

**Tesis Doctoral**

**Universidad de Salamanca**

**Facultad de Economía y Empresa**

**Departamento de Administración y Economía de la Empresa**



**“CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO FINANCIERO  
EN PRESENCIA DE EVENTOS DE ALTO  
IMPACTO: DISTRIBUCIONES PARAMÉTRICAS Y  
DENSIDAD GRAM-CHARLIER”**

Doctorando

**ANDRÉS MORA VALENCIA**

Directores de Tesis:

**JAVIER PEROTE PEÑA**

**ESTHER B. DEL BRÍO GONZÁLEZ**

Salamanca, Mayo de 2014



## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar doy gracias a Dios, sin Él no soy nada. Quiero agradecer también a mis directores, a la Dra. Esther del Brío González y al Dr. Javier Perote, por su orientación, dedicación y paciencia. A la Dra. Esther y al Dr. Javier también agradezco por introducirme a las técnicas semi-paramétricas, compartir sus conocimientos de manera incondicional, por su colaboración humana, y por haber confiado durante todos estos años en mí para sacar adelante este proyecto. Sin su ayuda no hubiese sido posible realizar esta meta personal y profesional.

También agradezco a los profesores del Programa de Doctorado por su contribución y aporte académico, en especial al Dr. Pablo Antonio Muñoz Gallego por su calidad humana y sus aportes en las técnicas de investigación. Al igual que al Dr. Alberto de Miguel Hidalgo, por sus importantes aportes durante mi proceso de formación en el área de las Finanzas.

Agradezco a mi madre por su infinito apoyo desde que comencé este Programa y siempre me motivó a terminar esta Tesis de manera satisfactoria. Quiero también expresar mi gratitud al Centro de Investigaciones Económicas y Financieras (CIEF) de la Escuela de Economía y Finanzas de la Universidad EAFIT por dejarme realizar la estancia de investigación y brindarme su apoyo en la culminación de mi investigación, en especial al Dr. Gustavo Canavire, al Dr. Juan Felipe Mejía y a MSc. Andrés Mora Cuartas. Por último y no menos importante, agradezco al Profesor Dr. Diego Agudelo por sus valiosos consejos, apoyo académico y su gran calidad humana. Este trabajo está dedicado de manera especial a la memoria de mi padre Guillermo, a mi madre Hilda y a mi hermano Diego Fernando.

## Tabla de Contenido

<b>CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO.....</b>	<b>5</b>
I.1. INTRODUCCIÓN.....	8
I.2. OBJETIVOS DEL TRABAJO .....	10
<b>CAPÍTULO II: Aplicación de la medida de riesgo condicional a índices bursátiles en periodo de crisis.....</b>	<b>19</b>
II.1. INTRODUCCIÓN .....	19
II.2. Valor en Riesgo.....	22
II.3. Crisis subprime y crisis de deuda pública .....	24
II.4. Modelo VaR-ARMA-GARCH.....	26
II.4.1 Métodos .....	27
II.5 Aplicación 1: cuatro índices bursátiles europeos .....	30
II.5.1. Backtesting .....	35
II.6. Aplicación 2: Datos de tres índices bursátiles .....	39
II.6.1. Backtesting .....	43
II.7. Discusión.....	51
II.8. Conclusiones .....	54
<b>CAPÍTULO III: Aproximación multivariante a una función de distribución de rendimientos de una cartera .....</b>	<b>60</b>
III.1. INTRODUCCIÓN .....	60
III.2 Aproximaciones a la función de distribución de una cartera. ....	63
III.2.1 El caso univariante .....	63
III.2.2. El caso multivariante .....	66
III.3 Aplicación empírica .....	67
III.4. Conclusiones.....	75
<b>CAPÍTULO IV: CÓPULAS: Pronóstico del VaR mediante distribuciones semi-paramétricas para índices de hedge funds durante la reciente crisis financiera.....</b>	<b>79</b>
IV.1. INTRODUCCIÓN .....	79
IV.2. Definiciones.....	82
IV.3. Cópula Gram-Charlier .....	84
IV.3.1 Simulación .....	86
IV.4. Aplicación empírica: Cuantificación de VaR mediante el uso de la meta distribución GC .....	89
IV.4.1. Caso Univariante.....	89
IV.4.2. Caso multivariante: .....	96
IV.6. Conclusiones.....	99
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>107</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>116</b>

## INDICE DE TABLAS

Tabla II.1.a. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del PSI20.....	31
Tabla II.1.b. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del IBEX35.....	31
Tabla II.1.c. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del DAX30.....	31
Tabla II.1.d. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del EUROSTOXX50	32
Tabla II.2.a. Valores de log-verosimilitud cuando las innovaciones se distribuyen como una normal.....	34
Tabla II.2b. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) cuando las innovaciones se distribuyen como una normal.....	34
Tabla II.2c. Valores de log-verosimilitud cuando las innovaciones se distribuyen como una t-Student.....	34
Tabla II.2d. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) cuando las innovaciones se distribuyen como una t-Student .....	33
Tabla II.2e. Valores de log-verosimilitud cuando las innovaciones se distribuyen t-Student asimétrica.....	35
Tabla II.2f. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) cuando las innovaciones se distribuyen como una t-Student asimétrica .....	35
Tabla II.3. Excepciones esperadas para los distintos métodos de contraste en el periodo pre-crisis. ....	37
Tabla II.4. Excepciones esperadas para los distintos métodos de contraste en el periodo de crisis. ....	38
Tabla II.5. Estadísticos descriptivos para los rendimientos de los índices bursátiles .....	39
Tabla II.6. Valores de log-verosimilitud para diferentes modelos de media-varianza y bajo diferentes distribuciones .....	41
Tabla II.7. Parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1). ....	42
Tabla II.8. Parámetros de EVT y GC para los residuos estandarizados. ....	43
Tabla II.9. Comportamiento del VaR para los diferentes modelos .....	49
Tabla II.10. Relación entre el VaR y ES para niveles de $\alpha$ que se aproximan a uno. ....	53
Tabla III.1. Estadísticos descriptivos para EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30. ....	68
Tabla III.2. Densidad MGC de los índices bursátiles: EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30. ....	71
Tabla III.3. Densidad t Multivariante para EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30. ....	73
Tabla III.4. VaR estimado para una cartera equiponderada del EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30. ....	75
Tabla IV.1. Estadísticos descriptivos para los rendimientos de los <i>Hedge funds</i> .....	90
Tabla IV.2. Valores de log-verosimilitud para diferentes modelos de media y varianza condicional y bajo diferentes distribuciones .....	91
Tabla IV.3. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1). ....	92
Tabla IV.4. Backtesting para los rendimientos de <i>Hedge funds</i> .....	94
Tabla IV.5. Ajuste de las cópulas.....	96
Tabla IV.6. Ajuste de las marginales .....	97

Tabla IV.7. Meta distribuciones analizadas .....	97
Tabla IV.8. Estadísticos descriptivos para los rendimientos de los <i>Hedge funds</i> .....	98
Tabla IV.9. Medición del VaR para las diferentes meta distribuciones .....	98

## INDICE DE GRÁFICOS

Gráficos II.1.a-II.1-h. ACF de rendimientos PSI, IBEX, DAX, EUROSTOXX y valores absolutos .....	33
Gráfico II.2. Funciones de autocorrelación (ACF) para los niveles de los rendimientos de los índices bursátiles y sus valores absolutos .....	40
Gráfico II.3: Parámetros cambiantes en el tiempo de la distribución t-Student para los rendimientos del índice MSCI EUROPE. ....	44
Gráfico II.4: Parámetros cambiantes en el tiempo de la distribución Pareto generalizada para los rendimientos del índice MSCI EUROPE. ....	46
Gráfico II.5: Parámetros cambiantes en el tiempo del modelo GC-ML1 para los rendimientos del índice MSCI EUROPE. ....	47
Gráfico II.6: Parámetros cambiantes en el tiempo del modelo GC-ML2 para los rendimientos del índice MSCI EUROPE. ....	48
Gráfico II.7. Backtesting de VaR al 99% bajo diferentes especificaciones .....	50
Gráfico III.1 Ajuste de las distribuciones GC comparado con el histograma de datos .....	74
Gráfico IV.1. Representación gráfica del concepto de cópula. Caso bivalente .....	82
Gráfico IV.2 Simulas de cópula Gaussiana y GC .....	89
Gráfico IV.3. Funciones de autocorrelación para los rendimientos de los hedge funds y sus valores absolutos .....	91
Gráfico IV.4. VaR al 99% en el periodo de backtesing bajo diferentes especificaciones .....	95

# CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO

## I.1. INTRODUCCIÓN

Las compañías generalmente toman dos tipos de decisiones: decisiones financieras y decisiones de inversión. El objetivo de las decisiones financieras es obtener recursos minimizando el coste de capital de estos recursos, mientras que el objetivo de las decisiones de inversión es maximizar la rentabilidad dado un nivel de riesgo o minimizar el riesgo dado un nivel de rentabilidad (Markowitz, 1952). La teoría financiera dice que a mayor riesgo presente una inversión, el decisor exigirá mayor rentabilidad, puesto que la pérdida puede ser también mayor que en una inversión con menor riesgo. Por lo tanto, el área de gestión de riesgos de una empresa financiera o no financiera debe decidir qué riesgos son aceptables para la empresa y qué acciones tomar.

Esta tesis trata de riesgos financieros a los que se enfrenta un banco o una institución financiera, aunque igualmente son aplicables al área de tesorería de una cualquier empresa. Los riesgos financieros se clasifican principalmente en riesgo de crédito, de mercado y operacional. Debido a que los bancos se enfrentan también a posibilidades de quiebra, y se ven especialmente afectadas por el efecto contagio, el Acuerdo de Basilea de 1988 (también llamado Basilea I) estableció unas reglas de capital mínimo requerido por los bancos para garantizar su salud financiera. Este primer acuerdo relacionaba los requerimientos de capital con sus exposiciones al riesgo crediticio. La Enmienda de 1996, que fue implementada en 1998, incorporó requerimientos de capital no sólo por riesgo crediticio, sino también por riesgo de mercado, incluyendo por primera vez de forma explícita la medida del VaR (*Value-at-Risk*). El VaR mide la máxima pérdida esperada dado un nivel de confianza y un horizonte determinado. Para estimar el riesgo de mercado, el procedimiento estándar consiste en calcular VaR al 99% para un horizonte de 10 días.

Dadas las recientes crisis financieras, el estudio de la cuantificación del riesgo se ha vuelto de gran importancia para la academia y la industria financiera. Los modelos

iniciales del VaR, basados en la distribución normal, no son suficientes para capturar los eventos de cola, como lo muestran las pruebas de comportamiento sobre rendimientos en acciones, en los trabajos de McNeil y Frey (2000), Jalal y Rockinger (2008), Rachev, et al. (2010), entre otros.

De acuerdo a las características empíricas de las rentabilidades de activos financieros, de varianza condicional y clústers de volatilidad, se emplean modelos tipo GARCH para filtrar las rentabilidades. Los modelos GARCH fueron introducidos por Bollerslev (1986) como una generalización de los modelos ARCH (Engle, 1982). Adicionalmente, la volatilidad es un ingrediente clave para un cálculo fiable del VaR (Angelidis, et al., 2004; Bali y Theodossiou, 2007; Mabrouk y Aloui, 2010; So y Yu, 2006; Thang y Shieh, 2006; Wu y Shieh, 2007).

Por tal razón, el estudio se enfocará en el análisis de métodos paramétricos y semi-paramétricos que capturen de manera más adecuada la distribución de las pérdidas por riesgo de mercado, y en especial la cola de las distribuciones. Dentro de los métodos paramétricos para medir el riesgo se han utilizado distribuciones concretas capaces de incorporar colas anchas (leptocúrticas) y posibles asimetrías, sin embargo estas técnicas no parecen ser suficientemente flexibles para capturar adecuadamente el comportamiento en las colas (por ejemplo, no son capaces de recoger saltos en la masa probabilística de los rendimientos). Para solucionar estos problemas se han propuesto aproximaciones semi-paramétricas (o semi-no-paramétricas) que parecen funcionar bien cuando el orden de la expansión es grande pero, sin embargo, se han utilizado poco en la práctica y la mayor parte de sus aplicaciones se limitan a incluir los primeros momentos (indicadores de asimetría y curtosis).

Finalmente, se han planteado otros enfoques diseñados específicamente para analizar el riesgo en las colas (basados en las teorías de valores extremos) pero que no parecen muy adecuadas en contextos de baja volatilidad o cuando se pretende obtener medidas de riesgo menos conservadoras. La presente Tesis doctoral pretende abordar todas estas técnicas y mostrar su capacidad relativa para capturar el riesgo, especialmente en periodos en los que perturbaciones negativas ocurren con alta frecuencia.

Por otro lado, la mayor parte de los métodos para estimar el riesgo de las colas de la distribución se centran en el análisis de distribución de los rendimientos de un activo. Sin embargo, dada la alta correlación entre los rendimientos de los distintos activos es

deseable tener en cuenta la distribución conjunta de las variables a la hora de cuantificar el riesgo de una cartera de valores. Sin embargo la estimación conjunta es muy costosa debido al problema de la dimensionalidad que complica enormemente la estimación, especialmente cuando se utilizan técnicas de máxima verosimilitud. Por ello analizaremos métodos de estimación alternativos basados en la estimación por etapas y el método de momentos.

En concreto, esta tesis trata de medición o cuantificación del riesgo financiero con el propósito de brindar herramientas adecuadas a las instituciones financieras (y no financieras) en la estimación de capital regulatorio y económico, y de esta manera, poder tomar las mejores decisiones, en cuanto a transferir o mitigar riesgo, y así tratar de anticipar posibles crisis. En una entrevista realizada a Alan Greenspan, anterior presidente de la Reserva Federal, en un programa televisivo de Bloomberg en Julio de 2010, se le pregunta qué decisión hubiera tomado a la luz de la crisis financiera subprime, y su respuesta va en línea del objetivo de esta tesis:

“Bueno, el principal error... es que juzgamos mal lo que los economistas llaman la cola negativa de la distribución de probabilidad del riesgo.... Todos reconocemos el hecho de que esto probablemente es lo que llamamos una cola pesada, lo cual significa que había más riesgos de lo habitual. Lo que no reconocimos es que ésta era realmente una cola muy pesada.”

## **I.2. OBJETIVOS DEL TRABAJO**

La presente Tesis doctoral pretende profundizar en la búsqueda de métodos adecuados para la cuantificación del riesgo, especialmente en contextos de alta volatilidad. En este sentido se pretende abordar los siguientes objetivos:

1) Predicción del riesgo mediante distribuciones paramétricas. Se compara la distribución normal con otras leptocúrticas (t-Student) y asimétricas (t-asimétrica). Se hace especial énfasis en el comportamiento de estas especificaciones durante las recientes crisis financieras.

Los modelos iniciales del VaR suponían que las rentabilidades de los activos financieros se distribuyen como una normal. Sin embargo, hay estudios que muestran que las

rentabilidades presentan distribuciones asimétricas y con colas pesadas (Kon, 1984; Badrinath y Chatterjee, 1988; y Mittnik y Rachev, 1993). Varios trabajos consideran un modelo GARCH con innovaciones distribuidas t-Student (Bollerslev, 1987; Bollerslev y Wooldridge, 1992). Aunque la distribución t-Student exhibe colas más pesadas que la de una normal, la t-Student también es simétrica. Por tal razón, estudiamos una versión asimétrica de esta distribución. Hansen (1994) propone un modelo GARCH con residuos modelizados mediante la distribución t-asimétrica, y es extendida por Jondeau y Rockinger (2003); y Bali, Mo y Tang (2008). Existen en la literatura estudios que comparan VaR con distribuciones normal, t-Student y t-asimétrica (Tang, Shieh, 2006; Wu y Shieh, 2007; Mabrouk y Saadi, 2012), y obtienen buenos resultados para la t-asimétrica. En nuestro estudio empleamos la versión t-asimétrica de Fernandez y Steel (1998) implementada por varios autores (Lambert y Laurent, 2000; Stavroyiannis et al. 2012).

2) Predicción del riesgo mediante el enfoque semi-paramétrico. Este es un enfoque más general (engloba la normal como caso particular) y flexible. Dentro de este enfoque merece especial interés comparar la expansión tradicional de Gram-Charlier (GC) con otras versiones positivas y analizar hasta qué punto son necesarias dichas extensiones desde el punto de vista empírico de la predicción del VaR. También se intentan proponer métodos de selección endógena del orden de truncamiento óptimo de la expansión de forma que se garantice una mínima calidad predictiva. Finalmente, se estudiarán las ventajas o desventajas de métodos de estimación más eficientes pero sólo consistentes bajo especificación correcta como la máxima verosimilitud frente a metodologías más sencillas y consistentes como la de la estimación de momentos.

La densidad Gram-Charlier (GC) es una expansión alrededor de la densidad normal ajustada a las presencia de asimetría y curtosis. Esta densidad fue introducida por Gram (1879); Charlier (1905); Edgeworth (1907). Gran parte de la literatura financiera en metodologías semi-paramétricas está dedicada a la valoración de derivados siguiendo la idea de los trabajos de Jarrow y Rudd (1982); Corrado y Su (1996). Sin embargo, existen pocos trabajos enfocados a la aplicación de la Gram-Charlier a cuantificación del VaR (Perote, 2003; Marumo y Wolff, 2007; Puzanova et al., 2009; Ñíguez y Perote, 2012).

3) Predicción del VaR mediante metodologías basadas en la teoría de valores extremos (en particular la metodología Picos sobre el Umbral - POT). Se estudia la sensibilidad de las predicciones obtenidas frente al nivel de confianza y al umbral elegido.

La teoría del valor extremo (EVT, por sus siglas en inglés) se fija en las observaciones extremas en lugar de la distribución entera. Sin embargo, distintos estudios han mostrado el buen comportamiento de esta técnica en la cuantificación de riesgo, y especialmente con valores altos de cuantiles (Danielsson y de Vries, 2000; Longin, 2001; Danielsson y Morimoto, 2000; Bali, 2003; Bali y Neftci, 2003; Bystrom, 2004; Fernandez, 2005; Bekiros y Georgoutsos, 2005). En nuestro estudio utilizaremos el método propuesto por McNeil y Frey (2000) también empleado por otros estudios (Kiesel et al., 2003; Laurini y Tawn, 2009; Karmakar, 2013). Este procedimiento consiste en una primera etapa, en filtrar las rentabilidades mediante un modelo tipo GARCH, y en la segunda etapa en ajustar la distribución de Pareto generalizada (GPD, por sus siglas en inglés) a la cola de los residuos estandarizados obtenidos de la primera etapa.

4) Planteamiento de extensiones multivariantes de las distribuciones anteriores, especialmente en el caso del enfoque semi-paramétrico, que han sido escasamente empleadas en el campo de las finanzas. Presentamos propuestas de métodos de estimación consistentes que sean sencillos y resuelvan el problema del crecimiento exponencial del número de parámetros conforme aumenta el número de variables de la cartera.

Se realiza una primera aproximación al caso multivariante mediante el planteamiento de un método sencillo de estimación en tres etapas para una cartera de activos financieros, el cual facilita la estimación de la función de densidad de la cartera de activos financieros, y se comparan estimaciones mediante el método de los momentos y el de máxima verosimilitud. Se extiende esta aproximación al caso de cópulas: a partir de la función de distribución multivariante planteada en Perote (2004), se obtiene una expresión cerrada para la cópula GC. Se emplea esta cópula para generar meta distribuciones GC y se compara con otros modelos como la cópula Gaussiana y la cópula t ampliamente usada en finanzas (Embrechts et al., 2002; Vaz de Melo Mendes y de Souza, 2004; Kole et al., 2007; Fernandez, 2008). Sin embargo, conforme a nuestro

conocimiento, éste es el primer estudio donde se obtiene una fórmula cerrada de la cópula GC y se aplica a la cuantificación del riesgo financiero.

En este orden de ideas, el presente documento se divide como sigue: en el capítulo II se presenta una comparación de la densidad GC con respecto a las funciones paramétricas más comúnmente empleadas para cuantificación de riesgo, desde el punto de vista univariante, es decir, se realizan comparaciones del VaR a rendimientos de activos individuales (índices bursátiles de Europa, Estados Unidos, de Mercados Emergentes, PSI, Ibex, Dax y EUROSTOXX). Tal y como veremos en los resultados de este capítulo, el enfoque EVT y la densidad GC son métodos fiables para calcular VaR al 99%. Otro resultado importante es que expansiones más grandes de la densidad GC, no necesariamente implica un mejor cálculo del VaR comparado con la versión de dos parámetros. Adicionalmente, el método de estimación de los momentos para la densidad GC parece ofrecer medidas de riesgo más exactas que mediante máxima verosimilitud.

En el capítulo III se realiza una primera aproximación al caso multivariante para las expansiones GC, mediante una técnica simple de tres pasos, por lo tanto este capítulo es un puente entre el capítulo anterior (caso univariante) y el siguiente (caso multivariante – cópulas). Al aplicar esta técnica de tres pasos a una cartera de tres índices bursátiles (EUROSTOXX 50, Ibex 35 y Dax 30) se encuentra que la densidad GC multivariante presenta una medida adecuada del VaR al 99%, en especial, cuando se estiman sus parámetros mediante el método de los momentos. El capítulo IV introduce el concepto de cópulas y se obtiene una expresión cerrada de la cópula GC para cuantificar el riesgo de una cartera de activos financieros. Los resultados de este capítulo muestran que el VaR estimado al 99% de confianza de una cartera equiponderada conformada por dos índices de *hedge funds* mediante el modelo GC multivariante es cercano al VaR empírico, y parece comportarse mejor que otras especificaciones multivariantes (normal y t-Student).

Finalmente, se presentan las conclusiones de este estudio, las cuales nos permiten afirmar que bajo escenarios de alta volatilidad y con presencia de riesgo de cola, la distribución normal y t-Student fallan en el cálculo del VaR. En algunos casos, la distribución t-asimétrica resulta ser un buen modelo para la cuantificación del VaR al 99%, confianza requerida por los reguladores financieros. Los mejores modelos resultan ser el enfoque EVT y la densidad Gram-Charlier. La densidad GC es flexible y permite

capturar de manera adecuada las características de activos financieros de asimetría y de leptocurtosis en su forma más sencilla, es decir, la densidad Gram-Charlier con dos parámetros. La técnica EVT ha mostrado tener buen comportamiento en otros tipos de riesgo, como el crediticio y operacional. Sin embargo, esta técnica adolece del problema de selección del umbral, puesto que no existe un método “óptimo”, y este tema aún es foco de investigación.

De tal forma que la tesis a contrastar es si mediante densidades univariantes y multivariantes semi-paramétricas, en especial la densidad Gram-Charlier, se obtienen estimaciones más precisas de las colas pesadas de la distribución de los rendimientos de activos financieros y, por tanto, si dichas medidas representan una cuantificación más adecuadas del riesgo.

Finalmente, las aplicaciones han sido desarrolladas en el paquete R y están disponibles mediante solicitud al autor.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angelidis, T., Benos, A., Degiannikis, S. (2004): The use of GARCH models in VaR estimation. *Statistical Methodology* 2, 105-128.
- Badrinath, S. G., Chatterjee, S. (1988): On measuring skewness and elongation in common stock distribution: The case of market index. *Journal of Business* 61, 451-472.
- Bali, T.G. (2003): An extreme value approach to estimating volatility and value at risk. *Journal of Business* 76, 83-108.
- Bali, T.G., Neftci, S.N. (2003): Disturbing extremal behaviour of spot price dynamics. *Journal of Empirical Finance* 10 (4) 455-477.
- Bali, T.G., Mo, H., Tang, Y. (2008): The role of autoregressive conditional skewness and kurtosis in the estimation of conditional VaR. *Journal of Banking & Finance* 32, 269-282.
- Bali, T.G., Theodossiou, P. (2007): A conditional-SGT-VaR approach with alternative GARCH models. *Annals of Operations Research* 151, 241-267.
- Bekiros, S. D., Georgoutsos, D. A. (2005): Estimation of Value-at-Risk by extreme value and conventional methods: a comparative evaluation of their predictive performance, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 15(3), 209–228.
- Bollerslev, T. (1986): Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307–327.
- Bollerslev, T. (1987): A conditional heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The Review of Economics and Statistics* 69, 542–547.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J.M., (1992): Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews* 11 (2), 143–172.
- Bystrom, H.N.S. (2004): Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis* 13 (2) 133-152.
- Charlier, C.V. (1905): Uber die darstellung willkurlicher funktionen. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 9, 1-13.

- Corrado, C. J., Su T. (1996): S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula. *Journal of Futures Markets* 16, 611-629.
- Danielsson, J., de Vries, C. (2000): Value-at-Risk and Extreme Returns. *Annales D'Économie et de Stastique* 60, 239-270.
- Danielsson, J., Morimoto, Y. (2000): Forecasting Extreme Financial Risk: a Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market. Disc. Paper No. 2000-E-8, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.
- Edgeworth, F.Y. (1907): On the representation of statistical frequency by series. *Journal of the Royal Statistical Society (Series A)* 70, 102–106.
- Embrechts P, McNeil A, Straumann D. (2002): Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*. Cambridge University Press; 176–223.
- Engle, R.F. (1982): Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- Fernandez, V. (2005): Risk management under extreme events. *International Review of Analysis* 14 (2) 113-148.
- Fernandez, V. (2008): Copula-based measures of dependence structure in assets returns. *Physica A* 387 3615–3628.
- Fernandez, C., Steel, M. (1998): On Bayesian modelling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association* 93, 359-371.
- Gram, J.P. (1879): Om Raekkeudviklinger Bestemte Ved Hjaelp av de Mindste Kvadraters Methode (Kobenhavn).
- Hansen, B.E. (1994): Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review* 35, 705-730.
- Jalal, A. and Rockinger, M. (2008): “Predicting tail-related risk measures: The consequences of using GARCH filters for non-GARCH data”. *Journal of Empirical Finance* 15(5), 868–877.
- Jarrow, R., Rudd A. (1982): Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics* 10, 347–369.
- Jondeau, E., Rockinger, M. (2003): Conditional volatility, skewness and kurtosis: Existence, presistence, and comovements. *Journal of Economic Dynamics & Control* 27, 1699-1787.

- Karmakar, M. (2013): Estimation of tail-related risk measures in the Indian stock market: An extreme value approach. *Review of Financial Economics*. To appear.
- Kiesel, R., Perraudin, W., Taylor, A. (2003): An Extreme Analysis of VaRs for Emerging Market Benchmark Bonds. En: *Credit Risk: Measurement, Evaluation and Management*, eds: G.Bol, et al., Physica-Verlag.
- Kole, E, Koedijk, K., Verbeek, M. (2007): Selecting copulas for risk management *Journal of Banking & Finance* 31 2405–2423.
- Kon, S. (1984): Models of stock returns: A comparison. *Journal of Finance* 39, 147-165.
- Lambert, P., Laurent, S. (2000): Modelling skewness dynamics in series of financial data. Discussion Paper. Louvain-la-Neuve Institut de Statistique.
- Laurini, F., Tawn, J.A. (2009): Regular variation and extremal dependence of garch residuals with application to market risk measures. *Econometric Review* 28, 146-169.
- Longin, F. (2001): From Value at Risk to stress testing: the Extreme Value approach. *Journal of Banking and Finance* 24, 1097-1130.
- Mabrouk, S., Aloui, C. (2010): One-day-ahead value-at-risk estimations with dual long-memory models: Evidence from the Tunisian stock market. *International Journal of Financial Services Management* 4, 77-94.
- Mabrouk, S., Saadi, S. (2012): Parametric Value-at-Risk analysis: Evidence from stock indices. *The Quarterly Review of Economics and Finance* 52, 305-321.
- Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1(1), 77-91.
- Marumo, K., Wolff, R. (2007): Expansion methods applied to asset return distributions. *Journal of Risk* 10, 3-24.
- McNeil AJ and Frey R. (2000): Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach . *Journal of Empirical Finance*, 7: 271-300.
- Mittnik, S., Rachev, S.T. (1993): Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric Reviews* 12, 261-330.
- Ñíguez, T.M., Perote, J. (2012): Forecasting heavy-tailed densities with positive Edgeworth and Gram-Charlier expansions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 74, 600-627.
- Perote, J. (2003): Value at risk of non-normal portfolios. *Spanish Review of Finance and Accounting* 115, 290–310.

Puzanova, N., Siddiqui, S., Trede, M. (2009): Approximate value-at-risk calculation for heterogeneous loan portfolios: possible enhancements of the Basel II methodology. *Journal of Financial Stability* 5, 374-392.

Rachev, Z., Racheva-Iotova, B. y Stoyanov, S. (2010): Capturing fat tails, *Risk Magazine*, May 2010, 72-77.

So, M.K.P., Yu, P.L.H. (2006): Empirical Analysis of GARCH models in value-at-risk estimation. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 16, 180-197.

Stavroyiannis, S., Makris, I., Nikolaidis, V., Zarangas, L. (2012): Econometric modeling and value-at-risk using the Pearson type-IV distribution. *International Review of Financial Analysis*.

Tang, T.L., Shieh, S.J. (2006): Long memory in stock index future markets: A value-at-risk approach. *Physica A* 366, 437-448.

Vaz de Melo Mendes, B., Martins de Souza, R. (2004): Measuring financial risks with copulas. *International Review of Financial Analysis* 13 27 – 45.

Wu, P.T., Shieh, S.J. (2007): Value-at-risk analysis for long-term interest rate futures: Fat -tail and long memory in return innovations. *Journal of Empirical Finance* 14, 248-259.

# **CAPÍTULO II: Aplicación de la medida de riesgo condicional a índices bursátiles en periodo de crisis\***

## **II.1. Introducción**

Generalmente, en el campo de las finanzas, se relaciona el riesgo con las pérdidas potenciales que puede sufrir una inversión. Por lo tanto, una medición cuantitativa del riesgo involucra una probabilidad de pérdida en un futuro. El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (CSBS), principal regulador de riesgos en instituciones financieras a nivel mundial, identifica tres tipos principales de riesgos financieros. Estos son: riesgo de mercado, riesgo crediticio y riesgo operacional. Su primer Acuerdo fue publicado en 1988 con la intención de brindar guías de cómo los bancos deberían calcular su ratio de capital para cubrir potenciales pérdidas por riesgo crediticio. Posteriormente, en 1996, se publicó la Enmienda del BIS (Banco Internacional de Pagos) donde se incorpora el riesgo de mercado. En esta Enmienda se propone utilizar para tal fin una medida de riesgo basada en VaR (Value-at-risk) para el libro de negociación en un horizonte de 10 días y con una confianza del 99% (donde el libro de negociación consiste de una cartera de instrumentos negociados por el banco, como por ejemplo: acciones, bonos, permutas, contratos a plazo, futuros, opciones, entre otros). Desde entonces la medida VaR ha sido popularizada y no solamente como medida estándar, sino que además ha sido usada en modelos internos de los bancos.

El VaR se puede definir como la máxima pérdida esperada en un horizonte de tiempo dado un nivel de confianza, y esta medida fue introducida por J. P. Morgan en 1994 en su documento técnico de Riskmetrics para ser aplicado al riesgo de mercado. En 2004 se publicó el acuerdo de Basilea II donde se incluye el riesgo operacional, y en este caso los modelos de medición avanzada sugieren aplicar el cálculo de VaR al 99.9% en un horizonte de un año.

---

\*Una versión de este capítulo se encuentra en segunda revisión en la revista “Emerging Markets Review”, indexada en el Social Sciences Citation Index (SSCI) con índice de impacto en 2012 de 1,167.

Este capítulo se centra en el análisis de mediciones de VaR en riesgo de mercado a series temporales univariantes. El riesgo de mercado se puede definir como el riesgo derivado de las fluctuaciones en los precios de los subyacentes, que pueden ser activos o pasivos financieros de una entidad financiera. Los primeros modelos de VaR, denominados VaR paramétricos, suponían la distribución normal para las pérdidas de los activos subyacentes. En la crisis subprime y la de deuda pública soberana se ha observado caídas extremas en los principales índices bursátiles ocasionando grandes pérdidas a los inversores. De esta manera, suponer que los rendimientos de los activos financieros siguen una distribución normal conlleva a infravalorar la pérdida potencial, puesto que las colas de esta distribución decrecen de manera exponencial y no capturan de manera adecuada los eventos extremos.

En presencia de este error, se produce la quiebra de las entidades financieras cuando ante un suceso adverso de gran impacto ocurre que su capital no es suficientemente alto como para provisionar tales pérdidas. Por lo tanto, es necesario contar con mejores técnicas para estimar adecuadamente la cola de la distribución de pérdidas de los rendimientos de los activos financieros, y así, una medida de riesgo fiable. En la literatura se ha propuesto el uso de la distribución t-Student como ajuste a la distribución de pérdidas, puesto que esta distribución presenta colas más pesadas que las de una normal. Sin embargo, esta distribución también es simétrica y las distribuciones de pérdidas pueden presentar asimetría. Por tal razón, también se observa en la revisión de la literatura el empleo de la distribución t-Student asimétrica (Hansen, 1994), que es una variante de la t-Student, y sí permite recoger el comportamiento asimétrico de las distribuciones empíricas.

Estas tres distribuciones serán analizadas en este documento, junto con una cuarta técnica que está basada en la teoría del valor extremo (EVT, por sus siglas en inglés). Esta técnica ha sido ampliamente utilizada en riesgos financieros arrojando resultados fiables (Embrechts et al., 1997; Reiss y Thomas, 1997; Coles, 2001; y McNeil et al., 2005). Tradicionalmente, la teoría del valor extremo se clasifica en dos métodos: máximos por bloque (*block maxima*) y picos sobre el umbral (POT, por sus siglas en inglés, *peak-over-threshold*). El método POT es la técnica más usada para analizar la cola de una función de distribución, y es la que se empleará en este capítulo. Estas dos técnicas están basadas en modelos distribucionales obtenidos a partir de teorías asintóticas, y para el método POT se emplea la distribución de Pareto generalizada. El

último enfoque a comparar es una técnica semi-paramétrica basada en la densidad Gram-Charlier (Gram, 1879; Charlier, 1905; Edgeworth, 1907).

