Capacidades de los sistemas lógicos formales: El caso de algunos sistemas lógicos clásicos y de lógica libre

Tesis presentada por Gabriela Hernández Deciderio para la obtención de grado de Doctor en Lógica y Filosofía de la Ciencia

Directoras:
María Gracia Manzano Arjona, Catedrática de Lógica del Departamento de Filosofía, Lógica y Estética, Universidad de Salamanca.
Atocha Aliseda Llera, Investigadora del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, Universidad Nacional Autónoma de México.

Índice General

SEGUNDA PARTE

Apartado 2

Sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios: El sistema de lógica libre con interpretación total

Apartado 3

TERCERA PARTE

Apartado final

Agradecimientos

Esta investigación ha sido posible gracias al apoyo de la beca otorgada por la Fundación Carolina en convenio con la Universidad Nacional Autónoma de México y la Universidad de Salamanca, correspondiente al programa de Doctorado 2010.

Esta investigación fue realizada también gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM en el marco del proyecto: "Lógicas del descubrimiento, heurística y creatividad en las ciencias" (IN400514).

Es indispensable para mí expresar mi más grande agradecimiento a la Dra. María Manzano Arjona quien fue mi tutora y directora de tesis y quien, todavía en su calidad de directora del Posgrado en Lógica y Filosofía de la Ciencia, me brindó ayuda constante en todas las gestiones de matriculación al posgrado y siempre me asesoró en lo que necesité durante mis periodos de estancia en la USAL. Pero sobre todo le agradezco su enorme paciencia con el desarrollo de esta tesis, por las largas horas que dedicó a la revisión de las distintas versiones de este escrito y porque siempre puso su mejor empeño en que pudiera dar a luz un texto con mayor coherencia y sustento. Agradezco también profundamente a la Dra. Atocha Aliseda quien se sumó a este proyecto justo en el momento más urgente, cuando habían concluido mis estancias en la USAL y requería el apoyo presencial en la continuación de este proyecto en la Ciudad de México. A ella debo también su invaluable tiempo en lecturas, pláticas y puntuales observaciones. Para ambas no tengo más que un sentimiento de enorme gratitud, por su tiempo, rigor y por todas sus recomendaciones.

Quiero agradecer de manera muy especial al Dr. Juan Barba de la Universidad de Valladolid, el tiempo y paciencia que me dedicó en las distintas ocasiones en las que le presenté algunos avances de esta investigación y que siempre tuvo una total disposición, tanto para que pudiera visitarlo en su despacho de la Universidad de Valladolid como para consultarlo a través del correo electrónico. Cada una de sus observaciones fue de gran iluminación para mí y aunque no me fue posible recuperarlas todas en el texto que aquí presento, fueron de gran estímulo y por eso mi mayor deseo es retomarlas en investigaciones futuras. Agradezco también al doctor Enrique Alonso su disposición para visitarlo en su despacho en la Universidad Autónoma de Madrid, agradezco su tiempo, sus orientaciones y consejos. Adicionalmente agradezco a los doctores Huberto Marraud, María José Frápolli, Ángel Nepomuceno, Alfredo Burrieza, Luis Vega y Concepción

Martínez, todos ellos profesores del posgrado en Lógica y Filosofía de la Ciencia, quienes me aceptaron como oyente en sus clases del posgrado y fueron siempre atentos a tener algunos momentos de intercambio sobre algunos de los planteamientos de mi investigación.

De manera especial agradezco a la Dra. Obdulia Torres, actual directora del Posgrado en Lógica y Filosofía de la Ciencia, quien ha estado atenta a mi caso y me ha orientado en todas las gestiones para llevar a buen término esta tesis.

Mucho agradezco también al Dr. Raymundo Morado por su apoyo incondicional en este proyecto, pues no dudó en ser mi aval ante la Dirección General de Personal de la UNAM para que pudiera recibir el apoyo de la beca de la Fundación Carolina. Siempre estuvo atento a cualquiera de los requerimientos de la DGAPA y sobre todo, siempre me brindó su tiempo cuando así se lo solicité para discutir algunos de los avances de esta investigación.

Quiero agradecer igualmente a los doctores Max Fernández de Castro de la Universidad Autónoma Metropolitana, Alejandro Herrera y Luis Estrada del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM quienes también me brindaron parte de su tiempo para comentar y retroalimentar algunos de los avances de esta investigación. Valoro cada uno de sus comentarios que fueron de buena ayuda para concretar avances, pero también para abrir mi reflexión a mayores sutilezas de las que contemplaba inicialmente.

Un reconocimiento y agradecimiento muy especial debo a mi querido amigo Cristian Gutiérrez de quien aprendo siempre mucho como lógico y como ser humano, por su enorme paciencia conmigo y su invaluable orientación que me llevó a comprender y corregir distintas de las dificultades técnicas que se me presentaron en el desarrollo de esta investigación. Muchas gracias Cristian.

Agradezco al Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM todas las atenciones que tuvieron conmigo durante la estancia de investigación que realicé en el Instituto durante los meses de enero a abril de 2013. Agradezco especialmente al Dr. Pedro Stepanenko, director del Instituto y a la Dra. Atocha Aliseda, quien fue la investigadora responsable de la estancia y siempre estuvo atenta a ayudarme a solventar cualquier necesidad. Agradezco igualmente al Dr. Axel Barceló quien, durante mi estancia en el instituto era coordinador del posgrado en Filosofía de la Ciencia, y me brindó su apoyo para realizar una estancia exitosa.

Agradezco también a los compañeros del posgrado, de México y de España, José Luis Barragán, Manuel Crecencio Moreno, Elías Fuentes, Andrei Moldovan, Eva Fernández-Labandera, Serapio Cazana, Claudio Fuentes, Renata Santos y Diego Fernandes, por el intercambio con sus respectivos proyectos. Todos ellos hicieron más grato el proceso de investigación y mucho aprendí de su trabajo y de su calidad humana.

Igualmente agradezco a mis entrañables amigas, Gaby, Mónica, Amaranta, Paula y Rosalina quienes estuvieron siempre dispuestas a escucharme y a ayudarme en los distintos pendientes que surgieron en el proceso de desarrollo de este proyecto. Gaby, disculpa tanta lata que te di y muchas gracias Mónica por todo ese tiempo de estancia en tu casa, fue en verdad de fundamental ayuda.

Dejo para el final lo más importante, agradezco con todo el corazón a mi gran familia por todo el cariño y el ánimo que me brindaron durante todo el proceso de investigación, a ustedes dedico este trabajo.

Introducción

1. Sistemas lógicos y sus capacidades

Desde el surgimiento del *Begriffsschrift* de Frege [1879], reconocido plenamente como el primer sistema de lógica moderna,[1] no ha parado la producción de sistemas lógicos; incluso, se ha intensificado por la conjunción de investigaciones en lógica y ciencias de la computación, así como por el desarrollo de sistemas lógicos orientados al estudio de la gramática del lenguaje ordinario o al estudio de variados intereses filosóficos; además, la producción de nuevos sistemas lógicos se ha ampliado al combinar nuevas lógicas con otras ya existentes.

Respecto de esa gran diversidad de sistemas lógicos, algunos teóricos de la filosofía de la lógica[2] han llegado a proponer que hay una naturaleza diferente entre esos sistemas en razón del propósito de investigación por el que se han creado.[3] Lo que es claro es que de esa diversidad de sistemas lógicos, los estudios más abundantes y especializados se han dedicado a la llamada lógica clásica, que tiene entre sus características ser bivalente, composicional y respetar principios como el de no contradicción y tercero excluido.[4] Para Jacquette Dale [2002; 7] una fuente importante de la proliferación de los sistemas lógicos surgió de la insatisfacción del trato que la lógica clásica da a los aspectos específicos de razonamiento científico y cotidiano. Como apunta John Burgess [2009; 1], muchos sistemas lógicos tratan con lo que deja fuera o con lo que pretendidamente está mal en la lógica clásica. Algunos de los teóricos de la filosofía de la lógica identifican a los sistemas lógicos alternativos a la lógica clásica como de "lógica filosófica",[5] pero en otras publicaciones[6] se les identifica como "sistemas de lógica no clásica".

[1] En este estudio me referiré exclusivamente a lógica "formal" y a sistemas lógicos "formales"; así, para simplificar la expresión, en lo sucesivo únicamente hablaré de lógica y de sistemas lógicos. Cabe destacar también que estoy considerando sistemas lógicos de finales del siglo XIX en adelante.

[2] Entre ellos Rescher [1968], Graylig [1982], Thomason [1989], Wolfram [1989], Ejerhed y Lindstrom [1997], Smiley [1998], Goble [2001], Dale [2002], Burgess [2009].

[3] Por ejemplo, Richmond Thomason [1989; 1-2] plantea que puede hacerse una distinción entre los sistemas publicados en *The Journal of Symbolic Logic*, que tienen una orientación centrada en los problemas que surgen en la formalización de las matemáticas, en contraste con otros sistemas lógicos, publicados en *The Journal of Philosophical Logic* orientados a variados intereses filosóficos.

[4] En el artículo de Shapiro [2013] sobre Lógica Clásica, para la Stanford Encyclopedia of Philosophy, se ofrece el detalle de los fundamentos de lo que aquí estoy entendiendo por lógica clásica.

[5] Pero la expresión "lógica filosófica" es una denominación ambigua, así Timothy Smiley [1998; ix] señala que se habla de "lógica filosófica" abarcando tres géneros diferentes de trabajo: 1. El que durante mucho tiempo se ha utilizado para contrastar a la "lógica formal, simbólica o matemática" con los temas y los tratamientos que a veces pueden caer bajo el título de filosofía del lenguaje. 2. Para cubrir reflexiones no

Más allá de la diferencia marcada en las orientaciones de investigación que hayan motivado la creación de gran diversidad de sistemas lógicos, ¿podemos afirmar que los diversos sistemas lógicos tienen un objeto de estudio en común? De acuerdo con Bochenski [1968; 12] y Alchourrón [1995; 12] la teoría del Silogismo Categórico, contenida sustancialmente en los Primeros Analíticos, sigue siendo el paradigma para identificar la temática de la lógica y de acuerdo con los Kneale [1961; 1] la lógica se ocupa de los principios de la *inferencia válida*; pero, un punto importante por esclarecer es cómo debemos entender la noción de "inferencia", ¿cuál es su referente?

El referente de la noción de "inferencia" es un objeto complejo al que nos acercamos de distintas formas. El sentido más intuitivo y básico de hablar de inferencias remite a procesos argumentativos que se realizan en diversos contextos discursivos, en ese sentido el término "inferencia" refiere a una relación[7] que se presenta en los argumentos, que obedecen el esquema general de premisas y conclusión [$<P_1 \ldots . P_n>$, C]. Son estas relaciones de inferencia las que se busca sistematizar formalmente.

Si es verdad que el objeto de estudio común en los diversos sistemas lógicos son las relaciones de inferencia de distintos contextos discursivos, llama la atención que en la comunidad lógica ha habido cuestionamientos sobre si es adecuado aceptar a algunos de los sistemas lógicos no clásicos como legítimos sistemas lógicos.[8] Hecho que se refuerza con opiniones como la que expresa Quine [1970; 85] sobre la lógica clásica de primer orden, a la que toma como paradigma de claridad, elegancia y buen funcionamiento. Parece académicamente saludable demandar que, antes de cuestionar la aceptación de algunos sistemas formales como legítimos sistemas lógicos, se realice la tarea de comprender mejor lo que son los sistemas lógicos. La presente investigación nace del interés en avanzar algunos pasos en la dirección de especificar conceptos y procedimientos que sean de ayuda para comprender mejor lo que son los sistemas lógicos en general; esto es, con independencia de si son clásicos o no clásicos. Constituye así un primer esfuerzo por revelar las conexiones entre la naturaleza formal de la lógica, su

---

técnicas, inspiradas en los resultados en lógica matemática, como por ejemplo, las implicaciones filosóficas del teorema de Gödel, 3. Para referirse al trabajo iniciado por Arthur Prior, al promover que las publicaciones de la Association for Symbolic Logic siguieran siendo de provecho para los lógicos de los círculos filosóficos al igual que para los matemáticos. Debido a esta ambigüedad en el uso de la expresión "lógica filosófica", en lo sucesivo usaré únicamente la expresión "sistemas de lógica no clásica", expresión que parece evitar la referida ambigüedad.

[6] Como Haack [1974] y [1978], Morado [1984], Peña [1993], Palau [2002], Gómez [2006].

[7] Comúnmente se habla de la relación de inferencia como una relación binaria (por ejemplo, así lo plantea Gabbay [1989; 179, 183]); aunque también podría verse como una relación triádica, como podemos rastrear en la concepción de Pierce [CP 2.461-516, 1867].

[8] Por ejemplo, Gabbay [1994; 190] en su nota 1, señala que la comunidad lógica conservadora ha cuestionado la aceptación de los sistemas de razonamiento no monotónico como sistemas lógicos auténticos.

dirección hacia el estudio de inferencias de contextos diversos y la proliferación de gran variedad de sistemas lógicos. La meta es examinar si está justificada la gran diversidad de sistemas lógicos, o si algunos de ellos son prescindibles en tanto que sería posible extender el formalismo de un sistema lógico para obtener todos los resultados de otro sistema lógico.

En el camino de comprender mejor lo que son los sistemas lógicos, un paso inicial es definir conceptos que nos permitan estudiar con detalle distintos tipos de sistemas lógicos y reconocer si hay razones que justifiquen su gran diversidad. Con el propósito de contribuir en ese paso inicial, mi propuesta específica es estudiar la categoría de "capacidades de los sistemas lógicos". Cuando hablo de capacidades de un sistema lógico, hablo de lo que puede realizar el sistema, concibiendo a un sistema lógico como una construcción teórica, que surge al definir formalmente un lenguaje formal, un cálculo y/o una semántica. Así, esta investigación es un estudio sobre el formalismo y las aportaciones del formalismo de un sistema lógico. Contemplo la posibilidad de reconocer a las capacidades de los sistemas lógicos como una vía para comprender la diversidad de sistemas, al clarificar sus diferencias y llegar a determinar si, en algunos casos, tal diversidad no está justificada, o si más bien hay sistemas lógicos que, por sus características, son capaces de sustituir del todo a otras propuestas de sistemas lógicos.

En la investigación recupero algunos estudios que coinciden en el interés en definir capacidades de los sistemas lógicos, estudios ubicados dentro del marco de las investigaciones clásicas. De esos estudios recupero la noción de capacidad expresiva –identificable con la capacidad del sistema para caracterizar estructuras - y la noción de capacidad deductiva –identificable con el poder del cálculo del sistema para mantener el control sintáctico de la expresividad del sistema-[9] y proponer la noción de una capacidad adicional, a la que llamo capacidad de análisis del sistema lógico.[10]

2. Planteamiento del problema

La pregunta principal que motiva esta investigación es la pregunta por las razones que expliquen la diversidad de sistemas lógicos y que expliquen además si podría haber redundancia en algunos de ellos, por cuanto podríamos obtener los mismos resultados de investigación con menos sistemas lógicos.

Esta pregunta inicial está vinculada a otras varias, que en primera instancia me llevan a la necesidad de especificar ¿qué es un sistema lógico? y ¿cuáles son sus capacidades? A fin

[9] El detalle sobre estas capacidades está desarrollado en los puntos 1.4.1 y 1.4.2. del primer apartado de la tesis.

[10] El detalle sobre la capacidad de análisis está desarrollado en el punto 1.4.4. del primer apartado de la tesis y en los puntos 4.2. y 4.3. del apartado final.

de fijar los elementos que nos permitan comprender si cada sistema lógico hace una aportación significativa o saber si hay sistemas lógicos redundantes.

3. Tesis

Defiendo que *no hay redundancia dentro de la gran diversidad de sistemas lógicos y que para comprender mejor la aportación de cada uno de los diversos sistemas lógicos hace falta apreciar que además de que tales sistemas poseen capacidades de expresividad y deducibilidad, también poseen una capacidad de análisis*.

Hablar de la capacidad de análisis implica tener presente el proceso de diseño de un sistema lógico, puesto que en tal proceso, aquel que lo construye tiene varios retos que enfrentar así como varias decisiones que tomar. Uno de los retos tiene que ver con la manera de representar las componentes del discurso (del lenguaje no lógico[11] en el que se presenta tal discurso) y de las dificultades que en el mismo aparecen. En cuanto a las elecciones a tomar, para cada sistema lógico hay que elegir y definir una serie de constantes lógicas que permitirán representar adecuadamente dicho discurso en el lenguaje formal propuesto.

Así, propongo que la *capacidad de análisis* de una lógica es la aportación que proporciona la elección de dichas constantes lógicas.[12]

La aportación de las constantes lógicas se plasma en la definición de los elementos del sistema lógico: su lenguaje, cálculo y semántica, que es a lo que llamaré el *modo de presentación del sistema lógico*. Así, la capacidad de análisis se refiere tanto a la contribución técnica del formalismo del sistema lógico (en el sentido en que técnicamente tenga mayor simpleza, elegancia, eficiencia y eficacia), como a su contribución explicativa o cognitiva (por cuanto el formalismo del sistema recupera mayores sutilezas observadas en las proposiciones, cadenas de razonamiento o teorías estudiadas mediante el sistema lógico).

[11] Hablo de lenguaje no lógico, con la idea de considerar discursos expresados en lenguaje natural u ordinario, pero también discursos científicos en los cuales puede emplearse un lenguaje que tampoco es simplemente lenguaje natural, sino un lenguaje formal distinto al lógico, como podría ser el lenguaje puramente matemático o de otros discursos científicos que emplean un lenguaje altamente técnico o con un uso importante de simbolismos especiales.

[12] En el entendido de que las constantes lógicas son los símbolos del alfabeto del lenguaje formal que son invariantes respecto a cambios de interpretación. Mosterín y Torretti [2010; 133]. Para efectos de esta tesis, tomo como constantes lógicas a los conectivos y cuantificadores de un sistema lógico. Pero no desconozco que hay distintos esfuerzos de trabajo lógico filosófico para determinar las zonas fronterizas entre las expresiones que cuentan como constantes lógicas y las que no, trabajos que se han desarrollado básicamente siguiendo una tendencia analítica y otra pragmática, más al respecto en John MacFarlane [2009].

De acuerdo con la estrategia y metodología de la investigación que detallo adelante, estudiaré la noción de capacidad de análisis de los sistemas lógicos realizando un estudio de caso de un par de sistemas no clásicos (sistemas de lógica libre), sistemas que consideraré únicamente como integrados por un lenguaje formal y una semántica. Como examinaré en el apartado final de esta tesis, en la que expongo los resultados del estudio de caso, la capacidad de análisis se presenta en la especificación de los detalles de la definición del lenguaje formal y de la semántica (como al considerar el tipo de cuantificadores con que se cuenta, la cantidad de dominios que se contemplan para interpretar a las variables, el tipo de función de interpretación que se define, si se admite la posibilidad de que el dominio de interpretación pueda ser vacío o si se reconoce una diferencia en el tipo de constantes individuales que se admite).

Mostraré que tomar en cuenta a la capacidad de análisis permite comprender mejor que no hay redundancia en la diversidad de sistemas lógicos porque al examinar tal capacidad muestra que los distintos sistemas lógicos tienen una aportación en el desempeño de su lenguaje, de su cálculo y/o de su semántica. De esa forma destacaré que los sistemas lógicos formales no se limitan a registrar resultados en expresividad o derivabilidad, sino que la manera en que están diseñados también tiene una aportación en el análisis, porque es parte de la manera en que representamos formalmente a las proposiciones o las cadenas de razonamiento. Las diferencias entre sistemas lógicos a veces son técnica y filosóficamente profundas, pero aunque las diferencias entre tales sistemas fueran sólo relativas a unos pocos cambios técnicos, ello ya implica una propuesta de análisis distinta; por lo tanto, no sería adecuado admitir redundancia entre sistemas lógicos, puesto que esas diferencias implican, en todos los casos, variantes cualitativas en los resultados de investigación.

En el desarrollo de este estudio resalto que la revisión de la noción de capacidad de análisis de un sistema lógico, abre el examen del tema de la práctica lógica de crear sistemas lógicos; práctica en la que se integran otros temas como: el manejo técnico del formalismo, las consideraciones de los aspectos contextuales (pragmáticos) de las proposiciones, las teorías o las cadenas de razonamiento que se desean sistematizar; pero también la aportación en creatividad, bagaje teórico y filosófico del lógico que diseña un sistema lógico.

4. Aclaraciones

Para que se comprenda mejor el sentido de las preguntas que orientan esta investigación, es importante diferenciarlo de otras preocupaciones cercanas, pero distintas. Por ello realizo las siguientes tres aclaraciones.

1. En primer lugar aclaro que la investigación se centra en el estudio de los sistemas lógicos y no en lo que son las lógicas. Porque identifico una diferencia entre hablar de lógicas y hablar de sistemas lógicos, puesto que hablar de una lógica nos ubica en un nivel de mayor abstracción teórica, esencialmente encaminada a determinar una cierta definición de consecuencia lógica. Mientras que hablar de sistemas lógicos, significa ubicarnos a un nivel de mayor concreción, que nos coloca en el plano de los objetos teóricos que satisfacen una serie de condiciones técnicas para poder estudiar relaciones de derivación o de consecuencia semántica.

2. Cuando hablo de capacidades de los sistemas lógicos, (aquello que puede realizar el sistema) estoy entendiendo capacidades que son atribuibles a cualquier sistema lógico, con independencia de si se trata de sistemas de lógico clásica o no clásica.

3. Aunque la investigación se dirige al estudio de la diversidad de sistemas lógicos, es importante distinguir este interés lógico-filosófico de otros intereses filosóficos cercanos, como el planteado por Susan Haack [1974] con respecto a si los sistemas lógicos no clásicos son rivales o complementarios de los sistemas clásicos, o los planteamientos de Beall y Restall [1999 y 2006] sobre si debe afirmarse un pluralismo lógico en lugar de una posición monista en lógica. No es el interés de este estudio atender a esos planteamientos, porque aquí sólo se aporta reflexión a favor de la idea de que no hay redundancia entre los diversos sistemas lógicos, pero no pretende aportar argumentos ni a favor ni en contra de una visión monista en lógica o de la rivalidad o la complementariedad entre lógicas. En esta investigación el interés está más bien en examinar y comparar distintos ejemplares de sistemas lógicos, a fin de clarificar sus características y estudiar los conceptos de lo que sean sus capacidades.

5. Estrategia

Por cuanto los sistemas lógicos clásicos son los mejor estudiados, para determinar lo que es un sistema lógico parto de casos particulares de sistemas lógicos clásicos que me permiten especificar los elementos que integran a un sistema lógico.[13] Posteriormente, con el propósito de aterrizar la propuesta de justificar la capacidad de análisis como una capacidad de cualquier sistema lógico y de que es una capacidad que nos permite comprender mejor la diversidad de los sistemas lógicos, consideré apropiado seleccionar

[13] Así observo que elementos indispensables de un sistema lógico son: (a) que tenga un lenguaje formal y (b) que cuente con un medio para el estudio formal de la relación de inferencia; ya sea por una vía sintáctica, al definir un cálculo, o por una vía semántica, al definir una semántica.

como un caso particular de lógica no clásica a un par de sistemas de lógica libre, que son sistemas que nacen de la crítica explícita al hecho de que los sistemas lógicos clásicos de primer orden mantengan presupuestos existenciales con respecto a sus términos individuales y al dominio de interpretación para los mismos. Se trata de sistemas que tienen el reto de ofrecer una semántica apropiada para fórmulas que contienen términos que no toman valores en el dominio tradicional de interpretación para variables y que admiten la posibilidad extrema de que el dominio de interpretación pueda ser vacío. En particular seleccioné dos sistemas de lógica libre, dentro de una variedad de diez sistemas propuestos por Leblanc y Thomason [1968], que son sistemas bastante cercanos a los sistemas clásicos. La razón por la que estimé conveniente estudiar dos de los sistemas de Leblanc y Thomason que son tan cercanos a los sistemas lógicos clásicos, es porque los sistemas clásicos son mi referente inicial para plantear nociones de capacidades de los sistemas lógicos en general. Adicionalmente, para estudiar la capacidad de análisis en sistemas clásicos y no clásicos, haré una comparación entre los sistemas lógicos seleccionados cotejándolos con la lógica clásica. La idea es que, si no fuera posible apreciar la capacidad de análisis en sistemas clásicos y en los sistemas de lógica libre que son muy cercanos a ellos, sería mucho menos plausible realizar esa comparación con sistemas lógicos no clásicos que estuvieran más alejados de los sistemas clásicos.

La estrategia consiste en partir de la revisión de ejemplares específicos de sistemas lógicos clásicos, para que a partir de esa revisión obtenga una noción de sistema lógico. Además obtenga una definición de las nociones de capacidad expresiva y deductiva, en el mismo marco de investigaciones en lógica clásica. Partiendo de esa base propongo que los sistemas lógicos poseen además una capacidad de análisis, que permite comprender mejor las diferencias entre sistemas y apreciar con más detalle en dónde está su aportación.

Para profundizar en la noción de capacidad de análisis seguiré la metodología que planteo a continuación.

6. Metodología

Para el estudio detallado de la capacidad de análisis de los sistemas de lógica libre elegidos, me auxiliaré de la aplicación del nivel elemental de una metodología de traducción entre lógicas. Aunque las metodologías de traducción entre lógicas son un tema de investigación en desarrollo, pues se sigue estudiando cuáles son sus procedimientos y resultados,[14] hay metodologías bien definidas; algunas dirigidas a

[14] Han aparecido trabajos dedicados a dar una definición general de lo que sea la "traducción", Prawitz y Malmnäs [1968], Wójcichi [1988], Epstein [1990], Da Silva, D'Ottaviano y Sette [1999], Coniglio [2005] y Carnielli, Coniglio y D'Ottaviano [2009]. Estos estudios, han puesto de manifiesto que hay distintos

consideraciones más sintácticas de las lógicas y alguna más dirigida hacia la semántica.[15] De las distintas propuestas metodológicas para la traducción entre lógicas seleccioné la metodología de traducción de María Manzano [1996] que es una metodología centrada en la semántica de los sistemas lógicos, lo cual resulta ideal para el estudio de sistemas de lógica libre, que son sistemas lógicos cuya aportación se encuentra principalmente en el manejo de su semántica.

Lo que propongo es aplicar, a dos de los sistemas de Leblanc y Thomason [1968], el nivel más elemental de la metodología de traducción de Manzano [1996]. Aunque los sistemas de lógica libre de Leblanc y Thomason son sistemas que tienen un cálculo axiomático, respecto del cual sus autores prueban que es correcto y completo, para su traducción los tomaré únicamente como sistemas lógicos integrados por la unión de un lenguaje formal y la definición de su semántica formal.

La metodología de traducción de Manzano [1996] es una metodología de traducción entre lógicas bastante más amplia, porque incluye distintos niveles de traducción. Pero para los propósitos de este estudio desarrollo tan sólo la primera parte de lo que es el primer nivel de traducción. Esa primera parte de la metodología de traducción tiene el propósito de probar lo que desde la terminología de Manzano se conoce como un lema de representación. En el lema de representación se afirma la equivalencia entre la verdad de una fórmula, en el modelo de la lógica que se traduce, y la verdad de la fórmula traducida en el modelo convertido.

Para estudiar la capacidad de análisis de los sistemas involucrados en la traducción es suficiente con el lema de representación, porque ese proceso de traducción nos permite realizar un estudio detallado del modo de presentación del sistema lógico que se traduce. En tanto que desarrollaré el estudio de caso de dos sistemas de lógica libre, entendidos únicamente como la definición de un lenguaje formal y una semántica, estará enfocado a estudiar la definición del lenguaje formal y de la semántica de las lógicas involucradas en la traducción. Para efectuar la traducción debe definirse una función para la conversión de estructuras (Conv) y una función para la traducción de fórmulas (Trad). La definición de las funciones de conversión de estructuras y de traducción de fórmulas, implica la transformación del formalismo de la lógica de partida al formalismo de la lógica marco en

---

procedimientos para plantear la traducción y que hay formas débiles o más exigentes de entenderla. Además han planeado la necesidad de continuar el estudio del tipo de propiedades metalógicas involucradas en la traducción y en particular, en especificar cuáles son las que debemos o que deseamos preservar a fin de tener una definición fuerte de traducción.

[15] Entre ellas van Benthem [1986], Meseguer [1989], Gabbay [1994], Manzano [1996].

la traducción. De esta forma, en el proceso de traducción entre lógicas, lo único que se preserva del sistema lógico de partida es su noción de satisfacción, pero será presentada en los términos del formalismo de la lógica marco en la traducción.

Así que no afirmo que la capacidad de análisis de un sistema lógico se manifiesta como resultado de probar el lema de representación de la traducción entre lógicas; de hecho, en tanto que la capacidad de análisis es dependiente del modo de presentación del sistema, obviamente no puede permanecer tras el procedimiento de traducción. Entonces, para realizar un examen de la capacidad de análisis, en los términos en que la he enunciado, no es indispensable aplicar la metodología de traducción entre lógicas, puesto que sería posible estudiar la capacidad de análisis examinando directamente las definiciones del lenguaje formal, la semántica y/o cálculo del sistema lógico de interés. Pero el problema con ese procedimiento (del examen directo de las definiciones de los elementos del sistema lógico) es que no contaríamos con un referente objetivo que nos indique en qué momento hemos realizado el examen exhaustivo de los elementos del sistema. En cambio, al aplicar la metodología de traducción entre lógicas, tenemos la ventaja de contar con la demostración inductiva de que la traducción es operativa, lo cual asumo como el respaldo objetivo de que la revisión del formalismo de la lógica que se traduce fue exhaustivo, puesto que verifica que, como nos dice el lema de representación, se dio la equivalencia entre la verdad de una fórmula, en el modelo de la lógica que se traduce y la verdad de la fórmula traducida en el modelo convertido.

Una ventaja adicional al rigor y objetividad alcanzado al seguir un procedimiento de traducción, es que al mismo tiempo nos permite hacer una comparación informal[16] de la capacidad de análisis de la lógica que se traduce (en mi caso un sistema de lógica libre) y de la lógica clásica (como lógica marco en la traducción).

7. Delimitación de la investigación

Para apreciar con mayor claridad el alcance de este estudio es importante que explicite los temas que reviso en el desarrollo de la tesis, pero cuya profundización quedará pendiente para futuras investigaciones. En primer término está lo relativo a las capacidades de expresividad y deducibilidad, puesto que la caracterización que presento de ambas nociones es obtenida únicamente de los estudios clásicos. En el caso de la capacidad expresiva se plantea en el marco de las investigaciones que al respecto realizó Per Lindström. Por ello, expongo el contexto de esa investigación y aunque propongo recuperar a la noción de capacidad expresiva como una capacidad de los sistemas lógicos

[16] Señalo que es informal, porque no se define un criterio formal para realizar la comparación, sino que se trata del examen de los resultados alcanzados por el proceso de traducción por el que se verifica un lema de representación. Ese examen de resultados es el que presento en el apartado final de este estudio.

en general, dejo pendiente la investigación de si la capacidad expresiva relativa a los sistemas no clásicos, debe entenderse en los términos en los que lo plantea Lindström. También expongo el criterio formal que propone Lindström para comparar el poder expresivo de dos sistemas lógicos, pero no desarrollo el tema de si el criterio propuesto por Lindström se puede aplicar, tal como él lo formuló, para comparar sistemas lógicos no clásicos. Sobre ambos temas, únicamente sugiero que un posible camino para profundizar en la temática sería apoyarse en el desarrollo de niveles altos de la metodología de traducción entre lógicas, a fin de que proporcionen una base común desde la cual efectuar las comparaciones y valorar el alcance de la noción de expresividad de la manera en que fue propuesto por Lindström.

En segundo término, presento a la capacidad deductiva también con base en lo que de ella se ha dicho en los estudios clásicos y sobre esa base planteo la relación entre las capacidades expresiva y deductiva a la vista de algunos resultados metalógicos. Pero no profundizo en si es posible hablar de capacidad deductiva sin tener la referencia obligada a su contraparte expresiva o en si es adecuado hablar de capacidad deductiva, en su sentido clásico, en sistemas lógicos que no tienen un cálculo lógico convencional.

En tercer término, en la definición de la estrategia y metodología para profundizar en la capacidad de análisis, menciono que tomo como estudio de caso la revisión de dos sistemas de lógica libre (específicamente dos de los sistemas de la propuesta de Leblanc y Thomason [1968]), a los que aplicaré la primera parte de una metodología de traducción entre lógicas. A pesar de que se trata de sistemas lógicos que tienen tanto un cálculo como con una semántica, en mi estudio los tomaré únicamente como sistemas definidos como la unión de un lenguaje formal y la definición de su semántica. Mi posición es que también es posible estudiar la capacidad de análisis en sistemas que sólo tengan lenguaje formal y cálculo, sólo que de acuerdo con mi estrategia y metodología de investigación, mi estudio de caso no reportará mayores datos sobre cómo se presentan las diferencias en capacidad de análisis en sistemas lógicos que tienen un cálculo en lugar de una semántica. Así entonces, queda pendiente la revisión de los sistemas de lógica libre seleccionados cuando son entendidos como la unión de lenguaje formal y cálculo lógico.

Otro de los puntos que reviso en la tesis, respecto del cual quedará pendiente su profundización, es el relativo a la metodología de traducción entre lógicas. Únicamente hago la presentación de aquel que elegí; no obstante, señalo que la traducción entre lógicas es un tema de investigación abierto, sobre el cual todavía hay mucho por decir.

En cuanto a los sistemas de lógica libre seleccionados, especifico que son tan sólo un estudio de caso, que en ningún sentido pretendo derivar conclusiones generales sobre cualquier sistema de lógica libre. Se trata tan sólo del estudio de dos sistemas específicos, que corresponden a una propuesta semántica particular, que es una entre distintas opciones semánticas para lógica libre y que aunque los sistemas lógicos seleccionados cuentan también con la formulación de un cálculo axiomático completo, la estrategia de la investigación se centra exclusivamente en los sistemas entendidos como la definición de un lenguaje formal y la definición de su semántica formal. Los resultados de las demostraciones de los lemas de representación de los dos sistemas de lógica libre a lógica clásica, brindarán datos que además de ser evidencias a favor del reconocimiento de la llamada capacidad de análisis lógico de los sistemas involucrados en las traducciones, permitirá tener una opinión sobre el rendimiento de esa capacidad en los sistemas de lógica libre examinados. Pero es importante resaltar que las conclusiones no pueden ir más allá de los casos examinados, precisamente porque uno de los resultados que pone de manifiesto este estudio es que el examen de los sistemas lógicos específicos debe ser, en todos los casos, producto de la revisión detallada de los ejemplares de los que se hable.

Por último, afirmo que la reflexión sobre la capacidad de análisis abre la puerta al estudio de la práctica de crear sistemas lógicos y que es una práctica en la que se conjuntan diversos factores como la creatividad y el bagaje teórico-filosófico del lógico, así como las consideraciones pragmáticas ligadas a las decisiones que éste toma al momento de definir el formalismo del sistema que crea. Pero en esta tesis, más que desarrollar el tema de la práctica de crear sistemas lógicos, únicamente señalo que hace falta ahondar en el amplio terreno de investigación sobre la forma en que se conectan todos los factores que tienen como objeto final la concreción de un sistema lógico.

8. Contenido

La investigación tiene tres partes bien diferenciadas. La primera centrada en plantear los conceptos de cada una de las tres capacidades que se propone como identificables en los sistemas lógicos. La segunda, dirigida a realizar el estudio de caso de los sistemas de lógica libre sobre los que se probará un lema de representación de su traducción a lógica clásica de primer orden. Y la tercera, encaminada a recuperar los resultados arrojados por las demostraciones del lema de representación y de lo que ello pueda aportar para la tesis de investigación propuesta.

En el primer apartado planteo la noción de sistema lógico de la que parto, tomando como referencia a los sistemas clásicos y planteo cuál es el objeto de estudio de los sistemas lógicos. Posteriormente hago algunas distinciones terminológicas entre hablar de lógicas, sistemas lógicos y familia de lógicas. Contrasto esa presentación inicial de sistema lógico con los sistemas lógicos libres e introduzco la temática sobre la identificación de capacidades en los sistemas lógicos, con independencia de si se trata de sistemas clásicos o no clásicos. Expongo después las nociones de capacidad expresiva y capacidad deductiva y explico cómo es que están relacionadas con otros resultados metalógicos de los sistemas lógicos clásicos. A continuación planteo la pregunta de si esas capacidades nos explican la diversidad de sistemas lógicos o si hay algo más que hacen los sistemas lógicos, de lo que no se dé cuenta con las capacidades expresiva y deductiva. Y llegados a ese punto hago la propuesta de reconocer un tercer tipo de capacidad en los sistemas lógicos a la que identifico como capacidad de análisis. Sobre la capacidad de análisis, explico cómo se vincula con el tema de la práctica de crear sistemas lógicos, pero también cómo es que se distingue del análisis lógico que se realiza en procesos de formalización de proposiciones, cadenas de razonamiento y teorías. Concluyo el primer apartado exponiendo el procedimiento metodológico que seguiré para el estudio del caso de los sistemas lógicos de lógica libre: la aplicación de recursos de traducción entre lógicas, como una metodología que permite un acercamiento riguroso a la noción de capacidad de análisis lógico de las lógicas involucradas en la traducción.

