UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

TRABAJO DE FIN DE GRADO EN MAESTRO EDUCACIÓN PRIMARIA

ESCUELA UNIVERSITARIA DE MAGISTERIO DE ZAMORA

TRABAJO FIN DE GRADO EN MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

COMPARACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS PROPUESTOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA E.G.B. Y HOY. ¿PROMUEVE ALGUNO DE ELLOS EL APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

AUTOR: Héctor Avedillo Carrera
Tutor: Santiago Vicente Martín

Zamora, 13 de Junio de 2014

ÍNDICE

1. RESUMEN/ ABSTRACT

The present study has done a short research which two targets are: knowing if the analysed mathematics textbooks of the current Primary Education and former E.G.B. encourage Spanish children to learn to solve verbal arithmetic problems with additive structure (addition and subtraction) and knowing if there has been an evolution in the same direction from the E.G.B. to the present Primary Education.

The principal reason which moves us to write this study is the results of the Spanish students in the current international reports, such as, PISA (2012) and TIMSS (2011) reports, which reveals that our students have lower marks in the task of solving problems than students in other European countries with similar socio-economic levels.

The first step in our study brings us to the revision of former and present problem resolution models, which can be used as a framework and lets us to know accurately which difficulties children have from the moment they start to read the problem to its resolution, when they give the numerical answer.

The second part has the description of the investigation. The variable of our study is the presence of difficult or easy problems in 4 mathematics textbooks (2 from the E.G.B. and 2 from the Primary Education), understanding that these two kinds of problems have a particular attribute that makes them easy or difficult to the students when they try to understand the statement. This characteristic has to be with the correspondence between the key words in the text and the mathematical operation needed to solve it, that is, if there is a direct correspondence between certain words such as “more” and “more than” with the addition or “less” and “less than” with the subtraction operation.

The result of this short research reveals that the number of easy problems is higher than de number of the difficult ones. This final result shows that none of the analysed books encourage enough the children to learn how to solve an arithmetic problem when they face it. Other characteristics in the textbooks reveal as relevant in textbooks such as the layout of the arithmetic problems inside the textbook and the sections created with a clear purpose to show students how to solve an specific type of problem.

2. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TEMA ELEGIDO

Las matemáticas constituyen un instrumento esencial en el currículum de la educación elemental, ya que proporcionan las técnicas y conocimientos para conocer y describir aspectos cotidianos y de la sociedad en general, además de establecer las bases para futuros conocimientos matemáticos superiores, en los sucesivos niveles educativos.

Tal es la importancia de las matemáticas, que en el DECRETO 40/2007, de 3 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León se hace referencia a las matemáticas de la siguiente forma:

"se aprende matemáticas porque son útiles en otros ámbitos [...] y, también, por lo que su aprendizaje aporta a la formación intelectual general, en concreto las destrezas susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen, por sí mismas, a potenciar capacidades cognitivas de niños y niñas".

(Decreto 40/2007 de BOCYL, 3 de Mayo, p. 9889)

Por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas no constituye un fin en sí mismo, ya que se podría decir que lo importante de su aprendizaje es la gran utilidad que se puede conseguir en diferentes ámbitos de la vida.

Además, el Currículo de Primaria de Castilla y León añade que los "procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática". Los problemas de matemáticas son, por lo tanto, uno de los principales medios para el aprendizaje matemático. Sin embargo, algunos estudios como el de Lapointe, Mead, & Philips (1989), revelan que más de la mitad de los alumnos que terminan la enseñanza secundaria no han alcanzado ese conocimiento matemático básico para resolver situaciones cotidianas que se puedan presentar en la sociedad actual. Es por ello, que creemos conveniente, y realizaremos en la primera parte de este trabajo una clasificación de los tipos de problemas aritméticos con estructura aditiva que existen en los libros de texto para conocer la razón del bajo rendimiento de los alumnos en el área de matemáticas.

En una segunda parte se realizará un breve repaso a los modelos de resolución de problemas que han propuesto diversos investigadores y explican los procesos de razonamiento necesarios para resolver los problemas aritméticos. Esto nos dará una idea sobre cuáles son los mecanismos y conocimientos necesarios para resolver los tipos de problemas aritméticos que nos encontraremos en cualquier libro de texto de matemáticas en Primaria y EGB.

Para conocer el desempeño de los alumnos españoles en el área de matemáticas, se comentarán en la última parte del marco teórico los resultados obtenidos en los últimos informes PISA (2012) y TIMSS (2011), para conocer las necesidades que puedan requerir los alumnos de primaria e ilustrar el bajo rendimiento de los alumnos españoles en matemáticas. Creemos que es conveniente conocer los factores que están asociados al conocimiento matemático que los alumnos reciben en el aula. Uno de los recursos más empleados en el aula es el libro de texto y por ello uno de los factores que influyen en el conocimiento matemático del alumno, aparte de otros muchos, es éste.

Como ya se ha comentado, la forma en que los alumnos acceden y practican estos conocimientos matemáticos es principalmente a través de los problemas de matemáticas en los libros de texto, y éste es uno de los recursos más empleados a diario en el aula para desarrollar las matemáticas. La segunda parte del trabajo incluye la breve investigación realizada, en la que se analizarán los problemas aritméticos en dos libros de texto de 1º y 2º de Primaria y otros dos libros de 1º y 2º de EGB. El objetivo de esta investigación es conocer qué libros de texto contienen un mayor número de problemas que supongan un desafío para el alumno, en el caso de que los haya, considerando que esto va a propiciar un aprendizaje de la resolución de problemas. También se pretende dar respuesta a la cuestión acerca de si ha habido algún cambio significativo en los problemas presentes en los libros de texto desde el plan de 1970 hasta el plan vigente en la actualidad; la Ley Orgánica de Educación (L.O.E.), ya que es comúnmente comentado en nuestra sociedad el deterioro sobre la calidad de la educación debido a las continuas reformas educativas desde que se implantara la LOGSE en 1990. Mediante esta comparativa, conoceremos si los libros de texto actuales promueven un mayor conocimiento de resolución que problemas que los de la antigua E.G.B., es decir, si suponen un desafío para el alumno, o si por el contrario, son problemas de fácil solución, en los que no hay necesidad de comprenderlos por completo para elaborar una operación que lo resuelva.

En el panorama actual, son escasas las investigaciones llevadas a cabo en este campo, dedicando más atención a las estrategias que emplean los alumnos en la resolución de problemas. En la investigación de los libros de texto, se encuentran Orrantia, González, & Vicente (2005), que realizan un estudio en el que detallan los tipos de problemas que se encuentran en varios libros de texto de matemáticas de diferentes editoriales españolas en el marco de la Educación Primaria, además de realizar un análisis de cuáles de esos problemas promueven el empleo del razonamiento matemático.

Por esta razón, creo conveniente realizar una investigación que sirva como iniciadora de nuevos trabajos que analicen la información contenida en los libros de texto de matemáticas para conocer el tipo de estrategias que se están promoviendo desde las editoriales para el aprendizaje de las matemáticas, y más en concreto, de la resolución de problemas.

3. OBJETIVOS

El propósito del presente trabajo es conocer si los libros de texto de Primaria y EGB promueven un adecuado aprendizaje de la resolución de problemas. Dos son los objetivos planteados:

En primer lugar, comprobar si los libros de texto de matemáticas, tanto de Primaria, como de E.G.B., permiten un aprendizaje adecuado de la resolución de problemas, y conocer en qué medida lo hacen.

En segundo lugar, conocer si se ha producido alguna evolución desde los libros más antiguos a los actuales en el aprendizaje de la resolución de problemas, y si se ha producido, explicar en qué sentido lo ha hecho.

4. ESTADO DE LA CUESTIÓN Y RELEVANCIA DEL TEMA

4.1 Problemas aritméticos verbales

No debemos comenzar este trabajo sin antes conocer qué es un problema aritmético verbal, ya que la investigación se basará en los problemas aritméticos verbales contenidos en los libros de texto de 1º y 2º de E.G.B. y Primaria.

Orrantia, González, & Vicente (2005) definen el problema verbal como la descripción verbal de una situación de tipo problemático donde se plantean una o más preguntas que se pueden responder aplicando operaciones aritméticas a los datos disponibles en el enunciado o texto del problema. Por lo tanto, un problema debe constar de un enunciado en el que se describe de forma verbal una situación, y además de al menos una pregunta que invite al alumno a responderla empleando para ello una operación aritmética.

Este trabajo únicamente se centrará en los problemas con estructura aditiva, es decir, aquellos que se resuelven mediante una suma o resta, y para comenzar es necesario explicar cuántos tipos de problemas nos podemos encontrar y cuáles son las características de cada uno de ellos. Para ello, vamos a seguir la clasificación realizada por Heller & Greeno (1978), cuya división ha sido ampliamente empleada por numerosos autores. De hecho, todas las teorías que veremos en esta segunda parte del marco teórico siguen esta clasificación para elaborar sus modelos.

La clasificación de Heller & Greeno (1978), crea una división de los problemas según su estructura y las relaciones entre las cantidades implicadas y enunciadas. De esta forma, nos encontramos con tres tipos de problemas: problemas de cambio, combinación y comparación.

Los problemas de cambio implican una acción de dar o recibir, son problemas dinámicos, en los que por ejemplo, el sujeto tiene 3 canicas, pero más tarde le dan otras 2. En este tipo de problema son tres los elementos que intervendrán: conjunto inicial, conjunto de cambio y conjunto final. Los subtipos dentro de los problemas de cambio dependen de dos características: la primera es la cantidad por la cual nos pregunta el problema (conjunto inicial, conjunto de cambio y conjunto final), y la segunda es si la cantidad inicial del problema sufre un incremento o decremento, de forma que tenemos 6 tipos de problemas de cambio que se pueden observar en la Tabla 4.1.

Incógnita	Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
Conjunto final	**CA1(+)**	El conjunto inicial se incrementa. La cantidad que no se conoce es la perteneciente al conjunto final.	María tenía 5 caramelos. Su abuela le dio 3 más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora María?
	CA2(-)	El conjunto inicial sufre un decremento. La cantidad que se desconoce pertenece al conjunto final	María tenía 5 caramelos. María le dio 3 caramelos a su primo. ¿Cuántos caramelos tiene ahora María?
Conjunto de cambio	**CA3(+)**	El conjunto inicial sufre un incremento. La cantidad desconocida pertenece al conjunto de cambio.	María tenía 5 caramelos. Después le dieron algunos más. Ahora María tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dieron a María?
	CA4(-)	El conjunto inicial experimenta un decremento. La cantidad desconocida pertenece al conjunto de cambio.	María tenía 5 caramelos. Después le dio algunos caramelos a su hermano. Ahora tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos le dio María a su hermano?
Conjunto inicial	**CA5(+)**	El conjunto inicial experimenta un incremento. La cantidad desconocida pertenece al conjunto inicial.	María tenía algunos caramelos. Después le dieron 5 caramelos. Ahora tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía María al principio?

