promovida a través del concepto de área. En el primer caso es posible determinar los diferentes estatus que desempeñan las figuras en la actividad matemática considerada (Duval, 2003), y por tanto los tipos de ambivalencia que pueden llegar a introducir (Duval, 2003). En cuanto al segundo frente, la naturaleza de la función visual determina cómo ha de enfrentarse el alumno a la tarea, esta puede ser de naturaleza pasiva o activa.
- A nivel metacognitivo, se determinó cuáles son los elementos y estrategias que los libros consideran para inducir unos tipos de visualización en detrimento de otros, se estableció como son organizados en el tratamiento del área y cuál es su papel en la enseñanza de la visualización. Pero, caracterizar el rol que desempeña los elementos de control y las estructuras de control visual en el estudio del área y en la enseñanza de la visualización, exige además la realización de nuevos estudios que determinen cuáles son los elementos constitutivos de la visualización en los que los libros ejercen un mayor o menor grado control visual, cuáles son los elementos de control que en uno y otro caso se consideran, y sí su presencia facilita o entorpece el estudio del concepto de área y el desarrollo visual. En el mismo sentido, es determinante en el estudio de la estructura de control visual el desarrollo de trabajos que permitan identificar cuál es el papel que profesores y estudiantes asignan a los elementos y estructuras de control introducidos por los manuales escolares al suscitar el estudio del área, y si los tipos de visualización que unos y otros privilegian coinciden, o no, con los promovidos por los libros.
- También metacognitivamente se caracterizaron distintas clases de control visual y se determinó su organización en los tópicos donde el estudio del área se contempla, así

mismo, se determinaron implicaciones pedagógicas, docentes y de diseño de textos (Anexo 7). Pero, en ningún momento se consideró sobre qué aspectos de la visualización se incluye cada clase de control, qué elementos generados de control visual les caracterizan y si su presencia obstaculiza o promueve la enseñanza tanto de la visualización como del área. Tampoco se determinaron cómo los educadores acompañan a sus estudiantes para afrontar las tareas que incluyen una u otra clase de control, y cómo los estudiantes reaccionan ante su presencia.

- Lo anterior deja claro que si bien se han realizado importantes avances en cómo la metacognición interviene en los libros, estos por sí mismos no bastan para detallar cómo estos recursos didácticos promueven la enseñanza del concepto de área y el desarrollo de la visualización, pues, la forma como los libros inducen el contenido matemático es adaptada por los educadores y, como se evidencia en nuestras prácticas educativas, en ocasiones no son consideradas por los estudiantes. Por tanto, cuestiones como las anteriormente referenciadas deben ser contempladas para comprender en detalle cómo la metacognición, en particular, las estructuras y las clases de control visual intervienen en el estudio del área y en el desarrollo de la visualización.
- Finalmente, consideramos necesario llamar la atención sobre el desarrollo de futuras investigaciones que permitan discriminar los tipos de visualización, las posibilidades de desarrollo visual, los niveles de complejidad visual, las funciones que desempeña la visualización, los elementos generadores de control visual y las estructuras de control visual imperantes, en otros conceptos donde las figuras bidimensionales desempeñan un papel determinante. Igualmente en otros conceptos que susciten la visualización en registros semióticos distintos al de las figuras geométricas bidimensionales, como los gráficos cartesianos, las figuras tridimensionales, las tablas y los esquemas.

7.4 Implicaciones pedagógicas, docentes y de diseño de libros de texto.

Para los grupos de profesionales que diseñan los libros y los programas de formación docente es importante enfatizar que los estudiantes desarrollan visualizaciones poco económicas y engorrosas, las que determinan tratamientos aritméticos que no son potentes para comprender el concepto de área, y que son reforzados por los educadores quienes desconocen el papel que desempeña la visualización en relación a este concepto (Marmolejo y Vega, 2012). Esto nos lleva a afirmar como condiciones básicas para que los libros constituyan un importante recurso para desarrollar la visualización y la comprensión del concepto de área, una mayor sensibilidad hacia los resultados de investigaciones como la aquí presentada.

A través de los “libros guía” diseñados para los profesores y de las temáticas abordadas en los programas de formación debería enfatizarse no sólo la importancia del desarrollo de la visualización en matemáticas, sino también considerar los tópicos donde es posible

su desarrollo así como las posibilidades y los limitantes que introducen la caracterización de los niveles de complejidad visual, las funciones visuales, las estructuras de control y tipos de control estudiados en esta investigación. El reconocimiento por parte de los educadores de las dificultades asociadas a la visualización (Presmeg, 1986; Gal y Linchevski, 2010) y el entrenamiento en cómo la visualización puede considerarse en la enseñanza de las matemáticas (Gal, 2005, en Gal y Linchevski, 2010), les permite ser conscientes de las dificultades encontradas por sus estudiantes y ser capaces de lidiar con ellas. Lo anterior, aunado a que los profesores privilegien visualizaciones de naturaleza estática en sus procesos de enseñanza (Inan y Dogan-Temur, 2010) hacen cada vez más importante que tanto diseñadores de libros como de programas de cualificación docente consideren de manera enfática, de un lado, que la visualización puede y debe ser objeto de enseñanza, y, de otro, el rol que desempeña en la constitución de conocimiento matemático.