Los siguientes dos apartados de la investigación están dedicados a presentar los dos sistemas de lógica libre que conforman el estudio de caso. Son sistemas extraídos de la propuesta de Leblanc y Thomason[1968] que corresponden a una semántica conocida como de dos dominios, a los que nombro como de Lógica Libre con Interpretación Total (LLIT), -segundo apartado- y de Lógica Libre Positiva con Interpretación Parcial (LLPIP), -tercer apartado-. En cada apartado además de detallar el lenguaje formal, la semántica y el cálculo de cada sistema, aplico mi adaptación de la metodología de traducción de Manzano [1996] para demostrar un lema de representación en el que se traducen las estructuras y fórmulas de los sistemas de lógica libre a lógica clásica de primer orden.

En el apartado final, realizo la recuperación de la información aportada por la demostración de los lemas de representación de la traducción de los sistemas de lógica libre a lógica clásica, con la finalidad de justificar la tesis planteada en esta investigación. Ofrezco una valoración de los resultados alcanzados y las conclusiones.

PRIMERA PARTE

Apartado 1

Expresividad, deducibilidad y análisis lógico como capacidades de los sistemas lógicos

1.1. ¿Qué es un sistema lógico?

La pregunta está dirigida a establecer los rasgos técnicos que deben ser satisfechos para poder afirmar que tenemos un sistema lógico. Así que una manera de formular la respuesta es partir de la revisión de casos particulares de sistemas lógicos y observar cómo están hechos, cuáles son los elementos que los constituyen.

Tomo como punto de referencia inicial a los sistemas lógicos clásicos de primer orden[17] y en particular un caso básico y familiar, como lo es el sistema lógico de Enderton [1972], en el que define:

(1) un lenguaje formal (en el que contempla como conectores → y ¬, los cuantificadores convencionales y el predicado de identidad como predicado primitivo).

(2) una relación de derivación "⊢" mediante un cálculo axiomático, (que tiene una única regla de inferencia y seis esquemas de axiomas).

(3) una relación de consecuencia "⊨" mediante una semántica (en la que define un dominio de cuantificación, una función de interpretación para constantes, predicados y functores y una noción de satisfacción; todos ellos de la forma estándar).

Como es posible apreciar, elementos indispensables del sistema de Enderton son: (a) que tenga un lenguaje formal y (b) que cuente con un medio para el estudio formal de la relación de inferencia; ya sea por una vía sintáctica, al definir un cálculo, o por una vía semántica, al definir una semántica. El sistema de Enderton [1972] cuenta tanto con la definición de un cálculo como de una semántica, pero entre sistemas de lógica clásica de primer orden no carecemos de ejemplos de sistemas en los que se propone un lenguaje formal y sólo se define un cálculo o una semántica. Así, por ejemplo, en el famoso sistema

[17] En el artículo de Shapiro [2013] sobre Lógica Clásica, para la Stanford Encyclopedia of Philosophy, ofrece el detalle de los fundamentos de lo que aquí estoy entendiendo por lógica clásica. Todo lo ahí expuesto con respecto a las propiedades de un sistema de lógica clásica de primer orden es aplicable al sistema de Enderton [1972], al que hago referencia enseguida.

de *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell [1913][18] se define la relación de inferencia sólo por una vía sintáctica. Pero también tenemos ejemplos de sistemas de primer orden clásico en los que únicamente se propone una definición semántica, como en Kreisel y Krivine [1967]. Así pues, a partir de la referencia a esos sistemas lógicos específicos, al hablar aquí de sistema lógico estaré considerando un lenguaje formal más una relación de inferencia que se concreta a través de la definición de un cálculo, de una semántica o que considera a ambas. No obstante, para los fines de comparar sistemas lógicos del estilo propuesto es preciso contar con una diferencia entre hablar de una lógica y de sus sistemas lógicos; pues, aunque un sistema lógico siempre estará en relación con una lógica determinada, podemos establecer una diferencia entre ambas nociones.

1.1.1. Diferencia entre sistemas lógicos, lógicas y familia de lógicas

Hay diferencia entre hablar de una lógica y hablar de un sistema lógico, una manera sencilla de notarlo es pensar, por ejemplo, en que es posible establecer una diferencia entre hablar de lógica clásica de primer orden y hablar de sus sistemas lógicos particulares, como lo son los referidos sistemas de Enderton [1972], Whitehead y Russell [1913] o Kreisel y Krivine [1967], por citar algunos. Para hacer aún más clara esta distinción, considero pertinente tomar en cuenta lo que al respecto sugiere Gabbay [1994] en su conocido texto "What is a logical system?", en el que señala que:

"Thus a logic is obtained by specifying L and |~. Two algorithmic systems S_1 and S_2 which give rise to the same |~ are considered the same logic." Gabbay [1994; 183].

Gabbay sugiere reconocer que *una lógica* se determina cuando se proporciona el lenguaje formal (L, por el que se define el conjunto de fórmulas del sistema) y una relación binaria de inferencia |~, sin especificar el modo de proporcionar esa relación. Mientras que hablar de un sistema lógico supone concretar la manera de caracterizar la relación de inferencia por vía de la especificación de un sistema algorítmico. En ese caso, la diferencia entre hablar de lógica y de sistema lógico se da respecto al nivel de abstracción o de concreción de cada una, pues hablar de lógica implica ubicarnos en un nivel de mayor abstracción, mientras que hablar de sistema lógico implica concretar el procedimiento de estudio de la relación de inferencia.

[18] Como es sabido, en *Principia Mathematica* no sólo se define un cálculo de primer orden, sino también un cálculo de teoría de tipos. Pero aquí, en las ocasiones que en hago referencia a *Principia Mathetmatica,* mi referencia es únicamente a la parte correspondiente a la lógica de primer orden clásico.

Adicionalmente conviene hacer una diferencia entre hablar de una lógica y una familia de lógicas, puesto que podemos estar en una misma lógica, como la clásica, y además tener sistemas clásicos con variaciones diversas; por ejemplo, variaciones en el grado de su lenguaje; así tenemos sistemas clásicos de orden cero, de primer orden o de orden superior, pero todos ellos corresponden a una familia de lógicas, como la clásica; o bien, podemos tener sistemas clásicos diversos porque variamos sus cálculos, o porque variamos las conectivas contempladas en su lenguaje. Pero además podemos pensar en sistemas lógicos en los que hay variaciones en la definición de la semántica, sólo que en ese caso el cambio es más fuerte porque supone un cambio en la interpretación de los signos lógicos y de ser así más bien decimos que hemos hecho un cambio de lógica. Entonces, cuando hacemos cambios en la semántica, pero mantenemos algunos aspectos relevantes en el lenguaje y en la manera de concebir a la relación abstracta de inferencia, también podemos decir que tenemos distintas lógicas que pertenecen a la misma familia.

Algunos de los teóricos de la filosofía de la lógica identifican a los sistemas lógicos alternativos a la lógica clásica como de "lógica filosófica",[19] pero en otras publicaciones[20] se les identifica como "sistemas de lógica no clásica". De acuerdo con Jacquette Dale [2002; 7] la necesidad de nuevos formalismos se hace urgente ante las limitaciones de los sistemas lógicos clásicos cuando se trata de aplicarlos a problemas reales.[21] Una manera de entender la diferencia entre los sistemas lógicos clásicos y los no clásicos[22] es que en éstos últimos las relaciones de inferencia se caracterizan de forma tal que rompen con alguno de los principios de la lógica clásica, (principios como el de composicionalidad, identidad, tercero excluido y no contradicción).

Ante la diversidad de sistemas lógicos formales, clásicos y no clásicos, en los que podemos reconocer sus diferencias en la interpretación de los signos lógicos y en si adoptan o no los principios de la lógica clásica, más allá de sus diferencias ¿podemos afirmar que tienen un objeto de estudio en común?

[19] Entre esas publicaciones están Rescher [1968], Graylig [1982], Thomason [1989], Wolfram [1989], Ejerhed y Lindstrom [1997], Smiley [1998], Goble [2001], Dale [2002], Burgess [2009].

[20] Como Haack [1974] y [1978], Morado[1984], Peña [1993], Palau [2002], Gómez [2006].

[21] Por su parte Nicolas Rescher habla de trabajos en dirección a consideraciones filosóficas y su acercamiento a los lenguajes naturales (Rescher [1968,1]).

[22] En la nota al pie número 5 de la introducción señalé las razones por las cuales la expresión "lógica filosófica" es una denominación ambigua y que por ello en adelante prefiero usar únicamente la expresión "sistemas de lógica no clásica".

1.1.2. Relaciones de inferencia como objeto de estudio de los sistemas lógicos

De acuerdo con Bochenski [1968; 12] y Alchourrón [1995; 12] la teoría del Silogismo Categórico, contenida sustancialmente en los *Primeros Analíticos*, sigue siendo el paradigma para identificar la temática de la lógica formal. Bochenski [1968; 13] en su investigación sobre la Historia de la Lógica Formal señala que el objeto de su obra son los problemas que se refieren a la estructura de las proposiciones "lógico-formales" semejantes a los silogismos aristotélicos, a sus relaciones mutuas y a su verdad, tomando en cuenta preguntas como si ¿se sigue, o no se sigue? o ¿cómo puede probarse la validez de tal o cual proposición lógico-formal? Por su parte, Alchourrón [1995; 14] en su reflexión sobre la temática de la lógica, indica que el objeto de la lógica sería efectuar una suerte de control de calidad con relación al producto de la actividad argumentativa y que los procesos de argumentar pueden llevarse a cabo guiados por las finalidades más diversas. Deja ver que el objeto de estudio de la lógica es el estudio de la "inferencia" sobre la que dice:

> Por una inferencia se entenderá desde ahora un conjunto de enunciados, de un lenguaje previamente especificado, en el que la verdad de uno de ellos (la conclusión de la inferencia) se pretende justificar en la verdad de los otros (las premisas). Alchourrón [1995; 15]

En esta investigación sostengo que los sistemas formales son diseñados con el propósito de estudiar las inferencias, o más específicamente, las relaciones inferenciales que obedecen el esquema general de premisas y conclusión $[\langle P_1 \ldots . P_n \rangle, C]$. Pero en tanto que se trata de lógica formal, el estudio de la inferencia se centra, como refiere Alonzo Church en su célebre *Introduction to Mathematical Logic* [1956; 1], en el análisis de las proposiciones y de las pruebas con atención de la forma en abstracción del contenido. Church, advierte que la distinción entre forma y contenido no se realiza de forma inmediata, y para ejemplificarlo realiza el análisis de algunos argumentos específicos Church [1956; 1-3]. De esa forma Church permite apreciar que el estudio lógico implica un trabajo de abstracción realizado sobre los argumentos o las inferencias específicas.[23]

---

[23] Church subraya que podemos identificar argumentos con la misma forma lógica y que varían en contenido, pero que para advertir esa igualdad en la forma de los argumentos la guía lingüística no puede ofrecernos la precisión del análisis lógico. Para ilustrar su planteamiento presenta los siguientes argumentos:
"III. I have seen a portrait of John Wilkes Booths; John Wilkes Booth assassinated Abraham Lincoln; thus I have seen a portrait of an assassin of Abraham Lincoln.
IV. I have seen a portrait of somebody; somebody invented the wheeled vehicle; thus I have seen a portrait of an inventor of the wheeled vehicle." Church [1956; 2].
Si el análisis de la forma de estos argumentos tiene una guía lingüística, podría parecer que son de la misma forma; pero, en cambio, el análisis lógico revela que no es así, pues el argumento III es válido, mientras que el IV es inválido.

Esta investigación se centra en el estudio de los sistemas lógicos, vistos como construcciones teóricas encaminados al estudio de relaciones de inferencia extraídas de diversos contextos discursivos. Mi objetivo es apreciar con mayor claridad lo que sean los sistemas lógicos desde su definición técnica formal y es sobre los sistemas lógicos, entendidos en sus especificaciones técnicas formales, respecto de los cuales pregunto acerca de sus capacidades.

1.2. Sistemas lógicos y sus capacidades

De acuerdo con lo expuesto, un sistema lógico está constituido por un lenguaje formal más la definición de un cálculo o la definición de una semántica; aunque hay sistemas lógicos en los que se define tanto un cálculo como una semántica. Entendiendo de esta forma lo que es un sistema lógico: ¿qué capacidades tiene?, ¿tales capacidades varían si se trata de sistemas lógicos que salen del marco de los sistemas lógicos clásicos?

Cuando pregunto por capacidades del sistema, lo que pregunto es por lo que puede realizarse con los sistemas lógicos, mi interés está en la aplicación de los sistemas lógicos para el estudio de proposiciones y de estructuras argumentativas, al realizar análisis lógico de fragmentos discursivos. Así que la pregunta por las capacidades de los sistemas lógicos tiene que ver con entender cómo es que podemos usarlos para probar validez y para realizar análisis lógico. Concretamente, la pregunta es sobre las capacidades que poseen sistemas lógicos como Enderton [1972] o Kreisel y Krivine [1967] para realizar el análisis lógico de fragmentos discursivos, respecto de los cuales proponen la forma lógica de estructuras argumentativas y determinan si son o no válidas. La intención de esta investigación es no restringirme al caso de los sistemas lógicos clásicos, sino dirigirme a la diversidad de sistemas lógicos no clásicos.[24] No obstante, el apoyo en investigaciones en lógica clásica me permite mostrar que los sistemas lógicos tienen una capacidad expresiva y una capacidad deductiva. Pero para comprender si hay o no redundancia en la diversidad de sistemas lógicos, no es suficiente con entender las capacidades de expresividad y deducibilidad de los sistemas lógicos, los sistemas lógicos tienen al menos una capacidad adicional. Deseo mostrar que el estudio de las capacidades de los sistemas lógicos nos conduce a comprender conexiones entre la orientación formal de la lógica, su dirección al estudio de las inferencias realizadas en contextos diversos (científicos y de

[24] Es por eso que en la segunda parte de esta investigación estudio específicamente dos sistemas de lógica libre, como caso de sistemas no clásicos, aunque, naturalmente, no puede verse como un estudio exhaustivo de los sistemas lógicos, sí pretendo ofrecer algunas pautas para estudiar las capacidades de otros casos de sistemas lógicos.

otros tipos producidos en el lenguaje ordinario) y la proliferación de gran variedad de sistemas lógicos.

La propuesta planteada en esta investigación es que las capacidades identificables en los sistemas de lógica clásica, como el de Enderton [1972], pueden ser atribuibles a sistemas lógicos en general, con independencia de si son clásicos o no clásicos. Para ofrecer razones que respaldan esta propuesta, así como he hablado de algunos casos de sistemas específicos de lógica clásica de primer orden, es también pertinente tener clara la referencia a algunos sistemas específicos de lógica no clásica, por tal motivo, profundizaré en el conocimiento general de una lógica no clásica, la lógica libre, para que en los apartados siguientes desarrolle el estudio de caso de dos sistemas particulares de lógica libre. Es por eso adecuado que a continuación realice una presentación general de las características de la familia de lógicas libres.

1.3. El caso de los sistemas de lógica libre

A mediados de la década de 1950, comenzaron a surgir una serie de artículos[25] en donde se habla de la necesidad que tiene la semántica estándar en lógica clásica de primer orden de aceptar dos prerrequisitos: primero, que cada término singular (constante o variable) denote un objeto en el dominio de cuantificación y, segundo, que el dominio de interpretación no sea vacío. Así, en la lógica clásica de primer orden la validez de sentencias como $\exists x\ (x=t)$, $A(t/x) \rightarrow \exists xA$ y $\forall xA \rightarrow A(t/x)$ requieren el prerrequisito de que cada término singular (constante o variable) denote un objeto en el dominio de cuantificación. Y la validez de sentencias como $\exists x\ (Px \vee \neg Px)$, $\exists x\ (x=x)$ y $\exists x\ (Px \rightarrow Px)$ depende de la presuposición de que el dominio de interpretación para variables no sea vacío.

En esos artículos se cuestiona la necesidad de mantener tales presupuestos y se comienza a proponer opciones de sistemas lógicos que pudieran reconocer términos que no toman valores en el dominio tradicional de interpretación o que incluso no denotan en lo absoluto, así como incluir la posibilidad extrema de que el dominio de interpretación pudiera ser vacío. Esas propuestas de sistemas lógicos fueron bautizadas, por Karel Lambert, uno de los lógicos más dedicados a esa línea de trabajo, como sistemas de lógica

[25] Leonard [1956], Rescher [1957], Lambert [1958] y [1959], Hintikka [1959a] y [1959b] y Leblanc y Hailperin [1959].

libre;[26] denominación con la que quería abreviar la frase: lógica libre de suposiciones de existencia con respecto a sus términos singulares y generales.[27]

En realidad, la posibilidad de admitir un dominio de interpretación vacío, fue observada y atendida, con anterioridad a los trabajos en lógica libre. Jaskowski, a comienzos de los años treinta ya ofrecía una solución y tiempo después Quine recuperó el planteamiento y le dio el nombre de *lógica inclusiva*, dejando en claro que la introducción de un dominio vacío en un sistema lógico se resuelve estableciendo el siguiente procedimiento general para las fórmulas cuantificadas: en un dominio de interpretación vacío las fórmulas cuantificadas universalmente serán siempre verdaderas y las fórmulas cuantificadas existencialmente resultarán siempre falsas, (Quine [1954;177]). Aunque la temática central en lógica libre es la de resolver el problema de reconocer constantes que no toman valores en el dominio de interpretación estándar, es común que los sistemas de lógica libre incluyan un dominio vacío. Cuando un sistema de lógica libre incluye la posibilidad de que el dominio de interpretación sea vacío, se habla de un sistema de lógica libre universal.

A la propuesta de una lógica libre puede hacérsele el cuestionamiento de si la crítica que hace a la lógica clásica de tener presuposición de existencia con respecto a los términos singulares se deba tan sólo al hecho de considerar que el cuantificador particular clásico expresa existencia fuerte; es decir, que se cuestiona si las críticas de los lógicos libres a la lógica clásica sea producto tan sólo de la manera de interpretar al cuantificador.[28] De lo cual podría pensarse que las críticas de los lógicos libres a la lógica clásica se diluyen si se separa el concepto de existencia fuerte (ser palpable) del de estar en el universo de discurso, (en donde cabe todo, lo que se puede tocar y lo que no), de forma tal que la diferencia se puede marcar empleando predicados para indicar existencia o con algún otro

[26] Ermanno Bencivenga [1990] explica que el término 'free logic' fue introducido por Karel Lambert en 1960 en el trabajo que presentó en el primer congreso en lógica, metodología y filosofía de la ciencia en Stanford.

[27] Lambert [1981; 148]. Cabe aclarar que se habla de términos generales haciendo un uso que ahora nos podría parecer excesivo al hablar de un término, puesto que un término general no es otra cosa que lo que ahora reconocemos como predicado o relator. Sin embargo, en lógica libre se habla de términos generales para aludir a la tradición silogística en la que se asumía el prerrequisito de que los términos generales o predicados no fueran vacíos, que fue un presupuesto que se eliminó con el paso a la lógica formal de primer orden; pero, sin eliminar igualmente el presupuesto de que los términos singulares no fueran vacíos o que se pudiera incluir un dominio vacío. Que es la observación que se añade en lógica libre.

[28] Por ejemplo, Susan Haack [1974; 142-143] señala que las presuposiciones de existencia que se pueden a tribuir a la lógica clásica parecen deberse a la manera en la que se lee el cuantificador (apegándose a la interpretación estándar u objetual) y sugiere que una lectura distinta de los cuantificadores, como una interpretación sustitucional, podría evitar tal atribución de presuposición existencial. Por mi parte, en otro lugar, Hernández, [2007; 30 y 120] estudié con más detalle los presupuestos de existencia que pueden atribuirse a algunas reglas de cuantificación de la lógica clásica y planteé la idea de que modificar la forma de interpretar a los cuantificadores tan sólo desplaza el problema.

recurso técnico. Ante tales planteamientos, mi posición es que lo que legitima la presencia de los sistemas lógicos de lógica libre dentro de la diversidad de sistemas lógicos es justamente la demanda de hacer explícitos los presupuestos de existencia, más allá de la discusión sobre la forma de interpretar los cuantificadores. Esto es, el valor de los sistemas de lógica libre, proviene de proponer sistemas lógicos que ofrecen propuestas técnicas para el manejo explícito de las presuposiciones de existencia, cosa que no estaba considerada en el planteamiento técnico de los sistemas clásicos.[29]

Actualmente, contamos con un importante número de publicaciones sobre la temática de la lógica libre, en las que podemos advertir muy distintas motivaciones para interesarse por un tratamiento lógico de las presuposiciones de existencia; motivaciones que van desde dar cuenta de una particular forma de entender la ontología detrás de las constantes no denotativas, hasta propuestas que se interesan en el tratamiento libre por su deseo en poner de manifiesto que la lógica es ajena a cualquier consideración ontológica. Más allá de cuáles sean las motivaciones para desarrollar sistemas de lógica libre, lo cierto es que una de las principales complicaciones para concretar propuestas de los sistemas de lógica libre es resolver la manera de interpretar a las constantes que no toman valores del dominio de cuantificación estándar y determinar el valor de verdad que les corresponde a las fórmulas que las contengan. De ahí que el mayor reto para los sistemas de lógica libre está especialmente en la definición de su semántica.

1.3.1. Propuestas semánticas para Lógica Libre

Dado que los sistemas de lógica libre distinguen en las inferencias la presencia de términos singulares que pudieran denotar a objetos fuera del dominio de interpretación clásico o que no denoten en absoluto (ya sean nombres propios, descripciones definidas o expresiones funcionales), son sistemas lógicos que al admitir esa posibilidad, presentarán problemas en dos reglas de la cuantificación clásica: la regla conocida como de eliminación del cuantificador universal o de instanciación universal, que sostiene que $\forall xA \vdash A(t/x)$ y la regla de introducción del cuantificador existencial o regla de generalización existencial que establece que $A(t/x) \vdash \exists xA$. Es posible atacar el problema, a nivel sintáctico, debilitando cada regla introduciendo un predicado especial de existencia E![30] De esa forma, en lugar de la instanciación universal se tendría el esquema $\forall xA, E!t \vdash A(t/x)$ y en lugar de la generalización existencial el esquema $A(t/x), E!t \vdash \exists xA$.

[29] En Hernández, [2007] propuse que en aquellos contextos argumentativos en los que es relevante explicitar la presuposición de existencia, los sistemas de lógica libre ofrecen un mejor tratamiento lógico técnico que los sistemas clásicos de primer orden.

[30] También se puede utilizar la expresión $\exists x(x=t)$ en lugar de E!t, con lo cual puede ahorrarse la inclusión del símbolo E!, pero esto sólo es posible en lenguajes con identidad, donde puede probarse la validez del esquema $E!t \equiv \exists x(x=t)$. Barba [1989; 4]

Aunque es viable el tratamiento libre aludiendo únicamente a reglas sintácticas, la repercusión del tratamiento semántico modelo-teórico clásico ha recibido mucha atención en la literatura de lógica libre,[31] en ese caso, el principal reto a resolver está en la manera de interpretar a las constantes que no toman valores del dominio de cuantificación estándar y determinar el valor de verdad que les corresponde en la definición de su semántica**.**

Entre los trabajos semánticos para lógica libre destacan tres opciones, reconocidas como de lógica libre positiva, negativa o neutra. John Nolt[2010; &3] las describe del modo siguiente:

1. *Negative* semantics require all empty-termed atomic formulas to be false,
2. *Positive* semantics allow some empty-termed atomic formulas not of the form *E!t* to be true, and
3. *Neutral* (or *nonvalent*) semantics require all empty-termed atomic formulas not of the form *E!t* to be truth-valueless.

Cada una de estas tres propuestas recupera planteamientos de lógicos anteriores a los trabajos en lógica libre, pero que han inspirado la creación de sistemas libres. Se suele identificar a la posición positiva con planteamientos de Frege (1892) [1991; 30, 38] en los que consideraba adecuado identificar a los términos no denotativos con un referente arbitrario como el numeral "cero", de tal forma que era posible asignar verdad a sentencias con estos términos. Por parte de la posición negativa se identifica con el planteamiento de Russell [1905; 486] y su teoría de las descripciones definidas, en la que propone transformar la sentencia que contiene a un término singular no denotativo en una descripción vacía que siempre falla en la atribución de existencia y por tanto es siempre falsa. Finalmente la posición neutra se apoya en el análisis de Strawson [1950; 18] que propone que cuando tenemos sentencias en las que pretendemos nombrar a alguien y no lo conseguimos, no tenemos por qué otorgarle valor de verdad.

El mayor desafío en lógica libre está en desarrollar sistemas lógicos que cubran la diversidad de intuiciones respecto de la atribución de un valor de verdad para fórmulas con constantes no denotativas, que pueden caer bajo las posiciones positiva, negativa o

[31] Cabe resaltar que es viable plantear una lógica libre en términos de teoría de tipos, prescindiendo de un referente modelo-teórico clásico. Además, recientemente se ha trabajado en la propuesta de dar una semántica a la lógica libre que en lugar de ser modelo-teórica se apoya en la llamada lógica dialógica, dotando a la lógica libre de una perspectiva más dinámica, porque se concibe como una lógica que deja de ser monológica y plantea la interacción entre al menos dos agentes, ello se consigue apoyándose en técnicas de semántica de juegos. Ver Redmond [2011] y Redmond y Fontaine [2011]. Pero, en el planteamiento que hago aquí, sólo me dedico a sistemas lógicos libres más cercanos al tratamiento clásico.

neutra, pero también pueden contemplar otras variantes. Así, Leblanc y Thomason [1968; 126] señalan las siguientes:

> (i) the statements in question may be denied any truth-value whatsoever; (ii) they may all be assigned some truth-value other than the classical *T* and *F;* (iii) some may be assigned *T* or *F,* and the rest assigned no truth-value; (iv) they may all be assigned the truth-value *T;* (v) they may all be assigned the truth-value *F-,* and (vi) some (but not all) may be assigned *T,* and the rest *F.* Perhaps the most interesting alternative under (vi) is the one, say, (vi'), in which all atomic statements containing a non-designating constant are arbitrarily assigned one of the two truth-values *T* and *F,* and the truth-value of non-atomic ones is determined by the standard semantical rules of truth.

Concretar cualquiera de estas opciones supone el diseño de una semántica en la cual hay que tomar diferentes decisiones. Para apreciar el punto pensemos por ejemplo que queremos dar cuenta de una posición libre positiva, ello nos demanda elegir al menos entre dos maneras de atribuir valor de verdad a sentencias con constantes no denotativas: por un lado, admitir que en algunos casos es verdadera, pero no en todos; o bien, sostener un criterio arbitrario que haga verdadera, automáticamente, a cualquier fórmula que tenga una constante no denotativa, incluso si se tratara de una fórmula contradictoria. Elegir esta segunda opción es técnicamente más sencillo, porque en esos casos no hace falta calcular el valor de verdad de una fórmula compleja en la que estuvieran actuando uno o más operadores, pues sencillamente bastaría con identificar si la fórmula contiene un término no denotativo para saber que su valor de verdad es verdadero. En cambio, elegir la opción que permita otorgar valores de verdad diferenciados para las fórmulas especiales, demanda establecer una forma de distinguir a las constantes que, de acuerdo con la literatura de lógica libre, denotan existentes y aquellas no lo hacen. Para lograr esa finalidad pueden adoptarse distintas estrategias, como adoptar un dominio exterior que sea disjunto del dominio clásico,[32] que podría tener una función de interpretación total o parcial.[33] También sería posible usar una semántica de supervaluación.[34]

En los estudios generales sobre lógica libre como Moscher y Simons [2001], Bencivenga [2002] y Nolt [2010] se ofrecen caracterizaciones de distintas propuestas semánticas para lógica libre. Sin embargo, es difícil estandarizar esas propuestas semánticas pues, la revisión detallada de los artículos en donde se presenta cada propuesta revela que los autores tomaron decisiones distintas en atención a motivaciones específicas, que por

[32] Ejemplos de artículos en donde se ha tomado esta opción son: Cocchiarella [1966] y [1974] y Routley [1966].

[33] Sobre interpretación parcial, pero no necesariamente adoptando la estrategia semántica de contemplar un dominio exterior, Routley [1971] y Leblanc [1971].

[34] Como la propuesta por van Fraassen [1966a] y [1966b], después replanteada por Bencivenga [1980].

consiguiente dan lugar a resultados diversos. Por este motivo creo que en lugar de hablar de propuestas semánticas uniformes, es más conveniente hablar de estrategias semánticas detrás del diseño de sistemas de lógica libre; cuya concreción implica la adopción de una serie de decisiones por parte de cada autor. Así, para definir la asignación de valores de verdad para las sentencias que contienen términos no denotativos se deben tomar decisiones como: (1) si se contemplará la igualdad, (2) si se incluirá al dominio vacío, (3) si las constantes podrán tomar valores en el dominio de interpretación para variables o (4) si se excluye esa posibilidad para algunas de esas constantes, (5) si el tipo de función de interpretación será tradicional, asignando valores para todas las constantes o (6) si será parcial, dejando sin determinar el valor de algunas constantes. Por último, otro punto importante a observar en el diseño de una semántica para lógica libre es si las decisiones adoptadas afectan la manera en la que se definen de forma clásica nociones básicas como la noción de validez.

Realizar un estudio pormenorizado de los sistemas de lógica libre que permitiera valorar sus distintas propuestas semánticas es una tarea que rebasa por mucho los propósitos de este trabajo. Me centraré sólo en el estudio de dos sistemas de lógica libre extraídos de la propuesta de Leblanc y Thomason [1968],[35] los dos sistemas corresponden a una estrategia semántica conocida como semántica de dos dominios y los elegí porque son sistemas bastante cercanos al de Enderton [1972], que es mi referente de sistema lógico de primer orden clásico. Esto es, la principal razón de seleccionar a los sistemas de Leblanc y Thomason está en su cercanía con los sistemas clásicos, que son a los que tomo como referencia para el estudio de las capacidades de los sistemas lógicos; en ningún sentido quiere ello decir que considere que estos sistemas de lógica libre sean mejores propuestas que otros sistemas de lógica libre. Tan sólo los tomo como ejemplares de sistemas lógicos no clásicos o filosóficos que, como cualquier otro candidato a sistema lógico, se espera que tengan ciertas capacidades. Ya que la meta de esta investigación es justificar la presencia de una capacidad adicional a las conocidas de expresividad y deducibilidad a la que llamo capacidad de análisis y la estrategia es hacerlo en atención a algunos sistemas lógicos no clásicos pero cercanos a los clásicos, puesto que si no fuera posible hacer esa comparación entre sistemas que son cercanos a los clásicos que tomo de referencia inicial, y los de lógica libre que tomo como estudio de caso**,** menos aún sería posible la comparación con respecto a sistemas no clásicos que difirieran de forma más importante de los sistemas lógicos clásicos. Antes de entrar en más detalles de la metodología con la cual estudiaré a los sistemas de lógica libre, realizaré una presentación de las nociones de las tres capacidades de los sistemas lógicos.

[35] Leblanc y Thomason [1968] no se limitan con presentar un sistema de lógica libre sino que presentan diez sistemas diferentes.

1.4. ¿Qué capacidades tienen los sistemas lógicos?

Como he destacado anteriormente, la pregunta por las capacidades de los sistemas lógicos está dirigida a determinar cómo es que los sistemas lógicos formales pueden servirnos para probar validez o para realizar análisis lógico, con independencia de si son clásicos o no clásicos. Propongo que una de las capacidades a destacar en los sistemas lógicos es su poder expresivo y encuentro que dentro de los estudios lógicos clásicos hay antecedentes sobre el estudio de tal capacidad, antecedentes que reviso a continuación.

1.4.1. Capacidad expresiva

Contar con criterios que permitan comprender las capacidades de los sistemas lógicos (en el sentido de cuál sea su rendimiento o su poder) es de ayuda para cumplir el propósito de conocer con detalle cómo funcionan y cuáles son sus alcances. La investigación realizada por Per Lindström [1969] es cercana a esa línea de intereses, puesto que se ocupó de estudiar distintos sistemas lógicos que pudieran ampliar el *poder expresivo*[36] de la lógica clásica de primer orden y que pudieran ser mejores herramientas para abordar más problemas matemáticos. Lindström recuperó investigaciones de Mostowski [1957], Fraissé [1954] y Ehrenfeucht [1961] y concreta las suyas propias (Lindström [1966][37]) sobre combinaciones de teoremas de la teoría de modelos de la lógica clásica de primer orden; propone un criterio para comparar el poder expresivo de esos sistemas lógicos y verifica las propiedades metalógicas de tales sistemas.

De acuerdo con Ebbinhaus, Flum y Thomas [1980; 193] Lindström consigue dos resultados que muestran que la lógica de primer orden ocupa un lugar único entre los sistemas lógicos: [38]

(a) No hay un sistema lógico con más poder expresivo que la lógica de primer orden, que mantenga los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem.[39]

---

[36] Lindström [1969; 4, 6] no habla directamente de poder expresivo (*expressive power*) pero en el desarrollo de su artículo sí habla de "*power*" al enunciar su lema 1. Tampoco habla de expresividad, pero en cambio habla de caracterizar una estructura o una clase de modelos. Hodges [2013] hace referencia al planteamiento de Lindström empleando la expresión "*expressive strength*". Sin embargo aquí sigo la expresión usada en el estudio de Ebbinghaus, Flum y Thomas [1980] en el que hablan de "*expressive power*".

[37] Se trata de la investigación que había desarrollado Lindström para el estudio de cuantificadores generalizados. Al respecto Frápolli [2007; 164].

[38] En algunos textos se hace referencia al trabajo de Lindström como un solo teorema, así por ejemplo Daniel Quesada [1995; 98] lo enuncia diciendo: Sea L una extensión del lenguaje de la lógica de primer orden para el que vale el teorema de Löwenheim-Skolem y el teorema de compacidad. Entonces toda sentencia de L tiene exactamente los mismos modelos que alguna sentencia de primer orden.

[39] El teorema de compacidad afirma que, sea Γ un conjunto de fórmulas de primer orden, si cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ entero es también satisfacible. Por su parte el teorema

(b) No hay un sistema lógico con más poder expresivo que la lógica de primer orden, para el cual el teorema de Löwenheim-Skolem se mantiene y para el cual el conjunto de sentencias válidas es recursivamente enumerable.[40]

En su investigación, Lindström habla de sistema lógico en un sentido bastante amplio y es importante advertir el sentido técnico que tiene la noción de "poder expresivo", que, aunque recupera una noción intuitiva de expresividad, en el sentido de "aquello que podemos decir con el lenguaje con el que contamos", también entiende la expresividad desde la óptica de la teoría de modelos. En la teoría de modelos clásica una estructura (o modelo) es una secuencia integrada por un conjunto no vacío –llamado universo– y una serie de: individuos, funciones y de relaciones destacados y definidos sobre el universo del sistema, al modo de $\mathscr{A}$=<A,<c_1,…,c_r>,<f_1,…,f_n>, <R_1,…,R_m>>. Las estructuras o modelos tienen como referente a las estructuras matemáticas, porque se adopta la idea de que describen un fragmento del universo matemático, que puede ser concebido como una jerarquía de conjuntos, apegándose, por ejemplo, a la jerarquía de Zermelo, entre otras posibles. Podemos hablar tanto de una estructura o de una clase de estructuras y de que es posible estudiar las relaciones entre ellas.[41] De acuerdo con la teoría de modelos, una sentencia S define la clase de los modelos de S, Mod(S), que son todas las posibles interpretaciones donde S es verdadera. Pero podemos tener sistemas que aunque difieran en algunos aspectos de la definición de su lenguaje (como que difieran en la selección de sus conectivas lógicas), caracterizan la misma clase de modelos. Este hecho, permite apreciar que es posible hablar de la capacidad expresiva prescindiendo de algunos detalles del modo en que se define formalmente su lenguaje y concentrarse en la clase de modelos a que da lugar.

La capacidad expresiva que le interesaba a Lindström, está centrada en reconocer la clase de modelos o estructuras que puede ser determinadas por el sistema lógico; de ahí que podemos afirmar que, a partir de los estudios de Lindström, *el poder expresivo de un*

---

de Löwenheim-Skolem dice que si el conjunto de sentencias de primer orden tiene alguna realización infinita, entonces tiene realizaciones de cualquier cardinalidad infinita. Mosterín y Torreti [2010; 569,676].

[40] En el entendido de que un conjunto es enumerable si hay un algoritmo para enumerarlo, es decir, si ese conjunto constituye el recorrido de una función computable sobre los números naturales. Es importante no confundir la noción recursiva de enumerabilidad con la noción conjuntista de numerabilidad; puesto que un conjunto es numerable si es finito o biyectable con $\mathbb{N}$. De modo tal que todo conjunto enumerable es numerable, pero no a la inversa. Al respecto Mosterín y Torreti [2010; 124 y 422].