La mayoría de la literatura financiera acerca de metodologías semi-paramétricas está dedicada a la valoración de instrumentos derivados, cuyos artículos pioneros son Jarrow y Rudd (1982), y Corrado y Su (1996). Sin embargo, existen pocos estudios que aplican Gram-Charlier a estimación del VaR (Perote, 2003; Marumo and Wolff, 2007; Puzanova et al. 2009; Níguez and Perote, 2012).

De esta manera, obtener una medida de VaR fiable implica un desafío para modelizar de manera adecuada la cola de las distribuciones de pérdida de los rendimientos de los activos financieros. En este estudio se hará el supuesto de que los rendimientos siguen un proceso estacionario con volatilidad condicional. Por lo tanto, se usará un modelo ARMA-GARCH que permita recoger posibles autocorrelaciones en las series de rendimientos analizadas, como también la volatilidad condicional y los clústers de volatilidad de los rendimientos, de tal manera que la distribución de las innovaciones estarán dadas por los cuatro modelos mencionados anteriormente.

Para evaluar la calidad los métodos, se comparan las pérdidas diarias realizadas (históricas) con la predicción de la máxima pérdida de cada modelo. Para cuantificar riesgo de mercado, la regulación sugiere estimar VaR al 99%, por lo tanto, se espera que en 1% de los casos (o días de estudio), las pérdidas realizadas superen el VaR estimado. Esta técnica es conocida como *backtesting*. A continuación, se presentan dos aplicaciones donde las metodologías mencionadas anteriormente (normal, t-Student, t-asimétrica, EVT y Gram-Charlier) se prueban mediante un *backtesting*. El periodo de análisis del *backtesting* se ha dividido en dos, un periodo de precrisis y otro de crisis. Ambos periodos de igual tamaño. El periodo de crisis comprende la crisis subprime y la crisis de deuda pública soberana. Todos los modelos cuentan con filtros para la posible dependencia con media y varianza condicional mediante un ARMA-GARCH. Para cada uno de los modelos se realiza un análisis de las veces que la pérdida real excede el VaR estimado.

De esta forma, este capítulo se divide de la siguiente forma: la sección II.2 define la medida de riesgo VaR, la siguiente sección II.3, describe brevemente las recientes crisis financieras. La cuarta sección II.4, trata de los métodos y los datos a analizar, mientras que en la sección II.5 y II.6 se presentan dos aplicaciones y se validan los métodos

mediante un *backtesting*. La sección II.7 discute la situación actual del VaR y su adecuado uso, y finalmente la sección II.8 concluye el capítulo.

## II.2. Valor en Riesgo

Existe una amplia literatura relacionada al VaR, como por ejemplo Jorion (2006), Alexander (2009), Hubbert (2012), Hull (2012), entre otros. El Valor en Riesgo (VaR) es un método que surgió de la necesidad de las entidades financieras de cuantificar la exposición al riesgo de mercado, utilizando técnicas estadísticas tradicionales. El VaR mide la máxima pérdida que se podría sufrir en condiciones normales de mercado en un intervalo de tiempo y con un cierto nivel de confianza. En pocas palabras, es una medida estadística de riesgo utilizada frecuentemente por instituciones que desean medir los riesgos en carteras de inversión.

Por lo tanto, el VaR resume la peor pérdida sobre un horizonte de tiempo objetivo con un nivel de confianza dado. Desde el punto de vista estadístico, el VaR es la descripción del cuantil (o percentil) de las distribuciones proyectadas de ganancias y pérdidas en un horizonte de tiempo objetivo (Jorion, 2006). J. P. Morgan, entidad financiera estadounidense, propuso en 1994 en su documento técnico denominado RiskMetrics<sup>1</sup>, el concepto de “Valor en Riesgo” como un modelo de cuantificación de la posible pérdida causada por el riesgo de mercado, en el uso de diferentes instrumentos financieros.

Tradicionalmente, la interpretación de la magnitud del VaR se corresponde con “Estamos  $\alpha\%$  seguros de que no perderemos más de X euros en los siguientes t días”. Donde  $\alpha\%$  es el nivel de confianza.

En la práctica, el estándar de la industria establece una confianza del 99% para la estimación del VaR en un horizonte de 10 días para riesgo de mercado. Es decir, en un 1% de las veces, la rentabilidad de la cartera o del activo, perderá más de lo que indica el VaR, con relación a la rentabilidad esperada. Usualmente, al observar la función de densidad de una serie de rendimientos históricos de una cartera con  $n$  activos, se encuentran oscilaciones de los rendimientos alrededor de un valor medio levemente diferente de cero y cuya distribución se aproxima a la normal. Sin embargo, los hechos

---

<sup>1</sup> [www.msci.com](http://www.msci.com)

estilizados muestran que la distribución de los rendimientos presenta colas más pesadas que las de una distribución normal, donde la curtosis de los rendimientos observados es mayor que tres. Por tal razón, se debe emplear una distribución que represente de manera adecuada los rendimientos del subyacente y de acuerdo con los resultados empíricos.

Después de obtener la distribución, se calcula un punto en el dominio de la función de densidad correspondiente al 5% ó un 1% del área del rango inferior  $\alpha$ . El trayecto que hay desde dicho punto en el dominio de la distribución en relación con el valor esperado de la distribución se denomina Valor en Riesgo.

Cont (2001) identifica varios hechos estilizados de los rendimientos de acciones. Entre los más importantes están: (1) ausencia de autocorrelación lineal, (2) la distribución incondicional (y en algunos casos, condicional) de los rendimientos presenta colas pesadas, (3) asimetría en la distribución de pérdidas y ganancias, (4) clúster de volatilidad y (5) decrecimiento lento de autocorrelación en el valor absoluto de los rendimientos.

La distribución normal no cumpliría las propiedades empíricas (2) y (3). Por esta razón, ha sido muy discutido el uso de esta distribución para calcular VaR, puesto que se estaría subestimando el nivel de capital requerido. Se han propuesto otros tipos de distribuciones, como la t-Student, que presenta colas más pesadas que las de una distribución normal, pero también es simétrica. En este capítulo se emplearán las dos distribuciones comentadas, como también la t-Student asimétrica, que es una variación de la t y permite modelar distribuciones asimétricas. Dadas estas características de las distribuciones empíricas, se empleará una cuarta metodología basada en la teoría del valor extremo. Dependiendo de la técnica que se emplee, se usa la distribución de valor extremo generalizada (GEV, por sus siglas en inglés) o la distribución de Pareto generalizada (GPD, por sus siglas en inglés). Se utilizará el método POT, ya referido, que se basa en la distribución GPD. Puesto que la función de densidad Gram-Charlier (GC) es muy flexible, ésta permite incorporar diferentes formas (incluyendo saltos) con una cantidad variable de parámetros. En la mayoría de estudios empíricos es común utilizar la distribución GC con dos parámetros, que corresponden al coeficiente de asimetría y exceso de curtosis.

Para realizar el *backtesting* se empleará una metodología ARMA-GARCH para modelar las series de los rendimientos. Las propiedades empíricas (4) y (5) indican presencia de heteroscedasticidad condicional en los datos de rendimientos, por tal razón se empleará el modelo GARCH y así modelar la volatilidad de los datos. El modelo ARMA servirá en caso de que la propiedad (1) no se satisfaga y ayude a mejorar la estimación de los parámetros del modelo GARCH.

### **II.3. Crisis subprime y crisis de deuda pública**

A continuación se describen brevemente las dos crisis financieras que han afectado recientemente la economía global. En primer lugar la crisis subprime y seguidamente la crisis de deuda pública. En varios textos y artículos se relata lo sucedido con respecto a las crisis, por ejemplo, Shiller (2008), Kolb (2010), Hull (2009), entre otros.

Un préstamo subprime es un crédito que se realiza a acreedores que no reciben los mejores tipos de interés debido a su deficiente historia crediticia o a la falta de capacidad de pagar deuda. En Estados Unidos se realizó una gran cantidad de estos créditos en el mercado inmobiliario, y los problemas comenzaron a aparecer en 2006 cuando se inició la escalada de los tipos de interés de estos compromisos de deuda. De esta manera, los prestatarios no pudieron cumplir con sus obligaciones y los precios de las viviendas empezaron a caer.

Los préstamos hipotecarios (subprime) fueron empaquetados en instrumentos financieros sofisticados, y así se fue transfiriendo riesgo al mercado financiero. Entre estos instrumentos estaban los títulos respaldados por hipotecas (*mortgage backed securities*, MBS) y obligaciones de deuda colateralizadas (CDOs, por sus siglas en inglés, *credit default options*), entre otros. Estos instrumentos garantizaban una rentabilidad al inversor cuando no hubiera incumplimiento en las hipotecas subyacentes, las cuales en mayor parte eran subprime. Adicionalmente, fueron incorrectamente calificadas por las agencias de *rating*. Cuando se disparó el impago de los acreedores subprime, estos instrumentos comenzaron a fallar y los inversores alrededor del mundo perdieron sumas importantes de dinero.

Como consecuencia de ello, importantes bancos de inversión como Bear Stearns y Lehman Brothers quebraron, generando pánico en los mercados financieros, desplomes en los índices bursátiles y alta volatilidad. Las entidades financieras que tenían gran cantidad de estos instrumentos financieros en sus balances no pudieron liquidar sus posiciones, y así esta crisis se convirtió en una crisis crediticia. Entonces, el gobierno estadounidense se vio obligado a implementar un programa para comprar los activos “tóxicos” de las instituciones financieras involucradas. Regiones que no se vieron afectadas directamente por negociar estos activos tóxicos, sufrieron un efecto indirecto por la crisis, debido al *credit rationing* o racionamiento del crédito y a la dificultad en la consecución de recursos financieros en el mercado de capitales o a su obtención a un mayor coste.

En cuanto a la crisis subsiguiente, la crisis de deuda pública, se puede decir que tuvo sus efectos a principios de 2009 cuando países como Grecia y España vieron su calificación de deuda soberana degradarse a A- y a AA+ respectivamente. A finales de ese mismo año la deuda griega fue calificada como BBB+, a tres escalones de los bonos basura. Posteriormente, en el primer trimestre de 2010, la calificación de la deuda de Portugal fue rebajada a A- y la griega calificada como bono basura por la agencia S&P. La deuda soberana de Irlanda también fue degradada y su calificación fue AA- a finales de 2010. Para mediados de 2011, Moody's califica a Portugal y a Irlanda como bonos basura, mientras Grecia recibía un segundo paquete de rescate de la Unión Europea. Italia también sufre un recorte en la calificación por parte de S&P en septiembre de 2011, y su deuda es calificada como A (Bloomberg<sup>2</sup>).

Mientras que la crisis anterior tuvo sus orígenes en Estados Unidos, la crisis de la deuda soberana nace principalmente en Europa con gran impacto también en el mundo. El primer gran banco afectado por esta crisis de deuda fue Dexia SA, y entre Bélgica y Francia tomaron control de sus principales unidades. Los problemas fiscales de Grecia generaron un riesgo de impago de deuda soberana que de inmediato ocasionó un efecto de contagio en otros países de la Eurozona, especialmente en países donde el sector público (y privado) se encontraba sobre-endeudado, como en el caso de España. Como se aprecia, estos problemas se han generado, principalmente, por el alto nivel de

---

<sup>2</sup> European Crisis Timeline From Maastricht Treaty to Fiscal Union Agreement, por Jeffrey Donovan y Emma Ross-Thomas.

endeudamiento, como consecuencia en parte de los bajos tipos de interés desde la constitución de la zona euro.

Estas dos grandes crisis han generado alta volatilidad en los mercados financieros y junto con los hechos estilizados de los rendimientos financieros, se probarán diferentes distribuciones que permitan capturar de mejor manera los efectos de la crisis sobre las mediciones del VaR en diversos índices bursátiles.

#### II.4. Modelo VaR-ARMA-GARCH

Para estimar el VaR condicional se asume que las tasas de variación en tiempo continuo de los precios (rendimientos) siguen un proceso estacionario, que se puede representar como  $r_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$ , donde se asume que  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  son medibles con respecto a la información disponible del proceso en el tiempo  $t - 1$ .  $Z_t$  son las innovaciones independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) que siguen una distribución  $G$ , con media cero y varianza uno. De esta manera, para estimar el VaR condicional se usa la siguiente relación:

$$\mu_t = \varphi + \phi\mu_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$Z_t = \varepsilon_t/\sigma_t, \quad Z_t \sim G(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

$$\text{VaR}_{t+1} = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}q_\alpha(Z) \tag{II.1}$$

donde  $Z$  es una variable aleatoria con distribución  $G$ , y  $q_\alpha(Z)$  es su cuantil a nivel  $\alpha$ . Para estimar la media y volatilidad condicional,  $\mu_{t+1}$  y  $\sigma_{t+1}$  respectivamente, se emplea un proceso ARMA(1,1) con errores GARCH(1,1) cuyos parámetros se estiman mediante máxima verosimilitud. Más detalles de modelos ARMA y GARCH en aplicaciones a la gestión del riesgo se pueden encontrar en McNeil et al. (2005; capítulo 4 y sección 7.2.6), y en Jondeau et al. (2007; capítulos 4 y 8).

### II.4.1 Métodos

En esta sección se emplean innovaciones con las siguientes distribuciones: (i) normal, (ii) t-Student, (iii) t-Student asimétrica, (iv) método EVT, y (v) GC.

#### (i) Distribución normal

La función de densidad de una normal está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{II.2})$$

donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  son los parámetros de media y varianza de una normal.

#### (ii) Distribución t-Student

En este documento también se usan innovaciones que se distribuyen mediante t-Student y la t-Student asimétrica. Para la distribución t,  $q_\alpha(Z) = \sqrt{(v-2)/v} t_\alpha^{-1}$  donde  $t_\alpha$  representa el valor de la función de distribución para una probabilidad  $\alpha$  de una t-Student con  $v$  grados de libertad. Se introduce el factor  $\sqrt{(v-2)/v}$  para estandarizar la distribución y que tenga varianza uno, puesto que la varianza de una t es igual a  $v/(v-2)$ . En consecuencia, la densidad de una t-Student estandarizada viene dada por:

$$t(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi(v-2)}\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{v-2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (\text{II.3})$$

Donde  $\Gamma(\cdot)$  representa la función gamma y  $v$  los grados de libertad. Obsérvese que utilizamos una t-student estandarizada para asegurar que la perturbación del modelo tenga varianza 1.

#### (iii) Distribución t-Student asimétrica

Hansen (1994) propuso la distribución t-Student asimétrica introduciendo una generalización de la distribución t manteniendo el supuesto de media cero y varianza igual a uno. Giot y Laurent (2003) usan modelos GARCH con innovaciones distribuidas t-Student asimétrica, y encuentran que las medidas de VaR se comportan mejor con este tipo de distribución que asumiendo la distribución t-Student. Lambert y Laurent (2001) también utilizan modelos GARCH con innovaciones t-Student asimétrica aplicados a

NASDAQ. Estos últimos autores emplean el enfoque de la t-Student asimétrica propuesto por Fernández y Steel (1998), y ésta es la que se usa en este documento. La función de distribución obtenida por Fernández y Steel (1998), está directamente relacionada con la obtenida por Hansen (1994), y está dada por:

$$g(x) = \frac{2}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} f(\gamma x) \quad \text{para } x < 0, \quad (\text{II.4})$$

y

$$g(x) = \frac{2}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} f\left(\frac{x}{\gamma}\right) \quad \text{para } x \geq 0,$$

donde  $\gamma$  es el parámetro que describe el grado de asimetría y  $t(x)$  es la función de densidad de una t (Expresión II.3). De esta forma  $q_\alpha(Z) = sst_\alpha^{-1}$  donde  $sst_\alpha$  representa el valor de la función de distribución de una t-Student asimétrica para un  $\alpha$  dado.

#### (iv) Método EVT

Para el método ARMA-GARCH-EVT se usa el procedimiento de dos-pasos (two-step) propuesto por McNeil y Frey (2000):

- (1) Se ajusta el modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) mediante el enfoque de cuasi-máxima verosimilitud, con el cual no se asume una distribución  $G$  específica para las innovaciones, y se estiman  $\mu_{t+1}$  y  $\sigma_{t+1}$  usando el modelo ajustado.
- (2) En este paso se usan los residuos estandarizados del modelo, los cuales se asumen i.i.d., y se usa el método de picos sobre el umbral (POT), con un umbral del 10% de la cola de la distribución de los datos para estimar el cuantil al nivel  $\alpha$ . De esta manera,  $q_\alpha(Z)$  está dado por:

$$q_\alpha(Z) = u + \frac{\beta}{\xi} \left( \left( \frac{1-\alpha}{N_u/n} \right)^{-\xi} - 1 \right), \quad (\text{II.5})$$

donde  $u$  es el umbral escogido (o estimado),  $\beta$  y  $\xi$  son los parámetros de escala y de forma de una distribución de Pareto generalizada (GPD),  $N_u$  es la cantidad de datos que

exceden el umbral y  $n$  el total de datos de la muestra (residuos estandarizadas en este caso). Por lo tanto,  $N_u / n$  es un estimador empírico de la cola de los datos que han superado un umbral  $u$ . Para más detalles del método POT, ver Smith (1989), Davison y Smith (1990) y Leadbetter (1991). Teoría y aplicaciones más recientes en finanzas se pueden encontrar en los textos de Embrechts et al. (1997), McNeil et al. (2005), Coles (2001) y Reiss y Thomas (1997).

La función de distribución de Pareto generalizada está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\beta}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

El *talón de Aquiles* de la teoría del valor extremo es precisamente la selección del umbral. Escoger un valor de umbral conlleva a un tradeoff entre sesgo y varianza en la estimación de los parámetros, en especial el parámetro de forma  $\xi$  de la distribución GPD. Existen varios métodos para tratar de estimar este parámetro, desde gráficos hasta técnicas de remuestreo; sin embargo, en la actualidad no existe un método óptimo para la selección del umbral. Estudios empíricos han mostrado que una buena aproximación para escoger el umbral, es utilizar el 5% ó el 10% de los datos de la cola de la distribución. En este documento, siguiendo a McNeil y Frey (2000) se utiliza el 10%.

(v) La densidad Gram-Charlier (GC)

La función de densidad GC Tipo A está dada por:

$$f(z, \mathbf{d}) = (1 + \sum_{s=1}^n d_s H_s(z)) \phi(z), \quad (\text{II.7})$$

donde  $\phi(z)$  denota la función de densidad de la normal dada en (II.2),  $\mathbf{d}' = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $H_s$  es el polinomio de Hermite de orden  $s$ , el cual puede ser definido en términos de las derivadas de  $\phi(z)$  como:

$$\frac{d^s \phi(z)}{dz^s} = (-1)^s H_s(z) \phi(z) \quad (\text{II.8})$$

En particular, los primeros ocho polinomios de Hermite son:  $H_1(z) = z$ ,  $H_2(z) = z^2 - 1$ ,  $H_3(z) = z^3 - 3z$ ,  $H_4(z) = z^4 - 6z^2 + 3$ ,  $H_5(z) = z^5 - 10z^3 + 15z$ ,  $H_6(z) =$

$$z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15, H_7(z) = z^7 - 21z^5 + 105z^3 - 105z, H_8(z) = z^8 - 28z^6 + 210z^4 - 420z^2 + 105.$$

Algunos investigadores (Jondeau and Rockinger, 2001, o León et al. 2009) utilizan la densidad GC para denotar una transformación positiva del tipo propuesto por Gallant y Nychka (1987). En esta tesis se implementa la expansión original GC Tipo A, la cual es más sencilla y más útil en aplicaciones de VaR. Adicionalmente, la mayoría de estudios empíricos truncan la expansión en  $n = 4$  y emplean sólo dos términos de la expansión,  $d_3$  y  $d_4$ , puesto que estos términos corresponden al coeficiente de asimetría y exceso de curtosis, respectivamente. En las aplicaciones de este capítulo, inicialmente se estimará VaR empleando la expansión de GC truncada en el cuarto término, y se estimará mediante el método de los momentos (GC-MM), y mediante máxima verosimilitud (GC-ML1). Se emplea el procedimiento propuesto por Del Brio y Perote (2012) para estimar los parámetros en dos pasos. Primero, se estima la media y varianza condicional por medio del método de cuasi-máxima verosimilitud (QML, por sus siglas en inglés), y en segundo lugar, a partir de los residuos estandarizados, se estiman los parámetros  $d_s$ . Para estimar los parámetros del modelo GC-ML1 se maximiza la función de verosimilitud dada en la Ecuación (53), y para los parámetros del modelo GC-MM se aplican directamente las Ecuaciones (39)–(46) del artículo de Del Brio y Perote (2012, p. 534–5). Adicionalmente, se considera un modelo GC con expansión hasta el octavo término y se estima mediante máxima verosimilitud, este modelo se denota como GC-ML2. Para este modelo se identifica el orden de truncamiento “óptimo” mediante el Criterio de Información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés).

## **II.5 Aplicación 1: cuatro índices bursátiles europeos**

### **Datos y muestra.**

Debido a que la última crisis tiene sus orígenes en Europa, los datos corresponden a rendimientos de cuatro índices bursátiles europeos, tres índices bursátiles de países o índices nacionales y un índice de acciones de compañías de la eurozona que cotizan en bolsa. De los índices de acciones de países se escogen dos en los cuales se ha sentido

más el efecto de la crisis. Estos países son Portugal y España. El otro índice bursátil corresponde a Alemania, que ha sido considerada como el país de la Zona Euro que mejor ha sorteado la crisis. Finalmente el índice de empresas elegido es el Eurostoxx 50, que recoge las 50 compañías europeas de la categoría *blue-chips* (compañías que son consideradas estables desde el punto de vista financiero).

Las siguientes tablas presentan los estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos diarios de los índices analizados. Toda la serie representa el periodo comprendido entre el tercer trimestre de 2002 hasta primer trimestre de 2012. Mientras que el periodo pre-crisis se inicia en el tercer trimestre de 2002 hasta el 17 de julio de 2007. El periodo crisis comprende desde el 18 de julio de 2007 hasta primer trimestre de 2012. Se escoge el 18 de julio de 2007 como comienzo de la crisis financiera, debido a que en ese día Bear Stearns anunció cuantiosas pérdidas en sus dos *hedge funds*.

**Tabla III.1.a. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del PSI20**

Estadística	Toda la serie	Periodo Pre-crisis	Periodo de la crisis
Media	0.00003	0.00080	-0.00075
Mediana	0.00055	0.00093	-0.00034
Desviación estándar	0.01161	0.00619	0.01517
Varianza	0.00013	0.00004	0.00023
Curtosis	11.02584	4.12213	6.43274
Coefficiente de asimetría	-0.13753	-0.31826	0.02597
Rango	0.20575	0.06849	0.20575
Mínimo	-0.10379	-0.03302	-0.10379
Máximo	0.10196	0.03547	0.10196

**Tabla IV.1.b. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del IBEX35**

Estadística	Toda la serie	Periodo Pre-crisis	Periodo de la crisis
Media	0.00010	0.00083	-0.00063
Mediana	0.00077	0.00127	-0.00003
Desviación estándar	0.01487	0.00955	0.01871
Varianza	0.00022	0.00009	0.00035
Curtosis	7.77537	3.46610	5.20210
Coefficiente de asimetría	0.14577	-0.03492	0.23756
Rango	0.23070	0.10388	0.23070
Mínimo	-0.09586	-0.04945	-0.09586
Máximo	0.13484	0.05444	0.13484

**Tabla II.1.c. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del DAX30**

Estadísticos	Toda la serie	Periodo Pre-crisis	Periodo de la crisis
Media	0.00032	0.00080	-0.00016
Mediana	0.00093	0.00123	0.00050
Desviación estándar	0.01550	0.01334	0.01738

Varianza	0.00024	0.00018	0.00030
Curtosis	5.21645	3.67772	5.10576
Coefficiente de asimetría	0.04085	-0.10889	0.14134
Rango	0.18231	0.13422	0.18231
Mínimo	-0.07433	-0.06336	-0.07433
Máximo	0.10797	0.07086	0.10797

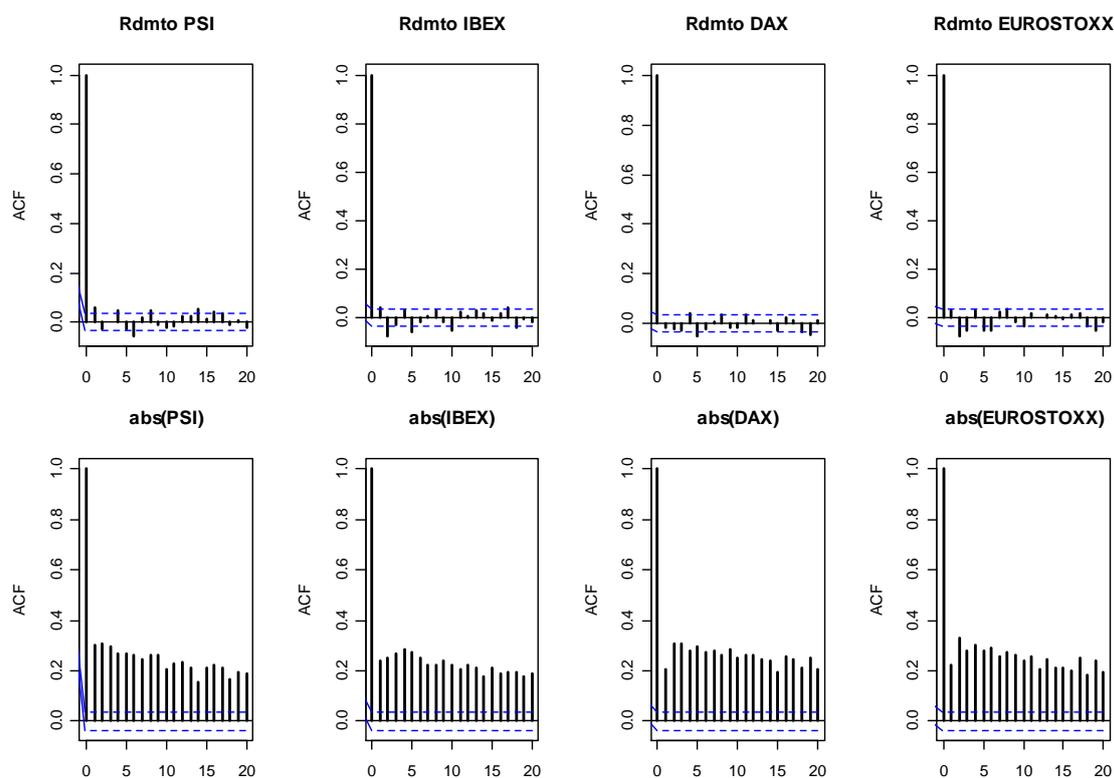
**Tabla II.1.d. Estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos del EUROSTOXX50**

<b>Estadísticos</b>	<b>Toda la serie</b>	<b>Periodo Pre-crisis</b>	<b>Periodo de la crisis</b>
Media	-0.00003	0.00050	-0.00056
Mediana	0.00055	0.00114	-0.00040
Desviación estándar	0.01500	0.01069	0.01831
Varianza	0.00022	0.00011	0.00034
Curtosis	6.69292	4.25463	4.91699
Coefficiente de asimetría	0.13340	0.16045	0.17210
Rango	0.20321	0.11145	0.20321
Mínimo	-0.08208	-0.04506	-0.08208
Máximo	0.12113	0.06639	0.12113

En las anteriores tablas se observa que el rendimiento medio logarítmico en el periodo de crisis para las series analizadas es negativo. Mientras que para el periodo de pre-crisis es positivo. También se observa que la volatilidad y la curtosis de los rendimientos logarítmicos de las cuatro series es mayor en el periodo de la crisis que en el periodo de pre-crisis. Otra medida de dispersión, el rango, muestra que los datos se encuentran más dispersos en el periodo de crisis. Los rendimientos logarítmicos del PSI20, IBEX35 y DAX30 presentan coeficiente de asimetría negativo en el periodo de pre-crisis y positivo para el periodo de crisis. Esto quiere decir que para el periodo de pre-crisis, estos índices, presentaban mayor probabilidad de obtener rendimientos logarítmicos más altos que bajos. Mientras que en el periodo de crisis sucede lo contrario.

Sin embargo, el coeficiente de asimetría para el índice EUROSTOXX 50 es positivo para ambos periodos. Los valores de la mediana diferentes a la media, confirman la asimetría de las distribuciones de los rendimientos. Esto, junto con los valores de curtosis, podría justificar el uso de medidas de VaR basadas en distribuciones como la t-asimétrica. A continuación, en los Gráficos II.1.a. a II.1.h, se presentan las funciones de autocorrelación de los rendimientos y valores absolutos de los rendimientos de cada una de las series.

## Gráficos II.1.a-II.1.h.



Como se puede apreciar, hay una ligera estructura autorregresiva en las series (las autocorrelaciones de los rendimientos son muy bajas), donde se podría identificar un modelo ARMA. Adicionalmente, existe autocorrelación entre los valores absolutos de los rendimientos, lo que indica que las series son heteroscedásticas, y se puede modelizar la volatilidad mediante un proceso GARCH. Esto último es un ejemplo de la evidencia empírica (5) que se comentó anteriormente.

A continuación, las Tablas II.2a-II.2f muestran los valores de log-verosimilitud de un modelo GARCH(1,1), un AR(1)-GARCH(1,1) y un ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para las series de los rendimientos en su totalidad del periodo. En términos de log-verosimilitud, cuanto mayor sea este valor, mejor será el modelo. También se muestran las estimaciones de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para las diferentes distribuciones de las innovaciones.

**Tabla II.2.a. Valores de log-verosimilitud cuando las innovaciones se distribuyen como una normal**

Log-verosimilitud	PSI	IBEX	DAX	EUROSTOXX
GARCH(1,1)	10080.29	9152.17	8970.46	9138.67
AR(1)-GARCH(1,1)	10104.42	9159.80	8971.10	9142.00
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	10104.47	9160.28	8974.64	9142.29

**Tabla II.2b. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) cuando las innovaciones se distribuyen como una normal.**

Estimaciones	PSI	IBEX	DAX	EUROSTOXX
$\phi$	5.349e-04 (0.00158)	5.841e-04 (0.0172)	1.744e-04 (0.169)	4.197e-04 (0.0713)
ar1 ( $\phi$ )	1.668e-01 (0.35009)	-1.376e-01 (0.4349)	7.447e-01 (2.28e-05)	-1.223e-01 (0.5379)
ma1 ( $\theta$ )	-5.675e-02 (0.75766)	2.083e-01 (0.2504)	-7.705e-01 (7.51e-06)	1.714e-01 (0.3977)
omega ( $\omega$ )	1.359e-06 (1.12e-06)	2.801e-06 (2.61e-07)	2.387e-06 (1.28e-05)	2.410e-06 (2.14e-06)
alpha ( $\alpha$ )	1.528e-01 (< 2e-16)	1.075e-01 (< 2e-16)	9.611e-02 (< 2e-16)	1.066e-01 (< 2e-16)
beta ( $\beta$ )	8.485e-01 (< 2e-16)	8.833e-01 (< 2e-16)	8.956e-01 (< 2e-16)	8.858e-01 (< 2e-16)

Los valores en paréntesis indican los p-valores para el contraste de la t.

**Tabla II.2c. Valores de log-verosimilitud cuando las innovaciones se distribuyen como una t-Student**

Log-verosimilitud	PSI	IBEX	DAX	EUROSTOXX
GARCH(1,1)	10158.96	9220.99	8987.49	9183.26
AR(1)-GARCH(1,1)	10177.46	9230.08	8988.04	9187.23
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	10177.61	9231.34	8992.74	9187.72

**Tabla II.2d. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) cuando las innovaciones se distribuyen como una t-Student.**

Estimaciones	PSI	IBEX	DAX	EUROSTOXX
$\phi$	5.301e-04 (0.00191)	8.677e-04 (0.000748)	2.344e-04 (0.164426)	6.026e-04 (0.01388)
ar1 ( $\phi$ )	2.037e-01 (0.29029)	-2.286e-01 (0.152775)	6.993e-01 (0.000704)	-1.721e-01 (0.38811)
ma1 ( $\theta$ )	-1.097e-01 (0.58243)	3.049e-01 (0.055324)	-7.251e-01 (0.000369)	2.231e-01 (0.26752)
omega ( $\omega$ )	8.989e-07 (0.00131)	1.170e-06 (0.005602)	1.779e-06 (0.001302)	1.505e-06 (0.00154)
alpha ( $\alpha$ )	1.413e-01 (1.72e-13)	9.394e-02 (3.46e-14)	9.133e-02 (< 2e-16)	9.872e-02 (< 2e-16)
beta ( $\beta$ )	8.653e-01 (< 2e-16)	9.068e-01 (< 2e-16)	9.049e-01 (< 2e-16)	8.994e-01 (< 2e-16)

Los valores entre paréntesis indican los p-valores para el contraste de la t

**Tabla II.2e. Valores de log-verosimilitud cuando las innovaciones se distribuyen t-Student asimétrica.**

Log-verosimilitud	PSI	IBEX	DAX	EUROSTOXX
GARCH(1,1)	10162.54	9229.55	8997.65	9192.86
AR(1)-GARCH(1,1)	10179.60	9236.32	8999.64	9195.74
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	10179.67	9237.94	9004.43	9196.37

**Tabla II.2f. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) cuando las innovaciones se distribuyen como una t-Student asimétrica.**

Estimaciones	PSI	IBEX	DAX	EUROSTOXX
$\phi$	4.671e-04 (0.004815)	6.548e-04 (0.01188)	1.590e-04 (0.03766)	3.914e-04 (0.1090)
arl ( $\phi$ )	1.690e-01 (0.399539)	-2.905e-01 (0.06685)	7.316e-01 (5.25e-12)	-2.285e-01 (0.2671)
ma1 ( $\theta$ )	-7.881e-02 (0.704152)	3.583e-01 (0.02238)	-7.746e-01 (8.44e-15)	2.751e-01 (0.1866)
omega ( $\omega$ )	9.412e-07 (0.000907)	1.160e-06 (0.00464)	1.624e-06 (0.00181)	1.415e-06 (0.0018)
alpha ( $\alpha$ )	1.382e-01 (2.42e-13)	9.256e-02 (1.13e-14)	8.804e-02 (< 2e-16)	9.687e-02 (< 2e-16)
beta ( $\beta$ )	8.657e-01 (< 2e-16)	9.068e-01 (< 2e-16)	9.080e-01 (< 2e-16)	9.004e-01 (< 2e-16)

Los valores entre paréntesis indican los p-valores para el contraste de la t

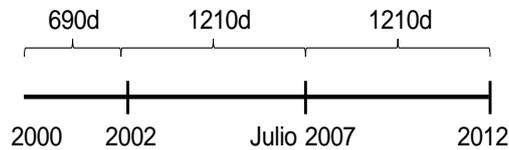
Como se puede observar en los anteriores resultados, los parámetros estimados para el modelo GARCH(1,1) resultan ser significativos. Aunque no en todos los casos los parámetros estimados del modelo ARMA(1,1) son significativos, los valores de log-verosimilitud son mayores para el modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1). Por tal razón, para el *backtesting* se modelizarán los rendimientos mediante un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1).