En particular sería aconsejable que se reflexionará, o se hiciera hincapié, en torno a los siguientes aspectos

- Los niveles de complejidad visual: la forma como los libros los incluyen de un tópico (y un ciclo educativo) a otro promueve que la visualización sea desarrollada pero de manera restringida. Es necesario considerar que las tareas que inducen el nivel de complejidad menor no contribuyen a que la visualización sea un soporte para las matemáticas. Por tanto, hay que propiciar el diseño de nuevas tareas cuya complejidad no sea la menor, considerando cómo pueden ser incluidas en los tópicos y ciclos donde el área es tratada. En cuanto al desequilibrio entre el número de tareas que propician la complejidad mayor y la INT-P, donde las primeras son quienes caracterizan las exigencias visuales que las matemáticas requieren, es determinante promover la disminución del segundo grupo de tareas y un aumento significativo del primero. Por tanto, también se debe reflexionar sobre el diseño de tareas cuya complejidad sea la mayor y determinar en qué tópicos (o ciclos educativos) pueden sustituir a aquellas cuya complejidad es INT-P. Finalmente, es necesario considerar entre las tareas que promueven el desarrollo visual cuáles centran la atención en la aprehensión operativa de las figuras y cuáles incluyen la deconstrucción dimensional de formas porque para promover el desarrollo de la visualización han de considerarse de forma separada (Duval, 1998, 2003, 2004). Igual sucede con las tareas que tienen en cuenta la focalización bidimensional cuyas características visuales son totalmente distintas a las previamente mencionadas.
- Son varias las funciones que desempeña la visualización pero solo algunas promueven que las figuras contribuyan a que la visualización desempeñe el papel que las matemáticas requieren. Es necesario discriminar, diferenciar y caracterizar las funciones visuales que contribuyen al desarrollo de la visualización de aquellas que no lo hacen. Así mismo, comprender, por un lado, cómo el primer grupo de funciones propician el desarrollo visual y el estudio de las figuras, y, por otro, cuáles son los obstáculos semióticos y cognitivos que se promueven en el segundo grupo de

funciones. Que si bien el área es un contenido donde la visualización puede ser desarrollada la mayoría de las tareas que incluyen su estudio promueven funciones visuales que van en contravía de tal desarrollo. La apropiación de elementos conceptuales que propicien el diseño de tareas cuya función promueva el desarrollo visual; así como la consideración de en qué tópicos (y en qué ciclos educativos) este tipo de tarea es menos considerada, es determinante para que en el aula se propicie una enseñanza del área que contribuya al desarrollo de la visualización y a que las figuras sean verdaderos soportes heurísticos en el estudio de las matemáticas.

- Las estructuras de control visual: los libros recurren a un mayor número de tareas donde la visibilidad y el discurso en lengua natural determinan los tipos de visualización en cuestión, mientras que el iconismo es considerado en menor grado. En lo relativo al iconismo es determinante comprender que su inclusión como estructura de control obstaculiza tanto el desarrollo visual como el aprendizaje de las figuras geométricas. En cuanto a la visibilidad, se debe reflexionar sobre cuándo promueve que el grado de potencia heurística de una figura sea alto, o al contrario, bajo, cuáles de los elementos que le caracterizan obstaculizan o benefician la discriminación de los tipos de visualización en juego así como en qué elementos constitutivos de la visualización intervienen, en qué ocasiones propicia la deconstrucción dimensional de formas, en cuales es la aprehensión operatoria la inducida y en qué sentido se hace. Y, con respecto a la estructura de control discursiva, diferenciar las tareas donde el desarrollo visual es propiciado en torno a la aprehensión operatoria a cuando lo es la aprehensión discursiva, pues, cada tipo de aprehensión responde a características epistemológicas de naturaleza diferente y su desarrollo solo es posible a través de la distinción de estos dos tipos de aprehensión y de la discriminación separada de los tratamientos que permiten (Duval, 1998).

Solo a través de consideraciones como las anteriormente referenciadas es posible que los docentes puedan seleccionar algunas tareas en detrimento de otras, adaptar según el propósito de la clase algunas de las tareas de los libros o diseñar otras e intervenir de forma efectiva cuando sus estudiantes las realicen. Es de esta manera que el tratamiento del área promovido en los libros de texto y explicitado en el aula de clase podría promover de manera efectiva que la visualización sea desarrollada a través del estudio del área. En este sentido, la determinación de los niveles de complejidad, funciones visuales y estructuras de control visual que se promueven en los libros así como la caracterización de cómo su articulación es incluida en las tareas de área, son una importante herramienta a considerar tanto por los diseñadores de libros como por los formadores de profesores e incluso por los mismos profesores.

7.5 Productos de la investigación.

Documentos escritos

- Marmolejo, G.A., y González, M.T. (2014). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Un estado de la cuestión. Enviado (*Revista Integración*)
- Marmolejo, G.A., y González, M.T. (2014). Análisis meta cognitivo de libros de texto colombianos y españoles. El control visual en el tratamiento del concepto de área de superficies planas. *Revista Educación matemática*. Enviado (*Revista Educación Matemática*)
- Marmolejo, G.A., y González, M.T. (2014). Control Visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. En prensa (*Revista RELIME*)
- Marmolejo, G.A., y González, M.T. (2013). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.
- Marmolejo, G.A., y González, M.T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, 25(3), 61-102
- Marmolejo, G.A., y González, M.T. (2013). Función de la visualización en el área de superficies planas. Análisis de un texto escolar. En, Obando, G. (Ed.), *Matemática Educativa. 13 Encuentro Colombiano*, Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín, 366-370
- Marmolejo, G., y Astudillo, M.T. (2011). La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto. Memorias del 12 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ASOCOLME), 355-364.