[41] Lo cual se da de dos formas: 1) independiente al lenguaje formal, y en ese caso nos introducimos en el álgebra universal que permite estudiar las relaciones de similitud entre estructuras, tales como extensión, homomorfismo y sus especificaciones como isomorfismo o inmersión. 2) apoyándose del lenguaje formal, en ese caso se habla de la relación entre clases de estructuras y donde las clases de estructuras se relacionan en función de lo que de ellas puede decir el lenguaje, destacando relaciones como equivalencia elemental, subsistema elemental e inmersión elemental. Ver Manzano [2010; 40, 52].

sistema lógico es la capacidad que tiene para axiomatizar cierta clase de estructuras del universo matemático e incluso de caracterizar hasta isomorfía a algunas de ellas.

Entendida así la capacidad expresiva de un sistema lógico, se realiza en el ejercicio de formalización; esto es, en el acto de emplear el lenguaje formal del sistema, atendiendo a la interpretación de los signos lógicos, para establecer la forma lógica de sentencias. En el contexto de la lógica clásica, se tiene interés particular en formalizar teorías matemáticas y tal formalización no implica meramente "parafrasear" los enunciados de los teoremas matemáticos empleando un lenguaje lógico, implica algo mucho más fuerte: axiomatizar las teorías; esto es, determinar un subconjunto decidible de teoremas de la teoría, a partir del cual se infieren el resto de los teoremas que integran la teoría.[42] Al menos, desde el programa de Hilbert, lograr tal axiomatización era el auténtico objetivo de la formalización.[43]

La lógica de primer orden, al satisfacer las propiedades de compacidad y de Löwenheim-Skolem, no puede caracterizar hasta isomorfía ninguna estructura infinito-numerable.[44] Ante tal resultado metalógico, era relevante verificar si había extensiones del lenguaje de primer orden que pudieran ampliar su capacidad para caracterizar estructuras y que al mismo tiempo conservaran el buen comportamiento de la lógica de primer orden para plantear problemas matemáticos. Las investigaciones de Lindström revelaron que no es posible ampliar la capacidad expresiva de la lógica de primer orden y al mismo tiempo conservar las propiedades de compacidad y Löwenheim-Skolem. Podría conservarse alguna de ambas propiedades, pero no ambas.[45]

Tomando en cuenta los estudios de Lindström propongo identificar a la expresividad como una capacidad reconocible en cualquier sistema lógico, aunque un asunto por resolver, es si para cualquier sistema lógico la capacidad expresiva puede ser entendida en los términos de Lindström. Esto es, en las investigaciones de Lindström las distintas lógicas

[42] Una teoría es axiomatizable si todos sus teoremas son inferibles de un subconjunto decidible de teoremas. La teoría T es axiomatizable si ysólo si hay un $\Delta \subseteq$ T tal que (1) $\Delta \subseteq$T, (2) Δ es decidible respecto a $\mathcal{L}$ (T) y (3) $\{\alpha \in \mathcal{L}(T): \Delta \vdash \alpha\}$ =T. Mosterín y Torreti [2010; 580]

[43] Para más detalles sobre el programa de Hilbert, ver Torres [1989] y Zach [2003]. Es importante subrayar que la forma de visualizar la aplicación del formalismo lógico de Hilbert contrasta de manera importante con la perspectiva de Frege, pues aunque Frege aplicó la formalización de su *Begriffsschrift* en primer término a la aritmética, ese fue tan sólo su punto de partida, porque él diseñó su formalismo con un propósito más amplio: ser auxiliar para la ciencia. Frege (1879) [1972; 9, 11].

[44] Resultado que se sigue directamente de Löwenheim-Skolem.

[45] Así por ejemplo, la lógica infinitaria con disyunciones infinitas extiende el poder de la lógica de primer orden porque puede caracterizar hasta isomorfía los grupos de torsión, y aunque satisface el teorema de Löwenheim-Skolem, no vale para ella la compacidad. Otro ejemplo está en la lógica ampliada con el cuantificador "hay una cantidad innumerable de" que sí cumple con el teorema de compacidad, pero no vale para ella el teorema de Löwenheim-Skolem. Ver Mosterín y Torreti [2010; 575].

que examina se interpretan siempre sobre la misma clase de estructuras matemáticas, entonces sería materia de una investigación independiente determinar si la capacidad expresiva de sistemas lógicos no clásicos también remitirían a estructuras matemáticas, y en caso de que fuera así, si remiten a la misma clase de estructuras a las que corresponden los sistemas de lógica clásica de primer orden. Como advertí en la introducción de esta investigación, se requiere un esfuerzo de investigación superior al realizado en esta tesis para poder dar respuesta cabal al planteamiento sobre si la capacidad expresiva de sistemas lógicos no clásicos remite a la caracterización de estructuras matemáticas y de qué clase sean éstas; aquí tan sólo recupero la noción de capacidad expresiva, entendiendo su significado en el contexto del trabajo de Lindström[46] y dejo abierto el cuestionamiento de si la capacidad expresiva de sistemas lógicos no clásicos, remiten a las mismas clases de estructuras que los sistemas clásicos de primer orden.

A pesar de la falta de conclusión respecto de cuál sea el referente final de la expresividad en sistemas lógicos no clásicos, estimo conveniente exponer algunos detalles más del estudio de Lindström sobre el poder expresivo de los sistemas intermedios entre primer y segundo orden clásicos, en lo relativo a la definición de las condiciones para formular un criterio formal para comparar el poder expresivo de dos sistemas lógicos. En lo que sigue detallaré las condiciones de la comparación y la enunciación del criterio de comparación de Lindström, aunque no lo hago siguiendo directamente su texto de 1969, sino siguiendo el estudio que realizan al respecto Ebbinghaus, Flum y Thomas [1980].

1.4.1.1. Criterio para comparar el poder expresivo de dos sistemas lógicos formales

Lo primero es definir con mayor precisión el tipo de sistema lógico al que estamos haciendo referencia y las propiedades que comparten los sistemas lógicos que se están considerando, puesto que a partir de tales propiedades se definirá el criterio para efectuar la comparación de la capacidad expresiva de esos sistemas. Ebbinghaus, Flum y Thomas [1980, 193-194], lo plantean de la siguiente forma:

1.1. Definition. A logical system $\mathscr{L}$ consists of a function L and a binary relation $\models_{\mathscr{L}}$. L associates with every symbol set S a set $L(S)$, the *set of S-sentences* of $\mathscr{L}$. The following properties are required:

(a) If $S_0 \subset S_1$ then $L(S_0) \subset L(S_1)$.

---

[46] Tengo claro que los trabajos de Lindström sobre expresividad de los sistemas lógicos, no son los únicos sobre el tema; también hay otros intereses y tratamientos, por ejemplo, ver Levesque y Brachman [1986] y Baader [1990]. Mi propuesta se apega al planteamiento de Lindström, que es un tratamiento clásico, pero también creo que es el que ofrece el planteamiento más abstracto y general sobre la expresividad.

(b) If $\mathcal{U} \vDash_{\mathcal{L}} \varphi$ (i.e., if $\mathcal{U}$ y φ are related under $\vDash_{\mathcal{L}}$), then, for some S, $\mathcal{U}$ is an *S-structure* and $\varphi \in$ *L*(S).

(c) (*Isomorphism property*) If $\mathcal{U} \vDash_{\mathcal{L}} \varphi$ and $\mathcal{U} \cong \mathcal{B}$, then $\mathcal{B} \vDash_{\mathcal{L}} \varphi$

(d) (*Reduct property*) If $S_0 \subset S_1$, $\varphi \in L(S_0)$ and $\mathcal{U}$ is an S_1-structure then

$$\mathcal{U} \vDash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ sii } \mathcal{U} \upharpoonright S_0 \vDash_{\mathcal{L}} \varphi.$$

[…]

If $\mathcal{L}$ is a logical system and $\varphi \in L(S)$, let

$$\mathrm{Mod}^{S}_{\mathcal{L}}(\varphi) := \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ is an S-structure and } \mathcal{U} \vDash_{\mathcal{L}} \varphi\}.$$

A partir de la especificación de qué es lo que se entiende por sistema lógico $\mathcal{L}$ y de las propiedades de (a) a (d), se ofrece un criterio para comparar el poder expresivo de dos sistemas y que permite saber en qué caso un sistema lógico $\mathcal{L}'$ tiene más poder expresivo que un sistema $\mathcal{L}$.

Ebbinghaus, Flum y Thomas [1980, 194], lo enuncian del modo siguiente:

1.2. Definition. Let $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$ be logical systems.

(a) $\mathcal{L}'$ is at least as strong as $\mathcal{L}$ (written: $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) syss for every S and every $\varphi \in L(S)$ there is a
$\psi \in L'(S)$, such that

$$\mathrm{Mod}^{S}_{\mathcal{L}}(\varphi) = \mathrm{Mod}^{S}_{\mathcal{L}'}(\psi)$$

(b) $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$ are equally strong (written: $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$) syss $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$.

Un ejemplo bastante intuitivo de cómo aplicar el criterio para comparar poder expresivo es el que nos proporciona Hodges [2013], en el que compara el sistema silogístico con la lógica de primer orden. Señala que si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de la lógica de primer orden con igualdad y $\mathcal{L}'$ expresa las cuatro formas del silogismo clásico (haciendo a un lado, por un momento, las disputas acerca de cómo interpretar las sentencias tradicionales) podemos apreciar que $\mathcal{L}'$ se puede reducir a $\mathcal{L}$. En cambio $\mathcal{L}$ no se reduce a $\mathcal{L}'$, porque habría sentencias que no son expresables en $\mathcal{L}'$ como al decir "hay exactamente tres elementos que satisfacen Px".

Ebbinhaus, Flum y Thomas [1980] estudian diferentes sistemas, algunos de ellos los identifican como $\mathcal{L}_{I}$, $\mathcal{L}_{II}$, $\mathcal{L}^{\omega}_{II}$, $\mathcal{L}_{\omega 1 \omega}$.[47] Donde $\mathcal{L}_{I}$ = lógica de primer orden, $\mathcal{L}_{II}$ = lógica de segundo orden, $\mathcal{L}^{\omega}_{II}$ = un sistema de segundo orden debilitado, al debilitar la noción de satisfacción de $\mathcal{L}_{II}$ y $\mathcal{L}_{\omega 1 \omega}$= un sistema que puede caracterizar los grupos de torsión, al añadir un axioma de grupos. Así, al aplicar el criterio para comparar poder expresivo de Lindström a esos sistemas, se obtiene que: $\mathcal{L}_{I} \leq \mathcal{L}^{\omega}_{II}$; $\mathcal{L}^{\omega}_{II} \leq \mathcal{L}_{II}$ y $\mathcal{L}^{\omega}_{II} \leq \mathcal{L}_{\omega 1 \omega}$.[48]

[47] Ebbinhaus, Flum y Thomas [1980; 132, 137, 142].

[48] Ebbinhaus, Flum y Thomas [1980; 194].

Para poder verificar el teorema de Lindström no es suficiente contar con el criterio para comparar el poder expresivo de sistemas lógicos, además se requieren otras definiciones adicionales.[49] Pero, para los fines de este estudio, es suficiente con apreciar que se habla de poder expresivo como *la capacidad que tiene el lenguaje y la semántica de un sistema lógico de axiomatizar cierta clase de estructuras del universo matemático e incluso de caracterizar hasta isomorfía a algunas de ellas*.

En tanto que ha quedado abierta la posibilidad de aplicar la noción de expresividad, a la manera de Lindström, a sistemas no clásicos, por cuanto no es claro si la expresividad de los sistemas lógicos no clásicos deba entenderse como la caracterización de clases de estructuras de la jerarquía matemática, quedará igualmente pendiente la posibilidad de verificar si podemos comparar la capacidad expresiva de sistemas lógicos no clásicos aplicando el criterio de comparación propuesto por Lindström. Lo único que al respecto señalaré es que, si nos interesa tener un estudio más detallado de la comparación entre las estructuras caracterizadas por los sistemas no clásicos en comparación con los clásicos, es plausible apoyarse en el desarrollo de la metodología de traducción entre lógicas (metodología sobre la que doy más detalles en 1.5.) y ver hasta dónde es posible plantear la traducción; porque si la traducción es operativa, entonces es una vía para establecer una base común para realizar la comparación.

Al tener como referencia inicial de las capacidades de un sistema lógico a la noción de expresividad, en la que se tiene presente una noción de sistema lógico que incluye a un lenguaje y su interpretación semántica, si en lugar de ello pensamos en sistemas lógicos integrados por un lenguaje formal y un cálculo, parece factible hablar de una capacidad similar a expresividad presente en los sistemas lógicos que poseen un cálculo, se trataría en ese caso de una capacidad deductiva. En lo que sigue examino la posibilidad de hablar de una capacidad deductiva de los sistemas lógicos y de cuál sería su relación con la capacidad expresiva.

1.4.2. Capacidad deductiva de los sistemas lógicos

En la literatura lógica, las referencias que he encontrado sobre capacidad deductiva de los sistemas lógicos están siempre en relación con su contraparte expresiva.[50] Tiene mucho sentido que esto sea así, pues deseamos que todo aquello que sean fórmulas válidas en nuestro sistema, puedan ser probadas como derivaciones de nuestro cálculo. Deseamos que todo el poder expresivo de nuestro sistema tenga su contraparte sintáctica; en otras

[49] Como definir que un sistema lógico está cerrado bajo los operadores booleanos o definir lo que sea un sistema lógico regular.

[50] Manzano, [2002: 20-21], Manzano [2004: 284-285] y Manzano [2010: 331]. Habla de la comparación entre capacidad expresiva y cálculo deductivo o de evaluar las características computacionales del cálculo.

palabras, *esperamos que el poder demostrativo del cálculo pueda mantener el control del poder expresivo del sistema lógico*. De modo tal que *identifico la capacidad deductiva, con el poder del cálculo del sistema.*

Para entender más a fondo la relación entre capacidad expresiva y deductiva de un sistema lógico requerimos revisar algo más de las propiedades metalógicas del sistema; pero antes de entrar a más detalles de la relación entre capacidad deductiva y expresiva, conviene hacer otras consideraciones respecto de la capacidad deductiva de un sistema lógico.

Hablar de capacidad deductiva de un sistema lógico, implica hablar del cálculo del sistema como recurso sintáctico que nos permite justificar las relaciones de consecuencia entre fórmulas del sistema, de manera bastante más sencilla de lo que se haría únicamente con medios semánticos (pues con el cálculo no requerimos la verificación directa de las especificaciones de la semántica); el cálculo nos permite la manipulación sintáctica de las fórmulas y computar el resultado. Hay distintos estilos de cálculo, Gabbay [1994; 180] habla de tres: 1.estilo Hilbert (cálculo axiomático), 2.estilo Gentzen (que podrían ser cálculo de deducción natural o bien cálculo de secuentes) y 3.estilo Tableaux. De acuerdo con Gabbay lo característico de los cálculos estilo Hilbert y estilo Gentzen es que usan reglas de la forma:

$$\frac{\Delta_1 \mid\!\sim \Gamma_1; \ldots; \Delta_n \mid\!\sim \Gamma_n}{\Delta \mid\!\sim \Gamma}$$

Y axiomas de la forma

$$\frac{\varnothing \quad .}{\Delta \mid\!\sim \Gamma}$$

Mientras que los cálculos de estilo tableaux se plantean en relación con alguna semántica; aunque también es posible presentar formulaciones de tableaux para lógicas que no tienen semántica, si la relación de inferencia y las conectivas cumplen algunas condiciones.[51]

Independientemente del estilo del cálculo lógico del que se trate, sobre cualquier cálculo es posible examinar sus características computacionales, en el sentido de reconocer el tiempo de ejecución del cálculo. Hay que tomar en cuenta que al variar el uso de operadores en un cálculo, puede dar lugar a ventajas o desventajas computacionales, en

[51] Gabbay [1994; 181].

tanto que ese cambio de operadores puede variar el tiempo de ejecución del cálculo. Pero en relación a la capacidad deductiva de un sistema lógico, también es posible comparar capacidades de los cálculos de sistemas lógicos distintos y de sus lógicas, al comparar las propiedades metalógicas de los cálculos y las lógicas. Así por ejemplo, en el contexto de las familias de lógicas clásicas, hay una diferencia en la capacidad deductiva de los sistemas lógicos proposicionales en relación con los sistemas de primer orden, puesto que los sistemas proposicionales tienen la propiedad de ser decidibles;[52] mientras que, los sistemas de lógica de primer orden clásico ya no son decidibles, pero sus cálculos todavía son completos.[53] En contraste, la lógica clásica de segundo orden pierde tanto decidibilidad como completud, por lo tanto, los cálculos que se pudieran crear para esa lógica, pierden totalmente la posibilidad de ejercer el control sintáctico de la semántica estándar de segundo orden.

Entonces, para el examen detallado de la capacidad deductiva de un sistema lógico es relevante considerar las propiedades metalógicas de la lógica del sistema, esto es, determinar si se trata de una lógica correcta, decible y completa en sentido fuerte o débil. Pero ese conocimiento metalógico además nos permitirá apreciar el tipo de relación que guardan entre sí las capacidades expresiva y deductiva de un sistema lógico. Conviene entonces ver con mayor detalle la relación entre las metapropiedades de una lógica y la repercusión que ello tiene en relación con sus capacidades expresiva y deductiva.

1.4.3. Relación entre poder expresivo y deductivo respecto de algunos resultados metalógicos

Sabemos que en una lógica se considera un lenguaje formal y una relación abstracta de consecuencia que puede definirse por una vía semántica o por una vía sintáctica. Una pregunta metalógica importante es saber si coinciden la caracterización sintáctica de la relación $\vdash_{\mathscr{L}}$ y la caracterización semántica de la relación $\vDash_{\mathscr{L}}$ con respecto al mismo sistema lógico $\mathscr{L}$. Lo que se quiere saber es si extensionalmente se trata de la misma relación; lo que se pregunta es si el sistema lógico es completo (que todo lo que es consecuencia semántica en el sistema puede ser probado por su cálculo) y correcto (que los teoremas son fórmulas válidas).

[52] Una lógica es decidible si tiene un algoritmo que aplicado a cualquier fórmula del lenguaje del sistema, nos permite saber en un número finito de pasos si la fórmula es válida.

[53] En el siguiente parágrafo (el 1.4.3.) se explica con cierto detalle la completud.

La respuesta afirmativa a la pregunta por la completud implica la verificación de dos teoremas, del teorema de corrección[54] y propiamente el de completud; sin embargo se suele hablar simplemente del teorema de completud, que muestra que el cálculo deductivo es suficiente para:

1. Deducir sin premisas todas las sentencias válidas del lenguaje. Esto es, si $\vDash A$ entonces $\vdash A$.
2. Deducir a partir de un conjunto premisas, todas las consecuencias del conjunto. Es decir, si $\Gamma \vDash A$ entonces $\Gamma \vdash A$.

Al primer caso se le conoce también como completud débil y al segundo como completud fuerte.[55]

La demostración de la completud, junto con otros resultados metalógicos nos permite saber algo más sobre el poder expresivo y deductivo de un sistema lógico. Desde el punto de vista del poder expresivo, el que el sistema sea completo y además tenga otras propiedades como compacidad y Löwenheim-Skolem, impone límites a su poder expresivo, porque esas propiedades le impiden que sea capaz de caracterizar estructuras matemáticas que tengan modelos infinitos, porque la infinita variabilidad de la cardinalidad de los modelos de una teoría dada impide diferenciar cardinalidades infinitas. Entonces, a medida que un sistema tiene más propiedades metalógicas, como ser decidible, completa, compacta y tener Löwenheim-Skolem, su poder expresivo estará más restringido y esas limitaciones en la expresividad, implican que su poder deductivo pueda tener control sobre esa capacidad expresiva. Cuando un sistema lógico, además de ser completo, tiene las propiedades de compacidad y Löwenheim-Skolem, podemos afirmar que se trata de un sistema cuyos poderes, expresivo y deductivo, están en equilibrio. Pero ese equilibrio no es implicado tan sólo por el teorema de completud, es más bien una observación que podemos formular después de tener mayor conocimiento sobre las características y las propiedades que tiene un sistema lógico y de la manera en que afectan a su poder expresivo y a su poder deductivo. Un ejemplo que ilustra que no es suficiente saber que un sistema lógico es completo para saber que además tiene equilibrio en sus capacidades expresivas y deductivas, es pensar en un sistema de lógica proposicional, porque, aunque se trate de un sistema completo, no mantiene el equilibrio entre sus capacidades expresiva y deductiva. Esto es así porque; por un lado, se trata de un sistema con una capacidad expresiva debilitada pues se trata de un sistema lógico que se centra en los conectivos. Pero, por otro lado, su capacidad deductiva es mayor porque

[54] Por el que se afirma que el cálculo es correcto si y solo si para cada conjunto Γ de fórmulas y para cada fórmula α, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \vDash \alpha$. En especial, si $\vdash \alpha$ entonces $\vDash \alpha$, es decir, todas las fórmulas deducibles sin premisas en el cálculo son lógicamente válidas. Mosterín y Torreti [2010; 570].

[55] Para una explicación de las nociones de completud débil y fuerte y su diferencia con completud de una teoría. ver Manzano y Alonso [2014].

se trata del sistema de una lógica que además es decidible. Así entonces, aunque se tenga una lógica correcta y completa, no por ello se tiene, inmediatamente, una lógica que tiene equilibrado su poder expresivo y deductivo.

Además, como señalé antes, por el teorema de Lindström, sabemos que la lógica de primer orden es la lógica que tiene el mayor poder expresivo y al mismo tiempo conserva las propiedades de compacidad y Löwenheim-Skolem, que son los teoremas que marcan límites a su poder expresivo, pero al mismo tiempo son la base de sus múltiples aplicaciones para estudiar teorías y problemas matemáticos. Hay sistemas lógicos más expresivos que la lógica clásica de primer orden, pero necesariamente tendrán menores propiedades lógicas y por eso, en ellos, no se dará un equilibrio entre su poder expresivo y su poder deductivo.

Así como quedó abierto el planteamiento de si es adecuado hablar de capacidad expresiva (de la manera como se entiende desde el planteamiento de Lindström) para el caso de sistemas no clásicos, quedará abierta la pregunta de si la capacidad deductiva deba entenderse de la misma manera para cualquier sistema lógico no clásico.[56] Los sistemas de lógica libre de la propuesta de Leblanc y Thomason [1968], que son mi estudio de caso de sistemas no clásicos, no ofrecen mayor problema en este punto porque son sistemas que tienen definido un cálculo axiomático convencional; no obstante, es importante admitir que el planteamiento está abierto en el caso de sistemas lógicos no clásicos que no tienen un cálculo convencional.

Una nueva pregunta es si además de las nociones de capacidad expresiva y de capacidad deductiva podemos identificar otra capacidad de los sistemas lógicos. Ante este cuestionamiento propongo reconocer que el diseño de un sistema lógico: la selección de sus constantes lógicas[57] y la manera en que impacta en su formalismo, tiene una aportación distinta a la capacidad de caracterizar estructuras (capacidad expresiva) o a la de demostrar teoremas (capacidad deductiva). Propongo entonces identificar una capacidad adicional a las de expresividad y deducibilidad en los sistemas lógicos, capacidad a la que llamo de análisis. En lo que sigue examino los detalles de esta propuesta.

[56] La pregunta es relevante sobre todo tomando en cuenta que hay sistemas lógicos no clásicos que no definen un cálculo deductivo. Por ejemplo, hay sistemas no monotónicos que proponen un cálculo por default. Ver Reiter [1980].

[57] Las constantes lógicas son los símbolos del alfabeto del lenguaje formal que son invariantes respecto a cambios de interpretación, pues siempre se interpretan de la misma manera. El significado de las constantes lógicas está fijado de una vez por todas, al menos mientras mantengamos el lenguaje formal y por tanto la lógica. Mosterín y Torretti [2010; 133].

1.4.4. Capacidad de análisis de los sistemas lógicos

Comprender lo que es la capacidad de análisis demanda tener en cuenta el proceso de creación de un sistema lógico, puesto que en tal proceso, el lógico que lo construye tiene varios retos que enfrentar así como varias decisiones que tomar. Uno de esos retos tiene que ver con la manera de representar las componentes del discurso que examina (del lenguaje en el que se presente) y de las dificultades que en el mismo aparecen. En cuanto a las elecciones a tomar, para cada sistema lógico hay que elegir y definir una serie de constantes lógicas que permitirán representar adecuadamente dicho discurso en el lenguaje formal propuesto.

Así, propongo que la *capacidad de análisis* de una lógica es la aportación que proporciona la elección de dichas constantes lógicas.[58]

La aportación de las constantes lógicas se plasma en la definición de los elementos del sistema: su lenguaje, cálculo y semántica, que es a lo que llamo el *modo de presentación del sistema lógico*. La capacidad de análisis se refiere tanto a la contribución técnica del formalismo del sistema lógico (en el sentido en que técnicamente tenga mayor simpleza, elegancia, eficiencia y eficacia), como a su contribución explicativa o cognitiva (por cuanto el formalismo del sistema recupera y representa mayores sutilezas observadas en las proposiciones, cadenas de razonamiento o teorías estudiadas mediante el sistema lógico).

Lo que afirmo es que la aportación de las constantes lógicas, del modo de interpretarlas, se ve reflejada en la definición del resto de los elementos del sistema. Por ejemplo, en el cálculo, en la forma en que se definen sus axiomas y/o reglas de derivación, o en la semántica en el detalle técnico con el que son definidos sus modelos, la función de interpretación o la noción de satisfacción de fórmulas. De ahí que para estudiar la capacidad de análisis de un sistema lógico hay que estudiar el modo de presentación de su formalismo.

En 1.1. de este primer apartado, señalé que hablamos de un sistema lógico como la unión de un lenguaje formal y un cálculo, de un lenguaje formal y una semántica o bien que contiene al lenguaje formal y tanto un cálculo como una semántica. De acuerdo con la estrategia que fijé para realizar el examen de la capacidad de análisis de un sistema lógico, me concentraré en el estudio de caso de un par de sistemas no clásicos, específicamente

---

[58] En esta tesis, tomo como constantes lógicas a los conectivos y cuantificadores de un sistema lógico. Aunque tengo claro que, como detallo en el siguiente punto 1.4.4.1, es todo un tema de investigación lógica y filosófica determinar no sólo cuáles son los términos que cuentan como constantes lógicas y los que no, sino incluso determinar las zonas fronterizas entre unos y otros.

de dos sistemas de lógica libre de la propuesta de Leblanc y Thomason [1968], y los estudiaré únicamente como sistemas vistos como la unión de un lenguaje formal y una semántica. Esto es, a pesar de que los sistemas de lógica libre que examinaré, también cuentan con un cálculo axiomático (mismo que expongo en los apartados dos y tres), básicamente por motivos de extensión y de delimitación de este estudio, no ahondaré en el estudio de la capacidad de análisis de su cálculo y me centraré exclusivamente en la revisión de su propuesta semántica, que de hecho es en donde encuentro la aportación más significativa de tales sistemas. No obstante, en el apartado final de esta tesis haré una breve reflexión sobre lo que implicaría estudiar la capacidad de análisis de los sistemas de Leblanc y Thomason [1968] entendidos como la unión de un lenguaje formal y un cálculo. Así que, aunque la capacidad de análisis puede estudiarse en sistemas lógicos que tienen tanto una semántica como un cálculo, mi estudio es más modesto y se concentra en los elementos del tipo de la definición de los modelos y de la interpretación de los operadores lógicos de dos sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios.

Antes de dar mayores detalles de la metodología que seguiré para el estudio de caso, me parece pertinente señalar otros dos aspectos generales de la propuesta de reconocer una capacidad de análisis en los sistemas lógicos; en primera instancia, reconocer que hay una relación entre la capacidad de análisis y la práctica lógica de diseñar sistemas lógicos. Y en segundo lugar, marcar la diferencia entre hablar del análisis como una capacidad del sistema y hablar del análisis lógico que se desarrolla al hacer uso del lenguaje formal para realizar procesos de formalización, porque en ese caso se trata más bien de una parte de la capacidad expresiva del sistema lógico.

1.4.4.1. Capacidad de análisis y la práctica de crear sistemas lógicos

En el punto 1.1.2. de este primer apartado, resalté que los sistemas formales son diseñados con el propósito final de estudiar relaciones inferenciales, cadenas de razonamiento, que obedecen el esquema general de premisas y conclusión [$<P_1 \ldots . P_n>$, C] y que se llevan a cabo en diversos contextos discursivos. Adicionalmente he dicho que podemos entender que la capacidad de análisis de un sistema lógico es el resultado de las decisiones que toma el lógico que diseña el sistema. De esa forma, el estudio de la capacidad de análisis de un sistema lógico, abre la puerta al examen del tema de la práctica lógica de crear sistemas lógicos, me refiero al estudio de los criterios que guían las decisiones que toma el lógico que diseña un sistema. Como al decidir cuáles serán las constantes lógicas que empleará y el modo en el que serán interpretadas, lo cual determina el diseño de la semántica y del cálculo del sistema. En ese sentido, una pregunta relevante de responder es ¿cuáles son los aspectos que valora el lógico para determinar cuáles son sus constantes lógicas y cómo interpretarlas?

Hay distintos estudios sobre los criterios para identificar a las constantes lógicas,[59] algunos de ellos reconocen la relevancia de tomar en cuenta los aspectos pragmáticos.[60] Al igual que en el caso de la definición de constantes lógicos, es valioso indagar cuáles son los criterios que guían las decisiones del lógico que crea un sistema para definir el resto de los elementos del formalismo del sistema que crea. Aquí no ahondaré mayormente en la identificación de esos criterios, tan sólo quiero destacar que el interés en seguir generando diversos sistemas lógicos parece tener los mismos dos aspectos que destaca la capacidad de análisis en la forma en que la he expuesto, pues cuando se crea un nuevo sistema se tiene interés, por una parte, en mejorar aspectos técnicos, en relación a lo hecho por otros sistemas lógicos. Por otra parte, se tiene interés en mejorar la manera en que el formalismo del sistema recupera y representa lo que el lógico observa de la realización de las cadenas de razonamiento o de la forma de las proposiciones tal y como ellos son producidos. Esto es, en un primer momento el lógico observa a las cadenas de razonamiento y a las proposiciones en los contextos discursivos en los que se producen y después reconstruye en términos formales lo que observó, en la creación de su sistema lógico.

Deseo resaltar que en la diversidad de sistemas lógicos, en todos los casos, las diferencias técnicas entre ellos, en mayor o menor grado, también serán diferencias en términos explicativos. Pensemos tan sólo en cómo cambia la manera de comprender las relaciones de derivación si son probadas con el sistema Enderton [1972], el de Copi [1979] o el de Smullyan [1968]. Pero, detrás del interés en tener sistemas lógicos que aumenten su capacidad explicativa, especialmente pensando en el paso de sistemas clásicos a sistemas no clásicos, es relevante que sea reflejo del análisis intuitivo que realiza el lógico con respecto a las teorías, proposiciones o cadenas de razonamiento que observa y que aspira a que esté formalmente reflejado en su sistema lógico. Esta diferencia explicativa en la capacidad de análisis de dos sistemas lo podemos ilustrar al comparar el sistema de lógica de primer orden de Enderton [1972] y los sistemas de lógica libre de Leblanc y Thomason [1968], sabiendo que mientras que el primero es adecuado para reflejar relaciones de inferencia deductivas, por ejemplo, al modo en el que se procede en gran parte del

[59] John MacFarlane [2009] sostiene que el trabajo lógico filosófico de determinar las zonas fronterizas entre las expresiones que cuentan como constantes lógicas y las que no, se ha desarrollado básicamente siguiendo dos tendencias: la analítica y la pragmática. El asunto es complejo, pues como nos explican en Gamut [2002; 8] hay lógicas que permiten una clara distinción entre expresiones que sean contantes lógicas y las que no lo son, como en el caso de la lógica proposicional; pero, en cambio, hay lógicas en las que no es clara tal demarcación, como en la lógica modal, puesto que en ese caso las constantes lógicas parecen tener un cierto contenido descriptivo y estar *estrechamente vinculadas con conceptos filosóficos* como necesidad y tiempo.

[60] Sobre una justificación de la relación entre las constantes lógicas y consideraciones pragmáticas, ver Gómez Torrente [2002 y 2007].

razonamiento matemático; en el segundo, se pretende reflejar los presupuestos de existencia respecto de los términos singulares y en el dominio de interpretación para variables.

Sin duda es posible y deseable profundizar en la práctica de crear sistemas lógicos, pero para los fines de esta investigación, lo importante es notar que ahondar en el tema del modo de presentación de los sistemas lógicos y de su capacidad de análisis, nos comunica con naturalidad a las acciones de la práctica de crear sistemas lógicos, que es un tema sobre el que importa seguir trabajando para identificar mejor los aspectos que intervienen en el diseño y concreción de un sistema lógico.[61] Lo dicho hasta aquí tiene simplemente el propósito de hacer notar la relevancia de realizar una investigación independiente sobre la práctica de crear sistemas lógicos, que aquí apenas he delineado.

Para terminar de precisar la noción capacidad de análisis de los sistemas lógicos, es importante especificar la diferencia entre hablar de la capacidad de análisis del sistema y hablar del análisis lógico que se produce en la aplicación del sistema lógico. Sobre todo porque, en ese último caso, hablamos más bien de parte de la capacidad expresiva del sistema.

1.4.4.2. Diferencia entre capacidad de análisis de un sistema lógico y el análisis lógico del lenguaje formal

El proceso de formalización en lógica, supone el ejercicio de emplear el lenguaje formal del sistema lógico para pasar de las sentencias presentadas en un lenguaje no lógico, a que sean sentencias del lenguaje del sistema lógico. Lo que es lo mismo que establecer la forma lógica de tales sentencias. Tal como planteé en 1.4.1., el objetivo primordial de la formalización es llegar a la axiomatización de teorías, al menos es así desde el punto de vista clásico. Tal ejercicio de formalización comúnmente es entendido como el producto de un análisis lógico, pero en ese caso de lo que se habla es del ejercicio del poder expresivo del sistema.

El análisis lógico es la práctica de traducir sentencias, del lenguaje en el que son expresadas al lenguaje lógico, con lo cual se hace el trabajo de abstraer el contenido y mostrar la forma lógica de tales sentencias; en ese caso el proceso de análisis es dependiente de la capacidad expresiva del sistema. En cambio, la capacidad de análisis de

[61] Como procesos de análisis (intuitivos y técnicos), un uso creativo de los conocimientos técnicos formales, que permita la mejor recuperación de las consideraciones pragmáticas de los contextos discursivos en donde se producen las relaciones inferenciales que deseamos estudiar con el sistema lógico que se crea. Pero también valorar el peso de la carga teórico-filosófica del lógico que diseña un sistema lógico.

un sistema no tiene que ver únicamente con la capacidad expresiva de un sistema lógico, sino que es la aportación de las constantes lógicas del sistema, que se refleja en términos de la simpleza o eficiencia técnica del sistema, así como en la contribución explicativa de la manera en que el sistema lógico recupera mayores sutilezas observadas en las proposiciones y en las cadenas de razonamiento que son estudiadas a través de él.

Es importante tener presente que en lo general el análisis es una actividad intelectual que incluye distintos procesos[62] y que puede desarrollarse desde distintos niveles de abstracción. Pero, también es fundamental apreciar que la capacidad de análisis de un sistema lógico específico, tiene un cierto alcance, en el sentido de que un sistema lógico puede presentar en términos formales determinadas maneras de presentar y explicar la producción de derivaciones o relaciones de consecuencia semántica. Es por eso que el interés en que un sistema lógico perfeccione la capacidad de análisis logrado por otro, es una motivación para seguir trabajando en nuevos sistemas lógicos. Y esto mismo explica por qué, para poder justificar apropiadamente el reconocimiento de la capacidad de análisis de un sistema lógico, es preciso examinarla en los sistemas lógicos específicos.