Incógnita	Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
Conjunto inicial	**CA6(-)**	El conjunto inicial experimenta un decremento. La cantidad desconocida pertenece al conjunto inicial.	María tenía algunos caramelos. Después, María le dio 3 caramelos a su hermano. Ahora tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía María al principio?

Tabla 4.1. Tipos de problemas de cambio.

El segundo tipo son los problemas de combinación, en los que no se produce ninguna acción entre los sujetos como en los de cambio, son estáticos por tanto. En estos problemas se da una unión entre conjuntos, existen dos partes que forman parte de un todo, los tipos de problemas son 2 dependiendo de si preguntan por una de las partes o por el todo (Tabla 4.2).

Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
CM1	Se conocen las partes pero no el todo.	Pablo tiene 3 caramelos y Juan tiene 4. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?
CM2	Se conoce una de las partes y el todo.	Pablo y Juan tienen 7 caramelos entre los dos. Juan tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Pablo?

Tabla 4.2. Tipos de problemas de combinación.

El tercer tipo de problemas son los problemas de comparación, en los que se establece una comparación entre los conjuntos, denominados “conjunto de referencia”, que se compara con el “conjunto comparado” y el “conjunto diferencia”, que tiene que ver con la cantidad resultante de esa comparación. Este tipo de problemas también tiene un carácter estático, ya que no se producen incrementos sobre las cantidades de los conjuntos, sino que éstos son comparados y la pregunta alude a la diferencia existente entre ambos. Los problemas de comparación son 6 como se muestran en la tabla 4.3, dependiendo de si la pregunta alude al conjunto de referencia, al conjunto de comparación o al conjunto diferencia.

Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
CP1	Se conoce el conjunto de referencia y el de comparación y se pregunta por cuántos elementos tiene el primero más que el segundo, es decir por la diferencia.	Ana tiene 8 caramelos y Susana tiene 2 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Ana más que Susana?
CP2	Se da el mismo caso que en anterior, solo que en éste se pregunta por cuántos elementos tiene el conjunto de comparación con respecto al conjunto de referencia.	Ana tiene 8 caramelos y Susana tiene 2 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Susana menos que Ana?
CP3	Se conocen el conjunto de diferencia y el de comparación y se pregunta por el conjunto de referencia. El conjunto de referencia se describe comparando cuántos elementos más que el de comparación tiene.	Susana tiene 5 caramelos y Ana tiene 3 caramelos más que Susana. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?
CP4	Se conocen el conjunto de diferencia y el de referencia. Se hace referencia al conjunto de comparación, indicando cuántos elementos menos que el conjunto de referencia tiene.	Ana tiene 8 caramelos. Susana tiene 3 caramelos menos que Ana. ¿Cuántos caramelos tiene Susana?
CP5	Se conocen el conjunto de referencia y mediante el conjunto de diferencia, se indican cuántos elementos tiene más que el conjunto de comparación, que es la incógnita.	Susana tiene 9 caramelos. Ana tiene 3 caramelos más que Susana. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?

Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
CP6	Se conocen el conjunto comparado, y se indica, mediante el conjunto de diferencia, cuántos elementos tiene menos que el conjunto de referencia, que es la incógnita.	Susana tiene 4 caramelos. Susana tiene 3 caramelos menos que Ana. ¿Cuántos caramelos tiene Ana?

Tabla 4.3. Tipos de problemas de comparación.

Carpenter & Moser (1982) añaden otro tipo de problemas a estos anteriormente descritos, los problemas de igualación, de estructura similar a los de comparación, ya que los existen dos primeros conjuntos independientes, y se pregunta por la diferencia de cantidad que existe entre esos dos conjuntos mediante una acción, consistente en añadir o quitar a uno de ellos una cantidad de forma que los dos conjuntos tengan la misma. Los tipos de problemas de igualación que nos podremos encontrar se muestran en la tabla 4.4.

Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
I1	Se conocen los dos conjuntos y se pregunta por el conjunto de diferencia que habría que sumar al conjunto menor para que los otros dos fueran iguales.	Pablo tiene 7 caramelos. Mario tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tienen que dar a Mario para que tenga los mismos que Pablo?
I2	Se conocen los dos conjuntos y se pregunta por el conjunto de diferencia, la cantidad que habría que quitar al conjunto mayor para tener la misma cantidad que el menor.	Pablo tiene 7 caramelos. Mario tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tienen que quitar a Pablo para que tenga los mismos que Mario?

Tipo de problema	Descripción del tipo de problema	Ejemplo
I3	Se conoce el conjunto menor y la diferencia que se tendría que añadir para tener la misma cantidad que el mayor.	Mario tiene 3 caramelos. Si le dieran 4 caramelos más tendría los mismos que Pablo. ¿Cuántos caramelos tiene Pablo?
I4	Se conoce el conjunto mayor y la diferencia que se tendría que quitar para que el conjunto mayor fuera igual al menor.	Pablo tiene 7 caramelos. Si le quitaran 4 caramelos tendría los mismos que Mario. ¿Cuántos caramelos tiene Mario?
I5	Se conoce el conjunto mayor y la diferencia que habría que añadir al conjunto menor para igualarlo con el mayor.	Pablo tiene 7 caramelos. Si Mario tuviera 4 caramelos más tendría los mismos que Pablo. ¿Cuántos caramelos tiene Mario?
I6	Se conoce el conjunto menor y la diferencia que habría que quitar al conjunto mayor para igualarlo con el menor.	Mario tiene 3 caramelos. Si a Pablo le quitaran 4 caramelos tendría los mismos que Mario. ¿Cuántos caramelos tiene Pablo?

Tabla 4.4. Tipos de problemas de igualación.

Esta clasificación ha sido una de las más empleadas en los diversos estudios sobre aprendizaje de problemas, incluyendo los modelos de resolución que veremos a continuación. Dada su importancia, tomaremos esta clasificación como modelo para codificar los problemas que nos encontraremos en los libros de texto de la parte de análisis del presente trabajo.

Aparte de esta clasificación y atendiendo a las características estructurales de cada problema, es importante para este trabajo dividirlos en una nueva clasificación que nos indique los tipos de problemas en función de si estos resultan fáciles o difíciles de resolver para los alumnos.

Uno de los problemas que se suelen encontrar los alumnos en el enunciado se da con la correspondencia que hacen entre determinadas palabras clave del mismo y la operación a realizar en el problema, tal y como apuntan Bermejo, Lago, & Rodríguez (1994), quienes señalan que la sentencia que apunta a la operación matemática incrementa la dificultad del problema cuando ésta resulta inconsistente con la operación a realizar. De esta forma, en los problemas consistentes, palabras clave como “menos” o “menos que” coinciden con la acción de restar, de la misma forma que “más” o “más que” se correspondería con sumar. Sin embargo, en los problemas inconsistentes, la palabra clave no se correspondería con la operación de restar, como ocurre en los problemas de comparación 5 *María tiene 9 caramelos. María tiene 3 caramelos más que Paula. ¿Cuántos caramelos tiene Paula?* Aplicando la correspondencia entre palabra clave y operación aritmética, tendríamos que el alumno leería la palabra *más* en el enunciado, y razonaría que hay que realizar una operación de adición. Sin embargo, la operación a realizar es la contraria.

Por ello podemos realizar una nueva clasificación para nuestro trabajo, dividiendo los problemas en aquellos inconsistentes o difíciles; que serán los de cambio tipo 3, 5 y 6; combinación 2, comparación 1, 5 y 6 e igualación 1, 5 y 6; y aquellos fáciles, que serán el resto.

4.2 ¿Cómo resuelven los alumnos los problemas? Modelos de resolución de problemas.

Para llegar a la solución de un problema, el alumno tiene que llevar a cabo unos procesos cognitivos y estrategias de resolución de problemas que son imprescindibles para resolverlo correctamente. Sin embargo, en muchas ocasiones, estos alumnos no las aplican de la forma más satisfactoria, bien porque el problema supone un desafío desde el punto de vista cognitivo o bien porque no las conocen. Para poder conocer más de cerca qué estrategias y conocimientos se emplean cuando los niños resuelven un problema, algunos autores han tratado de describir estos procesos, en forma de modelos de resolución de problemas, en los que se explica el proceso que sigue el alumno desde que lee el enunciado hasta que obtiene el resultado final.

4.3 Modelos computacionales de resolución de problemas

Muchos autores han estudiado los procesos cognitivos que tienen lugar en el proceso de resolución de problemas, pero con la aparición de las nuevas tecnologías, se crearon los modelos computacionales, con el objetivo de conocer los procesos que subyacen desde el momento en que nuestro alumno lee un problema hasta que llega a la solución del mismo.

Varios son los modelos computacionales que se han publicado, y los podemos dividir en función del tipo de razonamiento al que dan prioridad. En una primera parte se encuentran de los modelos creados por Riley, Greeno, & Heller (1983) y Briars & Larkin (1984), en los que la fuente principal de razonamiento para la resolución de problemas es el conocimiento matemático. Entre los modelos más recientes, nos encontramos con el modelo de Cummins, Kintsch, Reusser, & Weimer (1988), el modelo SPS de Reusser (1988) y el modelo de Verschaffel, Greer, & De Corte (2000), en los que ya no prevalece el conocimiento matemático para la resolución del problema, sino también el conocimiento situacional, que son los conocimientos que el alumno posee sobre el mundo real, y que juega un importante papel en dicho proceso.

4.3.1 Modelos clásicos

Dos son los modelos clásicos que resumiremos: el Modelo de Riley et al. (1983), y el modelo CHIPS de Briars & Larkin (1984).

- *Modelo de Riley, Greeno y Heller (1983)*

Este modelo emplea para la resolución de problemas 3 tipos de conocimiento, que están relacionados con los tres tipos de procesamiento del problema que elaboraron los autores. El modelo coordina estos tres tipos de conocimiento para resolver los problemas. En un primer momento procesa las oraciones del problema y elabora un esquema de resolución del problema (primer conocimiento del modelo: "esquemas del problema"), en el que se establecen las relaciones que se producen entre los conjuntos: cantidad inicial, acción que ocurre sobre esa cantidad inicial y cantidad desconocida. A continuación el modelo planifica las acciones que se llevarán a cabo para resolver el problema (segundo conocimiento del modelo: "esquemas de acción") y por último el modelo transmite la solución al problema (tercer conocimiento: "conocimiento estratégico para la planificación de la solución").