### II.5.1. Backtesting

Se realiza el *backtesting* para los cinco modelos y tres casos: periodo pre-crisis, periodo de crisis y periodo total. Para hacer el *backtesting* de la serie histórica  $x_1, \dots, x_m$ , se calcula el  $\text{VaR}_t^\alpha$  en los  $t$  días del siguiente conjunto:  $T = \{n + 1, \dots, m\}$ , usando una ventana de  $n$  días que varía según el periodo (si es pre-crisis, crisis o total).

En particular, el *backtesting* emplea una ventana de 690 días (un poco más de dos años y medio). El periodo total de análisis comprende desde el tercer trimestre de 2002 hasta primer trimestre de 2012, para un total de 2420 días (casi 10 años). Este periodo se

divide en dos tramos de igual tamaño, un periodo denominado pre-crisis que se inicia en el tercer trimestre de 2002 hasta el 17 de julio de 2007. El otro periodo se denomina periodo de crisis que comprende desde el 18 de julio de 2007 hasta primer trimestre de 2012, fecha fin de análisis. El siguiente gráfico ilustra más claramente esta división:



Luego se compara el VaR estimado con el valor realizado (observado) a dos niveles de confianza: 95% y 99%. Por lo tanto, cuando se estima el VaR al 95% (99%) se espera que en el 5% (1%) de los días de *backtesting* las variaciones negativas de los rendimientos hayan superado el nivel del VaR. A estos valores se les denomina comúnmente violaciones o excepciones.

Sea la función indicadora de violaciones  $I_t$  igual a:

$$I_t := 1_{\{x_{t+1} > \text{VaR}_t^\alpha\}} \quad (\text{II.9})$$

Esto quiere decir, que cada vez que haya una violación ( $x_{t+1} > \text{VaR}_t^\alpha$ ), la función toma el valor de 1, de lo contrario el valor de cero. Si el método funciona bien, se espera que la función indicadora de violaciones se comporte como realizaciones de ensayos i.i.d. Bernoulli con probabilidad de éxito  $1 - \alpha$ . Por lo tanto, se espera que  $\sum_{t=1}^m I_t \sim \text{Bin}(m, 1 - \alpha)$ . Esto es, que la suma de  $m$  ensayos Bernoulli se distribuya binomial con parámetros  $m$  y  $1 - \alpha$ . Así, se realiza un contraste de hipótesis binomial de una cola, donde la hipótesis nula indica que el método utilizado estima correctamente el VaR condicional. La hipótesis alternativa sugiere que el método infraestima o sobreestima el cálculo del VaR según sea el caso de número de violaciones esperadas. Un p-valor menor a 0.05 indica evidencia de no aceptar la hipótesis nula. Otros contrastes para *backtesting* pueden encontrarse, por ejemplo en Christoffersen (2003). En las siguientes tablas se muestran las excepciones en cada caso y el p-valor para el contraste de la binomial.

En el periodo de pre-crisis los días de *backtesting* comprenden desde mitad del año 2002 hasta julio 17 de 2007, para un total de 1210 días, y se usa una ventana de 690 días.

**Tabla II.3. Excepciones esperadas para los distintos métodos de contraste en el periodo pre-crisis.**

Modelo ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	Excepciones esperadas = 60			
	PSI 20	IBEX 35	DAX 30	EUROSTOXX 50
<b>95% 1210 días</b>				
ARMA-GARCH-normal	45 (0.0204)	53 (0.1786)	70 (0.1190)	65 (0.2940)
ARMA-GARCH-t	50 (0.0908)	62 (0.4399)	68 (0.1771)	77 (0.0202)
ARMA-GARCH-t asimétrica	46 (0.0287)	42 (0.0065)	45 (0.0204)	42 (0.0065)
ARMA-GARCH-EVT (u=10%)	42 (0.0065)	47 (0.0394)	56 (0.3039)	53 (0.1786)
ARMA-GARCH-MM	49 (0.0700)	50 (0.0908)	57 (0.3524)	43 (0.0098)
ARMA-GARCH-ML1	43 (0.0098)	46 (0.0286)	56 (0.3039)	53 (0.1786)
ARMA-GARCH-ML2	44 (0.0143)	51 (0.1157)	52 (0.1450)	51 (0.1157)
<b>99% 1210 días</b>				
	Excepciones esperadas = 12			
ARMA-GARCH-normal	16 (0.1618)	22 (0.0064)	18 (0.0659)	19 (0.0392)
ARMA-GARCH-t	13 (0.4355)	19 (0.0392)	14 (0.3286)	16 (0.1618)
ARMA-GARCH-t asimétrica	12 (0.5645)	13 (0.4355)	7 (0.0842)	11 (0.4496)
ARMA-GARCH-EVT (u=10%)	11 (0.4496)	16 (0.1618)	16 (0.1618)	12 (0.5645)
ARMA-GARCH-MM	9 (0.2324)	10 (0.3357)	13 (0.4355)	13 (0.4355)
ARMA-GARCH-ML1	11 (0.4496)	16 (0.1618)	12 (0.5645)	13 (0.4355)
ARMA-GARCH-ML2	11 (0.4496)	16 (0.1618)	11 (0.4496)	12 (0.5645)

Los valores en paréntesis indican los p-valores para el contraste de la binomial.

Los resultados de la Tabla II.3 permiten observar que no se rechaza la hipótesis nula de correcta estimación del VaR al 95% del método basado en la distribución normal para todos los casos, excepto para la serie de rendimientos del PSI-20, a un nivel de significación del 5%. El método basado en la distribución t, falla en el cálculo del VaR al 95% en la serie de rendimientos de EUROSTOXX50, en los otros casos funciona correctamente. Los otros métodos tienen un pobre rendimiento, como era de esperar. Puesto que mercados en condiciones “relativamente” tranquilas, no se espera eventos de cola, y la distribución normal y t-Student se comporten mejor en un nivel de confianza no tan alto, como el 95%. Pero cuando se requiere estimar VaR al 99%, el método basado en la normal es el que ofrece peores resultados (rechazándose la hipótesis nula de correcta estimación del VaR en dos mercados a un nivel de significación del 5%). Para este caso los métodos que mejor se comportan son la distribución t-asimétrica, el método basado en EVT y la distribución semi-paramétrica GC. El método basado en t-Student falla para la serie de rendimientos del IBEX35. A continuación se analiza el caso más interesante, y foco del estudio.

En el periodo de crisis los días de backtesting comprenden desde el 18 julio de 2007 hasta primer trimestre de 2012, para un total de 1210 días, y para este caso se usa una ventana de 690 días.

**Tabla II.4. Excepciones esperadas para los distintos métodos de contraste en el periodo de crisis.**

Modelo ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	Excepciones esperadas = 60			
	PSI 20	IBEX 35	DAX 30	EUROSTOXX 50
<b>95% 1210 días</b>				
ARMA-GARCH-normal	87 (0.0006)	92 (0.0001)	95 (0.0000)	101 (0.0000)
ARMA-GARCH-t	94 (0.0000)	98 (0.0000)	99 (0.0000)	100 (0.0000)
ARMA-GARCH-t asimétrica	75 (0.0356)	70 (0.1190)	67 (0.2121)	59 (0.4553)
ARMA-GARCH-EVT (u=10%)	77 (0.0202)	90 (0.0002)	84 (0.0019)	86 (0.0009)
ARMA-GARCH-MM	99 (0.0000)	72 (0.0761)	71 (0.0958)	74 (0.0464)
ARMA-GARCH-ML1	81 (0.0056)	81 (0.0056)	86 (0.0009)	91 (0.0001)
ARMA-GARCH-ML2	81 (0.0056)	79 (0.0109)	82 (0.0028)	92 (0.0000)
<b>99% 1210 días</b>				
	Excepciones esperadas = 12			
ARMA-GARCH-normal	34 (0.0000)	25 (0.0007)	27 (0.0001)	24 (0.0015)
ARMA-GARCH-t	26 (0.0003)	16 (0.1618)	18 (0.0659)	16 (0.1618)
ARMA-GARCH-t asimétrica	14 (0.3286)	10 (0.3357)	8 (0.1473)	6 (0.0426)
ARMA-GARCH-EVT (u=10%)	16 (0.1618)	13 (0.4355)	12 (0.5504)	11 (0.4496)
ARMA-GARCH-MM	12 (0.5645)	5 (0.0187)	7 (0.0842)	8 (0.1473)
ARMA-GARCH-ML1	16 (0.1618)	13 (0.4355)	13 (0.4355)	17 (0.1057)
ARMA-GARCH-ML2	15 (0.2362)	10 (0.3357)	14 (0.2362)	17 (0.1057)

Los valores en paréntesis indican los p-valores para el contraste de la binomial.

En este periodo, el método basado en normalidad falla al estimar VaR al 95% y 99%. Se podría realizar un análisis de los métodos al estimar VaR al 95%, pero el interés se centra al 99% que es el estándar de la industria en riesgo de mercado. Los métodos basados en t y t-asimétrica fallan en uno de los mercados analizados, mientras que EVT y GC funciona bien en todos los casos cuando se estima VaR al 99%.

Al observar los diferentes resultados se puede concluir que en condiciones relativamente “normales”, no es recomendable estimar VaR a niveles de confianza altos (99% por ejemplo) mediante el supuesto de normalidad de la serie de rendimientos. En escenarios de alta volatilidad los métodos que mejor se desempeñan son los basados en la metodología EVT y la distribución GC.

## II.6. Aplicación 2: Datos de tres índices bursátiles

Como anteriormente se comentó, las crisis subprime y de deuda pública han tenido repercusiones globales. Por tal razón, en esta sección se comparan el comportamiento de los modelos previamente analizados para calcular el VaR a tres índices bursátiles mundiales que son: MSCI Europe (Europe), MSCI USA (USA) y MSCI Emerging Markets (EM), y así como en la aplicación anterior, se estudian dos tipos diferentes de escenarios de volatilidad. Para más detalles de los índices véase el Anexo del Capítulo II. El periodo total de los datos diarios comprende alrededor de 16 años desde diciembre de 1997 hasta el primer trimestre de 2013. Se divide el periodo en dos muestras, y se selecciona el periodo de crisis empezando en Julio de 2006, un año antes de que los fondos de Bear Stearns anunciaran cuantiosas pérdidas. La Tabla II.5 presenta los estadísticos descriptivos para los rendimientos diarios de las series.

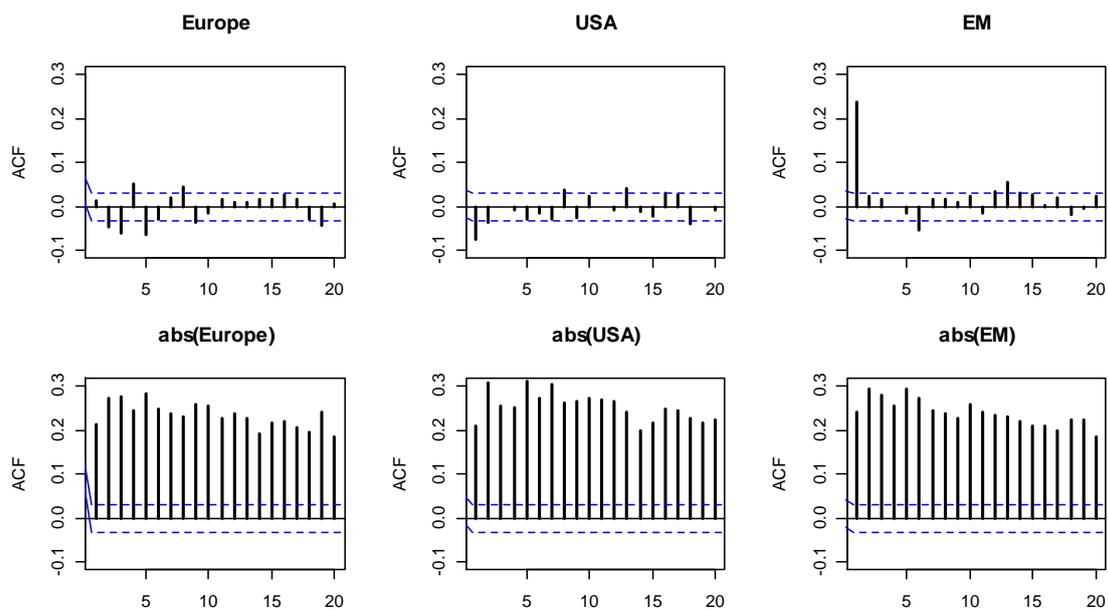
**Tabla II.5. Estadísticos descriptivos para los rendimientos de los índices bursátiles**

	Periodo total	Periodo de Pre-crisis	Periodo de crisis
<b>Panel A: MSCI Europa</b>			
Media	0.0025	0.0079	-0.0028
Mediana	0.0322	0.0311	0.0326
Desviación estándar	1.4648	1.1567	1.7189
Varianza	2.1457	1.3379	2.9546
Exceso de curtosis	6.1617	2.3405	5.5684
Coefficiente de asimetría	-0.0963	-0.2128	-0.0492
Rango	20.8762	10.8752	20.8762
Mínimo	-10.1783	-5.6814	-10.1783
Máximo	10.6979	5.1938	10.6979
<b>Panel B: MSCI EEUU</b>			
Media	0.0036	-0.0071	0.0143
Mediana	0.0258	0.0000	0.0489
Desviación estándar	1.3131	1.1375	1.4681
Varianza	1.7241	1.2939	2.1552
Exceso de curtosis	7.8484	2.7571	8.8208
Coefficiente de asimetría	-0.1829	0.0964	-0.3154
Rango	20.5563	11.7713	20.5563
Mínimo	-9.5137	-6.1609	-9.5137
Máximo	11.0426	5.6104	11.0426
<b>Panel C: MSCI Mercados emergentes</b>			
Media	0.0268	0.0323	0.0213
Mediana	0.1094	0.1128	0.0957
Desviación estándar	1.2850	1.0174	1.5060
Varianza	1.6511	1.0350	2.2681
Exceso de curtosis	7.7059	2.3419	7.2308
Coefficiente de asimetría	-0.5113	-0.6116	-0.4406
Rango	20.0673	9.8876	20.0673
Mínimo	-9.9944	-5.8312	-9.9944
Máximo	10.0729	4.0564	10.0729

Los estadísticos descriptivos muestran que el rendimiento medio para el índice europeo es positivo en el periodo de pre-crisis, mientras que para el periodo de crisis es negativo. Sin embargo, el rendimiento medio para los otros índices es positivo en el periodo de crisis. Adicionalmente, la volatilidad y la curtosis crecen en el periodo de crisis comparado con el periodo de pre-crisis. El rango de los rendimientos muestra que los datos son más dispersos en el periodo de crisis, casi el doble comparado con el periodo de pre-crisis. El coeficiente de asimetría del índice MSCI EEUU parece ser positivo en el periodo de pre-crisis, pero es negativo en el periodo de crisis. Esto significa que es más probable de obtener menores (mayores) rendimientos en el periodo de pre-crisis (crisis). Sin embargo, los índices MSCI Europa y MSCI Mercados emergentes presentan coeficiente de asimetría negativo en ambos periodos. Las desviaciones de la mediana con respecto a la media y los valores de exceso de curtosis apoyan el uso de modelos VaR basados en distribuciones asimétricas y leptocúrticas, como por ejemplo la t-asimétrica, así como en la aplicación anterior.

Al igual que en el caso anterior, de acuerdo al Gráfico II.2, se identifica una leve estructura autorregresiva en las series analizadas. Así mismo, se emplea un modelo GARCH(1,1) debido a la presencia de heteroscedasticidad condicional.

**Gráfico II.2. Funciones de autocorrelación (ACF) para los niveles de los rendimientos de los índices bursátiles y sus valores absolutos**



A continuación, se procede a seleccionar uno de los tres posibles modelos, entre ruido blanco, AR(1) o ARMA(1,1) para la media condicional. La Tabla II.6 presenta los

valores de log-verosimilitud de estos tres modelos junto con un modelo GARCH(1,1) para modelar la varianza condicional y bajo varias distribuciones de las innovaciones: normal, t-Student o t-asimétrica. Los resultados muestran evidencia a favor de los modelos autorregresivos pero no se observa una selección clara entre el modelo ARMA(1,1) o AR(1). Se escoge el modelo ARMA(1,1) puesto que este modelo presenta mayores valores de log-verosimilitud y éste anida al modelo AR(1).

**Tabla II.6. Valores de log-verosimilitud para diferentes modelos de media-varianza y bajo diferentes distribuciones**

	<b>EUROPA</b>	<b>EEUU</b>	<b>ME</b>
<b>Panel A: Normal</b>			
GARCH(1,1)	-6358.328	-5908.279	-6052.282
AR(1)-GARCH(1,1)	-6358.105	-5904.808	-5944.017
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	-6356.587	-5899.511	-5943.020
<b>Panel B: t-Student</b>			
GARCH(1,1)	-6337.145	-5833.96	-6002.947
AR(1)-GARCH(1,1)	-6336.956	-5829.498	-5899.354
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	-6336.815	-5822.885	-5897.602
<b>Panel C: t-asimétrica</b>			
GARCH(1,1)	-6329.544	-5826.936	-5979.551
AR(1)-GARCH(1,1)	-6329.466	-5820.701	-5886.280
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	-6324.653	-5809.244	-5883.286

La Tabla II.7 presenta las estimaciones máximo verosímiles de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) bajo las tres distribuciones supuestas. Los p-valores para contrastar la significación de cada parámetro se muestra entre paréntesis. Estos valores reflejan la significancia estadística del modelo GARCH(1,1), pero no todos los parámetros del modelo ARMA(1,1) son estadísticamente diferentes de cero. Este resultado está en línea con el hecho estilizado de la escasa predictibilidad de la media condicional de los rendimientos de variables financieras de alta frecuencia. Adicionalmente, el proceso GARCH(1,1) presenta una alta persistencia debido a que se observa que  $\alpha + \beta$  es aproximadamente uno. Este resultado captura el efecto de memoria larga o persistencia de la varianza condicional que usualmente se encuentra en este tipo de datos. En este orden de ideas, se escoge el modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para implementar la técnica del backtesting y analizar el comportamiento de las diferentes distribuciones en el cálculo del VaR. La Tabla II.7 también incorpora los valores estimados de los parámetros de forma (grados de libertad) y el parámetro de sesgo para las distribuciones t-Student y t-asimétrica. Estos parámetros resultan ser

significativos, lo que indica que la distribución de las innovaciones es leptocúrtica y asimétrica.

**Tabla II.7. Parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1).**

	EUROPA	EEUU	ME
<b>Panel A: Normal</b>			
$\varphi$	0.0141 (0.0374)	0.0111 (0.0134)	0.0798 (0.0000)
$\phi$	0.7699 (0.0000)	0.7682 (0.0000)	0.1338 (0.0975)
$\theta$	-0.7896 (0.0000)	-0.8124 (0.0000)	0.1159 (0.1549)
$\omega$	0.0180 (0.0000)	0.0139 (0.0000)	0.0294 (0.0000)
$\alpha$	0.0901(0.0000)	0.0783 (0.0000)	0.1005 (0.0000)
$\beta$	0.9017 (0.0000)	0.9130 (0.0000)	0.8793 (0.0000)
<b>Panel B: t-Student</b>			
$\varphi$	0.0836 (0.0415)	0.0179 (0.0019)	0.0913 (0.0000)
$\phi$	-0.3100 (0.5733)	0.7198 (0.0000)	0.0870 (0.2712)
$\theta$	0.3194 (0.5576)	-0.7711 (0.0000)	0.1506 (0.0569)
$\omega$	0.0163 (0.0002)	0.0099 (0.0008)	0.0257 (0.0000)
$\alpha$	0.0849 (0.0000)	0.0799 (0.0000)	0.0952 (0.0000)
$\beta$	0.9086 (0.0000)	0.9169 (0.0000)	0.8876 (0.0000)
$\nu$	10 (0.0000)	6.4203 (0.0000)	8.7273 (0.0000)
<b>Panel C: t-asimétrica</b>			
$\varphi$	0.0118 (0.0119)	0.0127 (0.0016)	0.0708 (0.0002)
$\phi$	0.7628 (0.0000)	0.7160 (0.0000)	0.0262 (0.7447)
$\theta$	-0.7962 (0.0000)	-0.7821 (0.0000)	0.2007 (0.0114)
$\omega$	0.0165 (0.0001)	0.0094 (0.0008)	0.0239 (0.0000)
$\alpha$	0.0808 (0.0000)	0.0774 (0.0000)	0.0885 (0.0000)
$\beta$	0.9115 (0.0000)	0.9183 (0.0000)	0.8941 (0.0000)
$\nu$	10 (0.0000)	6.9753 (0.0000)	9.2225 (0.0000)
$\gamma$	0.8980 (0.0000)	0.8945 (0.0000)	0.8819 (0.0000)

P-valores para el contraste de la t en paréntesis.

La Tabla II.8 presenta también los valores estimados de los parámetros de las distribuciones del método EVT y los métodos semi-paramétricos. En una primera etapa, los rendimientos diarios se filtran mediante el proceso ARMA(1,1)-GARCH(1,1) estimados mediante cuasi-máxima verosimilitud (QML, por sus siglas en inglés). En una segunda etapa se estiman los parámetros de la distribución GPD ajusta a los residuos estandarizados. El parámetro de forma para EVT,  $\xi$  en el Panel A, no es significativamente diferente de cero para los índices de Europa y Mercados Emergentes, pero sí lo es para el índice USA.

Esto quiere decir que los residuos estandarizados del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) exhiben distribuciones de cola media (puesto que cuando  $\xi = 0$  la distribución GPD

se convierte en la distribución exponencial). Con respecto a la distribución GC se estimaron tres alternativas: GC con expansión hasta el cuarto término estimado mediante el método de los momentos (Panel B), y mediante máxima verosimilitud (Panel C), y GC con expansión hasta el octavo término (Panel D). En todos los casos los parámetros  $d_3$  y  $d_4$  confirman la presencia de asimetría (negativa) y leptocurtosis. Sin embargo, no todos los parámetros de la expansión más larga (GC-ML2) resultan ser significativos. De igual forma, se mantiene el orden de la estructura polinomial para efectos de comparación de los resultados de la prueba de comportamiento del VaR mediante los diferentes métodos de estimación y tamaño de la expansión.

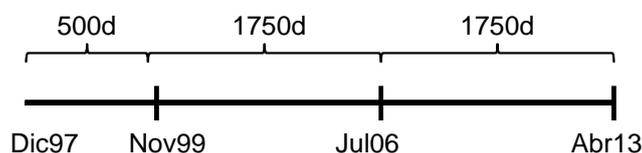
**Tabla II.8. Parámetros de EVT y GC para los residuos estandarizados.**

	EUROPA	EEUU	ME
<b>Panel A: EVT</b>			
$\xi$	-0.0290 (0.2861)	-0.1963 (0.0000)	-0.0674 (0.0670)
$\beta$	0.4949 (0.0000)	0.5836 (0.0000)	0.5427 (0.0000)
<b>Panel B: GC-MM</b>			
$d_3$	-0.0338	-0.0759	-0.0499
$d_4$	0.0264	0.0675	0.0421
<b>Panel C: GC-ML1</b>			
$d_3$	-0.0345 (0.0000)	-0.0449 (0.0000)	-0.0370 (0.0000)
$d_4$	0.0235 (0.0000)	0.0347 (0.0000)	0.0305 (0.0000)
<b>Panel D: GC-ML2</b>			
$d_3$	-0.0242 (0.0035)	-0.0651 (0.0000)	-0.0405 (0.0000)
$d_4$	0.0270 (0.0000)	0.0285 (0.0012)	0.0417 (0.0000)
$d_5$	0.0056 (0.0418)	-0.0150 (0.0028)	-0.0031 (0.1944)
$d_6$	0.0021 (0.1232)	0.0000 (0.5130)	0.0049 (0.0095)
$d_7$	0.0000 (0.4540)	-0.0027 (0.0003)	-0.0008 (0.0598)
$d_8$	0.0004 (0.0186)	0.0008 (0.0032)	0.0005 (0.0212)

### II.6.1. Backtesting

Para contrastar la validez de los supuestos distribucionales de los rendimientos bursátiles (normal, t-Student, t-asimétrica, GC y EVT), las series de rendimientos históricas,  $r_1, \dots, r_m$ , se comparan con las predicciones del  $\text{VaR}_t^\alpha$  para el día  $t = \{n + 1, \dots, m\}$  mediante una ventana de tiempo de los anteriores  $n$  días. Entonces se implementa la técnica del backtesting para probar el comportamiento de estos modelos en diferentes escenarios de volatilidad (periodo de pre-crisis y de crisis), como se ilustra en el siguiente gráfico. La ventana de tiempo tiene un tamaño de 500 días y el periodo

del backtesting es de 3500 días. El periodo del backtesting se divide en dos sub-periodos de igual tamaño (1750 días cada uno): el periodo de pre-crisis (noviembre de 1999 — julio de 2006), y el periodo de crisis (julio de 2006 — primer trimestre de 2013).



Los Gráficos II.3 – II.6 muestran la evolución de los parámetros estimados para el índice MSCI Europe (para los índices de EEUU y Mercados emergentes se presenta un comportamiento similar). En particular, el Gráfico II.3.A y II.3.B muestran los cambios en el parámetro grados de libertad de la distribución t-Student y t-asimétrica. El eje de las ordenadas se corta en 10, puesto que para valores mayores, la distribución t-Student se aproxima a la normal. El valor de este parámetro decrece (incrementa) cuando la volatilidad incrementa (decrece), pero su valor está por encima de 4, de esta manera, la curtosis está bien definida. El Gráfico II.3.C presenta la evolución el parámetro de asimetría, el cual es relativamente estable durante el periodo de pre-crisis. Sin embargo, éste decrece al comienzo del periodo de crisis.

**Gráfico II.3: Parámetros cambiantes en el tiempo de la distribución t-Student para los rendimientos del índice MSCI EUROPE.**

Gráfico II.3.A. Parámetro de forma de t-Student (grados de libertad)

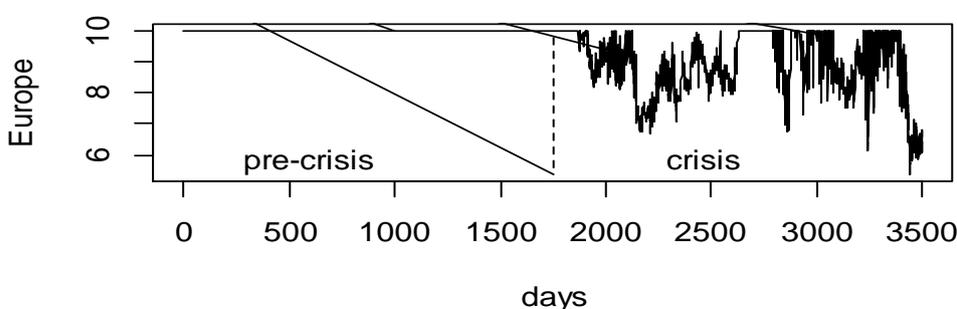


Gráfico II.3.B. Parámetro de forma de t-asimétrica (grados de libertad)

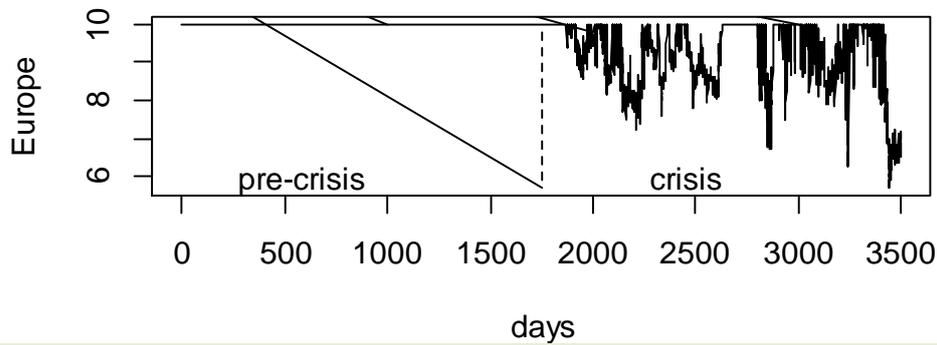
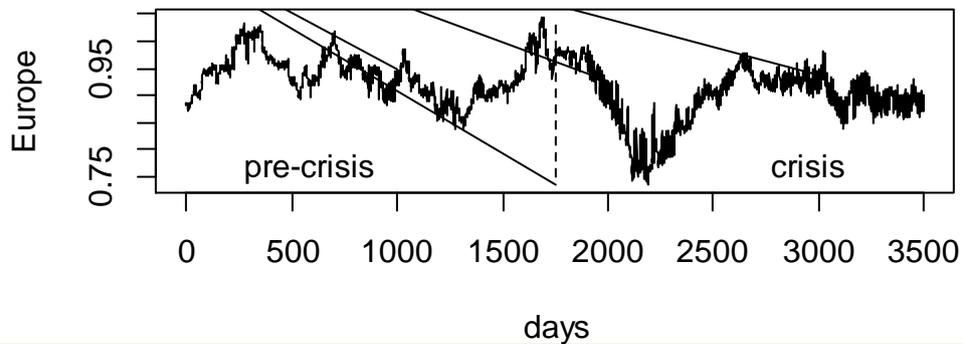


Gráfico II.3.C. Parámetro de sesgo de t-asimétrica



El Gráfico II.4 muestra los parámetros de forma para la GPD implementado en el modelo de EVT. El parámetro  $\xi$  parece ser negativo (evidencia de colas cortas) en el periodo de pre-crisis y positivo (colas pesadas) al comienzo del periodo de crisis y se vuelve negativo al final del periodo de crisis. El parámetro de escala,  $\beta$  es muy cambiante y parece incrementar en el periodo de crisis.

Gráfico II.4: Parámetros cambiantes en el tiempo de la distribución Pareto generalizada para los rendimientos del índice MSCI EUROPE.

Gráfico II.4.A. Parámetro de forma de la distribución Pareto generalizada ( $\xi$ )

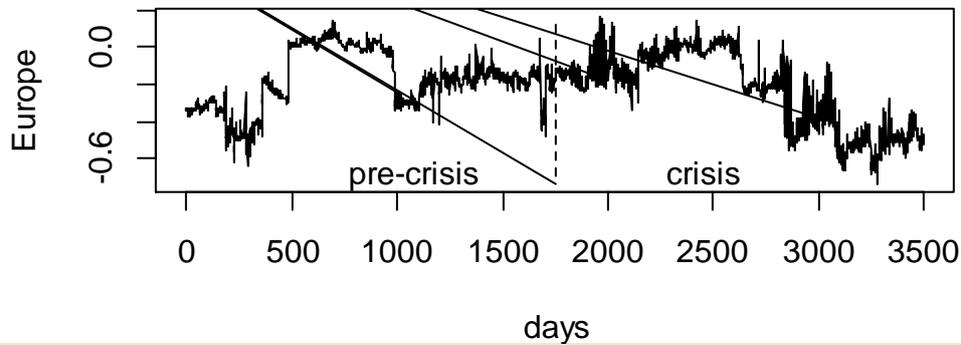
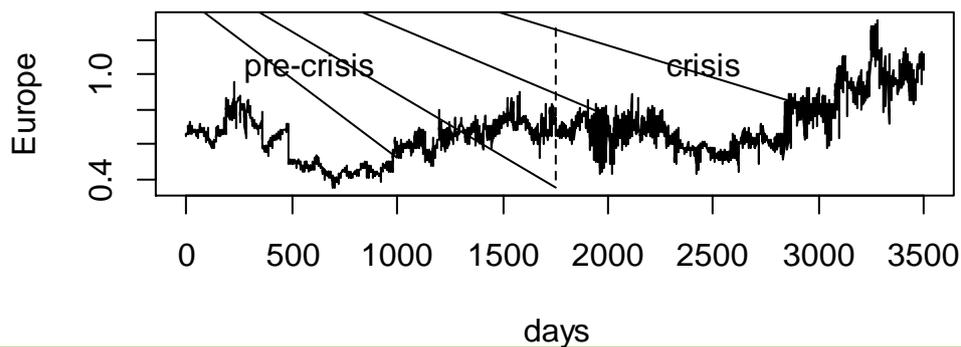


Gráfico II.4.B. Parámetro de escala de la distribución Pareto generalizada ( $\beta$ )



Los Gráficos II.5.A y II.5.B presentan el cambio en los parámetros  $d_3$  y  $d_4$ , que representan la asimetría y el exceso de curtosis, respectivamente, para el modelo GC-ML1. Las estimaciones del parámetro  $d_3$  son positivas en un rango específico de tiempo en el periodo de pre-crisis, mientras que las estimaciones del parámetro  $d_4$  son positivas y crecen a medida que suceden los eventos extremos.