Pero ¿cómo se puede estudiar la capacidad de análisis de un sistema lógico específico? Tomando en cuenta que la capacidad de análisis se manifiesta en el modo de presentación del sistema, estudiarla y comprenderla mejor es tanto como estudiar y comprender mejor el modo de presentación del sistema. Es por eso que en esta investigación me dedico a desarrollar un estudio de caso de un par de sistemas de lógica libre, únicamente entendidos como la unión de un lenguaje formal y la definición de su semántica. Por cuanto la capacidad de análisis está presente en el modo de presentación del formalismo del sistema, el estudio se centrará en conocer a detalle las características técnicas de la definición de la semántica de dos dominios de la propuesta de Leblanc y Thomason. La estrategia consiste en apoyarme de una parte de una metodología de traducción entre

[62] Michael Beaney [2009] en su estudio sobre el análisis destaca tres maneras en las que se ha desarrollado el análisis en la filosofía. Me parece adecuado ver esas tres maneras de entender el análisis en filosofía como tres procesos presentes en cada acto de análisis y que en particular están presentes en procesos de análisis intuitivo. Beaney habla de lo que entiendo como procesos de: descomposición, regresión y transformación. La descomposición consiste en desarticular los elementos que integran a las partes de un todo. La regresión tiene que ver con el procedimiento para plantear y resolver problemas realizando un camino a la inversa o de regreso, esto es, se parte del supuesto de que está dado lo que se busca y en el camino hacia atrás se ensaya la aplicación de principios o teoremas conocidos hasta llegar a la solución. (Sobre ello también ver Aliseda [2011; 293,294]). Por último en la transformación se expresa formas generales a través de signos, como se consigue con la introducción de la noción de variable, gracias a la cual fue posible un cálculo más abstracto. (Sobre este último también ver Barceló [2004; 13-14]). Para Beaney los tres momentos del análisis no deben ser vistos como rivales, puesto que las prácticas reales del análisis, son siempre más ricas y estos tres procesos se pueden ver reflejados, aunque en diferentes grados o en diferentes formas. Hago esta referencia a la manera en que Beaney explica el análisis tan sólo para dejar constancia de la complejidad detrás de realizar análisis (a nivel intuitivo o más teórico).

lógicas, que además permitirá hacer una comparación entre la capacidad de análisis de los sistemas de lógica libre que definen una semántica y la capacidad de análisis de la semántica de la lógica clásica, que es a la que tomaré como lógica marco en la traducción. A continuación presento la metodología que seguiré en el resto de la investigación.

1.5. Identificación de la capacidad de análisis lógico con el respaldo de la metodología de traducción entre lógicas

Hay distintas maneras de entender lo que es la traducción dentro del marco de la lógica formal,[63] pero aquí únicamente hablaré de traducción entre sistemas lógicos. Desde hace décadas se han propuesto procedimientos para efectuar traducciones entre lógicas con distintos fines, como verificar algunas propiedades de los sistemas que se traducen como la consistencia, validez, corrección o completud; o como método para la revisión detallada de un grupo particular de lógicas, como las lógicas modales, las no monotónicas o para la revisión de casi cualquier lógica, para estudiar su relación de consecuencia sintáctica, su cálculo o su aparato semántico. Existen diferentes propuestas metodológicas, entre ellas: van Benthem [1986], Meseguer [1989], Gabbay [1994], Manzano [1996].

A pesar de que no hay un acuerdo en lo que sea la traducción entre lógicas,[64] las metodologías mencionadas se han ofrecido con resultados específicos. Ante ese hecho es pertinente preguntar con respecto a la aplicación de las metodologías de traducción, ¿qué es lo se preserva del sistema lógico traducido y qué es modificado o eliminado? O más específicamente, pensando en aplicar una metodología de traducción como una vía para observar lo que pasa con la capacidad de análisis de los sistemas involucrados en la traducción, ¿la capacidad de análisis puede ser observada en un proceso de traducción?

Lo que propongo es la aplicación de una parte de una de las metodologías de traducción entre lógicas, específicamente la metodología propuesta por María Manzano [1996], que es una metodología de traducción centrada en la semántica de los sistemas lógicos, por lo cual resulta ideal para el estudio de los dos sistemas de lógica libre, que son mi estudio de caso de sistemas no clásicos, y que estudiaré como la definición de un lenguaje formal y una semántica. La propuesta es aplicar una parte de la metodología de traducción de corte semántico, al nivel más elemental de esa metodología de traducción, dirigido

---

[63] Como al usar un lenguaje diferente (por ejemplo, eliminar los functores usando sólo relatores) y ver que hay una correspondencia deductiva. También se puede hablar de traducción de una lógica a un código numérico o de otro tipo, como ocurre, por ejemplo, para los teoremas de incompletud de Gödel. Pero la única traducción que interesa aquí es la traducción entre lógicas, no obstante reconozco que hay una investigación en proceso sobre la valoración de los métodos e implicaciones de la traducción entre lógicas.

[64] Sobre un recuento detallado de distintos tipos de traducción ver Coniglio [2005] o Carnielli, Coniglio y D'Ottaviano, [2009].

solamente a establecer la equivalencia entre la verdad de una fórmula en un modelo y la de su traducción al modelo convertido. Porque ese procedimiento de traducción nos demanda comprender con detalle el formalismo del lenguaje y de la semántica de la lógica de los sistemas que se traducen. En lo que sigue explico en qué consiste la metodología de traducción que usaré.

1.5.1. Metodología de traducción para la demostración de un lema de representación.

En los siguientes dos apartados de esta investigación estudiaré dos sistemas de lógica libre (tomados de los sistemas propuestos en Leblanc y Thomason [1968]) con el objetivo de aplicar una propuesta similar a la primera parte de la metodología de traducción de María Manzano [1996] y verificar, lo que desde la terminología de la metodología de Manzano se conoce como un lema de representación. En realidad la propuesta metodológica de Manzano [1996] es bastante más amplia de lo que presento en esta tesis, a continuación doy detalles sobre la propuesta original, sobre la parte que aplicaré y sobre los cambios que realizo respecto de la metodología original.

El método de traducción propuesto por María Manzano corresponde a una noción fuerte de traducción, puesto que no se limita a la definición de una función de traducción entre las fórmulas de las lógicas consideradas, sino que se encamina a probar distintos teoremas que afirman la equivalencia entre la noción de validez en la lógica que está siendo traducida (en sus modelos característicos) y la noción de validez de las sentencias ya traducidas, en la clase restringida formada por los modelos de la lógica marco obtenidos por conversión de los modelos de la lógica original. Además, la propuesta incluye la posibilidad de probar la equivalencia de las correspondientes nociones de consecuencia, hasta llegar a probar la completud de la lógica traducida usando la completud de la lógica marco y los lemas obtenidos en el proceso de traducción. Se alcanza ese último nivel de traducción sólo si así lo permiten las características de la lógica que se traduce. En esta tesis aplico tan sólo la parte inicial de la metodología de traducción de Manzano [1996][65] y

[65] Presentaré "una" manera de definir las funciones de traducción, pero en realidad hay más de una manera posible de hacerlo. Básicamente hay dos motivos por los cuales puede variar una traducción entre lógicas: uno, al variar la metodología de traducción; por ejemplo la de Manzano [1996] tiene una orientación modelo teórica, mientras que Gabbay [1994] el tratamiento es de tipo sintáctico. El segundo motivo, está en que, aunque se emplee una única metodología de traducción, el resultado puede variar dependiendo de las decisiones que toma el traductor, prácticamente al modo en el que ocurre en las traducciones entre idiomas del lenguaje natural. No obstante, la garantía de que la propuesta de traducción es operativa la obtenemos al comprobarla mediante una demonstración por inducción matemática.

contemplaré a los sistemas de lógica libre a traducir únicamente como constituidos por un lenguaje formal y una semántica.[66]

Mi propuesta es que, para cumplir el propósito de estudiar la capacidad de análisis de las lógicas presentes en un proceso de traducción, es suficiente con la demostración del lema al que Manzano llama de representación, por el que se demuestra que para cualquier estructura de la lógica en estudio (LE) hay una estructura de la lógica marco en la traducción,[67] en la que cualquier fórmula de LE es verdadera en su estructura original si su traducción es verdadera en la estructura correspondiente de la lógica marco, usando las asignaciones pertinentes.

Para mi estudio de caso me limitaré a la demostración del lema de representación porque implica el estudio detallado del modo de presentación de los sistemas involucrados en la traducción; puesto que se revisa con detalle la definición de su lenguaje y de su semántica. Para comprender este procedimiento con mayor cuidado, es preciso conocer más detalles del procedimiento para demostrar el lema de representación.

Para demostrar el lema de representación se requiere definir una función de conversión (Conv) para las estructuras y una función recursiva de traducción (Trad) para fórmulas. Ambas funciones han de definirse para una lógica particular, en la cual se considera una cantidad específica de constantes, functores y relatores de una aridad determinada; es decir, de una signatura particular. La función de conversión de estructuras (Conv) toma estructuras de la lógica en estudio (LE) y las convierte en estructuras de la lógica marco. Esto es:

$$\text{Conv: Est(LE)} \rightarrow \text{Est(LCPO)}$$
$$\text{En particular, } \mathcal{M} \mapsto \text{Conv(M)}$$

La función Trad toma a las expresiones de la lógica en estudio (LE) y las traduce en expresiones de la lógica marco (LCPO). Esto es:

$$\text{Trad: Expr(LE)} \rightarrow \text{Expr(LCPO)}$$
$$\text{De cada, } \mathcal{E} \mapsto \text{Trad}(\mathcal{E})$$

[66] Empleando la metodología de Manzano [1996] también es posible ver lo que ocurre con la parte sintáctica del sistema lógico, pero para ello habría que continuar todos los niveles de traducción o aplicar una metodología de traducción centrada en la sintaxis. Pero para este estudio mi objetivo es simplemente evidenciar la capacidad de análisis de las lógicas involucradas en la traducción y entendiendo a los sistemas como la definición de un lenguaje formal y de su semántica.

[67] En la propuesta original de Manzano [1996] plantea como lógica marco a la lógica multivariada, pero en mi caso no requiero tipos de variables, así que basta con una lógica univariada, esto es, con una lógica clásica de primer orden. Esa es la principal modificación que realizo de la propuesta original de Manzano.

Es importante tomar en cuenta que cuando estamos considerando no sólo sentencias de LE, sino también fórmulas de LE, que pueden ser abiertas, al hablar de la estructura $\mathcal{M}\in$Est(LE), tiene que definirse una función g de asignación de valores para las variables de las fórmulas libres en LE y que en la Conv($\mathcal{M}$)∈Est(LCPO) actuará una función g*, que asignará valores para las variables de las fórmulas libres convertidas. Entonces, para efectuar la traducción se tendrá que definir la función g*. Además es importante resaltar que la demostración de la equivalencia se da entre la verdad de una fórmula cualquiera en los modelos de la lógica que se traduce y la de su traducción en los modelos que resultan de la conversión; dichos modelos son sólo una clase particular de los modelos de la lógica marco: la clase de los modelos convertidos. Por lo tanto, no se habla de todas las estructuras de la lógica marco, sino sólo de una clase de estructuras que es la que contiene a las estructuras obtenidas mediante la conversión.

Así entonces el objetivo es demostrar que:
Para cada fórmula φ de LE: $\mathcal{M}\vDash_{g} \varphi^{LE}$ syss $\mathcal{M}^{*}\vDash_{g^{*}}$Trad($\varphi$) de LCPO.

Es conveniente subrayar que la demostración del lema de representación es apenas el primer peldaño dentro del primer nivel de la metodología de traducción de Manzano [1996], en el que el objetivo, de todo el primer nivel, es llegar a un teorema de representación que afirma la equivalencia entre la noción de validez de la lógica que se traduce y la clase de estructuras a la que fue traducida. Pero el lema de representación es más débil, porque sólo afirma que hay una equivalencia entre la verdad de una sentencia cualquiera en los modelos de la lógica de estudio y la de su traducción en una clase restringida de estructuras de la lógica marco, que es justamente la clase obtenida mediante la función de conversión a LCPO. En cambio, probar el teorema de representación exigiría, además de probar el lema de representación, probar que la validez de las fórmulas originales corresponde a la validez de las fórmulas traducidas en la clase de estructuras obtenidas por la conversión. En donde, de nueva cuenta, no nos referimos al conjunto total de las estructuras de la lógica marco, sino tan sólo a la clase de estructuras convertidas.

En los dos siguientes pasajes de esta tesis sólo probaré el lema de representación de la traducción de dos de los sistemas de lógica libre de Leblanc y Thomason a lógica clásica, vistos únicamente como la definición de un lenguaje y su semántica. En tanto que la capacidad de análisis depende del modo de presentación del formalismo del sistema, ya podemos prever que la capacidad de análisis de los sistemas de Leblanc y Thomason es transformada en el proceso de traducción, ya que la definición de las funciones de conversión de estructuras y de traducción de fórmulas, implica la transformación del formalismo de los sistemas originales (sistemas de lógica libre de la propuesta de Leblanc y Thomason), al de la lógica marco en la traducción (lógica clásica de primer orden). No obstante, la definición de la función Trad para la traducción fórmulas y de la función Conv para la conversión de estructuras nos permitirá apreciar la transición entre la capacidad de análisis del sistema lógico original, a la capacidad de análisis de la lógica marco en la traducción. Entonces, por cuanto la capacidad de análisis de un sistema lógico es dependiente del modo de presentación del sistema lógico, realizar la traducción entre lógicas nos permite estudiar la capacidad de análisis de los sistemas lógicos involucrados en la traducción y nos permitirá extraer conclusiones con respecto a las diferencias en los modos de presentación de los sistemas lógicos sobre los cuales se efectúa la traducción.

Ahora bien, no afirmo que sea necesario aplicar la metodología de traducción entre lógicas para reconocer la capacidad de análisis de un sistema lógico; puesto que podría ser suficiente con el estudio directo de las definiciones formales del lenguaje formal, el cálculo o la semántica de un sistema lógico. Pero si ese estudio no se realiza de manera metódica, el acercamiento a tales definiciones, puede ser deficiente, porque no es sencillo determinar la revisión de las definiciones fue exhaustiva. Es por eso que propongo la aplicación de la metodología de traducción, como una vía más rigurosa y objetiva de realizar ese examen. Además, estudiar la capacidad de análisis de los sistemas de lógica libre seleccionados por medio de la aplicación de una metodología de traducción, al mismo tiempo nos permite comparar informalmente[68] la capacidad de análisis de los sistemas libres con la capacidad de análisis de la lógica clásica. Entonces, no aplico la metodología de traducción entre lógicas esperando que la demostración del lema de representación contenga a la capacidad de análisis lógico; de hecho, por cuanto la capacidad de análisis es dependiente del modo de presentación del sistema, no puede permanecer al procedimiento de traducción y por eso mismo, permite la comparación con la capacidad de análisis de la lógica marco en la traducción. No obstante, en tanto que la traducción preservar la noción de satisfacción del sistema lógico original, debe realizarse un estudio detallado tanto del formalismo de la lógica que se traduce como del de la lógica que es marco en la traducción. Esa necesidad de comprender con todo detalle los formalismos de ambos sistemas involucrados en el proceso de traducción es el que me

[68] En 4.2.1 y 4.2.2 del apartado final de esta tesis presento una comparación informal de la capacidad de análisis de los sistemas lógicos involucrados en la traducción de mi estudio de caso. Se trata de una comparación informal porque no estará basada en un criterio formal para realizar la comparación (como el que presenté en 1.4.1.1. de la propuesta de Lindström para comprar la capacidad expresiva de dos sistemas lógicos). Para fijar un criterio formal para comparar capacidad de análisis hace falta definir con precisión el tipo de sistema lógico sobre los que se estará haciendo la comparación, así como definir formalmente las propiedades respecto de las cuales se efectuará la comparación. Con respecto a la posibilidad de fijar un criterio formal para comparar capacidades de análisis de distintos sistemas lógicos, en el punto 4.3.1. del apartado final de este estudio, amplío un poco más el comentario que hago aquí.

lleva a proponer al procedimiento de traducción entre lógicas como un recurso metodológico riguroso del modo de presentación del formalismo de los sistemas que se traducen y por eso mismo, permite observar su capacidad de análisis. Adicionalmente, contar con una demostración inductiva del lema de representación, demuestra que la traducción (al menos dirigida a establecer la equivalencia entre la verdad de una fórmula en el modelo original y la de su traducción al modelo convertido) es operativa, y significará, para los fines de esta investigación, la prueba de que se hizo una revisión exhaustiva de la capacidad de análisis lógico del sistema lógico que se tradujo.

En el siguiente apartado presento al primero de los sistemas de Leblanc y Thomason que estudio, al que llamo de lógica libre con interpretación total (LLIT), y la demostración de su lema de representación.

SEGUNDA PARTE

Apartado 2

Sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios: El sistema de lógica libre con interpretación total

2.1. Semántica de dos dominios en la propuesta de Leblanc y Thomason

En 1968, Hugues Leblanc y Richmond H. Thomason publican, en *Fundamenta Mathematicae*, su artículo "Completeness theorems for some presuppositions-free logics" en el que no se limitan a presentar la prueba de completud de un sistema de lógica libre sino que lo hacen para diez sistemas diferentes. Al plantear todo un espectro de posibles sistemas de lógica libre resaltan dos aspectos de su trabajo. Por una parte, un deseo de ofrecer un tratamiento semántico que dé cuenta de las más comunes intuiciones con respecto a la interpretación que podemos otorgar a sentencias que contienen términos no denotativos (aquellos que no denotan en absoluto o que remiten a entidades ficticias) y, por otra parte; que desean apartarse de motivaciones teóricas o filosóficas específicas y que desean concentrarse en explorar posibilidades técnicas. En su artículo plantean una semántica de dos dominios; es decir, además del dominio de interpretación convencional, al que identificarán como dominio interior, conciben un nuevo dominio en la estructura, al que identifican como dominio exterior. Sobre el dominio interior cobran valor las constantes denotativas así como las variables cuantificadas. Por dicha razón las constantes denotativas satisfacen la predicación de existencia.[69] Dicho dominio interior es bastante similar al dominio convencional, excepto porque puede ser vacío. En el dominio exterior, cobrarán valor las constantes no denotativas, pero no es un dominio sobre el que correrán los cuantificadores.[70] La propuesta de Leblanc y Thomason está completamente comprometida con la bivalencia y llama la atención también porque, en algunos de los sistemas que proponen, incluyen términos no denotativos que no cobran valor en ninguno de los dos dominios. La idea intuitiva es que se trata de nombres carentes absolutamente de significado.

He seleccionado dos de los sistemas de Leblanc y Thomason y con la finalidad de proporcionar una rápida visión general de los sistemas que se estudiarán con detalle,

---

[69] Para la constante denotativa c la predicación de existencia puede introducirse mediante la sentencia $\exists x(x=c)$.

[70] Al menos no es así en la propuesta de Leblanc y Thomason, en otras propuestas de semántica con dos dominios lo que se hace es usar dos tipos de cuantificación.

destaco a continuación una breve presentación de los elementos distintivos de los dos sistemas seleccionados.

2.1.1. Sistemas de lógica libre de Leblanc y Thomason

Al primero de los sistemas lo identifico como sistema de lógica libre con interpretación total (LLIT).[71] Este sistema, además de los términos singulares convencionales, incluye términos singulares no denotativos, -que no satisfacen la predicación de existencia-. Además emplea una interpretación total, que enfatiza el hecho de que interpreta a cada uno de los términos presentes en el sistema y que se conjuga con el empleo de una noción de satisfacción convencional. Como el resto de los sistemas de lógica libre de la propuesta de Leblanc y Thomason, contempla dos dominios que son disjuntos, aunque alguno de ellos sí puede ser vacío. Por último, los cuantificadores solo corren respecto del dominio interior.

El segundo de los sistemas lo identificaré como sistema de lógica libre positiva con interpretación parcial (LLPIP).[72] La diferencia con el sistema LLIT radica en que además admite términos singulares que no denotan en ninguno de los dos dominios, por tanto requiere una interpretación parcial, que dejará sin interpretación a las fórmulas que contengan a algún elemento de esa clase particular de constantes. Pero como se trata de un sistema bivalente, empleará un tipo especial de satisfacción, llamada satisfacción$_V$, que siempre otorga valor de verdad verdadero para esas fórmulas que estaban sin interpretación, por contener constantes que no denotan en absoluto.[73]

Los restantes ocho sistemas de lógica libre propuestos por Leblanc y Thomason se distinguen de los dos que examinaré, en que varían respecto a si alguno de los dos dominios con los que trabaja la semántica pude ser vacío o no y respecto del valor de verdad que adquieren las fórmulas que contienen términos singulares que no denotan en ninguno de los dos dominios de interpretación.[74]

---

[71] Leblanc y Thomason [1968] llaman QC^2 a este sistema.

[72] Leblanc y Thomason [1968] llaman c- QC^6 a este sistema.

[73] Entre sus sistemas, Leblanc y Thomason contemplan un sistema casi idéntico a LLPIP, excepto porque tendría una satisfacción$_F$ que siempre otorga el valor de falso a las fórmulas que contienen las constantes que no adquieren valores en ninguno de los dos dominios. Se trata de un sistema de lógica libre negativa con interpretación parcial, por sus siglas LLNIP.

[74] En el total de los diez sistemas de la propuesta de Leblanc y Thomason, el sistema LLIT tiene una variante, y el sistema LLPIP tienen tres variantes más que cubren toda la combinatoria de la posibilidad de admitir que cualquiera de los dos dominios sea o no vacío. Por último, la opción de sistema que es casi idéntica a LLPIP, pero que en lugar de tener una satisfacción$_V$, tiene una satisfacción$_F$, que vendría ser un sistema de lógica libre negativa con interpretación parcial (LLNIP), también tiene tres variantes más que sólo se distinguen entre sí al variar la posibilidad de que cualquiera de sus dominios sea o no vacío. De ese modo Leblanc y Thomason ofrecen diez sistemas lógicos de lógica libre con semántica de dos dominios.

A continuación, ofrezco la presentación detallada del lenguaje formal de primer orden al que haré referencia para los dos sistemas de lógica libre con los que trabajaré. Posteriormente, presentaré la semántica, el cálculo y la traducción del sistema LLIT. Vale la pena recordar que la estrategia de investigación que sigo, consiste en realizar una traducción de los sistemas de lógica libre con dos dominios a lógica clásica de primer orden, con el objetivo de alcanzar la demostración inductiva de un lema de representación.[75]

2.2. Lenguaje formal para sistemas de Lógica Libre (LL)

Signos

Conectivas:= $\neg$, $\rightarrow$

Cuantificador universal: $\forall$

Igualdad: =

Símbolos de puntuación: (,)

Variables (Var):= $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ [76]

Predicados (Pred) es un subconjunto de $\{P_n^{(m)} / n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}\}$[77]

Constantes individuales (Const) está contenido en $\{c_n / n \in \mathbb{N}\}$

Formación de Términos y Fórmulas

Términos

El conjunto de los términos de LL (Term (LL)) está formado por las variables y constantes individuales. Term (LL)= Var $\cup$ Const

Fórmulas

El conjunto de las fórmulas de LL (Form (LL)) es el menor conjunto que se puede generar a partir de las reglas siguientes:

Paso Básico

(F1) Si $\tau_1,\ldots,\tau_n$ son términos, $P^n\, \tau_1\ldots\tau_n$ es una fórmula; en especial:

Si, τ_1 y τ_2 son términos, $\tau_1=\tau_2$ es una fórmula.

Pasos Inductivos

(F2) Si φ y ψ son fórmulas, también lo son: $(\neg\varphi)$ y $(\varphi \rightarrow \psi)$

[75] Téngase presente que, el lema de representación nos permite verificar que para cualquier estructura de LLIT, hay una estructura de Lógica Clásica de Primer Orden (LCPO), en la que cualquier fórmula de LLIT es verdadera en su estructura original, si su traducción es verdadera en la estructura correspondiente de LCPO, usando asignaciones pertinentes g y g*.

[76] Con la finalidad de simplificar la expresión, en lo siguiente, evitaré la referencia a los subíndices de las variables y usaré las últimas letras minúsculas del alfabeto latino x, y, z.

[77] Tal que m indica la aridad del predicado y n es un índice.

(F3) Si φ es una fórmula y $x \in Var$, también lo es $(\forall x\ \varphi)$

Llamo expresiones de LL al conjunto formado por los términos y las fórmulas de LL:

Expr (LL) = Term(LL) ∪ Form(LL)

Observación

Tal y como hemos definido el conjunto de fórmulas como el menor conjunto que cumple las reglas F1 a F3, si en un conjunto Q de secuencias de símbolos del lenguaje están todas las fórmulas obtenidas conforme a la regla F1 y es cerrado bajo las operaciones descritas en F2 y F3, entonces Form (LL) ⊆ Q.

Introducción de otros signos lógicos por definición

Para añadir el uso de otros conectores, del cuantificador existencial y el predicado especial de existencia, lo haremos con base en las siguientes definiciones:

$(\varphi \wedge \psi) :=_{Df} \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$

$(\varphi \vee B) :=_{Df} (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

$(\varphi \equiv B) :=_{Df} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

$(\exists x\ \varphi) :=_{Df} \neg(\forall x\ \neg\varphi)$

$$E!\tau :=_{Df} \begin{cases} \exists x\ \ x=\tau\ ,\ \text{si } \tau \neq x \\ \exists y\ \ y=\tau,\ \text{si } \tau = x \end{cases}$$

Sobre variables ligadas y libres

LBR es una función que a cada término y a cada fórmula le asigna un conjunto de variables, el de las que están libres en él.

$Lbr(x)=\{x\}$

$Lbr(c)= \emptyset$

$Lbr(P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n) = Lbr\ (\tau_1) \cup \ldots \cup Lbr\ (\tau_n)$

$Lbr\ (\tau_1=\tau_2)= Lbr\ (\tau_1) \cup Lbr\ (\tau_2)$

$Lbr\ (\neg\varphi)= Lbr\ (\varphi)$

$Lbr\ (\varphi \rightarrow \psi)= Lbr\ (\varphi) \cup Lbr(\psi)$

$Lbr\ (\forall x \varphi)= Lbr(\varphi)-\{x\}$

Observaciones

(1) Los términos sin variables libres se llamarán términos cerrados o designadores.

(2) Una ocurrencia de x en φ es ligada si está en el alcance de algún cuantificador y es libre en el caso contrario; sin embargo, una misma variable puede estar libre y ligada en una fórmula. Por ejemplo, R*xy*→∀*y*S*y*, en la primera ocurrencia de *y* es libre y en la segunda es ligada.

Fórmulas atómicas, abiertas y cerradas

Sea φ una fórmula de LL.

(a) Si φ se obtiene al aplicar la regla F1 de formación de fórmulas, entonces φ se llama atómica.

(b) Si ninguna variable individual de LL ocurre libre en φ, entonces se dice que φ es cerrada; de otra manera es abierta. A una fórmula φ cerrada también se le llama sentencia.

Sustitución entre términos constantes y variables

En el metalenguaje se usan dos tipos de operadores de sustitución que abreviamos como $\delta(t/x)$ y $\delta(\tau_2//\tau_1)$.

La definición recursiva de la sustitución de una variable por un término $\delta(t/x)$ en una expresión es como sigue:

- $z\,(t/x) = t$, si $x = z$, en caso contrario, z.
- $(P^n \tau_{1\dots}\,\tau_n)\,(t/x) = P^n\,(\tau_1)\,(t/x)\,\dots\,(\tau_n)\,(t/x)$
- $(\tau_1 = \tau_2)\,(t/x) = (\tau_1)\,(t/x) = (\tau_2)\,(t/x)$
- $(\neg\varphi)\,(t/x) = \neg\,(\varphi\,(t/x))$
- $(\varphi \rightarrow \psi)\,(t/x) = (\varphi)\,(t/x) \rightarrow (\psi)\,(t/x)$
- $$(\forall zA)\,(t/x)\begin{cases} \text{Caso 1. } \forall zA \text{ si } x \notin LBR\,(\forall z\,\varphi) \\ \text{Caso 2. } \forall z\,(\varphi)\,(t/x) \text{ si } \begin{cases} x \in Lbr\,(\forall z\,\varphi) \\ z \notin Lbr\,(t) \end{cases} \\ \text{Caso 3. } \forall v\,(((\varphi)\,(v/z))\,(t/x)) \text{ si } z \in \begin{cases} x \in Lbr\,(\forall z\,\varphi) \\ Lbr\,(t) \\ v \text{ es una variable nueva} \end{cases} \end{cases}$$

Para el caso de la sustitución tipo $\delta(\tau_2//\tau_1)$, informalmente decimos que $\delta(t2//t1)$ es el resultado de reemplazar en δ alguna ocurrencia de t1 , pero no necesariamente todas, por t2.

Observación

Cuando t sea un término cerrado y x pertenece Lbr (δ), se escribe $\delta(t)$ en vez de $(\delta(t/x))$

2.3. Semántica de dos dominios para el sistema de lógica libre con interpretación total (LLIT)

Este sistema emplea una interpretación total, que es una función que asigna a cada elemento de Const un elemento del dominio interior (D) o del dominio exterior (D’). Además, es una función que asigna a cada predicado n-ario de Pred, un subconjunto del producto cartesiano n-ario de $D \cup D'$. La función de interpretación es total porque asigna a todas las constantes un valor.

Definición de Modelo de LLIT

Un modelo del sistema libre con interpretación total es una tripleta $\mathcal{M}$=<D,D′,I> donde D y D' cumplen lo que sigue: $D \cap D' = \emptyset$, D o D' pueden ser vacíos, pero $D \cup D' \neq \emptyset$.

Definición de Función de interpretación total *I* para LLIT

I es una función tal que I: Pred $\cup$Const$\rightarrow \bigcup_{(n \in \mathbb{N})} \wp((D \cup D')^n) \cup (D \cup D'))$ donde

$I(P^n) \in \wp((D \cup D')^n)$

$I(c) \in D \cup D'$

Definición de Función g para variables

Hay que distinguir dos casos:

1. $D \neq \emptyset$. En este caso se define una función que a cada variable le asigna valores en el dominio interior, g:Var $\rightarrow$ D, de forma que $g(x) \in D$
2. $D = \emptyset$. No se puede definir la función g, pero seguimos usando la notación g(x). No se cumplirá que $g(x) \in D$; en este caso g(x) queda indefinido.

Definición de Asignación x-variante de una asignación g

Dada una asignación g y una variable x ($x \in$Var) se denomina asignación x-variante de g a toda asignación g' que coincida con la asignación g en todo, excepto, tal vez, en el valor de la variable x.

Definición de Interpretación

Dado un modelo $\mathcal{M}$ y una asignación g, denominamos interpretación a la tupla formada por ambos, **Int**= <$\mathcal{M}$,g>. Dicha tupla contiene la interpretación de los términos y predicados del lenguaje y se extiende para definir la satisfacción de las fórmulas del lenguaje.[78]

Usando dicha interpretación a los términos y predicados del lenguaje les corresponderán, respectivamente, individuos de alguno de los dominios de la estructura o subconjuntos del producto cartesiano n-ario de la unión entre el dominio interior y el dominio exterior. La única excepción la constituyen las variables, en el caso en el que el dominio interior sea vacío. Por su parte, cada fórmula es satisfecha o no en la interpretación, incluso en el caso en el que las variables carezcan de interpretación.

[78] Aunque se presente el caso en el que el dominio interior sea vacío y no haya función g, se mantiene la notación Int.

Función Int para Variables, Constantes y Predicados

A partir de la función *I* de asignación a constantes y predicados y de la función g de asignación a variables, definimos una función de interpretación Int que asigna valores para variables, constantes y predicados.

La función Int asigna a las variables valores exclusivamente del dominio interior; a las constantes, les asigna valores de la unión entre el dominio interior y el dominio exterior y a los predicados n-arios les asigna un subconjunto del producto cartesiano n-ario de la unión entre el dominio interior y el dominio exterior.

Si x ∈ Var, Int(x) = g(x). Cuando el dominio interior sea distinto de vacío, la interpretación de la variable designará un elemento de dicho dominio, cuando sea vacío no designará ningún objeto.

1. Si c ∈ Const, Int (c)= *I*(c)
2. Si P ∈ Pred, Int (P)= *I*(P)

Observaciones

(1) Aunque formalmente Int, como función para variables, constantes y predicados, es distinta de **Int**= <$\mathcal{M}$,g>, se usará simplemente Int para ambas. Así se escribirán expresiones como "sea Int= <$\mathcal{M}$,g>, entonces Int(x)=g(x)".

(2) Dado que g es una función que asigna valores en D, cuando *I*(c) ∈ D podemos decir que c designa el valor de una variable. En cambio, si *I*(c) ∈ D', c no designa un valor de variable, puesto que la función g no asigna valores en D'.

(3) Cuando D=ø las variables no reciben interpretación ninguna. No obstante, las fórmulas abiertas recibirán interpretación, serán verdaderas.

(4) Decimos que la interpretación Int'= <$\mathcal{M}$,g'> es x-variante de la Int= <$\mathcal{M}$,g> si está basada en una asignación g' que es una x-variante de la asignación g.

Definición de Satisfacción de Fórmulas en LLIT

Sea $\mathcal{M}$ = <D,D',I> un modelo para LLIT y g una asignación. La función de interpretación Int=<$\mathcal{M}$,g> se extenderá para que determine si las fórmulas de LLIT son satisfacibles o no lo son. La definición recursiva de satisfacción se basa en la construcción de fórmulas distinguiendo los casos en que el dominio interior es distinto de vacío o si es igual vacío.

Caso 1: Cuando el Dominio interior D es distinto de vacío.

1.1. Int satisface $P^n \tau_1 \ldots \tau_n$ syss <Int (τ_1),..., Int (τ_n)> ∈ Int (P^n)

1.2. Int satisface $\tau_1 = \tau_2$ syss Int (τ_1) = Int (τ_2)

1.3. Int satisface $\neg\varphi$ syss no es el caso que Int satisface φ

1.4. Int satisface $\varphi \rightarrow \psi$ syss (no es el caso que Int satisaface φ) o Int satisface ψ.
1.5. Int satisface $\forall x\varphi$ syss Int' satisface φ, para todo Int'= <$\mathcal{M}$,g'> tal que g' es una x-variante de g.

Caso 2: Cuando el Dominio interior D es vacío.
2.1. Sea φ una fórmula abierta o una fórmula cerrada del tipo $\forall x\ \varphi$. Entonces Int(φ) satisface a dicha fórmula.
2.2. Si la fórmula no es ni abierta ni universal cerrada, se siguen los puntos de 1.1 a 1.5 del caso 1 antes descrito.
3. Sólo lo estipulado de 1.1 a 2.2. corresponde a la noción de satisfacción (Int satisface φ) en el sistema LLIT.

Observaciones

(1) Siempre que Int satisface φ, siendo Int=<$\mathcal{M}$,g>, podemos escribir $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$.

(2) Hay dos casos en los que la función g es irrelevante para la satisfacción de fórmulas:

a. Cuando las fórmulas son cerradas, (en ese caso podía escribirse $\mathcal{M} \vDash \varphi$ en vez de $\mathcal{M}\vDash g\ \varphi$).

b. Cuando las fórmulas son abiertas y el dominio interior es vacío, pues en ese caso la función g queda indefinida para toda variable.

Definición de Consecuencia Semántica en LLIT

Sea *S* un conjunto de fórmulas del sistema LLIT y φ una fórmula del lenguaje LL.

$S \vDash_{LLIT} \varphi$ syss toda interpretación que satisface a cada fórmula de *S*, satisface a φ.

Definición de Validez en LLIT

Una fórmula del sistema de lógica libre de interpretación total (LLIT) es válida syss $\emptyset \vDash_{\text{LLIT}} \varphi$.

2.4. Cálculo para el sistema LLIT

Una fórmula de *LLIT* es un axioma de *LLIT* si tiene alguno de los siguientes ocho tipos:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
4. $\varphi \rightarrow \forall x\ \varphi$ donde x no está libre en φ
5. $\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\ \varphi \rightarrow \forall x\ \psi)$
6. $(\forall x)\ \varphi \rightarrow \varphi\ (v/x)$ donde v es variable de *LLIT* y x ocurre libre en φ
7. $\tau = \tau$
8. $x = \tau \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi\ (\tau//x))$

Reglas de Inferencia

(1) φ

$\underline{\varphi \rightarrow \psi}$ (Se requiere que si φ es abierta, ψ también lo sea).

ψ

(2) $\underline{\varphi\ (v/x)}$ (Es preciso que v no ocurra libre en $(\forall x)\ \varphi$).

$(\forall x)\ \varphi$

Observación

Para que la regla (1) sea correcta en caso de que el dominio interior sea vacío, se debe cuidar la restricción de que si el antecedente tiene alguna variable libre, también debe tenerla el consecuente. Puesto que si el dominio es vacío y el condicional tiene en el antecedente una fórmula abierta, tanto el antecedente como el propio condicional serán satisfechas (de acuerdo con lo estipulado en el caso 2.1., por ser ambas fórmulas abiertas); pero si en el consecuente hay una fórmula cerrada, se corre el riesgo de que al aplicar la regla (1) se concluya una fórmula falsa. Lo que se quiere es evitar casos como, por ejemplo $Rx \rightarrow Rc$, en el que**,** el antecedente es una fórmula abierta, que en el dominio interior vacío da lugar a una fórmula verdadera, mientras que el consecuente es una fórmula cerrada que podría ser falsa, si la interpretación de c no pertenece a la interpretación de R. El problema se resuelve si se preserva la restricción señalada.

Definición de Derivación en LLIT

Sea φ una fórmula del sistema LLIT, sea S un conjunto de fórmulas de LLIT.

Una fórmula φ se deriva de S syss hay una secuencia finita K de fórmulas del sistema LLIT, φ es la última fórmula en K y cada fórmula en K es un axioma de LLIT, se deriva de dos fórmulas anteriores en la secuencia K por medio de la regla (1), o se sigue de alguna fórmula anterior en la secuencia por medio de la regla (2).