De esta forma los tres tipos de conocimiento funcionan para resolver el problema de forma correcta. Pero los autores querían conocer qué errores cometía el modelo cuando se imitaban los de los alumnos. Por ello, más adelante este modelo fue revisado por los mismos autores, de forma que el proceso que seguía el modelo se modificó para imitar tres niveles niveles de desarrollo de los alumnos para resolver problemas. Con estas modificaciones, el modelo en el primer nivel, con un procesamiento muy limitado para la resolución de problemas, era capaz de resolver problemas de cambio de tipo 1, 2 y 4. En un segundo nivel y tercer nivel, con una menor limitación en el conocimiento que poseía el modelo, éste ya era capaz de resolver problemas de cambio 3, 5 y 6.

Consecuentemente, podemos observar, que cuando el conocimiento del modelo es escaso, éste solamente es capaz de resolver problemas consistentes, mientras que a medida que el conocimiento matemático es superior, ya consigue resolver problemas inconsistentes de cambio. Para el tercer nivel, el modelo posee la estructura parte-todo, que le ayuda a elaborar un esquema del problema y así consigue resolverlo.

Este modelo se empleó para resolver problemas de cambio. Posteriormente, Riley et al. (1983) también propusieron modelos para resolver problemas de comparación y combinación, sin embargo los resultados para los problemas de comparación no coincidían con los resultados generados a partir del modelo. Se pudo observar que los alumnos sí eran capaces de resolver problemas de comparación correctamente a diferencia del modelo. Esta diferencia la explican los autores porque el modelo necesita conocer las acciones que se deben llevar a cabo para comprender el problema, mientras que los alumnos, a la pregunta de "¿Cuántos tiene X más que Y?", el alumno empareja los elementos de los conjuntos hasta que obtiene el resultado.

- *Modelo de Briars y Larkin 1984, modelo CHIPS*

El modelo CHIPS (Concrete Human-Like Inferential Problem Solver, Resolutor de Problemas, Inferencial, Concreto y Parecido al Humano) basa su resolución en el empleo de fichas u objetos concretos que ayudan a representar el problema. Estas fichas son el componente fundamental del modelo, y en esto se diferencia principalmente del propuesto por Riley et al. (1983), donde lo fundamental eran los esquemas.

Las fichas que emplea el modelo, en un primer momento pertenecen a un conjunto fuente. A continuación el modelo mueve las fichas al tiempo que procesa cada una de las palabras del enunciado. Si el significado de alguna palabra no conlleva ninguna acción, el problema no realizará ninguna acción sobre el conjunto de fichas, si por el contrario, esa palabra suscita una acción, es decir, si el modelo reconoce la palabra asociada a una regla de producción incluida en él, éste realizará la acción que lleve consigo asociada.

Sus tres modelos de conocimiento matemático pasan por tres niveles, desde el primero, en que el modelo mueve y cuenta las fichas para crear los conjuntos; al segundo, en que el modelo identifica qué ficha pertenece a más de un conjunto, para llegar al tercero, en que el modelo puede llegar a modificar la estructura del problema para poder resolverlo. En cuanto al análisis del lenguaje presente en el enunciado, este modelo procesa las palabras de una en una salvo en los casos en que se encuentra con las expresiones "más que" y "menos que", y también cuando el enunciado hace referencia a un verbo que necesita de un complemento indirecto, como en el caso de la expresión "le da" o "le presta".

El modelo implementado por Briars & Larkin (1984) tiene como objeto resolver los tipos de problemas de cambio, combinación y comparación. Para los autores, los problemas de combinación serán igual de difíciles de resolver que los de cambio, ya que las palabras del enunciado que hacen referencia a un superconjunto (entendido éste como un conjunto al cual pertenecen todos y cada uno de los elementos de otro)[1] indican con claridad la acción de juntar. Estas palabras que muestran cuál es el superconjunto pueden ser "entre los dos" o "ambos".

Por otra parte, los problemas de comparación demostraron ser los más complicados para los alumnos, porque no describen ninguna acción, por lo tanto el modelo tiene que adaptar los conjuntos presentes a los esquemas que posee, en los que sí emplea acciones para resolverlos. Por ejemplo, ante el problema: *Pablo tiene 4 canicas. Pedro tiene 6 canicas más que Pablo. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?* El modelo construye los conjuntos de las 4 canicas de Pablo y las 6 de Pedro. A continuación mueve las canicas de Pablo al conjunto de Pedro para así obtener el total.

Los autores concluyen que los alumnos resolverán correctamente los problemas dependiendo de su dominio sobre los conocimientos matemáticos que tengan que ponerse en marcha para llegar a la solución.

Críticas a los modelos clásicos

La principal crítica a estos dos modelos es que dan como única clave para resolver los problemas el conocimiento matemático del alumno, de forma que se obvian otros tipos de conocimiento que pueden influir en la resolución como el conocimiento contextual. Ambos modelos presentan además, una limitación importante en lo que se refiere al procesamiento del texto: en el de Riley et al. (1983), el único procesamiento que realiza es asociar las oraciones con un tipo de problema, y aunque el modelo de Briars & Larkin (1984) mejora esta característica, procesando cada palabra por separado, descarta las que no conoce, de forma que limita su resolución al vocabulario que posea.

Los resultados de estos modelos, además, nos muestran que los problemas más difíciles para los alumnos son los de comparación, por el hecho de que no se describe

[1] Utilizaremos un ejemplo para explicar la idea de superconjunto con el siguiente problema de combinación: *Juan y Pedro tienen 7 canicas entre los dos. Pedro tiene 4 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan?* El superconjunto de este problema sería el asociado a las canicas que tienen Juan y Pedro, cuyo numeral es 7, mientras que los subconjuntos son tanto los elementos dentro de los conjunto "canicas de Juan" y "canicas de Pedro".

ninguna acción, sino su naturaleza es estática, enunciando una comparación entre dos conjuntos. Además, los problemas inconsistentes resultan más complicados, y prueba de ello es que el modelo de Riley et al. (1983) solo conseguía resolverlos cuando disponía de un conocimiento matemático más avanzado.

4.3.2 Modelos computacionales recientes

- *Modelo de Cummins, Kintsch, Reusser, & Weimer (1988)*

Cummins et al. (1988) incorporan a su modelo una novedad sobre los anteriores, que tiene que ver con la consideración que tienen de que un alumno puede comprender perfectamente las relaciones que se establecen entre las partes y el todo entre los conjuntos de un problema de cualquier tipo, sin embargo, no comprender correctamente la información textual que contiene su enunciado. En este sentido, estos autores incluyen la comprensión del texto dentro de su investigación.

Para conocer qué tipo de errores cometen los niños y cuáles son los elementos que determinan estos errores, Cummins et al. (1988) elaboraron dos estudios: el primero consistente en conocer los errores de los alumnos al resolver problemas, y para ello hacían leer primero el problema al alumno y después le pedían que lo contara en voz alta. Después los alumnos resolvían el problema. En esta primera parte concluyeron que los alumnos que conseguían repetir los problemas perfectamente, también los resolvían de forma satisfactoria. Sin embargo, los alumnos que no eran capaces de repetirlos correctamente, cometían errores en la resolución. Todos los errores cometidos por los alumnos se clasificaron dentro de 6 tipos:

1. Transformación del problema, pero manteniendo la estructura.
2. Transformación cambiando la estructura. Se transforma el tipo de problema a otro nuevo tipo, pero las relaciones entre los conjuntos sí se mantienen.
3. Recuerdo sin sentido. El problema no tiene sentido.
4. Errores de superconjunto. En aquellos problemas que el superconjunto forma parte de uno de los datos conocidos, los alumnos, al recitar de nuevo el problema, lo incluyen en la pregunta, esto es, en el dato desconocido.
5. Recuerdo parcial. En este caso, el alumno omite la oración que hacía referencia al superconjunto.
6. Errores de recuerdo sin clasificación. El niño no puede recordar nada del problema o el recuerdo es vago.

Para la segunda parte, utilizaron un modelo anterior elaborado por los autores Kintsch & Greeno (1985), introduciendo en éste los errores que habían cometido los alumnos para observar si el modelo cometían los mismos errores. Para ello, Cummins et al. (1988) realizaron una clasificación de 18 problemas, considerando 6 de cambio, 6 de comparación y 6 de combinación.

Los autores realizaron varias modificaciones en el modelo de forma que eliminaban de éste conocimientos necesarios para la resolución de problemas. Los errores tuvieron una mayor coincidencia en el caso del componente lingüístico, es decir, cuando al modelo se le introdujeron modificaciones en los significados de ciertas palabras clave para comprender la situación, de forma que el modelo resolvía 15 de los 18 problemas de forma similar como lo habían hecho los alumnos. Algunos ejemplos de modificaciones tienen que ver con la palabra "algunos", que pasó de interpretarse como un conjunto desconocido a hacerlo como un adjetivo, o las palabras "entre los dos" de los problemas de combinación.

Por todo esto, estos autores consideran que el conocimiento del lenguaje es el principal componente para lograr un buen proceso de resolución, y determinadas expresiones, como "algunos", "entre los dos" constituyen un desafío para los niños, pudiendo ser interpretados de forma incorrecta. Además, los problemas de comparación del 3 al 6 y los de cambio 5 y 6 son para los autores los que suscitan más errores en los alumnos.

- *Reusser (1988): Situation Problem Solver - SPS (Modelo Episódico de la Situación)*

Para comenzar a explicar el modelo, debemos partir de sus siglas M.E.S., el Modelo Episódico de la Situación, que tiene que ver con una representación mental cualitativa de la situación que se describe en el problema. Tres son las características principales del M.E.S.:

- El carácter cualitativo. El modelo primero representa las proposiciones contenidas en el texto, y a continuación se representan atendiendo no solo a características cuantitativas, sino también cuantitativas.
- La situación del problema. Se tienen en cuenta las intenciones, secuencias temporales y cadenas causales entre los sucesos.
- Estructura temporal y causal del problema. No solo se representan las relaciones conceptuales, sino que también se representan la estructura temporal y causal de la situación del problema.

