UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

TESIS DOCTORAL

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LOS LIBROS DE TEXTO PARA SECUNDARIA Y UNIVERSIDAD EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX.

Isabel María Sánchez Sierra

Directora:
Dra. María Teresa González Astudillo

Salamanca 2015

VNiVERSiDAD
Ð SALAMANCA

Dra. María Teresa González Astudillo, Profesora Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

HACE CONSTAR:

Que la presente memoria titulada LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LOS LIBROS DE TEXTO PARA SECUNDARIA Y UNIVERSIDAD EN ESPAÑA EN EL SIGLO XIX ha sido realizada bajo mi dirección por Isabel María Sánchez Sierra y constituye su tesis para optar al grado de doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, firma el presente documento.

Salamanca a de de dos mil quince.

Fdo: María Teresa González Astudillo

A mis sobrinos,
que me dan la vida.

A mis padres,
por enseñarme el valor del trabajo.

A mis hermanos,
por estar siempre ahí.

Agradecimientos

La realización de un trabajo de tesis doctoral suele trascender, en muchos casos, de lo puramente académico, enriqueciendo al doctorando no sólo culturalmente, sino como persona. Si además este trabajo se ve jalonado de obstáculos y dificultades que lo van prolongando en el tiempo, se convierte en una experiencia vital.

En este camino se van cruzando personas que, por unas razones u otras, se convierten en apoyos fundamentales para que el proyecto llegue a buen puerto. A todas ellas deseo mostrar mi más profundo y sincero agradecimiento.

En primer lugar a mi directora, María Teresa González Astudillo, sin quien esta tesis, indudablemente, no habría podido ser una realidad. Maite, gracias por todo, especialmente por brindarme tu ayuda cuando más la necesitaba.

A mi familia, que siempre me ha apoyado, aunque no haya entendido muchas veces para qué tanto esfuerzo.

A mis compañeros y amigos de la "mejor turma", en especial a Ademir, Jeannette, Jesús, María José, Montse y Pedro, por sus enseñanzas, no solo en Didáctica de las Matemáticas, sino de la vida en general.

A Mabel, Mayte y Manuela, que me han acompañado desde el comienzo de este viaje aconsejándome y ayudándome. Y a Olga y Auxi, por su cariño y apoyo.

A Carmen, Elena, Esperanza, Jesús D, Jesús P, Miguel y Venancio, que durante diez años han compartido cada semana mis alegrías y mis preocupaciones.

A Gely, Javier H y Javier P a quienes conocí en la última fase del camino, y cuya amistad ha sido fundamental para sobrellevar muchas cosas. Y a Paqui y Belén por su ayuda inestimable.

Por último, un recuerdo muy especial para el doctor D. Modesto Sierra Vázquez, quien confió en este proyecto desde el primer momento, y quien comenzó a asesorarme, pero que por circunstancias de la vida, no pudo concluirlo conmigo.

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

Tras la publicación en 1637 de la obra cumbre de Descartes, *El Discurso del Método*, y de la *Isagoge* de Fermat en 1679, comienza la andadura de una nueva rama de las matemáticas, que pronto mostraría ser una potente herramienta en la resolución de problemas geométricos: la Geometría Analítica.

Tras ser adoptada por gran número de matemáticos, entre los que figuran los nombres de Euler o Lagrange, que contribuyeron a su desarrollo y difusión en el siglo XVIII, en el XIX se vio envuelta en una agria polémica junto con la Geometría Sintética. Frente a los defensores del uso del Álgebra en la resolución de los problemas geométricos por la sencillez que aporta a la misma, estaban los que defendían el uso de métodos puramente geométricos, que muestran mayor claridad en las demostraciones.

Esta polémica, junto con el desarrollo de la Geometría Proyectiva en el siglo XIX, contribuyeron a que la Geometría Analítica terminara fundiéndose con la primera, la cual se mostró finalmente como "todas las Geometrías", como llegó a afirmar Cayley.

En el presente trabajo estudiamos la evolución de la Geometría Analítica (desde ahora G.A.) en nuestro país en el siglo XIX, desde una geometría que conservaba aún elementos de la *Geometría* de Descartes, hacia la Geometría Analítico-Proyectiva.

Nuestro estudio se inició con una aproximación al tema de investigación en el año 2005, materializado en la memoria de investigación *La Geometría Analítica en la enseñanza secundaria española*, presentada para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados. En ella se realizó una investigación sobre el tratamiento de la G.A. en los planes de estudios de secundaria desde 1836 hasta 1934, desde el punto de vista curricular, analizando los contenidos de G.A. que aparecían en cada uno de ellos, e identificando los libros de texto más utilizados en el periodo. Parte de este trabajo se ha incorporado a la presente memoria de tesis.

Por tanto, hemos tratado el tema desde dos perspectivas, desde el punto de vista curricular, observando cómo fue tratada la asignatura de G.A. en los planes de estudios de secundaria y universitarios; y considerándola como disciplina científica, analizando su evolución mediante el análisis de los libros de texto utilizados en el periodo.

Este estudio nos ha permitido identificar los momentos claves en esta evolución e interpretarlos a la luz de los acontecimientos históricos acaecidos en la época, tanto desde el punto de vista sociopolítico, como desde el de la historia de las matemáticas, todo lo cual se encuentra recogido en la presente memoria de tesis.

La memoria se encuentra dividida en cinco capítulos, en los que desarrollamos cada uno de los aspectos implicados en la investigación.

En el capítulo uno presentamos el tipo de investigación que vamos a llevar a cabo, definiendo los aspectos teóricos que la sustentan, enmarcándola dentro del campo de la Investigación Histórica en Educación Matemática.

Así, en este capítulo, se caracteriza este tipo de investigación y se pone de manifiesto la importancia del libro de texto como fuente documental. Se estudia el análisis de contenido como herramienta eficaz para el estudio de los textos y se describen las fases que caracterizan una investigación de tipo histórico como esta.

En el capítulo 2, se describe el contexto histórico en el que se desarrolla nuestro trabajo, tanto desde el punto de vista sociopolítico, como de las matemáticas.

Así, comenzamos el capítulo incluyendo una breve historia de las geometrías analítica y proyectiva, para entender en qué momento de desarrollo se encuentran cada una de ellas en el periodo considerado. También incluimos una revisión del contexto sociopolítico de nuestro país, incidiendo en las ideologías de los distintos gobiernos, especialmente en lo referente a materia educativa, y estudiamos el desarrollo de las Matemáticas en la España de la época. Por último analizamos los distintos planes de estudios de secundaria y universidad vigentes en el periodo y del tratamiento que hacen de la G.A.

En el capítulo 3 se desarrolla la metodología utilizada en la realización de este estudio, particularizando las fases de una investigación histórica, descritas en el capítulo 1, así como la técnica del análisis de contenido.

Por tanto aquí encontramos formulado nuestro problema de investigación y especificados los objetivos e hipótesis que emanan del mismo. También se encuentran recogidas el resto de las etapas del trabajo, entre las que se encuentran la selección de las fuentes documentales, el método de recogida de datos y la definición de los campos y categorías de análisis de la documentación.

En el capítulo 4 se encuentra recogido el análisis de las once obras que hemos seleccionado para el estudio, análisis que hemos llevado a cabo siguiendo la metodología explicada en el capítulo anterior.

Por último en el capítulo 5, se presenta un resumen de los resultados obtenidos en el análisis de las obras, haciendo un estudio transversal de las categorías de análisis definidas para el estudio de los textos, comparándolas entre las distintas obras, para así observar su evolución a través del tiempo.

A la luz de estos resultados se presentan las conclusiones obtenidas en relación con las hipótesis de partida. Además se explicita el grado de consecución de los objetivos planteados al comienzo de este trabajo, se explican las limitaciones que ha tenido el mismo, y las líneas de trabajo futuras que deja abiertas.

Las referencias, el resumen y los anexos conforman los apartados finales. El primer anexo incluye un índice cronológico de los principales hechos históricos ocurridos en España en el XIX desde el punto de vista sociopolítico y académico.

En el dos se recogen las principales obras de Geometría desde *La Geometría* de Descartes hasta finales del siglo XIX, no sólo de Geometría Analítica, sino también de Proyectiva, indicando sus fechas de publicación. Así mismo se recogen las primeras ediciones de las obras analizadas y aquellas que introdujeron las geometrías analítica y proyectiva en España, para tener una idea de su desarrollo histórico y su incorporación en el sistema educativo español.

En el anexo tres se incluyen los mapas conceptuales de las obras analizadas.

CAPÍTULO 1: La investigación histórica en Educación Matemática

Introducción

En este trabajo realizamos un estudio histórico de la enseñanza de la Geometría Analítica en España en el siglo XIX. Dicho trabajo se enmarca dentro de la corriente de Investigación Histórica en Educación Matemática y en este capítulo mostraremos los fundamentos teóricos que sustentan nuestra investigación.

Así, caracterizamos aquí la Investigación Histórica en Educación Matemática, y se pone de manifiesto la importancia del libro de texto como fuente documental en este tipo de investigación.

Además, al haber llevado a cabo el análisis de los libros mediante la técnica del análisis de contenido, se define y caracteriza el mismo como técnica de análisis de textos en general. En el capítulo dedicado a la metodología se hace un desarrollo más detallado del mismo, aplicado y adaptado a nuestro estudio en particular.

De la misma forma, en este capítulo se trata de forma general el método histórico, describiendo las fases propuestas por Ruiz Berrio (1976), fases que se desarrollan en la parte dedicada a la metodología, adaptadas ya a nuestra investigación.

1.1. La investigación histórica en Educación Matemática

En este apartado desarrollaremos en tres puntos, diferentes aspectos de la investigación histórica en Educación Matemática.

En primer lugar veremos la relación que existe entre la historia de las historia de las Matemáticas y la Educación Matemática y cómo el conocimiento de la primera puede utilizarse para mejorar la segunda.

En el segundo apartado estudiaremos la fundamentación teórica de la investigación histórico-epistemológica y las diferentes corrientes que se dan dentro de ella, para así poder ubicar nuestro estudio y darle una fundamentación teórica.

Por último, en este apartado incluimos también el estudio de las diferentes fases que forman parte del método de investigación histórica.

1.1.1. La Historia y la Educación Matemática

Al ser esta una investigación sobre la Historia de las Matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática cabe preguntarse qué nexo existe entre ambas, cómo se relacionan y qué aporta el conocimiento de la primera a la mejora de la segunda. Entendemos que la respuesta a estas cuestiones constituye uno de los pilares fundamentales que sustenta y da sentido a esta investigación.

Siguiendo a González (2004a):

> Asumimos como axioma el aforismo tradicional que reza: *hay que conocer el pasado para comprender el presente* del que resulta por permutación de los verbos una máxima de muchos historiadores: *hay que comprender el pasado para conocer el presente.* Si el conocer y el comprender el pasado componen el saber, ellos debieran ser la brújula que oriente nuestra manera de actuar y transformar la realidad. (p. 17).

Esta máxima se puede llevar al ámbito de la Educación Matemática, sin embargo pocos temas hay que se presenten más disociados de su historia que las Matemáticas. Usualmente esta ciencia es presentada a los alumnos como un producto dogmático, cerrado y acabado, olvidando que ha surgido después de un largo proceso de gestación (Sierra, 1997; Nolla, 2001; González, 2004a). En contraposición, la Historia de la Ciencia y en particular de las Matemáticas, pone de manifiesto el proceso dinámico de la actividad científica como desarrollo a veces penoso y sinuoso, raramente lineal, pero siempre abierto y vivo, en proceso de cambio permanente (González, 2004a).

El mostrar el proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos desde su origen hasta su forma final resulta ser una herramienta muy útil en el campo de la Educación Matemática. Maz, Torralbo y Rico (2006) han hecho hincapié en la relación entre historia de las matemáticas y educación matemática mediante tres consideraciones:

- Como campo de investigación sobre el conocimiento y la comprensión de las maneras en que los conceptos, cuestiones y avances matemáticos han pasado a formar parte de la enseñanza de esta disciplina, y cómo el contexto socio-cultural ha influido en la manera en que han sido expuestos y difundidos en la sociedad mediante el sistema educativo.
- La historia de las matemáticas permite interpretar los procesos sociales y culturales que han dado sentido a los conceptos y las estructuras matemáticas que en la actualidad forman parte del sistema educativo.
- Así mismo permite contextualizar los conceptos y es útil como elemento de interdisciplinariedad curricular y de motivación en el aprendizaje de las matemáticas.

Diversos autores desarrollan estos aspectos, poniendo de manifiesto su utilidad como herramienta didáctica, no sólo desde el punto de vista de la investigación, sino también en el aula. Algunas de las razones que avalan el estudio de la historia de las matemáticas son las siguientes:

- Conocimiento socio-cultural

El conocimiento, y en particular el conocimiento matemático, están fuertemente determinados por el contexto cultural y social. El análisis histórico nos muestra que la matemática es una actividad humana, incardinada en su contexto, y su utilización en el aula permite mostrar su origen multicultural, su naturaleza interdisciplinar, y de qué manera se relaciona con otros aspectos de la vida humana como el arte, la música, la arquitectura o la economía (Sierra, 2000; Maz, 1999).

- Evolución de los conceptos y los procedimientos.

Las matemáticas son una ciencia en continua evolución, en la que la elaboración de los conceptos y procedimientos es el resultado de un largo proceso, generalmente enmascarado en la presentación final en los libros de texto o revistas especializadas. (Sierra, 2000, p. 95) señala que "el análisis histórico-epistemológico puede ofrecernos una interesante información sobre el desarrollo del conocimiento matemático en el seno de una cultura y proveernos de información sobre los caminos en los que el conocimiento surge y cambia". En este sentido González (2004a), nos dice:

> La Historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban, cómo fraguaban definiciones, teoremas y demostraciones, la ilación entre ellos para forjar teorías, los fenómenos físicos o sociales que explicaban, el marco espacial y temporal en que aparecían, cómo fueron evolucionando hasta su estado actual, con qué temas culturales se vinculaban, las necesidades cotidianas que solventaban. En suma, conocer, en sentido kantiano, el tránsito de las intuiciones a las ideas y de éstas a los conceptos (p. 18).