Definición de Conjunto de fórmulas Inconsistente en LLIT

Un conjunto S de fórmulas del sistema LLIT es llamado inconsistente en LLIT si $S \vdash_{LLIT} \varphi \wedge \neg \varphi$; de otra forma es consistente en LLIT.

2.5. Traducción del sistema de lógica libre con interpretación total (LLIT) a lógica clásica de primer orden (LCPO)

Signatura

La signatura LLIT está integrada por Const(LLIT)∪Pred(LLIT); esto es, Const={a,b,c…} y Pred={$P^1{}_1$, $P^1{}_2$,…, $P^2{}_1$,$P^2{}_2$,…,$P^m{}_n$}.

La signatura para LCPO contiene los conjuntos de constantes y predicados contemplados en LLIT y además añade un predicado destacado ‘Ɛ’, (la idea intuitiva es que Ɛτ indica que el término individual ‘τ’ está en el dominio interior, que es el dominio que da valores a las variables). Esto es, la signatura de LCPO consta de Const(LLIT)∪Pred(LLIT)∪{Ɛ}.

Funciones de conversión de estructuras

La Conv es una función que a cada estructura $\mathcal{M}$ de LLIT le asigna una estructura $\mathcal{M}$* de LCPO. Esto es, Conv: (Est(LLIT)) → (Est(LCPO)). A continuación la definiremos para cualquier $\mathcal{M}$.

Antes de definir Conv conviene recordar que una estructura de LLIT es de la forma $\mathcal{M}$=*<D, D', I >* donde:

I es una función tal que *I*: Pred ∪Const→$\cup_{(n\in\mathbb{N})}\wp((D\cup D')^n)\cup(D\cup D')$

$I(P^n)\in\wp((D\cup D')^n)$

$I(c)\in D\cup D'$

Y que para la interpretación de las fórmulas de LLIT se precisa de una función de asignación para variables *g: Var →D.* Cuando dicha función de asignación no existe, la interpretación de las fórmulas afectadas se especifica como “verdadera” por defecto.

Además en LLIT llamamos Int = <$\mathcal{M}$,g> al par formado por ambas. Int representa una función que asigna valores en $\mathcal{M}$ a las constantes y predicados; también a las variables cuando el dominio interior no es vacío (como fue estipulado en la definición de satisfacción de fórmulas para LLIT).

2.5.1. Funciones para la Conversión de Estructuras

Definición de la función Conv

Para cada $\mathcal{M}$=*<D, D', I >*, Conv($\mathcal{M}$); es una estructura de LCPO, a la que llamamos $\mathcal{M}$*, definida así:

$\mathcal{M}^* = \langle D\cup D', I^*, \mathcal{E}^{M^*}\rangle$ donde:

$I^*(c) = I(c)$

$I^*(P) = I(P)$

$\mathcal{E}^{M^*}$=D= $I^*(\mathcal{E})$.

Básicamente $\mathcal{M}$* es idéntica a $\mathcal{M}$, excepto porque:

(1) sólo tiene un dominio, que es la unión de los dominios de $\mathcal{M}$,

(2) *I* * es básicamente como *I* pero añadimos *I* *($\mathcal{E}$) a la estructura $\mathcal{M}$* como interpretación del nuevo predicado monario $\mathcal{E}$

(3) Ya que $\mathcal{E}$ recibe en toda estructura el dominio interior como interpretación, $\mathcal{E}$ es el predicado monádico que aplicado a un término individual 'τ' dice: *La interpretación de τ está en D.*

Definición de la asignación g*

Para fijar la asignación g* se distinguen 2 casos:

(1) D ≠ ∅. Entonces g*= g.
(2) D= ∅. g* es cualquier función de Var en D'.

Llamamos Int* al par ordenado formado por Int*= <$\mathcal{M}$*,g*> donde la interpretación de variables, constantes y predicados es la estipulada por g* y por *I** . Cuando D ≠ ∅, entonces Int* coincide con Int en todo, la única diferencia es que Int* también ha de dar valor al nuevo predicado $\mathcal{E}$; sin embargo, cuando *D=∅, g** es cualquier función de Var en *D'* y obviamente la interpretación de variables no coincide. Esto es, se cumple:

Int*(x)= g*(x). Si D ≠ ∅, entonces Int*(x)= g (x). Si *D= ∅,* entonces Int*(x) ≠ g (x).

Int*(c)= Int(c)

Int*(P)= Int(P) (cuando P no es $\mathcal{E}$)

Int*($\mathcal{E}$)=D

Observación.

Nótese que mientras las x-variantes de g tomaban valores en D, una x-variante de g* toma valores en *D*∪*D'*.

En breve formularé y probaré un lema de representación, que nos permite verificar que para cualquier estructura de LLIT, hay una estructura de Lógica Clásica de Primer Orden (LCPO), en la que cualquier fórmula de LLIT es verdadera en su estructura original, si y sólo si su traducción es verdadera en la estructura correspondiente de LCPO, usando asignaciones pertinentes g y g*.

Como primer paso para la demostración del lema, se define una función de traducción (Trad) donde, Trad: Form(LLIT) → Form(LCPO).

2.5.2. Definición por recursión de la función Trad para LLIT

Paso Básico

Para $P^n \tau_1 \ldots \tau_n$

$$\text{Trad}\,(P^n \tau_1 \ldots \tau_n) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (P^n \tau_1 \ldots \tau_n) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ P^n \tau_1 \ldots \tau_n & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$$

En especial

Para $\tau_1 = \tau_2$

$$\text{Trad}\,(\tau_1 = \tau_2) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\tau_1 = \tau_2) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ \tau_1 = \tau_2 & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$$

Pasos Inductivos

1. Para $\neg\varphi$

$$\text{Trad}\,(\neg\varphi) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow \neg\,\text{Trad}\,(\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ \neg\,\text{Trad}\,(\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$$

2. Para $(\varphi \rightarrow \psi)$

$$\text{Trad}\,(\varphi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ \text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$$

3. Para $(\forall x\ \varphi)$

$$\text{Trad}\,(\forall x\, \varphi) := \begin{cases} \forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}\,(\varphi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta o Cerrada} \end{cases}$$

2.5.3. Demostración inductiva del lema de representación para LLIT

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente lema de representación.

Lema de representación.

Para cada estructura $\mathcal{M}$ $\in$(Est(LLIT)) y cada asignación g en $\mathcal{M}$, hay una estructura $\mathcal{M}$*=Conv($\mathcal{M}$) y una asignación g* tal que: $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad (φ) para cualquier fórmula φ del sistema LLIT.

Para realizar la prueba hay que tener presente la definición recursiva de satisfacción de fórmulas de LLIT, así como las definiciones de Conv y Trad. Nótese que cuando el dominio interior es vacío, la asignación es inexistente y la g es una mera notación, no una función. No obstante, la g* sí será una función ya que D∪D'≠ ∅.

De acuerdo con la definición de la satisfacción de fórmulas en LLIT hay que considerar dos casos: (Caso 1) cuando el dominio interior D es distinto de vacío y (Caso 2) cuando es igual a vacío. Nótese que la diferencia entre ambos casos radica en que en el segundo, cuando D es vacío, hay que distinguir dos subcasos: (Subcaso 2.1) si se trata de una fórmula abierta o si la fórmula es cerrada con cuantificación universal, porque en ambos casos se trata de una fórmula satisfacible. (Subcaso 2.2) para el resto de las fórmulas, cuando no son abiertas o no son universales, la satisfacción procede como en los correspondientes apartados del (Caso 1). Adicionalmente, debido a que la definición de la función Trad varía dependiendo de si la fórmula de LLIT es abierta o cerrada,[79] al desarrollar el (Caso 1), cuando D≠ ∅, en la demostración inductiva tomaré en cuenta si la fórmula de LLIT de la que se trata es abierta o cerrada. En cambio para el (Caso 2), cuando D=∅, desarrollaré la prueba cuando la fórmula de LLIT es abierta, y cuando la fórmula es cerrada remitiré al correspondiente apartado del (Caso 1), tal como se estipula en el (Subcaso 2.2) de la definición de la satisfacción de fórmulas para LLIT.

Paso Base

Cuando $\varphi=P^n\tau_1\ldots\tau_n$, es una fórmula atómica de LLIT, hay que considerar:

Caso 1. Cuando D≠∅.

Caso 2. Cuando D=∅.

Por demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g P^n\ \tau_1\ldots\tau_n$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*} P^n\ \tau_1\ldots\tau_n.$

Caso 1. D ≠ ∅.

Cuando $P^n\tau_1\ldots\tau_n$ es una fórmula abierta de LLIT.

$\mathcal{M}\vDash_g P^n\ \tau_1\ldots\tau_n$ syss $<\mathrm{Int}(\tau_1),\ldots,\mathrm{Int}(\tau_n)> \in \mathrm{Int}(P)$ Por definición de satisfacción en LLIT

syss $<\mathrm{Int}^*(\tau_1),\ldots,\mathrm{Int}^*(\tau_n)> \in\mathrm{Int}^*(P)$ Por definición de Int*[80]

syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*} P^n\ \tau_1\ldots\tau_n.$ Por definición de satisfacción de LCPO

[79] Con excepción de si se trata de una fórmula cuantificada, pues en ese caso la función Trad es única.

[80] Ya que la $\mathrm{Int}^*(\tau_j)=\mathrm{Int}(\tau_j)$ (para todos los j de 1 a n). De igual forma, Int*(P)= Int(P).

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$. Por definición de $\mathcal{E}$.[81]
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$). Por definición de Trad para fórmulas abiertas.

Cuando $P^n\tau_1 \ldots \tau_n$ es una fórmula cerrada de LLIT. Por tanto, nuestro interés recae en la parte de la función de interpretación relativa a las constantes.
$\mathcal{M} \vDash_g P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $<Int(\tau_1), \ldots ,Int(\tau_n)> \in Int(P)$ Por definición de satisfacción en LLIT
syss $<Int^*(\tau_1), \ldots ,Int^*(\tau_n)> \in Int^*(P)$ Por definición de Int*
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$. Por definición de satisfacción de LCPO.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$). Por definición de Trad para fórmulas cerradas.

En particular
Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula abierta de LLIT.
$\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1 = \tau_2)$ syss Int (τ_1)=Int (τ_2). Por definición de satisfacción en LLIT.
syss Int* (τ_1)=Int* (τ_2) Por definición de Int*
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\tau_1 = \tau_2)$ Por definición de satisfacción de LCPO
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\tau_1 = \tau_2)$ Por definición de $\mathcal{E}$.[82]
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\tau_1 = \tau_2$) Por definición de Trad.

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula cerrada de LLIT.
$\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1 = \tau_2)$ syss Int (τ_1)=Int (τ_2) Por definición de satisfacción en LLIT
syss Int* (τ_1)=Int* (τ_2) Por definición de Int*
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$. Por definición de satisfacción de LCPO.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\tau_1 = \tau_2$) Por definición de Trad para fórmulas cerradas.

Caso 2. Cuando $D = \emptyset$ y la fórmula $P^n\tau_1 \ldots \tau_n$ de LLIT es abierta.
Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$).
Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.
Estamos en el caso 2.1. de la definición de satisfacción en el que independientemente de la interpretación de los términos y predicados que aparezcan en la fórmula se tiene que $\mathcal{M} \vDash_g P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$.

Por una parte, por definición de traducción, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$) syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$

[81] Puesto que al ser $D \neq \emptyset$ se verifica $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y al ser verdadero el antecedente del condicional el valor final de la fórmula depende exclusivamente del de su consecuente.
[82] Puesto que al ser $D \neq \emptyset$, se verifica $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y al ser verdadero el antecedente del condicional, el valor final de la fórmula depende exclusivamente del de su consecuente.

Por otra parte, al ser D=∅, entonces $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y por lo tanto $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$. Luego $\mathcal{M} \vDash_g P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$.

Por lo tanto, $\mathcal{M} \vDash_g P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n$).

Cuando $P^n \tau_1 \ldots \tau_n$ es una *fórmula cerrada* de LLIT. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

En particular

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula abierta de LLIT.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1 = \tau_2)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\tau_1 = \tau_2)$

Dicha equivalencia se demuestra usando los mismos argumentos que en el caso anterior.

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una *fórmula cerrada* de LLIT. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

Pasos inductivos

Hipótesis Inductiva (H.I.): $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$Trad ($\varphi$). Donde $\varphi \in$Form(LLIT)

Paso Inductivo 1. Trad($\neg\varphi$)

Donde φ es cualesquier fórmula de LLIT. Hay que considerar:

Caso 1. Cuando D ≠ ∅.

Caso 2. Cuando D=∅

Caso 1. D≠∅.

Cuando φ es una fórmula abierta de LLIT.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\neg\varphi$). Por hipótesis inductiva sabemos que

$\mathcal{M} \vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$Trad ($\varphi$) y por tanto $\mathcal{M} \nvDash_g (\varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad (φ).

$\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M} \nvDash_g \varphi$. Por definición de Int.

syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad (φ). Por H.I.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \neg$(Trad($\varphi$)). Por definición de fórmula satisfacible.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow \neg$(Trad($\varphi$)). Por definición de $\mathcal{E}$.[83]

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\neg\varphi$). Por definición de Trad.

Cuando φ es una *fórmula cerrada* de LLIT.

[83] Al ser D≠∅, es verdadero en dicha interpretación el antecedente del condicional y por lo tanto el valor final de la fórmula depende exclusivamente del de su consecuente.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M} \vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$.

Por hipótesis inductiva sabemos que $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$Trad (φ) y por tanto $\mathcal{M} \nvDash_g (\varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad $\varphi)$.

$\mathcal{M} \vDash_g \neg\, \varphi$ syss $\mathcal{M} \nvDash_g \varphi$. Por definición de Int.

syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad (φ). Por H.I.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ $\neg$(Trad(φ)). Por definición de satisfacibilidad.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\, \varphi)$. Por definición de Trad. Para fórmulas cerradas.

Caso 2. D=ø y la fórmula φ de LLIT es abierta.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$.

Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, al ser $(\neg\varphi)$ una fórmula abierta, conforme a la definición 2.1. de satisfacción de fórmulas, se cumple que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$.

Por otra parte, al ser D=ø, entonces $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y por lo tanto $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow \neg$Trad$(\varphi)$.

Por consiguiente, $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow \neg$Trad (φ).

Por definición de traducción para negación de fórmulas abiertas: $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow \neg$Trad (φ) syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$.

Cuando $\neg\varphi$ es una *fórmula cerrada* de LLIT. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

Paso Inductivo 2. Trad$(\varphi \rightarrow \psi)$

Donde φ y ψ son cualesquiera fórmulas de LLIT, por hipótesis inductiva sabemos que $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$Trad (φ) y $\mathcal{M} \vDash_g \psi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$Trad (ψ).

hay que considerar:

Caso 1. Cuando D≠ø.

Caso 2. Cuando D=ø.

Caso 1. D ≠ ø.

Cuando $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula abierta de LLIT.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \rightarrow \psi)$.

$\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M} \nvDash_g \varphi$ o $\mathcal{M} \vDash_g \psi$. Por definición de satisfacción en LLIT.

syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad (φ) o $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad (ψ). Por H. I.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi) \rightarrow$ Trad (ψ). Por definición de satisfaccibilidad en LCPO syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi))$. Por definición de interpretación de $\mathcal{E}$ en una estructura con dominio interior no vacío.[84]

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}(\varphi \rightarrow \psi)$. Por definición de Trad para fórmulas condicionales abiertas.

Cuando $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula cerrada de LLIT.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}(\varphi \rightarrow \psi)$.

$\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M} \nvDash_g \varphi$ o $\mathcal{M} \vDash_g \psi$. Por definición de satisfacción en LLIT.

syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*} \text{Trad}(\varphi)$ o $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}\, \psi$. Por H. I.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}\, \varphi \rightarrow \text{Trad}\, \psi$. Por definición de satisfaccibilidad

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}(\varphi \rightarrow \psi)$. Por definición de Trad para fórmulas condicionales cerradas.

Caso 2. $D=\emptyset$

Cuando $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula abierta de LLIT.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}(\varphi \rightarrow \psi)$.

Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, al ser $(\varphi \rightarrow \psi)$ una fórmula abierta, conforme a la definición 2.1. de satisfacción de fórmulas, se cumple que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$.

Por otra parte, al ser $D=\emptyset$, entonces $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y por lo tanto $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi))$.

Por consiguiente, $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi))$.

Por definición de Trad $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi))$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad}(\varphi \rightarrow \psi)$.

Cuando $\varphi \rightarrow \psi$ es una *fórmula cerrada* de LLIT. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

Paso Inductivo 3. Trad $(\forall x\, \varphi)$

Por tratarse de una cuantificación, la función de Trad para φ es única,[85] por lo tanto no se toma en cuenta si la fórmula de LLIT es abierta o cerrada. Tan sólo se considera si:

---

[84] Al ser $D \neq \emptyset$, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y el valor final de la fórmula condicional depende exclusivamente del de su consecuente.

[85] Tal como se destacó en la definición de Trad, en el caso de la cuantificación, se compactan los casos de fórmulas abiertas y cerradas, puesto que en las condiciones de verdad de las fórmulas cuantificadas siempre es relevante considerar la asignación para las variables. Además, la presencia de la cláusula $\mathcal{E}x \rightarrow$ en la

Caso 1. D≠∅.

Caso 2. D=∅.

Caso 1. D≠∅.

Cuando $\forall x\ \varphi$ es una fórmula de LLIT (abierta o cerrada).[86]

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\forall x\ \varphi)$. Al ser D≠∅, la función g=g* y por lo tanto hay que demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_g$ Trad $(\forall x\ \varphi)$.

En primer lugar,

$\mathcal{M} \vDash_g (\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M} \vDash_{g'} \varphi$ para cada g´ (g´ es x-variante de que g valores en D). Por definición de satisfacción de fórmulas en LLIT.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g'^*}$ Trad (φ) por HI. La función g'* es la convertida sobre g'

syss (1) $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Trad (φ). (Al ser g' con valores en D≠∅, entonces g'*=g').

Por otra parte,

$\mathcal{M}^* \vDash_g$ Trad $(\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_g \forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi))$. Por definición de Trad.

syss (2) $\mathcal{M}^* \vDash_{g'} \mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi)$ para cada g' que sea x-variante de g con valores en DUD'. Por definición de interpretación de fórmulas cuantificadas en LCPO en la estructura con dominio DUD'.

(2) ⇒ (1)

Sea $\mathcal{M}^* \vDash_{g'} \mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi)$ para cada g' que sea x-variante de g con valores en DUD'.

Entonces $\mathcal{M}^* \vDash_{g'} \mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi)$ para cada g' x-variante de g con valores en D.[87]

Luego $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Trad(φ). (Al tomar valores en D, $\mathcal{M}^* \vDash_g \mathcal{E}x$).

(1) ⇒ (2) Veremos que es válida la contrapositiva ¬(2) ⇒ ¬(1) (pues es equivalente a (1) ⇒ (2)).

---

traducción de todas las fórmulas universales (sean abiertas o cerradas), sirve tanto para relativizar la cuantificación (que, en principio, en $\mathcal{M}^*$ se refiere a DUD') a la extensión de $\mathcal{E}$ (esto es, al dominio interno), como para asegurar la satisfacción cuando D=∅. De esa forma es suficiente con el uso de una única cláusula tipo $\mathcal{E}x\rightarrow$ para la traducción de las fórmulas abiertas.

[86] En el caso de las fórmulas cuantificadas es relevante tener en cuenta que las funciones de asignación g y g* no trabajan sobre el mismo dominio, pues mientras que g sólo es operativa en D (dominio interior), g* lo es en DUD'. De ahí que la estrategia de demostración adoptada en este caso es un poco distinta de lo que ocurre en los casos anteriores, pues en primera instancia demuestro que (1) $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Trad (φ), sabiendo que nos encontramos en el caso en el D≠∅, entonces en los valores g' (x-variantes g) ocurre que g'*=g'. Pero también es necesario afirmar que (2) $\mathcal{M}^* \vDash_{g'} \mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi)$, sabiendo que la introducción de "$\mathcal{E}x \rightarrow$" sirve para verificar que cada g' x-variante de g que toma valores en DUD', en realidad opera sólo en D. Por último, es necesario verificar la equivalencia entre (1) y (2), puesto que sólo así tendremos la certeza de que no hay un desfase entre las fórmulas satisfacibles en $\mathcal{M}^*$ y las de la estructura original $\mathcal{M}$.

[87] Las g' x-variantes de g con valores en D son un subconjunto de las g' x-variantes de g con valores en DUD'.

Suponemos que es falso que $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Ɛx → Trad(φ) para toda g' x-variante con valores en DUD'. Entonces hay una g' x-variante de g con valores en DUD' tal que $\mathcal{M}^* \nvDash_{g'}$ Ɛx → Trad(φ).
Luego hay una g', x-variante de g que toma valores en DUD' tal que $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Ɛx y $\mathcal{M}^* \nvDash_{g'}$ Trad(φ).
Luego g' es x-variante que toma valores en D y $\mathcal{M}^* \nvDash_{g'}$ Trad(φ) (En caso contrario no puede ser verdadero Ɛx).

Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula $\forall x \varphi$ es una fórmula de LLIT (abierta o cerrada).
Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\forall x\, \varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\forall x\, \varphi$).

Sabemos que, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \forall$x (Ɛx → Trad($\varphi$)) syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\forall$x φ). Por definición de Trad.
Nótese que entonces lo que se quiere probar es que, $\mathcal{M} \vDash_g (\forall x\, \varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \forall x$ (Ɛx → Trad (φ)).

Para ver que el bicondicional es cierto, basta notar que $\mathcal{M} \vDash_g (\forall x\, \varphi)$ es siempre verdadero por definición de satisfacción (Subcaso 2.1) para LLIT y $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \forall x$ (Ɛx → Trad (φ)) también es verdadero por vacuidad, pues al ser D= ø, la fórmula será siempre verdadera.[88]

[88] Si D=ø, como *I*(Ɛ)=D, entonces ninguna asignación puede satisfacer Ɛx y en cambio todas satisfacen (Ɛx → Trad (φ)). En particular, todas las x-variantes de g* y por consiguiente g* satisface $\forall x$ (Ɛx → Trad (φ)), esto es, Trad $\forall x\, \varphi$. Este resultado es reflejo fiel de que en LLPIP, cuando D=ø y una fórmula de LLPIP es abierta o cerrada del tipo $\forall x\, \varphi$, entonces Int(φ) satisface automáticamente a dicha fórmula.

Apartado 3

Sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios: Sistema de lógica libre positiva con interpretación parcial

3.1. Semántica de dos dominios para el sistema libre positiva con interpretación parcial (LLPIP)

Este sistema emplea una interpretación parcial, que es una función que a algunos elementos de Const**,** les asigna un elemento del dominio interior (D) o del dominio exterior (D’), pero no a todos. Sin embargo, es una función que asigna a cada elemento de Pred, un subconjunto del producto cartesiano n-ario de la unión del dominio interior y el dominio exterior. La función de interpretación es parcial fundamentalmente porque no asigna a todas las constantes un valor en los dominios considerados en la estructura.

Definición de Modelo de LLPIP

Un modelo del sistema libre positivo con interpretación parcial es una tripleta $\mathcal{M}$=<D,D′, *I*>, donde D es el domino interior y D’ es el exterior, D∩D’= ø y ya sea D o ya sea D’ pueden estar vacíos, pero D∪D’ ≠ ø.

Definición de Función de Interpretación *I* parcial

I es una función parcial definida sobre D∪D’ esto es, no todas las constantes individuales *c*∈Const se les asigna valor en D∪D’. A las constantes *c* que no se les asigna valor en D∪D’ les llamaremos indefinidas. Esto es:

1. O bien *I* (*c*) ∈ D∪D’, o bien, *I* (*c*) está indefinida.
2. $I(P^n) \in \wp((D\cup D')^n)$

Definición de Función g para variables

Hay que distinguir dos casos:

1. D ≠ ø. En este caso se define una función que a cada variable le asigna valores en el dominio interior, g:Var → D, de forma que g(x) ∈D
2. D=ø. No se puede definir la función g, pero seguimos usando la notación g(x). Será falso que g(x) ∈D, en este caso g(x) queda indefinido.

Definición de Asignación x-variante de una asignación g

Dada una asignación g y una variable x (x∈Var) se denomina asignación x-variante de g a toda asignación g’ que coincida con la asignación g en todo, excepto, tal vez, en el valor de la variable x.

Definición de Interpretación

Dado un modelo $\mathcal{M}$ y una asignación g, denominamos interpretación a la tupla formada por ambos, **Int**= <$\mathcal{M}$,g>. Dicha tupla contiene la interpretación de los términos y predicados del lenguaje y se extiende para definir la satisfacción de todas las fórmulas del lenguaje.

Usando dicha interpretación a los términos y predicados del lenguaje (siempre y cuando los términos constantes estén definidos) les corresponderán, respectivamente, individuos de alguno de los dominios de la estructura o subconjuntos del producto cartesiano n-ario de la unión entre el dominio interior y el dominio exterior. Pero, ese no será el caso para las variables, cuando el dominio interior sea vacío, ni para las constantes, cuando sean indefinidas. No obstante, cada fórmula es satisfecha o no en la interpretación, incluso en los casos en los que variables o constantes estén indefinidas.

Definición de Función Int para variables, constantes y predicados

A partir de la función *I* de asignación a constantes y predicados y de la función g de asignación a variables, definimos una función de interpretación Int.

La función Int asigna a las variables valores exclusivamente del dominio interior, a algunas constantes les asigna valores de la unión entre el dominio interior y el domino exterior, pero a otras constantes las deja sin asignar valor y a los predicados n-arios les asigna subconjuntos del producto cartesiano n-ario de la unión del dominio interior y el dominio exterior. Si x ∈ Var, Int(x)=g(x). Cuando el dominio interior sea distinto de vacío, la interpretación de la variable designará un elemento de dicho dominio, cuando sea vacío no designará ningún objeto, pero usaremos la notación.

1. Si c ∈ Const, Int (c)= *I*(c) o bien, Int (c) está indefinido
2. Si P ∈ Pred, Int (P)= *I*(P)

Observaciones.

(1) Aunque formalmente la Int, como función para variables, constantes y predicados, es distinta de **Int**=<$\mathcal{M}$,g>, se usará simplemente Int para ambas porque ofrece

mayor concisión y claridad expositiva. Así se escribirán expresiones como "sea Int=<$\mathcal{M}$,g>, entonces Int(x)=g(x)".

(2) Dado que *g* es una función que asigna valores en D, cuando *I*(c) ∈ D podemos decir que c designa el valor de una variable. En cambio, si *I*(c) ∈ D', c no designa un valor de variable, puesto que la función g no asigna valores en D'.

(3) Cuando D=ø las variables no reciben interpretación ninguna. No obstante las fórmulas abiertas al igual que las fórmulas con constantes indefinidas, recibirán interpretación.

(4) Decimos que la interpretación Int'= <$\mathcal{M}$,*g*'> es x-variante de la Int= <$\mathcal{M}$,*g*> si está basada en una asignación *g*' que es una x-variante de la asignación *g*.

Definición de Satisfacción de fórmulas en LLPIP

Dada una fórmula φ de LLPIP, un modelo $\mathcal{M}$=<D,D',*I*> para LLPIP y una función de asignación g, tal que Int=<$\mathcal{M}$,g> es una función de interpretación en LLPIP, defino la noción de satisfacción para LLPIP[89] distinguiendo los siguientes tres casos.

Caso 0. Cuando la fórmula (φ) de LLPIP contiene alguna constante cuya interpretación está indefinida (por no tomar valores ni en D ni en D') y se le asignará siempre valor verdadero.

Casos 1 y 2. Cuando la fórmula (φ) de LLPIP no contiene ninguna constante indefinida, entonces se procede exactamente igual que en el sistema LLIT. Esto es:

Caso 1. Cuando el Dominio interior D es distinto de vacío.

1.1. Int satisface $P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n$ syss <Int (τ_1),…, Int (τ_n)> ∈ Int (P^n)

1.2. Int satisface $\tau_1 = \tau_2$ syss Int (τ_1) = Int (τ_2)

1.3. Int satisface $\neg\varphi$ syss no es el caso que Int satisface φ

1.4. Int satisface $\varphi \rightarrow \psi$ syss no es el caso que Int satisaface φ o que Int satisface ψ.

1.5. Int satisface $\forall x\varphi$ syss Int' satisface φ, para todo Int'= <$\mathcal{M}$,g'> tal que g' es una x-variante de g.

Caso 2. Cuando el Dominio interior D es vacío.

2.1 Sea φ una fórmula abierta o una fórmula cerrada del tipo $\forall x\ \varphi$. Entonces Int(φ) satisface a dicha fórmula.

2.2 Si la fórmula no es ni abierta ni universal, se siguen los puntos de 1.1 a 1.5 del caso 1 antes descrito.

---

[89] En el texto original de Leblac y Thomason [1968] hablan de Satisfacción$_V$ (Satisfaction$_T$). Aquí no utilizo el subíndice, puesto que estoy trabajando de forma independiente con cada sistema libre, por eso hablo simplemente de la noción de satisfacción para el caso del sistema LLPIP y omito el uso del subíndice.

Observaciones

(1) Siempre que Int satisface φ, siendo Int=<$\mathcal{M}$,g>, podemos escribir $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$.

(2) Hay tres casos en el que la función g es irrelevante: 1. Cuando las fórmulas son cerradas, (en ese caso podía escribirse $\mathcal{M}\vDash\varphi$ en vez de $\mathcal{M}\vDash g\ \varphi$). 2. Cuando las fórmulas son abiertas y el dominio interior es vacío, pues en ese caso la función g queda indefinida para toda variable. 3. Cuando la fórmula tiene una constante indefinida, porque en ese caso, con independencia de que la fórmula incluya variables, le corresponde el valor de verdad verdadero.

Definición de Consecuencia Semántica en LLPIP

Sea *S* un conjunto de fórmulas del sistema LLPIP y φ sea una fórmula del lenguaje LL.

$S \models_{LLPIP} \varphi$ usando satisfacción para LLPIP syss toda interpretación que satisface a cada fórmula de *S*, satisface a φ.

Definición de Validez en LLPIP

Una fórmula del sistema LLPIP es válida si $\emptyset \models_{LLPIP} \varphi$.

3.2. Cálculo para el sistema LLPIP

Una fórmula el sistema LLPIP es un axioma del sistema LLPIP si tiene alguno de los siguientes ocho tipos:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
4. $\varphi \rightarrow \forall x\ \varphi$ donde x no está libre en φ
5. $\forall x\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\ \varphi \rightarrow \forall x\ \psi)$
6. $(\forall x)\ \varphi \rightarrow \varphi\ (\tau/x)$ donde v es variable de LLPIP y x ocurre libre en φ
7. $\tau=\tau$
8. $x=\tau \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi\ (\tau//x))$

Reglas de Inferencia

(1) φ

$\underline{\varphi \rightarrow \psi}$ (Se requiere que si φ es abierta, ψ también lo sea y que cada constante

ψ que ocurra en φ también ocurra en ψ).

(2) $\underline{\varphi\ (v/x)}$ (Se requiere que *v* no ocurra libre en $(\forall x)\ \varphi$)

$(\forall x)\ \varphi$

Observación

Las observaciones hechas a las reglas del sistema LLIT también aplican en las reglas del sistema LLPIP. Adicionalmente en la regla (1) del sistema LLPIP debe observarse que cada constante que ocurra en φ también lo haga en ψ. Puesto que en el sistema LLPIP las fórmulas con constantes indefinidas, de acuerdo con la noción de satisfacción para LLPIP, serán siempre verdaderas, por eso hay que evitar el caso de que φ sea verdadera por esa causa y no ocurra así con ψ. Esto es, hay que evitar casos como el del siguiente ejemplo: $Pc \rightarrow Pb$, donde la constante 'c' fuera una constante indefinida, mientras que 'b' fuera una constante que se interprete en D o D', porque podría ocurrir que la fórmula Pb no fuera verdadera, por la definición del predicado P, y en ese caso la conclusión Pb sería falsa.

Definición de Derivación en LLPIP

Sea φ una fórmula del sistema LLPIP, sea S un conjunto de fórmulas de LLPIP.

Una fórmula φ se deriva de S syss hay una secuencia finita de fórmulas K tal que φ es la última fórmula en K y cada fórmula en K es un axioma de LLPIP, se deriva de dos fórmulas anteriores en la secuencia K por medio de la regla (1), o se sigue de alguna fórmula anterior en la secuencia por medio de la regla (2).

Definición de Fórmula inconsistente en LLPIP

Un conjunto S de fórmulas del sistema LLPIP es llamado inconsistente en LLPIP si $S \vdash_{LLPIP} \varphi \wedge \neg\varphi$; de otra forma es consistente en LLPIP.

3.3. Traducción del sistema libre positivo con interpretación parcial (LLPIP) a lógica clásica de primer orden (LCPO)

Signatura

La signatura LLPIP está integrada por Const(LLPIP)∪Pred(LLPIP); esto es, Const={a,b,c…} y Pred=$\{P^1_1, P^1_2,\ldots, P^2_1,P^2_2,\ldots,P^m_n\}$.

La signatura para LCPO contiene los conjuntos de constantes y predicados contemplados en LLPIP y además añade dos predicados destacados 'Ɛ' y 'C', (la idea intuitiva es que $Ɛ\tau$ indica que la denotación del término individual 'τ' está en el dominio interior, que es el dominio que da valores a las variables, mientras que $C\tau$ indica que la interpretación del término individual 'τ' no está en *D*∪*D'*, sino que está en {H}[90]). Esto es, la signatura de LCPO consta de Const(LLPIP)∪Pred(LLPIP)∪{Ɛ}∪{C}.

3.3.1. Funciones para la Conversión de Estructuras

La Conv es una función que a cada estructura $\mathcal{M}$ de LLPIP le asigna una estructura $\mathcal{M}^*$ de LCPO. Esto es, Conv: (Est(LLPIP)) → (Est(LCPO)). Recordemos que $\mathcal{M}$ es una estructura $\mathcal{M}=\langle D, D', I\rangle$ del sistema LLPIP de lógica libre donde:

$I(c) \in (D \cup D')$ o está indefinido y por tanto $I(c) \notin (D \cup D')$

$I(P^n) \subseteq (D \cup D')^n$

Adicionalmente opera una función de asignación para variables, g: $Var \rightarrow D$

Ahora definiremos Conv($\mathcal{M}$); esto es, una estructura de LCPO a la que llamamos $\mathcal{M}^*$. Básicamente $\mathcal{M}^*$ es idéntica a $\mathcal{M}$, excepto porque:

(1) sólo tiene un dominio, que es la unión de los dominios de $\mathcal{M}$ con la clase unitaria {H} esto es, ((D∪D')∪{H}, donde H∉ (D∪D')

(2) I* es básicamente como *I* pero añadimos en $\mathcal{M}^*$ la interpretación de $I^*(\mathcal{E})$ e $I^*(C)$ así como la interpretación de las constantes que no denotan.

$\mathcal{M}^* = \langle (D \cup D') \cup \{H\}, I^*, \mathcal{E}^{M^*}, C^{M^*}\rangle$ donde

$H \notin (D \cup D')$

$I^*(c) = Const \rightarrow (D \cup D') \cup \{H\}$, esto es

$$I^*(c) = \begin{cases} I(c), \text{ si } c \text{ está definido} \\ H \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$I^*(P) = I(P)$

$\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*} = D = I^*(\mathcal{E})$[91]

$C^{\mathcal{M}^*} = \{H\} = I^*(C)$[92]

Definición de la asignación g*

Para fijar la asignación g* se distinguen 2 casos:

(1) D ≠ ∅. Entonces g*= g.

[90] Entonces, la interpretación del predicado monario C nos indica que la interpretación de 'τ' se da fuera de *D*∪*D'*, en una clase unitaria adicional.

[91] Como se dijo antes la idea intuitiva es que Ɛτ indica que el término individual 'τ' está en el dominio interior, que es el dominio de cuantificación, esto es, el que da valores a las variables.

[92] La idea intuitiva es que Cτ indica que el término individual 'τ' está en {H}; entonces, la interpretación del predicado monario C nos indica que la interpretación de 'τ' se da fuera de *D*∪*D'*.

(2) D= ø. g* es cualquier función de Var en D'.

Llamamos Int* al par ordenado formado por Int*= <$\mathcal{M}$*,g*> donde la interpretación de variables, constantes y predicados es la estipulada por g* y por *I** . Cuando D ≠ ø Int* coincide con Int en todo, la única diferencia es que Int* también ha de dar valor a los nuevos predicados $\mathcal{E}$ y *C;* sin embargo, cuando *D=ø, entonces g** es cualquier función de Var en *D'* y obviamente la interpretación de variables no coincide ya que g no otorgaba valores. Esto es, se cumple:
Int* (x)= g*(x), si D ≠ ø
Int* (c)= Int (c) cuando Int(c) está definida, y si Int(c) está indefinida entonces Int* (*c*) =H
Int* (P)= Int (P) (cuando P no es $\mathcal{E}$ o C*)*
Int*($\mathcal{E}$)=D
Int*(C)= {H}

Observación
Nótese que mientras las g variantes de g tomaban valores en D, una x-variante de g* toma valores en *D*∪*D'*.