Eventos académicos

- CIMIE 14. Tercer congreso internacional multidisciplinar de investigación educativa. Segovia. 2014VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Congreso internacional. Universidad de Medellín. Colombia. 2014
- XIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ASOCOLME 13). Congreso internacional. Universidad de Antioquia. Colombia. 2012
- XI Coloquio regional de matemáticas y I Simposio de estadística. Universidad de Nariño. Colombia. 2012
- XII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ASOCOLME 12). Congreso internacional. Universidad del Quindío. Colombia. 2011
- X Coloquio regional de matemáticas. Universidad de Nariño. Colombia. 2010
- I Encuentro Iberoamericano sobre Educación Matemática y Tecnología. Congreso internacional. Universidad de La Laguna. España. 2009

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aljami A. (2012). How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational studies in mathematics*, 79(2), 239-261.
- Alsina, C.; Fortuny, J.M., Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas Didácticas para la ESO*. Madrid. España: Síntesis.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Aspinwall, L. y Shaw, K.L. (2002). When visualization is a barrier to mathematical understanding. *Mathematics Teachers*, 95(9), 714-717.
- Balacheff, N. y Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Issues in Mathematics Education*, 16, 183-211.
- Battista, M., Clements, D., Kathryn, J.A. y Auken, C.V. (1998). Student's spatial structuring of 2D arrays of squares, *Journal for Research in Mathematics Education* 29(5), 503-532.
- Baturo, A y Nason, R. (1996). Students teacher's subject matter knowledge Within the domain of área measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 235-268.
- Bishop, A. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización. En R.C. Núñez, E.A. Sánchez y G.Z. Badillo (Eds.) *Antología en educación matemática* (pp. 29-41). México: SME Cinvestad.
- Bishop, A. (1983). Space and Geometry. En, R. Lesh y M. Landau (Eds). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 176-203). New York. Estados Unidos: Academic Press.
- Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2008). Persistent images and teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sépulveda (Eds). *Proceeding of the 32 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 32* (Vol 2, pp. 177-188). Morelia. México: Cinvestad-UMSNH.
- Blanco, T.F., Godino, J.D. y Pegito, J.A. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. *BOLEMA*, 26(42A), 39-63.
- Boakez, N. (2009). Origami instruction in the middle school mathematic classroom. Its impact on the spatial visualization and geometry knowledge of students. *Research Middle Learning Education. Online*. 32(7), 1-12.

- Borba, R. y Selva, A. (2013). Analysis of the role of calculator in Brazilian textbooks, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 737-750.
- Bravo, S. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, 24(2), 5-36.
- Brown, C.A., Carpenter, T.P., Kouba, V.L., Lindquist, M.M., Silver, E.A. y Swafford, J.O. (1988). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assesment: discrete mathematics, data organization and interpretation, measurement, number and operations. *Mathematics Teacher*, 81(4), 241-48.
- Bruno, A. y Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación Matemática*. 18(3), 125-149.
- Burgermeister, P. y Coray, M. (2008). Processus de contrôle en résolution des problèmes dans le cadre de la proportionalité des grandeurs: Une analyse descriptive. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(1), 63-105.
- Cabañas, G. y Mejía, O. (2009). ¿Cómo se perciben las nociones de comparación, conservación y Cuantificación del área por estudiantes universitarios? Un estudio a Través de los argumentos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 22, pp. 1277-1285). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Cabañas-Sanchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación de área en la resignificación de la integral definida. En R. Flores. (Ed.). *Acta latinoamericana de matemática educativa* (Vol 25, pp.1031-1040). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Cabañas-Sanchez, G. y Cantoral, R. (2010). Análisis de la actividad matemática en el salón de clases. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 23, pp. 939-947). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis*, 11, 55-101.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Una representación visual del polinomio de Lagrange. *Números*, 55, 3-22.
- Carpenter, T.P. (1976). Analysis and synthesis of existing research on measurement. En R. A. Lesh (ed.), *Number and Measurement* (pp. 47-83). Athens, Georgia: ERIC/SMEAC, University of Georgia.
- Carpenter, T.P. y Lewis, R. (1976). The development of the concept of a standard unit of measure in young students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(1), 53-58.
- Cass, M.; Cates, D.; Jackson, C.W.; Smith, M. (2002). Facilitating Adolescents with Disabilities Understanding of Area and Perimeter Concepts via Manipulative Instruction. Extraible en <http://www.eric.ed.gov> (28 Junio 2006).
- Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid. España: Pearson Educación.