Proceso de resolución

Cinco pasos sigue el proceso de resolución:

1. Comprensión del texto. Se representa el texto en forma de proposiciones.
2. Creación del M.E.S. El modelo crea la representación cualitativa del problema, analizando las estructuras temporales y causales de las acciones descritas en el problema.
3. Construcción del problema. En este paso se accede al conocimiento de estructuras matemáticas que posee el modelo, para insertar el MES en el conocimiento matemático.
4. Modelo matemático del problema. El conocimiento matemático previo se resume en forma de ecuación matemática.
5. Generación de la respuesta. El modelo genera la respuesta del problema volviendo al modelo de la situación para darle un significado.

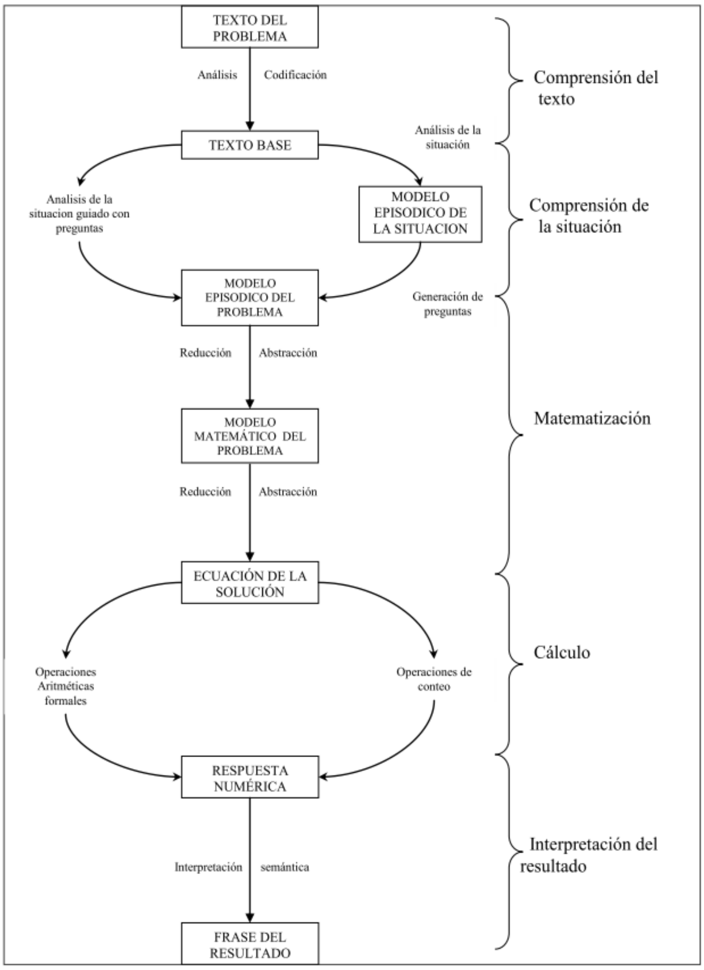

Figura 1. Proceso de resolución de problemas del modelo SPS de Reusser. Adaptado por Vicente y Orrantia (2007)

Una diferencia significativa tiene este modelo con respecto a los anteriores, y tiene que ver con el enunciado de los problemas que procesa. Este enunciado crea una verdadera historia, y no solo describe brevemente una situación en la que intervienen varios sujetos como ocurría en los modelos anteriores. En estos problemas se describen también las motivaciones y propósitos de los personajes. Un ejemplo de los problemas que el modelo procesa, tomado del trabajo de Reusser sería el siguiente:

Ahora mismo Pablo tiene 9 canicas. Primero, recibió algunas canicas de Pedro en el patio hace unos días, ayer Juan le dio tres canicas más como regalo.

Pregunta 1: *¿Cuántas canicas recibió Pablo de Pedro en el patio?*

Pregunta 2: *¿Cuántas canicas le dio Juan a Pablo en el patio/ hace algunos días?*

Además, el modelo fue diseñado para operar solo con problemas de cambio de una sola operación. Como se puede observar, los problemas creados para el modelo incluyen más información de la necesaria para resolverlo, sin embargo establecen un contexto que ayuda a su comprensión, ya que justifica las acciones que se producen en la situación, esto es, el problema se acerca a una situación que pueda ocurrir realmente.

En resumen, el modelo SPS necesita la información contextual y las relaciones que se establecen entre los personajes antes de proceder a elaborar la parte matemática del modelo, por ello, esta característica es fundamental en el proceso de resolución. Reusser describió con este modelo cómo determinadas expresiones lingüísticas pueden condicionar la comprensión del problema.

- *Modelo de Verschaffel, Greer, & De Corte (2000)*

La principal aportación que hace el modelo de Verschaffel et al. (2000) a la resolución de problemas es que tiene en cuenta todos los factores que pueden intervenir en una situación problemática si ésta se da en la vida real, teniendo en cuenta para comunicar el resultado, además del resultado propiamente numérico, inferencias o suposiciones. Estos autores proponen un modelo de resolución de problemas en el que se le da importancia al modelo de la situación, es decir, que el alumno comprenda que los elementos, relaciones y condiciones del enunciado están incrustados en la situación descrita en el enunciado.

Los pasos que se llevan a cabo para construir el modelo matemático, entendido este como un complejo proceso que involucra un número de fases, son las siguientes:

1. Comprensión del fenómeno bajo investigación.
2. Construcción del modelo matemático.
3. Trabajo a través del modelo matemático.
4. Interpretación del resultado del trabajo computacional para llegar a una solución en la situación del mundo real que dio lugar al modelo matemático.
5. Evaluación del modelo, comprobando si el resultado matemático interpretado es apropiado y razonable para la situación problemática original.
6. Comunicación de la solución del problema original en el mundo real.

La resolución de los problemas aritméticos, para estos autores, se puede realizar de una manera superficial, que solamente ocurriría con los problemas fáciles o consistentes (indicado en la figura). Este tipo particular de resolución es iniciado automáticamente por ciertos elementos obvios en la situación del problema, o incluso por ciertas palabras clave, y el resultado de los cálculos es comunicado inmediatamente como respuesta, sin hacer referencia de nuevo a la situación original del problema para verificar que es una respuesta significativa a la pregunta inicial, o para comprobar su razonamiento. Tampoco se elabora un modelo de la situación que establezca el marco para continuar con el proceso de resolución del problema.

Son cuatro los pasos que sigue este modelo en la forma en que los autores proponen que se debe enfrentar un problema de matemáticas:

1. "Formación del modelo de la situación", consistente en entender la situación descrita en el enunciado del problema, donde los alumnos tienen que decidir qué elementos del enunciado son importantes y cuáles no. Para resolver el problema de una forma correcta, los alumnos tendrán que conocer el fenómeno bajo consideración, activando los conocimientos previos.
2. "Modelo matemático". En un segundo paso, el modelo de la situación necesita matematizarse, es decir, transformarse en la forma matemática mediante ecuaciones que incluyan las cantidades clave y relaciones entre esas cantidades. Los alumnos también tienen que considerar la pregunta del problema, y si ésta requiere una respuesta precisa o aproximada. Otro asunto que influye en el proceso matemático es la disponibilidad de recursos. Estos incluyen técnicas matemáticas conocidas, la presencia de recursos

representacionales (gráficos, objetos manipulativos…) y la disponibilidad de herramientas software, calculadoras, etc.

3. Una vez que el modelo matemático está construido y los resultados obtenidos, el simple resultado numérico necesita ser interpretado en relación con el modelo de la situación. En este paso el alumno tiene que evaluar lo razonable del resultado, juzgando si es apropiado revisar el modelo o si por el contrario, es necesario buscar un modelo nuevo.
4. Un paso final tiene que ver con la comunicación del resultado, que se debe realizar de una forma que sea consistente con la meta planteada en el enunciado, dando argumentos válidos de ese resultado.

Estos cuatro pasos son los que llevarían al alumno a resolver un problema correctamente. Sin embargo, en muchas ocasiones, el alumno realiza una comprensión superficial, donde se salta algunos de estos pasos, elaborando directamente el modelo matemático sin considerar el modelo de la situación, y sin interpretar, por tanto, los resultados en función a ese modelo de la situación previamente elaborado. Los dos tipos de resoluciones que proponen los autores se encuentran en el siguiente esquema.

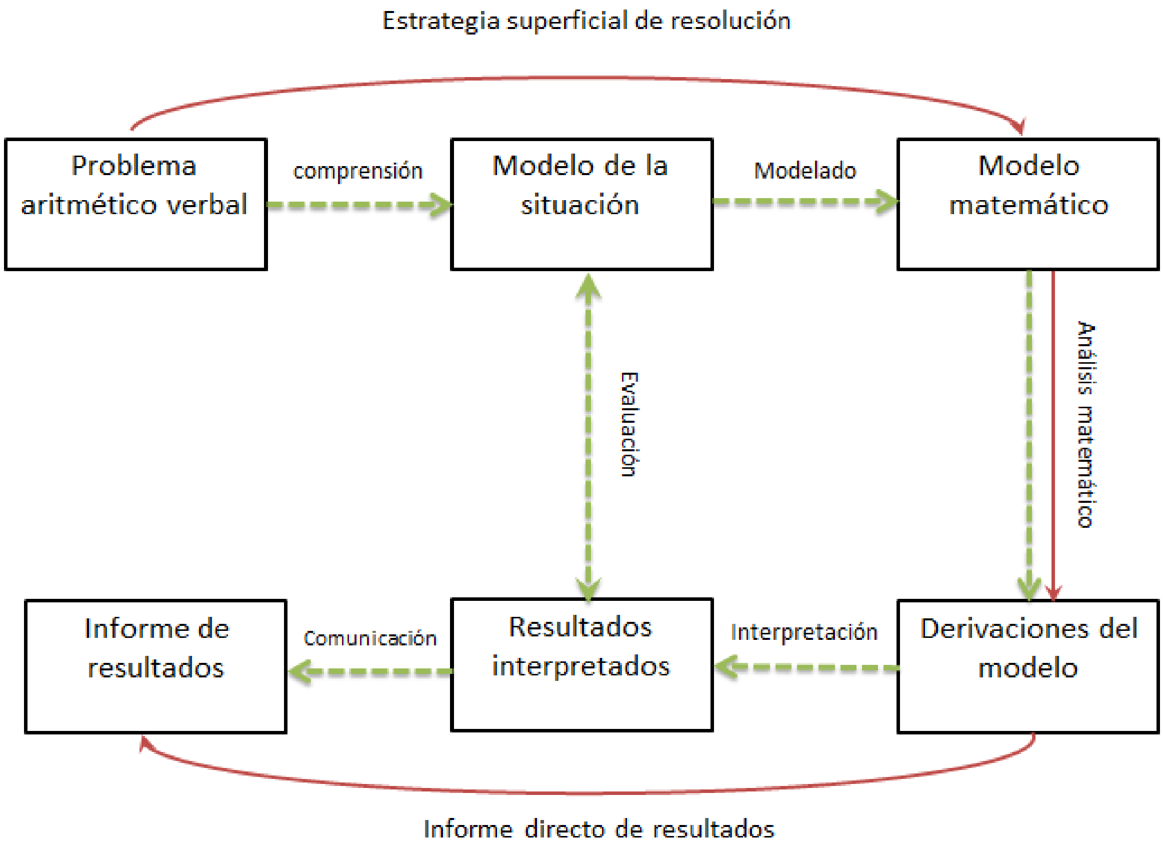

Figura 2. Esquema del modelo de resolución. Traducido de Verschaffel et. al (2000).