- Obstáculos epistemológicos.

El estudio de la historia permite conocer la aparición, en el desarrollo de un concepto, de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes. Esta idea ha dado lugar a una corriente de investigación dentro de la línea de la investigación histórica, como veremos, pero también puede ser utilizada por el profesor, ya que el conocimiento de los obstáculos históricos puede sensibilizarlo sobre las dificultades que pueden surgir en los alumnos para la comprensión de algunos tópicos u objetos matemáticos (Sierra, 2000; Maz, 1999; González, 2004a).

- Interdisciplinariedad.

"El trabajo en clase con la historia de las matemáticas, permite una integración entre varias áreas para realizar experiencias de trabajo integradas y enriquecedoras académica y actitudinalmente" (Maz, 1999, p. 206).

- Organizador curricular.

Como indica (González, 2004a, p. 21) "la perspectiva histórica permite (…) dar una visión más panorámica de los problemas matemáticos para calibrar con mayor precisión la importancia de los diversos temas, que quedan así mejor articulados dentro de un contexto general". Esto ayuda al profesor a ordenar la presentación de los mismos en el currículo (Fauvel, 1991, cit. en Maz, 1999; Sierra, 1997).

- Elemento motivador.

La presentación de las matemáticas como una actividad cultural y humana, que debió superar históricamente muchas dificultades en su desarrollo puede servir de elemento motivador a los alumnos, que dejan de verlas como algo cerrado e inacabado y a veces inaccesible.

En resumen, la integración de la historia de las Matemáticas en la enseñanza supone un elemento importante en la mejora de su calidad. Su estudio puede ayudar en la presentación de los temas del currículo, a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado a lo largo del tiempo –lo que ayuda en relación con los errores cometidos por los alumnos- y a dar una visión de la actividad matemática como una actividad humana insertada en el contexto socio-cultural de cada época (Sierra, 1997).

Para el profesor debe constituir un revulsivo contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático. Además, es una fuente inagotable de material didáctico, de ideas y problemas interesantes, que el profesor puede utilizar para motivar su labor de transmisión del conocimiento.

Por último, como señala (González, 2004a, p. 45) "la Historia de las Matemáticas, como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática e integrarla de forma armónica e interdisciplinar en el currículo académico".

Por todo ello, y como señala Bagni (2000), el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza es legítimamente considerada una parte de la investigación en educación matemática.

Esto ha hecho que el interés por el estudio de la historia de las Matemáticas, desde diversas perspectivas, sea cada vez mayor, como muestran las ponencias y comunicaciones presentadas en congresos nacionales e internacionales, tesis doctorales, artículos y monografías, etc.

En el caso español tenemos los trabajos realizados en las universidades de Granada, La Rioja, El País Vasco, Salamanca, Valencia, Valladolid y Zaragoza, o por el Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, en Tenerife.

Sirvan como ejemplo los trabajos de Vea (1995) y Montesinos (2000) sobre la historia de las Matemáticas en la enseñanza secundaria; los de Mariano Hormigón (1983), Millán (1991) y Velamazán (1993) sobre la Geometría Superior en España; los de Escribano (1998, 2000) sobre la obra de Sixto Cámara; la historia de la Geometría Analítica realizada por González (2004b) o el estudio de Caballer (2006) sobre el Álgebra en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX y primeros años del XX.

En el ámbito de la investigación histórico-epistemológica podemos citar los trabajos de González (2002); Maz (2005); Esteves (2008); Rodríguez (2010); López, I. (2011) y Picado (2012), entre otros. De estos trabajos hablaremos más extensamente en el siguiente apartado.

Consideramos que esta necesidad e interés por la historia y el desarrollo de los conceptos avala en cierta medida la pertinencia de la investigación que realizaremos sobre la Geometría Analítica.

1.1.2. La investigación histórico-epistemológica.

Como hemos visto son muchas y variadas las razones que justifican el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, y que hacen que la Investigación Histórica forme parte de la investigación en educación matemática, con un importante desarrollo.

En este apartado veremos cómo se fundamenta este tipo de investigación y las principales corrientes dentro de la misma, con objeto de ubicar nuestro estudio.

Pero, ¿qué entendemos por investigación histórica en educación? González y Sierra (2003, p. 110) consideran la investigación histórica "como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias y aspectos relacionados con la educación".

El objetivo final de la investigación histórica en didáctica de la matemática es el de esclarecer problemas educativos, abordándolos de una manera científica. Es decir, desde esta perspectiva se busca "encontrar fundamentos para sustentar hipótesis que ayuden a resolver los problemas observados en las matemáticas en situación escolar, en este caso, a la luz que arroja la historia de las ideas" (Gómez, 2003, p. 79).

Este tipo de investigación permite comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje desde el desarrollo histórico de un concepto. Picado (2012, p. 91) desarrolla esta idea y señala que

> La investigación histórica permite conocer los orígenes del sistema educativo de una nación, el surgimiento y el desarrollo de las distintas teorías y prácticas educativas; además de brindar a los educadores la posibilidad de utilizar prácticas pasadas en la evaluación de las aparecidas recientemente y contribuir a una comprensión plena de la relación entre política y educación, entre institución y sociedad, entre maestro y alumno.

La principal diferencia entre la investigación histórica y otros tipos de investigación en educación son sus fuentes de datos, como textos, diarios o documentos oficiales. En este caso las fuentes están disponibles antes de que el historiador formule una tesis, seleccione un tópico y designe un plan de investigación. El problema, a veces, es localizar las fuentes y obtener autorización para utilizarlas (González y Sierra, 2003).

Según Gómez (2003, p. 79)

> esta línea de investigación arranca con el giro teórico que sufrió la investigación didáctica en los años 70, al constatarse que "no deberíamos comenzar desde una teoría del aprendizaje general y neutral respecto al contenido, y derivar de ella una teoría del aprendizaje matemático… [más bien deberíamos] empezar [desde] procesos de aprendizaje específicos de un contenido" (Bauersfeld y Skowronek, 1976, cit. Gómez, 2003, p. 79).

Gómez (2003, p.79) continúa diciendo que "bajo este enfoque surgieron líneas de investigación que incorporaron elementos de la epistemología genética y de la historia de los conceptos matemáticos ≪a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto≫" (Rojano, 1994, p. 46), líneas de investigación que han evolucionado hacia lo que actualmente se denomina el análisis histórico-epistemológico.

Este tipo de análisis toma elementos de la génesis histórica y de la epistemología:

> Al estudiar la génesis histórica se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados. Por su parte la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas (Gómez, 2003, p. 80).

A la hora de llevar a cabo este tipo de análisis Maz (2005, p. 30) señala que "la sola descripción de los hechos y acontecimientos que envolvieron el desarrollo de un determinado conocimiento no aporta resultados de valor epistemológico para dicho saber", por tanto se debe recurrir a técnicas que permitan una reconstrucción del conocimiento en términos de su evolución. Piaget (1979, pp. 63-64; cit. Maz, 2005, p.30) agrupa los métodos utilizados por la epistemología para reflexionar sobre los procesos de construcción y validación del conocimiento en tres grandes categorías:

- Los métodos de análisis directo (que) son aquellos que "*en presencia de un nuevo cuerpo de doctrinas científicas, intentan por simple análisis reflexivo hacer surgir las* *condiciones de conocimiento que están en juego en tales acontecimientos*".

- Los análisis formalizantes (que) difieren de los directos en que agregan "*al conocimiento un examen de las condiciones de formalización*".

- Los métodos genéticos "*que tratan de comprender los procesos del conocimiento científico en función de su desarrollo o de su formación*".

El objeto de nuestra investigación es la de realizar un estudio histórico y epistemológico de la Geometría Analítica, indagando en su evolución a lo largo del siglo XIX a través de los libros de texto utilizados en educación secundaria y universitaria, por tanto la metodología que debemos emplear en este estudio es esta última.

Pero los métodos genéticos aún se pueden subdividir en dos: la epistemología genética y el método histórico (Piaget 1979, p. 64; cit. Maz, 2005, p. 31).

> La epistemología genética, la que por medio de "*una combinación de análisis psicogenéticos y de formalización de las estructuras intenta alcanzar las condiciones psicológicas de la formación de los conocimientos elementales y coordinar estos resultados con el estudio de las condiciones de formalización*" (p.64).
>
> El método histórico-crítico, que "*extiende felizmente los métodos de análisis directo, remontándose desde el examen de un cuerpo de doctrinas actuales hasta el estudio de su formación; pero que, al acentuar la importancia del desarrollo histórico, descuida con frecuencia las consideraciones de formalización"* (p. 64).

Será este último método el que utilizaremos en nuestra investigación, con el fin de mostrar las ideas y conceptos utilizados en su momento por los autores de los textos en relación con el contexto y las ideas de la época.

Para terminar daremos una breve descripción de las diferentes corrientes existentes dentro de la investigación histórico-epistemológica (Gómez, 2003; López, I. 2011), ubicando dentro de ellas nuestra investigación.

1. *La perspectiva histórica en la enseñanza*.

En este caso la investigación está orientada a la importación al aula de episodios históricos o problemas del pasado para que los estudiantes los discutan o resuelvan, es decir, esta corriente busca enseñar matemáticas desde una perspectiva histórica.

2. *El enfoque de los obstáculos epistemológicos.*

El objetivo de este tipo de investigación es determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática, como una herramienta útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en los alumnos. Se considera que identificar obstáculos en la historia permite diseñar modelos didácticos de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes, teniendo en cuenta las diferencias existentes entre el desarrollo histórico de un concepto y su aprendizaje escolar.

3. *El enfoque del modelo teórico-local*.

En esta corriente se utiliza el análisis histórico epistemológico para hacer un "análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas…, y después poner a prueba los hallazgos teóricos en los Sistemas Educativos, para después de esta experimentación, volver, a base de resultados prácticos, a tener una visión de la problemática de la historia de las ideas que corresponda a los resultados didácticos" (Filloy, 1999, p. 154, cit. Gómez, 2003, p. 79).

4. *El análisis de los libros de texto.*

Esta tendencia se fundamenta en que "los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos" (Schubring, 1987), es decir la realidad educativa está guiada más por los libros de texto que por las tendencias curriculares o los planes de estudios (López, I. 2011).

Así los libros de texto históricos constituyen una fuente de información privilegiada. En ellos "el investigador puede obtener información sobre las relaciones del desarrollo de los contenidos de enseñanza con el desarrollo científico y social, sus antecedentes y su proyección en el futuro, o puede indagar para determinar la importancia de las mentalidades nacionales específicas y de las filosofías y epistemologías en el progreso de un concepto". Así mismo puede buscar información sobre el desarrollo curricular y pedagógico; los aspectos conceptuales, actividades, problemas y ejercicios que se trabajan; sus secuenciaciones, etc. (Gómez, 2003, pp. 81-82).

Nuestra investigación se enmarca dentro de esta corriente, por lo que más adelante haremos un estudio más detallado de la importancia del libro de texto como fuente documental en la investigación histórica en educación.

5. *El enfoque de la reproducción en los estudiantes de las etapas de la historia.*

Esta tendencia supone que en su constitución un concepto o idea matemática pasa por diversas etapas bien definidas, etapas que los estudiantes también deben pasar en su aprendizaje.

6. *El enfoque socio cultural.*

Este enfoque se basa en la idea de que el conocimiento está profundamente arraigado y conformado por su contexto socio cultural.

Son numerosos los autores que trabajan en esta línea de investigación bajo sus distintas corrientes. Particularmente en España, destacamos los siguientes trabajos, algunos de ellos mencionados con anterioridad. Sierra (1997, 2000); Maz (1999) y González (2004a), destacan el papel de la historia de las matemáticas como recurso didáctico y su uso en el aula; Bruno y Martinón (2000) estudian las matemáticas escolares para la segunda enseñanza en España durante el siglo XX; González y Sierra (2003, 2004) presentan un método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático y Gómez (2003) sistematiza sobre la investigación histórica en didáctica de la matemática. Sobre la evolución histórica de tópicos específicos señalaremos los trabajos de Sierra, González y López (1999), sobre la evolución histórica del concepto de límite funcional en los textos de bachillerato y COU; el estudio de González (2002) sobre los sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático; el de González y Sierra (2002) sobre la evolución de los conceptos del análisis matemático en los libros de texto españoles desde que fue implantada su enseñanza en el plan de 1934 hasta nuestros días; el de Maz (2005) sobre el tratamiento de los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX; el trabajo de Esteves (2008) sobre la evolución histórica de los problemas de optimización y su tratamiento en la enseñanza secundaria portuguesa en los siglos XX y XXI, realizada en la Universidad de Salamanca y el de Rodríguez (2010) que estudia el desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales. Recientemente López, C. (2011) ha estudiado la formación de maestros en aritmética y álgebra a través de los libros de texto; López, I. (2011) particulariza la investigación histórica al análisis sistémico de la obra de Mariano Vallejo y Picado (2012) estudia el Sistema Métrico Decimal en los libros de texto de matemáticas en España en la segunda mitad del siglo XIX.

Fuera de España citaremos como ejemplo los trabajos de Matos (1989, 2006, 2007)sobre la enseñanza de las matemáticas y la introducción de la matemática moderna en el sistema educativo en Portugal y Amaral, Ralha y Gomes (2011) sobre el concepto de medida en los programas de estudio de matemáticas para la formación de profesores. El estudio de Bjarnadóttir (2006, 2012) sobre la educación matemática en Islandia desde una perspectiva histórica y el desarrollo socio-económico; o el de (Barbin, 2012) sobre la enseñanza de las cónicas en los siglos XIX y XX en Francia.