- Chamorro, M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis Doctoral microfilmada. UNED. Madrid.
- Chen, C.L. y Herbst, P. (2012). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 285-307.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. y Joshua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de transposition didactique: la notion de distance. *Recherche en didactique des mathématiques*. 3(1), 159-239.
- Cleary, T.J. y Zimmerman, B.J. (2004). Self-regulation empowerment program: a school-based program to enhance self-regulated and self-motivated cycles of student learning. *Psychology in the Schools*, 41(5), 537-550.
- Clements, M.A. (1981). Visual imagery and school mathematics (1). *For the learning of Mathematics*, 2(2), 2-9.
- Clements, M.A. (1982). Visual imagery and school mathematics (2). *For the learning of Mathematics*, 2(3), 33-38.
- Clements, D. Swaminathan, S. Zeitler, M.A. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la medida en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *RELIME*, 9(1), 65-84.
- Coppé, S., Dorier, J.L. y Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement. De la notion de fonction en France en seconde, *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(2), 151-186.
- Cordero, F., Cen, C. y Suarez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *RELIME*, 13(2), 187-214.
- Cordero, F. y Flórez, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *RELIME*, 10(1), 7-38.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *RELIME*, 10(1), 39-68.
- Davis, P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 333-344.
- De Araújo, A.J. y Dos Santos, M.C. (2009). Avaliação Externa do Projevem: o caso de áreas e volumes. *Boletim de Educação Matemática*, 22(33), 23-49.
- De Carvalho, D.G. (2013, junio). Análise praxeológica da área de figuras geométricas planas no guia de estudo do Projevem Urbano. En Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Organizador), XI Encontro Nacional de educação Matemática Curitiba. Brasil.
- Delaney, S., Charlambous, Y., Hsu, H. y Mesa, V. (2007). The treatment of addition and subtraction of fractions in Cypriot, Irish, and Taiwanese textbooks. En J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park y D.Y. Seo (Eds). *Proceeding of the 31 Conference of the*

- International Group for the psychology of Mathematics Education* (Vol 31(2), pp. 193-200). Seúl. Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.
- Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A. y Panaoura, A. (2009). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. *Proceedings of CERME 6*. Lyon. France.
- Denice, G., Matos, J.M. y Wielews, S.A. (2010). Stimuli given to pedagogical experiences and textbook production during the Modern Mathematics Period: the Brazil-Portugal context. *BOLEMA*. 23(35B), 323-342.
- Díaz, C., Gaviria, J., Torres, L. y Guacaneme, E. (1997). *Tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias*. Bogotá. Colombia: Creamos Alternativas.
- Dickson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Traducción realizada por Luis Bou (Children learning mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research). Barcelona. España: Editorial Labor, S.A. (Primera edición).
- Domenicantonio, R.D., Costa, V.A. y Vacchino, M.C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 75-87.
- Dormolen, V. (1986). Textual Análisis. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education* (pp.141-171). Dordrecht. Netherlands: Reidel.
- Douady, R. y Perrín, M.J. (1989). Un process d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-42.
- Dowling, P. (1996). A sociological analysis of school mathematics texts. *Educational Studies in Mathematics*. 31(4), 389-415.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 32* (Vol 1, pp. 33-48). Morelia. México: Cinvestav-UMSNH.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. En G. Booker, P. Cobb y T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 14* (Vol 1, pp. 27-36). Oaxtepec. México.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y...una quinta. En M.C. Chamorro (Ed), *Números, fórmulas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Sociedad anónima de fotocomposición.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, (1ª ed.). Cali. Colombia: Artes Gráficas Univalle.

- Duval, R. (1998a). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (pp. 37-51). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1998b). Approche Cognitive des Problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Sutherland y J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.
- Eisenberg, T. and Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.). *Visualization in teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37). Estados Unidos: Editorial Board.
- Elia, I, Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A. y Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 1-8.
- Emmanuele, D., Gonzalez, M.I., Introcaso, B. y Braccialarghe, D. (2010). Análisis de libros de cálculo en carreras de ingeniería. Su relación con los cambios sociopolíticos en Argentina. *Educación Matemática*. 22(2), 35-63.
- Esteves, A. E. (2008). *Evolução histórica dos problemas de otimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI*. Tesis de Doctorado. No publicada. Universidad de Salamanca. Salamanca. España.
- Estrada, J.L. y Ávila, A. (2009). Los usuarios de la educación básica para jóvenes y adultos y la solución de un problema de área. *Educación matemática*, 21(3), 33-66.
- Falduto, V.R. (2008). *A Content Analysis of Contemporary College Algebra Textbooks: Applications of Visualization Strategies*. Tesis Doctoral. No publicada. Nova Southeastern University. Estados Unidos.
- Fandiño, M.I. y D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio. Bogotá. Colombia.
- Fernández, S.H.A.A. y Healy, L. (2010). Inclusion of blind student in mathematics classroom: tactile exploration of area, perimeter and volumen. *BOLEMA*, 23(37), 1111-1135.
- Fernandez, E. y Mejía, M.F. (2010, octubre). Análisis de Textos Escolares para el Diseño de Situaciones de Enseñanza. En G. García (Ed.), *Actas del 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Aprendizaje y Evaluación de las matemáticas* (pp. 61-68). Bogotá. Colombia: Cengage Learning.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La Aparición del Lenguaje Aritmético-Algebraico, *L'Educazione Matematica*. 5(3), 1-16.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht. Netherlands: Reidel.