Esta propuesta propone un verdadero modelo de resolución de problemas para resolver de forma satisfactoria los problemas más difíciles, en los que habrá que seleccionar los datos que necesitamos para resolverlo, pero además, tener en cuenta diferentes situaciones que podrían ocurrir si la situación se diera de forma real, es decir, elaborar un modelo de la situación que recoja las distintas posibilidades y características, que aunque no estén descritas en el problema, podrían llegar a condicionar la solución.

4.3.3 Síntesis de los modelos

El proceso de resolución de un problema, como ya hemos visto se ha abordado desde diferentes perspectivas. Con los primeros modelos o modelos clásicos, de Riley et al. (1983) y Briars & Larkin (1984), se basaba el éxito en la resolución del problema únicamente en el conocimiento matemático. El texto del problema solamente se "comprende" en términos matemáticos, con las limitaciones que ello conlleva, porque en estos modelos, las palabras que no se conocen se eliminan, de forma que si pueden ayudar a la comprensión no lo hacen, pudiendo obviar expresiones que consigan ayudar a que el alumno descubra el esquema matemático que subyace al texto lingüístico.

De entre los modelos más recientes, hemos explicado tres: con Cummins et al. (1988). ya se conoce el papel que la comprensión de los conceptos del enunciado tiene sobre el éxito o fracaso de la resolución. El modelo SPS de Reusser (1988) introduce los problemas narrativos verbales, en los que se describen interacciones e intenciones de los personajes, entre otras acciones. El modelo de Verschaffel et al. (2000) propone una serie de pasos partiendo de un modelo de la situación que recoja las características del problema que se darían en esa misma situación planteada en la vida real.

4.4 *Resultados de los alumnos españoles en los informes internacionales TIMSS y PISA*

Contextualizaremos este tema acercándolo a nuestro país para conocer mejor en qué lugar se encuentran los alumnos españoles a través de dos informes de relevancia internacional, en los que se muestra el nivel de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. Los informes que analizaremos son el informe TIMSS (2011) y el informe PISA (2012).

- *Informe TIMSS*

El informe TIMSS (2011) (Trends in Internationnal Mathematics and Science Study), Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias, evalúa los conocimientos de los alumnos de 4º de Primaria en Matemáticas y Ciencias. Solamente se ha realizado en nuestro país en dos ocasiones hasta la fecha. En 1995 se realizó por primera vez a los cursos de 7º y 8º de E.G.B., y la segunda vez ha tenido lugar en el año 2011 a los alumnos de 4º de Primaria, resultados que analizaremos a continuación. Este examen internacional lo lleva a cabo la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA).

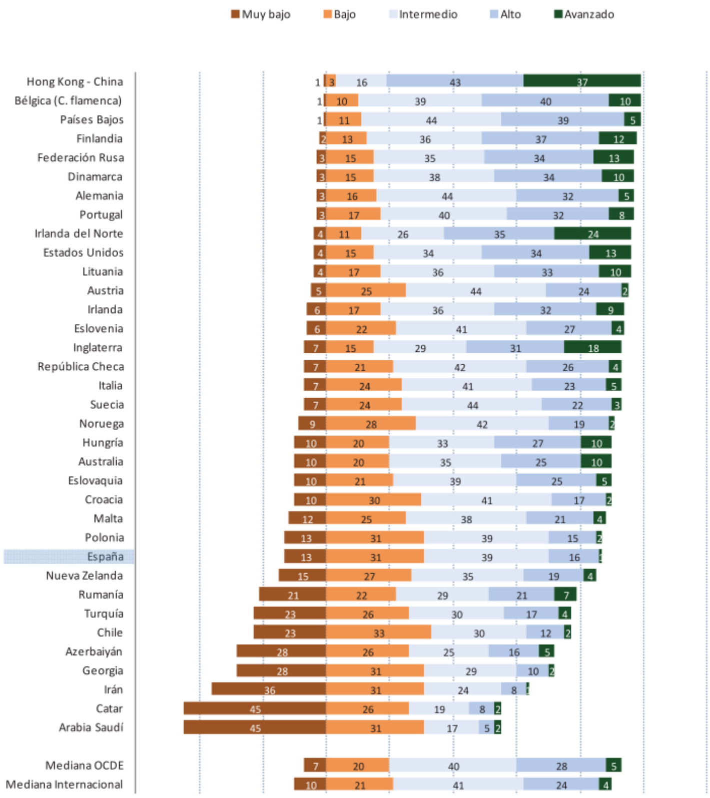

Gráfico 4.1 Porcentajes de alumnos por niveles TIMSS-matemáticas (ordenados por nivel muy bajo). Tomado de TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. (p. 50)

En el gráfico 4.1 se muestran los resultados comparativos de todos los países participantes para la prueba de matemáticas, en la que los países se ordenan en función del porcentaje de alumnos cuyos resultados se encuentran en el nivel más bajo de los cinco en que se dividen los resultados de los alumnos. El porcentaje de alumnos españoles con resultados en este nivel bajo (13%) coloca a nuestro país entre los últimos, alejándonos de países de nuestro entorno como Portugal (3%) e Italia (7%).

Si, por el contrario, los países se ordenan en función de los alumnos que alcanzan los mejores resultados (Gráfico 4.2), España se encuentra en la penúltima posición, con tan solo un 1% de sus alumnos dentro de este nivel. En este caso solamente Irán se encuentra por debajo de la nota española, y nuestro país se encuentra a una gran distancia con respecto al dato más alto (Hong Kong 37%) y muy lejos de otros países con niveles socioeconómicos similares de nuestro entorno, como Portugal (8%) e Italia (5%).

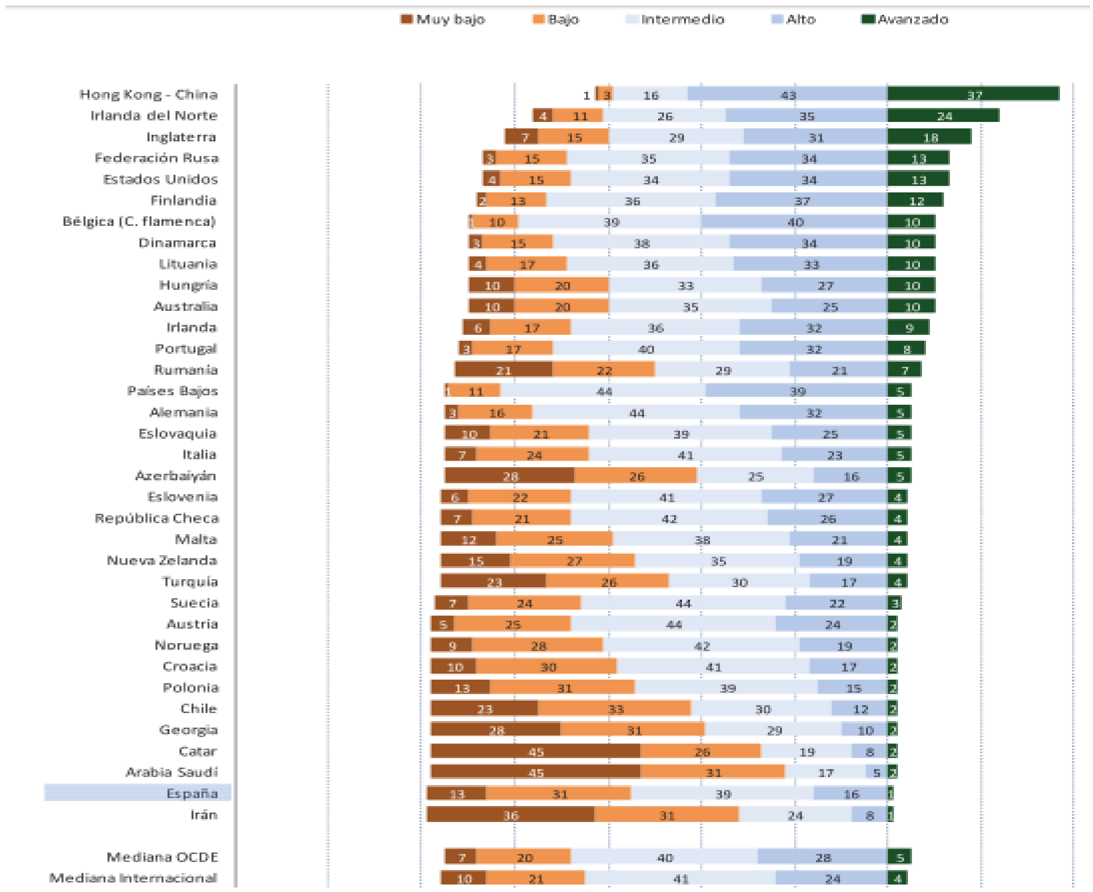

Gráfico 4.2: Porcentajes de alumnos por niveles TIMSS-matemáticas (ordenados por nivel avanzado). Tomado de TIMSS 2011. Informe Español (2013)

Pero lo realmente preocupante de estos datos, más que el porcentaje de alumnos con altos resultados, son los alumnos en el nivel más bajo, porque significa que nuestro país no consigue ni siquiera que muchos de sus alumnos logren un nivel matemático considerado como medio. En función de los resultados que los alumnos obtienen en la prueba, el TIMSS (2011) establece 5 niveles distintos, y cada uno de ellos corresponde con unas destrezas determinadas. En el "nivel bajo", el TIMSS (2011) establece que los alumnos son capaces de sumar y restar números enteros, reconocer ciertas figuras geométricas y lineales y comprender diagramas de barras. Esto quiere decir que los alumnos que se encuentran en el nivel "muy bajo", no han llegado ni siquiera a esos conocimientos mínimos, que como son básicos, suponen un conocimiento esencial para aprender nuevas disciplinas y nuevos conocimientos relacionados con las matemáticas. Para hacernos una idea de lo que significan estos resultados, se considera que un 13% de los alumnos no son capaces de sumar y restar números enteros correctamente, una práctica que comienza con más intensidad en el primer curso de la Educación Primaria.