En breve formulo y probo un lema de representación que nos permite verificar que para cualquier estructura de LLPIP hay una estructura de Lógica Clásica de Primer Orden (LCPO), en la que cualquier fórmula de LLPIP es verdadera en su estructura original, si su traducción es verdadera en la estructura correspondiente de LCPO, usando asignaciones pertinentes.

Como primer paso para la demostración del lema, se define una función de traducción (Trad) que traduce las fórmulas de LLPIP en fórmulas de LCPO. Es decir, Trad: Form(LLPIP) → Form(LCPO)

3.3.2. Definición por recursión de la función Trad para LLPIP

Paso Básico

Para $P^n \tau_1 \ldots \tau_n$

$$\mathrm{Trad}\,(P^n \tau_1 \ldots \tau_n) := \begin{cases} (\exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\, \tau_1 \wedge \neg C\, \tau_2 \;\wedge\; \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow (P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n)_{\text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta}} \\ \\ (\neg C\, \tau_1 \wedge \neg C\, \tau_2 \;\wedge\; \ldots \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow (P^n\, \tau_1 \ldots \tau_n)\ _{\text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada}} \end{cases}$$

En especial

Para $\tau_1=\tau_2$

$$\text{Trad}(\tau_1=\tau_2) := \begin{cases} (\exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2)) \to (\tau_1=\tau_2) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2) \to (\tau_1=\tau_2) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada} \end{cases}$$

Pasos Inductivos

Supuesto que está definido para fórmulas cualesquiera φ (cuyos términos son τ_1 , τ_2 , ...τ_n) y ψ (cuyos términos son t_1 , t_2 , ...t_m) se define para

1. Para $\neg\varphi$

$$\text{Trad}(\neg\varphi) := \begin{cases} (\exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \to \neg\, \text{Trad}(\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \to \neg\, \text{Trad}(\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada} \end{cases}$$

2. Para $(\varphi \rightarrow \psi)$

$$\text{Trad}(\varphi \to \psi) := \begin{cases} (\exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg C t_m)) \to (\text{Trad}(\varphi) \to \text{Trad}(\psi)) \\ \qquad \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg C t_m)) \to (\text{Trad}(\varphi) \to \text{Trad}(\psi)) \\ \qquad \text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada} \end{cases}$$

3. Para $(\forall x\ \varphi)$

$$\text{Trad}(\forall x\ \varphi) := \begin{cases} (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \to \forall x\, (\mathcal{E}x \to \text{Trad}(\varphi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta o Cerrada} \end{cases}$$

3.3.3. Demostración inductiva del lema de representación para LLPIP

Lema de representación

Para cada estructura $\mathcal{M}\in$(EstT(LLPIP)) y cada asignación g en $\mathcal{M}$, hay una estructura $\mathcal{M}^*$=Conv($\mathcal{M}$) y una asignación g* tal que: $\mathcal{M}\vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad (φ) para cualquier fórmula φ del sistema LLPIP.

Para realizar la prueba hay que tener presente la definición de satisfacción de fórmulas de LLPIP, la definición recursiva fórmulas de LL, así como las definiciones de Conv y Trad.

En la traducción del sistema LLIT a LCPO, bastaba con considerar dos casos, cuando D≠ø y cuando D=ø, porque las condiciones de satisfacción de fórmulas eran diferentes en cada caso. Ahora para la traducción del sistema LLPIP a LCPO se seguirá ese mismo procedimiento, sólo que adicionalmente se contemplará el caso en el que las fórmulas incluyan alguna constante individual que no tome valores en ninguno de los dominios D o D', pues en ese caso la fórmula es automáticamente verdadera, independientemente de su forma lógica, tal como se señala en la definición de la noción de satisfacción de fórmulas en LLPIP.

Paso Base

Cuando $\varphi=P^n\tau_1...\tau_n$, es una fórmula atómica de LLPIP, hay que considerar:
Caso 0. Cuando $P^n\tau_1...\tau_n$, contiene alguna constante indefinida.
Caso 1. Cuando D≠ø y la fórmula $P^n\tau_1...\tau_n$ de LLPIP carece de constantes indefinidas.
Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula $P^n\tau_1...\tau_n$ de LLPIP carece de constantes indefinidas.

Caso 0. Si $P^n\tau_1...\tau_n$ contiene alguna constante indefinida.
Queremos demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g P^n \tau_1...\tau_n$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad ($P^n \tau_1...\tau_n$).
Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, estamos en el caso 0 de la definición de satisfacción en el que, cuando la fórmula de LLPIP contiene alguna constante cuya interpretación está indefinida, (por no tomar valores ni en D ni en D') le corresponde siempre valor verdadero. Así que independientemente de la interpretación de los términos y los predicados que aparezcan en la fórmula se tiene que $\mathcal{M}\vDash_g P^n\tau_1...\tau_n$.

Por otra parte, para Trad ($P^n \tau_1...\tau_n$), tenemos que considerar dos casos:

(1) si la fórmula es abierta, tenemos que Trad ($P^n \tau_1...\tau_n$)=$(\exists x\mathcal{E}x\wedge(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2 \wedge ...\wedge\neg C\tau_n))\rightarrow P^n\tau_1...\tau_n$ y en tanto que estamos hablando de fórmulas que contienen alguna constante indefinida, la serie de conjunciones $(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2 \wedge ...\wedge\neg C\tau_n)$ resulta falsa, entonces el antecedente del condicional es falso y por lo tanto el condicional es verdadero, $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*} (\exists x\mathcal{E}x\wedge(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2 \wedge ...\wedge\neg C\tau_n))\rightarrow P^n\tau_1...\tau_n$.

(2) Si la fórmula fuera cerrada, Trad ($P^n\ \tau_1...\tau_n$)= $(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow P^n\tau_1...\tau_n$ y de nueva cuenta el antecedente del condicional resultaría falso y por tanto el condicional verdadero, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow P^n\tau_1...\tau_n$.

Por lo tanto, $\mathcal{M} \vDash_g P^n\ \tau_1...\tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E} x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow P^n\tau_1...\tau_n$,
o bien, $\mathcal{M} \vDash_g P^n\ \tau_1...\tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow P^n\tau_1...\tau_n$,
Por lo tanto, en cualquier caso, $\mathcal{M} \vDash_g P^n\ \tau_1...\tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\ \tau_1...\tau_n$),

En particular
Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula de LLPIP que contiene alguna constante indefinida.
Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1 = \tau_2)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\tau_1 = \tau_2)$
Dicha equivalencia se demuestra usando los mismos argumentos que en el caso anterior.

Caso 1. $D \neq \emptyset$ y la fórmula $P^n\tau_1...\tau_n$ de LLPIP carece de constantes indefinidas.
Cuando $P^n\tau_1...\tau_n$ es una fórmula abierta de LLPIP.
$\mathcal{M} \vDash_g P^n\ \tau_1...\tau_n$ syss $<Int(\tau_1),...,Int(\tau_n)> \in Int(P)$ Por definición de satisfacción en LLPIP
syss $<Int^*(\tau_1),...,Int^*(\tau_n)> \in Int^*(P)$ Por definición de Int*[93]
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} P^n\ \tau_1...\tau_n$. Por la definición de satisfacción de LCPO
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E} x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow P^n\ \tau_1...\tau_n$. Por definición de $\mathcal{E}$ y de C.[94]
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\ \tau_1...\tau_n$). Por definición de Trad.

Cuando $P^n\tau_1...\tau_n$ es una fórmula cerrada de LLIPIP.
Por tanto, nuestro interés recae en la parte de la función de interpretación relativa a las constantes.
$\mathcal{M} \vDash_g P^n\ \tau_1...\tau_n$ syss $<Int(\tau_1),...,Int(\tau_n)> \in Int(P)$ Por definición de satisfacción en LLPIP
syss $<Int^*(\tau_1),...,Int^*(\tau_n)> \in Int^*(P)$ Por definición de Int* ya que no hay constantes indefinidas.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} P^n\ \tau_1...\tau_n$. Por la definición de satisfacción de LCPO
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow (P^n\ \tau_1...\tau_n)$. Por la definición de C.[95]
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($P^n\ \tau_1...\tau_n$). Por definición de Trad para fórmulas cerradas.

[93] Ya que la interpretación de τ_j en LLIT (para todos los j de 1 a n) coincide con la interpretación de τ_j en LCPO; esto es, $Int^*(\tau_j)=Int(\tau_j)$. De igual forma, Int*(P)= Int(P).

[94] Al ser $D \neq \emptyset$, se verifica $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\ \mathcal{E} x$ y como todos de los términos de la fórmula están en D o en D', es verdadero el antecedente del condicional y el valor final de la fórmula depende exclusivamente del de su consecuente. Ese es el único caso relevante, puesto que al tratarse de una fórmula en la cual no hay constantes indefinidas, la serie de conjunciones $(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n)$ serán verdaderas.

[95] Dado que la fórmula atómica carece de constantes indefinidas, el antecedente del condicional será verdadero y el valor final de la fórmula depende exclusivamente de que $Int^*(\tau_1),...,Int^*(\tau_n)> \in Int^*(P)$.

En particular

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula abierta de LLPIP (que carece de constantes indefinidas).

$\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1=\tau_2)$ syss Int (τ_1)=Int (τ_2). Por definición de satisfacción en LLPIP.

syss Int* (τ_1)=Int* (τ_2) Por definición de Int*

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\tau_1=\tau_2)$ Por definición de satisfacción de LCPO

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E} x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2)) \rightarrow (\tau_1=\tau_2)$ Por definición de $\mathcal{E}$ y de C.[96]

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\tau_1=\tau_2)$ Por definición de Trad.

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula cerrada de LLPIP (que carece de constantes indefinidas).

$\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1=\tau_2)$ syss Int (τ_1)=Int (τ_2) Por definición de satisfacción en LLPIP

syss Int* (τ_1)=Int* (τ_2) Por definición de Int*

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \tau_1=\tau_2$. Por definición de satisfacción de LCPO.

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2) \rightarrow (\tau_1=\tau_2)$. Por la definición de C.[97]

syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\tau_1=\tau_2)$ Por definición de Trad para fórmulas cerradas.

Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula $P^n\tau_1 \ldots \tau_n$ de LLPIP es abierta y carece de constantes indefinidas.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g P^n \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(P^n \tau_1 \ldots \tau_n)$.

Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, por definición de traducción, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(P^n \tau_1 \ldots \tau_n)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E} x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow (P^n \tau_1 \ldots \tau_n)$. Estamos en el subcaso 2.1. de la definición de satisfacción para LLPIP en el que independientemente de la interpretación de los términos y predicados que aparezcan en la fórmula, sabemos que si la fórmula es abierta se tiene que $\mathcal{M} \vDash_g P^n \tau_1 \ldots \tau_n$.

Por otra parte, al ser D=ø, entonces $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*} \exists x \mathcal{E} x$. Entonces, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E} x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow (P^n \tau_1 \ldots \tau_n)$.

Por lo tanto, $\mathcal{M} \vDash_g P^n \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x \mathcal{E} x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow (P^n \tau_1 \ldots \tau_n)$. Esto es, $\mathcal{M} \vDash_g P^n \tau_1 \ldots \tau_n$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(P^n \tau_1 \ldots \tau_n)$.

[96] Al ser D≠ø, se verifica $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x \mathcal{E} x$ y como todos de los términos de la fórmula están en D o en D', es verdadero el antecedente del condicional y el valor final de la fórmula depende exclusivamente del de su consecuente. Ese es el único caso relevante, puesto que al tratarse de una fórmula en la cual no hay constantes indefinidas, la conjunción $(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2)$ será verdadera.

[97] Nuevamente, dado que la fórmula atómica carece de constantes indefinidas, el antecedente del condicional será verdadero y el valor final de la fórmula depende exclusivamente de que $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\tau_1=\tau_2)$.

Cuando $P^n\tau_1...\tau_n$ es una *fórmula cerrada* de LLPIP. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

En particular

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula abierta de LLPIP.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\tau_1=\tau_2)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\tau_1=\tau_2)$

Dicha equivalencia se demuestra usando los mismos argumentos que en el caso anterior.

Cuando $\tau_1 = \tau_2$ es una *fórmula cerrada* de LLPIP. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

Pasos inductivos

Hipótesis Inductiva (H.I.): $\mathcal{M}\vDash_g\varphi$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$Trad (φ). Donde $\varphi\in$Form(LLPIP)

Paso Inductivo 1. Trad($\neg\varphi$)

Donde φ es cualquier fórmula de LLPIP cuyos términos son $\tau_1, \tau_2,...,\tau_n$. Hay que considerar:

Caso 0. Cuando en $\neg\varphi$, φ contiene alguna constante indefinida.

Caso 1. Cuando D≠ø y la fórmula φ de LLPIP carece de constantes indefinidas.

Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula φ de LLPIP carece de constantes indefinidas.

Caso 0. Cuando $\neg\varphi$ contiene alguna constante indefinida.

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$.

Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, estamos en el caso 0 de la definición de satisfacción en el que cuando la fórmula de LLPIP contiene alguna constante cuya interpretación está indefinida (por no tomar valores ni en D ni en D') le corresponde siempre valor verdadero. Así que independientemente de la interpretación de los términos y predicados que aparezcan en la fórmula, se tiene que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$.

Por otra parte, para Trad $(\neg\varphi)$, tenemos que considerar dos casos:

(1) si la fórmula es abierta, tenemos que Trad $(\neg\varphi)$ = $(\exists x \mathcal{E}x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow (\neg \text{Trad}(\varphi))$, y en tanto que estamos hablando de fórmulas que contienen alguna constante indefinida, la serie de conjunciones $(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n)$ resulta falsa, entonces el antecedente del condicional es falso y por lo tanto el condicional es verdadero, $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ $(\exists x \mathcal{E}x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge ... \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow (\neg \text{Trad}(\varphi))$.

(2) Si la fórmula fuera cerrada, Trad $(\neg\varphi)=(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2\wedge\ldots\wedge\neg C\tau_n)\rightarrow(\neg\,\mathrm{Trad}(\varphi))$ y de nueva cuenta el antecedente del condicional resultaría falso y por tanto el condicional verdadero, $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2\wedge\ldots\wedge\neg C\tau_n)\rightarrow(\neg\,\mathrm{Trad}(\varphi))$.
Luego en cualquier caso, $\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad$(\neg\varphi)$.

Por lo tanto, $\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\exists x\mathcal{E}x\wedge(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2\wedge\ldots\wedge\neg C\tau_n))\rightarrow(\neg\mathrm{Trad}(\varphi))$ o bien, $\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2\wedge\ldots\wedge\neg C\tau_n)\rightarrow(\neg\,\mathrm{Trad}(\varphi))$.

Caso 1. Cuando D≠ø y la fórmula φ de LLPIP carece de constantes indefinidas.
Cuando φ, es una fórmula abierta de LLPIP.
Por demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$. Por hipótesis inductiva sabemos que $\mathcal{M}\vDash_g\varphi$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$Trad (φ) y por tanto $\mathcal{M}\nvDash_g(\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\nvDash_{g^*}$ Trad (φ).
$\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}\nvDash_g\varphi$. Por definición de satisfacción para LLPIP.
syss $\mathcal{M}^*\nvDash_{g^*}$ Trad (φ). Por H.I.
syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}\neg(\mathrm{Trad}(\varphi))$. Por definición de satisfacción.
syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\exists x\,\mathcal{E}x\wedge(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2\wedge\ldots\wedge\neg C\tau_n))\rightarrow(\neg\,\mathrm{Trad}(\varphi))$. Por definición de $\mathcal{E}$ y de C.[98]
syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$. Por definición de Trad.

Cuando φ, es una fórmula cerrada de LLPIP que carece de constantes indefinidas.
Queremos demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$.
Por hipótesis inductiva sabemos que $\mathcal{M}\vDash_g\varphi$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$Trad (φ) y por tanto $\mathcal{M}\nvDash_g(\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\nvDash_{g^*}$ Trad $\varphi)$.
$\mathcal{M}\vDash_g\neg\varphi$ syss $\mathcal{M}\nvDash_g\varphi$. Por definición de satisfacción para LLPIP.
syss $\mathcal{M}^*\nvDash_{g^*}$ Trad (φ). Por H.I.
syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}\neg(\mathrm{Trad}(\varphi))$. Por definición de satisfacibilidad.
syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\neg C\tau_1\wedge\neg C\tau_2\wedge\ldots\wedge\neg C\tau_n)\rightarrow(\neg\,\mathrm{Trad}(\varphi))$. Por definición de C.[99]
syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $\neg\varphi$. Por definición de Trad.

Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula φ de LLPIP es abierta y carece de constantes indefinidas.
Queremos demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g(\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\neg\varphi)$.
Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

---

[98] Al ser D≠ø, se verifica $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}\exists x\,\mathcal{E}x$ y como todos de los términos de la fórmula se interpretan en DUD', es verdadero el antecedente del condicional y el valor final de la fórmula depende exclusivamente del de su consecuente.
[99] Dado que la fórmula atómica carece de constantes indefinidas, el antecedente del condicional será verdadero y el valor final de la fórmula depende exclusivamente de que $(\neg\,\mathrm{Trad}(\varphi))$ sea verdadero bajo esa interpretación.

Por una parte, al ser $(\neg\varphi)$ una fórmula abierta y sabiendo que φ no contiene constantes indefinidas, conforme a la definición de satisfacción para LLPIP (Subcaso 2.1.), se cumple que $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$.

Por otra parte, al ser D=∅, entonces $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y ello es suficiente para que $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow \neg \text{Trad } (\varphi)$.

Por consiguiente, $\mathcal{M} \vDash_g (\neg\varphi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow \neg \text{Trad } (\varphi)$
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad } (\neg\varphi)$.

Cuando φ es una *fórmula cerrada* de LLPIP. La solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

Paso Inductivo 2. Trad $(\varphi \rightarrow \psi)$
Donde φ y ψ son fórmulas cualesquiera de LLPIP cuyos términos son $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, para φ y $t_1, t_2 \ldots t_n$, para ψ.
Por hipótesis inductiva sabemos que $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad } (\varphi)$ y $\mathcal{M} \vDash_g \psi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad } (\psi)$.
Hay que considerar:
Caso 0. Cuando $(\varphi \rightarrow \psi)$ contiene alguna constante indefinida.
Caso 1. Cuando D≠∅ y ni la fórmula φ ni la fórmula ψ de LLPIP contienen constantes indefinidas.
Caso 2. Cuando D=∅ y ni la fórmula φ ni la fórmula ψ de LLPIP contienen constantes indefinidas.

Caso 0. Cuando $(\varphi \rightarrow \psi)$ es una fórmula de LLPIP que contiene alguna constante indefinida.
Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \text{Trad } (\varphi \rightarrow \psi)$.
Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, estamos en el caso 0 de la definición de satisfacción en el que cuando la fórmula de LLPIP contiene alguna constante cuya interpretación está indefinida (por no tomar valores ni en D ni en D') le corresponde siempre valor verdadero. Así que independientemente de la interpretación de los términos y predicados que aparezcan en la fórmula se tiene que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$.

Por otra parte, para Trad $(\varphi \rightarrow \psi)$, tenemos que considerar dos casos:

(1) si la fórmula es abierta, tenemos que Trad $(\varphi \to \psi) = (\exists x\, \mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \to (Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$ y en tanto que estamos hablando de fórmulas que contienen alguna constante indefinida, la serie de conjunciones $(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)$ o bien $(\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m)$, resulta falsa, entonces el antecedente del condicional es falso y por lo tanto el condicional es verdadero, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \to (Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$.

(2) Si la fórmula fuera cerrada, Trad $(\varphi \to \psi) = ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \to (Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$ y de nueva cuenta el antecedente del condicional resultaría falso y por tanto el condicional verdadero, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \to (Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$.

Por consiguiente, $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x\ \mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \to (Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$ o bien, $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \to (Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$.
Por consiguiente, $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (Trad(\varphi \to \psi))$.

Caso 1. $D \neq \emptyset$ y ni la fórmula φ ni la fórmula ψ de LLPIP contienen constantes indefinidas.
Cuando $(\varphi \to \psi)$ es una fórmula abierta de LLPIP.
Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \to \psi)$.
$\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M} \nvDash_g \varphi$ o $\mathcal{M} \vDash_g \psi$. Por definición de satisfacción en LLPIP.
syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad (φ) o $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad (ψ). Por H. I.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi) \to$ Trad (ψ). Por definición de satisfaccibilidad en LCPO
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x \to (Trad\,(\varphi) \to Trad(\psi))$. Pues el dominio interior es distinto de vacío.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E}x \wedge (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \to Trad\,(\varphi) \to Trad(\psi)$. Sabiendo que en φ no hay términos indefinidos.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\exists x \mathcal{E}x \wedge ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m)) \to ((Trad(\varphi) \to Trad(\psi))$. Pues en ψ no hay términos indefinidos.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \to \psi)$. Por definición de Trad para fórmulas abiertas.

Cuando $(\varphi \to \psi)$ es una fórmula cerrada de LLPIP que carece de constantes indefinidas.
Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \to \psi)$.
$\mathcal{M} \vDash_g (\varphi \to \psi)$ syss $\mathcal{M} \nvDash_g \varphi$ o $\mathcal{M} \vDash_g \psi$. Por definición de satisfacción en LLPIP.
syss $\mathcal{M}^* \nvDash_{g^*}$ Trad φ o $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ψ. Por H. I.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad $\varphi \to$ Trad ψ. Por definición de satisfaccibilidad.
syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*} (\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \to (Trad\,(\varphi) \to Trad(\psi))$.

Sabiendo que en φ no hay términos indefinidos.

syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots\wedge\neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots\wedge\neg Ct_m)$
$\rightarrow (\text{Trad}(\varphi)\rightarrow\text{Trad}(\psi))$. Pues en ψ no hay términos indefinidos.

syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \rightarrow\psi)$. Por definición de Trad para fórmulas cerradas.

Caso 2. D=ø y ni la fórmula φ ni la fórmula ψ de LLPIP contienen constantes indefinidas.
Cuando $(\varphi \rightarrow\psi)$ es una fórmula abierta de LLPIP.
Queremos demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g (\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \rightarrow \psi)$.
Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Estamos en el subcaso 2.1. de la definición de satisfacción de LLPIP y sabemos que si la fórmula es abierta se tiene que $\mathcal{M}\vDash_g(\varphi \rightarrow \psi)$.
Por otra parte, por definición de traducción, $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \rightarrow \psi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\exists x \mathcal{E}x \wedge ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots\wedge\neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots\wedge\neg Ct_n))\rightarrow\text{Trad}(\varphi)\rightarrow\text{Trad}(\psi))$.
Además, al ser D=ø, entonces $\mathcal{M}^*\nvDash_{g^*} \exists x\, \mathcal{E}x$ y ello es suficiente para que $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}(\exists x \mathcal{E}x \wedge ((\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots\wedge\neg C\tau_n) \wedge (\neg C\,t_1 \wedge \neg C\,t_2 \wedge \ldots\wedge\neg Ct_n))\rightarrow\text{Trad}(\varphi)\rightarrow\text{Trad}(\psi))$.
Por consiguiente, $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\varphi \rightarrow \psi)$.

Cuando $(\varphi \rightarrow\psi)$ es una *fórmula cerrada* de LLPIP, la solución coincide con la dada para fórmulas cerradas del Caso 1.

Paso Inductivo 3. Trad $(\forall x\, \varphi)$
Donde φ es cualesquier fórmula de LLPIP cuyos términos son τ_1, τ_2 ,…,τ_n, con independencia de si se trata de una fórmula abierta o cerrada. Hay que considerar:
Caso 0. Cuando $\forall x\, \varphi$ es una fórmula de LLPIP que contiene alguna constante indefinida.
Caso 1. Cuando D≠ø y la fórmula φ de LLPIP carece de constantes indefinidas.
Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula φ de LLPIP carece de constantes indefinidas.

Caso 0. Cuando $\forall x\, \varphi$ es una fórmula de LLPIP que contiene alguna constante indefinida.
Queremos demostrar que $\mathcal{M}\vDash_g (\forall x\, \varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\vDash_{g^*}$ Trad $(\forall x\, \varphi)$.
Para demostrar el bicondicional veremos que, en este caso particular, ambos lados son verdaderos.

Por una parte, estamos en el caso 0 de la definición de satisfacción en el que cuando la fórmula de LLPIP contiene alguna constante cuya interpretación está indefinida (por no tomar valores ni en D ni en D’) le corresponde siempre valor verdadero. Así que independientemente de la interpretación de los términos y predicados que aparezcan en la fórmula se tiene que $\mathcal{M}\models_{g}(\forall x\ \varphi)$.

Por otra parte, para Trad ($\forall x\ \varphi$), tenemos que considerar un sólo caso pues la traducción tanto de fórmulas cerradas como abiertas es la misma:

Tenemos que Trad ($\forall x\ \varphi$) $=(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow \forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi))$ y en tanto que estamos hablando de fórmulas que contienen alguna constante indefinida, la serie de conjunciones $(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)$ resulta falsa, entonces el antecedente del condicional es falso y por lo tanto el condicional es verdadero, $\mathcal{M}^*\models_{g^*}(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow \forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi))$.

Luego entonces, se trate de una fórmula abierta o cerrada, $\mathcal{M}\models_{g}(\forall x\varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\models_{g^*}(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow \forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi))$ syss $\mathcal{M}^*\models_{g^*}$ Trad ($\forall x\ \varphi$).

Caso 1. $D\neq\emptyset$.

Cuando $\forall x\ \varphi$ es una fórmula de LLPIP (abierta o cerrada)[100] no contiene constantes indefinidas.

Queremos demostrar que $\mathcal{M}\models_{g}(\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\models_{g^*}$ Trad ($\forall x\ \varphi$). Al ser $D\neq\emptyset$, la función $g=g^*$ y por lo tanto hay que demostrar que $\mathcal{M}\models_{g}(\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M}^*\models_{g}$ Trad ($\forall x\ \varphi$).

En primer lugar,

$\mathcal{M}\models_{g}(\forall x\ \varphi)$ syss $\mathcal{M}\models_{g'}\varphi$ para cada g´ (g´ es x-variante de que g valores en D).

Por definición de satisfacción de fórmulas en LLIT.

syss $\mathcal{M}^*\models_{g'^*}$ Trad (φ) para cada g´ por HI. La función g'* es la convertida sobre g'

syss (1) $\mathcal{M}^*\models_{g'}$ Trad (φ) para cada g´ Al ser g' con valores en $D\neq\emptyset$, entonces $g'^*=g'$.

Por otra parte,

$\mathcal{M}^*\models_{g}$ Trad ($\forall x\ \varphi$) syss $\mathcal{M}^*\models_{g}(\neg C\tau_1 \wedge \neg C\tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow \forall x(\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi))$.

<Sabiendo que en φ no hay constantes indefinidas>.[101]

syss $\mathcal{M}^*\models_{g}\forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi))$

syss (2) $\mathcal{M}^*\models_{g'}\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi)$ para cada g' que sea x-variante de g con valores en DUD'. Por definición de interpretación de

---

[100] Al igual que en la traducción del sistema LLIT, debemos verificar que en las fórmulas cuantificadas traducidas no se dé una diferencia con las fórmulas satisfacibles en la estructura original, debido a la diferencia de dominios con los que trabajan las funciones de asignación g y g*. Es por ello que aquí sigo la misma estrategia de mostración adoptada para el caso 1 de las fórmulas cuantificadas de la traducción del sistema LLIT.

[101] Como no hay constantes indefinidas en la fórmula cuantificada, el antecedente del condicional dominante es verdadero y el valor final de la fórmula depende del consecuente.

fórmulas cuantificadas en LCPO en la estructura con dominio DUD'.

(2) ⇒ (1)

Sea $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Ɛx → Trad(φ) para cada g' que sea x-variante de g con valores en DUD'.

Entonces $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Ɛx → Trad(φ) para cada g' x-variante de g con valores en D.[102]

Luego $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Trad(φ) para cada g´ (Al tomar valores en D, $\mathcal{M}^* \vDash_{g}$ Ɛx).

(1) ⇒ (2) Veremos que es válida la contrapositiva ¬(2) ⇒ ¬(1) (pues es equivalente a (1) ⇒ (2)). Suponemos que es falso que $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Ɛx → Trad(φ) para toda g' x-variante con valores en DUD'.

Entonces hay una g' x-variante de g con valores en DUD' tal que $\mathcal{M}^* \nvDash_{g'}$ Ɛx → Trad(φ).

Luego hay una g', x-variante de g que toma valores en DUD' tal que $\mathcal{M}^* \vDash_{g'}$ Ɛx y $\mathcal{M}^* \nvDash_{g'}$ Trad(φ).

Luego g' es x-variante que toma valores en D y $\mathcal{M}^* \nvDash_{g'}$ Trad(φ) (En caso contrario no puede ser verdadero Ɛx).

Caso 2. Cuando D=ø y la fórmula $\forall x\varphi$ de LLPIP carece de constantes indefinidas.

$\forall x\varphi$ es una fórmula de LLPIP (abierta o cerrada)

Queremos demostrar que $\mathcal{M} \vDash_{g}$ ($\forall x\, \varphi$) syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad ($\forall x\, \varphi$).

Sabemos que, $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ ($\neg C\, \tau_1 \wedge \neg C\, \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n$)→ ∀x (Ɛx → Trad($\varphi$)) syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad (∀x φ). Por definición de Trad. Nótese que entonces lo que se quiere probar es que, $\mathcal{M} \vDash_{g}$ ($\forall x\, \varphi$) syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ ($\neg C\, \tau_1 \wedge \neg C\, \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n$)→ $\forall x$ (Ɛx → Trad (φ)).

Para ver que el bicondicional es cierto, basta notar que $\mathcal{M} \vDash_{g}$ ($\forall x\, \varphi$) es siempre verdadero por definición de satisfacción para LLPIP y $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ ($\neg C\, \tau_1 \wedge \neg C\, \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n$)→ $\forall x$ (Ɛx → Trad (φ)), es verdadero, porque la fórmula cuantificada carece de constantes indefinidas, entonces el antecedente del condicional dominante es verdadero y el valor de verdad final de la fórmula dependerá del consecuente, que por vacuidad, pues D= ø, será siempre verdadero.[103]

[102] Las g' x-variantes de g con valores en D son un subconjunto de las g' x-variantes de g con valores en DUD'.

[103] Si D=ø, como *I*(Ɛ)=D, entonces ninguna asignación puede satisfacer Ɛx y en cambio todas satisfacen (Ɛx → Trad (φ)). En particular, todas las x-variantes de g* y por consiguiente g* satisface $\forall x$ (Ɛx → Trad (φ)), esto es, Trad $\forall x\, \varphi$. Este resultado es reflejo fiel de que en LLPIP, cuando D=ø y una fórmula de LLPIP es abierta o cerrada del tipo $\forall x\, \varphi$, entonces Int(φ) satisface automáticamente a dicha fórmula.

TERCERA PARTE

Apartado Final

Capacidad de análisis lógico en algunos sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios

4.1. Capacidades de los sistemas lógicos

Inicié el estudio del tema de las capacidades de los sistemas lógicos revisando lo que había al respecto en los estudios clásicos. Fue así que presenté a las capacidades de expresividad y deducibilidad, (expresividad como capacidad para caracterizar estructuras idealmente hasta isomorfía y a la capacidad deductiva como el poder del cálculo que idealmente mantiene el control sintáctico del poder expresivo del sistema lógico), como capacidades reconocibles en cualquier sistema lógico; con independencia de si se trata de sistemas lógicos clásicos o no clásicos. Adicionalmente propuse que para comprender mejor la diversidad de sistemas lógicos, era adecuado identificar en ellos una capacidad distinta a las de expresividad y deducibilidad. Ello es así porque además de interesarnos por la caracterización de estructuras y la demostración de teoremas, también valoramos otras consideraciones presentes al emplear un sistema lógico, tales como: la simpleza técnica con la que se formaliza la clase de fórmulas válidas, que el sistema lógico represente con mayor naturalidad la forma en que se efectúan las relaciones de inferencia que se formalizan con él o que el sistema lógico pueda dar cuenta de otros aspectos presentes en las proposiciones y en la producción de inferencias; como al reconocer el papel de las presuposiciones de existencia, por citar alguno de los muchos factores que puede ser de interés recuperar al diseñar un sistema lógico.

Todos estos aspectos que también valoramos del funcionamiento de un sistema lógico los identifico como parte de esa capacidad adicional a la que llamo capacidad de análisis y que defino como *la aportación que proporciona la elección de las constantes lógicas del sistema lógico al desempeño del mismo.*

La aportación de las constantes lógicas elegidas en el sistema se materializa en el modo de presentación de éste, es decir, en la definición de los elementos que conforman al sistema. En 1.1. del primer apartado de esta tesis, planteé que elementos indispensables de un sistema lógico son: (a) que tenga un lenguaje formal y (b) que cuente con un medio para el estudio formal de la relación de inferencia; ya sea por una vía sintáctica, al definir un cálculo, o por una vía semántica, al definir una semántica. Entonces, decir que la capacidad de análisis se manifiesta en el modo de presentación del sistema, quiere decir que la selección de las constantes lógicas condiciona la definición del lenguaje formal, del cálculo y/o la semántica del sistema. Por eso sostengo que para estudiar la capacidad de análisis de un sistema lógico hay que estudiar el modo de presentación de tal sistema.

La capacidad de análisis permite comprender mejor la diversidad de sistemas lógicos, porque nos permite apreciar que no es adecuado suponer redundancia entre algunos de ellos, pues aunque dos sistemas coincidieran en la clase de estructuras que caracterizan y en el conjunto de teoremas que demuestran; es decir, aunque no se diferenciaran por su capacidad expresiva, ni por su capacidad deductiva, mientras exista entre ellos alguna modificación en el modo de presentar su sistema, esos cambios, por pequeños que sean, se traducen en diferencias técnicas y cognitivas entre los distintos sistemas lógicos. Afirmo entonces que cualquier cambio en el modo de presentación de un sistema lógico es también un cambio en la capacidad de análisis de tal sistema. Sostengo además que las variaciones en el modo de presentación de los sistemas lógicos obedecen precisamente al deseo de conseguir mejoras técnicas, o bien, al de conseguir mejoras en la manera de representar formalmente a las teorías, proposiciones o cadenas de razonamiento que inicialmente son observadas en los contextos discursivos en que se producen. Es por esto que he afirmado que el estudio de la capacidad de análisis nos comunica con la toma de conciencia de la práctica de crear sistemas lógicos.

Con el propósito de hacer un estudio detallado y lo más riguroso posible del modo de presentación de un sistema lógico, y de ese modo estudiar su capacidad de análisis, observé que desde hace décadas se han propuesto procedimientos metodológicos para examinar y comparar distintos sistemas lógicos, a los que se conoce como metodologías para la traducción entre lógicas. Planteé entonces que aplicar una de estas metodologías podía ser un método adecuado para examinar rigurosamente la capacidad de análisis de los sistemas lógicos involucrados en la traducción. En particular propuse aplicar la metodología de traducción a dos sistemas de lógica libre, obtenidos de la propuesta de Leblanc y Thomason [1968], como ejemplares de lógica no clásica.

De las metodologías de traducción disponibles seleccioné la propuesta por Manzano [1996] y mi estrategia de investigación consistió en aplicar una versión modificada de la primera parte de esa metodología, para desarrollar lo que desde ella se propone como la demostración de un lema de representación. Se trata de aplicar el nivel más elemental de la metodología de traducción de Manzano [1996], encaminada a establecer la equivalencia entre la verdad de una fórmula en el modelo de la lógica original y la de su traducción en el modelo convertido.

A pesar de que los sistemas de Leblanc y Thomason [1968] poseen un cálculo axiomático, para realizar la demostración de su lema de representación, únicamente los consideré como sistemas integrados por la definición de su lenguaje formal y de su semántica. De esa forma, llegar a demostrar el lema de representación implicó la revisión detallada de la manera en que está definida su semántica.

Paso ahora a examinar el detalle de los resultados de la demostración del lema de representación de los dos sistemas de lógica libre que seleccioné de la propuesta de Leblanc y Thomason [1968]; sistemas que nombré como de Lógica Libre con Interpretación Total (LLIT) y de Lógica Libre Positiva con Interpretación Parcial (LLPIP).