Nuestro trabajo se enmarca, por tanto, en la línea de la investigación histórico-epistemológica y dentro de ella, en la corriente del análisis de libros de texto. Realizaremos un análisis histórico de los mismos, utilizando para ello la técnica del análisis de contenido.

En los siguientes puntos trataremos los tres aspectos que caracterizan la metodología utilizada en este trabajo: el método histórico, los libros de texto como fuente documental y el análisis de contenido como herramienta de análisis.

1.1.3. La investigación histórica. El método histórico.

La investigación histórica posee un método propio determinado por unas fases que están muy bien delimitadas. Nosotros seguiremos las propuestas por Ruíz (1976) y González y Sierra (2003), que son las siguientes:

- Planteamiento de la investigación.
- Heurística. Crítica.
- Análisis de la documentación.
- Hermenéutica.
- Exposición.

a) Planteamiento de la investigación

En esta primera fase se delimita el tema de investigación, que incluye varios pasos. En primer lugar la elección del tema. Ruiz Berrio (1976) propone algunas condiciones básicas a la hora de hacer esa selección como son: considerar conjuntos histórico-pedagógicos representativos, tener en cuenta las circunstancias personales del investigador, elegir el tema teniendo en cuenta lo que representa dentro de un amplio programa de investigaciones y las necesidades historiográficas nacionales o locales.

Una vez elegido el tema hay que conocer el estado de la cuestión, determinar línea de investigación, establecer los periodos de tiempo que se van a investigar desde un punto de vista pedagógico más que histórico-pedagógico, y realizar un primer sondeo de los fondos documentales que existen y que se pueden localizar para establecer las posibilidades que brinda dicho material. Con estos datos se enuncian unas hipótesis iniciales.

b) La Heurística

La Heurística se ocupa de la localización y clasificación de los documentos, así como de las ciencias auxiliares de la historia. Es decir en esta etapa debemos ocuparnos de localizar y clasificar los documentos que utilizaremos para nuestra investigación.

En Historia de la educación se entiende por documento todo aquel material que nos sirva para darnos noticia del pasado educativo, y puede ser de muchos tipos. Atendiendo a su relación directa o indirecta con los hechos históricos se dividen en fuentes primarias o secundarias; y atendiendo a su naturaleza en documentos escritos, sonoros, pictóricos, audiovisuales, arquitectónicos, de mobiliario, de útiles escolares, etc. "Entre los primeros encontramos una amplia gama: inscripciones, correspondencia, diarios, memorias, informes, reglamentos, planes, cartas, bulas, libros de texto, apuntes, enciclopedias, periódicos, revistas, guías, libros de actas, registros… Entre los sonoros: discos, cintas, bandas sonoras… entre los pictóricos: grabados, cuadros, dibujos, fotografías, diapositivas, películas…, Entre los arquitectónicos: edificios, aulas, bibliotecas…En cuanto al mobiliario: pupitres, mesas, bancos…Entre los útiles escolares: tablillas, punzones, plumas, tinta, tiza, lapiceros, pizarras, mapas…" (González y Sierra, 2003, p. 112).

Para localizar estos documentos tenemos en España diferentes archivos, especialmente los cuatro grandes archivos históricos: el Nacional, el de Simancas, el de la Corona de Aragón y el de Indias; a ellos hay que añadir el de Alcalá de Henares, archivos militares y los de las diferentes Universidades así como numerosas bibliotecas provinciales, municipales, de universidades, de institutos, entre otros (González y Sierra, 2003).

Además hay que tener en cuenta los repertorios bibliográficos y catálogos de bibliotecas. En este aspecto hay que señalar la disposición en la actualidad de fondos digitales cada vez mayores, disponibles en la red. Entre ellos destacaremos Google Books, la Biblioteca Virtual de Andalucía, la Biblioteca de la Universidad de Granada, Biblioteca de la Universidad de La Rioja, el fondo digital de la Biblioteca Nacional, la Biblioteca virtual Miguel de Cervantes y la colección histórica digitalizada del BOE.

Una vez reunido el material es necesario clasificarlo y seleccionarlo, tanto para que no se produzcan vacíos documentales, como para que no haya redundancias. Una vez clasificadas las fuentes se debe verificar su validez mediante una crítica histórica estudiando su autenticidad (crítica externa) y fiabilidad (crítica interna).

c) Análisis de la documentación

"El análisis de la documentación nos permite estudiar el material teniendo en cuenta tanto criterios pedagógicos como históricos. Dada la cantidad de material de que se suele disponer, en esta etapa se debe diseñar algún instrumento que permita abordar el objetivo que se haya planteado" (González y Sierra, 2003, p. 117).

d) La Hermenéutica

La hermenéutica, o interpretación histórica de los datos -histórico-pedagógica, en nuestro caso- consiste en la interpretación de los datos a la luz de los análisis realizados. Como indican González y Sierra (2003, p. 120), "en esta fase se trata de dar una respuesta adecuada a las preguntas planteadas e indicar las posibles causas por las que se produjeron los hechos históricos analizados".

e) Exposición

La última fase es la de la exposición, en la que se redactan los resultados de la investigación.

1.2. Los libros de texto.

El libro de texto, manual escolar o libro escolar fue durante años un objeto de estudio olvidado e incluso despreciado por los historiadores en educación, además de por los bibliógrafos y archiveros. Choppin (2000) achaca esta falta de interés a varios factores: en primer lugar, los libros escolares forman parte de nuestro entorno cotidiano, no tienen nada de raro, exótico o singular; son, por otro lado, productos perecederos, a merced de los cambios de programa o los caprichos de la actualidad y por último, la trivialidad, la abundancia y la amplia difusión de la producción escolar han disuadido a conservadores y bibliófilos de cualquier movimiento inversor. No obstante, añade, "los manuales representan una fuente privilegiada para aquellos historiadores interesados en cuestiones de educación, cultura, mentalidades, lenguaje o ciencias, o incluso, en la economía del libro, las técnicas de impresión o la semiología de la imagen"(Choppin, 2000, p. 15).

De hecho, el manual es un objeto complejo que desempeña funciones múltiples, entre las que podemos considerar las siguientes (Puelles, 2000):

- Simbólica, en tanto que representa el saber oficial.
- Pedagógica, pues transmite los saberes básicos.
- Social, ya que contribuye a la inculturación de las jóvenes generaciones.
- Ideológica, pues vehicula y jerarquiza valores de modo manifiesto o latente.
- Política, ya que sus contenidos son regulados por los poderes públicos de acuerdo con determinados fines extraescolares.

Además de estas funciones, se suelen considerar además su evolución como material escolar (diseño, impresión, ilustración, etc.) y su consideración como producto comercial que tiene una entidad económica considerable.

Desde el punto de vista de la historia de la educación Delgado (1983) propone el libro de texto como una fuente inestimable por múltiples razones. En primer lugar los manuales escolares permiten conocer las opiniones e ideas de sus autores o editores. Además podemos encontrar sus orientaciones metodológicas, sus concepciones pedagógicas y los autores a los que se remiten. En este sentido, los libros de texto indican la cantidad de ciencia que fue capaz de incluir su autor para el consumo escolar, su nivel de conocimientos científicos, así como su nivel pedagógico y su habilidad didáctica.

Los libros de texto "ayudan también a conocer los canales de comunicación de las ideas en la sociedad y la resistencia que hallan en determinados grupos sociales. Permiten ver la simplificación y distorsión a que son sometidas las ideas al ser transmitidas y el tiempo transcurrido entre el lanzamiento de una opinión, su recepción y el cambio en la estructura social" (Delgado, 1983, p. 353). En el caso de las Matemáticas, el libro de texto indica como ningún otro medio la distancia en años existente entre la aportación de la ciencia y su explicación en el aula.

Por otra parte el manual escolar indica cómo ha sido llevada a la práctica la política educativa de un país. Como señala Collados (2008, p. 326) "los manuales escolares son, sin duda alguna, agentes que seleccionan, priorizan e imponen unos contenidos frente a otros, así como una determinada forma de transmitirlos, son representaciones del currículo y su papel principal es y ha sido actuar como nexos entre el currículo y el aula, de ahí su incuestionable influencia en su aplicación y cristalización".

Es decir, al margen del valor pedagógico del libro de texto, existen otros factores nada desdeñables para la Historia de la Educación, como son los factores políticos, económicos y sociológicos en general.

Todas las características expuestas hacen del libro de texto una importante fuente documental a la vez que un objeto de difícil precisión conceptual y de una gran complejidad (Puelles, 2000). A esto hay que añadir que el trabajo con estos materiales a menudo dispersos, y físicamente muy vulnerables, provoca que la simple localización y catalogación de ejemplares consuma una considerable cantidad de tiempo y energía en los trabajos de campo.

A pesar de ello las investigaciones históricas y epistemológicas en educación que utilizan el libro de texto como objeto de estudio o como fuente documental son cada vez mayores.

En González y Sierra (2002) encontramos una recopilación de los trabajos más importantes al respecto, realizados en los años ochenta y noventa. Así destacan los estudios comparativos de Howson realizados en 1995 sobre libros de texto de diferentes países. En este estudio se distingue entre investigaciones realizadas sobre textos *a posteriori,* es decir sobre la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado; y las realizadas *a priori*. Entre estas últimas, se destacan los trabajos de Chevallard y sus colaboradores (Chevallard, 1985; Chevallard y Joshua, 1982), "en los que se utiliza la noción de transposición didáctica relativa a las transformaciones entre el *saber sabio* y el *saber enseñado,* entre los que existe un escalón intermedio correspondiente al *saber a enseñar,* que se refleja en el texto del saber. Lo más próximo a este texto del saber, o saber a enseñar, es el libro de texto, cuyo contenido y estructura reflejan esas transformaciones del saber sabio", González y Sierra (2002, p. 179).

Otras investigaciones se centran en aspectos relativos al lenguaje y la legibilidad de los textos (Pimm, 1987, 1994), o en la forma de presentación de los contenidos como Otte (1986) que pone el énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y la representación textual y las variaciones en las interpretaciones. A su vez Dormolen (1986), hace una clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libro de texto de matemáticas y Lowe y Pimm (1996) consideran que hay una tétrada asociada a un libro de texto: el lector, el escritor, el profesor y el mismo libro, y que las características de cada uno de ellos, así como sus interacciones, determinan el uso de este material en el aula.

Por otra parte destacan el trabajo realizado por Dhombres (1984) y Schubring (1987) sobre metodología de análisis histórico de libros de texto, resaltando la necesidad de una aproximación global que analice los cambios en las sucesivas ediciones de un libro de texto, los cambios respecto a otros libros de texto y la relación de éstos con los que se han producido en el contexto. También consideran los trabajos de Cantoral (1985), Filloy y Rojano (1984) o Puig (1994) en los que se comparan algunos de los procesos utilizados por los alumnos en la comprensión del conocimiento matemático y los utilizados en los libros o textos históricos de matemáticas (González y Sierra, 2002, p. 179).

Por nuestra parte destacaremos los trabajos realizados en España en los últimos años relacionados con los libros de texto históricos.

En primer lugar destacar el número monográfico de la revista *Historia de la Educación* (n.19, 2000) dedicado a los manuales escolares. En este número encontramos, un trabajo de Choppin (2000) en el que traza un sucinto repaso histórico de la edición escolar francesa centrando su interés en la evolución del manual en cuanto instrumento pedagógico; un estudio de los libros de texto de física y química utilizados en la segunda enseñanza en España entre los años 1845-1900, realizado por Moreno (2000) o un artículo sobre el desarrollo del proyecto MANES –destinado al estudio de los manuales escolares publicados en España durante los siglos XIX y XX- desde su inicio en 1992 hasta el año de publicación de dicho artículo (Tiana, 2000).

Por otra parte hay que señalar aquellas investigaciones históricas en educación matemática que utilizan el libro de texto como fuente documental. Tenemos en este campo las ya citadas investigaciones de González (2002) sobre los sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático; el de González y Sierra (2002) sobre la evolución de los conceptos del análisis matemático en los libros de texto españoles desde que fue implantada su enseñanza en el plan de 1934 hasta nuestros días; el de Maz (2005) sobre el tratamiento de los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX; el trabajo de Esteves (2008) sobre la evolución histórica de los problemas de optimización y su tratamiento en la enseñanza secundaria portuguesa en los siglos XX y XXI, y el de Rodríguez (2010) que estudia el desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales. Así como los de López, C. (2011) sobre la formación de maestros en aritmética y álgebra a través de los libros de texto; López, I. (2011) sobre la obra de Mariano Vallejo y Picado (2012) acerca del Sistema Métrico Decimal en los libros de texto de matemáticas en España en la segunda mitad del siglo XIX.

En este contexto se enmarca la presente investigación, en la que se han utilizado los libros de texto de Geometría Analítica como fuente primaria. Para llevarla a cabo hemos tenido en cuenta, como señala Puelles, (2000), que para saber lo que han representado los libros de texto en una época concreta, es preciso acceder a diversos niveles de conocimiento: en primer lugar en relación con el currículo prescrito (planes de estudio, programas de materias, cuestionarios oficiales), en segundo lugar cómo se reflejan en los libros tales prescripciones y en tercer lugar, es necesario distinguir qué libros se usaban realmente en las escuelas y cómo se usaban.

Por ello hemos consultado los planes de estudios de secundaria y de la Facultad de Ciencias, que nos han informado no solo de los aspectos relativos al currículo, sino de los libros de texto aprobados oficialmente por el Estado, y posteriormente se ha realizado un análisis de contenido de las obras seleccionadas.

1.3. El análisis de contenido.

El análisis de contenido es una técnica de análisis de comunicaciones que comenzó a desarrollarse en los primeros años del siglo XX en EEUU, esencialmente para analizar material periodístico, y que actualmente es ampliamente utilizada en el campo de las Ciencias Sociales (Bardin, 1986).Una de sus aplicaciones es la investigación histórica en Educación, y más concretamente el estudio del contenido de los libros de texto, como señalan Cohen y Manion (1990). Por otra parte, diversos trabajos (Gomez, 2002; Maz, 2005; Rico, 2008; Maz 2009) muestran al análisis de contenido como una herramienta eficaz para el análisis de manuales escolares; por todo ello hemos optado por utilizar esta técnica en nuestro estudio sobre la Geometría Analítica.