- Fuson, K. y Li, Y. (2009). Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 41(6), 793-808.
- Fuson, K, Stigler, J. y Bartsch, K. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, Mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for research in mathematics Education*, 19(5), 449-456.
- Gal, H y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, 74(2), 163-183.
- García, A. y García, J.A. (2007). Statistical inference in textbooks: mathematical and everyday contexts. En J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park y D.Y. Seo (Eds), *Proceeding of the 31 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 31* (Vol 2, pp. 257-264). Seúl. Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.
- García, M. y Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la ESO a libros de texto de tres editoriales. En MM. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 327-340). Lleida: SEIEM.
- García, M. y Llinares, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Curriculum*, 10-11, 103-115.
- García, G, Patagones, P, Carrillo, J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones. En M. Bolea, M. Moreno y M. González (Eds.). *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 185-194). Huesca. España: SEIEM.
- García Rodeja, I. (1997). ¿Qué propuestas de actividades hacen los libros de primaria? *Alambique*, 11, 35-43.
- Garofalo, J. y Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.
- Gettinger, M., y Seibert, J.K. (2002). Contributions of study skills to academic competence. *School Psychology Review*, 31, 350-365.
- Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. *PNA*. 5(2), 49-65.
- González, M.T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Salamanca.
- González, F.M. y Castro, E. (2012). Diagramas integrados producidos por estudiantes de ESO en la resolución de problemas de comparación multiplicativa. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 313-322). Jaen. España: SEIEM.
- González, M. T y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de textos de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.

- Gonzato, M., Godino, J.D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 2-37.
- Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: SEIEM.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 207-231.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿y en la investigación? En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida. España: SEIEM.
- Guirette, R. y Zubietta, G. (2010). Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático. *Educación matemática*, 22(2), 93-121.
- Guirette, R. (2006). *Pruebas sin Palabras. Un estudio de casos con profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. México.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds). *Proceedings of the 20 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 20* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia. España. Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry, *Structural Topology*, 18, 31-48.
- Gutiérrez, A., Adela, J. (1992). Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales. En G. Guillen, A. Gutiérrez, J. Adela, M. Cáceres (Eds.), *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B. Memoria final proyecto de investigación*. Valencia. España: Universidad de Valencia.
- Guzman, M. (1996). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos de Análisis*. Madrid. España: Pirámide.
- Haas, N.E., Rosado, M.P. (2011). Geometría dinámica en la visualización de problemas geométricos en el nivel superior. Una propuesta. En P. Leston (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 24, pp. 1216-1223). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Haggard, D. (1986). *Curriculum alignment in North Carolina: relation ships of state mandated tests, textbooks, and objectives*. Tesis Doctoral. No publicada. Universidad de Texas. Estados Unidos.
- Herbel-Eisenmann, B. (2007). From intended curriculum to written curriculum: examining the “voice” of a mathematics textbook. *Journal for research in mathematics Education*, 38(4), 344-369.

- Hermán, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, .I. Simpson, A., et al. (2004). Images of fractions *as* processes and images of fractions *in* processes. En M.J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 28* (Vol 4, pp. 249-256). Bergen. Noruega.
- Herrera, J. (2011). Utilización de la función de arrastre del software cabri-geometre para el desarrollo del pensamiento geométrico en alumnos de bachillerato. En P. Leston. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 24, pp. 1142-1150). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. En, C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century An ICMI Study* (pp. 29-37). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A. y Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning-The case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255-265.
- Hewitt, D. (2003). Notation issues: Visual effects and ordering operations. En N. Pateman, B. J. Dougherty, y L. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*, (Vol 3, pp. 63-69). Honolulu. Hawaii: University of Hawai'i.
- Hirstein, J., Lamb, C.E. y Osborn, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.
- Hughes, E.R. and Rogers, J. (1979). The concept of area. En R. Lesch (Ed.), *Conceptual Powers of Children: an Approach through Mathematics and Science*, Schools Council Research Studies (pp. 78-135). Basingstoke. Inglaterra: Macmillan Education.
- Ibañez, M. y Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato. *Números*, 57, 19-32.
- Inan, H.Z. y Dogan-Temur, O. (2010). Understanding kindergarten teacher's perspectives of teaching basic geometric shapes: a phenomenographic research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(5), 457-468.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla. España: Alfar.
- Jaquet, F. (2000A). Il conflitto área-perimetro. Prima parte. *L'educazione matematica*, 2(2), 66-77.
- Jaquet, F. (2000B). Il conflitto área-perimetro. Seconda parte. *L'educazione matematica*, 2(3), 126-143.
- Johnson, H.C. (1986). Area is a measure. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 17(4), 419-424.
- Jones, K. y Fujita, T. (2013). Interpretations of national curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 671-683.