4.2. Estudio de los resultados del lema de representación en los sistemas LLIT y LLPIP

El objetivo era demostrar un lema de representación por el cual:

Lema de Representación

Para cada estructura $\mathcal{M}\in$(EST(LL)) y cada asignación g en $\mathcal{M}$, hay una estructura $\mathcal{M}^*\in$(EST(LCPO)) y una asignación g* (donde $\mathcal{M}^*$=Conv ($\mathcal{M}$)) tal que: $\mathcal{M} \vDash_{g} \varphi$ syss $\mathcal{M}^* \vDash_{g^*}$ Trad (φ) para cualquier fórmula φ del sistema LL.

Para demostrar el lema era preciso definir una función Conv para la conversión de estructuras y una función Trad para la traducción de fórmulas, que iban de las estructuras y fórmulas originales de los sistemas LLIT y LLPIP a estructuras de la lógica clásica de primer orden (LCPO). Una manera informal de plantear los resultados es comparar las definiciones formales de la semántica del sistema traducido con la definición de las funciones de su traducción, como lo hago a continuación.

4.2.1. Capacidad de análisis lógico de los sistemas LLIT y LCPO

Las diferencias entre el sistema lógico traducido y la lógica marco en la traducción se observa en dos aspectos. Por una parte, en lo relativo a la generación de estructuras, que es lo que compete a la definición de la función Conv. Por otra parte, lo relativo a la definición de la satisfacción para fórmulas, que es lo que compete a la definición de la función Trad.

En primer lugar presento una tabla con la definición de los modelos para LLIT, el sistema lógico de partida en la traducción, y la definición de la función $\text{Conv}_{\text{LLIT}}$. La revisión de ambas definiciones permite apreciar que el modo de presentación del sistema LLIT es transformado al modo de presentación de la lógica clásica de primer orden (LCPO) al momento de definir la función $Conv_{LLIT}$, puesto que la definición de la función $Conv_{LLIT}$ se realiza en estricto apego a los criterios semánticos de LCPO.

Veamos la tabla para después inspeccionar los detalles.

Modelo de LLIT	*Conv $_{LLIT}$*
Un modelo del sistema libre con interpretación total es una tripleta $\mathcal{M}$ =<*D, D', I* > Donde: D y D’: D⋂D’=∅, D o D’ pueden ser vacíos, pero D ∪ D’ ≠ ∅. I(c) ∈ (*D*∪*D’)* *I(P)* ⊆ *D*∪*D’* *I* es una función tal que *I*: Pred ∪Const→$\cup_{(n\in\mathbb{N})}$ ℘((D∪D’)^n) ∪(D∪D’)) donde *I*(*P^n*) ∈ ℘((D∪D’)^n) *I*(*c*) ∈D∪D’	Para cada $\mathcal{M}$=<*D, D', I* >, Conv($\mathcal{M}$); es una estructura de LCPO, a la que llamamos $\mathcal{M}$*, definida así: $\mathcal{M}$ * = < *D*∪*D’*, *I**, $\mathcal{E}^{M*}$> Donde: *I*(c)= I(c)* *I*(P) = I (P)* $\mathcal{E}^{M*}$=D= *I*(*$\mathcal{E}$*)*. Básicamente $\mathcal{M}$* es idéntica a $\mathcal{M}$, excepto porque: (1) sólo tiene un dominio, que es la unión de los dominios de $\mathcal{M}$, (2) *I* * es básicamente como *I* pero añadimos *I* *($\mathcal{E}$) a la estructura $\mathcal{M}$* como interpretación del nuevo predicado monario $\mathcal{E}$ (3) Ya que $\mathcal{E}$ recibe en toda estructura el dominio interior como interpretación, $\mathcal{E}$ es el predicado monádico que aplicado a un término individual ‘*τ*’ dice: *La interpretación de τ está en D.*
Asignación g $g(x) = \begin{cases} g{:}Var \rightarrow D;\ si\ D \neq \emptyset \\ Indefinido;\ si\ D=\emptyset \end{cases}$ Dada una asignación g y una variable x (x∈Var) se denomina asignación x-variante de g a toda asignación g’ que coincida con la asignación g en todo, excepto, tal vez, en el valor de la variable x. Dado un modelo $\mathcal{M}$ y una asignación g, denominamos interpretación a la tupla formada por ambos, **Int**=<$\mathcal{M}$,g>. Dicha tupla contiene la interpretación de los términos y predicados del lenguaje y se extiende para definir la satisfacción de las fórmulas del lenguaje.	Asignación g* Para fijar la asignación g* se distinguen 2 casos: (1) D ≠ ∅. Entonces g*=g. (2) D = ∅. g* es cualquier función de Var en D’. Llamamos Int* al par ordenado formado por Int*= <$\mathcal{M}$*,g*> donde la interpretación de variables, constantes y predicados es la estipulada por g* y por *I** . Cuando D ≠ ∅, entonces Int* coincide con Int en todo, la única diferencia es que Int* también ha de dar valor al nuevo predicado $\mathcal{E}$*;* sin embargo, cuando *D=∅, g** es cualquier función de Var en *D’* y obviamente la interpretación de variables no coincide. Esto es, se cumple: Int*(x)= g*(x). Si D ≠ ∅, entonces Int*(x)= g (x). Si *D= ∅,* entonces Int*(x) ≠ g (x). Int*(c)= Int(c) Int*(P)= Int(P) (cuando P no es $\mathcal{E}$*)* Int*($\mathcal{E}$)=D

Como podemos observar, la diferencia entre dominios que reconocía la semántica de LLIT, en $Conv_{LLIT}$ se resuelve uniendo los dominios que estaban separados, porque esa es una exigencia de la semántica de LCPO, ya que en LCPO sólo puede haber un único dominio. Que en la definición de $Conv_{LLIT}$ se puedan unir los dominios que estaban separados en LLIT, no representa ninguna dificultad técnica; no obstante, ha supuesto una diferencia importante con respecto a la capacidad de análisis del sistema LLIT. Pues, recordemos que la capacidad de análisis de LLIT proviene del modo en que son definidos formalmente sus modelos y el hecho de que el sistema LLIT tuviera sus dominios separados, era producto de la serie de decisiones que tomaron Leblanc y Thomason, con respecto a cómo deseaban reflejar el manejo de la presuposición de existencia, al diseñar su sistema lógico. Porque Leblanc y Thomason, incluían dos dominios y no se conformaron con el dominio unitario clásico. Los dos dominios disjuntos en el fondo reflejan que en la definición de la semántica del sistema LLIT se hace una diferencia entre constantes, aquellas que podían tomar valores del dominio D, que se entiende que son las que satisfacen una predicación de existencia, y aquellas otras en las que no es verdadera la predicación de existencia y que tomaban valores en el dominio D'.

La definición de $Conv_{LLIT}$ nos permite apreciar que es posible manejar la presuposición de existencia con un tratamiento técnico formal distinto, en el que se respeta la exigencia clásica de tener un único dominio de interpretación. Tan sólo se requiere reconocer una división interna en el dominio único, división que después se puede manejar añadiendo en la función $Conv_{LLIT}$ un predicado monario $\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*}$ que aplicado a un término individual 'τ' dice: *La interpretación de τ está en D.* En la definición de $Conv_{LLIT}$ vemos que la capacidad de análisis de LCPO puede extenderse para reflejar una diferencia en las constantes, diferencia que LCPO no hacía originalmente. Pero reconocer esa diferencia en las constantes supone que LCPO puede valerse de otros recursos que sí estén contemplados en su capacidad de análisis, como el añadir un predicado destacado $\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*}$. La inclusión del predicado $\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*}$ en la definición de las funciones $Conv_{LLIT}$, y como posteriormente se verá también reflejado en la definición de la función $Trad_{LLIT}$, que dé lugar a una traducción exitosa del sistema LLIT, nos permite apreciar que el sistema LLIT es compatible con que se maneje la existencia como si fuera una predicación monaria de individuos. Pero no hay que dejar de apreciar que esa manera de entender la existencia, como un predicado monario, es debatible en filosofía y en particular en las propuestas de sistemas lógicos para lógica libre más contemporáneas.[104]

[104] Para examinar razones en contra de entender al manejo de la existencia como predicación monaria en el contexto de sistemas de lógica libre, ver Redmond [2011] y Redmond y Fontaine [2011].

Otro de los aspectos en los que se ve la diferencia en análisis de los modelos de LLIT y la definición de la función $Conv_{LLIT}$ es que LLIT no admite que los cuantificadores puedan correr sobre el dominio D'. De hecho esa restricción del sistema LLIT no sólo distingue su análisis del de LCPO, también lo distingue de otras propuestas de sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios, en los cuales sí se permite que los cuantificadores puedan correr sobre el dominio D', sólo que en ese caso se incluye un segundo tipo de cuantificadores.[105] El hecho de que en LLIT no se admite que los cuantificadores corran sobre el dominio D' evita que requiera una duplicación de cuantificadores, pero ese tipo de diferencias en su capacidad de análisis se transforma en la definición de la función $Conv_{LLIT}$, a pesar de que esa restricción sobre los cuantificadores podrían tener algún significado filosófico de peso; como el no permitir la inclusión de un par de cuantificadores más por evitar el compromiso ontológico que ello suponga.

Un tercer aspecto en el que se transforma el análisis de los modelos de LLIT con respecto a $Conv_{LLIT}$ es que en LLIT se puede admitir que cualquiera de los dominios de interpretación pueda ser vacío, con excepción de que la unión de los dominios sea vacía. No obstante, cuando el dominio D, sobre el que sí corren los cuantificadores, es vacío, entonces la función de asignación g para variables queda indefinida. Pero en la definición de $Conv_{LLIT}$ no puede admitirse la posibilidad de que el dominio interior pueda ser vacío, puesto que en el análisis de LCPO el dominio de interpretación siempre es distinto de vacío y la función de asignación para variables no puede quedar indefinida. Entonces en la definición de $Conv_{LLIT}$ la función de asignación g*, opera igual que la función g de LLIT siempre que el dominio D sea distinto de vacío, pero si D es igual a vacío, entonces será cualquier función de Var en D'. Lo cual es un nuevo cambio en el análisis propuesto en LLIT. Además, que la función de asignación g* en $Conv_{LLIT}$ no pueda quedar indefinida, plantea una diferencia con el sistema LLIT que tiene que ser resuelta, en el procedimiento de traducción, al definir la función $Trad_{LLIT}$.

Como podemos apreciar en la definición de la función $Conv_{LLIT}$, la traducción de LLIT a LCPO transforma lo que aportaba el sistema LLIT con respecto a la manera de definir su formalismo para el manejo de presuposiciones de existencia con respecto a los términos singulares y a los dominios de interpretación de esos términos. Lo cual es especialmente notorio en el manejo de la posibilidad de un dominio vacío, pues en LCPO no hay tal inclusión, y la diferencia que ello supone, pone el reto de que la traducción lo resuelva en la manera en que defina la función $Trad_{LLIT}$ para fórmulas. Como veremos, la traducción

[105] Ver por ejemplo Priest (2010) quien plantea un sistema de lógica libre con semántica de dos dominios en donde emplea dos tipos de cuantificadores para trabajar en cada dominio. Otra propuesta es la de Routley (1966).

entre lógicas conseguirá preservar la noción de satisfacción de LLIT, pero el análisis de LLIT, que incluía la posibilidad de que el dominio sobre el que corren los cuantificadores pudiera ser vacío, es transformado por la capacidad de análisis de la lógica marco en la traducción.

Veamos los detalles de la definición de la noción de satisfacción para LLIT y de la definición de la función $Trad_{LLIT}$ en la siguiente tabla.

Fórmulas de LLIT	*Trad $_{LLIT}$*
Dada una fórmula φ en LLIT, $\mathcal{M}$ = <D,D',I> un modelo para LLIT y g, la función Int= <$\mathcal{M}$,g> se extenderá para que determine si las fórmulas de LLIT son satisfacibles o no lo son. La definición recursiva de satisfacción se basa en la construcción de fórmulas distinguiendo los casos en que el dominio interior es distinto de vacío o en el que es igual a vacío. Caso 1: Cuando el Dominio interior D es distinto de vacío. 1.1.Int satisface $P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n$ syss <Int (τ_1),..., Int (τ_n)> ∈ Int (P^n) 1.2.Int satisface $\tau_1 = \tau_2$ syss Int (τ_1) = Int (τ_2) 1.3.Int satisface $\neg\, \varphi$ syss no es el caso que Int satisface φ 1.4.Int satisface $\varphi \rightarrow \psi$ syss no es el caso que Int satisafce φ o que Int satisface ψ. 1.5.Int satisface $\forall x\, \varphi$ syss Int' satisface φ, para todo Int'= <M,g'> tal que g' es una x-variante de g. Caso 2: Cuando el Dominio interior D es vacío. 2.1. Sea ϕ una fórmula abierta o una fórmula cerrada del tipo $\forall x\, \varphi$. Entonces Int(φ) satisface a dicha fórmula. 2.2.Si la fórmula no es ni abierta ni universal, se siguen los puntos de 1.1 a 1.5 del caso 1 antes descrito. 2. Sólo lo estipulado de 1.1 a 2.2. corresponde a la noción de satisfacción (Int satisface φ) en el sistema LLIT. **Observaciones** (1) Siempre que Int satisface a φ, siendo Int=<$\mathcal{M}$,g>, podemos escribir $\mathcal{M} \vDash_g \varphi$. (2) Hay dos casos en el que la función g es irrelevante para la satisfacción de fórmulas: a. Cuando las fórmulas son cerradas, (en ese caso podía escribirse $\mathcal{M} \vDash \varphi$ en vez de $\mathcal{M} \vDash g\ \varphi$).	Sea $\varphi = (P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n)$ **Paso Básico** Sea $\varphi = (P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n)$ $\text{Trad}\ (P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n) & \text{Cuando } \phi \text{ es Abierta} \\ P^n\ \tau_1 \ldots \tau_n & \text{Cuando } \phi \text{ es cerrada} \end{cases}$ En especial Sea $\varphi = (\tau_1 = \tau_2)$ $\text{Trad}\ (\tau_1 = \tau_2) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow (\tau_1 = \tau_2) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ \tau_1 = \tau_2 & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$ **Pasos Inductivos** 1. Para $\neg\, \varphi$ $\text{Trad}\ (\neg \varphi) := \begin{cases} \exists x\, \mathcal{E}x \rightarrow \neg\, \text{Trad}\ (\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ \neg\, \text{Trad}\ (\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$

b. Cuando las fórmulas son abiertas y el dominio interior es vacío, pues en ese caso la función g queda indefinida para toda variable.	2. Para $(\varphi \rightarrow \psi)$ $\mathrm{Trad}\ (\varphi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \exists x\, \text{Ɛ}x \rightarrow (\mathrm{Trad}(\varphi) \rightarrow \mathrm{Trad}(\psi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ \mathrm{Trad}(\varphi) \rightarrow \mathrm{Trad}(\psi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es cerrada} \end{cases}$ 3. Para $(\forall x\ \varphi)$ $\mathrm{Trad}(\forall x\ \varphi) := \begin{cases} \forall x\ (\text{Ɛ}x \rightarrow \mathrm{Trad}\ (\varphi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta o Cerrada} \end{cases}$

La diferencia en análisis entre la definición de satisfacción convencional de LCPO y de la del sistema LLIT radica únicamente en la inclusión de la posibilidad de que el dominio interior D pueda ser vacío, pues en el caso en que el dominio D sea diferente de vacío, la noción de satisfacción de LLIT es igual a la noción de satisfacción convencional en LCPO. Pero cuando se traduce el caso en el que el dominio interior D es vacío, entonces hay que cuidar que si las fórmulas son abiertas o cerradas con cuantificación universal, sean siempre satisfacibles. La solución ofrecida en la traducción es que cuando se trate de fórmulas abiertas, se transformen en fórmulas condicionales cuyo antecedente sea ∃x Ɛx, puesto que si el dominio interior D es vacío, el antecedente será siempre falso y la fórmula total será siempre verdadera.

En el caso de las fórmulas cuantificadas universalmente, no hace falta hacer la diferencia entre fórmulas abiertas o cerradas, porque en las condiciones de verdad de las fórmulas cuantificadas siempre es relevante considerar la asignación para las variables. Además, la cláusula Ɛx en el antecedente del condicional de la traducción de las fórmulas universales, sirve tanto para relativizar la cuantificación a la extensión de Ɛ (esto es, hace referencia al dominio interno D), como para garantizar la satisfacción de las fórmulas cuando el dominio D es igual a vacío. Por lo tanto, es suficiente con la inclusión de una única cláusula Ɛx en el antecedente de las fórmulas traducidas universalmente, con independencia de si son fórmulas abiertas o cerradas.

La demostración inductiva del lema de representación para LLIT, nos proporciona la justificación formal de que la traducción de estructuras y fórmulas de LLIT a LCPO es adecuada. Pero no debemos dejar de ver que la traducción supone la pérdida de la capacidad de análisis de LLIT en la que se admitía explícitamente la posibilidad de que el dominio de interpretación para variables pudiera ser vacío y se hacía explícito que las constates tomaban valores en dos dominios disjuntos, D y D’. Esa propuesta del formalismo de LLIT, la de separar dominios e incluir la posibilidad de que alguno de ambos dominios pudiera ser vacío, no puede ser retenida en la traducción. Lo único que es recuperado en la traducción es la noción de satisfacción de LLIT, pero es presentada bajo el análisis de LCPO en la definición de $Trad_{LLIT}$.

El hecho de que la traducción sea exitosa, puede hacernos creer que la lógica clásica es suficiente para obtener lo planteado por el sistema LLIT. Pero, como hemos visto, la traducción nos permite recuperar la noción de satisfacción y el conjunto de fórmulas válidas, pero con la correspondiente transformación de la aportación del análisis del sistema LLIT. El análisis de LLIT se transforma porque se pierde la posibilidad de incluir explícitamente un dominio vacío, no se hace explícita la diferencia entre los valores que pueden asignarse a términos que denotan existentes y los que no lo hacen, no se hace una diferencia entre dominios y tampoco se preservan las intuiciones de que haya variables que no toman valores en el dominio exterior o que se rechace que haya cuantificadores que corran sobre D’.

Por parte de la capacidad de análisis de LCPO, la traducción nos muestra que la lógica clásica expresa con sus recursos lo que la lógica libre expresaba con los propios. Vemos que en lógica clásica el cuantificador particular en realidad no tiene un sentido de existencia fuerte, por eso en la traducción es preciso añadir un predicado destacado que hace la función de una predicación de existencia fuerte y sirve para relativizar los cuantificadores y así conseguir los resultados de la noción de satisfacción de LLIT.

Tal como indiqué desde la introducción, un examen directo de las definiciones del formalismo de los sistemas involucrados en la traducción, sería suficiente para apreciar prácticamente cada una de los aspectos que he destacado del análisis de LLIT y de LCPO. Pero la ventaja de hacer estas observaciones después de haber realizado un proceso de traducción, que nos llevó a demostrar un lema de representación, es que vemos que lo conseguido en términos de la noción de satisfacción de LLIT también es conseguido por LCPO, pero planteado desde sus propios recursos de análisis. Con lo cual vemos que el formalismo de un sistema lógico puede adaptarse de tal manera que nos permita reflejar el resultado conseguido por un sistema con un formalismo distinto. Además, al haber realizado la traducción entre lógicas, contamos con una prueba inductiva que al demostrar que la traducción de LLIT a LCPO es operativa, también es prueba de que examinamos de forma exhaustiva el modo de presentación de LLIT, ya que obtuvimos los mismos resultados de la satisfacción de LLIT en términos de LCPO. Es decir obtuvimos la equivalencia entre la verdad de una fórmula, en el modelo de LLIT y la verdad de la fórmula traducida en el modelo $\mathcal{M}$ * de LCPO.

Desde el momento que sabemos que se realizaría una traducción de LLIT a LCPO y que la capacidad de análisis está contenida en el modo de presentación del sistema de partida en la traducción, sabemos que en el proceso de traducción el análisis de LLIT se transformará al de LCPO. Pero lo que ganamos al haber realizado ese proceso de traducción es el conocimiento detallado de la manera en que operan los elementos formales del sistema LLIT (el detalle de la definición de los dominios, del funcionamiento de las funciones de interpretación y de asignación, así como el alcance de los cuantificadores) para lograr los resultados de su noción de satisfacción e igualmente conocer el detalle de una manera en la que se puede extender el formalismo de LCPO para obtener los mismos resultados de la noción de satisfacción de LLIT.

En la traducción de LLIT a LCPO se explicita la inclusión de un predicado destacado ε que es tanto como hacer explícito el manejo de la existencia como una predicación monaria. Pero los sistemas de lógica libre más contemporáneos han cuestionado que el manejo de la existencia, como predicación monaria sea un manejo adecuado y suficiente de la noción de existencia. Así que la crítica sobre el manejo de la noción de existencia no toca únicamente a la traducción ofrecida de LLIT en LCPO, sino que es más bien una crítica que también toca a las propuestas de sistemas de lógica libre con semántica de dos dominios. Lo cual invita a una revisión más amplia de la capacidad de análisis de sistemas de lógica libre rivales. Pero lo importante en este estudio era resaltar la plausibilidad y utilidad del reconocimiento de una capacidad adicional de los sistemas lógicos, la capacidad de análisis del sistema lógico. No obstante, es pertinente notar que si nos remitimos a consideraciones técnicas, el sistema LCPO para lógica libre, que se obtiene de la traducción de LLIT, en la manera en que se modifica para poder recuperar la noción de satisfacción de un sistema como LLIT, haría bastante más compleja la formalización de sentencias y argumentos.

Aunque, más allá del punto de vista de la accesibilidad o simpleza técnica, la diferencia está en el modo de hacer explícita la presuposición de existencia tanto respecto de los términos individuales, como en relación a la posibilidad extrema de admitir un dominio de interpretación para variables que sea vacío. En la medida en que reconozcamos valor lógico al esfuerzo de diseñar sistemas lógicos en los que se plantee de manera explícita los rasgos peculiares de las relaciones de inferencia que se desea sistematizar (como en el caso de los sistemas de lógica libre, al hacer explícita sus presuposiciones de existencia, aunque lo mismo puede decirse de otros intereses de distintos sistemas no clásicos) en esa medida apreciaremos también la importancia de reconocer que cada sistema lógico, aún si es parte de un mismo tipo de lógica, en la manera en que presenta su formalismo hace una aportación que lo distingue del resto de los sistemas lógicos.

Igualmente es importante reconocer que ser sensible al hecho de que los sistemas lógicos tengan una capacidad de análisis, nos conduce a revisar cuáles fueron las razones de los lógicos que diseñaron al sistema para que se constituyera un sistema lógico en el modo en que lo presentan formalmente. Esto es, nos hace observar la práctica lógica de crear sistemas lógicos, como un terreno de investigación por explorar.

Pasemos ahora a revisar la diferencia entre el sistema LLIT y el sistema LLPIP y el resultado de la traducción de LLPIP a LCPO.

4.2.2. Capacidad de análisis lógico del sistema LLPIP en relación con LCPO

Antes de revisar lo que nos arrojó la demostración del lema de representación del sistema LLIT en su traducción a LCPO, es útil reconocer la diferencia en capacidad de análisis entre los sistemas LLPIP y LLIT. El sistema LLPIP es casi idéntico a LLIT, excepto porque introduce una nueva distinción en las constantes, pues además incluye la posibilidad de considerar constantes que carecen completamente de interpretación. Por tratarse de constantes completamente carentes de interpretación no necesitan incluir un dominio nuevo para ellas, porque son constantes que no toman valores en ninguno de los dos dominios considerados. Esta diferencia en el análisis de LLPIP se ve reflejado en su formalismo, en el modo en que define su función de interpretación, pues se convierte en una interpretación parcial, por cuanto puede dejar sin interpretar a aquellas constantes que no toman valores ni en D ni en D’. Este cambio en la interpretación le demanda hacer ajustes también en la definición de la noción de satisfacción, pues en tanto que LLPIP es un sistema lógico comprometido con la bivalencia, de algún modo debe asignar valor de verdad a las fórmulas que contienen a las constantes que carecen de interpretación. A ese respecto Leblanc y Thomason decidieron adoptar una estrategia de asignación por estipulación y hablan de una satisfacción$_V$, que hace que en ese caso la lógica deje de ser operativa y composicional,[106] puesto que es suficiente saber que una fórmula contiene una de las constantes especiales para que la fórmula sea automáticamente verdadera. Deja entonces de operar la lógica, porque no se necesita calcular el valor de la fórmula, porque las reglas de las conectivas dejan de ser operantes. Además deja de ser composicional, porque adicionalmente deja de hacer falta conocer el valor de verdad de

[106] El principio de composicionalidad sostiene que cualquier sentencia, independientemente de su complejidad, puede ser considerada como el resultado de un proceso de construcción sistemática que adiciona palabras lógicas una a una. Gamut [2002; 15].

las fórmulas atómicas que también formaran parte de la fórmula que se evalúa y que contiene alguna constante de las no denotativas.

Al igual que en el caso del sistema LLIT, revisaré las diferencias en análisis entre el sistema lógico traducido LLPIP y su traducción a LCPO. Por una parte, observaré lo relativo a la generación de estructuras, que es lo que compete a la definición de la función $\mathrm{Conv}_{\mathrm{LLPIP}}$. Y por otra parte, observaré lo relativo a la definición de la noción de satisfacción para fórmulas, que es lo que compete a la definición de la función $\mathrm{Trad}_{\mathrm{LLPIP}}$. Comienzo por la revisión de la estructura de LLPIP y de su traducción a $\mathrm{Conv}_{\mathrm{LLPIP}}$

Modelo de LLPIP	*Conv* $_{LLPIP}$
Un modelo del sistema libre positivo con interpretación parcial es una tripleta $\mathcal{M} = \langle D, D', I \rangle$ Donde: D y D': D∩D'=∅, D o D' pueden ser vacíos, pero D ∪ D' ≠ ∅. *I* (c) ∈ (*D*∪*D'*) o está indefinido y por tanto *I*(c)∉(*D*∪*D'*) $I(P^n) \subseteq (D \cup D')^n$ I es una función parcial definida sobre D∪D' esto es, no todas las constantes individuales *c* ∈ Const se les asigna valor en D∪D'. A las constantes *c* que no se les asigna valor en D∪D' les llamaremos indefinidas.	Para cada $\mathcal{M} = \langle D, D', I \rangle$, Conv($\mathcal{M}$); es una estructura de LCPO, a la que llamamos $\mathcal{M}^*$, definida así: $\mathcal{M}^* = \langle (D \cup D') \cup \{H\}, I^*, \mathcal{E}^{M^*}, C^{M^*} \rangle$ Donde: H∉ (*D*∪*D'*) $I^*(c) = \mathrm{Const} \to (D \cup D') \cup \{H\}$, esto es $I^*(c) = \begin{cases} I(c), \text{ si } c \text{ está definido} \\ H \text{ en otro caso} \end{cases}$ $I^*(P) = I(P)$ $\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*} = D = I^*(\mathcal{E})$ $C^{\mathcal{M}^*} = \{H\} = I^*(C)$ Básicamente $\mathcal{M}^*$ es idéntica a $\mathcal{M}$, excepto porque: (1) sólo tiene un dominio, que es la unión de los dominios de $\mathcal{M}$ con la clase unitaria {H} esto es, ((D∪D')∪{H} (2) I* es básicamente como *I* pero añadimos en $\mathcal{M}^*$ la interpretación de *I**(Ɛ) e *I**(*C*) así como la interpretación de las constantes que no denotan.
Asignación g $g(x) = \begin{cases} g: VAR \to D;\ D \neq \emptyset \\ \text{Indefinido};\ D = \emptyset \end{cases}$ Dada una asignación g y una variable x (x∈Var) se denomina asignación x-variante de g a toda asignación g' que coincida con la asignación g	Asignación g* 2 casos: (1) D ≠ ∅. Entonces g*=g. (2) D= ∅. g* es cualquier función de VAR en D'. Llamamos Int* al par ordenado formado por $\mathrm{Int}^* = \langle \mathcal{M}^*, g^* \rangle$ donde la interpretación de variables, constantes y predicados es la estipulada por g* y por *I** . Cuando D ≠ ∅ Int* coincide con Int en todo, la única diferencia es que Int* también ha de dar valor a

en todo, excepto, tal vez, en el valor de la variable x. Dado un modelo $\mathcal{M}$ y una asignación g, denominamos interpretación a la tupla formada por ambos, **Int**= <$\mathcal{M}$,g>. Dicha tupla contiene la interpretación de los términos y predicados del lenguaje y se extiende para definir la satisfacción de todas las fórmulas del lenguaje.	los nuevos predicados $\mathcal{E}$ y *C;* sin embargo, cuando *D=ø, entonces g** es cualquier función de Var en *D'* y obviamente la interpretación de variables no coincide ya que g no otorgaba valores. Esto es, se cumple: Int* (x)= g*(x), si D ≠ ø Int* (c)= Int (c) cuando Int(c) está definida, y si Int(c) está indefinida entonces Int* (*c*) =H Int* (P)= Int (P) (cuando P no es $\mathcal{E}$ o C*)* Int*($\mathcal{E}$)=D Int*(C)= {H}

Que el sistema LLPIP pueda incluir constantes que no toman valores en ninguno de los dominios de interpretación del sistema de lógica libre con dos dominios, requiere un cambio en la interpretación de las constantes, pues la función de interpretación de constantes se convierte en parcial; es decir, la función de interpretación *I* se convierte en una interpretación que puede dejar sin valor a algunos términos, puesto que admite que algunas constantes no tomen valores en ninguno de los dominios de interpretación, pero con ello necesita además hacer un cambio en la noción de satisfacción. Tomando en cuenta que la función de interpretación es parcial, existían distintas opciones para atribuir valor de verdad para las fórmulas cuyos componentes se quedan sin interpretación, pero Leblanc y Thomason adoptan la postura técnicamente más sencilla, aunque quizá no sea la más intuitiva, pues admiten una satisfacción por estipulación para esos casos. En el sistema LLPIP las fórmulas con esas constantes especiales adquieren automáticamente el valor de verdaderas.

En la traducción del sistema LLPIP a LCPO, no puede mantenerse la propuesta de que haya constantes carentes de interpretación, porque no se admite una función interpretación que se quede indeterminada, ni que las constantes no tomen valores de un dominio de interpretación, y tampoco se recupera la idea de una asignación que haga satisfacibles a las fórmulas sólo por estipulación. En la definición de la función $\mathrm{Conv}_{\mathrm{LLPIP}}$, la interpretación debe estar definida siempre, debe de incluirse un dominio más para la diferencia que se quiere plantear entre constantes, y la noción de satisfacción tiene que ser la clásica, lo cual debe resolverse en la definición de la función $\mathrm{Trad}_{\mathrm{LLPIP}}$. Como sabemos, la capacidad de análisis de LLPIP es transformada en la definición de la función $\mathrm{Conv}_{\mathrm{LLPIP}}$ puesto que la interpretación no puede ser parcial y se debe cubrir el requisito técnico de incluir un dominio especial para las constantes que no toman valores ni en D ni en D', se incluye por ello el dominio especial {H}. Lo cual a su vez demanda la introducción de un segundo predicado destacado que permitirá hacer las diferencias en el dominio (D∪D’)∪{H}, por ello se incluye el predicado $C^{\mathcal{M}^*}$. Todo lo relativo al manejo de la posibilidad de que el dominio D pueda ser vacío y de que la función de asignación para variables debe ser siempre operativa, queda igual que en el tratamiento recibido para el caso del sistema LLIT.

Notemos que $C^{\mathcal{M}^*}$ no es como $\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*}$, una predicación monaria de existencia, es tan sólo el requerimiento técnico para reconocer un tercer tipo de fórmulas. $C\tau$ intuitivamente indica que el término individual ‘τ’ está en {H}, con lo cual indica que la interpretación de ‘τ’ se da fuera de *D∪D’*. Pero la intuición original presente en el sistema LLPIP con respecto a que las constantes especiales no se interpretan en dominio alguno, porque son completamente carentes de interpretación, como si fueran nombres vacíos, no se preserva en la traducción.

La definición de la función $\text{Conv}_{\text{LLPIP}}$ está en concordancia con el modo de presentación de LCPO y al mismo tiempo establece los cambios requeridos para que la definición de la función $\text{Trad}_{\text{LLPIP}}$ pueda recuperar íntegramente la definición de la noción de satisfacción de fórmulas de LLPIP. Examinemos el detalle.

Fórmulas de LLPIP	*Trad* $_{LLPIP}$
El sistema *LLPIP* de interpretación parcial emplea la denominada satisfacción_V que otorga valor de verdad verdadero a las fórmulas que contengan alguna constante indefinida (aquellas que no están interpretadas ni en D ni en D’). Dada una fórmula φ de *LLPIP*, un modelo $\mathcal{M}$=<D,D’,I> para *LLPIP* y una función de asignación g, tal que Int=< $\mathcal{M}$,g> es una función de interpretación en *LLPIP*, definimos la noción de satisfacción_V distinguiendo tres casos. Caso 0. Cuando la fórmula (φ) de *LLPIP* contiene alguna constante cuya interpretación está indefinida (por no tomar valores ni en D ni en D’) le corresponderá siempre valor verdadero en la satisfacción_V. Casos 1 y 2. Cuando la fórmula (φ) de *LLPIP* no contiene ninguna constante indefinida, entonces la satisfacción_V procede exactamente igual a la satisfacción del sistema LLIT. **Observaciones** (1)Siempre que Int tenga satisfacción_V en φ,	***Paso Básico*** Sea $\varphi = (P^n\,\tau_1\ldots\tau_n)$ $\text{Trad}\,(P^n\,\tau_1\ldots\tau_n) := \begin{cases} (\exists x\,\mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots\wedge\neg C\tau_n)) \rightarrow (P^n\,\tau_1\ldots\tau_n) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2 \wedge \ldots\wedge\neg C\tau_n))\rightarrow (P^n\,\tau_1\ldots\tau_m) & \text{Cuando } \phi \text{ es Cerrada} \end{cases}$ En especial Sea $\varphi = (\tau_1{=}\tau_2)$ $\text{Trad}\,(\tau_1{=}\tau_2) := \begin{cases} (\exists x\,\mathcal{E}x \wedge (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2))\rightarrow (\tau_1{=}\tau_2) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ (\neg C\,\tau_1 \wedge \neg C\,\tau_2)\rightarrow (\tau_1{=}\tau_2) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada} \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>
siendo Int=< $\mathcal{M}$,g>, podemos escribir $\mathcal{M}\models_g \varphi$.

(2)Hay tres casos en el que la función g es irrelevante: 1. Cuando las fórmulas son cerradas, (en ese caso podía escribirse $\mathcal{M}\models\varphi$ en vez de $\mathcal{M}\models g\ \varphi$). 2. Cuando las fórmulas son abiertas y el dominio interior es vacío, pues en ese caso la función g queda indefinida para toda variable. 3. Cuando la fórmula tiene una constante indeterminada, porque en ese caso, con independencia de que la fórmula incluya variables, le corresponde el valor de verdad verdadero por satisfacción$_v$.
</td>
<td>
Pasos Inductivos
1. Para $\neg\ \varphi$
$$\text{Trad}(\neg\varphi) := \begin{cases} (\exists x\ \mathcal{E}x \wedge (\neg C\ \tau_1 \wedge \neg C\ \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow \neg\ \text{Trad}(\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ ((\neg C\ \tau_1 \wedge \neg C\ \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \rightarrow \neg\ \text{Trad}(\varphi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada} \end{cases}$$
2. Sea $\varphi = (\varphi \rightarrow \psi)$
$$\text{Trad}(\varphi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \exists x\ \mathcal{E}x \wedge (\neg C\ \tau_1 \wedge \neg C\ \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\ t_1 \wedge \neg C\ t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m) \rightarrow (\text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta} \\ (\neg C\ \tau_1 \wedge \neg C\ \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n) \wedge (\neg C\ t_1 \wedge \neg C\ t_2 \wedge \ldots \wedge \neg Ct_m)) \rightarrow \text{Trad}(\varphi) \rightarrow \text{Trad}(\psi) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Cerrada} \end{cases}$$
3. Sea $\varphi = (\forall x\ \ \varphi)$
$$\text{Trad}(\forall x\ \ \varphi) := \begin{cases} (\neg C\ \tau_1 \wedge \neg C\ \tau_2 \wedge \ldots \wedge \neg C\tau_n)) \rightarrow \forall x\ (\mathcal{E}x \rightarrow \text{Trad}(\varphi)) & \text{Cuando } \varphi \text{ es Abierta o Cerrada} \end{cases}$$
</td>
</tr>
</table>

En la definición de la satisfacción de fórmulas en LLPIP debemos añadir un caso más a los dos que ya teníamos en LLIT, es lo que aparece como un caso 0 que regula a las fórmulas de LLPIP que contienen alguna constante cuya interpretación es indefinida, ya que no toma valores en ninguno de los dominios de interpretación de la estructura, pero a la fórmula que contiene dicha constante le corresponderá por estipulación el valor de verdad verdadero. Entonces, en la traducción de las fórmulas de LLPIP, además de mantener las distinciones que ya se tenían en la traducción de fórmulas de LLIT, se debe contemplar el caso en el que si una fórmula tiene alguna presencia de las constantes indefinidas es suficiente para que la fórmula sea verdadera. Lo cual se logra transformando las fórmulas, tanto abiertas como cerradas, en fórmulas condicionales que incluyen en el antecedente a una secuencia de conjunciones en las que la predicación $C^{\mathcal{M}^*}$ aparece siempre negada, porque de esa forma sirve para verificar cuál es el dominio en el que toman valores las constantes que forman parte de la fórmula.