El análisis de contenido es definido por Bardin (1986) como:

> (…) un conjunto de técnicas de análisis de comunicaciones, tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes, permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/ recepción (variables inferidas) de estos mensaje (p.32, cit. en Maz, 2009, p. 8).

y por Krippendorff (1990, p.28, cit. en Maz, 2009, p. 8) como *una técnica de investigación destinada a formular, a partir ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto.* Que las inferencias sean reproducibles significa que si otros investigadores en otros momentos, y quizá en diferentes circunstancias, aplican la misma técnica a los mismos datos, sus conclusiones deben ser la mismas que las obtenidas originalmente (Krippendorff 1990, p.29). Es por ello que en este tipo de estudios se debe resaltar la objetividad, lo que se logra "a través de la formulación de reglas claras y explicitas que sirvan como pautas para que otros investigadores puedan analizar el mismo material bajo iguales condiciones y puedan validar o falsar las conclusiones" (Maz, 2009, p.7), se hace necesario por tanto explicitar de forma clara los focos en que dicho análisis se centra y los criterios que van a utilizarse.

En general los procesos básicos para el análisis de contenido son (Krippendorff, 1990; Fox, 1981, cit. en Maz, 2009, p. 9):

1. Elección de la unidad de análisis
2. Elaboración del conjunto de indicadores o categorías.
3. Elaboración de un fundamento lógico que sirva como guía para colocar las respuestas en cada categoría.

Por otra parte, no debemos olvidar que trabajamos en Educación Matemática y que analizaremos libros de texto, en cuyo caso, tal y como indica Maz (2005, p.34):

> (…) hay que considerar que estos textos son documentos didácticos y que, por tanto, el análisis de contenido ha de realizarse sobre la naturaleza didáctica de los documentos. Desde esta perspectiva, subrayamos que los textos no son documentos exclusivamente formales, sino que necesitan transmitir una pluralidad de significados para la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001). Es por ello por lo que el análisis de contenido debe contemplar esos diversos significados para ponerlo de manifiesto en toda su riqueza.

Rico et al. (2008) presentan el análisis de contenido como "una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares" (p.9), y añaden que

> Esto se realiza mediante el estudio de las estructuras conceptuales en la que nuevos conceptos se insertan, por la determinación de los sistemas de representación mediante los cuales tales conceptos se expresan y por la delimitación y conocimiento de las cuestiones para cuya respuesta tales conceptos fueron

> construidos, acotados, a su vez, por los campos en que tales conceptos se utilizan como herramientas para plantear y resolver problemas (p.9).

Es decir, el análisis de contenido de un texto escolar de matemáticas se debe dividir en tres tipos de análisis: el análisis de la estructura conceptual, el de los distintos sistemas de representación utilizados para expresar dichos conceptos y el análisis fenomenológico de los conceptos estudiados, junto con los procesos de modelización en que tales conceptos se implican.

Gómez (2002), citado en Maz (2005, p.34), detalla las referencias consideradas para el análisis de contenido:

- *Estructura conceptual:* se considera como tal a todas aquellas descripciones de los conceptos y las interrelaciones entre ellos, así como la estructura matemática que les justifican. Sobresalen técnicas para el análisis de esta estructura conceptual; la representación en mapas conceptuales y la organización en sistemas de representación.
- *Sistemas de representación*: Los sistemas de representación manifiestan diversas facetas de un mismo concepto matemático; esta descripción en sistemas de representación permite identificar y delimitar las subestructuras matemáticas que conforman la estructura matemática presentada.
- *Análisis fenomenológico*: Algunas de las estructuras matemáticas pueden modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos, de tal forma que, en el análisis fenomenológico, se identifican las características del fenómeno que son relevantes y se relacionan con elementos y propiedades de la estructura matemática en una o más de sus representaciones.

Además de lo expuesto anteriormente, a la hora de realizar el estudio de los sistemas de representación y el análisis fenomenológico tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

Castro y Castro (1997, p. 96), distinguen dos tipos de representaciones, las internas, que son aquellas imágenes mentales que creamos cuando pensamos en un concepto matemático; y las externas mediante las que expresamos estos conceptos:

> Además de comunicar nuestro conocimiento sobre conceptos y operaciones también necesitamos pensar sobre tales objetos; en este caso formamos imágenes mentales que se denominan representaciones internas. No todas las imágenes mentales consideran características figurativas o gráficas del concepto; cuando en una representación mental predominan los componentes figurativos o gráficos hablamos de visualización.
>
> (…) las representaciones externas, como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figura geométricas, entre otras muchas, son el medio por el que los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás.

Aunque en la Geometría Analítica es muy importante la visualización, ya que se utiliza el lenguaje algebraico para resolver problemas geométricos, nosotros nos centraremos en el estudio de las representaciones externas utilizadas por los autores en los libros de texto.

Dentro de las representaciones externas se suelen distinguir dos grandes familias: las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico; y las representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo. En matemáticas estas dos familias se denominan, comúnmente, representaciones o sistemas de representación simbólicos y sistemas de representación gráficos, respectivamente (Castro y Castro, 1997).

> Estos planteamientos llevan a incluir las diferentes escrituras simbólicas, el lenguaje natural (enunciados), las figuras y gráficos, las tablas, cuadros y las notaciones algorítmicas que expresen un modo de operar como sistemas de representación en matemáticas (Castro y Castro, 1997, p. 101).

Es, por tanto, en estos aspectos en los que centraremos nuestro análisis de los sistemas de representación.

En cuanto al análisis fenomenológico hemos de tener en cuenta, que aunque en general, una estructura matemática puede modelizar fenómenos sociales, naturales y matemáticos, como ya hemos señalado; en el caso particular de la geometría analítica los problemas y situaciones que se plantean son solamente de tipo matemático, como señala Puig (1997, p. 82):

> (…) hay objetos mentales cuyo campo de fenómenos sólo se presenta en un contexto matemático o matematizado. Un ejemplo de ello en la Educación Secundaria lo proporcionan los conceptos de la geometría analítica.
>
> (…)Los fenómenos que son propios de la geometría analítica son pues fenómenos producidos por la expresión de las propiedades geométricas en el complejo sistema de signos en que las expresiones algebraicas y la representación cartesiana se refieren mutuamente. Son, por tanto, fenómenos que sólo pueden explorarse en contextos matematizados previamente mediante el uso de esos sistemas de signos.

Será pues en este contexto en el que llevaremos a cabo nuestro análisis fenomenológico.

CAPÍTULO 2: Contexto histórico

Introducción

En este capítulo mostraremos el contexto histórico en que se desarrolla nuestro trabajo. Lo veremos desde distintos puntos de vista, que se complementan formando el marco que nos permitirá interpretar y que dará sentido a los datos obtenidos en el análisis de los libros de texto, que llevaremos a cabo en el capítulo 4.

En primer lugar, al basarse la investigación en el estudio de la Geometría Analítica, en el punto 2.1 haremos un breve repaso de la historia de esta. En este punto mostramos sus antecedentes históricos desde la antigua Grecia, comentamos las obras de Descartes y Fermat y revisamos brevemente las principales obras de Geometría Analítica post-cartesiana hasta el siglo XIX.

Como a finales de siglo la Geometría Analítica se funde con la Proyectiva hemos considerado necesario estudiar también su historia, considerando los principales matemáticos y las obras más representativas en sus primeros años de desarrollo. Todo ello, junto con la introducción de algunos conceptos proyectivos, que servirán para comprender mejor el análisis de algunas de las obras estudiadas, se encuentra recogido en el apartado 2.2.

En el 2.3 hacemos un breve recorrido por los hechos socio-políticos más relevantes de la historia de España en el XIX, tales como cambios de gobierno, orientación ideológica de los mismos, estructura social y confrontaciones bélicas.

En el 2.4 estudiamos el desarrollo de la matemática en España en ese siglo, a la luz de los hechos descritos en el punto anterior.

Por último, en el punto 2.5 estudiamos los planes de estudios de educación secundaria y de la Facultad de Ciencias vigentes desde 1836, año en que se publica el primer plan de estudios de secundaria, hasta 1909. En cada uno de ellos estudiamos la presencia de Geometría Analítica en el currículo, para tener idea de qué peso tuvo esta asignatura en cada una de estas etapas educativas a lo largo del siglo.

2.1. Orígenes y desarrollo de la Geometría Analítica

Antes de comenzar con la revisión histórica, es necesario definir una serie de conceptos que irán apareciendo a lo largo de este trabajo, relacionados con los tipos de geometrías que nos iremos encontrando y que es preciso tener claros.

En primer lugar, es fundamental saber qué se entiende por Geometría Analítica, ya que es el objeto principal de nuestro estudio. Según González (2007)

> La *Geometría Analítica* es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de

> coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación *f(x,y)=0* y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos del plano, siempre respecto a un sistema de coordenadas (González, 2007, p. 205).

Es decir el concepto fundamental de la Geometría Analítica es el de lugar geométrico, por el cual toda curva tiene asociada una ecuación que la define y recíprocamente. Sin embargo, como veremos en el capítulo destinado al análisis de los libros, en el siglo XIX la *Geometría Analítica* o *Aplicación del Álgebra a la Geometría*, englobaba no sólo aquella que trabaja con sistema de coordenadas, sino aquella que utiliza el Álgebra para resolver problemas geométricos. Frente a esta manera de hacer geometría está la *Geometría Sintética*, también denominada a veces *Geometría Pura*, que es aquella por la que los problemas se resuelven utilizando únicamente razonamientos y construcciones geométricas, sin ninguna intervención del Álgebra.

2.1.1. Antecedentes

El origen de la Geometría Analítica se remonta a la matemática griega, con el estudio de la cónicas llevado a cabo por Menecmo (hacia 350 a. C) y, sobre todo, por Apolonio (262-190 a. C?).

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables en la antigua Grecia, produjo una grave crisis de fundamentos que les condujo a evitar a toda costa el uso de razones en la Geometría elemental. Es por ello que dejan de manejar numéricamente longitudes y áreas, de modo que operan directamente con las figuras, que se tratan como magnitudes. Tras la solución dada a esta crisis por Eudoxio (408-355 a.C.), mediante la *Teoría de la Proporción*[1], se lleva a cabo una estructuración rígida de la matemática griega elemental en *Los Elementos* de Euclides, que establece como paradigma un estilo sintético de exposición. Se desarrolló así un tipo de matemática denominada *Álgebra Geométrica,* una especie de Geometría Algebraica, resultado de la geometrización de los métodos algebraicos de los babilónicos. En ella los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas, que obligan a mantener la homogeneidad de los términos. Esta forma de trabajar impulsó la Geometría al margen de la Aritmética, impidió el desarrollo de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limitó la introducción de nuevas curvas (González, 2007).

En este contexto llevaron a cabo sus trabajos sobre las cónicas Menecmo y Apolonio. El primero fue el descubridor de las mismas, como secciones de un plano perpendicular a conos rectos de tres tipos -dependiendo de que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso- y las definió como lugares de puntos en el plano. Menecmo vinculó ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en expresiones geométricas básicas, que permitían deducir, a su vez, innumerables propiedades de las secciones cónicas. (González, 2007).

Apolonio, en su importante obra *Las Cónicas,* introduce grandes cambios con respecto a los geómetras anteriores: entre otras cosas obtiene los tres tipos de secciones de un único cono, y acuña para la posteridad los nombres de *parábola, hipérbola y*

[1] El método de las proporciones permite construir, dados tres segmentos, otro que sea cuarta proporcional a ellos, tal como se hace hoy en día utilizando lo que llamamos actualmente Teorema de Tales; o dados dos segmentos otro que sea media proporcional utilizando las propiedades de las cuerdas de un círculo. Para ver con más detalle este método consultar González, 2004, p. 14.

elipse. Además no define las cónicas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes en forma de proporción, que determinan en cada caso la propiedad característica de definición de la curva.

Debemos señalar la utilización en el estudio de las cónicas por parte de Apolonio, de ciertas líneas de referencia -diámetros conjugados o un diámetro y una tangente en uno de sus extremos- que juegan un papel similar al de las coordenadas. En el caso del diámetro y la tangente, las distancias medidas a lo largo del primero a partir del punto de tangencia harían el papel de las abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, interceptados por el diámetro y la curva harían lo propio con las ordenadas. Para cada cónica la relación de áreas y longitudes antes citado se traduce en una relación entre las "abscisas" y las "ordenadas"[2] que Apolonio llama el *symptoma* de la curva, que no es más que la expresión retórica de la ecuación analítica de la curva (González, 2007). González explica esto de la siguiente manera:

> Por ejemplo la conocida ecuación de la parábola con vértice en el origen es $y^2=lx$, donde l es el *latus rectum* o *parámetro doble* que se representa por 2p. Esta expresión de la parábola en forma de ecuación sintetiza precisamente el farragoso y larguísimo enunciado de la Proposición I.11 de *Las Cónicas* en forma de propiedad que cumple la *sección cónica* considerada, bautizada por Apolonio justamente aquí con el nombre de *parábola*. Este enunciado muy resumido viene a decir:
>
> ≪*La parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el latus rectum l* (…)≫ (González, 2004, p. 26)

En palabras de Boyer (1987, p.207) "los métodos que utiliza Apolonio en *Las Cónicas* son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la Geometría Analítica de Descartes en unos 1800 años".

Pero hemos de señalar, que estas líneas de referencia aparecen siempre superpuestas a posteriori a las curvas para estudiar sus propiedades, no se establecen a priori con el fin de representar gráficamente la "ecuación" o relación expresada, o para determinar la curva a partir de dicha "ecuación".