Gráfico II.5: Parámetros cambiantes en el tiempo del modelo GC-ML1 para los rendimientos del índice MSCI EUROPE.

Gráfico II.5.A. Parámetro  $d_3$  del modelo GC-ML1

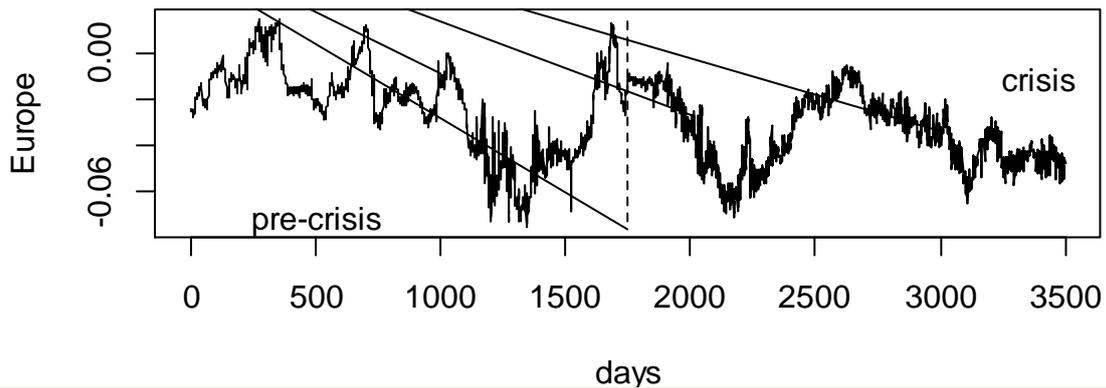
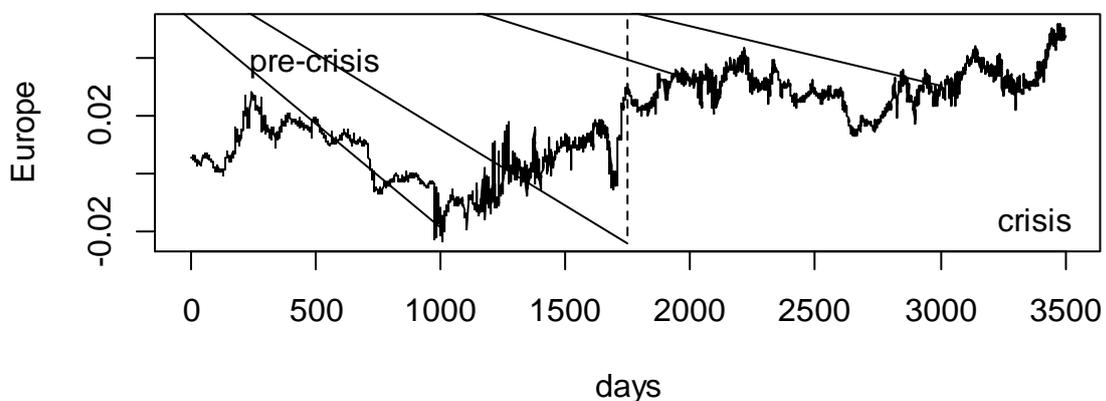


Gráfico II.5.B. Parámetro  $d_4$  del modelo GC-ML1

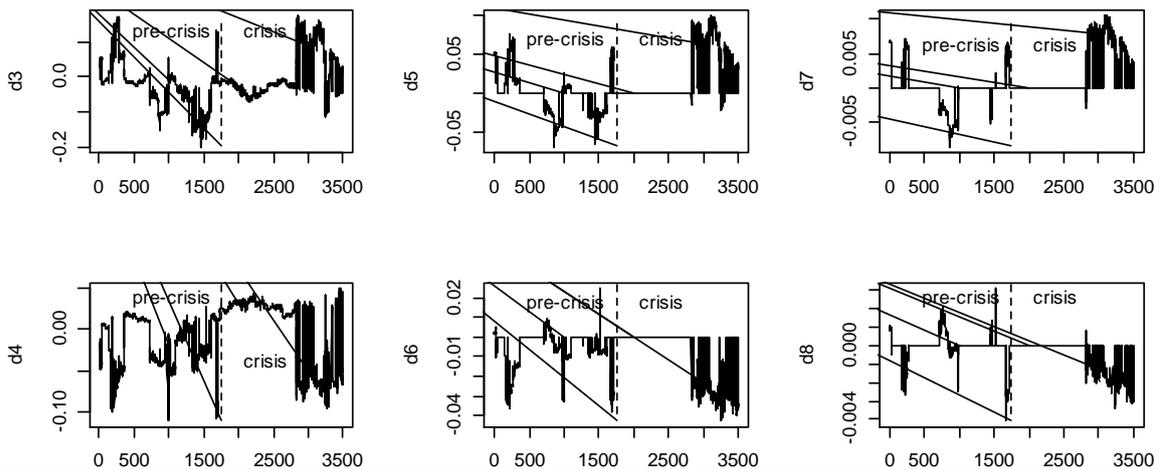


El Gráfico II.6 muestra el comportamiento de los parámetros de la distribución GC con expansión hasta el octavo término (GC-ML2). En la primera parte del periodo de crisis, sólo se incluyen  $d_3$  y  $d_4$ , de acuerdo al criterio AIC. La interpretación de estos parámetros es consistente con los valores esperados de coeficiente de asimetría (negativo) y exceso de curtosis (positivo). Sin embargo, cuando se elige un orden de expansión más grande, el coeficiente de asimetría es capturado por la interacción entre

los parámetros impares, mientras que los patrones de cola pesada se capturaron mediante la interacción de los parámetros pares.

En la última parte del periodo de crisis, los parámetros impares (pares) parecen ser significativamente positivos (negativos). Por lo tanto, la percepción acerca de las combinaciones que pueden incorporar un cierto grado de asimetría y curtosis no son tan directas. Adicionalmente, la presencia de valores extremos guían a asimetrías y colas pesadas, y de esta manera, la relación entre los parámetros impares y pares también juegan un rol importante que hay que tener en cuenta.

**Gráfico II.6: Parámetros cambiantes en el tiempo del modelo GC-ML2 para los rendimientos del índice MSCI EUROPE.**



La Tabla II.9 muestra el número de excepciones y el p-valor para el contraste de la binomial (en paréntesis), para los siete modelos (ARMA-GARCH-normal, ARMA-GARCH-t, ARMA-GARCH-t-asimétrica, ARMA-GARCH-EVT, ARMA-GARCH-GC-MM, ARMA-GARCH-GC-ML1, ARMA-GARCH-GC-ML2) al 99% de confianza y para los tres índices bursátiles. En esta tabla se presentan dos paneles diferentes, uno para cada periodo de backtesting (periodo de pre-crisis y crisis).

Para el periodo de pre-crisis (Panel A), el método de la distribución normal subvalora el riesgo (es decir, el número de excepciones es significativamente mayor al valor esperado) para todos los casos. Mientras que la t-asimétrica y GC-ML2 no funcionan

bien para el índice MSCI EEUU. Los modelos de la t, EVT, GC-MM y GC-ML1 no se pueden rechazar al 5% de significación para todas las series. En el periodo de crisis (Panel B), la distribución normal significativamente subvalora el VaR para todas las series, mientras que el método basado en la t-Student no puede ser rechazado sólo en un caso (índice Mercados Emergentes). Sin embargo, la t-asimétrica tiende a sobrevalorar el riesgo (es decir, ésta tiende a dar una medida más conservadora de riesgo), aunque no puede ser rechazada en una de las series (USA). El enfoque de EVT y los modelos GC se comportan bien para todos los casos, puesto que estos métodos se basan en la modelación de valores extremos.

**Tabla II.9. Comportamiento del VaR para los diferentes modelos**

	EUROPA	EEUU	ME
<b>Panel A: Periodo de pre-crisis</b> (Noviembre 1999 - Julio 2006)			
<b>99% 1750 días</b>	<b>Valor esperado de excepciones = 17</b>		
ARMA-GARCH-normal	26 (0.0331)	27 (0.0203)	38 (0.0000)
ARMA-GARCH-t	20 (0.3048)	13 (0.1685)	25 (0.0522)
ARMA-GARCH-t-asimétrica	16 (0.4197)	10 (0.0380)	17 (0.5157)
ARMA-GARCH-EVT	21 (0.2296)	22 (0.1670)	19 (0.3908)
ARMA-GARCH-GC-MM	21 (0.2296)	18 (0.4842)	19 (0.3908)
ARMA-GARCH-GC-ML1	21 (0.2296)	18 (0.4842)	20 (0.3048)
ARMA-GARCH-GC-ML2	22 (0.1670)	26 (0.0332)	20 (0.3048)
<b>Panel B: Periodo de crisis</b> (Julio 2006 – Primer trimestre de 2013)			
<b>99% 1750 días</b>	<b>Valor esperado de excepciones = 17</b>		
ARMA-GARCH-normal	41 (0.0000)	52 (0.0000)	31 (0.0021)
ARMA-GARCH-t	29 (0.0070)	29 (0.0070)	22 (0.1670)
ARMA-GARCH-t-asimétrica	12 (0.1104)	13 (0.1685)	12 (0.1104)
ARMA-GARCH-EVT	21 (0.2296)	21 (0.2296)	14 (0.2413)
ARMA-GARCH-GC-MM	20 (0.3048)	12 (0.1104)	16 (0.4197)
ARMA-GARCH-GC-ML1	20 (0.3048)	21 (0.2296)	17 (0.5157)
ARMA-GARCH-GC-ML2	25 (0.0522)	19 (0.3908)	15 (0.3265)

P-valores para el contraste de la binomial en paréntesis. EVT considera un 10% de umbral.

Estos resultados son consistentes con la evidencia que suele encontrarse en medidas de predicción del VaR. Esto es, la distribución normal es ampliamente rechazada (especialmente para altos niveles de confianza y escenarios volátiles). La distribución t-Student podría ser útil sólo si la curtosis y la asimetría no son tan severas. La distribución t-asimétrica es una alternativa para capturar asimetría, sin embargo no podría ser la mejor opción para capturar alta curtosis. El enfoque EVT y las densidades GC implican medidas de riesgo de mercado más apropiadas, puesto que EVT pone el énfasis en los valores extremos y GC es muy flexible para adaptarse a diferentes escenarios con un número variable de parámetros. Sin embargo, de acuerdo a los resultados, parece que para propósitos de predicción, expansiones de orden más grandes

no producen los mejores resultados. Adicionalmente, las estimaciones mediante MM conllevan predicciones de VaR más adecuadas. Estos resultados son consistentes con Del Brio et al. (2011), y Níguez y Perote (2012), aunque el primer artículo se centra en ajustes in-sample y el último analiza predicción de VaR bajo transformaciones positivas de las series GC.

Finalmente, el Gráfico II.7 representa los rendimientos de los tres índices bursátiles y sus correspondientes valores de VaR predichos al 99% para el periodo de backtesting. La distribución normal (en rojo) es la que produce medidas más conservadoras de VaR, EVT (azul oscuro) y GC (azul claro) son los métodos que resultan en valores más altos en predicción de VaR.

### Gráfico II.7. Backtesting de VaR al 99% bajo diferentes especificaciones

Gráfico II.7.A. MSCI EUROPA

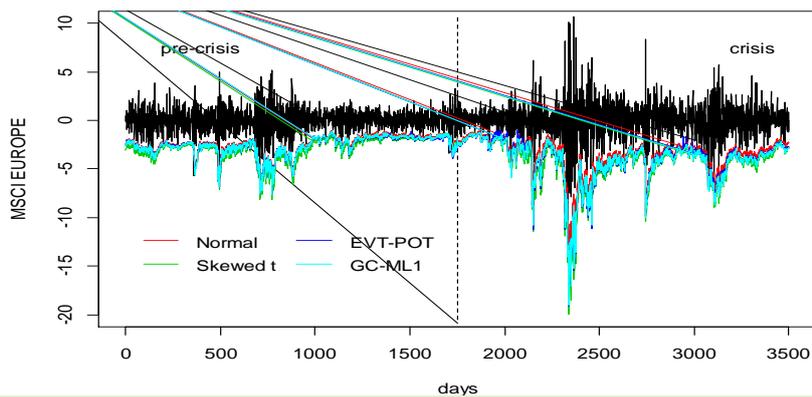


Gráfico II.7.B. MSCI EEUU

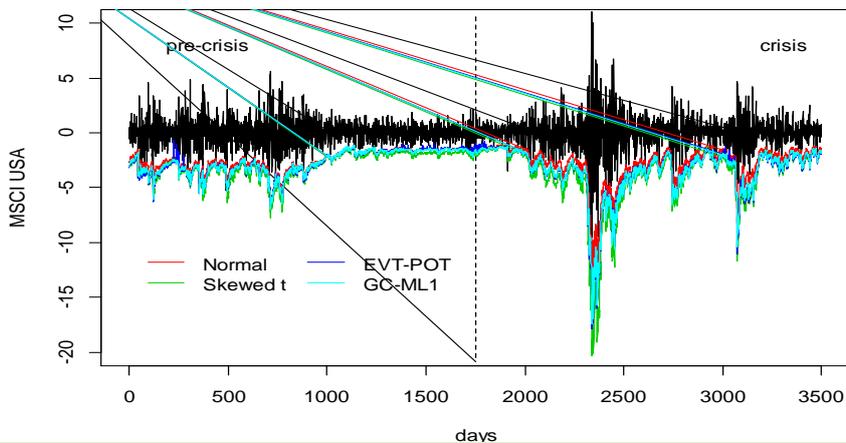
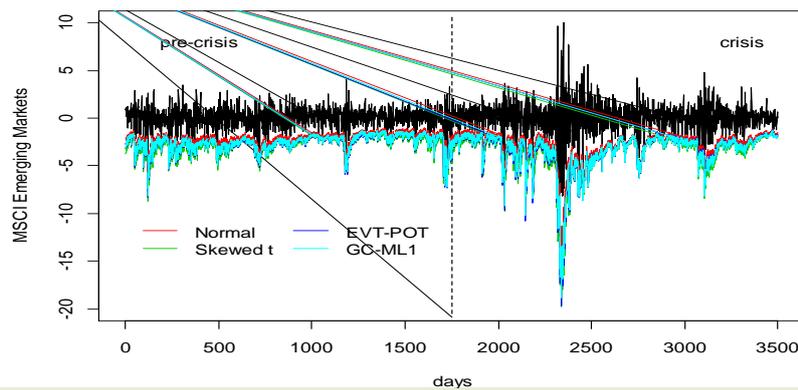


Gráfico II.7.C. MSCI MERCADOS EMERGENTES



## II.7. Discusión

En su documento de consulta (BIS, 2012), CBSB propone utilizar la medida de Expected Shortfall (ES) para los modelos internos de riesgo de mercado. La principal razón del Comité es que VaR falla al capturar el riesgo de cola, es decir, las grandes pérdidas causadas por eventos muy atípicos. ES se define como la pérdida esperada dado que las pérdidas han excedido un cierto umbral (por ejemplo el percentil al 99%). VaR puede no cumplir una propiedad deseable para ser, lo que llaman en la literatura, una medida coherente de riesgo. Una medida de riesgo, debe cumplir cuatro propiedades deseables para ser coherente (Artzner et al, 1999). Si alguna medida de riesgo no cumple con alguno de los axiomas, se obtendrán resultados paradójicos y medidas no fiables. Dados dos activos X e Y, y una medida de riesgo  $\rho(\cdot)$ , estos axiomas son:

i. **Subaditividad**  $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Esta propiedad se refiere a la diversificación de riesgo de cartera. El riesgo conformado por dos activos debe ser menor o igual que la suma de los riesgos de cada activo. El VaR es subaditivo en un mundo gaussiano, pero no en todos los casos.

ii. **Monotonicidad** Si  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

Si la cartera o el activo X es peor que Y, su riesgo no puede ser mayor.

iii. **Homogeneidad positiva**  $\forall \lambda \geq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Esta propiedad se refiere a lo que pasa con el riesgo cuando no hay diversificación, si por ejemplo se duplica la inversión en el activo, su riesgo también se duplica.

iv. **Invarianza traslacional**  $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$

Si al activo con riesgo se le adiciona uno libre de riesgo ( $\alpha$ ), el riesgo total disminuirá en la proporción del libre de riesgo.

La medida del VaR ha sido muy cuestionada por no cumplir el axioma de subaditividad. La subaditividad es un axioma importante para los requerimientos de suficiencia de capital en supervisión bancaria. Suponga que un banco o una entidad financiera tiene varias divisiones, si el requerimiento de capital de cada división está dimensionado con su propio riesgo, el regulador debería estar confiado que también todo el capital del banco debería ser el adecuado. Esto no podría suceder si la medida adoptada viola el axioma de subaditividad, puesto que el riesgo de todo el banco podría ser mayor que la suma de los riesgos de las divisiones. Por lo tanto, un banco podría tener incentivos a escindir sus divisiones y presentar el capital regulatorio como la suma individual del VaR de cada división.

El Comité de Basilea realizó un estudio de artículos científicos y resumió tales deficiencias encontradas en su estudio (Veáse BIS, 2011). Aunque se ha demostrado que el ES sí es una medida coherente de riesgo, este posible cambio, parece que no ha caído bien en la industria financiera. No solamente porque su cálculo puede llegar a ser más complicado que el del VaR. También es sabido que por definición de ES, un capital regulatorio basado en esta medida sería más alto que basado en el VaR bajo el mismo nivel de confianza.

La Tabla 6 muestra los resultados de McNeil et al. (2005, p. 47 y 283) con respecto a relación entre ES y VaR para diferentes distribuciones. Si el nivel de  $\alpha$  tiende a 1 (es decir, si se desea estimar una medida de riesgo al 99% ó 99.9% de confianza), la relación anterior muestra que es lo mismo emplear VaR que ES cuando la distribución de las pérdidas es una normal. Pero, si la distribución de pérdidas es más parecida a una distribución t-Student, ES será cada vez mayor que VaR a medida que disminuyan los grados de libertad (nótese que ES casi duplica VaR con dos grados de libertad). A medida que aumentan los grados de libertad, la relación se acerca a uno, dado que la

distribución t-Student converge a una distribución normal cuando los grados de libertad son muy grandes). Algo similar sucede con la distribución de Pareto generalizada.

**Tabla II.10. Relación entre el VaR y ES para niveles de  $\alpha$  que se aproximan a uno.**

Distribución	Razón
Normal	$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{ES_{\alpha}}{VaR_{\alpha}} = 1$
t ( $\nu > 1$ )	$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{ES_{\alpha}}{VaR_{\alpha}} = \frac{\nu}{\nu - 1} > 1$
GPD ( $0 < \xi < 1$ )	$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{ES_{\alpha}}{VaR_{\alpha}} = \frac{1}{1 - \xi} > 1$

Si bien es cierto que el ES arroja valores mayores que el VaR, el ES permite capturar de mejor manera pérdidas potenciales en condiciones de crisis. Aunque el tema sigue en discusión en el medio académico y en la industria, este estudio muestra que el uso de una apropiada distribución para ajustar las pérdidas puede llevar a estimaciones consistentes de los requerimientos de capital aún en épocas de crisis cuando se usa la medida de riesgo VaR. Adicionalmente, los analistas cuantitativos de la industria financiera argumentan también que realizar *backtesting* de ES es más complicado.

Aunque el VaR es una medida no coherente de riesgo, su procedimiento de *backtesting* es directo; mientras que éste no es el caso del ES al tratar de realizar *backtesting*. Esto se debe a que ES, bajo condiciones generales, no cumple la propiedad de “*elicibility*” (véase Gneiting, 2011), sin embargo, bajo condiciones específicas basadas en EVT, es posible realizar *backtesting* de ES (McNeil et al., 2005, p. 163). Ziegler (2013) discute las propiedades de coherencia y *elicibility*, puesto que medidas coherentes de riesgo no cumplen con la propiedad de *elicibility*, excepto las medidas denominadas expectiles. Por tal razón, como investigación futura se propone el estudio del comportamiento de este tipo de medidas bajo *backtesting*, y así mismo no se incluye la medida ES en este estudio.

## II.8. Conclusiones

Las recientes crisis financieras han conllevado alta volatilidad en los mercados accionarios y posibles grandes pérdidas a inversores. Para cuantificar las potenciales pérdidas es usual estimar el VaR, que es la máxima pérdida esperada de una inversión, dado un nivel de confianza en un horizonte de tiempo determinado. Sin embargo, las medidas tradicionales del VaR, basadas en la distribución normal, han sido criticadas debido a su poca capacidad de capturar de manera adecuada riesgo de mercado, en especial a altos niveles de confianza. Para tal fin, se ha propuesto el uso de alternativas como distribuciones con colas pesadas y asimétricas. Pero, no hay un consenso en la literatura financiera de cuál es la metodología apropiada para cuantificar y predecir el VaR. En este documento se investiga este problema mediante la comparación del comportamiento de tres modelos paramétricos (normal, t-Student, t-asimétrica), el enfoque EVT y un modelo semi-paramétrico (GC) para los principales índices bursátiles. Se concluye que el comportamiento del modelo depende del periodo de análisis, entonces se compara la sensibilidad de las medidas del VaR antes y después de las recientes crisis subprime y de deuda soberana.

Del estudio se pueden obtener cinco conclusiones:

- (i) La distribución normal subestima riesgo aún en escenarios de baja volatilidad.
- (ii) La distribución t-Student parece predecir de manera adecuada solo en periodos de “relativa calma” y su versión asimétrica parece ser un mejor modelo en periodos de alta volatilidad, aunque esta distribución tiende a arrojar resultados de medidas de riesgo más conservadoras.
- (iii) Tanto EVT como GC son métodos fiables para calcular VaR a altos niveles de confianza (99%).
- (iv) Expansiones más grandes de GC (GC-ML2) no necesariamente implican una mejora en el cálculo del VaR comparado con su versión más simple de dos parámetros (coeficiente de asimetría y exceso de curtosis).
- (v) El método de estimación MM para las densidades GC parece brindar medidas de riesgo más adecuadas.

El resultado (i) es estándar en la literatura financiera (ver por ejemplo McNeil et al., 2005, p. 46-7 y 58, para una comparación entre la distribución normal y t-Student a diferentes niveles de confianza). El resultado (ii) reafirma el pobre comportamiento de pronóstico de VaR mediante el uso de la distribución t-Student en escenarios de alta volatilidad y el mejor comportamiento de la t-asimétrica en este caso. Este resultado se podría explicar debido al hecho de que distribuciones con coeficiente de asimetría positiva capturan de manera adecuada la cola izquierda de las distribuciones empíricas en periodos donde el mercado está a la baja, pero no en periodos de mercado alcista, donde la distribución exhibe un coeficiente de asimetría negativo. El resultado (iii) es una consecuencia del enfoque EVT (POT), desarrollado para capturar eventos extremos, y el hecho de que esta metodología es muy sensible a la selección del umbral. Esta evidencia es consistente con otros estudios acerca de EVT, por ejemplo Rachev et al. (2010). La mayor precisión de la densidad GC radica en las propiedades asintóticas de la expansión de los polinomios de Hermite y la flexibilidad de su formulación, la cual es capaz de capturar no solamente leptocurtosis y asimetría, sino también otras características como saltos en la masa probabilística. La conclusión (iv) parece contradecir resultados previos en la literatura; sin embargo, apoya el hecho de que un buen ajuste in-sample no garantiza un buen comportamiento out-of-sample (véase, por ejemplo, Hansen, 2009), y de esta manera modelos más simples generalmente brindan mejores pronósticos. Finalmente, el resultado (v) va en la línea con los resultados del artículo de Del Brio and Perote (2011), el cual implica que medidas más apropiadas del VaR de acuerdo a especificaciones de GC pueden obtenerse directamente mediante la implementación de técnicas de MM.

Todos estos resultados confirman el hecho de que un modelo de VaR óptimo no sólo depende del nivel de confianza (aversión al riesgo), sino también de la observación de las condiciones del mercado (volatilidad). Por lo tanto, estos resultados pueden resumirse en una recomendación para los gestores de riesgo: las metodologías de cuantificación y predicción del riesgo deberían ajustarse al escenario en el cual se calcula la estimación/predicción. De esta manera, el capital regulatorio y las provisiones de instituciones financieras pueden estimarse de manera fiable sólo si se cuenta con técnicas muy flexibles. Por tal razón, y de acuerdo a los resultados, se recomienda la utilización de la densidad GC para la predicción del VaR.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander, C. (2009): *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*. The Wiley Finance Series (Volume IV).

Artzner, P., Delbaen, F. J., Eber J, and Heath, D. (1999): Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 203–228.

BIS (2011): Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book. Working Paper No. 19. 31 January 2011.

BIS (2012): Fundamental review of the trading book, Consultative document. May 2012.

Charlier, C.V. (1905): Uber die darstellung willkurlicher funktionen. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 9, 1-13.

Christoffersen, P. (2003): *Elements of Financial Risk Management*, San Diego, CA: Academic Press.

Coles, S. (2001): *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag, London.

Cont, R. (2001): Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* 1 (2): 223-236.

Corrado, C. J., Su T. (1996): S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula. *Journal of Futures Markets* 16, 611-629.

Davison, A. C. y Smith, R. L. (1990): Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 52:393-442.

Del Brio, E.B., Níguez, T.M., Perote, J. (2011): Multivariate Semi-nonparametric Distributions with Dynamic Conditional Correlations. *International Journal of Forecasting* 27, 347-364.

Del Brio, E. B., Perote J. (2012): Gram-Charlier Densities: Maximum Likelihood versus the Method of Moments. *Insurance: Mathematics and Economics* 51, 531–537.

Edgeworth, F.Y. (1907): On the Representation of Statistical Frequency by a Series. *Journal of the Royal Statistical Society (Series A)* 70, 102–106.

Embrechts, P., Klüppelberg, C. y Mikosch, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.

Fernández, C. y Steel, M. F. J. (1998): On Bayesian modeling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 359–371.

- Gallant, A. R., Nychka, D. W. (1987): Semi-Nonparametric Maximum Likelihood Estimation. *Econometrica* 55, 363-390.
- Giot, P. y Laurent, S. (2003): Value-at-risk for long and short trading positions. *Journal of Applied Econometrics*, 18:641-663.
- Gneiting, T. (2011): Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106, 746–762.
- Gram, J.P., 1879. Om Raekkeudviklinger Bestemte Ved Hjaelp av de Mindste Kvadraters Methode (Kobenhavn).
- Hansen, B. E. (1994): Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review* 35:705-730.
- Hubbert, S. (2012): *Essential mathematics for market risk management*, second edition. The Wiley Finance Series.
- Hull, J. (2009). The credit crunch of 2007: What went wrong? What lessons can be learned? *Journal of Credit Risk*, 5 (2): 3-18.
- Hull, J. (2012). *Risk management for financial institutions*, third edition. Wiley Finance.
- Jarrow, R., Rudd A. (1982): Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics* 10, 347–369.
- Jondeau, E., Rockinger, M. (2001): Gram-Charlier Densities. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25, 1457-1483.
- Jondeau, E., Poon, S.-H. & Rockinger, M. (2007): *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer Verlag.
- Jorion, P. (2006): *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*, third edition. McGraw-Hill.
- Kolb, R. E. (2010): *Lessons from the Financial Crisis: Causes, Consequences, and Our Economic Future*, Robert E. Kolb Series, Wiley.
- Lambert, P. y Laurent, S. (2001): Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models and a Skewed Student Density, Mimeo, Universite de Liège.
- Leadbetter, M. R. (1991): On a basis for “peaks over thresholds” modeling. *Statistics & Probability Letters*, (12) 4:357-362.
- León, A., Mencía, J., Sentana, E. (2009): Parametric Properties of Semi-nonparametric Distributions. *Journal of Business and Economic Statistics* 27, 176-192.

Marumo, K., Wolff, R. (2007): Expansion methods applied to asset return distributions. *Journal of Risk* 10, 3-24.

McNeil, A. J. y Frey, R. (2000): Estimation of Tail-related Risk Measures for heteroscedastic Financial Time Series: An extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.

McNeil, A. J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton.

Ñíguez, T.M., Perote, J. (2012): Forecasting heavy-tailed densities with positive Edgeworth and Gram-Charlier expansions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 74, 600-627.

Perote, J. (2003): Value at risk of non-normal portfolios. *Spanish Review of Finance and Accounting* 115, 290–310.

Puzanova, N., Siddiqui, S., Trede, M. (2009): Approximate value-at-risk calculation for heterogeneous loan portfolios: possible enhancements of the Basel II methodology. *Journal of Financial Stability* 5, 374-392.

Reiss, R.-D. y Thomas, M. (1997): *Statistical Analysis of Extreme Values*. Basel: Birkhäuser.

Shiller, R. J. (2008): *The Subprime Solution: How Today's Global Financial Crisis Happened, and What to Do about It*. Princeton University Press.

Smith, R. L. (1989): Extreme value analysis of environmental time series: An application to trend detection in ground-level ozone. *Statistical Science*, 4:367-393.

Ziegel, J. (2013): Coherency and elicibility. Working paper, University of Bern.

## Anexo Capítulo II

Descripción de los datos:

Index	Descripción
MSCI Europa	El índice MSCI Europa es un índice ponderado de capitalización bursátil diseñado para medir el comportamiento de los mercados desarrollados en Europa. Este índice consiste de los siguientes 16 índices de países de mercados desarrollados: Austria, Bélgica, Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Grecia, Irlanda, Italia, Holanda, Noruega, Portugal, España, Suecia, Suiza, y el Reino Unido.
MSCI EEUU	El índice MSCI EEUU es un índice ponderado de capitalización bursátil diseñado para medir el comportamiento de los mercados de media y gran capitalización bursátil en los Estados Unidos. Este índice pertenece a los índices MSCI Global Equity, y representa la porción de capital del <i>benchmark</i> global del índice MSCI ACWI de Estados Unidos.
MSCI Emerging Markets	El índice MSCI Mercados emergentes es un índice ponderado de capitalización bursátil diseñado para medir el comportamiento de los mercados emergentes. Este índice consiste de los siguientes 21 índices de países: Brasil, Chile, China, Colombia, República Checa, Egipto, Hungría, India, Indonesia, Corea, Malasia, México, Marruecos, Perú, Filipinas, Polonia, Rusia, Sur Africa, Taiwan, Tailandia, y Turquía.

Fuente: Datastream, Thomson Financial

# CAPÍTULO III: Aproximación multivariante a una función de distribución de rendimientos de una cartera \*

## III.1. Introducción

Durante las últimas décadas, la literatura financiera relacionada con la búsqueda de modelos estadísticos para explicar y predecir el riesgo financiero ha experimentado grandes desarrollos. Este interés tiene su origen en la necesidad de los gestores de riesgo de instituciones financieras de contar con herramientas adecuadas a la hora de adoptar el modelo más apropiado para la gestión de riesgo y de cartera. Con tal propósito, se han propuesto muchas perspectivas relacionadas con la modelización de la estructura de momentos condicionales bajo el supuesto de normalidad o la distribución subyacente de los rendimientos de los activos financieros.

Uno de los enfoques que más ha llamado la atención y que ha obtenido resultados más favorables, es la metodología semi-paramétrica o semi-noparmétrica (SNP, por sus siglas en inglés). En el caso de la expansión Gram-Charlier dicha metodología ha sido desarrollada por investigadores como Sargan (1975), Jarrow y Rudd (1982), Gallant y Nychka (1987), Gallant y Tauchen (1989), Corrado y Su (1997), Mauleón y Perote (2000), Nishiyama y Robinson (2000), Jondeau y Rockinger (2001), Velasco y Robinson (2001), Jurczenko et al. (2002), Baixauli y Alvarez (2003), Verhoeven y McAleer (2004), Tanaka et al. (2005), León et al. (2005), Bao et al. (2006), León et al. (2009), Polanski y Stoja (2010), Níguez y Perote (2012), y Níguez et al. (2012). Todos estos artículos proponen el uso de expansiones de polinomios de la distribución Gaussiana para definir funciones de densidad capaces de capturar las características empíricas o hechos estilizados de los rendimientos de los activos financieros. Adicionalmente, se han desarrollado aplicaciones de estas densidades en diferentes

---

\* Una versión de este capítulo se encuentra en segunda revisión en la revista "Computational and Mathematical Organization Theory", indexada en el SSCI con índice de impacto en 2012 de 0,424.

contextos como por ejemplo: contraste de hipótesis, predicción de densidades, Valor en Riesgo (VaR) y valoración de opciones.

Esta familia de densidades permite un mejor ajuste a las distribuciones empíricas y por tanto medidas de riesgo más fiables, como consecuencia de su representación más general y flexible, puesto que permite incorporar tantos parámetros como sean necesarios para capturar distribuciones apuntadas y de colas pesadas (o leptocúrticas) o formas asimétricas de la densidad de los rendimientos de los activos financieros.