- Kamii, C. y Clark, F.B. (1995). Equivalent Fractions: their difficulty and educational implications. *Journal of mathematics behavior*, 14(4), 365-378.
- Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of “length \times width”: Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 105-115.
- Kim, R.Y. (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 44 (2), 175-187.
- Kline, M. (1986). *El fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?* Madrid. España: Siglo XXI Editores.
- Konic, P, Godino, J. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Numeros*.74, 54-74.
- Kordaki, M (2003). The effect of tools of a computer microworld on students’ strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics* 52(2), 177–209.
- Kordaki, M. and Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: the role of a computer microworld, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 1–36.
- Kospentaris, G., Spirou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students’ strategies in área conservation geometrical task. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127.
- Kramarski, B., Weisse y I. Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(2), 179–193.
- Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 113-121). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la referencia de propiedades geométricas en un ambiente de de geometría dinámica en el nivel medio. *RELIME*, 9(3), 361-382.
- Lean, G. y Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), 267-299.
- Lee, C-H y Tso, T.H. (2007). Pre-sevice teachers constructing mental images by using different media. En J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park y D.Y. Seo (Eds). *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 31* (Vol 1, p. 252). Seúl. Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.
- Lémondid, C. (1991). Analyses et réalisation d’une expérience d’enseignement de homothétiee. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2-3), 295-324.
- Léon, O. (2005). *Experiencia Figural y Procesos Semánticos para la argumentación en geometría*. Disertación doctoral no publicada. Universidad del Valle. Cali, Colombia.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks, *Journal for Research in Mathematics Education* 31 (2), 234–241.

- Li, Y. Chen, X, An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 41(6), 809-826.
- Li, Y., Chen, X. y Kulm, G. (2009). Mathematics teachers' practices and thinking in lesson plan development : a case of teaching fraction division. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 41(6), 717-731.
- Li, Y., Zhang, J. y Ma, T. (2009). Approaches and practices in developing school mathematics textbooks in China. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 41(6), pp. 733-748.
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(4), 405-427.
- Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), 29-55.
- Love, E. y Pimm, D. (1996) 'This is so': a text on texts. En A.J. Bishop et al (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-409). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah. Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Maher, C.A. and Beattys, C.B. (1986). Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old students. En E. Lansing, G. Lappan and R. Even (Eds.), *Proceedings of the 8 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 8* (pp. 163-168). East Lansing. Michigan State.
- Malmivuori, M.L. (2006). Affect and Self-Regulation. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 149-164.
- Malonga, F. (2009). Les équations différentielles à l'interface mathématiques-physique: praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminales. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(3), 335-357.
- Mamona-Downs, J. y Papadopoulos, I. (2006). The problema-solving element work relate to the concept of área. En J. Novotná, H. Moraova, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 4, pp. 121-128). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.
- Markovits, Z., Rosenfeld, S. y Eylon, B.S. (2006). Visual cognition: content knowledge and beliefs of preschool teachers. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 4, pp. 145-152). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.
- Marmolejo, G. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad*. Tesis de magister no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

- Marmolejo, G. (2005). Análisis del Tópico de Geometría y Medición. En, L. Torres (Ed.) *Pruebas Censales y Formación de Pensamiento Matemático en la escuela* (pp. 27-44). Cali. Colombia: Universidad del Valle.
- Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2014). Control Visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. En prensa.
- Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2013A). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), pp. 87-106.
- Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 9-34.
- Martin, L. C, La Croix, L., y Fownes, L. (2005). Fractions in the workplace: Folding back and the growth of mathematical understanding. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 29* (Vol 3, pp. 305-312). Melbourne. Australia: University of Melbourne.
- Martinez, C. y Penalba, M.C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 24(2), 285-297.
- Martinez, M. y Brizuela, B. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 285-298.
- Martinez, C. y Penalba, M.C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 24(2), 285-297.
- Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds). *Investigación en Educación Matemática XIII. SEIEM XIII* (pp. 5-20). Santander. España: SEIEM.
- Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA*. 1(3), 113-123.
- Mesa V. (2010). Strategies for controlling the work in mathematics textbooks for introductory calculus. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 7(16), 235-265.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks : an empirical approach. *Educational Studies in Mathematics* 56 (2-3), 255-286.
- Mesa, V. y Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational studies in mathematics*, 79(1), 85-107.
- Mesquita, A. (1989). *L'Influence d'aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Disertación doctoral no publicada, Université de Strasbourg, Strasbourg. Francia.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96*. Bogotá. Colombia: Creamos Alternativas.

- Monterrubio, M.C. Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*. 5(3), 105-127.
- Montis, A.M., Mallocci, P. y Polo, M. (2003). Congettura e argomentazione nella costruzione dei concetti di equiestensione e isoperimetria: un percorso didattico dalla prima alla quinta elementare. *L'educazione matematica*, 5(1), 1-12.
- Moreira Baltar, P. (1997). Learning process for the concept of area planar regions in 12–13 year-olds. En Erkki Pehconen (ed.), *Proceedings of the 21st International Conference, Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 264–27). Lathi, Finland.
- Moriena, S. y Scaglia, S. (2003), Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la Geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.
- Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduate´s responses to semantic abbreviations, 'geometric' images and multi-level abstractions in group theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43 (2), 169–189.
- Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words, Exercises in Visual Thinking*. Washington. Estados Unidos: Mathematical Association of America.
- Olmo, M.A. Moreno, M.F. Gil, F. (1989). *Superficies y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid. España: Editorial Síntesis
- Ortega, T. (1996). Modelo de valoración de textos matemáticos. *Números*, 28, 4-12.
- Ospina, M.A. y Salgado, J. (2010). Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo. En G. García (Ed.), *Actas del 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Aprendizaje y Evaluación de las matemáticas* (pp. 482-491). Bogotá. Colombia: Cengage Learning.
- Otte, M. (1986). What is a text?, En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 173-203). Dordrecht: Kluwer Publishing Company.
- Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2004). Students' structuring of rectangular arrays. En M. J. Heines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 28* (Vol 3, pp. 465-472). Bergen. Noruega.
- Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young students' intuitive understanding of area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Outhred, L. y Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 20*, (Vol 4, pp. 91-98). Valencia. España. Universidad de Valencia.
- Owens, K., y Outhred L. (1997). Early representations of tiling areas. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 21* (Vol 3, pp. 312-319). Lahti. Finlandia: Helsinki University.
- Padilla, V (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathématiques*. Thèse U.L.P. Strasbourg, Francia.