Por todo ello algunos historiadores modernos, que establecen como esencia de la Geometría Analítica el estudio de los lugares geométricos, colocan a los antiguos griegos como precursores de esta rama de las Matemáticas, a pesar de las limitaciones de los métodos sintéticos y de la ausencia de un Álgebra simbólica.

Posteriormente Nicolás de Oresme (1323,1382) en la Edad Media usará en su *Tractatus latitudinibus formarum,* publicado hacia 1362, un sistema de representación muy similar a las coordenadas rectangulares actuales, que a diferencia de las utilizadas por Apolonio se introducen a *priori*, y los puntos de la curva son representados con respecto a él.

En este tratado, Oresme estudia la variación de una magnitud, que llama *cualidad*, en función de otra, y buscando cómo aclarar este concepto concibe una representación en el plano de *las intensidades de las cualidades* utilizando, como decimos, un sistema de

[2] Utilizamos los términos modernos para una mejor comprensión del concepto, por el paralelismo que se puede establecer entre las líneas de referencia utilizadas por Apolonio y los sistemas de coordenadas cartesianos, pero formalmente no se pueden denominar así pues estas líneas de referencia no conforman realmente un sistema de coordenadas.

representación muy similar al actual. Tras elegir un punto como origen en una recta horizontal, Oresme llama *longitudo* (longitud) a nuestra abscisa, que es el tiempo o el espacio, y eleva una perpendicular, la *latitudo* (latitud), nuestra ordenada, que es proporcional a la intensidad o amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros. No obstante, para Oresme esta variación no se refleja por la curva descrita por los puntos de *longitud* y *latitud* dadas, sino por la figura total, es decir, el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final, que Oresme llama simplemente *figura* (González, 2004b).

Por otra parte la utilización paralela del Álgebra y la Geometría para la resolución de problemas o la comprobación de soluciones ya la llevaron a cabo los matemáticos árabes e indios en el siglo IX; ejemplo de ello puede verse en la obra de Al-Khwarizmi (Chica, 2001, p.69).

Sin embargo será René Descartes (1596-1650) quien pase a la historia como el padre de la Geometría Analítica, gracias a su *Geometría*, apéndice del *Discurso del Método*. Y ello a pesar de que la geometría que Descartes describe en su *Método* se parece bien poco a lo que hoy solemos considerar como Geometría Analítica.

Más similar a la concepción actual es la que Fermat desarrolla en su libro *Ad locos planos et solidos isagoge*, publicada póstumamente, pero que escribió antes de la aparición de *la Geometría* de Descartes, y al que en la actualidad se le reconoce igual mérito que a Descartes.

2.1.2. Descartes

En 1637 llevado por lo que Rey Pastor califica como su "afán cósmico - un anhelo de generalización y de absoluto, que le hace perseguir la realización de una física general, capaz de explicar completamente todo lo que el universo encierra, en la tierra y en los cielos" (Rey Pastor y Babini, 1986, p.43) -, característico de su pensamiento y que ya deja patente en sus *Principios de filosofía* de 1644, Descartes publica el más famoso de todos sus tratados: *Discurso del método para dirigir bien la razón y buscar la verdad de las ciencias*, en el que desarrolla su método filosófico general que basa en cuatro reglas:

> La primera consiste en no admitir cosa alguna como verdadera, si no se la había conocido evidentemente como tal; es decir, con todo cuidado debía evitar la precipitación y la prevención, admitiendo exclusivamente en mis juicios aquello que se presentara tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviera motivo alguno para ponerlo en duda.
>
> La segunda exigía que dividiese cada una de las dificultades a examinar en tantas parcelas como fuera posible y necesario para resolverlas más fácilmente.
>
> La tercera requería conducir por orden mis reflexiones comenzando por los objetos más simples y más fácilmente cognoscibles, para ascender poco apoco, gradualmente, hasta el conocimiento de los más complejos.
>
> Según el cuarto y último de estos preceptos debería realizar recuentos tan completos y revisiones tan amplias que pudiese estar seguro de no omitir nada (Descartes cit. en Montesinos, 2000, p. 98).

El *discurso del método* iba acompañado de tres apéndices, *La Dióptrica, Los Meteoros y La Geometría*, en los que intentaba dar ejemplos de la aplicación de este método. En el último de ellos llevará a cabo la unificación de dos importantes ramas de las matemáticas -la Geometría y el Álgebra-, unificación que será el punto de partida de lo que hoy conocemos como Geometría Analítica.

El tratado de Geometría está dividido en tres libros. El primero trata *Sobre los problemas que pueden construirse empleando solamente círculos y líneas rectas*, el segundo *Sobre la naturaleza de las curvas* y el tercero *Sobre la construcción de problemas sólidos y supersólidos*. Analicemos brevemente cada uno de ellos.

El primer libro comienza diciendo:

> Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos (Descartes, 1637/ trans. 1947. p. 49).

Afirmación tras la cual Descartes comienza explicando su método para resolver los problemas geométricos.

Como se ve en esta primera afirmación su finalidad no era la reducción de la Geometría al Álgebra, por el contrario, en su *Geometría*, Descartes, como ya hemos comentado, trata de unificar ambas ramas de las matemáticas, aprovechando lo mejor de cada una. Según Descartes la Geometría (que él llama el análisis de los antiguos) "está siempre tan constreñido a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar en mucho la imaginación" (Descartes, Discurso del Método, cit. en Montesinos, 1995, p. 392), mientras que en el Álgebra "de tal modo se está sometido a ciertas reglas y a ciertas cifras que ha llegado a ser un arte confuso y oscuro, que confunde al espíritu en lugar de ser una ciencia que lo cultive" (Descartes, Discurso del Método, cit. en Montesinos, 1995, p. 392). Esto fue la causa de que pensara que era preciso buscar algún método que, reuniendo las ventajas de estos tres (incluye también la lógica), excluyera sus defectos (Montesinos, 1995).

El objetivo de su método era pues doble, por una parte el de liberar en lo posible a la Geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras y por otra darle un significado concreto a las operaciones del Álgebra por medio de su interpretación geométrica.

Pero el uso combinado de métodos geométricos y algebraicos ya lo hacían los matemáticos árabes del siglo IX, como hemos comentado. ¿Cuál fue entonces la contribución de Descartes? La diferencia esencial entre la matemática de Descartes y los matemáticos antiguos, tanto los árabes como anteriormente los griegos, es que mientras éstos buscaban una solución para cada problema concreto, Descartes buscaba un método general que sirviera para la resolución de todos los problemas de un mismo tipo.

Comienza el primer libro por tanto explicando cómo realizar el paso de una disciplina a otra. Así, en el primer capítulo del Libro I titulado *Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría*, demuestra que las cinco operaciones aritméticas corresponden a construcciones sencillas con regla y compás, lo que justifica la introducción de términos aritméticos en la Geometría.

La notación utilizada es muy similar a la actual – ya que ésta deriva de aquella-: utiliza las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes, las últimas para las incógnitas, los símbolos germánicos + y – para la adición y la sustracción, y la notación exponencial (excepto para la potencia de segundo grado que escribe como producto de dos factores), siendo las diferencias mínimas, por ejemplo utiliza el símbolo ∞ para la igualdad, en vez del actual = y no utiliza paréntesis (escribe en columna los factores que son sumas, agrupados por una llave que a veces omite). Pero mientras en la notación no hay diferencias sustanciales con la utilizada actualmente, éstas sí existen a la hora de interpretar las letras y los números que forman la expresión algebraica. Para nosotros tanto los parámetros como las incógnitas representan números, para Descartes representaban segmentos de rectas, de ahí la necesidad de explicar la construcción geométrica de las operaciones aritméticas: para él eran en realidad operaciones con segmentos.

Uno de los problemas que tuvieron los antiguos para aplicar el Álgebra a la Geometría fue la homogeneidad de las fórmulas. Si a representa un segmento, a^2representa un área y a^3 un volumen, por tanto la expresión a^2b^2-b no tiene sentido. Descartes resuelve este problema introduciendo el concepto de *segmento unidad* que utiliza de forma implícita, así en la expresión "a^2b^2-b debemos considerar la cantidad a^2b^2 dividida una vez por la unidad, y la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad" (Descartes, 1637, /trans. 1947, p.52). Esto le permitirá operar libremente con expresiones de distinta *dimensión*, de hecho Descartes pone de manifiesto que para él el producto de varios segmentos es otro segmento:

> Es de señalar que para a^2 o b^3 u otras expresiones semejantes, yo no concibo ordinariamente más que líneas simples, aunque para servirme de los nombres usados en álgebra, las designe cuadrados, cubos, etc. (Descartes, 1637, trans.,1947. p.52).

Después de mostrar cómo se pueden interpretar geométricamente las operaciones algebraicas, pasa Descartes a describir su método para la resolución de problemas geométricos:

> Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra. (Descartes (1637) /trans., 1947 p.53)

Descartes sigue explicando que si el problema se puede resolver mediante el uso exclusivo de rectas y circunferencias sobre una superficie plana, entonces la ecuación asociada al problema es de segundo grado. Pasa a continuación a explicar la resolución gráfica de esta ecuación y resuelve $z^2=az+b^2$, $z^2=az-b^2$y $z^2+az=b^2$. Para la resolución de la primera Descartes procede de la siguiente manera (Descartes, 1637/trans. 1947. p. 56):

Trácese un segmento *LM* de longitud b (Figura 1), y levántese en *L* un segmento *NL* perpendicular a *LM* y de longitud $\frac{a}{2}$. Con centro en *N* dibújese la circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ y trácese la recta *MN*, que corta a la circunferencia en *O* y en *P*; entonces $z=OM$ es el segmento buscado. (En efecto, la solución de $z^2-az-b^2=0$ es $z=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$.

Por otra parte, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $MN=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}$ de donde se sigue que: $OM = ON+NM = \frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}$ .Descartes solo considera la solución positiva).

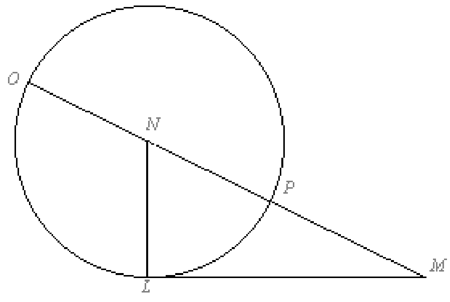


Figura 1: Solución de $z^2=az+b^2$

Vemos así su manera de proceder: comienza el estudio de un problema puramente geométrico, lo traduce a continuación al lenguaje de una ecuación algebraica, y una vez simplificada dicha ecuación todo lo posible la resuelve de manera geométrica, método que difiere del actual en el que una vez traducido el problema al lenguaje algebraico solamente se utilizan métodos de este tipo para su resolución, sin volver al lenguaje geométrico que sólo se utiliza para interpretar la solución.

Por último, para poner a prueba su método, Descartes resuelve uno de los problemas más difíciles de los legados por los antiguos, y que sólo habían resuelto en casos particulares, el problema de Pappus[3].

Como en la resolución de ese problema pueden presentarse rectas o circunferencias, cónicas u otra clase de curvas no conocidas por los antiguos, Descartes indica que antes de considerar el caso general “es necesario que diga algo en general de la naturaleza de las líneas curvas” (Descartes, 1637/trans., 1947. p. 71), a lo que se dedica en el Libro II.

En este libro Descartes después de criticar la clasificación de los problemas hecha por los antiguos en problemas planos, sólidos y lineales realizará una clasificación de las curvas calificada de *poco feliz* por Rey Pastor (1986, p. 47), y que años después se demostraría que era incorrecta y caería en el olvido. Pero pese a todo, esta clasificación de Descartes tuvo su importancia pues relajó las reglas de construcción admitidas para las curvas planas.

Los matemáticos griegos únicamente admitían las construcciones en las que sólo se utilizaban rectas y circunferencias. Los problemas que podían resolverse únicamente con estas curvas los denominaron planos, los que no cumplían esta condición entraban en las categorías de sólidos o lineales -en particular esta segunda categoría englobaba una gran variedad de problemas sin ninguna caracterización determinada-. Como decimos, Descartes llevará a cabo una clasificación de determinados problemas geométricos introduciendo un nuevo axioma en la Geometría que ampliaba el número de curvas admitidas para la construcción de lo que él llamará *curvas geométricas*, que no son más que lo que hoy conocemos como curvas algebraicas, así dice: “Y no hay necesidad de suponer nada más, para trazar todas las líneas curvas que yo pretendo introducir aquí, sino que dos o más líneas puedan ser cortadas una por las otras, y que su intersecciones engendren otras (…)” (Descartes, 1637/trans., 1947. p. 74).

Pero Descartes sigue excluyendo un tipo de curvas de la geometría, las que hoy conocemos como trascendentes, que él denomina *curvas mecánicas*.

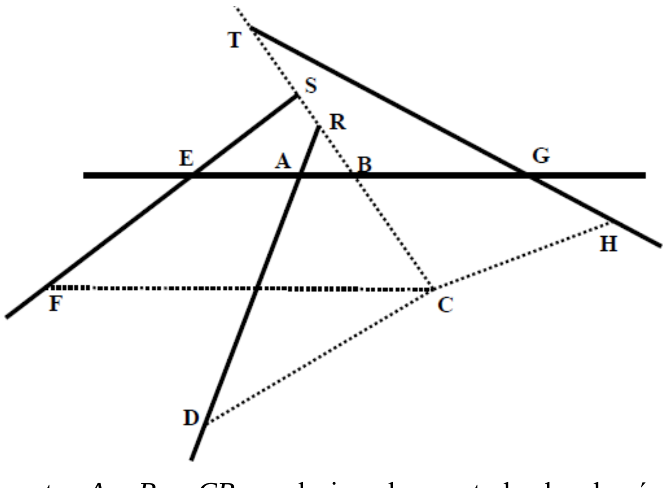
[3] Dadas 2n-1 (o 2n) rectas, determinar el lugar geométrico de los puntos tales que, trazando por ellos 2n-1 (o 2n) rectas que forman, respectivamente, con las anteriores ángulos dados, el producto de los n segmentos así determinados esté en una razón dada con el producto de los n-1 restantes por un segmento dado (o de los n restantes) (Pastor y Babini (1986) p.52).