Estos hallazgos empíricos son el resultado de la validez de las series de Gram-Charlier (GC) y Edgeworth como aproximaciones asintóticas (Charlier, 1905; Edgeworth, 1907). De hecho, bajo condiciones de regularidad cualquier función de frecuencias puede ser expresada en términos de una suma ponderada infinita de las derivadas de la distribución Gaussiana estándar o sus correspondientes polinomios de Hermite (HP, por sus siglas en inglés). La debilidad de estas expansiones radica en el hecho de que las expansiones finitas (truncadas) no conservan su positividad en todo el dominio del espacio paramétrico (Barton y Dennis, 1952).

Este problema ha sido atacado en la literatura financiera mediante restricciones en los parámetros (Jondeau y Rockinger, 2001), o a través de reformulaciones de la densidad basados en la metodología de Gallant y Nychka (1987). Estas soluciones no son siempre las mejores opciones, puesto que el imponer restricciones de positividad puede conllevar problemas de sub-optimización y regiones de positividad que no son fáciles de definir más allá de casos más simples (es decir, para expansiones definidas en términos de un par de momentos, generalmente coeficiente de asimetría y curtosis). Adicionalmente, las transformaciones positivas inducen no linealidades entre los momentos de la distribución y los parámetros de la densidad, y en algunos casos conllevan necesariamente distribuciones simétricas. El primer problema afecta la interpretación directa de los parámetros de la densidad GC, y de esta manera, restringe la implementación del método de los momentos (MM). Para resolverlo, generalmente, se emplean técnicas de máxima verosimilitud (ML, por sus siglas en inglés), aunque los algoritmos de optimización fallan en convergencia o presentan el problema de óptimos locales. Adicionalmente, las estimaciones máximo-verosímiles sólo brindan estimaciones consistentes bajo supuesto de normalidad o la verdadera densidad.

Las extensiones de densidades GC a otras densidades no-normales continuas y diferenciables también han sido objeto de estudio. Especialmente, se han propuesto como base la Poisson, Gamma y Beta (expansiones GC Tipo B, de Laguerre y de Jacobi, respectivamente). Sin embargo, la validez de estas series como expansiones asintóticas y su aplicabilidad empírica aún no han sido probadas (véase Wallace, 1958, para una discusión de la validez de expansiones asintóticas usando densidades no-normales como distribuciones generadoras). También se han propuesto generalizaciones de densidades GC al ámbito multivariante como alternativas a los métodos de cópulas. En particular, Perote (2004) introduce una primera definición y Del Brio et al. (2009; 2011) proponen expresiones más generales para la positividad y problemas de manejo de dimensionalidad, en la misma línea de los modelos de correlación condicional dinámica – DCC (Engle, 2002).

El método de cópulas aplicado a la expansión GC se verá en el Capítulo IV. En este capítulo se revisan los modelos multivariantes mencionados previamente basados en el desarrollo directo de estimación MM como alternativa a las técnicas tradicionales de máxima verosimilitud (ML, por sus siglas en inglés) o cuasi-máxima verosimilitud (QML). Esta propuesta es muy simple para las densidades GC puesto que los parámetros pares (impares) son combinaciones lineales de los momentos de la densidad pares (impares), y el momento de orden  $n$  depende sólo de los primeros  $n$  parámetros de la función de densidad. Adicionalmente, la estimación MM involucra estimaciones consistentes, mientras que la estimación ML solamente se garantiza bajo la verdadera densidad y para QML bajo una incorrecta especificación de la función de densidad pero correcta especificación de los dos primeros momentos (Bollerslev y Wooldridge, 1992). Sin embargo, todas estas técnicas presentan resultados similares. Además, se desarrolla una estimación en tres etapas, lo cual facilita la estimación de la función de densidad de la cartera de activos financieros, en relación a la optimización de la función de verosimilitud. Este procedimiento consiste primero en estimar las varianzas condicionales bajo la distribución normal para cada variable mediante QML. En segundo lugar, se estima el resto de los parámetros de la función de densidad GC para cada variable mediante MM. Por último, se estima la matriz de correlaciones de las variables que componen la cartera mediante MM.

El resto del capítulo se compone de la siguiente manera: en la sección III.2 se revisan las expresiones multivariantes para las expansiones GC y se explica la estimación MM.

La sección III.3 se presenta una aplicación de la técnica MM para la estimación y se calcula el VaR de la función de densidad multivariante de una cartera compuesta de tres índices bursátiles europeos. La última sección (III.4) resume las principales conclusiones del capítulo.

## III.2 Aproximaciones a la función de distribución de una cartera.

### III.2.1 El caso univariante

En este capítulo se empleará notación matricial por tratarse de una aproximación al caso multivariante. Para ello, comenzamos expresando los polinomios de Hermite y la expansión Gram-Charlier de esta forma. Sea  $\phi(x_i) = e^{-x_i^2/2} / \sqrt{2\pi}$  la función de densidad de la normal y  $H_s(x_i)$  el polinomio de Hermite basado en su  $s$ -ésima derivada, lo cual se define como en la ecuación (III.1).

$$H_s(x_i) = (-1)^s \phi(x_i)^{-1} \frac{d^s \phi(x_i)}{dx_i^s} = s! \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(s-2k)! 2^k} x_i^{s-2k}. \quad (\text{III.1})$$

Estos polinomios forman una base ortonormal. De esta manera, si  $\mathbf{H}(x_i) = [H_1(x_i) \ H_2(x_i) \ \dots \ H_q(x_i)] \in \mathfrak{R}^q$  es el vector que contiene los primeros  $q$  HP entonces

$$\int \mathbf{H}(x_i) \mathbf{H}(x_i)' \phi(x_i) dx_i = \mathbf{S} = \text{diag}\{1!, 2!, \dots, q!\}. \quad (\text{III.2})$$

Adicionalmente, el vector de HP puede ser escrito como

$$\mathbf{H}(x_i) = \mathbf{BZ}_i + \boldsymbol{\mu}, \quad (\text{III.3})$$

donde  $Z_i = [x_i \ x_i^2 \ \dots \ x_i^q]$ ,  $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_q]$  es el vector que contiene los primeros  $q$  momentos centrales de la distribución normal (es decir,  $\mu_s = \frac{s!}{2(s-2)!}$  para  $s$  par, y cero en otro caso) y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ q! & q! & q! & q! & \dots & q! & 1 \\ \frac{q-2}{2} \frac{q-2}{2} 2! & \frac{q-4}{2} \frac{q-4}{2} 4! & \frac{q-6}{2} \frac{q-6}{2} 6! & \frac{q-8}{2} \frac{q-8}{2} 8! & \dots & 2(q-2)! & 1 \end{bmatrix} \quad (III.4)$$

Una de las principales ventajas de esta sucesión de HP es el hecho de que bajo ciertas condiciones de regularidad (Cramér, 1926), una función de frecuencia,  $f(x_i)$ , puede expandirse formalmente en términos de series GC Tipo A, es decir

$$f(x_i) = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s \frac{d^s \phi(x_i)}{dx_i^s} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \delta_s H_s(x_i) \phi(x_i), \quad (III.5)$$

donde los coeficientes  $\delta_s$ ,

$$\delta_s = \frac{(-1)^s}{s!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i) H_s(x_i) dx_i, \quad (III.6)$$

miden las desviaciones de  $f(x_i)$  con respecto a  $\phi(x_i)$  y pueden ser expresados también en términos de los momentos (no-centrales) de la variable aleatoria  $x_i$  con función de densidad  $f(x_i)$ .

Sin embargo, con fines empíricos, la expansión asintótica necesita truncarse en el grado  $q$ , y entonces la densidad GC se define como,

$$f_q(x_i, d_i) = [1 + H(x_i)'d_i]\phi(x_i), \quad (\text{III.7})$$

donde  $d_i = [d_{i1} \ d_{i2} \ \dots \ d_{iq}] \in \mathfrak{R}^q$  es un vector de parámetros y, por convención, se considera  $H_0(x_i)=1$  y  $d_0=1$ . La distribución de la ecuación (III.7) satisface propiedades interesantes (véase por ejemplo Mauleón y Perote, 2000), entre ellas, se enuncia el método de estimación MM en la Proposición 1, el cual se trabajará en este capítulo.

**Proposición 1:** Los primeros  $q$  momentos de la distribución GC en la ecuación (III.7) pueden expresarse como una función lineal del vector  $d_i' \in \mathfrak{R}^q$ ,

$$E[Z_i] = B^{-1}(Sd_i + \mu), \quad (\text{III.8})$$

donde  $Z_i = [x_i \ x_i^2 \ \dots \ x_i^q]$ ,  $S$  y  $B$  son matrices que se describen en las ecuaciones (III.2) y (III.4), respectivamente, y  $\mu \in \mathfrak{R}^q$  es el vector que contiene los primeros  $q$  momentos centrales de la distribución normal.

**Demostración:**

$$\begin{aligned} E[Z_i] &= \int Z[1 + H(x_i)'d_i]\phi(x_i)dx_i = \int B^{-1}(H(x_i) + \mu)[1 + H(x_i)'d_i]\phi(x_i)dx_i \\ &= B^{-1} \int H(x_i)\phi(x_i)dx_i + B^{-1} \int H(x_i)H(x_i)'d_i\phi(x_i)dx_i + B^{-1}\mu \int \phi(x_i)dx_i + B^{-1}\mu \int H(x_i)'d_i\phi(x_i)dx_i \\ &= 0 + B^{-1}Sd_i + B^{-1}\mu + 0 = B^{-1}(Sd_i + \mu). \end{aligned}$$

Esta relación entre los momentos de la densidad y los parámetros establece una manera directa de estimar la densidad mediante MM, dada por

$$\hat{d}_i = S^{-1}(B\hat{E}[Z_i] - \mu), \quad (\text{III.9})$$

donde  $\hat{E}[Z_i]$  es el vector que contiene los primeros  $q$  momentos muestrales de la variable  $x_i$  con función de densidad  $f_q(x_i, d_i)$ .

Sin embargo, la función (III.7) no garantiza positividad para todos los valores de  $d_i$  y de esta manera, generalmente, se implementa una transformación positiva (como por ejemplo la cuadrática) del tipo de Gallant y Nychka (1987). A continuación se explica la familia de densidades multivariantes GC incluyendo estas transformaciones positivas.

### III.2.2. El caso multivariante

Un vector aleatorio  $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \in \mathfrak{R}^n$  pertenece a la familia de distribuciones multivariante GC (MGC, por sus siglas en inglés), si éste se distribuye de acuerdo a la siguiente función de densidad,

$$F(X) = \frac{1}{n+1} \left[ G(X) + \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} h(x_i)' A_i h(x_i) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} \right] \quad (\text{III.9})$$

donde

$$G(X) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma^{-1/2}| \exp \left\{ -\frac{1}{2} X' \Sigma^{-1} X \right\} \quad (\text{III.10})$$

es la función de densidad normal multivariante con marginales univariantes  $\phi(x_i)$ ,  $A_i$  es una matriz definida positiva de orden  $(q+1)$ ,  $h(x_i) = [1 \ H] \in \mathfrak{R}^{q+1}$  y  $c_i = \int h(x_i)' A_i h(x_i) \phi(x_i) dx_i$  ( $\forall i=1, 2, \dots, n$ ) son las constantes que hacen que la función de densidad integre a uno (Del Brio et al., 2009). Sin pérdida de generalidad, se supone el mismo orden de truncamiento  $q$  para cada dimensión  $i$ .

Esta familia MGC comprende diferentes distribuciones, tales como las extensiones de la densidad GC de León et al. (2009) o la densidad Edgeworth-Sargan Positiva de Níñez y Perote (2012). Estos dos tipos de distribuciones se obtienen al considerar  $A_i = D_i D_i'$  y  $A_i = \text{diag}\{1, d_{i1}^2, \dots, d_{iq}^2\}$ , respectivamente, donde  $D_i = [1 \ d] \in \mathfrak{R}^{q+1}$  (nótese que en ambos

casos  $c_i = 1 + \sum_{s=1}^q d_{is}^2 s!$ ). Sin embargo, en este capítulo se implementa una familia relacionada de densidades propuestas en Perote (2004), la cual no impone restricciones de positividad, pero presenta otras ventajas interesantes desde la perspectiva empírica. De aquí en adelante, nos referimos a la densidad MGC como la función de densidad definida en la ecuación (III.12).

$$F(\mathbf{X}) = G(\mathbf{X}) + \left\{ \sum_{i=1}^n H(x_i)' d_i \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right\} \quad (\text{III.12})$$

Es claro que la densidad marginal MGC de  $x_i$  se corresponde con la distribución GC univariante (ecuación III.7) y, de esta manera, la estimación mediante MM puede implementarse a través de la relación dada en la ecuación (III.9). Además, Del Brio et al. (2011) demuestran que una densidad MGC equivalente puede estimarse mediante ML en dos pasos. En el primer paso, la media y varianza condicional de cada variable se estima mediante QML de manera independiente. En el segundo paso, el resto de los parámetros de la función de densidad se estiman de manera conjunta. Este capítulo propone un procedimiento similar de tres pasos basados en MM. Primero, se estima la media y varianza condicional de cada variable de manera independiente mediante QML. Segundo, se estiman los parámetros de la densidad GC univariante de cada variable estandarizada de manera independiente mediante MM. Tercero, se aproximan los parámetros de correlación mediante las correlaciones muestrales.

### III.3 Aplicación empírica

A continuación se presenta el procedimiento de estimación de la distribución de los rendimientos de una cartera ya descrito en la sección anterior. La cartera está compuesta por tres índices bursátiles europeos: EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30. La muestra comprende casi diez años de datos diarios ( $T = 2,861$  observaciones), desde 30 de Septiembre de 2002 hasta 19 de Noviembre de 2013. Los rendimientos se calculan como  $r_{it} = 100 \log(P_{it}/P_{i,t-1})$ . La Tabla III.1 muestra los principales estadísticos descriptivos de las series. Los datos presentan las características comunes a los

rendimientos de activos financieros: poca predictibilidad en el componente de la media condicional, clústers de volatilidad, asimetría, leptocurtosis y multimodalidad en las colas (saltos en la masa probabilística).

**Tabla III.1. Estadísticos descriptivos para EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30.**

	<b>EUROSTOXX50</b>	<b>Ibex35</b>	<b>Dax30</b>
Media	0.01134	0.02025	0.04228
Varianza	2.21881	2.26692	2.26598
Mínimo	-8.20788	-9.58586	-7.43346
Máximo	10.43765	13.48364	10.79747
Coficiente de asimetría	0.07902	0.13892	0.08702
Curtosis	5.45580	6.52309	5.38219

Se especifica una estructura multivariante AR(1)-GARCH(1,1) para modelizar el primer y segundo momento condicional y la densidad MGC dada en la ecuación (III.12) para capturar el resto de las regularidades empíricas de los datos. De este modo, el modelo multivariante para los rendimientos de la cartera  $r_t = [r_{1t} \ r_{2t} \ r_{3t}] \in \mathfrak{R}^3$  es:

$$r_t = \Phi_0 + \Phi_1 \circ r_{t-1} + u_t, \quad (\text{III.13})$$

$$u_t | \Omega_{t-1} \approx MGC(0, \Sigma_t(\alpha, \rho)), \quad (\text{III.14})$$

$$\Sigma_t(\alpha, \rho) = \sigma_t(\alpha) R_t(\rho) \sigma_t(\alpha), \quad (\text{III.15})$$

$$D_t(\alpha)^2 = \text{diag}\{\alpha_{i0}\} + \text{diag}\{\alpha_{i1}\} \circ u_{t-1} u'_{t-1} + \text{diag}\{\alpha_{i2}\} \circ D_{t-1}(\alpha)^2, \quad (\text{III.16})$$

donde  $\Phi_0$  y  $\Phi_1$  son vectores de dimensión  $3 \times 1$  que contienen los parámetros del proceso AR(1);  $\text{diag}\{\alpha_{i0}\}$ ,  $\text{diag}\{\alpha_{i1}\}$  y  $\text{diag}\{\alpha_{i2}\}$  son matrices diagonales cuyos elementos son los parámetros de los procesos GARCH(1,1), que se denominarán de ahora en adelante,  $\Phi$  y  $\alpha$ , respectivamente. Entonces, la matriz de varianzas-covarianzas se descompone en la matriz diagonal de desviaciones típicas condicionales,  $\sigma_t(\alpha)$  y la matriz simétrica de

correlaciones,  $R_i(\rho)$ , con elemento genérico  $\{\rho_{ij}\}$  (la matriz de parámetros de  $R_i(\rho)$  la denotamos por  $\rho$ ). Finalmente,  $\circ$  es el producto de Hadamard de dos matrices de igual tamaño (calculado mediante la multiplicación elemento por elemento de las matrices).

A continuación se describe la estimación del modelo en las ecuaciones (III.13)-(III.16) a través del procedimiento MM de tres pasos:

*Paso 1:*  $\Phi$  y  $\alpha$  se estiman mediante QML como los valores que maximizan la función de verosimilitud de cada variable bajo la distribución Gaussiana, es decir,

$$\{\hat{\phi}_{i0}, \hat{\phi}_{i1}, \hat{\alpha}_{i0}, \hat{\alpha}_{i1}, \hat{\alpha}_{i2}\} = \arg \max \left\{ \sum_{t=1}^T \left[ \ln(\sigma_{it}^2) + \frac{(r_{it} - \phi_{i0} - \phi_{i1}r_{it-1})^2}{\sigma_{it}^2} \right] \right\}, \quad (\text{III.17})$$

s.a.

$$\sigma_{it}^2 = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}(r_{it} - \phi_{i0} - \phi_{i1}r_{it-1})^2 + \alpha_{i2}\sigma_{it-1}^2; \quad \forall i=1,2,3.$$

*Paso 2:* Los parámetros  $(d)$  de la expansión GC se estiman de manera independiente para cada dimensión  $i$  mediante las siguientes ecuaciones,

$$\hat{d}_{i1} = \hat{m}_{i1} \quad (\text{III.18})$$

$$\hat{d}_{i2} = (\hat{m}_{i2} - 1) / 2 \quad (\text{III.19})$$

$$\hat{d}_{i3} = (\hat{m}_{i3} - 3\hat{m}_{i1}) / 6 \quad (\text{III.20})$$

$$\hat{d}_{i4} = (\hat{m}_{i4} - 6\hat{m}_{i2} + 3) / 24, \quad (\text{III.21})$$

$$\hat{d}_{i5} = (\hat{m}_{i5} - 10\hat{m}_{i3} + 15\hat{m}_{i1}) / 120 \quad (\text{III.22})$$

$$\hat{d}_{i6} = (\hat{m}_{i6} - 15\hat{m}_{i4} + 45\hat{m}_{i2} - 15) / 720 \quad (\text{III.23})$$

$$\hat{d}_{i7} = (\hat{m}_{i7} - 21\hat{m}_{i5} + 105\hat{m}_{i3} - 150\hat{m}_{i1}) / 5040 \quad (\text{III.24})$$

$$\hat{d}_{i8} = (\hat{m}_{i8} - 28\hat{m}_{i6} + 210\hat{m}_{i4} - 420\hat{m}_{i2} + 150) / 40320 \quad (\text{III.25})$$

$\forall i=1,2,3$ , donde  $\hat{m}_{si} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_{it} - \bar{r}_i)}{S_i}$ ,  $\forall s=1,2,\dots,8$ , es el  $s$ -ésimo momento muestral de las series estandarizadas ( $\bar{r}_i$  y  $S_i$  denotan la media y la desviación estándar de  $r_{it}$ , respectivamente), el cual, se estima consistentemente a partir del  $s$ -ésimo momento de la verdadera distribución.

*Paso 3:* La matriz de correlaciones,  $R(\rho)$ , se estima mediante el cálculo de las correlaciones muestrales de las variables de la cartera:

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{1}{TS_i S_j} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j), \forall i, j=1,2,3,4 \quad (i \neq j) \quad (\text{III.26})$$

Este método tiene las siguientes ventajas con respecto a ML:

- (i) Los estimadores MM son consistentes, es decir, el primer paso brinda estimadores consistentes (QML) para los parámetros de media y varianza condicional, y los estimadores del segundo paso también son consistentes, puesto que las funciones de verosimilitud son separables (véase Del Brio et al., 2011), y MM siempre conlleva estimadores consistentes.
- (ii) MM es mucho más simple que el método ML lo que reduce los problemas de convergencia de los algoritmos de optimización ML.
- (iii) Se soluciona el problema de dimensionalidad de la modelación multivariante, puesto que no varía exponencialmente con el número de activos considerados en la cartera.
- (iv) Los estimadores de ambos métodos son similares sin importar el tamaño de la expansión, y como se muestra empíricamente, el procedimiento conlleva resultados muy similares para la densidad estimada.

La Tabla III.2 presenta las estimaciones máximo-verosímiles en dos pasos (el t-ratio se muestra entre paréntesis) para los parámetros de la densidad GC de una cartera compuesta por los índices EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30. Se considera expansiones hasta el octavo término, pero  $d_{i1}$  y  $d_{i2}$  se restringen a cero, puesto que los modelos AR(1) y GARCH(1,) capturan las medias y varianzas condicionales, respectivamente.

Los parámetros del modelo AR(1)-GARCH(1,1) se estiman en el primer paso mediante QML. Las estimaciones QML confirman la presencia de un leve componente de predictibilidad en la media condicional, también la persistencia y los clústers de volatilidad (la estimación de  $\alpha_{i1} + \alpha_{i2}$  es cercana a uno). En el segundo paso, el resto de los parámetros de la densidad se estiman mediante MM o ML aplicado a las series estandarizadas resultantes del primer paso. Las estimaciones de las densidades GC exhiben el comportamiento tradicional de los rendimientos financieros:

- (i) El parámetro  $d_{i3}$  captura asimetría (negativa), y el resto de los parámetros impares no son significativos;
- (ii) El parámetro  $d_{i4}$  es positivo y significativo, lo que significa presencia de leptocurtosis; y
- (iii) Hay presencia de valores extremos, puesto que los parámetros de momentos más altos (parámetros  $d_{i6}$  y  $d_{i8}$ ), también son significativos.

Nótese que se escoge el orden de truncamiento de acuerdo a criterios de precisión (criterio de información de Akaike, AIC para el modelo con 2 y 6 parámetros). Aunque el mejor modelo debería eliminar los parámetros no significativos en la Tabla III.2 se muestran todas las estimaciones a efectos de comparación.

**Tabla III.2. Densidad MGC de los índices bursátiles: EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30.**

	<b>EUROSTOXX50</b>	<b>Ibex35</b>	<b>Dax30</b>
<i>Paso 1</i>			
$\phi_{i1}$	0.06776 (3.290)	0.08020 (3.865)	0.09300 (4.409)
$\phi_{i2}$	-0.05768 (-2.938)	-0.00669 (-0.323)	-0.03015 (-1.569)
$\alpha_{i0}$	0.02389 (3.060)	0.02018 (2.825)	0.02276 (3.352)
$\alpha_{i1}$	0.09721 (5.265)	0.09982 (5.078)	0.08949 (6.452)
$\alpha_{i2}$	0.89217 (48.341)	0.89359 (48.676)	0.89925 (65.130)

---

<b>Paso 2 (MM)</b>			
$d_{i3}$	-0.04495	-0.04790	-0.05916
$d_{i4}$	0.05733	0.06572	0.04999
$d_{i5}$	-0.02341	-0.02207	-0.02759
$d_{i6}$	0.02333	0.02506	0.02251
$d_{i7}$	-0.01651	-0.01170	-0.01848
$d_{i8}$	0.01181	0.00959	0.01316
<b>Paso 2 (ML)</b>			
$d_{i3}$	-0.02260	-0.03181	-0.04127
	(-1.89038)	(-2.54818)	(-4.05200)
$d_{i4}$	0.04212	0.04937	0.02997
	(5.27076)	(5.66917)	(3.76514)
$d_{i5}$	0.00401	-0.00176	-0.00188
	(0.89059)	(-0.36192)	(-0.46320)
$d_{i6}$	0.00531	0.00808	0.00065
	(2.39301)	(3.25338)	(0.24688)
$d_{i7}$	0.00000	-0.00011	-0.00080
	(0.14397)	(-0.15316)	(-1.19259)
$d_{i8}$	0.00101	0.00102	0.00068
	(4.02314)	(3.79608)	(2.35141)
<i>Verosimilitud</i>	-1676.898	-1677.097	-1667.209
<i>AIC</i>	3365.796	3366.194	3346.418
<i>(6 parámetros)</i>			
<i>AIC</i>	3380.726	3380.912	3363.116
<i>(2 parámetros)</i>			
<b>Paso 3</b>			
<b>EUROSTOXX50</b>	1	0.04727	0.03616
<b>Ibex35</b>	0.04727	1	0.00000
<b>Dax30</b>	0.03616	0.00000	1

---

(Estadístico t en parenthesis)

Nótese que el tercer paso presenta las estimaciones de la matriz de correlaciones, la cual exhibe correlación positiva entre el EUROSTOXX50, el Ibex35 y el Dax30. Sin embargo, hay ausencia de correlación entre estos dos últimos índices.

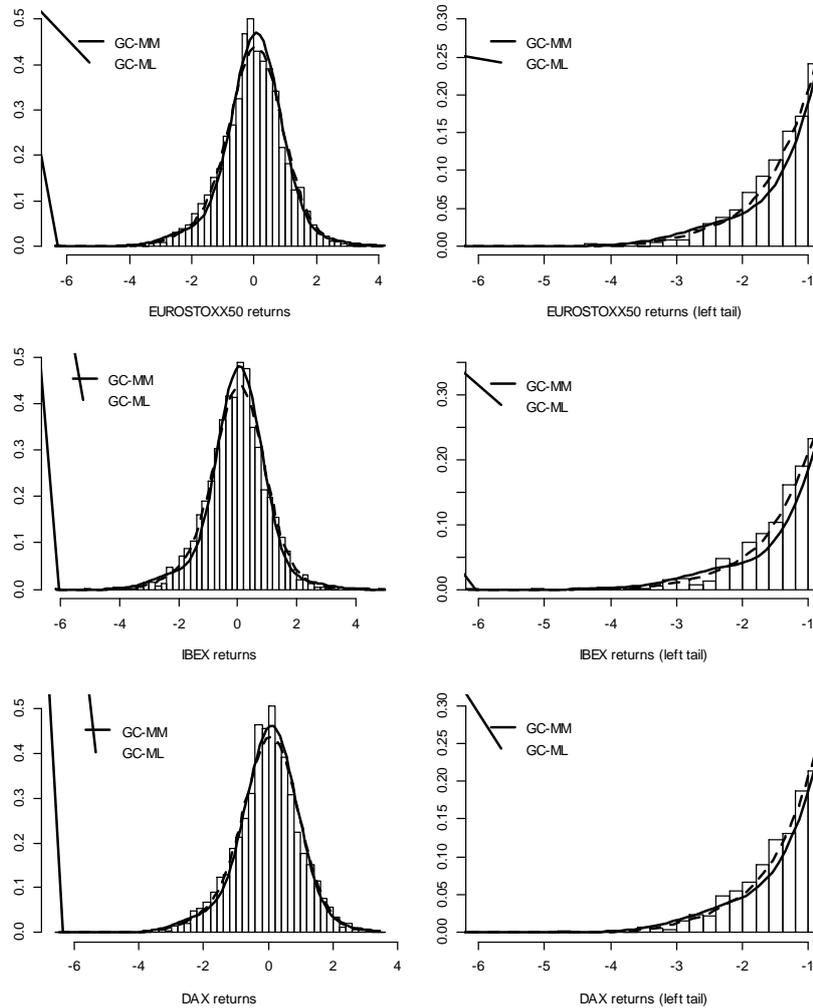
Para efectos de comparación, la Tabla III.3 presenta la estimación conjunta para la distribución t-Student multivariante.

**Tabla III.3. Densidad t Multivariante para EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30.**

	<b>EUROSTOXX50</b>	<b>Ibex35</b>	<b>Dax30</b>
$\phi_{i1}$	0.06776	0.08020	0.09300
$\phi_{i2}$	-0.05768	-0.00669	-0.03015
$\alpha_{i0}$	0.02389	0.02018	0.02276
$\alpha_{i1}$	0.09721	0.09982	0.08949
$\alpha_{i2}$	0.89217	0.89359	0.89925
$\nu$	10.48116		
<i>Verosimilitud</i>	-11941.49		
<b>Matriz de Correlaciones</b>			
<b>EUROSTOXX50</b>	1	0.04284	0.04419
<b>Ibex35</b>	0.04284	1	-0.00065
<b>Dax30</b>	0.04419	-0.00065	1

El Gráfico III.1 muestra las distribuciones marginales GC ajustadas a los rendimientos del EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30 comparadas con el histograma de los datos (estimación no paramétrica). Los gráficos en la columna izquierda representan las distribuciones para el rango entero, y los gráficos en la columna derecha muestran las colas izquierdas (valores extremos) de las distribuciones correspondientes. Estos gráficos muestran que tanto el método MM como ML (GC-MM y GC-ML, respectivamente) conllevan a resultados muy similares y estos métodos se aproximan de manera precisa a la distribución empírica de la cartera. Esta evidencia es aún más clara en las colas de la distribución, que representan el principal enfoque de la gestión de riesgos.

**Gráfico III.1 Ajuste de las distribuciones GC comparado con el histograma de datos**



Finalmente, se calcula VaR al 1% y 5% para una cartera formado con pesos iguales y los tres índices. Para tal fin, se simulan 1,000 conjuntos de datos de tamaño 2,861. La Tabla III.4 presenta el promedio del VaR y su error estándar para la t multivariante, MGC estimada mediante MM y ML y el correspondiente VaR empírico. Los resultados muestran como el modelo MGC-MM captura de manera adecuada el VaR de la cartera, y se convierte en una herramienta muy útil para la gestión de riesgos.

**Tabla III.4. VaR estimado para una cartera equiponderada del EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30.**

	<b>t multivariante</b>	<b>MGC-MM</b>	<b>MGC-ML</b>
VaR Empírico – 1%		-1.54395	
VaR Promedio – 1%	-1.62432	-1.50203	-1.45894
Error estándar	0.06022	0.05312	0.04867
VaR Empírico – 5%		-1.051891	
VaR Promedio – 5%	-1.06971	-1.00847	-0.99632
Error estándar	0.02996	0.02827	0.02711

#### **III.4. Conclusiones**

La función de densidad GC ha demostrado ser una herramienta útil para el ajuste de distribuciones de rendimientos financieros, puesto que esta densidad captura de manera asintótica la verdadera distribución y representa una aproximación general y flexible. Sin embargo, esta distribución no ha sido empleada para capturar el comportamiento multivariante de distribuciones de rendimientos de una cartera debido al problema de dimensionalidad que afecta particularmente este tipo de distribuciones (que dependen de un gran número de parámetros). Adicionalmente, la técnica de estimación tradicional, ML falla en cuanto a convergencia y no garantiza consistencia bajo posibles incorrectas especificaciones de la densidad.

Para solucionar este tipo de problemas, se propone un método de estimación simple de tres pasos, que combina estimación QML para la media y varianza condicional (Paso 1), estimación del resto de los parámetros de la densidad teniendo en cuenta las distribuciones marginales GC estandarizadas y, finalmente, estimación de los coeficientes de correlación. La validez de esta propuesta está basada en tres propiedades de la distribución MGC:

- (i) Las marginales de la distribución MGC se distribuyen GC univariantes;
- (ii) MGC permite estimación de manera independiente del primer y segundo momento bajo la hipótesis Gaussiana (QML);

- (iii) Existe una relación directa y lineal entre los momentos de la densidad y los parámetros, lo que simplifica la implementación de técnicas MM. Adicionalmente, este método siempre es consistente y puede ser implementado de manera directa aún en carteras de gran tamaño.

Se realiza una aplicación de este procedimiento para una cartera compuesta de tres índices bursátiles europeos. Los resultados no son tan diferentes a los obtenidos mediante la estimación QML y de esta manera parece ser un método directo para estimar la distribución de rendimientos de una cartera. Tanto las propiedades asintóticas de la expansión GC como la simplicidad del método hacen que este enfoque sea una buena aproximación a la distribución de la cartera y, de esta manera, una metodología útil para los gestores de riesgo.