- Pang, J.S. y Hwang, H.M. (2006). A comparative analysis of elementary mathematics textbooks of Korea and Singapore. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds). *Proceeding of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 1, p. 347). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.
- Pape, S.J., Bell, C.V. y Yetkin, I.E. (2003). Developing Mathematical Thinking and Self-Regulated Learning: A Teaching Experiment in a Seventh-Grade Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 179-202.
- Pellegrino, J.W. y Kail, R. (1982). Process analyses of spatial aptitude. En R.J. Sternberg (Ed.). *Advances in the psychology of human intelligence*. Hilldale. Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pepín, B., Gueudet, G. y Trouche, L. (2013). Investigate textbooks an crucial interface between culture, policy and teacher curriculum practice: two contrasted case studies in France and Norway, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 685-698.
- Pepin, B., Haggarty, L. y Keynes, M. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 33(5), 158-175.
- Peralez, F.J. y Jiménez, J.D. (2002). Las ilustraciones en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias en los libros de texto. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(3), 369-386.
- Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*, New York. Estados Unidos: Norton and Company.
- Pinto, M. y Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: a case study and theory. *For the Learning of Mathematics*, 22(1), 2-10.
- Pitta, D., Pantazi, and Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 5-26.
- Popoca, M. y Acuña, C. (2011). Cambios en figuras de área igual, conservación y relaciones figúrales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 24, pp. 541-550). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Presmeg, N. (2006a). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam. Netherlands: Sense Publishers.
- Presmeg, N. (2006b). A Semiotic View of the Role of Imagery and Inscriptions in Mathematics Teaching and Learning. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague. 1, 19-34.
- Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects, which influence use of visual imagery in high school mathematics. En F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the 15 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 15*, (Vol 3, pp. 191-198). Assisi. Italia.

- Presmeg, N. (1986a). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Presmeg, N. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
- Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis*, 10(1), 47-92.
- Quílez, M.J. y Martínez, M.B. (2005). El modelo Sol-Tierra-Luna en el lenguaje iconográfico de estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 153-166.
- Quispe, W., Gallardo, J. y González, J.L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas Peruanos? *PNA*, 4(3), 11-131.
- Rahim, M.H. y Olson, A. (1999). Qualitative patterns in plane geometry. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(3), 373-389.
- Rahim, M.H. and Sawada, D. (1990). The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 21(2), 303-308.
- Ramirez, R. (2012). *De los alumnos con talento matemático. Habilidades de visualización*. Tesis Doctoral No publicada. Universidad de Granada. Granada. España.
- Ramma, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and colleges mathematics texts books. *Journal of mathematical behavior*, 23(4), 389-404.
- Rezat, S. (2010). The utilization of mathematics textbooks as instrument for learning. En, V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6, Working Group 7* (pp. 1260-1269). Lyon, France: Institut National De Recherche Pédagogique.
- Richard, P. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursive-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229-263.
- Richard, P., Meavilla, V. y Fortuny, J.M. (2010). Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. *Enseñanza de las ciencias*, 28(1), 95-112.
- Richard, P. y Sierpinska, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. *Revue des sciences de l'éducation*, 30 (2), 379-409.
- Rickard, A., Colledge, A. y Michigan, A. (1996). Connections a confusion: Teaching perimeter and área with a problema-solving oriented unit. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(3), 303-327.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona. España: ICE / Horsori.
- Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM. The international journal on mathematics education*, 40(1), 65-82.