Además en este segundo libro Descartes formula el principio fundamental de la Geometría Analítica:

> Pero para comprender todas las [curvas] que están en la naturaleza, y distinguirlas por orden en ciertos géneros, no conozco nada mejor que decir que todos los puntos de las que pueden designarse geométricas, es decir, que admiten cierta medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de la línea recta, que puede ser expresada por alguna ecuación, la misma para todos los puntos" (Descartes, 1637/trans., 1947. p. 77).

Es decir, toda curva puede expresarse mediante una ecuación. Pero, según Boyer (1987), esta afirmación la hace de una manera un tanto accidental, y no se preocupa de estudiar los lugares geométricos. Solamente lo hará en un caso, y es en conexión con el problema del lugar de las tres o cuatro rectas de Pappus, que ahora resuelve completamente. Obtiene como solución la ecuación $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$, que es la ecuación general de una cónica que pasa por el origen de coordenadas. Aunque Descartes considera que los coeficientes literales han de ser positivos, se trata del "planteamiento más general, con mucho, hecho hasta entonces del análisis de la familia de todas las secciones cónicas" (Boyer, 1987, p.434).

Además la solución de este problema es interesante pues en ella Descartes muestra su método: supone el problema resuelto, da nombre a los segmentos necesarios para resolverlo, tanto a los conocidos como a los desconocidos y se reconstruye algebraicamente el problema hasta obtener una ecuación que permitirá obtener la solución. Pero además utiliza, para facilitar el procedimiento, un sistema de coordenadas (González, 2004b)*:*



> Primeramente yo supongo la cosa como ya hecha y para salir de la confusión de todas esas líneas, considero una de las dadas y una de las que hay que encontrar, por ejemplo *AB* y *CB* como las principales y a las cuales trato de referir todas las otras. Sea designado *x* el segmento de la línea *AB* comprendido entre los puntos *A* y *B*; y *CB* sea designado *y*; y todas las demás líneas se prolonguen hasta que corten a estas dos también prolongadas, si es necesario y si no le son paralelas; como se ve cortan la línea *AB* en los puntos *A, E, G* y la línea *BC* en los puntos *R, S, T* (Descartes, 1637. Trans., 1947. p. 66).

También estudia en el libro II el problema de la determinación de la normal a una curva plana, problema que aplica unas páginas más adelante a la construcción de las normales a las curvas conocidas hoy como *óvalos de Descartes* (curvas muy útiles en óptica, y que utilizará en su Dióptrica).

Al final de este libro Descartes trata las curvas del espacio y enuncia el principio fundamental de la Geometría Analítica del espacio: si son necesarias dos condiciones para la determinación de un punto, entonces el lugar geométrico del punto es una superficie. Sin embargo no da ningún ejemplo de tales ecuaciones ni desarrolla más esa idea.

En el tercer libro retoma el tema de la construcción de las raíces de ecuaciones determinadas. En él se explica cómo hallar las raíces racionales, si las hay, cómo rebajar el grado de la ecuación si se conoce una raíz, cómo incrementar o disminuir las raíces de una ecuación en una cantidad dada, o multiplicarlas o dividirlas por un número, cómo eliminar el segundo término de la ecuación, cómo determinar el número de posibles raíces *verdaderas* y *falsas* (es decir, positivas y negativas) por la conocida regla de los signos que lleva su nombre, y cómo hallar las ecuaciones cúbicas y cuárticas algebraicamente (Boyer, 1987).

Termina Descartes su obra con las siguientes palabras:

> Pero mi objeto no es hacer un gran libro, y trato más bien de muchas cosas en pocas palabras(...) si se considera que habiendo reducido a una misma construcción todos los problemas de un mismo género, he dado a la vez la manera de reducirlos a una infinidad de otras diversas y, así, de resolver cada uno de ellos de una infinidad de maneras; y, además de esto, que habiendo construido todos los que son planos, cortando con un círculo una línea recta, y todos los que son sólidos, cortando también con un círculo una parábola, y, en fin, todos los que son de un grado más compuesto cortando lo mismo con un círculo una línea que no es más que de un grado más compuesta que la parábola; no hay más que seguir el mismo camino para construir todos los que son más compuestos, hasta el infinito. Pues en materia de progresiones matemáticas, cuando se tienen los dos o tres primeros términos no es difícil encontrar los otros. Y yo espero que nuestros descendientes me estén agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas" (Descartes, 1637. trans., 1947. p. 204).

Como vemos, prácticamente la totalidad de *la Geometría* está dedicada a la aplicación sistemática del Álgebra a la Geometría y de ésta al Álgebra, a pesar de ello a lo largo de todo el tratado hay bien poco que se parezca a lo que hoy solemos considerar como Geometría Analítica. Al no hacer Descartes un uso sistemático de las coordenadas rectangulares (para cada problema toma un sistema particular de coordenadas oblicuas), no existen fórmulas para distancias, pendientes, división de un segmento en partes iguales, etc.

Además no se encuentra en la obra ni una sola curva nueva representada a partir de su ecuación. Boyer (1987) afirma que Descartes se tomó tan poco interés en la representación de curvas que nunca llegó a entender plenamente el significado de las coordenadas negativas (reconocía de una manera muy general que las coordenadas negativas estaban dirigidas en un sentido opuesto al tomado como positivo, pero nunca usó las coordenadas negativas).

Como señalamos anteriormente la gran aportación de Descartes fue la creación de un método general para la resolución de problemas geométricos, combinando recursos algebraicos y geométricos para ello.

2.1.3. Pierre Fermat

Si durante años se consideró a Descartes como único inventor de la Geometría Analítica, hoy está perfectamente claro que Fermat (1601-1665) había descubierto esencialmente el mismo método bastante antes de que apareciera publicada *La Geometría*. Un año antes de su publicación Fermat escribe:

> Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva. (Boyer, 1987, p.437)

Que es el principio fundamental de la Geometría Analítica.

Sin embargo sus descubrimientos no serán publicados hasta 1679 en su obra *Ad locos planos et solidos isagoge*, en la que "aparecen los principios fundamentales del método de las coordenadas, si no en forma tan extensa como en la Geometría de Descartes, por lo menos en forma tan clara o más" (Rey Pastor y Babini, 1986, p.50).

Fermat toma sólo un eje de referencia y en él un punto fijo que considera el origen de segmentos de longitud variable. A partir de los extremos de estos segmentos toma otros, también variables, generalmente perpendiculares, de manera que los extremos de estos segmentos dibujarán un lugar diferente según sea la relación algebraica que vincula a los dos segmentos variables (Rey Pastor y Babini, 1986).

En este libro aparece la ecuación de la recta (**Figura 2**), que en caso de pasar por el origen tiene ecuación D in A aequetur B in E (Fermat utiliza la notación de Vieta), Dx=By en notación actual, que viene representada por una semirrecta con origen en el origen de coordenadas, ya que Fermat, al igual que Descartes, no utiliza abscisas negativas.

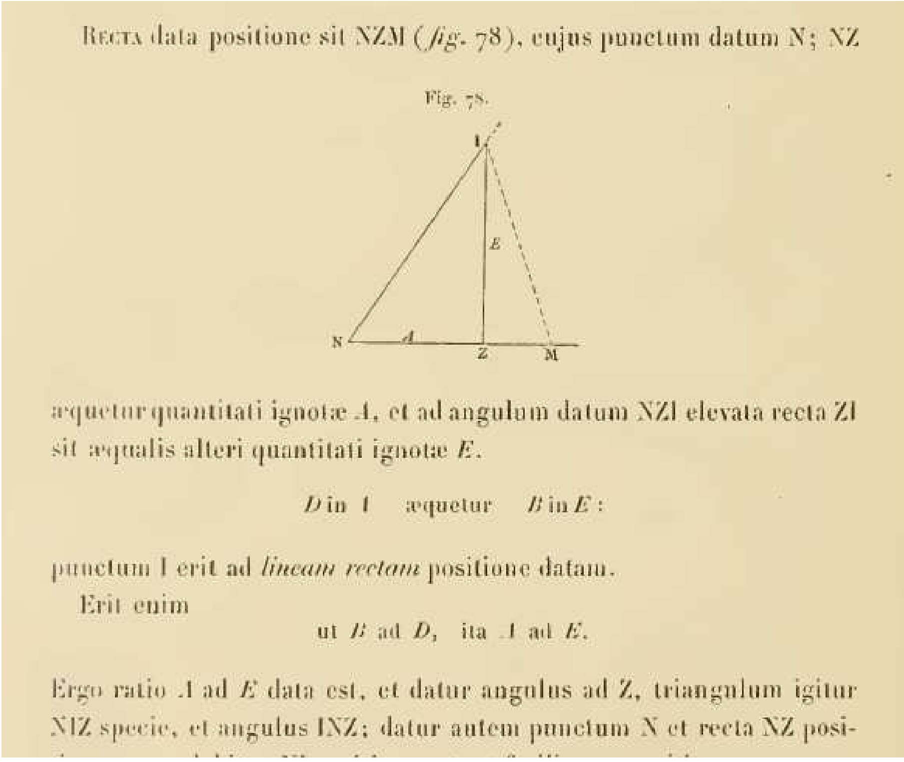
> Sea NZM una recta dada de posición (fig. 78), en la que se da el punto N. Igualemos NZ a la cantidad desconocida A, y la recta ZI (trazada bajo el ángulo dado NZI) a la otra cantidad desconocida E. Sea DA=BE. El punto I estará sobre una recta dada deposición. En efecto, se tendrá $\frac{B}{D}=\frac{A}{E}$. Por tanto la razón $\frac{A}{E}$esdada, así como el ángulo en Z. Por consiguiente eltriángulo NIZ es dado de especie, así como el ángulo INZ. Pero el punto N es dado, así como la posición de la recta NZ. Por tanto NI está determinado. La síntesis es fácil (Fermat, 1891, p. 92, trad. en González, 2004a, p. 57).

Así pues, el lugar geométrico en este caso resulta ser una recta, en realidad una semirrecta, como habíamos dicho.

En el caso general, la ecuación de la recta que da Fermat equivale en nuestra notación a $ax+by=c^2$, que representa a un segmento de recta en el primer cuadrante con extremos en los ejes

También estudia Fermat las cónicas. Demuestra que la representación de *Ain E aeq. Z pl.* ($xy=k^2$) es una hipérbola (**Figura 3**):

> Trácese NR paralela a ZI; tómese sobre NZ un punto cualquiera, sea M, por el cual se traza MO paralela a ZI. Constrúyase el rectángulo NMO igual al áreaZ^2. Por el punto O, entre las asíntotas NR, NM, descríbase una hipérbola: ella queda determinada y pasará por el punto I, puesto que se supone AE, es decir, el rectángulo NZI, equivalente al rectángulo NMO (Fermat, 1891, pp. 93-94, trad. en González, 2004a, p. 61)



Recta data positione sit NZM (*fig.* 78), cujus punctum datum N; NZ

Fig. 78.

æquetur quantitati ignotæ *A*, et ad angulum datum NZI elevata recta ZI sit æqualis alteri quantitati ignotæ *E*.

D in *A* æquetur *B* in *E*:

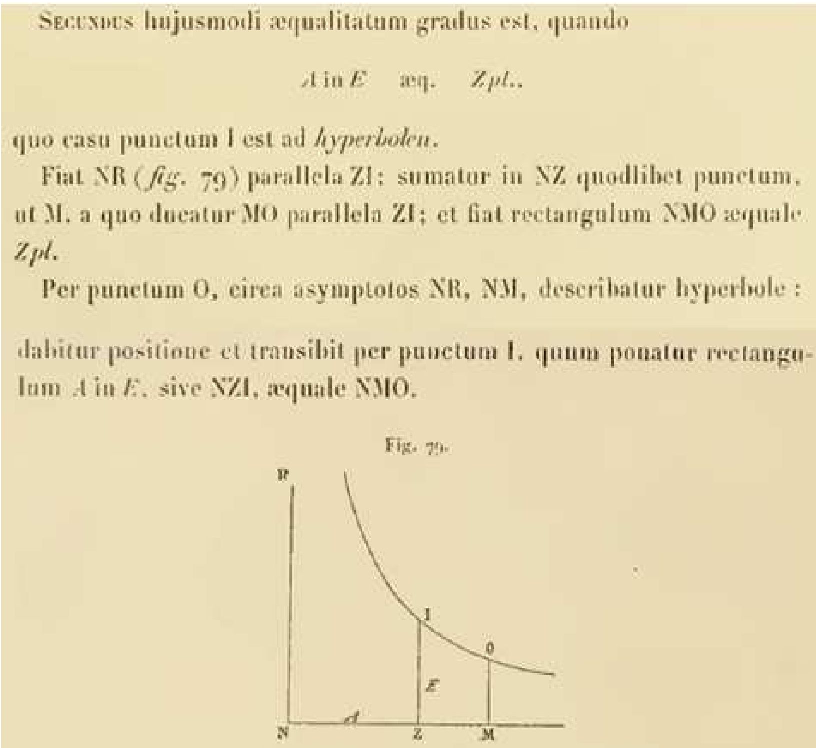
punctum I erit ad *lineam rectam* positione datam.

Erit enim

ut *B* ad *D*, ita *A* ad *E*.

Ergo ratio *A* ad *E* data est, et datur angulus ad Z, triangulum igitur NIZ specie, et angulus INZ; datur autem punctum N et recta NZ posi-

Figura 2: Pierre Fermat. Oeuvres. p. 92



Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando

A in *E* æq. *Z pl.*,

quo casu punctum I est ad *hyperbolen*.