El detalle técnico de la justificación del paso de las fórmulas de LLPIP a fórmulas LCPO está en la demostración inductiva del lema de representación. Lo dicho en este recuento de resultados de la traducción no tiene el sentido de ir más allá o modificar en algo lo que está expuesto en la demostración inductiva, es tan sólo un esfuerzo por resaltar cómo es que en el proceso de traducción del sistema LLPIP a LCPO, la capacidad de análisis de LLPIP es transformada en la de LCPO. Así podemos constatarlo al observar que el reconocimiento que se hacía en LLPIP en relación a una tercer forma de interpretar a las constantes individuales, que no se interpretan en ninguno de los dominios considerados en la estructura y que podía obedecer a la intuición de que hay nombres completamente carentes de interpretación, es una intuición que se pierde en la traducción. En la traducción, lo que se conserva es sólo la definición de la noción de satisfacción, pero en los términos del análisis del sistema LCPO en el que se tuvo que hacer explícita la inclusión de un dominio especial para la nueva forma de considerar valores para constantes, que es manejada en la definición de la función $Trad_{LLPIP}$. Definición que de avanzar a un nivel superior de la traducción, permitiría recuperar la totalidad del conjunto de fórmulas válidas en el sistema LLPIP.

La revisión de los resultados alcanzados con la aplicación de la metodología de Manzano [1996] para la demostración de un lema de representación de la traducción de los sistemas LLIT y LLPIP a LCPO, muestra que la metodología de traducción permite una revisión más detallada y rigurosa de la capacidad de análisis de los sistemas LLIT y LLPIP, además de contrastarlos también con el análisis de LCPO, de una forma que no se habría logrado únicamente con la revisión directa de la definición de cada sistema. Pues en un proceso de traducción, se requiere la transformación de la capacidad de análisis de la lógica que se traduce a la capacidad de análisis de la lógica marco en la traducción, porque la lógica marco dicta los principios del modo en el que deben ser definidas formalmente las funciones Conv y Trad.

La revisión de los resultados mostrados en la demostración de los lemas de representación de los sistemas LLIT y LLPIP, no sólo nos permitió analizar con detalle las capacidades de análisis de los sistemas libres y de la lógica clásica a la que fueron traducidos; además, nos permite plantear algunos cuestionamientos a los propios sistemas de lógica libre analizados. Por una parte puede cuestionársele el manejo de la existencia como una predicación monaria, y por otra, que la definición de la noción de satisfacción de las fórmulas que contengan a las constantes que no toman valores en ninguno de los dominios de interpretación, sea estipulativa. En este último caso lo que es cuestionable es determinar cuáles son las razones se justifican que deje de haber un principio de composicionalidad operante, con lo cual deja de ser operativo el cálculo y la misma lógica. De hecho, que el sistema LLPIP incluya términos que carecen completamente de interpretación, no parece tener otro respaldo más que cubrir un abanico más amplio de la combinatoria de posibilidades técnicas entre constantes que toman valores o no de los dominios de interpretación. Es decir, no resulta tan natural tomar en cuenta constantes que carezcan completamente de significado, pues si nuestro referente son las inferencias de contextos ordinarios, no parece sencillo pensar en la situación en el que se realicen inferencias en las que estén involucrados nombres absolutamente carentes de interpretación. Lo cual resalta que las decisiones adoptadas por Leblanc y Thomason en el diseño de sus sistemas de lógica libre estaban especialmente orientadas a consideraciones técnicas,[107] lo cual explica su interés en presentar diez sistemas lógicos que sólo se distinguen entre sí por la variación de la posibilidad de incluir dominios vacíos o en el manejo de la satisfacción de sus fórmulas.

No obstante, de acuerdo a la manera en que he definido la noción de capacidad de análisis de un sistema lógico, cada uno de los sistemas de Leblanc y Thomason, aunque sólo se distingan entre sí por una pequeña variación técnica, esa pequeña variante tiene repercusión en su desempeño técnico y en lo relativo a la aportación explicativa que proporciona el formalismo de cada sistema. Por lo tanto, esa pequeña variación en su formalismo, en el modo de presentación de su sistema, es una diferencia en su capacidad de análisis.

4.3. Consideraciones finales sobre la capacidad de análisis lógico y de cómo se evidencia en los procesos de traducción entre lógicas

Al probar el lema de representación de los sistemas LLIT y LLPIP, confirmamos que hemos podido adecuar el formalismo de LCPO para obtener los mismos resultados de la noción de satisfacción de aquellos sistemas. Pero ello implicó un aumento en la complejidad técnica, pues cada una de las fórmulas de LLIT o LLPIP sería equivalente a una fórmula condicional bastante más compleja. Pero lo más importante de apreciar en el proceso de traducción, es que en la transición de la capacidad de análisis de los sistemas libres, al análisis de LCPO, es que no nos da los mismos resultados en términos explicativos, ya que con LCPO, los modelos $\mathcal{M}$*, no reflejan una diferencia en las constantes, (las que toman valores en D y las que lo hacen en D'); más bien reportan que esa diferencia es equivalente a una relativización de cuantificadores, al introducir los predicados destacados $\mathcal{E}^{\mathcal{M}^*}$ o $C^{\mathcal{M}^*}$. La intención explicativa de LLIT y LLPIP de reconocer dos dominios, dos tipos de constantes o la posibilidad de que alguno de los dominios pudiera ser vacío, se pierde en la traducción. En otras palabras, la motivación filosófica que tuvieron Leblanc y Thomason al considerar esos aspectos en la definición de la semántica de sus sistemas, no permanece en su traducción a LCPO.

Si se valora únicamente el resultado de la traducción entre lógicas en término de fórmulas válidas, la pérdida en capacidad de análisis no se verá como un costo significativo. Pero si

[107] Hecho que contrasta con, por ejemplo, el sistema de lógica libre como el de Redmond [2011] en el que reconoce ampliamente que su sistema de lógica libre tiene la motivación de ser una herramienta para el estudio de las relaciones inferenciales de contextos ficcionales, como el de las obras literarias.

además de valorar las fórmulas válidas, se tiene aprecio en el desempeño técnico y explicativo del sistema, entonces estamos valorando también la aportación en análisis de cada sistema lógico. Adicionalmente estaríamos tomando en cuenta que hay consideraciones filosóficas detrás de cada propuesta de sistema lógico y que no sólo nos ofrece resultados en términos de fórmulas válidas.

El énfasis que pongo en recuperar lo que aporta un sistema lógico en términos de su capacidad de análisis, no debe verse como un argumento en contra de los procesos de traducción entre lógicas; que de hecho son tan útiles para evaluar y conocer mejor a los sistemas que se traducen. Es más bien una reflexión encaminada a reconocer que en los procesos de traducción entre lógicas el énfasis se da en conseguir los resultados que se hayan definido formalmente, como al conseguir los mismos resultados en términos de la noción de satisfacción. Además, considero relevante resaltar que la aplicación del procedimiento de traducción puso de manifiesto una cualidad importante del formalismo de un sistema lógico: que el formalismo de la lógica marco en la traducción es capaz de moldearse para obtener resultados de nociones de satisfacción que difieren de los que en originalmente estaban considerados para ese formalismo.

4.3.1. ¿Es posible definir un criterio formal para comparar la capacidad de análisis de dos sistemas lógicos?

En principio habría que tener presente que para que tal comparación tuviera sentido estaríamos hablando de la comparación entre sistemas lógicos pertenecientes a la misma familia de lógicas, que en términos de su semántica se refieren a la misma clase de modelos. Al igual que en la definición del criterio de comparación formal de la capacidad expresiva, habría que definir formalmente el tipo de sistema que se esté considerando y definir formalmente las propiedades que fueran relevantes para la comparación. En el caso de comparar capacidades de análisis una primera dificultad a superar sería el poder definir formalmente las propiedades a comparar, puesto que en la capacidad de análisis las propiedades de interés tienen que ver, en el último de los casos, con propiedades de tipo cualitativo, porque lo que querríamos saber es cuál de los sistemas lógicos que se comparan ofrece mayor eficiencia técnica o tiene mayor contribución explicativa.

Entonces, es viable la posibilidad de fijar un criterio formal para comparar la capacidad de análisis de dos sistemas lógicos, el reto está en determinar los propósitos de la comparación y traducirlos a definiciones formales. Así que más que hablar de un criterio de comparación, habría que hablar de una diversidad de criterios posibles, dependiendo de los propósitos que tuviéramos para efectuar la comparación.

En esta investigación, más que encaminarme a especificar formalmente un criterio de comparación de la capacidad de análisis de sistemas lógicos distintos, lo que busqué fue justificar de manera rigurosa, que podemos hablar de una capacidad de análisis y que es de ayuda para reconocer que no hay redundancia en la diversidad de sistemas lógicos. No hay redundancia porque cada sistema lógico, al variar en su diseño, ofrece una aportación distinta en su capacidad de análisis. Identificar los desacuerdos que tengamos con la capacidad de análisis de un determinado sistema lógico, puede fomentar el desarrollo de nuevos sistemas que ofrezcan innovaciones en el tecnicismo o en el aspecto explicativo de su formalismo.

4.4. Conclusiones

Me propuse ofrecer un estudio de los sistemas lógicos, planteando una diferencia entre la pregunta por las lógicas y por los sistemas lógicos, puesto que corresponden a distintos niveles de abstracción. Tomando como referencia de partida a los estudios lógicos clásicos, planteé que un sistema lógico está integrado por un lenguaje formal más un cálculo, o bien, un lenguaje formal más la especificación de una semántica formal, aunque también hay sistemas en donde se asocia a un lenguaje formal tanto un cálculo como una semántica.

Propuse que un medio adecuado para acercarme al tema de los sistemas lógicos era indagar en las nociones de capacidades de tales sistemas y tomando como referencia inicial a los estudios lógicos clásicos, identifiqué dos nociones de capacidades de sistemas lógicos: la capacidad expresiva y la capacidad deductiva, que reconocí como capacidades identificables en los sistemas lógicos con independencia de si son o no clásicos. Adicionalmente propuse reconocer una capacidad distinta a las bien conocidas capacidades de expresividad y deducibilidad, a la que llamé capacidad de análisis, que es la aportación que proporciona la elección de las constantes lógicas del sistema en el desempeño del mismo y que se manifiesta en su modo de presentación (la manera en que define su lenguaje, cálculo y/o semántica). Así formulé la tesis de que la capacidad de análisis lógico nos ayuda a comprender la aportación de cada sistema de la gran diversidad con que contamos actualmente, por cuanto resalta el aporte técnico y explicativo de su formalismo, lo cual a su vez abre la puerta al estudio de la práctica de crear sistemas lógicos, porque las variaciones en el diseño de cada sistema son resultado de las decisiones que toma el lógico que lo construye y que son reflejo de otros aspectos como sus motivaciones teóricas y filosóficas, su manejo del formalismo lógico, así como su aporte creativo.

Para estudiar con detalle y rigor la propuesta de la capacidad de análisis lógico propuse el estudio de caso de dos sistemas de lógica libre, muy cercanos a primer orden clásico, tomados como la explicitación de un lenguaje formal y una semántica, a los cuales apliqué una parte de la metodología de traducción entre lógicas propuesta por María Manzano [1996]. El objetivo fue emplear la metodología de traducción para probar un lema de representación entre los sistemas libres y de lógica clásica y de esa forma estudiar a detalle la capacidad de análisis de los sistemas involucrados en la traducción. Al haber conseguido la demostración inductiva del lema de representación, verifiqué que la traducción era operativa (al menos al nivel de la traducción de estructuras y fórmulas). Ese resultado, en el contexto de esta investigación, brinda un soporte al estudio de la capacidad de análisis porque nos permite saber que se estudió de forma exhaustiva el formalismo de los sistemas de partida en la traducción, puesto que con el proceso de traducción se consigue recuperar todo lo que ese formalismo plantea en la definición de su noción de satisfacción.

A pesar de que era posible realizar un estudio de la capacidad de análisis de los sistemas LLIT y LLPIP con la revisión directa de las definiciones de su lenguaje y su semántica, un procedimiento de ese tipo carecía de un referente que indicara que la revisión se realizó de forma exhaustiva. Así que haber contado con el respaldo de la metodología de traducción, no sólo imprimió rigor y aportó un mecanismo riguroso para reconocer que la revisión fue exhaustiva (al conseguir la demostración inductiva del lema de representación), sino que además me permitió valorar informalmente la diferencia en el análisis entre los sistemas LLIT y LLPIP y la lógica clásica que fue la lógica marco en la traducción.[108] Así que, el apoyo en la metodología de traducción permitió: (a) desglosar a detalle el funcionamiento de los dos sistemas implicados en la traducción, (b) observar el proceso de transición de la capacidad de análisis lógico del sistema lógico original al de la lógica marco en la traducción y (c) la demostración inductiva del lema de representación fue un mecanismo que permite apreciar que la revisión fue exhaustiva.

El análisis de los resultados de la traducción resalta la diferencia entre la capacidad expresiva y la capacidad de análisis, pues aunque la capacidad expresiva es desde luego dependiente de la semántica, es posible estudiar la clase de estructuras caracterizadas, de forma independiente al lenguaje formal del sistema. En cambio, la capacidad de análisis del sistema es completamente dependiente del modo de presentación del lenguaje y de la manera en que se define formalmente la semántica, porque la capacidad de análisis se concreta en la contribución técnica y explicativa del sistema lógico.

[108] Como lo planteé en los apartados 4.2.1. y 4.2.2. de este capítulo final.

Al dedicarme únicamente al estudio de los sistemas de lógica libre tomados como la especificación de un lenguaje formal y su semántica, quedó fuera de esta investigación la revisión de estos sistemas entendidos como la definición de un lenguaje formal y la especificación de un cálculo. En tanto que sabemos que los sistemas seleccionados son sistemas fuertemente completos, tenemos la garantía de que hay una equivalencia entre las nociones de derivación y de consecuencia. No obstante, debido a que la capacidad de análisis lógico es dependiente del modo de presentación del sistema, haber revisado la capacidad de análisis lógico únicamente desde la parte semántica, no es completamente equivalente a la revisión de la capacidad de análisis de los sistemas de lógica libre vistos como la unión del lenguaje formal y el cálculo. Desde luego debe estar en correspondencia con lo dicho en la semántica, pero no substituye la revisión del formalismo de la definición de los axiomas y las reglas de derivación del cálculo axiomático de los sistemas LLIT y LLPIP. Así que, un trabajo que quedó abierto para un desarrollo futuro es el estudio detallado y riguroso de la capacidad de análisis de los sistemas de Leblanc y Thomason pero desde su cálculo. Ello habría sido posible, siguiendo la estrategia de apoyarse en recursos de traducción entre lógicas, ya fuera al aplicar la metodología de Manzano [1996] hasta alcanzar los niveles más altos de traducción, en los que sí se contempla la revisión del cálculo; o bien, seleccionando alguna otra metodología de traducción que se dirigiera desde el inicio a estudiar el cálculo. Pero en esta investigación la estrategia que seguí fue la de centrarme únicamente en el estudio de la semántica de dos sistemas de lógica libre, por considerar que su propuesta semántica era más atractiva que la presentación de su cálculo axiomático.

Otro de los temas que quedaron abiertos a futuras investigaciones es el relativo a profundizar en el significado y recursos de la traducción entre lógicas, pues aún hay mucho que decir en cuanto a la clasificación de tipos de traducción y a la especificación tanto de sus alcances, como de los criterios para la definición de cada uno de los niveles de traducción. Lo cierto es que el ejercicio de traducción que realicé, enfocado al examen de la capacidad de análisis de los sistemas lógicos, puso de manifiesto la flexibilidad del formalismo de la lógica marco en la traducción. Lo cual permite apreciar que aunque un formalismo haya sido creado con una finalidad teórica y filosófica, su naturaleza formal no es rígida y, aunque con el costo de presentarse de manera más compleja (complejizando la capacidad de análisis), puede reflejar los resultados de un formalismo distinto.

En esta investigación también realicé la exploración inicial de otros temas cuya profundización quedó abierta a un examen futuro. Así, en lo relativo a los estudios de las capacidades expresiva y deductiva, señalé su relación con respecto de algunos resultados metalógicos. Pero ello se ubica únicamente en el contexto de los sistemas lógicos clásicos, quedando pendiente estudiar las peculiaridades de ambas capacidades en el contexto de los sistemas no clásicos. Pues aunque se estudió el caso de dos sistemas de lógica libre, como casos de lógica no clásica, toda la atención se centró en justificar la propuesta de una capacidad de análisis y no se dijo nada más en cuanto a sus capacidades de expresividad y de deducibilidad. Así, en lo relativo a la noción de capacidad expresiva, se planteó tomando como guía la referencia a los estudios de Lindström y quedó pendiente verificar si en efecto es adecuado entender a la capacidad expresiva de la manera como él la plantea: dirigida a caracterizar estructuras matemáticas; puesto que, en ese caso, habría que especificar de qué clase de estructuras matemáticas se estaría hablando. Lo único que al respecto puedo decir es que habría que valorar si una ruta adecuada para obtener una respuesta, sería desarrollar procesos de traducción entre lógicas, con miras a establecer una base común desde la cual reconocer la clase o las clases de estructuras de las que se esté hablando.

Recuperé de los estudios clásicos la noción de capacidad deductiva como la contraparte sintáctica de la capacidad expresiva, identificada con el cálculo del sistema lógico que tiene el propósito de mantener el control sintáctico de la capacidad expresiva. Reconocí además que un sistema lógico varía en su capacidad deductiva dependiendo de las propiedades metalógicas de la lógica de la que procede. Pero queda como un trabajo de investigación futuro el examen de si es posible hablar de una noción de capacidad deductiva que fuera independiente de su relación con la expresividad o de si debe modificarse la noción de capacidad deductiva si se trata de una lógica que no tiene un cálculo convencional (como una lógica no monotónica con cálculo por default).

En esta investigación estudié y justifiqué la plausibilidad de aceptar la capacidad de análisis como una capacidad de cualquier sistema lógico, pero no ofrecí un criterio formal que permitiera compararla en dos sistemas. Tan sólo ofrecí una reflexión de los elementos a tomar en cuenta si se desea concretar esa posibilidad. Tal reflexión básicamente consistió en reconocer, como en el caso de la aplicación del criterio de comparación de la capacidad expresiva, que habría que definir formalmente tanto la noción de sistema que se toma en cuenta, como la serie de propiedades a verificar.

Estudié la noción de capacidad de análisis en dos de los sistemas de lógica libre de Leblanc y Thomason [1968], lo cual dio pie a realizar algunos comentarios críticos con respecto a la capacidad de análisis de ambos sistemas. Los comentarios críticos se refirieron en especial con respecto al sistema LLPIP, puesto que para llegar a determinar su noción de satisfacción tiene que valerse de la estipulación (para que adquieran valor las fórmulas que tienen términos constantes indefinidos) y en ese caso la lógica deja de ser composicional y no se requiere efectuar cálculo de los valores de verdad. Se trata de un sistema lógico que en su sentido técnico tiene virtudes, como ser completo y correcto, pero que resulta poco explicativo de la manera en que se manejan los presupuestos de existencia, puesto que ofrece un tratamiento que puede considerarse artificial y que además incluye constantes de individuo que son completamente carentes de interpretación y que tampoco resultan intuitivas. No obstante, la revisión de los dos sistemas de Leblanc y Thomason, al ser tan cercanos a lógica clásica de primer orden, facilitaron realizar el proceso de traducción que permitió apreciar la capacidad de análisis de los dos sistemas involucrados en la traducción.

Es importante enfatizar que del estudio de los sistemas de lógica libre seleccionados, no puedo derivar conclusiones generales aplicables a cualquier sistema de lógica libre. Se trata tan sólo del estudio de dos sistemas específicos, que corresponden a una propuesta semántica particular, que es una entre distintas opciones semánticas para lógica libre. Así que no puedo extraer conclusiones que vayan más allá de los casos examinados y esto es así, no porque la muestra estudiada sea pequeña, sino porque el estudio de la capacidad de análisis de los sistemas lógicos implica el modo de presentación de cada sistema; por tanto, debe ser, en todos los casos, producto de la revisión detallada de los ejemplares de los que se hable.

El último de los temas que se mostraron en la investigación, pero cuya profundización está abierta futuros trabajos, es el relativo a la posibilidad de estudiar las conexiones entre la práctica de crear sistemas lógicos y de las aportaciones del lógico que construye el sistema. Aportaciones de su creatividad y de su bagaje teórico-filosófico, así como de las consideraciones pragmáticas ligadas tanto a los objetos de análisis lógico, como a las decisiones que toma el lógico al momento de definir el formalismo del sistema que crea. A este respecto lo único que afirmo, es que la capacidad de análisis es resultado de la conjunción de todos esos factores. Pero en esta tesis tan sólo indiqué la existencia de un amplio terreno de trabajo en esa línea de investigación.

Con base en lo expuesto, afirmo que no hay redundancia en la diversidad de sistemas lógicos (clásicos o no clásicos) porque cada propuesta de sistema lógico tiene una aportación distinta en cuanto a su tecnicismo y a lo que nos explican las conexiones entre sus elementos. Lo que sí es posible, al menos en los casos examinados, es que el formalismo de una cierta lógica pueda mostrarnos iguales resultados (en términos de una propiedad definida formalmente, como la noción de satisfacción) a los alcanzados por el formalismo de otro sistema lógico. Lo cual pone de manifiesto que, en lo general, la flexibilidad de un cierto formalismo lógico no está sujeta a las motivaciones teóricas o filosóficas del lógico que lo propuso; no obstante, en tanto que cualquier tratamiento lógico formal se concreta en un sistema lógico específico, es relevante reconocer, en cada propuesta de sistema lógico, a qué tratamiento técnico y teórico-filosófico responde su diseño, porque de él depende su modo de presentación y su capacidad de análisis.

La reflexión en el aporte técnico y explicativo de un sistema lógico, lo que es su capacidad de análisis, no sólo permite revalorar la diversidad de propuestas de sistemas lógicos, sino que puede facilitar la identificación de aquellos aspectos en los que nos interese ser más críticos con algunas de esas propuestas (como en el caso de los sistemas LLIT y LLPIP al discrepar en su manejo de la noción de existencia, discrepar en la artificialidad con la cual resuelve la asignación del valor de verdad para ciertas fórmulas o en la falta de sustento intuitivo del tipo de constantes de individuo que propone) y estar más dispuestos a realizar nuevas propuestas de tratamiento formal encaminadas a resolver las discrepancias.

Esta investigación ha sido un primer esfuerzo por revelar las conexiones entre la diversidad de sistemas lógicos, su naturaleza formal y su dirección al estudio de las teorías, proposiciones o cadenas de razonamiento de contextos discursivos diversos. Ha tenido así la intención de avanzar algún paso en la dirección de especificar conceptos y procedimientos que sean de ayuda para comprender mejor lo que son los sistemas lógicos con los que contamos hoy y quizá también, para los que seguirán produciéndose.

Bibliografía

ALCHOURRON, C. [1995]: *Lógica*, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Trotta, Madrid.

ALISEDA, A. [2011]: "La heurística: una forma de racionalidad", en Pérez y Velasco (eds) [2011].

BAADER, F. [1990]: "A Formal Definition for the Expressive Power of Knowledge Representation Languages", *Gennan Research Center for Artificial Intelligence Postfach* Kaiserslautem, Gennany, pp. 1-22.

BARBA, J. [1989]: *Modelos de Kripke para semántica supervaluacional*. Tesis. Universidad Autónoma de Madrid.

BARCELO, A. [2004]: "Sobre la idea misma de análisis semántico (sobre "Tres métodos de análisis semántico" de Max Fernández de Castro]", *Signos filosóficos*, Vol. VI, núm 12, julio-diciembre de 2004, pp. 9-32.

BEALL, JC. y RESTALL, G. [1999]: "Defending Logical Pluralism", en Brown, G. y J. Woods (eds.) *Logical consequence: rival approaches,* Stanmore, Hermes, 2001, pp.1-22.

BEALL, JC. y RESTALL, G. [2006]: *Logical Pluralism,* Oxford, Oxford University Press.

BEANEY, M. [2009]: "Analysis". *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Edward N. Zalta (ed.), URL=http://plato.stanford.edu/entries/analysis/

BENCIVENGA, E. [1990]: "Free from what?" *Erkenntnis,* 33 (1), pp. 9 – 21.

BENCIVENGA, E. [2002]: "Free Logics", *Handbook of Philosophical Logic, vol. V,* 2da ed., D. Gabbay y F. Gunthner (eds.), Reidel Publishing Company. pp. 147-196.

BENCIVENGA, E. [1980]: *Una Logica del Termini Singolari*, Boringhieri*,* Torino.

BOCHENSKI, J. [1968]: *Historia de la Lógica Formal.*Trad. Millán Bravo Lozano, Gredos, Madrid.

BURGESS, J. [2009]: *Philosophical logic*, University Press, Princeton.

CARNIELLI,C. y D'OTTAVIANO, I. [2009]: "New dimensions and translations between logics", *Logica Universalis*, Springer , Vol. 3 , *Issue 1* , pp 1-18.

CHURCH, A. [1956]: *Introduction to Mathematical Logic,* Princenton University Press, New Jersey.

COCCHIARELLA, N. [1966]: "A Logic of Actual and Possible Objects" (abstract), *Journal of Symbolic Logic*, 31, pp.688–689.

COCCHIARELLA, N. [1979]: "Modality within Tense Logic", *The Journal of Symbolic Logic,* 31, pp. 690-691.

CONIGLIO, M.E. [2005]: "Recovering a logic from its fragments by meta-fibring", *Logica Universalis,* 1(2), pp. 377-416. URL= http://www.cle.unicamp.br/e-prints/vol_5.n_4.5005.html

COPI, I. [1979]: *Symbolic Logic*, Prentice Hall PTR.

DA SILVA, J., D'OTTAVIANO, I. y SETTE, A. [1999]: "Translations between logics" in Caicedo, X. and Montenegro, C.H. (eds.), *Models, algebras and proofs,* Vol. 203, New York, pp. 435-448.

DALE, J. [2002]: *A companion to philosophical logic*. Blackwell Publishing, Oxford.
DRAE, [2001]*: Diccionario de la lengua española* (22.ªed.). Consultado en http://www.rae.es/rae.html

EBBINGHAUS, H., FLUM, J y THOMAS, W. [1980]: *Mathematical Logic*, New York, Springer-Verlag.

EHFREFEUCHT, A. [1961]: "An application of games to the completeness problem for formalized theories". Fund. Math, vol 49, pp. 129-141.

EJERHED, E. Y LINDSTROM, S. [1997]: *Logic, action, and cognition: essays in philosophical logic.* Kluwer Academic, Boston.

ENDERTON, H. [1972]: *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, New York.

EPSTEIN, R.L. [1990]: "The semantic foundations of logic", *Propositional logics,* vol. 1, Kluwer Academic Press, Dordecht.

FRAPOLLI, M. [2007]: *Filosofía de la Lógica*, Tecnos, Madrid.

FRAISSÉ, R. [1954]: "Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres. Ann. Sci. École Norm. Sup., 3ieme série, vol, 2, pp. 16-60, 273-295.

FREGE, G. [1879]: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens, reimpreso en Begriffsschrift und andere Aufsätze, edit. por I.

Angelelli, Hildesheim, Olms, 1964. Versión en castellan [1979]: *Conceptografía*, Trad. Hugo Padilla, UNAM, México.

FREGE, G. [1892]: “On Sense and Reference” Trad. M. Black in Geach, P. and Black, M. (eds.) (1970) Traducción de la Philosophical Writings of Gottlob Frege. Oxford: Basil Blackwell.

GABBAY, D. [1994]: *What is a logical system?,* Oxford University Press, Oxford.

GAMUT, L.T.F. [2002]: *Introducción a la Lógica*, Trad. Cecilia Durán, Eudeba, Buenos Aires.

GOBLE, L. [2001]: *The Blackwell guide to philosophical logic*, Blackwell, Malden Massachusetts.

GÓMEZ TORRENTE, M [2007]: “Constantes Lógicas” en Frápolli [2007].

GÓMEZ TORRENTE, M [2002]: “The Problem of Logical Constants.” *Bulletin of Symbolic Logic* 8: 1–37.

GÓMEZ, R.A. [2006] “Lógicas no clásicas”, *Principios y Fundamentos,* Universidad EAFIT, Colombia.

GRAYLING, A. [1982]: *An introduction to philosophical logic.* The Harvester Press, Great Britain.

HAACK, S [1978]: *Philosophy of logics,* Cambridge University Press, New York.

HAACK, S. [1974]: *Deviant Logic*, Cambridge University Press, New York.

HERNÁNDEZ, G. [2007]: *Lógica y ontología: ¿Es posible liberar a la lógica clásica de sus supuestos de existencia?*, Tesis de maestría, UNAM, México.

HINTIKKA, J.[1959 a]: “Existential presuppositions and existential commitments”, *The Journal of Philosophy*, 56, pp. 125-137.

HINTIKKA, J.[[1959 b]: “Towardas a theory of definite descriptions”, *Analysis*, 19, pp. 79-85.

HODGES, W. [2013]: “First-order Model Theory”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Edward N. Zalta (ed.), URL= http://plato.stanford.edu/entries/modeltheory-fo/#Lang

KNEALE, W Y KNEALE, M. [1961]: *The Development of Logic.* The Clarendon Press, Oxford.

LAMBERT, K. [1958]: “Notes on E!”, *Philosophical Studies*, 9, pp. 60-63.

LAMBERT, K. [1959]: “Singular Terms and Truth”, *Philosophical Stuidies,* 10, pp. 1-5.

LAMBERT, K. [1981]: “On the Philosohical Foundationsof Free Description Theory”, *History and Philosophy of Logic,* 8, pp. 57 –66.

LEBLANC, H. [1971]: “Truth-value semantics for a logic of existence”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 12, pp. 153-168.

LEBLANC, H. y HAILPERIN, T. [1959]: “Nondesignating singular terms”, *Philosophical Review*, 68 (2), pp. 239-243.

LEBLANC, H. Y THOMASON, R. [1968]: “Completeness Theorems for some Presupposition-free Logics” *Fundamenta Mathematicae,* 62, pp. 125-164.

LEONARD, H. [1956]: ‘The logic of Existence’, *Philosophical Studies*, 7, pp. 49-64.

LEVESQUE, H. Y BRACHMAN, R. [1986]: “Expressiveness and tractability in knowledge representation and reasoning”. Computational Intelligence, 3(1):pp. 78-93, 1987.

LINDSTRÖM, P. [1969]: “On Extensions of Elementry Logic”, *Theoria*, 35, pp. 1-11.

LINDSTRÖM, P. [1966]: Firs order predicate logic with generalized quantifiers, Theoria, vol 32, pp. 186-195.

MACFARLANE, J. [2009]: “Logical constants”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), URL=http://plato.stanford.edu/entries/logical-constants/

MANZANO, M. [2004]: "Divergencia y rivalidad entre lógicas" en Orayen y Morreti [2004].

MANZANO, M. [2010]: *Lógicas, lógica y logicidad.* Summa Logicae *URL=* http://logicae.usal.es/mambo/index.php?option=com_summalogicaexxi&menu_task=Biblioteca&task=no_task&cmd=detallar&param_1=462

MANZANO, M. [1996]: *Extensions of first order logic*, New York, Cambridge Univerisity Press.

MANZANO, M. [2002]: “¿Qué es esa cosas llamada Lógica?” en Nepomuceno [2002].

MANZANO, M. y ALONSO, E. [2014]: “Completeness: Gödel to Henkin”, *History and Philosophy of Logic*, Vol. 35, No 1., pp. 50-75.

MANZANO, M. y HUERTAS, A.[2004]: Lógica para principiantes, Alianza, Madrid.

MESEGUER, J. [1989]: “General logic”, en H.-D. et al. (eds.), *Logic Colloquium’* 87, Nort-Hollanh, pp. 275-329.

MORADO, R. [1984]: "La rivalidad en Lógica", *Dianoia*, año XXX, No. 30, pp. 237-249.

MORADO, R. [2007]: “La formalización del sentido común”, en Frápolli [2007].

MOSCHER, E. y SIMONS, P. [2001]: *New essays in Free logic in honour of Karel Lambert,* Klumer Academic Publishers, London.

MOSTERÍN, J y TORRETTI, R. [2010]: *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, 2da. Edición, Alianza, Madrid.

MOSTOWSKI, A. [1957]: “On a generalization of quantifiers”, *Fundamenta Mathematica*, 44, pp.12-36.

NEPOMUCENO, A. [2002]: *Representación y Logicidad*, Universidad de Sevilla, Sevilla.

NOLT, J. [2010]: “Free Logic”, *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Publicado el 5 de abril de 2010. Edward N. Zalta (ed.), URL= http://plato.stanford.edu/entries/logic-free/#3

PALAU, G. [2002]: *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, Gedisa, Argentina.

PEÑA, L. [1993]: *Introducción a las lógicas no clásicas.* UNAM, México.

PÉREZ, A. y VELASCO, A. (eds) [2011]: *Racionalidad en Ciencia y Tecnología. Nuevas perspectivas iberoamericanas,* UNAM, México.

PIERCE, C. S. [1867] *On the Natural Classification of Arguments*, en C. Hartshorne. P. Weiss y A.W. Burks (Eds), The Collected papers of Charles Sanders Peirce. (Vol. 1-8). Cambringe. M.A. Harvard University Press, 1931-1958.

PRAWITZ, D y MALMNÄS, P. [1968]: “A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic” en Schmitdt, H. (ed.), *Contributions to mathematical logic,* North- Holland, Amsterdam, pp. 215-229.

PRIEST, G. [2010]: *An introduction to non-classical logic.* Cambridge University Press, Cambridge.

QUESADA, D. [1995]: “Lógica clásica de primer orden” en Alchourrón [1995].

QUINE, W. [1954]: “Quantification and the Empty Domain” *The Journal of Symbolic Logic.* Vol. 19, No. 3, pp. 177-179.

QUINE, W. [1970]: *Philosophy of Logic,* Foundations of Philosophy Series, United States of America.

REDMOND, J. [2011]: *Logique Dynamique de La Fiction. Pour Une Approche Dialogique*, Col. Cahiers de logique et Epistémologie, London, College Publications.

REDMOND, J. y FONTAINE, M. [2011]: *How to Play Dialogues. An Introduction to Dialogical Logic.* Kings College Publications, London.

RESCHER, N. [1957]: "Definitions of Existence", *Philosophical Studies*, 8, pp. 65-69.

RESCHER, N. [1968]: *Topics in philosophical logic*. Reidel, Dordrecht-Holland, Netherlands.

REITER, R. [1980]: "A Logic for Defeult Reasoning", Artificial Intelligence 13, pp. 81-132.

ROUTLEY, R. [1966]: "Some Things do not Exist", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 7, pp. 251-276.

ROUTLEY, R. [1971]: "Domainless Semantics for Free, Quantification and Significance Logics", *Logique et Analyse*, 14, pp. 603-626.

RUSSELL, B. [1905]: "On Denoting", *Mind*, 14, pp. 479-493.

SHAPIRO, S. [2013]: "Classical Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), URL http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/logic-clasica/

SMILEY, T. [1998]: *Philosophical logic.* Oxford University Press, Oxford.

STRAWSON, P. F. [1950]: "On Refering", *Mind*, No. 235, pp. 320-344.

SMULLYAN, R. [1968]: *First-Order Logic*, Dover Publications, New York.

THOMASON, R. [1989]: *Philosophical logic and artificial intelligence*, Kluwer Academic, Dordrecht.

TORRES, C. [1989]: "La filosofía y el programa de Hilbert" *Mathesis*. Vol. V. No. 1 febrero, pp. 33-55.

VAN BEHTEM, [1986]: "Correspondence theory", en D. Gabbay y F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

VAN FRAASSEN, B. [1966a]: "Singular terms, truth value gaps and free logic", *Journal of Philosophy,* Vol. 63, pp. 481-495.

VAN FRAASSEN, B. [1966b]: "The completeness of free logic", *Zeitschrift für*

Mathematische Logik und Grundlagen der MAthematik, Vol. 12, pp. 219-234.

WHITEHEAD, A. Y RUSSELL, B. [1913]: *Principia Mathematica.* Cambridge University Press, London.

WÓJCICKI, R. [1988]: “Theory of logical calculi: basic theory of consequence operations”, *Synthese Library,* vol. 199, Kluwer Academic Press, Dordecht.

WOLFRAM, S. [1989]: *Philosophical logic: An introduction.* Routledge, London.

ZACH, R. [2003]: “Hilbert’s Program”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy***.** Edward N. Zalta (ed.), URL= http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/