- Rivera, F.D. y Becker, J.R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 140-155.
- Robitaille, D.F. y Garden, R. A. (1989). *The IEA study of mathematics II: Contexts and ou ! Comes of school mathematics*. Oxford. Pergamon Press.
- Rock, I. (1985). *La percepción*. Editorial. Prensa Científica. Barcelona. España.
- Rogalski, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques Mesures et quantification: les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP*, 320, 563-586.
- Rojas, O., Ramírez, M., Escalona. M., Estrada, M. y Sánchez, J. (2012). El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. En R. Flórez (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 25, pp. 45-55). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Rösken, B. y Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words – the role of visualization in mathematics learning. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 30(4), pp. 457-464). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.
- Sabena, C., Radford, L. y Bardini, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. En H.L. Chick y J.L. Vicent (Eds). *Proceedings 29 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 29* (Vol 29(1), pp. 129-136). Melbourne. Australia: University of Melbourne.
- Sáiz, M. (2008). La enseñanza del volumen en los libros de texto mexicanos: un siglo de educación en México. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 47, 78-93.
- Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática*, 15(2), 27-53.
- Schmidt, W.H., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, Y., Sawada, T., Valverde, G., Mc Knight, C. Prawat, R., Wiley, D.E., Raizen, S., Britton, E.D. y Wolfe, R.G. (1996). *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*. Dordrecht. Netherlands: Kluwers Academic Publishers.
- Schneider, W. y Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(2), 149–161.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (1987). What's the fuss about metacognition? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189–215). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Schubring, G. (1988), Discussions epistemologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier Colloque Franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique* (pp. 137-145), Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics*, 7(3), 41-51.
- Schunk, D.H. (1996). Goal and self-evaluative influences during children's cognitive skill learning. *American Educational Research Journal*, 33(2), 359-382.
- Serrado, A. y Azcárate, P. (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, 15(1), 67-98.
- Sfard, A. (1994). Reification as a birth of a metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-55.
- Shepard, R.N. y Metzler, J. (1971). Mental rotation of three dimensional objects. *Science*, 171, 701-703.
- Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21-49.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria, 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En, A. Escolano (Ed). *Historia ilustrada del libro escolar en España del antiguo régimen a la segunda república* (pp. 273-398). Madrid. España: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.
- Silver, E. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: what might we learn? *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 41(6), 827-832.
- Son, J.W. (2013). How preservice teachers interpret a respond to student errors. Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics*, 84(1), 49-70.
- Son, J.W. (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and division of fractions in Korea and in the U.S. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 29 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 29* (Vol, 4, pp. 200-208). Melbourne. Australia: University of Melbourne.
- Souto, B. y Gómez, I.M. (2010). Comprensión visual y concepto de integral en la enseñanza universitaria. En A. Gutierrez y L. Ordoñez (Eds.), *Jornadas de Investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 80-94). Jaén. España. Universidad de Jaén. Servicio de Publicaciones.

- Stacey, K. y Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks, *Educational studies in mathematics*, 72(3), 271–288.
- Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM. The international journal on mathematics education*, 40(1), 97-110.
- Stylianou, D. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317.
- Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing ? En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of the 25 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 25*, (Vol 4, pp. 225-232). Utrecht. Netherland: Utrecht University.
- Sun, X. (2011). Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational studies in mathematics*, 76(1), 65-85.
- Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.
- Teixeira, L.M., de Mendonça, T.M. y Ferreira, C.E. (2011). Aspectos visuales y conceptuales en interpretaciones de graficas lineales por estudiantes. *BOLEMA*, 24(40), 679-700.
- Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295.
- Tirosh, D. y Stavy, R. (1996). Intuitive rules: a way to explain and predict student's reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38 (1-3), 51-66.
- Topçu, T., Kertil, M., Akkoç, H. Yılmaz, K. y Önder, O. (2006). Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds), *Proceedings of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 30*, (Vol 5, pp. 281-288). Praga. Republica Checa: Charles University in Prague.
- Torregosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME*, 10(2), 275-300.
- Torregosa, G., Quesada, V. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 327-340.
- Tracy Noble, R., Cara, D. y Tracey, W. (2004). Learning to see: making sense of the mathematics of change in middle school. *International journal of computers for mathematical learning*, 9(2), 109-167.
- Turegano, P. (2007). Imágenes del concepto de integral definida. *Ensayos*, 22, 17-57.
- Turegano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, 16(2), 233-249.
- Turegano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valencia. Valencia.

- Ubuz, B. (2006). Student conceptions and textbook messages: polygons. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds), *Proceeding of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education. PME 30* (Vol 1, p. 347). Melbourne. Australia: University of Melbourne.
- Vergnaud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela*. México: Editorial Trillas.
- Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century (Discussion Document for an ICMI Study). En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 337-346). Dordrecht. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Wagner, D. (2012). Opening mathematics texts: resisting the seduction. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 153-169.
- Wagman, H.G. (1975). The child's conception of area measure. En M. Roskopf (Ed.), *Children's mathematical concepts: six Piagetian studies in mathematical education* (pp. 71-110). New York. Estados Unidos: Teachers College, Columbia University.
- Walcott, C., Mohr, D. y Kastberg, S.E. (2009). Making sense of shape: analysis of children's written responses. *Journal of Mathematical Behaviour*, 28(1), 30-40.
- Warren, E. y Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185.
- Weinberg, A. y Wiesner, E. (2011). Understanding mathematics textbooks through reader-oriented theory. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 49-63.
- Whitebread, D. y Coltman, P. (2010). Aspects of pedagogy supporting metacognition and mathematical learning in young children; evidence from an observational study. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42(2), 163-178.
- Yeap, B.H. y Kaur, B. (2008). Elementary school students engaging in making generalisation: a glimpse from a Singapore classroom. *ZDM. The international journal on mathematics education*, 40(1), 55-64.
- Yerushalmy, M. (2005). Function of Interactive Visual Representations in Interactive Mathematical Textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical learning*, 10 (3), 217-249.
- Yim, J. (2010). Children's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 105-120.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*. 25(3), 224-239.
- Zaskis, R., Dubinski, E., Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of student's understanding of the group D_4 . *Juornal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.
- Zimmerman, B.J. (2002). Achieving self-regulation: The trial and triumph of adolescence. En F. Pajares y T. Urdan (Eds.), *Academic motivation of adolescents* (Vol. 2, pp. 1-27). Greenwich, CT: Information Age.

Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles

Zimmermann, W. y Cunnigham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? En W. Zimmermann y S, Cunnigham (Eds.) *Visualization in teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7). Estados Unidos: Editorial Board.