- *Informe PISA*

El informe PISA (2012) (Programme for International Student Assessment, Programa para la Evaluación Internacional del Alumno), es un proyecto creado por la OCDE para evaluar las destrezas y conocimientos de los alumnos en lectura, matemáticas y ciencias al final de la educación secundaria y se realiza cada 3 años desde el año 2000. Aunque evalúa los conocimientos de los alumnos de 4º de Educación Secundaria, creemos conveniente analizar brevemente los resultados en el área de matemáticas del último estudio, para establecer un marco que nos ayude a conocer si tras la Educación Primaria, y al término de la Secundaria, los alumnos logran superar las dificultades que ya hemos visto, tienen en los primeros años de escolaridad.

Como se puede observar en el gráfico 4.3, los resultados de nuestro país son similares en las etapas de educación primaria y secundaria. La división de los resultados que proporciona PISA (2012) no establece los mismos 5 niveles de TIMSS (2011), pero aun así se puede observar cómo en España los alumnos que no logran alcanzar los objetivos de los niveles intermedios y se quedan por debajo del nivel 2, suman un 24%, lo que supone un cuarto de los alumnos españoles que no consiguen llegar a los objetivos mínimos que establece el primer nivel intermedio.

En el nivel más bajo, PISA establece que los estudiantes serán capaces de responder a las preguntas siempre que el contexto sea cercano al alumno y la información aportada para su resolución sea la única necesaria. Una cuarta parte de nuestros alumnos no son capaces de responder a preguntas que aludan a un contexto previo en el que existe más información de la necesaria.

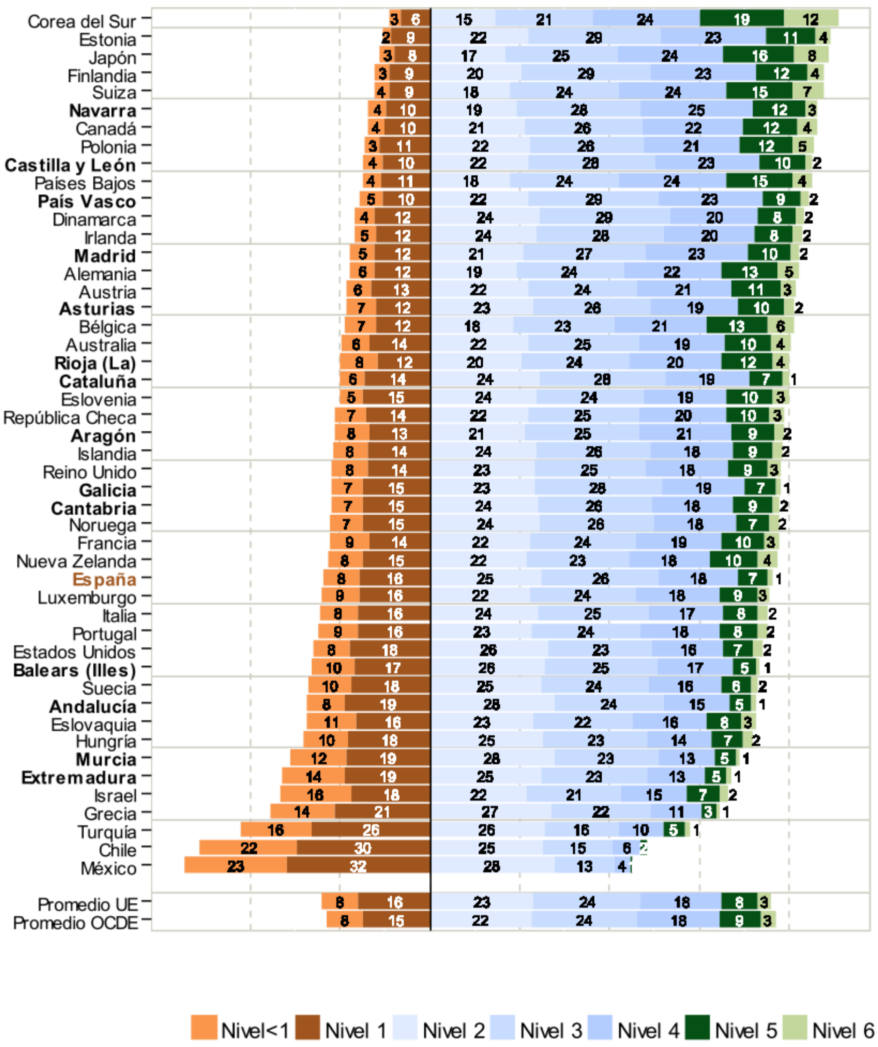

Gráfico 4.3: Distribución de los alumnos por niveles de rendimiento en matemáticas. Tomado de: PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos (2013).

Como ya hemos visto, tanto el informe PISA con el informe TIMSS evalúan en gran parte, la capacidad de los alumnos en la resolución de problemas, y los resultados de España en ambos estudios son mucho más bajos que muchos de nuestros países más cercanos tanto geográfica como socioeconómicamente.

Por ello queda justificado que la investigación sobre el tipo de problemas a los que acceden los alumnos debe ser evaluado, y es por esto que se realizará un análisis de los problemas a los que acceden estos estudiantes.

5. MATERIALES Y METODOLOGÍA

A la vista de los resultados obtenidos por nuestro país en los informes aquí analizados, es conveniente preguntarse qué es lo que hace que nuestros alumnos tengan tantas dificultades para comprender las matemáticas y resolver problemas, ya que al fin y al cabo, los informes evalúan el nivel de competencia de los alumnos para resolver problemas matemáticos en su gran mayoría. Ante la cantidad de variables que se pueden estudiar para conocer qué determina el rendimiento de los alumnos en el área de matemáticas, en este caso nos vamos a centrar en el análisis de uno de los materiales didácticos más empleados en el aula: el libro de texto, y más en concreto, en los problemas incluidos en los libros de texto.

Es frecuentemente comentada la cuestión sobre del deterioro en la calidad de la educación en nuestro país desde la introducción de la LOGSE y tras las sucesivas reformas educativas. Por ello, creemos interesante conocer los libros de texto empleados en la antigua E.G.B y dado que no disponemos de informes internacionales que nos permitan comparar los resultados de los alumnos de la actual Educación Primaria con los de E.G.B., llevaremos a cabo un estudio que nos permita comparar los problemas de algunos libros de texto empleados en las aulas en ambas épocas, para así conocer mejor si los materiales empleados en el aula contienen problemas que estimulan al alumnado a conseguir comprender mejor los problemas, o si, por el contrario, no lo consiguen.

Para ello vamos a llevar a cabo un breve estudio comparativo con dos libros de texto pertenecientes a 1º y 2º de Educación Primaria y 1º y 2º de E.G.B. cuyo objetivo será conocer, por una parte, si alguno de estos libros de texto promueve el razonamiento, y por otra, si los problemas en los libros de texto actuales promueven un mayor razonamiento que los libros de texto de E.G.B.

5.1 Método

Ya hemos hablado de las estrategias que se ponen en marcha en la resolución de los problemas matemáticos, y estas son matemáticas, lingüísticas, incluso conocimientos sobre situaciones del mundo real. Todos estos conocimientos, en parte, hacen posible una representación completa del problema, sin embargo, una de las partes del proceso de resolución en la que es posible que tengan más errores los alumnos puede ser en la comprensión del enunciado, la comprensión situacional, por ello el presente trabajo indagará en una característica que hace que determinados enunciados resulten más complicados para los alumnos porque para resolver el problema no basta con comprenderlo superficialmente.

Orrantia (2003) señala que los problemas inconsistentes resultan más difíciles porque para resolverlos es necesario hacer uso del esquema parte-todo, ya que la palabra clave no es suficiente para guiar al alumno a realizar la operación correcta. De esta forma, por ejemplo, en un problema de comparación tipo 6 (*Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?)*, el alumno tiene que comprender que el conjunto comparado (*Pedro tiene 5 canicas*) es el conjunto menor y el conjunto de referencia (canicas de Juan) es el mayor, y aplicando el esquema parte todo, el alumno llegará a que "conjunto de referencia – conjunto de comparación = conjunto diferencia", de donde "conjunto de referencia = conjunto de comparación + conjunto de diferencia".

Teniendo en cuenta la definición de problema consistente e inconsistente y la división con la que comenzamos este trabajo, se consideran como problemas inconsistentes los problemas de cambio 3, 5 y 6, los problemas de combinación 2, los problemas de comparación 1, 5 y 6 y los de igualación 1, 5 y 6.

Por todo esto, consideramos que los problemas que más dificultad entrañan tienen que ver con los problemas de comparación inconsistentes. Ésta será nuestra variable en la investigación para determinar el grado de dificultad existente en los libros de texto.

5.2 Materiales

Se llevará a cabo una comparación con cuatro libros de texto de matemáticas: dos de 1º y 2º de E.G.B. y otros dos de 1º y 2º de Primaria. Se realizará un análisis de los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva, es decir, los que necesitan resolverse mediante una operación de suma o resta. Tras los resultados se pretende concluir qué libros de texto contienen problemas aritméticos que supongan un mayor desafío para los estudiantes en su resolución.

Los materiales que se utilizarán serán:

- Matemáticas 1º de Primaria, Editorial Santillana (García & Rodríguez, 2007).

- Matemáticas 2º de Primaria, Editorial Santillana (Almodóvar, García, & del Mar, 2007).
- Matemáticas 1º de EGB, Editorial Santillana (Ferrero, Gil, & Roldán, 1983).
- Matemáticas 2º de EGB, Editorial Anaya (Blázquez, 1984).

Consideramos las editoriales elegidas como dos de las más utilizadas en nuestro país, por ello hemos decidido elegir los libros de las editoriales Santillana y Anaya.