Este tipo de medidas de riesgo y el procedimiento sencillo de tres etapas propuesto en este capítulo puede ayudar a prevenir a surgimientos de nuevos sistemas bancarios en la sombra (SBS, por sus siglas en inglés). Debido a la falta de regulación, se originó el denominado sistema bancario en la sombra, que consiste en entidades financieras diferentes a bancos de inversión y comerciales, como por ejemplo vehículos de inversión estructurados (SIVs, por sus siglas en inglés), entidades de cuenta de orden (OBSEs), entre otras, que realizaban transacciones con CDS y otros instrumentos financieros complejos. Los bancos de inversión son regulados bajo los acuerdos de Basilea, pero las regulaciones impuestas a SBS fueron más laxas. Entonces, proponemos aplicar nuestra metodología a otro tipo de activos financieros para cuantificar el riesgo de una cartera conformada no solamente de instrumentos de renta fija y variable, sino también por instrumentos derivados. Los instrumentos derivados fueron diseñados principalmente con fines de cobertura de riesgo, pero en ocasiones son empleados con fines especulativos por el apalancamiento que estos instrumentos brindan, y a mayor apalancamiento, mayor riesgo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baixauli S, Alvarez S. (2003): Accurate measures of value at risk fitting fat tails. Discussion Papers in Economics. University of York.
- Bao Y, Lee T-H, Saltoglu B. (2006): Comparing density forecast models. *Journal of Forecasting* 26:203-225
- Barton DE, Dennis KER (1952): The Conditions under which Gram-Charlier and Edgeworth curves are positive definite and unimodal. *Biometrika* 39:425-427
- Bollerslev T, Wooldridge JM (1992): Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances. *Econometric Reviews* 11:143-172.
- Charlier CV (1905): Uber die darstellung willkurlicher funktionen. *Arvik fur Mathematik Astronomi och fysik* 9:1-13
- Corrado C, Su T (1997): Implied volatility skews and stock return Skewness and kurtosis implied by stock option prices. *European Journal of Finance* 3:73-85
- Cramér H (1926): On some classes of series used in mathematical statistics. Skandinaviske Matematikercongres, Copenhagen
- Del Brio EB, Níguez TM, Perote J (2009): Gram-Charlier densities: A multivariate approach. *Quantitative Finance* 9:855-868
- Del Brio EB, Níguez TM, Perote J (2011): Multivariate semi-nonparametric distributions with dynamic conditional correlations. *International Journal of Forecasting* 27:347-364
- Edgeworth FY (1907): On the representation of statistical frequency by series. *Journal of the Royal Statistical Society series A*, 80
- Engle RF (2002): Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics* 20:339-350
- Gallant AR, Nychka DW (1987): Semionparametric maximum likelihood estimation. *Econometrica* 55:363-390
- Gallant AR, Tauchen G (1989): Semionparametric estimation of conditionally constrained heterogeneous processes: asset pricing applications. *Econometrica* 57:1091-1120
- Jarrow R, Rudd A (1982): Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics* 10:347-369
- Jondeau E, Rockinger M (2001): Gram-Charlier densities. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25:1457-1483

- Jurczenko E, Maillet B, Negrea B (2002): Multi-moment option pricing models: a general comparison (part 1). Working Paper, University of Paris I Panthéon-Sorbonne.
- León A, Mencía J, Sentana E (2009): Parametric properties of semi-nonparametric distributions, with applications to option valuation. *Journal of Business and Economic Statistics* 27:176-192
- León A, Rubio G, Serna G (2005): Autoregressive conditional volatility, skewness and kurtosis. *Quarterly Review of Economics and Finance* 45:599-618
- Mauleon I, Perote J (2000): Testing densities with financial data: An empirical comparison of the Edgeworth-Sargan density to the Student's t. *European Journal of Finance* 6:225-239
- Nishiyama Y, Robinson PM (2000): Edgeworth expansions for semi-parametric averaged derivatives. *Econometrica* 68:931-980.
- Ñíguez TM, Perote J (2011): Forecasting heavy-tailed densities with positive Edgeworth and Gram-Charlier expansions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 74:600-627
- Ñíguez TM, Paya I, Peel D, Perote J (2012): On the stability of the CRRA utility under high degrees of uncertainty. *Economics Letters* 115:244-248
- Perote, J (2004): The multivariate Edgeworth-Sargan density. *Spanish Economic Review* 6:77-96
- Polanski A, Stoja E (2010): Incorporating higher moments into value at risk forecasting. *Journal of Forecasting* 29:523-535.
- Rompolis L, Tzavalis E (2006): Retrieving risk-neutral densities based on risk neutral moments through a Gram-Charlier series expansion. *Mathematic Modelling and Computation* 46:225-234
- Sargan JD (1975): Gram-Charlier approximations applied to t ratios of k-class estimators. *Econometrica* 43:327-346
- Tanaka K, Yamada T, Watanabe T (2005): Approximation of interest rate derivatives by Gram-Charlier expansion and bond moments. Working Paper IMES, Bank of Japan
- Velasco C, Robinson PM (2001): Edgeworth expansions for spectral density estimates and studentized simple mean. *Econometric Theory* 17:497-539
- Verhoeven P, McAleer M (2004): Fat tails in financial volatility models. *Mathematics and Computers in Simulation* 64:351-362
- Wallace DL (1958): Asymptotic approximations to distributions. *Annals of Mathematical Statistics* 29:635

# **CAPÍTULO IV: Predicción del VaR mediante cópulas semi-paramétricas para índices de hedge funds durante la reciente crisis financiera\***

## **IV.1. INTRODUCCIÓN**

Las cópulas se han convertido en objeto de estudio en la gestión de riesgos y la valoración de derivados. En los últimos años se han usado ampliamente en la valoración de obligaciones de deuda colateralizadas (CDO, por sus siglas en inglés) y de derivados de crédito (Hull, 2006). En la gestión de riesgo son una herramienta muy útil, puesto que los factores de riesgo se caracterizan por una función de distribución conjunta. Las cópulas son funciones que relacionan funciones de distribución multivariante a sus funciones de distribución marginales. También se puede decir que las cópulas son funciones de distribución multivariantes cuyas marginales son uniformes estándar (Nelsen, 2006).

Una función de distribución conjunta contiene información acerca del comportamiento de las marginales y una descripción de su estructura de dependencia. Las cópulas representan una manera de extraer la estructura de dependencia de una distribución conjunta (McNeil et al., 2005, p.184). El análisis de dependencia en las colas de la distribución se ha convertido en una cuestión de enorme interés en finanzas, puesto que es importante conocer si los eventos extremos de dos o más activos financieros se mueven en conjunto. De nuevo el supuesto de normalidad, en este caso multivariante, puede no ser de gran utilidad y se necesitarán otras herramientas que permitan capturar de manera más adecuada los eventos de cola en el caso multivariante. Desde el punto de vista estadístico, la cópula sirve para describir la estructura de dependencia entre dos o más variables aleatorias. Adicionalmente, es útil para construir familias de distribuciones bivariantes.

---

\* Una versión de este capítulo se ha publicado en la revista "Physica A: Statistical Mechanics and its Applications", indexada en el SSCI con índice de impacto en 2012 de 1,676.

En aplicaciones financieras la medida estadística más utilizada para medir dependencia es la correlación lineal; sin embargo, esta medida sólo captura dependencia lineal. Embrechts et al. (1999) señalan que el uso de correlación lineal no trae problemas cuando los factores de riesgo se distribuyen como una normal, pero este no es el caso la mayoría de los factores de riesgos financieros. Esto sucede, como mencionan los autores, porque esta medida no dice nada acerca del grado de dependencia en las colas de las distribuciones. Además, una correlación nula no necesariamente implica independencia de los factores de riesgo (de hecho incorrelación sólo implica independencia bajo el supuesto de normalidad). Para solucionar éste y otros problemas, se propone el uso de otras medidas de correlación (basadas en rangos) o el uso de cópulas. Acerca de cópulas existe una amplia literatura, entre ellos están: Joe (1997), Nelsen (2006), Cherubini et al. (2004), Trivedi y Zimmer (2007), Fredheim (2008) y Rank (2006). Una reciente revisión de la literatura de aplicaciones de cópulas a series temporales financieras y económicas se puede encontrar en Patton (2012).

En cuanto a la gestión de *hedge funds*, la literatura financiera ha avanzado enormemente en la última década (véase Agarwal y Naik, 2005, para una revisión exhaustiva). Pero, no fue hasta la quiebra del fondo Long Term Capital Management (LTCM) en 1998, y el crash de Nasdaq en el 2000, que los inversores en *hedge funds* tuvieron en cuenta la necesidad de implementar técnicas en gestión de riesgo<sup>3</sup>. Jorion (2000) fue el primero en aplicar la metodología del VaR a rendimientos de *hedge funds*, en especial, para el caso de LTCM, y recientemente, Gupta y Liang (2005) analizan los requerimientos de capital para 1500 *hedge funds* aproximadamente.

Los rendimientos de los *hedge funds*, así como de los activos financieros, exhiben varianzas condicionales en el tiempo, colas pesadas y asimetría. Varios autores (Fung et al., 2008; Giannikis y Vrontos, 2011) encuentran que una gran parte de la volatilidad de los rendimientos se puede explicar por factores relacionados al mercado, tales como índices de mercados bursátiles, *book-to-market*, 'momentum' o índices de materiales básicos (*commodities*). Otros autores se centran en capturar el riesgo de cola mediante la aplicación de la teoría del valor extremo (Harris y Mazibas, 2013) o expansiones semi-paramétricas basadas en la aproximación de Cornish-Fisher (Favre y Galeano, 2002). En este capítulo se compara el comportamiento del VaR de ambos enfoques, como

---

<sup>3</sup> El reporte "Sounds Practices for Hedge Fund Managers" de 2000 recomendó el uso del VaR como medida de riesgo (Lhabitant, 2004, p. 294-297).

también de otras distribuciones paramétricas, bajo un backtesting. Hasta donde llega nuestro conocimiento, esta comparación aún no ha sido estudiada con rendimientos de *hedge funds*. Un artículo relacionado es el de Güner et al. (2010), quienes implementan un procedimiento de backtesting en dos etapas: En el primer paso, se estima un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) con innovaciones distribuidas t-Student y en el segundo paso se ajusta la distribución  $\alpha$ -estable a los residuos estandarizados. Los autores concluyen que el modelo estable se comporta bien en la predicción del VaR.

En este capítulo se aplica un procedimiento de backtesting similar para dos índices de *hedge funds* (estrategias de *Equity Hedge* y *Event Driven*), y se compara el comportamiento del pronóstico del VaR obtenido mediante la distribución normal (caso base) con cuatro distribuciones que tienen en cuenta las colas pesadas de los rendimientos accionarios: t-Student, t-asimétrica, el enfoque EVT, y el enfoque semi-paramétrico basado en la densidad GC.

Adicionalmente, en este capítulo se mide el riesgo de una cartera de los índices de *hedge funds*, el cual requiere la consideración de dependencia no lineal entre los rendimientos de los activos. Para tal fin, el uso de las cópulas representa una herramienta útil puesto que permite definir una gran variedad de distribuciones multivariantes mediante la relación de variables subyacentes con diferentes distribuciones marginales. En línea con el enfoque semi-paramétrico, se obtiene una expresión analítica para la cópula GC y su densidad basada en la densidad multivariante GC presentada en Perote (2004). La densidad de esta cópula GC puede obtenerse de manera directa de la densidad de la cópula Gaussiana, pero incorpora dependencia no lineal dependiendo de la estructura de parámetros de los polinomios de Hermite.

Este capítulo se divide de la siguiente manera: En la sección IV.2 se presentan las definiciones y conceptos básicos de una cópula. En la siguiente sección IV.3, se obtiene una expresión cerrada para la cópula GC. La sección IV.4 presenta una aplicación univariante a la cuantificación de riesgo de dos índices de *hedge funds*, mientras que la sección IV.5 presenta la aplicación multivariante, y compara el comportamiento de la cópula GC con otras usualmente empleadas en finanzas. Finalmente la sección IV.6 concluye.

## IV.2. Definiciones

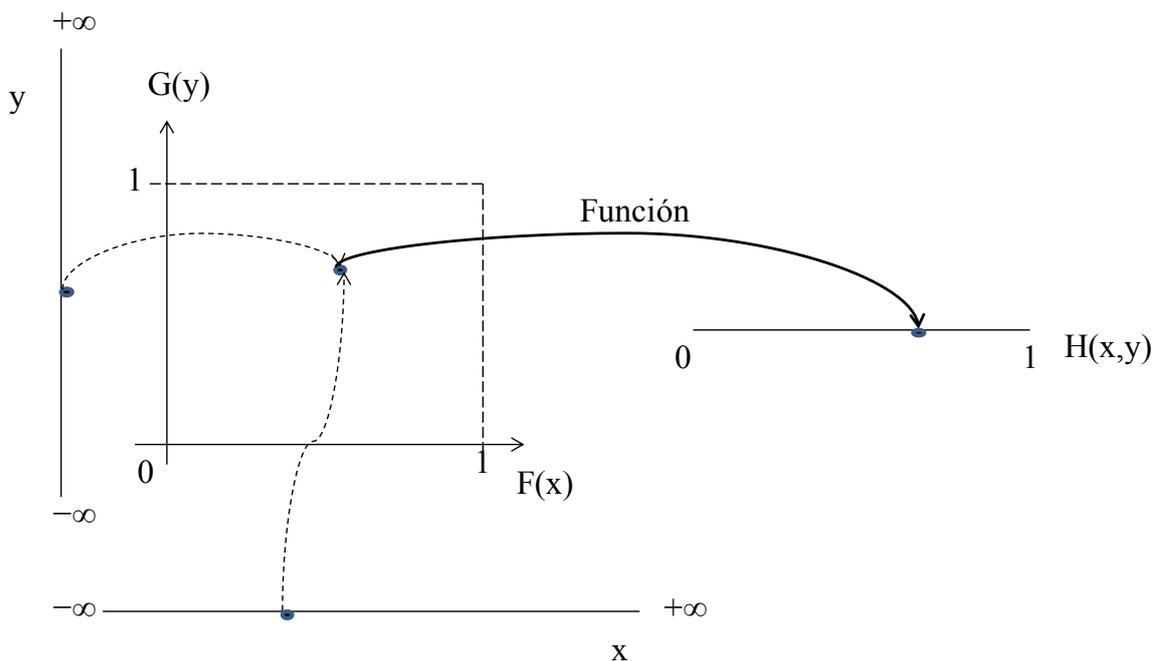
A continuación se presenta una definición formal de cópula (McNeil et al., 2005, p. 185).

### *Cópula*

Una cópula  $d$ -dimensional es una función de distribución en  $[0,1]^d$  con distribuciones marginales uniformes estándar. Sea  $C$  una cópula, entonces:  $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ .

El Gráfico IV.1 aclara este concepto. Sea  $d = 2$ , es decir, trabajaremos el caso bivalente. Entonces, sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias con función de distribución acumulada  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $G(y) = P(Y \leq y)$  respectivamente, y sea  $H(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  la función de distribución conjunta.

**Gráfico IV.1. Representación gráfica del concepto de cópula. Caso bivalente**



A cada par de números reales  $(x,y)$  le corresponde un punto  $(F(x),G(y))$ , que pertenece a  $[0,1]^2$ , y a este punto le corresponde un número  $H(x,y)$  que pertenece a  $[0,1]$ . La función que hace posible la última correspondencia es una cópula.

### ***Propiedades de una cópula***

$C$  es una cópula si:

- (1)  $C(u_1, \dots, u_d)$  es creciente en cada componente  $u_i$ .
- (2)  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  para todo  $i = 1, \dots, d, u_i \in [0,1]$ .
- (3) Para todo  $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0,1]^d$  con  $a_i \leq b_i$ , entonces:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

La propiedad (1) se cumple para cualquier función de distribución multivariante, mientras que la propiedad (2) es el requisito de distribuciones marginales uniformes. La propiedad (3), menos intuitiva, es conocida como la desigualdad rectangular.

Un resultado importante en la teoría de cópulas es el Teorema de Sklar. Este teorema muestra que todas las funciones de distribución multivariante contienen cópulas. Adicionalmente, muestra que las cópulas pueden ser empleadas junto con distribuciones marginales para construir funciones de distribución multivariante o también llamadas meta distribuciones. La representación del Teorema de Sklar se presenta a continuación:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (\text{IV.1})$$

Donde  $F$  es la distribución conjunta,  $F_1, \dots, F_n$  son las distribuciones marginales y  $C$  es la cópula. Si las distribuciones marginales son continuas, entonces la cópula es única. Para el caso bivalente del Gráfico IV.1, el Teorema de Sklar se representa como:  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ , donde  $H(x, y)$  es la función de distribución conjunta, y  $F(x), G(y)$  son las distribuciones marginales.

A partir del Teorema de Sklar se obtiene una manera de extraer cópulas:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (\text{IV.2})$$

Un ejemplo de cópulas comúnmente usada en finanzas son las cópulas implícitas. En este caso se tienen la cópula Gaussiana y la cópula t. Se llaman implícitas, puesto que su cópula está implícita en funciones de distribución bien conocidas, las marginales no están explícitas, pero están incorporadas en la función de distribución conjunta.

Al aplicar (IV.2) en el caso de la cópula Gaussiana se obtiene:

$$\begin{aligned} C_P^{Ga}(\mathbf{u}) &= Pr(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d) \\ &= \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)) \end{aligned} \quad (IV.3)$$

Donde  $\Phi_P$  denota la función de distribución conjunta de  $\mathbf{X}$ ,  $P$  es la matriz de correlaciones y  $\Phi$  denota la función de distribución normal estándar univariante. Esta representación se empleará para obtener la cópula Gram-Charlier en el caso bivariante.

Para el caso de la cópula t se tiene la representación:

$$C_{v,P}^t(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)) \quad (IV.4)$$

Donde  $\mathbf{t}_{v,P}$  es la función de distribución conjunta del  $\mathbf{X}$ ,  $P$  es la matriz de correlaciones y  $t_v$  denota la función de distribución t estándar univariante.

### IV.3. Cópula Gram-Charlier

Por simplicidad notacional y sin pérdida de generalidad, nos restringimos de aquí en adelante al caso bivariante.

Sea  $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$  un vector aleatorio con función de distribución conjunta GC  $F^{GC}$ , y marginales GC,  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$ , donde  $x_i = F_i^{-1}(u_i)$  con  $i = 1, 2$ , entonces la cópula GC se puede obtener como:

$$C^{GC}(u_1, u_2) = F^{GC}(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \quad (IV.5)$$

De esta forma, la copula GC está dada por (véase la demostración en el Apéndice A):

$$\begin{aligned} C^{GC}(u_1, u_2) &= \Phi(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) - \Phi(F_2^{-1}(u_2))\phi(F_1^{-1}(u_1))\tilde{q}_1(F_1^{-1}(u_1)) - \\ &\quad \Phi(F_1^{-1}(u_1))\phi(F_2^{-1}(u_2))\tilde{q}_2(F_2^{-1}(u_2)), \end{aligned} \quad (IV.6)$$

donde  $\tilde{q}_i(x_i) = \frac{d_{3i}}{\sqrt{3}}H_2(x_i) + \frac{d_{4i}}{\sqrt{4}}H_3(x_i)$ ,  $\forall i = 1, 2$ ,  $\Phi$  es la función de distribución acumulada normal multivariante,  $\Phi$  es la función de distribución acumulada normal univariante, y  $\phi$  es la función de densidad normal univariante.

### ***La densidad de la cópula GC y la estimación ML***

La densidad de una cópula  $C(u_1, u_2)$  se puede obtener mediante

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}. \quad (\text{IV.7})$$

De manera similar, si  $f(x_1, x_2)$  es la función de densidad del vector aleatorio  $\mathbf{X} = (x_1, x_2)'$ , con funciones de densidad marginal  $f_1(x_1)$  y  $f_2(x_2)$ , entonces la densidad de la cópula es:

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) f_2(F_2^{-1}(u_2))}, \quad (\text{IV.8})$$

puesto que  $f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) = c(u_1, u_2) f_1(F_1^{-1}(u_1)) f_2(F_2^{-1}(u_2))$ , conocida como la representación canónica. De esta manera, la expresión para la densidad de la cópula GC es (véase la demostración en el Apéndice B):

$$c^{GC}(u_1, u_2) = \frac{c^{Ga}(u_1, u_2) + q_1(F^{-1}(u_1)) + q_2(F^{-1}(u_2))}{[1 + q_1(F^{-1}(u_1))][1 + q_2(F^{-1}(u_2))]}, \quad (\text{IV.9})$$

donde  $c^{Ga}$  es la densidad de la cópula Gaussiana,  $F^{-1}$  es la inversa de la función de distribución acumulada de una GC estándar, y  $q_i(x_i) = d_{3i}H_3(x_i) + d_{4i}H_4(x_i)$ ,  $\forall i = 1, 2$ .

La estimación del vector de parámetros de la cópula,  $\boldsymbol{\theta}$ , tradicionalmente, ha sido llevada a cabo mediante técnicas ML. Para tal fin, la función de log-verosimilitud puede definirse como:

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{U}}_1, \dots, \hat{\mathbf{U}}_n) = \sum_{t=1}^n \ln c_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{U}}_t), \quad (\text{IV.10})$$

donde  $c_{\boldsymbol{\theta}}$  denota la densidad de la cópula, y  $\hat{\mathbf{U}}_t$  una pseudo-observación de la cópula. De esta manera, la función de log-verosimilitud para la densidad de la cópula GC viene dada por (véase el Apéndice B):

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}; \hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2) = \sum_{t=1}^n \ln \{ \boldsymbol{\phi}(Y_{1t}, Y_{2t}) + \phi(Y_{1t})\phi(Y_{2t})[q_1(Y_{1t}) + q_2(Y_{2t})] \} - \sum_{t=1}^n \ln(1 + q_1(Y_{1t})) - \sum_{t=1}^n \ln(1 + q_2(Y_{2t})) - \sum_{t=1}^n \ln(\phi(Y_{1t})) - \sum_{t=1}^n \ln(\phi(Y_{2t})), \quad (\text{IV.11})$$

donde  $Y_1 = F^{-1}(u_1)$  y  $Y_2 = F^{-1}(u_2)$ , y  $\boldsymbol{\phi}$  denota la densidad multivariante de una distribución normal.

### *Estimación de la cópula GC*

La estimación ML de los parámetros de la cópula se basa en observaciones de una pseudo-muestra, puesto que los datos de una cópula no se observan directamente. Este procedimiento se divide en dos pasos:

Primero, las marginales se estiman de la muestra  $\{x_t\}_{t=1}^T$  mediante la función de distribución empírica

$$\hat{F}_T(x_j) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T I_{\{x_t \leq x_{j,T}\}}, \quad (\text{IV.12})$$

donde  $I_{\{\cdot\}}$  denota la función indicadora, entonces,  $\hat{F}_T(x_j)$  es la frecuencia de observaciones por debajo o igual a  $x_j$ . El término  $T + 1$  asegura que los datos de la pseudo-muestra caigan en el interior del cuadrado unitario.

Segundo, se genera la pseudo-muestra de observaciones de la cópula

$$\hat{\mathbf{U}}_t = (U_{1t}, U_{2t})' = (\hat{F}_1(x_{1t}), \hat{F}_2(x_{2t}))'. \quad (\text{IV.13})$$

Una vez que se obtiene la pseudo-muestra, la expresión en (IV.10) se maximiza (numéricamente) para estimar los parámetros de la cópula. Para generar la pseudo-muestra de datos distribuidos Gram-Charlier se necesita una estimación de parámetros  $d_3$  y  $d_4$ , que se puede realizar mediante el método de los momentos.

#### **IV.3.1 Simulación**

##### *Simulación de cópula Gaussiana*

En este apartado se describe como simular una cópula Gaussiana siguiendo el algoritmo sugerido en McNeil et al. (2005, p. 66 y 193). Antes de ver el algoritmo, se muestra la descomposición de Cholesky y la transformación de probabilidad.

### ***Descomposición de Cholesky***

La descomposición de Cholesky es útil para generar números aleatorios con correlaciones. En finanzas se usa para valorar derivados con múltiples subyacentes y que sus precios estén correlacionados (ver por ejemplo sección 3.2.3 de Glasserman, 2003). En gestión de riesgos se usa en modelos factoriales (Hull, 2012, sección 11.3 - 11.5).

Sea  $\Sigma$  una matriz real, simétrica y definida positiva, que admite la factorización  $\Sigma = L \cdot L'$ ; donde  $L$  es una matriz triangular inferior y  $L'$  su transpuesta.

Un ejemplo es generar dos variables aleatorias con distribución normal bivalente  $N(\mu, \Sigma)$ . Sea  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas de dos activos financieros:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

Entonces  $L$  es:

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

De esta manera, se generan  $X_1$  y  $X_2$  con distribución  $N(\mu, \Sigma)$ , a partir de dos variables aleatorias con distribución normal estándar,  $Z_1$  y  $Z_2$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + \sigma_1 Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 Z_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

### ***Transformación de probabilidad***

Si una variable aleatoria  $X$  tiene una función de distribución  $F$ , donde  $F$  es una función de distribución continua, entonces  $F(X) \sim U(0,1)$ .

La descomposición de Cholesky y la transformación de probabilidad son útiles para generar simulaciones de cópula Gaussiana como se observa a continuación.

**Algoritmo para simular una cópula Gaussiana**

(i) Se genera  $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, P)$  de la siguiente manera:

(1) Calcular la descomposición de Cholesky de  $P$  para obtener el factor de Cholesky  $P^{1/2}$ .

(2) Generar un vector de variables normal estándar independientes

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$$

(3) Calcular  $\mathbf{Z} = \mu + P^{1/2}\mathbf{X}$ .

(ii) Utilizando la transformación de probabilidad se genera  $\mathbf{U} = (\Phi(Z_1), \dots, \Phi(Z_d))'$

Donde  $\Phi$  es la función de distribución normal estándar y  $P$  es la matriz de correlaciones. De esta manera el vector aleatorio  $\mathbf{U}$  tiene función de distribución  $C_P^{Ga}$ .

**Simulación de cópula Gram-Charlier**

Siguiendo los mismos pasos para simular una cópula Gaussiana se obtiene:

(i) Se genera  $\mathbf{Z} \sim GC_d(\mathbf{0}, P)$  de la siguiente manera:

(1) Calcular la descomposición de Cholesky de  $P$  para obtener el factor de Cholesky  $P^{1/2}$ .

(2) Generar un vector de variables Gram-Charlier independientes  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$ . Donde  $X_i \sim GC(0, 1, d_3, d_4)$ .

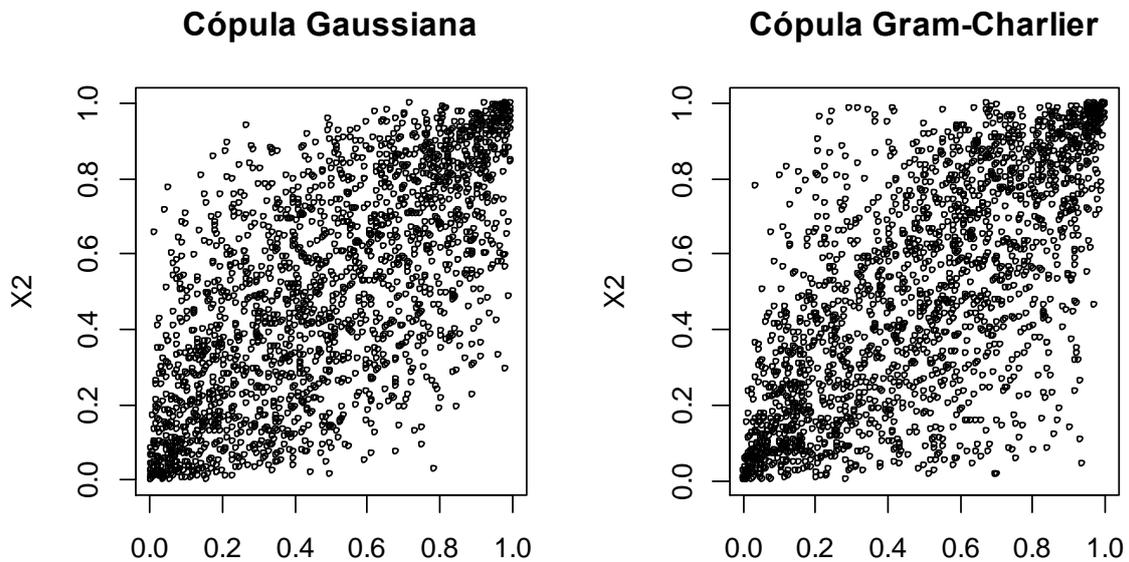
(3) Calcular  $\mathbf{Z} = \mu + P^{1/2}\mathbf{X}$ .

(ii) Utilizando la transformación de probabilidad se genera  $\mathbf{U} = (F(Z_1), \dots, F(Z_d))'$

Donde  $F$  es la función de distribución Gram-Charlier y  $P$  es la matriz de correlaciones. De esta manera el vector aleatorio  $\mathbf{U}$  tiene función de distribución  $C_P^{GC}$ .

A continuación se muestra una comparación gráfica de una cópula Gaussiana con una cópula Gram-Charlier.

**Gráfico IV.2 Simulaciones de cópula Gaussiana y GC**



En el Gráfico IV.2 se han simulado 2000 puntos para cada cópula. La correlación es de 0.7. Los parámetros  $d_3$  y  $d_4$  son  $-0.05$  y  $0.05$  respectivamente.

#### **IV.4. Aplicación empírica: Cuantificación de VaR mediante el uso de la meta distribución GC**

Se comienza el análisis mediante el caso univariante como las aplicaciones II.5 y II.6, seguidamente se estudia el caso bivariante mediante el concepto de cópulas.

##### **IV.4.1. Caso Univariante**

###### *Datos*

Se emplean datos diarios de dos índices de *hedge funds* en diferentes estrategias: *Equity Hedge* y *Event Driven*. La primera estrategia consiste en posiciones largas y cortas en

acciones. Mientras que la estrategia *Event Driven* se refiere a posiciones en compañías que involucran transacciones en fusiones, reestructuraciones; entre otras, y que pueden tener un impacto importante en los precios de estas compañías. Los datos comprenden desde Julio 2006 (un año antes de que los *hedge funds* de Bear Stearns anunciaran masivas pérdidas originando la crisis subprime) hasta el primer trimestre de 2013. La Tabla IV.1 presenta los estadísticos descriptivos para los rendimientos en tiempo continuo de estas series, definidos como  $r_t=100\log(P_t/P_{t-1})$ , donde  $P_t$  representa los correspondientes índices de *hedge funds*. Los estadísticos muestran que los rendimientos de los *hedge funds* seleccionados presentan asimetría negativa y un valor alto de exceso de curtosis, tal y como generalmente se encuentra en la literatura financiera.

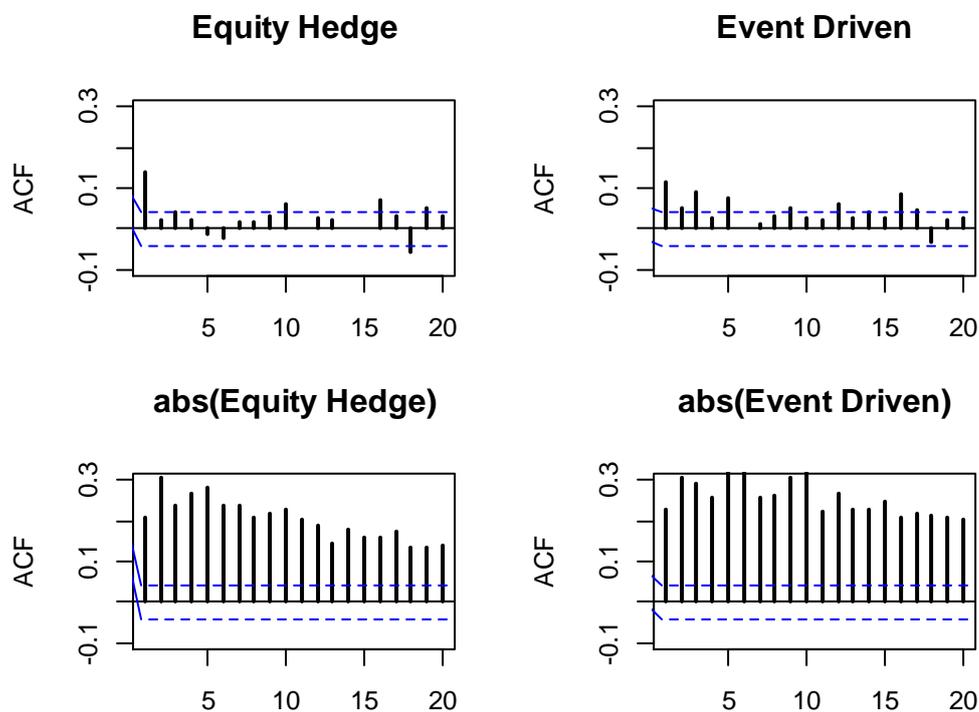
**Tabla IV.1. Estadísticos descriptivos para los rendimientos de los *Hedge funds***

	<i>Equity Hedge</i>	<i>Event Driven</i>
Media	0.0004	0.0108
Mediana	0.0351	0.0341
Desviación estándar	0.4317	0.3113
Varianza	0.1864	0.0969
Exceso de curtosis	5.3728	12.1327
Coefficiente de asimetría	-0.7835	-1.1468
Rango	5.5797	5.6929
Mínimo	-3.0204	-3.1182
Máximo	2.5593	2.5747

### *Resultados*

El Gráfico IV.3 muestra la función de autocorrelación (ACF) de las series de los rendimientos (gráficos de la parte superior), y las series en valores absolutos (gráficos inferiores) usando el total de la muestra. Como en las aplicaciones univariantes del Capítulo II, los ACF de las series de rendimientos presentan una leve estructura autorregresiva en los datos, y de esta manera se podría identificar un modelo AR(1) o ARMA(1,1). Mientras que los ACF de las series en valor absoluto evidencian presencia de heteroscedasticidad condicional en los datos y pueden ser modelizados adecuadamente por un proceso GARCH(1,1).

**Gráfico IV.3. Funciones de autocorrelación para los rendimientos de los *hedge funds* y sus valores absolutos**



La Tabla IV.2 presenta los valores de log-verosimilitud de tres modelos para la media condicional combinado con un modelo GARCH(1,1) para capturar la varianza condicional y bajo las distribuciones normal, t-Student y t-asimétrica. Dichos valores apoyan la selección del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1).

**Tabla IV.2. Valores de log-verosimilitud para diferentes modelos de media y varianza condicional y bajo diferentes distribuciones**

	<i>Equity Hedge</i>	<i>Event Driven</i>
<b>Panel A: Normal</b>		
GARCH(1,1)	-946.807	-80.404
AR(1)-GARCH(1,1)	-921.565	-65.201
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	-921.447	-62.336
<b>Panel B: t-Student</b>		
GARCH(1,1)	-909.326	-31.577
AR(1)-GARCH(1,1)	-881.268	-12.582
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	-880.946	-9.727
<b>Panel C: t-asimétrica</b>		
GARCH(1,1)	-891.788	-22.084
AR(1)-GARCH(1,1)	-868.763	-5.132
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	-868.747	-3.283

La Tabla IV.3 presenta las estimaciones ML de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) bajo las cinco distribuciones analizadas.