Fiat NR (*fig.* 79) parallela ZI; sumatur in NZ quodlibet punctum, ut M, a quo ducatur MO parallela ZI; et fiat rectangulum NMO æquale *Z pl.*

Per punctum O, circa asymptotos NR, NM, describatur hyperbole:

dabitur positione et transibit per punctum I, quum ponatur rectangulum *A* in *E*, sive NZI, æquale NMO.

Fig. 79.

Figura 3: Pierre Fermat. Oeuvres. p. 93-94

La ecuación de la que parte Fermat corresponde a la exposición verbal de la expresión de la generación de la curva, lo que los griegos llamaban el *symptoma*, término que Fermat denominaba *propiedad específica de la curva* de la que partía para llegar a la curva, en sentido contrario a como hacían los griegos (González, 2004b, p. 61).

Fermat añade que una ecuación de la forma $xy+a^2=bx+cy$ (utilizando la notación actual) se puede reducir a otra de la forma $xy=k^2$ por medio de una traslación de los ejes.

A la ecuación $x^2=y^2$ la considera representada por una única semirrecta, y reduce a esta forma otras ecuaciones homogéneas de segundo grado. Demuestra también que $a^2+x^2=by$ es una parábola (p. 96), que $x^2+y^2+2ax+2byc^2$es una circunferencia (p. 98), que a^2-x^2 $=ky^2$ es una elipse y que $a^2+x^2=ky^2$ es una hipérbola, de la que da las dos ramas (pp. 99-100). Para el caso de las ecuaciones cuadráticas más generales las transforma en los tipos anteriores mediante una rotación de ejes (p. 101) (González, 2004b, pp.61-63).

Al final del libro añadió un apéndice titulado *La resolución de problemas sólidos por medio de lugares geométricos*, en el que muestra que las ecuaciones cúbicas y cuárticas determinadas se pueden resolver por medio de cónicas.

Fermat también se dio cuenta de la posibilidad de una Geometría Analítica en tres dimensiones ya que en sus *Oeuvres* escribe:

> Hay ciertos problemas en los que interviene una única incógnita, a los que podemos llamar determinados para distinguirlos de los problemas relativos a los lugares geométricos. Hay otros en los que intervienen dos incógnitas que no pueden reducirse nunca a una sola; éstos son los problemas de lugares geométricos. En el primer tipo de problemas buscamos un único punto, mientras que en el segundo una curva. Pero si el problema propuesto involucra a tres incógnitas, entonces hay que encontrar, para satisfacer la ecuación, no sólo un punto o una curva, sino una superficie completa. De esta manera aparecen los lugares geométricos que son superficies, etc. (Fermat, 1891, cit. en Boyer, 1987, p.439)

Esta clasificación de los problemas en determinados e indeterminados será utilizada en los libros de Geometría Analítica españoles utilizados en gran parte del siglo XIX.

Además de en Geometría Analítica, y a pesar de no ser un matemático profesional, Fermat hizo muchas otras contribuciones a las matemáticas, en particular al cálculo. Paralelamente a Descartes desarrolló un método para el cálculo de la tangente a una curva plana, más claro que el de éste y bastante próximo en su planteamiento al cálculo actual de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

También, en opinión de Boyer (1987), la exposición realizada por Fermat en su *Isagoge* era mucho más sistemática y didáctica que la de Descartes, y además su Geometría Analítica está mucho más próxima a la nuestra que la de este último.

2.1.4. La Geometría Analítica poscartesiana

Durante años se considerará a Descartes como el único iniciador de esta rama de las matemáticas, debido a que los trabajos de Fermat no fueron publicados hasta 1679, catorce años después de su muerte y cuarenta y dos después de *La Geometría*.

Por el contrario, la obra de Descartes tuvo una rápida difusión, aunque las omisiones voluntarias de demostraciones, junto con la dificultad intrínseca de la obra, hicieron de *La Geometría* un libro de difícil lectura. Por ello en pocos años aparecen nuevas ediciones con comentarios y ampliaciones de otros matemáticos. Así en 1649 Franciscus van Shooten (1615-1660) publica una edición en latín (la versión original estaba en Francés) con comentarios y material suplementario. Entre este material se encuentra un comentario de De Beaune (1601-1652) en el que se explican las ideas de Descartes poniendo gran énfasis en los lugares geométricos representados por ecuaciones simples de segundo grado.

La Geometría a Renato Des Cartes aparece en una segunda versión muy ampliada (en dos volúmenes) en 1659-1661. De él formaba parte una obra titulada *Elementa curvarum*, de Jan de Witt (1629-1672), discípulo de Van Shooten. La obra, dividida en dos partes, trata, en la primera de ellas de las secciones cónicas, y en la segunda "hace un uso tan sistemático de las coordenadas que se le ha podido calificar, no sin razón, como el primer texto de Geometría Analítica" (Boyer, p. 469), siendo la finalidad principal de la obra la de reducir todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables a formas canónicas, por medio de rotaciones y traslaciones de los ejes.

También sobre el estudio de las cónicas versa el *Tractatus sectionibus conicis* (1665) de Wallis (1616-1703), quien expresa las secciones cónicas de forma analítica, y de las ecuaciones deriva las propiedades de las curvas (González, 2004b).

En 1656-1657 Van Shooten publica una obra original, las *Exercitaciones mathematicae,* en las que expone nuevos resultados en la aplicación del Álgebra a la Geometría. En ella se encuentra una sección escrita por otro de sus discípulos Johann Hudde (1629-1704), sobre el estudio de las secciones planas de una superficie de cuarto grado, lo que constituye una anticipación de la Geometría Analítica tridimensional.

De forma más explícita trabajará esta idea Philippe de Lahire (1640-1718) en su obra *Nouveaux éléments de sections coniques* (1679). En ella, Lahire da un ejemplo de una superficie dada analíticamente por una ecuación con tres incógnitas, y utiliza un sistema de referencia en el espacio que consta de una única recta de referencia con origen en un punto O (utilizada como sistema de coordenadas en el plano) a la que añade el plano de referencia OBA (**Figura 4**) (Boyer, 1987).

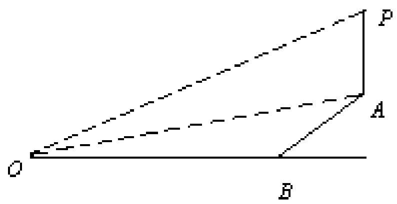


Figura 4: Sistema de referencia de Lahire

Pero a pesar de que la Geometría Analítica tridimensional se origina en el siglo XVII con estos matemáticos, habrá que esperar hasta mediados del XVIII para que se desarrolle plenamente.

En este siglo encontramos Geometría Analítica en las obras de varios autores, como en el *The Metod of Fluxions and Infinite Series* (1736) de Newton, quien introduce nuevas curvas y las traza mediante sus ecuaciones, utilizando nuevos sistemas de coordenadas, en particular las polares. O la obra de Stirling, *Lineae Tertii Ordinis Neutonianae* (1717) en la que reduce la ecuación de segundo grado a las diversas formas canónicas (González, 2004b).

Pero sin duda el trabajo más importante es el de Euler (1707-1783) en su famosa obra *Introductio in Analysis Infinitorum* de 1748, donde trata sistemáticamente la Geometría plana con coordenadas. Euler continúa utilizando un solo eje de coordenadas, aunque usa ya los términos *abscisa* y *ordenada*.

La primera parte de la obra está destinada al *Análisis Puro*, la segunda a la *aplicación del Álgebra a la Geometría* y la última es un tratado metódico de Geometría Analítica en el sentido de Fermat. (González, 2004b). Euler desarrolla las dos vertientes del principio fundamental de la Geometría Analítica: de acuerdo con Descartes, reconoce que

> La naturaleza de una curva cualquiera viene dada por una ecuación en dos variables, *x, y,* de las cuales *x* es la abscisa e *y* es la ordenada. (Euler, 1748, cit. en González, 2004b, p. 132)

Y de acuerdo con Fermat, Euler establece que:

> Cualquier función de *x* da lugar a una curva continua que puede ser descrita mediante un gráfico (Euler, 1748, cit. en González, 2004b, p. 132).

Pero quizá lo más sobresaliente de la *Introductio*, desde el punto de vista del desarrollo de la Geometría Analítica sea el tratamiento general que hace Euler. En este sentido Euler desarrolla en el primer volumen una Teoría general de curvas, basada en la idea de función, en la que la clasificación cartesiana entre *curvas geométricas* y *mecánicas* aparece ya en terminología moderna de *curvas algebraicas* y *trascendentes.* Este aspecto de generalidad que permitía el Álgebra frente a la Geometría de los griegos era uno de los rasgos más relevantes señalados por Descartes y Fermat en sus Geometrías, pero había sido en parte pasado por alto posteriormente, incluso en cuestiones muy básicas como por ejemplo en el estudio de la ecuación de la recta, que se subdividía en numerosos casos diferentes. Sin embargo, Euler maneja una única forma general de la ecuación de la recta: $\alpha x+\beta y-a=0$ y estudia algunos casos particulares-para $\alpha=0$, $\beta=0$, $\alpha=a=0$-, aunque no abunda mucho en el estudio de las ecuaciones de primer grado, ni en la del círculo (González, 2004b).

La cuestión es totalmente diferente respecto del tema las secciones cónicas. Euler escribe la ecuación general de una cónica como ecuación cuadrática general con seis términos, y realiza un tratamiento analítico completamente general a partir de su ecuación: refiere la cónica a sus ejes principales, realiza la clasificación de cónicas, encuentra los puntos, líneas y razones notables y demuestra numerosas propiedades de estas curvas (González, 2007).

En cuanto a la Geometría espacial, como hemos dicho, Van Shooten y La Hire llevaron a cabo algunos trabajos incipientes en el siglo XVII, pero será en el siglo XVIII cuando se desarrolle, siendo Euler quien aborde, de nuevo, de forma sistemática la cuestión. En efecto, la *Introductio* de Euler acaba con un largo apéndice sobre Geometría Analítica de tres dimensiones, en el que lleva a cabo el estudio y representación gráfica de curvas y superficies por medio de sus ecuaciones. Como en la Geometría Analítica plana, Euler sigue utilizando un solo eje de coordenadas, pero señala que se pueden utilizar tres planos coordenados, y así aparece, a veces, en las ilustraciones. Además, alude a los posibles signos de las coordenadas en los ocho octantes del triedro de referencia. También proporciona la primera fórmula para traslación y rotación de ejes en tres dimensiones, que se ha convertido en la clásica transformación que lleva su nombre.

Análogamente a las curvas, clasifica las superficies en algebraicas y trascendentes y las estudia a través de las trazas según varios planos.

En cuanto a la ecuación del plano, Euler la escribe de forma general $\alpha x+\beta y+\chi z=a$ y estudia las intersecciones con los planos de coordenadas y con el único eje, así como los ángulos entre el plano dado y los de coordenadas, que expresa mediante el coseno.

Y si históricamente las cónicas fueron las primeras curvas de segundo grado introducidas y las más estudiadas, lo mismo pasará con las cuádricas, como superficies de segundo grado. Euler las introduce como una familia unitaria de superficies a través de la ecuación cuadrática general en diez términos, y como en el caso de las cónicas estudia sus elementos geométricos y las propiedades de estas superficies (González, 2004b).

Por último señalar la poca dedicación de Euler a los aspectos más elementales de la Geometría Analítica, los referentes a rectas y planos. Así se explica que no aparezcan en su obra contenidos básicos de la Geometría Analítica académica como fórmulas sobre punto medio, paralelismo, ángulos, perpendicularidad, pendiente, distancias, áreas, volúmenes, etc.

No será hasta finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, cuando matemáticos como Monge y sus discípulos le den una nueva forma, muy próxima al enfoque actual en cuanto a los métodos y la notación, salvo en lo que afecta a las cuestiones vectoriales.

Monge (1746-1818), que fue uno de los matemáticos más importantes de la época de la Revolución francesa, dará un impulso inusitado a la Geometría Analítica. Profesor de la Escuela Politécnica, imparte un curso sobre *Applications de l'analyse à la géométrie,* cuya primera parte es esencialmente una introducción a la Geometría Analítica. Como no se dispone de ningún libro de texto, Monge se ve forzado a escribir el contenido del curso y publica en 1795 *Feuilles d'analyse apliquée a la géométrie*, donde da una forma bastante definitiva a la Geometría Analítica. Otros materiales también utilizados en su curso son incluidos en 1802 en la memoria *Application de l'algèbre à la géométrie*, que se reeditará en 1807, 1809 y 1850.

En estos trabajos, entre otras aportaciones, aparecen las fórmulas de traslación y rotación de ejes para las ecuaciones del cambio de coordenadas, el tratamiento habitual de rectas y planos, la determinación del plano que pasa por tres puntos mediante coeficientes indeterminados, los cosenos directores, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, los ángulos entre rectas y planos, la determinación de los planos principales de una cuádrica, etc. Monge da también las fórmulas para la distancia de un punto a una recta y la distancia más corta entre dos rectas *r, r'*, que se cruzan Además de todo esto, incluye nuevos resultados, obtenidos por él (González, 2004b).

Finalmente nos fijaremos en la figura de Lagrange (1736-1813), quien también realizó importantes contribuciones a la Geometría Analítica, siempre bajo la filosofía de aplicar el carácter algorítmico del Álgebra para superar toda representación concreta.

En el artículo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulareis* (1775), Lagrange resolvió, de forma puramente analítica, diversas cuestiones ya conocidas sobre la geometría del tetraedro. Estos resultados están redactados de tal forma que pueden ser entendidos sin aludir a figura alguna, como el propio Lagrange escribe en el artículo (González, 2004b).

Y efectivamente no hay ni una figura a lo largo de este trabajo (González, 2004b), lo que prefigura la ulterior concepción y estructura de la Geometría Analítica, que abandonará su estrecha unión con la Geometría Sintética, en favor del Álgebra. Pero como veremos, esta unión se mantendrá aún durante gran parte del siglo XIX, al menos en España, aunque se irá abandonando paulatinamente, en favor de los métodos algebraicos.