5.3 Procedimiento

Se analizaron los problemas atendiendo a la clasificación de Heller & Greeno (1978), clasificando los problemas en problemas de cambio, de combinación, comparación e igualación. Esta clasificación atiende únicamente a problemas simples, es decir, problemas con dos cantidades que se resuelven mediante una operación. Sin embargo en los libros de texto se han encontrado problemas compuestos, en los que se integran varios tipos de estos problemas. En el caso de problemas compuestos con tres sumandos, en los que su estructura es de combinación 1, se han contabilizado como un único problema de combinación 1. Por ejemplo en el siguiente problema tomado del libro de texto de 2º de E.G.B.: *En el parque hay 25 cipreses, 18 olmos y 27 fresnos. ¿Cuántos árboles hay?*, hay que realizar una única operación de 3 sumandos y por ello es codificado como problema de combinación 1.

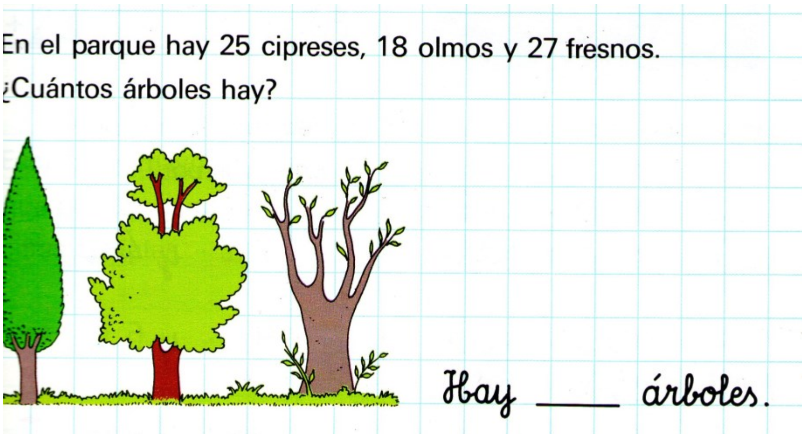

Imagen 5.1. Problema tomado del libro de 1º de EGB (Anaya) codificado como problema de combinación 1

Por otra parte, en los problemas que hay que realizar dos operaciones y su estructura combina dos problemas de tipos distintos, como podrían ser comparación y combinación, se contabilizaron como un problema de comparación y otro de combinación.

Siguiendo la definición de problema que ya vimos al principio, se han contabilizado como problemas aquellos que describen una situación en la cual intervienen dos o más cantidades y que formula una pregunta. También se han contabilizado como problemas aquellos en los que aun no existiendo un enunciado, las cantidades se presentan con un numeral y una representación del objeto en forma de dibujo en la que se formula una pregunta o bien la pregunta está formulada en forma de una oración de imperativo en la que se le pide al alumno que resuelva el problema. En este último caso, aunque el problema no describe una situación de forma lingüística, la pregunta u oración imperativa y los dibujos acompañados de números la describen de forma gráfica. Resumiendo, se han tenido en cuenta para el recuento de problemas aquellos que cuentan con preguntas explícitas, directas o indirectas y dibujos, siempre que estos estén acompañados de un número que indique la cantidad.

En ningún caso se han considerado los problemas que no incluyen una pregunta o aquellos que ya se encuentran resueltos, ya que consideramos que no suponen ningún tipo de práctica para el alumno y solo sirven como ayuda para comprender los pasos a seguir en un problema.

Imagen 5.2. Problema tomado del libro de texto de 1º de Primaria (Santillana) no codificado, ya que no contiene números sino que solo hay dibujos que el alumno tiene que contar.

En 2º tanto de Primaria como de E.G.B. se comienza con el aprendizaje de la multiplicación y división. Los problemas cuyas respuestas necesiten únicamente de la multiplicación o la división para resolverse no se han tenido en cuenta, aunque sí los problemas en los que además de multiplicar o dividir se necesita una operación de tipo aditiva para resolverlos. Para codificar este tipo de problemas se ha atendido a la operación de adición (suma o resta) y se ha codificado como un único problema.

6. RESULTADOS

Como bien se puede observar en la tabla 6.1, la cantidad de problemas incluidos en los libros actuales es muy superior a la de los libros de E.G.B.; de hecho, los problemas en los dos libros de texto de E.G.B. analizados suman en su conjunto la mitad de los presentes en los libros de texto de Primaria. Por ello, las oportunidades que tienen los alumnos para poner en práctica sus conocimientos son mayores con los libros actuales, aunque ello no quiera decir que a mayor cantidad de problemas haya un mayor esfuerzo cognitivo por parte del alumno y por tanto, los libros promuevan en mayor medida el aprendizaje de la resolución de problemas.

TABLA 6.1

TIPO DE PROBLEMA	PRIMER CURSO		SEGUNDO CURSO		TOTAL EGB	TOTAL PRIMARIA
	E.G.B	PRIMARIA	E.G.B.	PRIMARIA		
Cambio 1	2	5	2	4	4	9
Cambio 2	17	11	4	18	21	29
Cambio 3						
Cambio 4		1				
Cambio 5						
Cambio 6						
Combinación 1	17	14	17	25	34	39
Combinación 2		2	3	6	3	8
Comparación 1	8			5	8	5
Comparación 2				4		4
Comparación 3		5		3		8
Comparación 4		5		4		9
Comparación 5						
Comparación 6						

TIPO DE PROBLEMA	PRIMER CURSO		SEGUNDO CURSO		TOTAL EGB	TOTAL PRIMARIA
	E.G.B	PRIMARIA	E.G.B	PRIMARIA		
Igualación 1	4	3	3	7	7	10
Igualación 2	1	2	1		2	2
Igualación 3						
Igualación 4						
Igualación 5						
Igualación 6						
Total	**49**	**47**	**30**	**76**	**79**	**124**

Tabla 6.1. Resultados de la investigación divididos por cursos y planes de estudios.

Por ello tenemos que atender a otro dato que muestran los resultados y tiene que ver con el tipo de problemas incluidos, -los cuales se pueden observar en los gráficos 6.1 y 6.2- en los que la proporción de cada tipo de problema es muy similar para los cuatro libros de texto, predominando los de Cambio 2 y Comparación 2.

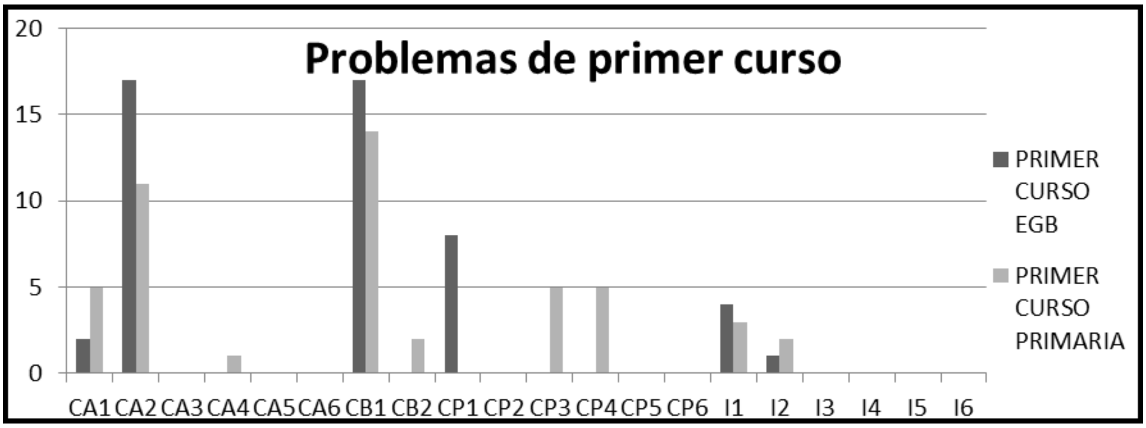

Gráfico 6.1. Gráfico comparativo de los problemas de primer curso de Educación Primaria y E.G.B.

Sin embargo, se aprecia una mayor variedad en los dos libros de texto de Primaria, contando con 9 de los 20 tipos de problemas en 1º y 9 en 2º. En los libros de texto de EGB, el número de problemas distintos son de 6 en ambos libros de los 20 tipos. La variedad a la que están y estuvieron expuestos los alumnos españoles resulta bastante escasa, teniendo en cuenta que el número de problemas distintos en primaria supone cerca de la mitad del total, mientras que en EGB los problemas suponen un tercio de los mismos. En este aspecto, se puede afirmar que la variedad de problemas, aun siendo mayor, no resulta deseable, pues muchos tipos de problemas no se presentan a los alumnos, que deberían conocer absolutamente todos. No se puede afirmar, por tanto, que la variedad de problemas en ambos sistemas educativos sea la deseada.

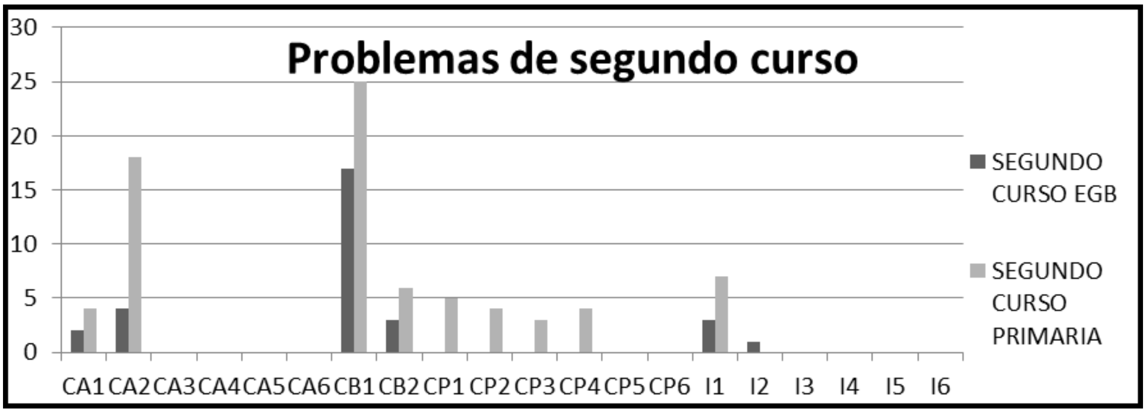

Gráfico 6.2. Gráfico comparativo de los problemas de segundo curso de Educación Primaria y E.G.B.

A continuación mostramos los resultados de la variable a la que atenderemos en nuestro trabajo, dividiendo los problemas en función de la proporción de problemas consistentes e inconsistentes, entendidos éstos como fáciles y difíciles, respectivamente:

Gráficos 6.1 y 6.2. Proporción de problemas fáciles y difíciles en Primaria y E.G.B.

En los gráficos 6.1 y 6.2 se puede observar cómo en los libros de EGB existe una proporción ligeramente superior de problemas difíciles. Podemos decir, atendiendo a la variable *problema consistente e inconsistente*, que aunque las diferencias no son muy abultadas, los libros de texto de EGB promueven un mayor razonamiento que los actuales.