**Tabla IV.3. Estimación de los parámetros del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1).**

	<i>Equity Hedge</i>	<i>Event Driven</i>
<b>Panel A: Normal</b>		
$\varphi$	0.0036 (0.5962)	0.0131 (0.0179)
$\phi$	0.2296 (0.1193)	0.5626 (0.0006)
$\theta$	-0.0724 (0.6384)	-0.4510 (0.0114)
$\omega$	0.0039 (0.0001)	0.0014 (0.0001)
$\alpha$	0.1059 (0.0000)	0.0984 (0.0000)
$\beta$	0.8722 (0.0000)	0.8861 (0.0000)
<b>Panel B: t-Student</b>		
$\varphi$	0.0036 (0.5837)	0.0168 (0.0068)
$\phi$	0.2699 (0.0582)	0.5433 (0.0005)
$\theta$	-0.1140 (0.4507)	-0.4251 (0.0118)
$\omega$	0.0036 (0.0007)	0.0012 (0.0007)
$\alpha$	0.1115 (0.0000)	0.0939 (0.0000)
$\beta$	0.8703 (0.0000)	0.8918 (0.0000)
$\nu$	7.5050 (0.0000)	7.0846 (0.0000)
<b>Panel C: t-asimétrica</b>		
$\varphi$	0.0036 (0.6462)	0.0161 (0.0057)
$\phi$	0.1130 (0.5451)	0.4763 (0.0039)
$\theta$	0.0316 (0.8685)	-0.3628 (0.0401)
$\omega$	0.0039 (0.0004)	0.0012 (0.0005)
$\alpha$	0.1093 (0.0000)	0.0898 (0.0000)
$\beta$	0.8705 (0.0000)	0.8939 (0.0000)
$\nu$	7.4784 (0.0000)	7.4184 (0.0000)
$\gamma$	0.8677 (0.0000)	0.8937 (0.0000)
<b>Panel D: EVT</b>		
$\xi$	-0.0268 (0.3260)	0.0503 (0.2388)
$\beta$	0.4818 (0.0000)	0.4616 (0.0000)
<b>Panel E: GC4MM</b>		
$d_3$	-0.0762	-0.0744
$d_4$	0.0836	0.1061
<b>Panel F: GC4ML</b>		
$d_3$	-0.0511 (0.0000)	-0.0352 (0.0006)
$d_4$	0.0338 (0.0000)	0.0362 (0.0000)
<b>Panel G: GC8ML</b>		
$d_3$	-0.0585 (0.0000)	-0.0468 (0.0012)
$d_4$	0.0392 (0.0000)	0.0543 (0.0000)
$d_5$	-0.0059 (0.1295)	-0.0064 (0.1281)
$d_6$	0.0036 (0.0596)	0.0076 (0.0027)
$d_7$	-0.0013 (0.0288)	-0.0011 (0.0822)
$d_8$	0.0007 (0.0009)	0.0006 (0.0174)

P-valores para el contraste de la t en paréntesis

Al igual que en los casos de los rendimientos bursátiles, los parámetros del modelo GARCH(1,1) resultan ser estadísticamente significativos, mientras que no todos los parámetros del componente ARMA(1,1) son significativos, para el caso de los rendimientos de los índices de *hedge funds*. Los Paneles B y C de la Tabla IV.3 incluyen las estimaciones de los parámetros de forma (grados de libertad) y del parámetro de asimetría de las distribuciones t. Las distribuciones son leptocúrticas y asimétricas, puesto que ambos parámetros son significativos. Los Paneles D y E muestran los parámetros de EVT, mientras que los Paneles F y G presentan los parámetros de la densidad GC.

El parámetro de forma para EVT,  $\xi$ , no es significativamente diferente de cero, lo que indica que los residuos estandarizados exhiben distribuciones con colas medias. Con respecto a los parámetros de la densidad GC,  $d_3$  y  $d_4$ , se confirma la presencia de asimetría (negativa) y leptocurtosis. Sin embargo, no todos los parámetros de la expansión más grande (Panel G) son significativamente diferentes de cero. En particular,  $d_3$  parece capturar el comportamiento entero de la asimetría de la densidad (es decir, parámetros impares adicionales parecen ser innecesarios), pero la inclusión de parámetros pares adicionales parece ser útil para capturar valores extremos. Esta evidencia es consistente con la literatura previa sobre este tipo de distribuciones.

### *Backtesting*

Se compara la serie histórica  $r_1, \dots, r_m$ , con el  $\text{VaR}_t^\alpha$  (con un nivel de confianza del 99%) predicho para el día  $t = \{n + 1, \dots, m\}$ . El periodo total de backtesting es de 1750 días (desde Julio de 2006 hasta el primer trimestre de 2013), y la ventana móvil de tiempo es de 500 días.

La Tabla IV.4 presenta el número de excepciones y el p-valor para el contraste de la binomial (en paréntesis) para siete modelos (ARMA-GARCH-normal, ARMA-GARCH-t, ARMA-GARCH-t-asimétrica, ARMA-GARCH-EVT, ARMA-GARCH-GC4-MM, ARMA-GARCH-GC4-ML, ARMA-GARCH-GC8-ML).

Los resultados muestran que la distribución normal y la t subvaloran el VaR para ambas series, mientras que el método basado en la t-asimétrica se rechaza para la estrategia de *Equity Hedge*. Como en las aplicaciones univariantes a índices bursátiles, el enfoque

EVT y los modelos GC capturan riesgo de manera adecuada. Adicionalmente, expansiones más grandes de SNP no parecen mejorar el pronóstico de densidades GC, y en este caso, las estimaciones MM no brindan medidas fiables de VaR comparados con los métodos ML.

**Tabla IV.4. Backtesting para los rendimientos de *Hedge funds***

<b>VaR 99%</b>	<b>Número esperado de excepciones = 17 Datos: Julio 2006 - primer trimestre 2013</b>	
<b>1750 días</b>	<i>Equity Hedge</i>	<i>Event Driven</i>
ARMA-GARCH-normal	38 (0.0000)	38 (0.0000)
ARMA-GARCH-t	25 (0.0398)	29 (0.0047)
ARMA-GARCH-t-asimétrica	9 (0.0256)	17 (0.5640)
ARMA-GARCH-EVT	17 (0.5640)	20 (0.2628)
ARMA-GARCH-GC4-MM	11 (0.0836)	14 (0.2796)
ARMA-GARCH-GC4-ML	17 (0.5640)	21 (0.1935)
ARMA-GARCH-GC8-ML	16 (0.4672)	21 (0.1935)

P-valores para el contraste de la binomial en paréntesis. EVT considera un umbral del 10%.

Para finalizar el análisis univariante, se representan los valores de las series de los rendimientos de los índices de los *hedge funds* junto con sus correspondientes valores de VaR predichos al 99%. Claramente, la distribución normal (línea roja) es la distribución que produce medidas de riesgo menos conservadoras, mientras que EVT (línea azul oscura) y GC (línea azul clara) son las metodologías que presentan mayores valores del VaR.

---

**Gráfico IV.4. VaR al 99% en el periodo de backtesting bajo diferentes especificaciones**

---

Gráfico IV.2.A. *Equity Hedge*

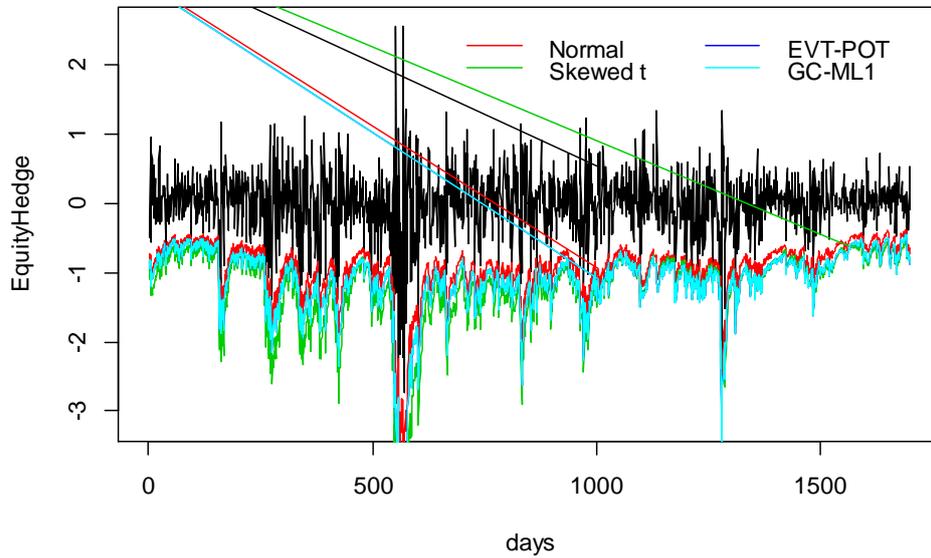
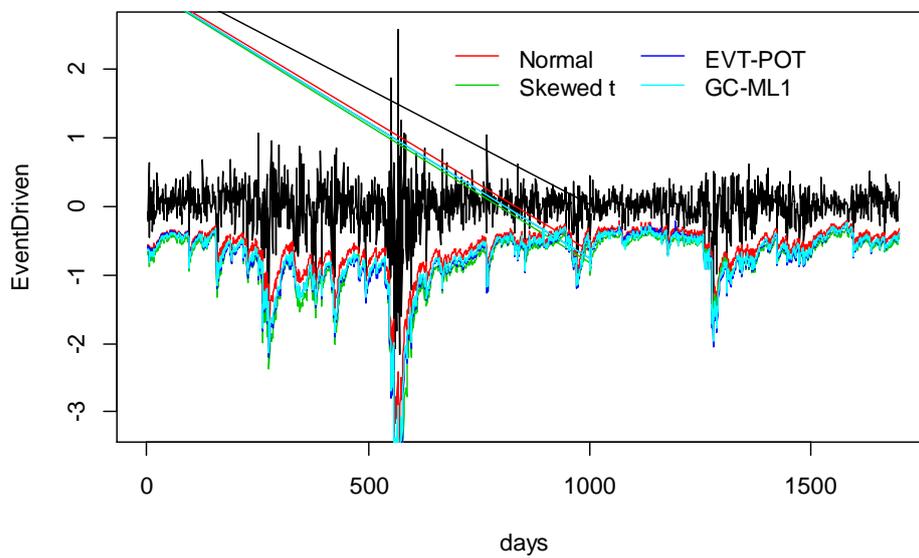


Gráfico IV.2.B. *Event Driven*



#### IV.4.2. Caso multivariante:

Esta sección presenta una aplicación de la cópula GC para calcular el VaR de una cartera compuesta por los dos índices de *hedge funds* analizados previamente (sección IV.4.1.). Se compara el comportamiento del VaR empleando la meta distribución basada en la cópula GC con respecto a otras meta distribuciones. Para tal fin se procede como sigue:

Primero, se estandarizan los rendimientos diarios de los índices de los fondos de cobertura que se describen en la Tabla IV.1 y se estiman los parámetros de las cópulas GC, Gaussiana y t-Student. Así mismo, se ajusta la mejor distribución marginal a los datos univariantes. La Tabla IV.5 presenta los parámetros estimados para las cópulas mencionadas y sus valores de log-verosimilitud. El coeficiente de correlación ( $\rho$ ) es muy similar para los tres modelos; sin embargo, los parámetros de la GC ( $d_{3i}$  y  $d_{4i}, \forall i = 1,2$ ) implican dependencia no lineal. Por tal razón, los parámetros ( $d_{4i}$ ) son negativos y la cópula t parece ser la que mejor ajuste presenta, de acuerdo a su valor de log-verosimilitud. La Tabla IV.6 presenta los parámetros estimados para tres distribuciones marginales: normal, Cauchy y t-Student junto con sus valores de log-verosimilitud. Nótese que tanto la distribución Cauchy como la normal son casos límite de la distribución t-Student, cuando los grados de libertad ( $\nu$ ) tienden a uno y a infinito, respectivamente. De acuerdo a los resultados, se selecciona la marginal t-Student.

**Tabla IV.5. Ajuste de las cópulas**

<b>Cópula</b>	<b>Valor de log-verosimilitud</b>	<b>Parámetros estimados</b>
Gaussiana	865.3603	$\rho = 0.7393$
Gram-Charlier	916.3513	$\rho = 0.7209,$ $d_{31} = 0.0196, d_{41} = -0.0108,$ $d_{32} = 0.0132, d_{42} = -0.0104$
t-Student	954.2817	$\rho = 0.7490, \nu = 3.7443$

**Tabla IV.6. Ajuste de las marginales**

Distribución	Equity Hedge		Event Driven	
	Log-verosimilitud	Parámetros	Log-verosimilitud	Parámetros
Normal	-3121.165	$\mu = 0.0000,$ $\sigma = 0.9998$	-3121.165	$\mu = 0.0000,$ $\sigma = 0.9998$
Cauchy	-3114.102	Localización=0.0985, Escala = 0.4606	-2992.852	Localización = 0.0970, Escala = 0.4399
t-Student	-2930.764	$\nu = 3.2971$	-2808.314	$\nu = 3.0928$

Segundo, se simulan series bivariantes,  $\mathbf{R}_t = (R_{1t}, R_{2t})'$ , de tamaño  $T$  dado el algoritmo detallado en la sección IV.3.1, donde  $T$  es la longitud de los rendimientos de los índices de los *hedge funds*. Partiendo de estos instrumentos, se construyen las diferentes meta distribuciones y se compara su medición del VaR. En particular, se combinan las tres cópulas en la Tabla IV.5 (Gaussiana, GC y t-Student), junto con la distribución marginal que mejor se ajusta a los datos univariantes, que es la distribución t-Student (Tabla IV.6). Estas meta distribuciones se denotan como M1, M2 y M3, respectivamente. Adicionalmente, se incluyen la normal multivariante (meta Gaussiana con marginales normal o M4) y la GC multivariante (meta GC con marginales GC o M5). La Tabla 7 resume la información con respecto a los modelos M1-M5.

**Tabla IV.7. Meta distribuciones analizadas**

Meta distribución	Cópula	Distribución Marginal
M1-Meta Gauss (marginales t)	Gaussiana, $\rho = 0.7393$	t-Student ( $\nu_1 = 3.2971, \nu_2 = 3.0928$ )
M2-Meta t (marginales t)	Gram Charlier, $\rho = 0.7209,$ $d_{31} = 0.0196, d_{41} = -0.0108,$ $d_{32} = 0.0132, d_{42} = -0.0104$	t-Student ( $\nu_1 = 3.2971, \nu_2 = 3.0928$ )
M3-Meta GC (marginales t)	t, $\rho = 0.7490, \nu = 3.7443$	t-Student ( $\nu_1 = 3.2993, \nu_2 = 3.0915$ )
M4-Meta Gauss (marginales normal)	Gaussian, $\rho = 0.7393$	Normal estándar
M5-Meta GC (marginales GC)	Gram Charlier, $\rho = 0.7209,$ $d_{31} = 0.0196, d_{41} = -0.0108,$ $d_{32} = 0.0132, d_{42} = -0.0104$	GC estándar

Tercero, se forma una cartera, de tal manera que su rendimiento está dado por  $R_{pt} = w_1 R_{1t} + w_2 R_{2t}$ , donde  $0 \leq w_i \leq 1 \forall i=1,2$  y  $w_1 + w_2 = 1$ . En particular, se considera una cartera equiponderada, es decir,  $w_1 = w_2 = 0.5$ . La Tabla IV.8 recoge los estadísticos descriptivos de la cartera mencionada.

**Tabla IV.8. Estadísticos descriptivos para los rendimientos de los *Hedge funds***

	<i>Cartera</i>	<i>Cartera estandarizada</i>
Media	0.0056	0.0000
Mediana	0.0374	0.0813
Desviación estándar	0.3504	0.9416
Varianza	0.1228	0.8865
Exceso de curtosis	8.8094	9.5089
Coficiente de asimetría	-1.0459	-1.0829
Rango	5.6337	15.6006
Mínimo	-3.0693	-8.5246
Máximo	2.5644	7.0760

Se calcula el VaR de la cartera para un nivel de confianza  $\alpha$ ,  $VaR_\alpha$ , como el  $\alpha$ -cuantil de  $R_p$ . Este procedimiento se repite  $M$  veces (con un valor grande de  $M$ ), también se calcula la media y el error estándar de acuerdo a las ecuaciones (IV.17) y (IV.18), respectivamente.

$$\overline{VaR_\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M VaR_{\alpha,i}, \quad (IV.17)$$

$$\sigma(VaR_\alpha) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (VaR_{\alpha,i} - \overline{VaR_\alpha})^2}. \quad (IV.18)$$

Se compara el VaR de cada meta distribución con el VaR empírico, que se calcula como el cuantil de los rendimientos estandarizados (de los índices de *hedge funds*) originales. La Tabla IV.9 presenta estos resultados

**Tabla IV.9. Medición del VaR para las diferentes meta distribuciones**

<b>Modelo</b>	<b>A</b>		
	0.05	0.01	0.001
Empírico (EW)	- 1.5274	- 2.8924	- 5.7409
M1-Meta Gauss (marginales t)	- 1.3193 (0.0659)	- 2.4610 (0.2051)	- 4.9737 (1.0749)
M2-Meta t (marginales t)	- 1.3057 (0.0675)	- 2.5042 (0.2241)	- 5.2359 (1.1460)
M3-Meta GC (marginales t)	- 1.3059 (0.0638)	- 2.4504 (0.2019)	- 4.8635 (0.9913)
M4-Meta Gauss (marginales normal)	- 1.5312 (0.0471)	- 2.1592 (0.0833)	- 2.8076 (0.1800)
M5-Meta GC (marginales GC)	- 1.6533 (0.0762)	- 2.7067 (0.1259)	- 4.1470 (1.3305)

Desviaciones estándar entre paréntesis.

Los valores promedios del VaR estimados por el modelo M5 se aproximan al VaR empírico cuando  $\alpha$  es igual a 0.05 y 0.01; sin embargo, el resultado del VaR cuando  $\alpha = 0.001$  no es tan preciso. Para este caso, el modelo M2 presenta un VaR muy cercano al VaR empírico. El modelo M4, el cual es una cópula Meta Gaussiana con marginales normal, no se comporta bien. Por lo tanto la cópula GC parece brindar medidas de VaR

fiables para los niveles de confianza generalmente empleados por la regulación financiera.

Una crítica que se realiza al VaR es que no cumple la propiedad de subaditividad, esto es, el VaR de una cartera podría ser mayor a la suma de los VaR individuales. Esto crea un problema en la agregación de riesgos. Si los factores de riesgo siguen una distribución elíptica, el VaR no violaría el axioma de subaditividad; sin embargo, este no es el caso de las rentabilidades de los activos financieros, y en especial, en épocas de crisis. Una manera de tratar la dependencia entre factores de riesgo es a través de las cópulas, y en especial para capturar la dependencia en la cola de las distribuciones entre dos o más activos. En las recientes crisis financieras se ha notado un contagio entre mercados importantes a nivel mundial, en especial, el de Estados Unidos, Europeo y de Mercados Emergentes. En esta sección se observa como al modelar de manera adecuada los factores de riesgo y utilizar funciones de distribuciones multivariantes correctas, se logran estimaciones más exactas del riesgo. Es bien sabido que la cópula Gaussiana no permite capturar de manera adecuada los riesgos de cola de dos o más factores de riesgo, puesto que esta cópula no presenta dependencia en la cola. Mientras que la cópula  $t$ , al presentar dependencia de cola tanto superior como inferior, ha sido empleada con buenos resultados para cuantificar riesgo de una cartera. Proponemos también explorar las técnicas semi-paramétricas, en este caso multivariante, puesto que también se obtienen medidas fiables de riesgo como se observa en la aplicación.

El problema de agregación de riesgos también se presenta al calcular el VaR operacional, debido a que la regulación recomienda calcular el VaR total por riesgo operacional de las líneas de negocio y por tipo de riesgo. Como futura investigación, se compararán las estimaciones de riesgo obtenidas mediante esta cópula (GC) y las más utilizadas en el área de riesgos.

#### **IV.6. Conclusiones**

Las medidas tradicionales del VaR, basadas en la distribución normal, han sido criticadas debido a su incapacidad de capturar adecuadamente el riesgo de mercado, en particular, para niveles altos de confianza. Para tal fin, el empleo de distribuciones alternativas que permitan capturar leptocurtosis y asimetría han sido propuestas, pero

aún no hay consenso en la industria financiera y en la literatura de cuál debería ser la metodología apropiada para predecir el VaR. Por otro lado, las estrategias de cobertura requieren medidas fiables de VaR para el cálculo de potenciales pérdidas y para mitigar posibles desastres financieros como la quiebra de LTCM. En este capítulo, se investigan estos problemas mediante la comparación de la capacidad predictiva del VaR de *hedge funds* mediante modelos paramétricos (normal, t-Student y t-asimétrica), el enfoque EVT y un modelo semi-paramétrico (GC).

Los resultados confirman el rechazo de las medidas de VaR basados en la normal y t-Student para niveles altos de confianza y escenarios volátiles. La distribución t-asimétrica es una alternativa para capturar asimetría aunque podría no ser la mejor opción cuando la leptocurtosis es severa, debido a la presencia de datos atípicos. Las densidades empleadas en EVT y la densidad GC involucran medidas fiables de riesgo de mercado puesto que el primero se centra en la modelización de valores extremos y la última es muy flexible y se adapta a diferentes escenarios con un número variable de parámetros. Estos resultados son consistentes con otros estudios que han implementado las metodologías semi-paramétricas (Del Brio et al., 2011; Ñíguez y Perote, 2012) y de EVT (Rachev et al., 2010; Cifter, 2011) en otros rendimientos de activos financieros, pero ésta es la primera evidencia empírica de estas metodologías aplicadas a rendimientos de *hedge funds*.

La metodología EVT es muy sensible a la selección del umbral, y así, en este estudio se recomienda el enfoque semi-paramétrico. En este sentido, se propone el uso de distribuciones basadas en las series GC, mientras que otros estudios aplican las expansiones Cornish-Fisher (Favre y Galeano, 2002), Laguerre (Marumo y Wolff, 2007) o Edgeworth-Sargan Positiva (Ñíguez y Perote, 2012). Adicionalmente, este estudio compara el comportamiento del pronóstico del VaR de series GC, como tradicionalmente se utiliza en estudios de valoración de opciones (Jarrow y Rudd, 1982; Corrado y Su, 1996), expandidas hasta el cuarto término, con expansiones más grandes desarrolladas para cuantificar el riesgo de cartera (Mauleon y Perote, 2000).

Los resultados apoyan el empleo de expansiones más cortas para pronosticar el riesgo, puesto que los modelos más simples brindan mejor (o por lo menos igual) resultado. Este resultado refuerza el hecho de que el buen comportamiento del ajuste *in-sample* no garantiza buen resultado en el ajuste *out-of-sample* (véase por ejemplo Hansen, 2009).

También se investigan las ventajas del uso de diferentes técnicas de estimación para las densidades GC: MM vs ML. Se encuentra que la técnica ML parece comportarse mejor que MM cuando se cuantifica el VaR para las estrategias analizadas en *hedge funds*, caso contrario a Del Brio y Perote (2012).

Este capítulo extiende el capítulo anterior de la aproximación multivariante de la GC, analizando distintas cópulas y brindando una expresión cerrada para la cópula GC y su densidad basada en la distribución multivariante de Perote (2004). Esta expresión permite obtener la cópula GC a partir de la cópula Gaussiana (caso particular de la cópula GC), y además permite capturar la dependencia no lineal mediante la estructura polinomial de Hermite. Este es un importante resultado teórico que puede representar un gran avance en el análisis de las cópulas semi-paramétricas. Además, desde una perspectiva empírica, se compara el comportamiento del VaR de diferentes meta distribuciones basadas en cópulas GC, Gaussiana y t-Student. Se calcula el VaR a diferentes niveles de confianza (95%, 99% y 99.9%) para una cartera equiponderada formada por dos índices de *hedge funds*. Se encuentra que el VaR estimado de la cartera por el modelo GC multivariante (meta GC) es cercano al VaR empírico y parece predecirlo mejor que otras especificaciones multivariantes cuando  $\alpha = 0.01$ , el VaR regulatorio para riesgo de mercado. Sin embargo, para un VaR más allá de un nivel de confianza del 99%, el resultado obtenido por el modelo meta t funciona mejor. Por estas razones, se recomienda el uso de distribuciones semi-paramétricas para fines de gestión del riesgo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agarwal, V., Naik, N. Y. (2005): Hedge Funds, *Found. Trends Financ.* 1 103–170.
- Cifter, A. (2011): Value-at-risk estimation with wavelet-based extreme value theory: Evidence from emerging markets, *Physica A* 390 2356–2367.
- Corrado, C.J., Su, T. (1996): S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula, *J. Futur. Mark.* 16 611–629.
- Cherubini, U., Luciano, E. y Vecchiato, W. (2004): *Copula Methods in Finance*. Wiley.
- Del Brio, E. B., Perote J. (2012): Gram-Charlier densities: maximum likelihood versus the method of moments. *Insurance: Mathematics and Economics* 51, 531–537.
- Del Brio, E.B., Níguez, T.M. y Perote, J. (2011): Multivariate semi-nonparametric distributions with dynamic conditional correlations, *Int. J. Forecast.* 27 347–364.
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (1999): Correlation: Pitfalls and alternatives A short, non-technical article, *RISK Magazine*, May, 69-71.
- Favre, L., Galeano, J. A. (2002): Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds. *Journal of Alternative Investments* 6, 21-25.
- Fredheim, M. (2008): *Copula Methods in Finance*. VDM Verlag.
- Fung, W., Hsieh, D.A., Naik, N.Y., Ramadorai, T. (2008): Hedge Funds: Performance, Risk and Capital Formation, *J. Finance* 63 1777–1803.
- Giannikis, D., Vrontos, I.D. (2011): A Bayesian approach to detecting nonlinear risk exposures in hedge fund strategies, *J. Bank. Financ.* 35 1399–1414.
- Glasserman, P. (2003): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York.
- Güner, B.; Rachev, S.T., Edelman, B. F., Fabozzi, J. (2010): Bayesian inference for hedge funds with stable distribution of returns, in Klaus Böcker, (Ed.), *Rethinking Risk Measurement and Reporting: Volume II*. pp. 95–136.
- Gupta, A., Liang, B. (2005): Do hedge funds have enough capital? A value-at-risk approach, *J. financ. econ.* 77 219–253.
- Hansen, P.R. (2009): In-sample fit and out-of-sample fit: their joint distribution and its implications for model selection. Working Paper Stanford University.
- Harris, R.D.F., Mazibas, M. (2013): Dynamic hedge fund portfolio construction: A semi-parametric approach, *J. Bank. Financ.* 37 139–149.

- Hull, J. (2006): Defining copulas. *RISK Magazine*, October, 62-64.
- Hull, J. (2012): Risk management for financial institutions, third edition. Wiley Finance.
- Jarrow, R. , Rudd, A. (1982): Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes, *J. financ. econ.* 10 347–369.
- Joe, H. (1997): *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.
- Jorion, P. (2000): Risk management lessons from long term capital management, *Eur. Financ. Manag.* 6 277–300.
- Lhabitant, F.S. (2004): *Hedge Funds: Quantitative Insights*. John Wiley & Sons.
- Marumo, K., Wolff, R. (2007): Expansion methods applied to asset return distributions. *Journal of Risk*, 3-24.
- Mauleon, I., Perote, J. (2000): Testing densities with financial data: an empirical comparison of the Edgeworth-Sargan density to the Student's t. *European Journal of Finance* 6, 225-239.
- McNeil, A. J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton.
- Nelsen, R.B. (2006): *An Introduction to Copulas, Second Edition*. Springer-Verlag, New York.
- Ñíguez, T.M. y Perote, J. (2012): J. Forecasting. Heavy-tailed densities with positive Edgeworth and Gram-Charlier expansions, *Oxf. Bull. Econ. Stat.* 74 600–627.
- Patton, A. J. (2012): A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis* 110, 4-18.
- Perote, J. (2004): The multivariate Edgeworth-Sargan density. *Spanish Economic Review* 6 77-96.
- Rachev, S.T., Racheva-Iotova, B. y Stoyanov, S. (2010): Capturing fat tails. *Risk Mag.*, May 72–77.
- Rank, J. (2006): *Copulas: From theory to application in finance*. Risk Books.
- Trivedi, P. K. y Zimmer, D. M. (2007): *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*. Now Publishers Inc.

## Apéndice A: Cópula GC

Sea la ecuación (A.IV.1) la densidad multivariante GC estandarizada en Perote (2004). Sin pérdida de generalidad, se considera el caso bivalente y las expansiones incluyendo sólo el tercer y cuarto polinomio de Hermite para ambas series.

$$f(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2) + [q_1(x_1) + q_2(x_2)]\phi(x_1)\phi(x_2), \quad (\text{A.IV.1})$$

donde  $\Phi$  es la densidad normal estándar multivariante con coeficiente de correlación  $\rho$ ,  $\phi$  denota la densidad normal univariante en la ecuación (II.2) y  $q_i(x_i) = d_{3i}H_3(x_i) + d_{4i}H_4(x_i)$ ,  $\forall i = 1, 2$ . Las distribuciones marginales de esta densidad se distribuyen GC univariantes, entonces, la distribución hereda el buen comportamiento del enfoque semi-paramétrico de la sección II.4.1 incorporando dependencia no lineal en las colas de la distribución de  $x$  e  $y$ .

La función de distribución acumulada GC multivariante puede obtenerse mediante integración:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \{\Phi(s, t) dt ds + (q_1(s) + q_2(t))\phi(s)\phi(t)\} dt ds \\ &= \Phi(x_1, x_2) + \int_{-\infty}^{x_1} q_1(s)\phi(s) ds \int_{-\infty}^{x_2} \phi(t) dt + \int_{-\infty}^{x_1} \phi(s) ds \int_{-\infty}^{x_2} q_2(t)\phi(t) dt \\ &= \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2) \int_{-\infty}^{x_1} [d_{31}H_3(s) + d_{41}H_4(s)]\phi(s) \\ &\quad + \Phi(x_1) \int_{-\infty}^{x_2} [d_{32}H_3(t) + d_{42}H_4(t)]\phi(t) \\ &= \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2) \left[ -\frac{d_{31}}{\sqrt{3}} H_2(x_1)\phi(x_1) - \frac{d_{41}}{\sqrt{4}} H_3(x_1)\phi(x_1) \right] \\ &\quad + \Phi(x_1) \left[ -\frac{d_{32}}{\sqrt{3}} H_2(x_2)\phi(x_2) - \frac{d_{42}}{\sqrt{4}} H_3(x_2)\phi(x_2) \right] \\ &= \Phi(x_1, x_2) - \Phi(x_2)\phi(x_1)\tilde{q}_1(x_1) - \Phi(x_1)\phi(x_2)\tilde{q}_2(x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.IV.2})$$

donde  $\tilde{q}_i(x_i) = \frac{d_{3i}}{\sqrt{3}} H_2(x_i) + \frac{d_{4i}}{\sqrt{4}} H_3(x_i)$   $\forall i = 1, 2$  y  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de la normal univariante. Nótese que para solucionar la integral, se aplica la propiedad bien conocida de los polinomios de Hermite:

$$\int_{-\infty}^x H_j(s)\phi(s)ds = -\frac{1}{\sqrt{j}}H_{j-1}(x)\phi(x). \quad (\text{A.IV.3})$$

De esta forma, la cópula GC con marginales  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$  puede extraerse de manera directa mediante el teorema de Sklar – véase la ecuación (IV.2):

$$C^{GC}(u_1, u_2) = \Phi(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) - \Phi(F_2^{-1}(u_2))\phi(F_1^{-1}(u_1))\tilde{q}(F_1^{-1}(u_1)) - \Phi(F_1^{-1}(u_1))\phi(F_2^{-1}(u_2))\tilde{q}(F_2^{-1}(u_2)). \quad (\text{A.IV.4})$$

### Apéndice B: Densidad de la cópula GC y su función de log-verosimilitud

La densidad de la cópula GC presentada en el Apéndice A,  $c^{GC}$ , se puede obtener en términos de la densidad de la cópula Gaussiana,  $c^{Ga}$ , como una aplicación directa del teorema de la representación canónica. En particular, la función de densidad normal multivariante y la función de densidad GC multivariante se pueden expresar como en las ecuaciones (B.IV.1) y (B.IV.2), respectivamente:

$$\phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = c^{Ga}(u_1, u_2)\phi(\Phi^{-1}(u_1)), \phi(\Phi^{-1}(u_2)) \quad (\text{B.IV.1})$$

$$f(F^{-1}(u_1), F^{-1}(u_2)) = \phi(F^{-1}(u_1)), \phi(F^{-1}(u_2)) + [q(F^{-1}(u_1)) + q(F^{-1}(u_2))]\phi(F^{-1}(u_1))\phi(F^{-1}(u_2)) \quad (\text{B.IV.2})$$

Reemplazando (B.IV.1) en (B.IV.2) y dividiendo por  $f_1(F^{-1}(u_1))f_2(F^{-1}(u_2))$ , se obtiene de manera directa la densidad de la cópula GC:

$$c^{GC}(u_1, u_2) = \frac{[c^{Ga}(u_1, u_2) + q_1(F^{-1}(u_1)) + q_2(F^{-1}(u_2))]\phi(F^{-1}(u_1))\phi(F^{-1}(u_2))}{f_1(F^{-1}(u_1))f_2(F^{-1}(u_2))} = \frac{c^{Ga}(u_1, u_2) + q_1(F^{-1}(u_1)) + q_2(F^{-1}(u_2))}{[1 + q_1(F^{-1}(u_1))][1 + q_2(F^{-1}(u_2))]}, \quad (\text{B.IV.3})$$

puesto que los términos de las funciones de densidad Gaussianas se cancelan. Por lo tanto, la función de log-verosimilitud para un par de observaciones es

$$\ln c^{Gc}(u_1, u_2) = \ln c^{Ga}(u_1, u_2) + q_1(Y_1) + q_2(Y_2) - \ln[1 + q_1(Y_1)] - \ln[1 + q_2(Y_2)],$$

dado que  $Y_1 = F^{-1}(u_1)$  y  $Y_2 = F^{-1}(u_2)$ .

Para una muestra de  $n$  observaciones, la función de log-verosimilitud es

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\theta}; \hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2) &= \sum_{i=1}^n \{ \ln c_{(u_1, u_2)}^{Ga} + q_1(Y_{1i}) + q_2(Y_{2i}) \} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \ln[1 + q_1(Y_{1i})] - \sum_{i=1}^n \ln[1 + q_2(Y_{2i})]. \end{aligned}$$

Reemplazando la cópula Gaussiana,  $c_{(u_1, u_2)}^{Ga} = \frac{\phi(Y_{1i}Y_{2i})}{\phi(Y_{1i})\phi(Y_{2i})}$ , y después de sencillas operaciones algebraicas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\theta}; \hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2) &= \sum_{i=1}^n \{ \ln \phi(Y_{1i}, Y_{2i}) + \phi(Y_{1i})\phi(Y_{2i})[q_1(Y_{1i}) + q_2(Y_{2i})] \} - \\ &\quad \sum_{i=1}^n \ln \phi(Y_{1i}) - \sum_{i=1}^n \ln \phi(Y_{2i}) - \sum_{i=1}^n \ln[1 + q_1(Y_{1i})] - \sum_{i=1}^n \ln[1 + q_2(Y_{2i})]. \end{aligned} \tag{B.IV.4}$$

# CONCLUSIONES

Debido a las recientes crisis, las entidades financieras (y no financieras) procuran implementar modelos que les permita provisionar un capital regulatorio que soporte posibles quiebras. Es así como el estudio de la cuantificación del riesgo se ha vuelto de gran importancia para la academia y la industria financiera. Desde 1994, cuando se desarrolló el VaR, esta medida fue siendo aceptada en la industria financiera hasta convertirse en la medida preferida para cuantificar el riesgo financiero. Las medidas tradicionales del VaR, basadas en la distribución normal, han sido criticadas debido a su incapacidad de capturar adecuadamente el riesgo de mercado, en particular, para niveles altos de confianza. Para ello, se ha propuesto el empleo de distribuciones paramétricas alternativas que permiten capturar leptocurtosis y asimetría, pero aún no hay aprobación en la industria financiera y en la literatura de cuál debería ser la metodología apropiada para pronosticar el VaR. Por otro lado, las estrategias de cobertura requieren medidas fiables de VaR para el cálculo de potenciales pérdidas y para mitigar posibles desastres financieros como la quiebra de LTCM y de importantes bancos de inversión como Bear Stearns y Lehman Brothers.

*De esta manera, la tesis a contrastar es que mediante densidades univariantes y multivariantes semi-paramétricas, en especial la densidad Gram-Charlier, se obtienen estimaciones más precisas de las colas pesadas de la distribución de los rendimientos de activos financieros y, por tanto, en la cuantificación de medidas más adecuadas del riesgo.*

En el segundo capítulo de esta tesis se investiga este problema mediante la comparación de la capacidad predictiva del VaR de modelos paramétricos (normal, t-Student y t-asimétrica), el enfoque EVT (en específico el método POT) y un modelo semi-paramétrico (Gram-Charlier, GC). Para ello se aplica un *backtesting*, es decir, se realizan comparaciones del VaR al 99% a rendimientos de activos individuales (índices bursátiles de Europa, Estados Unidos, de Mercados Emergentes, PSI, Ibex, Dax y EUROSTOXX). Los rendimientos de estos índices se filtran mediante un proceso ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para capturar las características empíricas (volatilidad

condicional y clústers de volatilidad de los rendimientos) de estos activos financieros. La distribución normal es el caso base, y los resultados muestran que aún en periodos de “relativa” calma, este método falla en predecir el VaR al 99%.

Por otro lado, la distribución t-Student, al presentar colas más pesadas que las de una normal se ha propuesto como una alternativa natural, aunque no es capaz de recoger la asimetría que presentan las distribuciones de los rendimientos de los activos financieros. En este sentido la distribución t-asimétrica debería presentar un mejor comportamiento que el modelo de la t-Student. Los resultados confirman el rechazo de las medidas de VaR basadas en la normal y t-Student para niveles altos de confianza y escenarios volátiles. La distribución t-asimétrica puede ser una alternativa para capturar sesgo en las distribuciones de pérdidas aunque no ser la mejor opción cuando la leptocurtosis es severa, debido a la presencia de datos atípicos. En particular, los modelos semi-paramétricos y la metodología EVT (enfoque POT) parecen comportarse mejor en periodos de alta volatilidad y turbulencia financiera como los de la crisis subprime y de la deuda pública.

La debilidad del método POT es la selección del umbral, a partir del cual, se toman las pérdidas que serán analizadas mediante este método, y que gracias al Teorema de Pickands-Balkema-de Haan, la distribución de estas pérdidas en exceso convergen a la distribución de Pareto generalizada (GPD) para un umbral lo suficientemente alto. La debilidad está en que no existe un método que permita seleccionar el umbral “óptimo”. Sin embargo, se observa en los resultados, que al escoger un umbral del 10% de los datos de la cola de la distribución de pérdidas, parece brindar estimados fiables de los parámetros de la GPD y así mismo del VaR.

La densidad Gram-Charlier (GC) es una expansión alrededor de la densidad normal basada en polinomios de Hermite. A pesar del buen comportamiento de la expansión GC la mayoría de las aplicaciones financieras que utilizan esta distribución se limitan al uso de dos términos de la expansión ( $d_3$  y  $d_4$ ) que corresponden a indicadores de asimetría y leptocurtosis. Dentro de las comparaciones novedosas de esta tesis se encuentra el análisis de la capacidad predictiva del VaR mediante expansiones GC de distinta longitud y su estimación mediante el método de los momentos (GC-MM) y máxima verosimilitud (modelos GC-ML1 y GC-ML2 en función del número de polinomios de la expansión de GC). Aunque todos estos modelos presentan un buen

comportamiento para la predicción del VaR al 99% en épocas de crisis, los resultados arrojan evidencia en favor de las expansiones más cortas (GC-MM y GC-ML1) y del uso de la estimación MM dada su mayor eficiencia en términos computacionales. Además, el método de estimación de los momentos para la densidad GC parece ofrecer medidas de riesgo más conservadoras que mediante máxima verosimilitud.

También la comparación entre la metodología EVT y el enfoque semiparamétrico de la expansión es un punto original de este estudio. Los resultados apuntan a que ambos métodos son fiables para calcular VaR al 99%. Estos resultados se deben a que las densidades empleadas en EVT se centran en la modelización de valores extremos, y la densidad GC es muy flexible y se adapta a diferentes escenarios con un número variable de parámetros. Por otra parte, en todas estas comparaciones se hace especial énfasis en la comparación del comportamiento de los distintos modelos en periodos de baja y alta volatilidad, mostrándose como las metodologías más flexibles (GC) y que hacen énfasis en los valores extremos (EVT) son especialmente adecuadas para estos últimos. Además, en el capítulo IV se repiten este tipo de análisis para dos *hedge funds* (*Equity hedge and Event driven*) obteniéndose resultados similares. Ésta es la primera evidencia empírica de estas metodologías aplicadas a rendimientos de *hedge funds*.

Como se mencionó en la sección II.7, el VaR no es una medida coherente de riesgo, pero sí cumple con la propiedad de “*elicibility*”, lo que permite realizar una comparación entre varios modelos mediante la técnica del *backtesting*. Esto no sucede con la medida de Expected Shortfall (ES), que aunque sí representa una medida coherente de riesgo, no cumple con la propiedad de *elicibility*.

De cara a la regulación financiera, lo que proponemos es que mientras VaR sea la medida de riesgo para cuantificar capital regulatorio y/o económico, se deben emplear técnicas que permitan capturar los riesgos de cola de manera adecuada. En esta tesis se ha mostrado el buen comportamiento de la técnica semi-paramétrica basada en la densidad Gram-Charlier y sugerimos su uso en la cuantificación de riesgo de mercado.

Debido a que los modelos de riesgo presentan un carácter multivariante, en el tercer capítulo se extienden los conceptos univariantes del capítulo anterior a una aproximación multivariante. En aplicaciones financieras, como por ejemplo, la cuantificación del riesgo de una cartera de activos financieros depende de un vector aleatorio que corresponde a los rendimientos de los factores de riesgo que la componen.

Definir un modelo multivariante para el comportamiento de los factores de riesgo bajo condiciones de turbulencia financiera implica que el supuesto de la distribución normal (multivariante) sea puesto en duda. Adicionalmente, al tener un modelo multivariante es necesario proponer soluciones al problema de dimensionalidad, puesto que la estimación de los parámetros de un modelo multivariante puede llegar a ser computacionalmente costoso o a no obtener estimaciones consistentes dependiendo del método de estimación empleado.

Por lo tanto, en este capítulo se realiza una aproximación a la función de distribución de una cartera mediante el empleo de la distribución GC. Para tal fin, se propone una estimación en tres etapas. Este procedimiento consiste primero en estimar las varianzas condicionales bajo la distribución normal para cada variable mediante QML. En segundo lugar, se estima el resto de los parámetros de la función de densidad GC para cada variable mediante MM y ML. Por último, se estima la matriz de correlaciones de las variables que componen la cartera mediante su estimación muestral. Esta estimación en tres etapas conduce a estimaciones consistentes dado que la log-verosimilitud de la distribución GC es separable, como en el caso de la de distribución normal (Engle, 2002).

Se aplica esta metodología de tres pasos para calcular el VaR (bajo el modelo GC) de una cartera equiponderada conformada por tres de los índices utilizados en el capítulo anterior (EUROSTOXX50, Ibex35 y Dax30), y se comparan los resultados con los obtenidos por la distribución t multivariante, debido a que esta última distribución ha probado obtener resultados razonables en cuantificación de riesgo (Hu y Kercheval, 2010). Entonces en la aplicación empírica, se calcula el VaR de cada modelo como el cuantil de los datos simulados de acuerdo a los parámetros estimados, y dependiendo de la distribución asumida. Luego, el promedio de los VaR simulados para cada uno de los modelos (GC y t-Student) se compara con el VaR empírico, que se obtiene como el cuantil de la distribución de la cartera conformada con los datos originales de los tres índices analizados.

Los resultados muestran que la metodología propuesta conduce a resultados fiables en la cuantificación del VaR al 99%. La validez de nuestra propuesta de tres pasos para la aproximación GC-multivariante está basada en tres propiedades esta distribución: (i) Las marginales de la distribución GC multivariante se distribuyen GC univariantes; (ii)

La distribución GC multivariante permite estimación de manera independiente del primer y segundo momento bajo la hipótesis Gaussiana (QML); (iii) Existe una relación directa y lineal entre los momentos de la densidad y los parámetros, lo que simplifica la implementación de técnicas MM. Adicionalmente, este método siempre es consistente y puede ser implementado de manera directa aún en carteras de gran tamaño.

Este resultado es de gran importancia, puesto que la metodología de tres pasos que proponemos en esta tesis ayuda a mitigar el problema de dimensionalidad conllevando medidas confiables de riesgo y es sencilla de implementar. Adicionalmente, los resultados muestran que la cuantificación de riesgo mediante MM presenta claras ventajas frente a la estimación mediante ML. En particular, la estimación MM involucra estimaciones consistentes, mientras que las estimaciones máximo-verosímiles sólo brindan estimaciones consistentes bajo supuesto de normalidad o la verdadera densidad.

Finalmente, el cuarto capítulo extiende la aplicación multivariante de la técnica semi-paramétrica obteniendo una expresión cerrada para la cópula GC. Este es el primer estudio donde se obtiene una expresión analítica de la cópula GC y se realiza una aplicación a cuantificación de riesgos con resultados confiables. Consideramos que este es una aportación importante a la literatura, puesto que la cópula GC permite recoger de manera adecuada no sólo el riesgo de la cola de cada activo sino también la dependencia entre éstos. En consecuencia, esta nueva cópula podría aplicarse tanto en la gestión de riesgos y en la valoración de derivados, donde el uso de cópulas se ha convertido en objeto de estudio y de enorme interés.

En la gestión de riesgos el uso de cópulas (y en particular la cópula GC) resulta una herramienta muy útil, puesto que los factores de riesgo se caracterizan por una función de distribución conjunta. Las cópulas son funciones que relacionan funciones de distribución multivariante a sus funciones de distribución marginales. Una función de distribución conjunta contiene información acerca del comportamiento de las marginales y una descripción de su estructura de dependencia. El análisis de dependencia en la cola se ha convertido de interés en finanzas, puesto que es importante conocer si los eventos extremos de dos o más activos financieros se mueven en conjunto. De nuevo el supuesto de normalidad, en este caso multivariante, puede no ser adecuado y se necesita encontrar otras herramientas que permitan capturar de manera razonable los eventos de las colas y su dependencia.

En este último capítulo se estudia la distribución conjunta de las rentabilidades de dos índices de *hedge funds*, que corresponden a las estrategias de *Equity Hedge* y de *Event Driven*. En la aplicación empírica, inicialmente se analizan estas rentabilidades como se realizó en el segundo capítulo, es decir, desde el punto de vista univariante. En otras palabras, las rentabilidades de los índices de *hedge funds* se filtran mediante un proceso ARMA(1,1)-GARCH(1,1), puesto que este tipo de rentabilidades presentan las mismas características empíricas de las rentabilidades de las acciones. Luego, se realiza un *backtesting* para probar la capacidad predictiva del VaR de las distribuciones paramétricas (normal, t-Student y t-asimétrica), el enfoque EVT y la técnica semi-paramétrica. De nuevo, el enfoque EVT y la densidad GC presentan el mejor desempeño. En nuestro conocimiento, ésta es la primera evidencia empírica de estas metodologías aplicadas a rendimientos de *hedge funds*.

Seguidamente, se cuantifica el VaR de una cartera equiponderada formado por estos dos índices mediante el enfoque de cópulas. Para ello, se obtiene una expresión analítica para la cópula GC y su densidad basada en la densidad multivariante GC presentada en Perote (2004). La densidad de esta cópula GC se puede obtener de manera directa de la densidad de la cópula Gaussiana, pero incorpora dependencia no lineal a través de la estructura de parámetros de los polinomios de Hermite. Este es un resultado teórico muy importante que puede representar un gran avance en el análisis de las cópulas semi-paramétricas y sin duda será objeto de investigación futura en otras aplicaciones. Gracias al Teorema de Sklar, se obtienen meta distribuciones GC, que son cópulas GC con marginales específicas. Un caso especial de una meta distribución GC, es la función de distribución multivariante GC, que corresponde con una cópula GC con marginales distribuidas GC.

En la aplicación empírica, se compara el VaR obtenido mediante la meta distribución GC con los valores estimados mediante las meta distribuciones Gaussianas y t-Student. Los resultados muestran que el promedio del VaR al 99% mediante la meta GC se aproxima más al cuantil empírico, mientras que para el nivel de confianza del 99.9% el modelo que más se aproxima al cuantil empírico es el modelo de la meta-t, y la versión Gaussiana no conlleva predicciones adecuadas. Esto se debe a que la cópula Gaussiana no permite capturar de manera adecuada los riesgos de cola de dos o más factores de riesgo, puesto que esta cópula no presenta dependencia en las colas. Mientras que la

cópula t, al presentar dependencia de cola tanto superior como inferior, permite estimar de manera fiable el riesgo de una cartera a niveles altos de confianza.

Dados los resultados, la cópula GC parece un instrumento idóneo para aplicaciones financieras de diversa índole como la predicción del riesgo de mercado, la valoración instrumentos derivados y la cuantificación de riesgo operacional.

Como futura investigación, estudiaremos las medidas de riesgo que cumplan con los axiomas de coherencia y que permitan la obtención de predicciones de manera directa, y poder así realizar comparaciones del comportamiento predictivo entre ellos. Recientemente algunos autores (Gneiting, 2011; Bellini, et al., 2014; Ziegel, 2013) han analizado este problema y han encontrado que la medida denominada “expectiles” cumple con estas dos propiedades. Particularmente, estudiaremos esta medida bajo la densidad GC.

Otra investigación puede ser encaminada a la comparación de GC con las expansiones Cornish-Fisher (Favre y Galeano, 2002), Laguerre (Marumo y Wolff, 2007), Edgeworth-Sargan Positiva (Ñíguez y Perote, 2012), y a la versión física de GC (Necula et al., 2013); como también su aplicación en riesgo operacional de manera univariante, y la comparación de los resultados con metodologías no paramétricas (Buch-Kromann et al., 2007).

En cuanto a la aproximación multivariante, proponemos investigar a futuro, el desempeño de la metodología de tres etapas con otras distribuciones multivariantes como la hiperbólica generalizada (Hellmich y Kassberger, 2011), distribuciones estables (Kim et al., 2012) y otras metodologías multivariantes (Buch-Kromman, et al., 2011).

En otra futura investigación, se propone estudiar el problema de la agregación de riesgos, al cálculo el VaR operacional de toda una entidad financiera mediante el enfoque de medición avanzada, específicamente el enfoque de distribución de pérdidas agregadas, teniendo en cuenta una modificación de la distribución GC original, y comparar la cuantificación de riesgo con otras cópulas usualmente aplicadas en la literatura financiera.

De esta manera, sugerimos el uso de una herramienta flexible para cuantificar riesgo financiero de manera fiable, y así calcular el capital necesario para que una entidad financiera soporte el riesgo de quiebra debido a pérdidas inesperadas. Se probó que la

técnica semi-paramétrica, basada en la densidad GC, ofrece medidas más adecuadas del riesgo a las técnicas paramétricas más comúnmente usadas tanto en la academia como en la industria financiera. Finalmente, queremos hacer énfasis que nuestro trabajo contribuye en el empleo de alertas tempranas para prevenir futuras crisis financieras en un mundo donde los eventos extremos y la dependencia entre estos eventos importan.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bellini, F., Klar, B., Müller, A., Gianin, E. R. (2014): Generalized quantiles as risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54, 41-48.

Buch-Kromann, T., Guillén, M., Linton, O. Nielsen J. P. (2011): Multivariate density estimation using dimension reducing information and tail flattening transformations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 99-110.

Buch-Kromann, T., Englund, M., Gustafsson, J., Nielsen, J. P. Thuring, F. (2007): Non-parametric estimation of operational risk losses adjusted for under-reporting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 293-304.

Engle RF (2002): Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics* 20:339-350

Gneiting, T. (2011): Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association* 106, 746–762.

Hu, W., Kercheval, A. N. (2010): Portfolio optimization for student t and skewed t returns. *Quantitative Finance*, 10 (1) 91-105.

Kim, Y. S., Giacometti, R., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., Mignacca, D. (2012): Measuring financial risk and portfolio optimization with a non-Gaussian multivariate model. *Annals of Operations Research*, 201 (1) 325-343.

Necula, C., Drimus, G. C., Farkas, W. (2013): A general closed form option pricing formula. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2210359>.

Perote, J. (2004): The multivariate Edgeworth-Sargan density. *Spanish Economic Review* 6:77-96.

Ziegel, J. F. (2013): Coherence and elicibility. ArXiv preprint, arXiv:1303.1690v2

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agarwal, V., Naik, N. Y. (2005): Hedge Funds, *Found. Trends Financ.* 1 103–170.
- Alexander, C. (2009): *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*. The Wiley Finance Series (Volume IV).
- Angelidis, T., Benos, A., Degiannikis, S. (2004): The use of GARCH models in VaR estimation. *Statistical Methodology* 2, 105-128.
- Artzner, P., Delbaen, F. J., Eber J, and Heath, D. (1999): Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, 203–228.
- Badrinath, S. G., Chatterjee, S. (1988): On measuring skewness and elongation in common stock distribution: The case of market index. *Journal of Business* 61, 451-472.
- Baixauli S, Alvarez S. (2003): Accurate measures of value at risk fitting fat tails. *Discussion Papers in Economics*. University of York.
- Bali, T.G. (2003): An extreme value approach to estimating volatility and value at risk. *Journal of Business* 76, 83-108.
- Bali, T.G., Neftci, S.N. (2003): Disturbing extremal behaviour of spot price dynamics. *Journal of Empirical Finance* 10 (4) 455-477.
- Bali, T.G., Mo, H., Tang, Y. (2008): The role of autoregressive conditional skewness and kurtosis in the estimation of conditional VaR. *Journal of Banking & Finance* 32, 269-282.
- Bali, T.G., Theodossiou, P. (2007): A conditional-SGT-VaR approach with alternative GARCH models. *Annals of Operations Research* 151, 241-267.
- Bekiros, S. D., Georgoutsos, D. A. (2005): Estimation of Value-at-Risk by extreme value and conventional methods: a comparative evaluation of their predictive performance, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 15(3), 209–228.
- Bellini, F., Klar, B., Müller, A., Gianin, E. R. (2014): Generalized quantiles as risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54, 41-48.
- BIS (2011): Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book. Working Paper No. 19. 31 January 2011.
- BIS (2012): Fundamental review of the trading book, Consultative document. May 2012.
- Bollerslev, T. (1986): Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307–327.

- Bollerslev, T. (1987): A conditional heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The Review of Economics and Statistics* 69, 542–547.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J.M., (1992): Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews* 11 (2), 143–172.
- Buch-Kromann, T., Englund, M., Gustafsson, J., Nielsen, J. P. Thuring, F. (2007): Non-parametric estimation of operational risk losses adjusted for under-reporting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 293-304.
- Buch-Kromann, T., Guillén, M., Linton, O. Nielsen J. P. (2011): Multivariate density estimation using dimension reducing information and tail flattening transformations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 99-110.
- Byström, H.N.S. (2004): Managing extreme risks in tranquil and volatile markets using conditional extreme value theory. *International Review of Financial Analysis* 13 (2) 133-152.
- Charlier, C.V. (1905): Uber die darstellung willkurlicher funktionen. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 9, 1-13.
- Cherubini, U., Luciano, E. y Vecchiato, W. (2004): *Copula Methods in Finance*. Wiley.
- Christoffersen, P. (2003): *Elements of Financial Risk Management*, San Diego, CA: Academic Press.
- Cifter, A. (2011): Value-at-risk estimation with wavelet-based extreme value theory: Evidence from emerging markets, *Physica A* 390 2356–2367.
- Coles, S. (2001): *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag, London.
- Cont, R. (2001): Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* 1 (2): 223-236.
- Corrado, C. J., Su T. (1996): S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula. *Journal of Futures Markets* 16, 611-629.
- Danielsson, J., de Vries, C. (2000): Value-at-Risk and Extreme Returns. *Annales D'Économie et de Stastique* 60, 239-270.
- Danielsson, J., Morimoto, Y. (2000): Forecasting Extreme Financial Risk: a Critical Analysis of Practical Methods for the Japanese Market. Disc. Paper No. 2000-E-8, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.
- Davison, A. C. y Smith, R. L. (1990): Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 52:393-442.

- Del Brio, E.B., Níguez, T.M., Perote, J. (2011): Multivariate Semi-nonparametric Distributions with Dynamic Conditional Correlations. *International Journal of Forecasting* 27, 347-364.
- Del Brio, E. B., Perote J. (2012): Gram-Charlier Densities: Maximum Likelihood versus the Method of Moments. *Insurance: Mathematics and Economics* 51, 531–537.
- Edgeworth, F.Y. (1907): On the representation of statistical frequency by series. *Journal of the Royal Statistical Society (Series A)* 70, 102–106.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. y Mikosch, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (1999): Correlation: Pitfalls and alternatives A short, non-technical article, *RISK Magazine*, May, 69-71.
- Embrechts P, McNeil A, Straumann D. (2002): Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*. Cambridge University Press; 176–223.
- Engle, R.F. (1982): Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- Engle RF (2002): Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models. *Journal of Business and Economic Statistics* 20:339-350.
- Favre, L., Galeano, J. A. (2002): Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds. *Journal of Alternative Investments* 6, 21-25.
- Fernandez, C. y Steel, M. F. J. (1998): On Bayesian modeling of fat tails and skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 359–371.
- Fernandez, V. (2005): Risk management under extreme events. *International Review of Analysis* 14 (2) 113-148.
- Fernandez, V. (2008): Copula-based measures of dependence structure in assets returns. *Physica A* 387 3615–3628.
- Fredheim, M. (2008): *Copula Methods in Finance*. VDM Verlag.
- Fung, W., Hsieh, D.A., Naik, N.Y., Ramadorai, T. (2008): Hedge Funds: Performance, Risk and Capital Formation, *J. Finance* 63 1777–1803.
- Gallant, A. R., Nychka, D. W. (1987): Semi-Nonparametric Maximum Likelihood Estimation. *Econometrica* 55, 363-390.
- Giannikis, D., Vrontos, I.D. (2011): A Bayesian approach to detecting nonlinear risk exposures in hedge fund strategies, *J. Bank. Financ.* 35 1399–1414.

- Giot, P. y Laurent, S. (2003): Value-at-risk for long and short trading positions. *Journal of Applied Econometrics*, 18:641-663.
- Glasserman, P. (2003): Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer, New York.
- Gneiting, T. (2011): Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 106, 746–762.
- Gram, J.P. (1879): Om Raekkeudviklinger Bestemte Ved Hjaelp av de Mindste Kvadraters Methode (Kobenhavn).
- Güner, B.; Rachev, S.T., Edelman, B. F., Fabozzi, J. (2010): Bayesian inference for hedge funds with stable distribution of returns, in Klaus Böcker, (Ed.), *Rethinking Risk Measurement and Reporting: Volume II*. pp. 95–136.
- Gupta, A., Liang, B. (2005): Do hedge funds have enough capital? A value-at-risk approach, *J. financ. econ.* 77 219–253.
- Hansen, B.E. (1994): Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review* 35, 705-730.
- Hansen, P.R. (2009): In-sample fit and out-of-sample fit: their joint distribution and its implications for model selection. Working Paper Stanford University.
- Harris, R.D.F., Mazibas, M. (2013): Dynamic hedge fund portfolio construction: A semi-parametric approach, *J. Bank. Financ.* 37 139–149.
- Hu, W., Kercheval, A. N. (2010): Portfolio optimization for student t and skewed t returns. *Quantitative Finance*, 10 (1) 91-105.
- Hubbert, S. (2012): *Essential mathematics for market risk management*, second edition. The Wiley Finance Series.
- Hull, J. (2006): Defining copulas. *RISK Magazine*, October, 62-64.
- Hull, J. (2009): The credit crunch of 2007: What went wrong? What lessons can be learned? *Journal of Credit Risk*, 5 (2): 3-18.
- Hull, J. (2012): *Risk management for financial institutions*, third edition. Wiley Finance.
- Jalal, A. and Rockinger, M. (2008): “Predicting tail-related risk measures: The consequences of using GARCH filters for non-GARCH data”. *Journal of Empirical Finance* 15(5), 868–877.
- Jarrow, R., Rudd A. (1982): Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics* 10, 347–369.

- Joe, H. (1997): *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.
- Jondeau, E., Rockinger, M. (2001): Gram-Charlier Densities. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25, 1457-1483.
- Jondeau, E., Rockinger, M. (2003): Conditional volatility, skewness and kurtosis: Existence, persistence, and comovements. *Journal of Economic Dynamics & Control* 27, 1699-1787.
- Jondeau, E., Poon, S.-H. & Rockinger, M. (2007): *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer Verlag.
- Jorion, P. (2000): Risk management lessons from long term capital management, *Eur. Financ. Manag.* 6 277–300.
- Jorion, P. (2006): *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*, third edition. McGraw-Hill.
- Karmakar, M. (2013): Estimation of tail-related risk measures in the Indian stock market: An extreme value approach. *Review of Financial Economics*. To appear.
- Kiesel, R., Perraudin, W., Taylor, A. (2003): An Extreme Analysis of VaRs for Emerging Market Benchmark Bonds. En: *Credit Risk: Measurement, Evaluation and Management*, eds: G.Bol, et al., Physica-Verlag.
- Kim, Y. S., Giacometti, R., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., Mignacca, D. (2012): Measuring financial risk and portfolio optimization with a non-Gaussian multivariate model. *Annals of Operations Research*, 201 (1) 325-343.
- Kolb, R. E. (2010): *Lessons from the Financial Crisis: Causes, Consequences, and Our Economic Future*, Robert E. Kolb Series, Wiley.
- Kole, E, Koedijk, K., Verbeek, M. (2007): Selecting copulas for risk management *Journal of Banking & Finance* 31 2405–2423.
- Kon, S. (1984): Models of stock returns: A comparison. *Journal of Finance* 39, 147-165.
- Lambert, P., Laurent, S. (2000): Modelling skewness dynamics in series of financial data. Discussion Paper. Louvain-la-Neuve Institut de Statistique.
- Lambert, P. y Laurent, S. (2001): Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models and a Skewed Student Density, Mimeo, Universite de Liège.
- Laurini, F., Tawn, J.A. (2009): Regular variation and extremal dependence of garch residuals with application to market risk measures. *Econometric Review* 28, 146-169.
- Leadbetter, M. R. (1991): On a basis for “peaks over thresholds” modeling. *Statistics & Probability Letters*, (12) 4:357-362.

- León, A., Mencía, J., Sentana, E. (2009): Parametric Properties of Semi-nonparametric Distributions. *Journal of Business and Economic Statistics* 27, 176-192.
- Lhabitant, F.S. (2004): *Hedge Funds: Quantitative Insights*. John Wiley & Sons.
- Longin, F. (2001): From Value at Risk to stress testing: the Extreme Value approach. *Journal of Banking and Finance* 24, 1097-1130.
- Mabrouk, S., Aloui, C. (2010): One-day-ahead value-at-risk estimations with dual long-memory models: Evidence from the Tunisian stock market. *International Journal of Financial Services Management* 4, 77-94.
- Mabrouk, S., Saadi, S. (2012): Parametric Value-at-Risk analysis: Evidence from stock indices. *The Quarterly Review of Economics and Finance* 52, 305-321.
- Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1(1), 77-91.
- Marumo, K., Wolff, R. (2007): Expansion methods applied to asset return distributions. *Journal of Risk* 10, 3-24.
- Mauleon, I., Perote, J. (2000): Testing densities with financial data: an empirical comparison of the Edgeworth-Sargan density to the Student's t. *European Journal of Finance* 6, 225-239.
- McNeil A.J., Frey R. (2000): Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach . *Journal of Empirical Finance*, 7: 271-300.
- McNeil, A. J., Frey, R. y Embrechts, P. (2005): *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton.
- Mittnik, S., Rachev, S.T. (1993): Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric Reviews* 12, 261-330.
- Necula, C., Drimus, G. C., Farkas, W. (2013): A general closed form option pricing formula. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2210359>.
- Nelsen, R.B. (2006): *An Introduction to Copulas*, Second Edition. Springer-Verlag, New York.
- Ñíguez, T.M., Perote, J. (2012): Forecasting heavy-tailed densities with positive Edgeworth and Gram-Charlier expansions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 74, 600-627.
- Patton, A. J. (2012): A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis* 110, 4-18.

- Perote, J. (2003): Value at risk of non-normal portfolios. *Spanish Review of Finance and Accounting* 115, 290–310.
- Perote, J. (2004): The multivariate Edgeworth-Sargan density. *Spanish Economic Review* 6 77-96.
- Puzanova, N., Siddiqui, S., Trede, M. (2009): Approximate value-at-risk calculation for heterogeneous loan portfolios: possible enhancements of the Basel II methodology. *Journal of Financial Stability* 5, 374-392.
- Rachev, Z., Racheva-Iotova, B. y Stoyanov, S. (2010): Capturing fat tails, *Risk Magazine*, May 2010, 72-77.
- Rank, J. (2006): *Copulas: From theory to application in finance*. Risk Books.
- Reiss, R.-D. y Thomas, M. (1997): *Statistical Analysis of Extreme Values*. Basel: Birkhäuser.
- Shiller, R. J. (2008): *The Subprime Solution: How Today's Global Financial Crisis Happened, and What to Do about It*. Princeton University Press.
- Smith, R. L. (1989): Extreme value analysis of environmental time series: An application to trend detection in ground-level ozone. *Statistical Science*, 4:367-393.
- So, M.K.P., Yu, P.L.H. (2006): Empirical Analysis of GARCH models in value-at-risk estimation. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 16, 180-197.
- Stavroyiannis, S., Makris, I., Nikolaidis, V., Zarangas, L. (2012): Econometric modeling and value-at-risk using the Pearson type-IV distribution. *International Review of Financial Analysis*.
- Tang, T.L., Shieh, S.J. (2006): Long memory in stock index future markets: A value-at-risk approach. *Physica A* 366, 437-448.
- Trivedi, P. K. y Zimmer, D. M. (2007): *Copula Modeling: An Introduction for Practitioners*. Now Publishers Inc.
- Vaz de Melo Mendes, B., Martins de Souza, R. (2004): Measuring financial risks with copulas. *International Review of Financial Analysis* 13 27 – 45.
- Wu, P.T., Shieh, S.J. (2007): Value-at-risk analysis for long-term interest rate futures: Fat -tail and long memory in return innovations. *Journal of Empirical Finance* 14, 248-259.
- Ziegel, J. (2013): Coherency and elicibility. Working paper, University of Bern.