De todas formas, no existe gran variedad de problemas y su distribución es muy similar en los cuatro libros analizados, de forma que en todos ellos la mayor presencia de problemas son los de Cambio 2 y Combinación 1, ambos consistentes. Además, dentro de cada categoría no están presentes todos los tipos de problemas. Por ejemplo, solo nos encontramos los tipos 1 y 2 de los problemas tanto de cambio como de igualación.

Aparte de la mayor o menor presencia de los tipos de problemas, una característica que se ha encontrado en todos los libros de texto es que muchos de los problemas se presentan después de haber explicado en el libro la operación correspondiente que hay que realizar en el mismo, con lo que el alumno puede llegar a operar con los números del problema sin razonar demasiado en el mismo, sino simplemente concluyendo que si, por ejemplo, se acaba de explicar la resta, todos los problemas que se presentan serán de sustracción. Esta característica se ha observado en todos los libros analizados.

Un caso llamativo es el del libro de texto de 1º de EGB, de la editorial Santillana. Prácticamente todos los problemas contenidos en este libro de texto indican la operación que hay que realizar, mediante tres rectángulos dispuestos en vertical con el signo correspondiente a la operación que hay que realizar (Imagen 6.1).

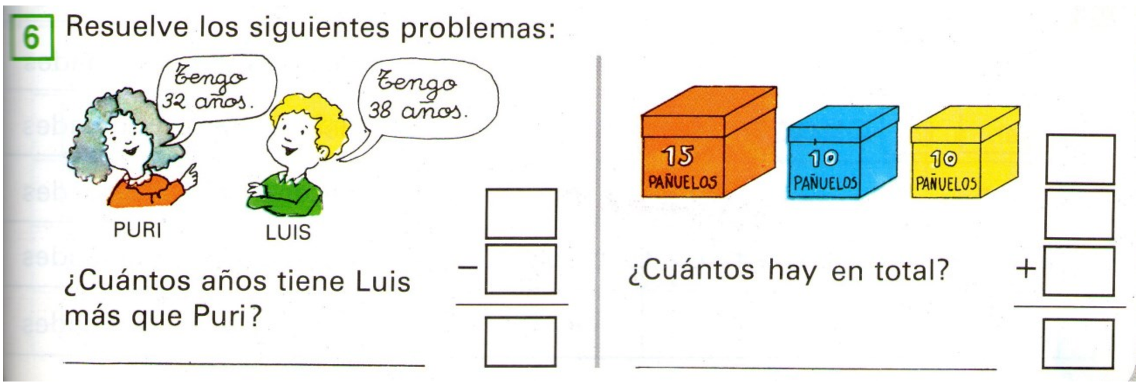

Imagen 6.1. Problemas tomados del libro de texto de 1º de EGB

De hecho, de los 49 problemas codificados, solamente 3 no incluían la operación indicada, algo que resta valor a este tipo de práctica, ya que el alumno en estos casos, si la operación para resolver el problema es de adición, solamente tiene que colocar los dos numerales contenidos en el enunciado, y si, por el contrario se trata de una sustracción, le basta con colocar el número mayor encima y el menor debajo. Esto anula el tiempo que dedica el alumno a razonar en el problema y los datos contenidos en él.

En cuanto al enunciado de los problemas, se han encontrado varios en los que éste no existía, bien porque se representaba todo el problema en forma de dibujos, o bien porque el enunciado se transformaba en una oración imperativa y algunos dibujos con etiquetas marcando las cantidades. Todos los enunciados de los libros de 1º, 2º de EGB y 1º de Primaria presentan los datos necesarios para resolverlos, sin añadir cantidades que no se necesiten o datos irrelevantes, como intenciones, deseos o descripciones de los personajes prescindibles para resolverlos, pero que podrían ayudar al alumno a comprender la situación descrita. Sí existen este tipo de problemas en el libro de texto de 2º de Primaria, aunque no se "mezclan" con los demás problemas, sino que forman un apartado final del libro donde se indica claramente que los problemas que se verán en esa sección tienen la peculiaridad de que añaden datos innecesarios para resolverlos. A pesar de ello, consideramos que suponen un desafío para los alumnos, ya que presentan una oportunidad para comprender un problema por completo, tratando de resolver exactamente lo que pide la pregunta.

7. CONCLUSIONES

Se comenzó el trabajo explicando las diferentes teorías que han propuesto distintos autores para comprender cómo resuelven los alumnos los problemas aritméticos verbales. Los modelos antiguos daban importancia al conocimiento matemático del alumno, mientras que los más recientes defienden la comprensión de la situación, de la que parten para elaborar el modelo matemático y resolver el problema. Esto ha sido lo que nos ha llevado a elegir la variable de la investigación -presencia de problemas inconsistentes- relacionada con los problemas más difíciles, porque para resolverlos no solo se necesitan identificar ciertas palabras clave que se relacionan con la operación, sino que además hay que comprender la situación.

Mediante la investigación de estos cuatro libros de texto, se ha podido observar y conocer un poco más los tipos de problemas a los que se enfrentan los alumnos del primer ciclo de Primaria y el llamado ciclo inicial en la antigua EGB. El objetivo principal ha sido el de conocer si alguno de estos libros de texto promueve la resolución de problemas, a lo que podemos concluir que no se puede asegurar que los libros de texto analizados promuevan la resolución de problemas en los alumnos. La razón que nos lleva a esa conclusión es que tanto en los libros de texto de Primaria como en los de EGB, la cantidad de problemas inconsistentes es claramente minoritaria (18,45% en Primaria y 22,78% en EGB) que la de problemas consistentes, considerando estos últimos como los problemas más fáciles que tendrán que resolver los alumnos.

En cuanto al segundo objetivo, tampoco se ha producido un cambio que permita concluir que se ha logrado una evolución en los libros de texto de matemáticas en cuanto a los problemas presentados en ambos planes de estudios, ya que, como hemos visto la proporción de problemas difíciles es similar para E.GB. y Primaria.

Aparte del análisis de este tipo de problemas, también se han constatado determinadas características en los libros de texto que hacen pensar que el alumno puede estar influido en la resolución por determinadas características, como el hecho de que el mismo tipo de problemas se agrupe en la misma sección del libro, o que las operaciones que resuelvan el problema se correspondan con el aprendizaje de las mismas en las páginas precedentes. Esta disposición de los problemas nos hace dudar de su utilidad práctica, ya que el alumno conoce la operación que tiene que realizar porque el libro claramente le indica que los problemas aplican la operación que se está aprendiendo.

También se ha podido observar que en 3 libros de texto (2 de Primaria y 1 de EGB) todos los problemas observados contienen los datos necesarios para su resolución, lo que los hace más fáciles, ya que el alumno no tiene que discernir qué tipo de dato de todos los que enuncia el problema necesita elegir para resolverlo. En el libro restante, los problemas que generan más datos de los necesarios aparecen en un contexto en que el alumno ya sabe de antemano esta característica peculiar, con lo que el estudiante no se enfrenta al problema desconociendo el tipo de enunciado que se encontrará, el mismo libro se lo indica.

Importante es señalar el hecho de que la investigación realizada tiene una gran limitación, que es la muestra a la que se ha accedido, la cual no permite concluir firmemente que todos los libros de texto de ambos planes de estudios sean similares a los analizados, pero permite conocer una parte del amplio catálogo de editoriales que elaboran libros de texto. Una de las razones por las que hemos elegido las editoriales de Santillana y Anaya es su gran presencia en las aulas, frente a otras que no tienen tanta representación.

En la introducción se exponía la importancia que le da el currículo español al conocimiento de las matemáticas, como instrumento para elaborar juicios y conocer mejor diversos aspectos de la vida real. Sin embargo, los problemas en raras ocasiones contienen un enunciado en que se describa una situación real con todas sus características, en la que se expliquen los motivos que llevan a esos personajes a realizar la acción descrita, o que establezcan de forma temporal las acciones que transcurren entre los personajes, de la misma forma que ocurrirían en la vida real. Esta característica, que era uno de los elementos clave del modelo de Reusser, no se ha observado en los problemas analizados.

Los datos expuestos solo revelan una parte de los materiales y recursos que se emplean en el aula para conocer las matemáticas y en ningún caso, son los únicos elementos influyentes en el conocimiento matemático de los estudiantes, pero suponen un elemento importante en el mismo. Consideramos, por tanto, que el libro debe ser complementado con otros materiales y como es evidente, unas prácticas didácticas por parte del docente que encaminen al estudiante a lograr el éxito en la resolución de problemas.

8. BIBLIOGRAFÍA

Almodóvar, J. A., García, J. J., & del Mar, M. (2007). *Guía matemáticas 2: Primaria. Proyecto La Casa del Saber*. Madrid: Santillana.

Bermejo, V., Lago, M. O., & Rodrígez, P. (1994). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, *6*(2), 159-174.

Blázquez, M. F. (1984). *Azimut: matemáticas. 2º E.G.B.* Madrid: Anaya.

Briars, D. J., & Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and instruction*, *1*, 245-296.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. *Addition and subtraction: A cognitive perspective.*, 9-24.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, *20*, 405-438.

Ferrero, L., Gil, J., & Roldán, G. (1983). *Matemáticas 1: E.G.B., ciclo inicial*. Madrid: Santillana.

García, P., & Rodríguez, M. (2007). *Guía Matemáticas 1: Primaria. Proyecto La Casa del Saber*. Madrid: Santillana.

Heller, J. I., & Greeno, J. G. (1978). Semantic processing in arithmetic word problem solving. Presentado en Midwestern Psychological Association Convention, Chicago.

Junta de Castilla y León. Decreto 40/2007, de 3 de Mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León, Pub. L. No. 89 (2007).

Kintsch, W., & Greeno, J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problem. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.

Lapointe, A. E., Mead, N. A., & Philips, G. V. (1989). *Un mundo de diferencias*. Madrid: CIDE.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013a). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. IEA. Volumen I: Informe Español* (p. 201). Madrid.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013b). *PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe Español* (p. 242). Madrid.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y aprendizaje*, *26*(4), 451-168.

Orrantia, J., González, L., & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, *28*(4), 429-451.

Reusser, K. (1988). Problem Solving Beyond the Logic of Things: Contextual Effects on Understanding and Solving Word Problems. *Instructional Science*, *17*, 309-338.

Riley, N. S., Greeno, G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in aritmetic. *The development of mathematical thinking*, 153-196.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Zwets & Zeitlinger.