Bajo la inspiración de Monge como maestro, algunos matemáticos coetáneos, en particular Lacroix, escriben numerosos libros de texto sobre Geometría Analítica, donde se va aclarando su significado y utilidad como instrumento matemático, cada vez más próximo al uso de nuestro tiempo. La obra de este autor será analizada en profundidad en desarrollo de este trabajo, lo que nos mostrará un eslabón en el desarrollo de esta rama de las matemáticas desde sus orígenes hasta nuestros días.

2.2. La Geometría Proyectiva

La Geometría Proyectiva tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Los pintores renacentistas buscaban representar la realidad de forma fiel, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media, lo que conlleva una serie de problemas al tratar de representar un espacio tridimensional sobre un lienzo plano.

Pintores como Fra Angelico (1378-1455), Paulo Uccello (1379-1475) o Masacio (1401-1428) fueron los primeros en interesarse por la geometría griega para aplicarla a la pintura, utilizando la perspectiva para crear impresión de profundidad; y Brunelleschi (1377-1446) el primero en crear una teoría matemática al respecto para utilizar en la arquitectura (Alonso et al. 2002). En el caso de la pintura, el primer gran teórico en la materia fue Leon Batista Alberti (1404-1472), quien en su obra *De pictura*, escrita en 1435, explica el principio que sería la base del sistema matemático de la perspectiva (Moreno, 2005). Este principio se puede resumir de la siguiente manera: se considera una hipotética pirámide visual formada por rayos que parten del ojo del pintor -donde estaría el vértice de dicha pirámide, o *punto de fuga*- y terminan en la escena que se desea pintar. Si se coloca un vidrio entre el observador y la escena cada uno de los rayos determina un punto sobre el mismo que crea una imagen cuya sensación visual es la misma que la del objeto inicial. Al haz de rayos se le llama *proyección* y a su intersección con el vidrio *sección* de esa proyección. Como el lienzo no es transparente se necesitan una serie de reglas geométricas que Alberti desarrolla en su libro, quien se planteó dos cuestiones importantísimas: ¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura? y ¿cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera? (Alonso et al., 2002; Moreno, 2005, p. 20).

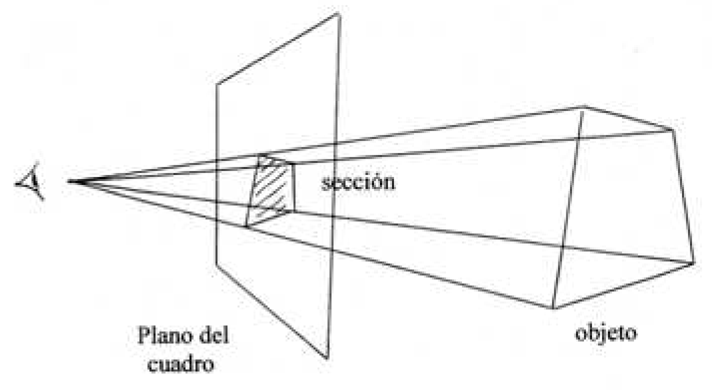


Figura 5: Proyecciones y secciones según Alberti

Aunque fueron muchos los artistas renacentistas que posteriormente escribieron sobre el tema, entre los que destacan Piero della Francesca (1410-1492), Leonardo da Vinci (1452-1519) y Alberto Durero (1471-1528), no será hasta el siglo XVII cuando se dé una fundamentación matemática a los métodos de la perspectiva desarrollados por estos artistas. El primero de ellos fue Girad Desargues y con él nace lo que más tarde se conocería como Geometría Proyectiva.

Girad Desargues (1591-1661), nacido en Lyon, ingeniero militar y arquitecto, atraído por algunas de las técnicas relacionadas con su profesión - como los problemas de perspectiva, cantería y corte de piedras, etc.-, en general problemas de índole práctico, se convirtió, como decimos, en el precursor de la Geometría proyectiva. En 1639 publica "un extraño libro, con un no menos extraño título" (Etayo, 1988, p.21): *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* (Proyecto borrador del alcance sobre lo que sucede en los encuentros de un cono con un plano), es decir, de las secciones cónicas. El libro fue criticado o ignorado en su tiempo con las excepciones de Descartes, Fermat y Pascal, entre otras razones por el lenguaje confuso que utiliza, con términos procedentes, muchos de ellos de la botánica. Por ejemplo a la recta la llama *palma*; *tronco* a una recta cortada por otras que llama *ramas*, y así con *árbol, tallo,* etc., el único término que se conserva actualmente es el de *involución.* (Etayo, 1988; Moreno, 2005). Aún así las aportaciones hechas por Desargues, en este y otros trabajos, al desarrollo de la Geometría proyectiva son importantes. Veremos brevemente los más destacados:

- Punto y recta del infinito. Desargues tuvo en cuenta que dos rectas paralelas en la realidad no lo son siempre en el dibujo, luego el punto de encuentro de las representaciones de dichas rectas no siempre corresponde a un punto de las mismas. Para que la correspondencia fuera completa, dotó a cada recta de un punto del infinito y al plano de una recta del infinito (Moreno, 2005).
- Teorema de Desargues. Este es su resultado más conocido. Fue publicado en 1648 por Abraham Bosse (1611-1678) junto con el de la invarianza de la razón doble en las proyecciones, en el apéndice de un libro titulado *Método universal de Desargues para practicar la perspectiva* (Moreno, 2005).

El teorema dice: Si las rectas que unen los vértices homólogos de dos triángulos se encuentran en un punto (es decir, cada uno es sección del otro), entonces los pares de lados homólogos se cortan en tres puntos alineados (**Figura 6**).

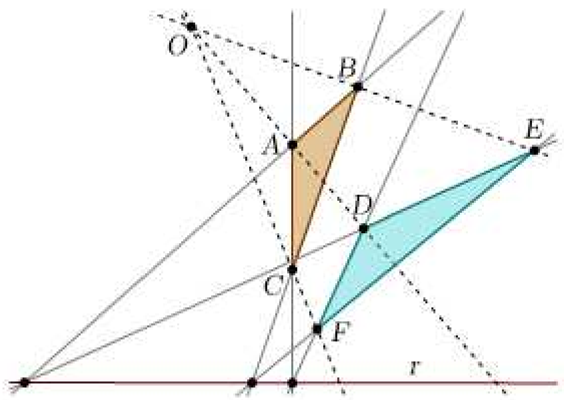


Figura 6: Teorema de Desargues

- Invarianza de la razón doble por proyección. La razón doble de cuatro puntos colineales A, B, C, D se define como:

$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$, donde los segmentos de la derecha están orientados, es decir están dotados de signo.

El teorema de invarianza afirma que si cuatro puntos son proyectados sobre otra recta, la razón doble de los puntos proyectados en la misma que la de los originales. En la figura 7: (ABCD)= (A'B'C'D')=(A''B''C''D'')

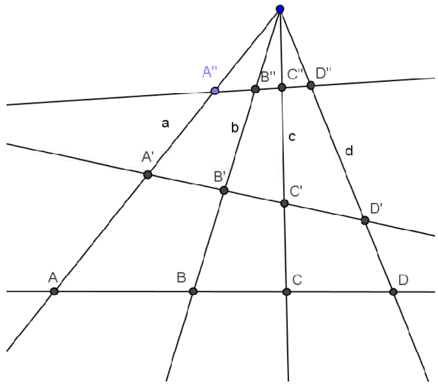


Figura 7: Invarianza de la razón doble por proyecciones

- Involución. Como hemos dicho es el único término acuñado por Desargues que se ha conservado hasta nuestros días. Cuatro puntos A, B, C y D de una recta están en *involución* si existe en ella otro punto O tal que OAOB=OCOD. En este caso A y B así como C y D se llaman *conjugados.*
- Cuaterna armónica. Si hay un punto P tal que OP^2=OAOB, es decir, es autoconjugado, entonces hay otro Q que también lo es y O es el punto medio de P y Q. Los puntos A, B, P y Q formada por dos puntos conjugados y los correspondientes autoconjugados fue llamada por Desargues una *cuaterna armónica.* Posteriormente se definiría la cuaterna armónica como cuatro puntos de razón doble igual a -1, definición que es equivalente a la primera (Moreno, 2005).
- Teoría de polares. Con el concepto de cuaterna armónica que hemos visto pudo avanzar en la teoría de polos y polares, ya introducida por Apolonio. Desargues define polar de un punto respecto de una cónica como el lugar de los puntos que forman razones armónicas con él y los dos de intersección de la cónica y cada una de las rectas que pasan por él. En el caso de una circunferencia y un punto A exterior a ella (**Figura 8**), se trazan por A las rectas que cortan a la circunferencia y se toman sobre cada una de ellas el punto B tal que la cuaterna formada por los puntos A y B, y los puntos de corte de la recta con la circunferencia C y D forman una cuaterna armónica. Todos esos puntos están en una recta que se llama *polar* del punto respecto de la circunferencia. Desargues no la nombra así sino que la llama *transversal* del haz de rectas con vértice ese punto (Etayo, 1988).

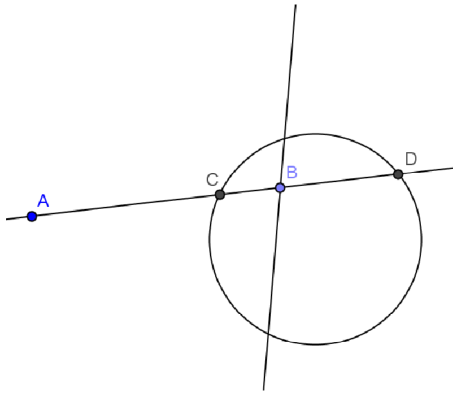


Figura 8: Polar de un punto exterior a una circunferencia.

Trata este tema en el libro que hemos citado más arriba y además de definirla prueba varios resultados relacionados con ella.

Como hemos dicho el trabajo de Desargues pasó desapercibido en su época salvo contadas excepciones, entre ellas la de Blaise Pascal (1623-1662), que con tan solo 16 años publica su *Essay pour les coniques* (1640) en el que utiliza métodos proyectivos. En esta obra establece su famoso teorema, llamado entonces *hexagrama místico* sobre el hexágono inscrito en una cónica: Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están en línea recta.

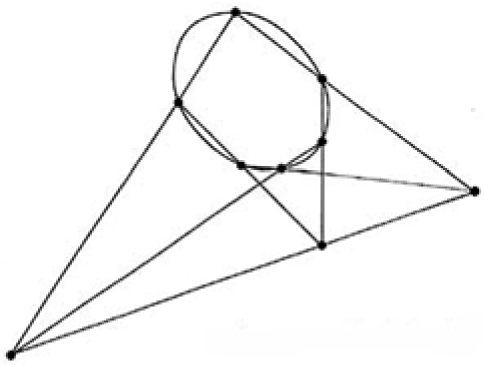


Figura 9: Teorema de Pascal

Por último citaremos a La Hire (1640-1718), quien publica en 1685 *Secciones Cónicas*, donde demuestra, siguiendo los pasos de Desargues y Pascal casi todos los teoremas de Apolonio sobre cónicas utilizando los métodos proyectivos. Además aporta un resultado original: si un punto describe una recta, su polar gira alrededor del polo de dicha recta; teorema que es ejemplo de lo que más tarde se llamaría principio de dualidad (Moreno, 2005).

Pero tras los trabajos de Pascal y La Hire la Geometría Proyectiva queda olvidada durante más de cien años, en parte por el importante desarrollo del Análisis tras el nacimiento del Cálculo Diferencial, en parte porque la Geometría Sintética había quedado relegada por el empuje de la Geometría Analítica desarrollada por Descartes y Fermat.

No será hasta principios del siglo XIX cuando se produzca el renacer de la Geometría Proyectiva, y todo ello en torno a la figura de Monge (1746-1818). Entre 1795 y 1799 publica su *Geometría Descriptiva* en la que construye una rama particular de la Geometría que cae dentro de los métodos de la Geometría Sintética. Según Etayo (1988, p. 24) "en esta Geometría Descriptiva de Monge yace el embrión de la Geometría Proyectiva, como también una importante vertiente hacia la Geometría Analítica y Diferencial", por lo que podemos decir que es Monge el punto de encuentro de las geometrías que nos encontraremos en nuestro trabajo, la analítica y la proyectiva.

Por otra parte, Lázaro Carnot (1753-1823) se encuentra también entre los defensores de la Geometría Sintética, ya que había que liberar a la Geometría de los "jeroglíficos del análisis" (Cit. en Etayo, 1992, p. 117). Carnot quiso dotar a la Geometría Sintética de un nivel de generalidad comparable al de la Geometría Analítica, ya que esta era la principal crítica que le hacían sus detractores. En esta línea publica en 1801 *De la correlación de las figuras geométricas* y en 1803 su *Geometría de la posición*, que lo sitúa junto a Monge entre los fundadores de la Geometría Sintética moderna (Etayo, 1992).

A principios del siglo XIX y tras cien años de dominio de los métodos analíticos se empieza a replantear la utilización de los mismos en la Geometría. La discusión se hizo candente entre los geómetras: unos defendían los métodos analíticos por su mayor generalidad, ya que la Geometría Sintética se centraba en cada caso particular, en el estudio específico original de un problema dado, cuyos resultados difícilmente se podían generalizar, y los partidarios de los métodos geométricos puros[4], más elegantes e intuitivos, de una claridad que el método analítico no podía ofrecer (Etayo, 1992). Como vemos, Monge y Carnot entran dentro de los partidarios de estos últimos, pero la controversia seguirá dándose durante todo el siglo.

Volviendo a la Geometría Proyectiva, en 1806, Brianchon (1785-1864) discípulo de Monge en la École Polytechnique, demuestra el teorema que lleva su nombre: En un hexágono circunscrito a una cónica las tres diagonales se encuentran en un punto.

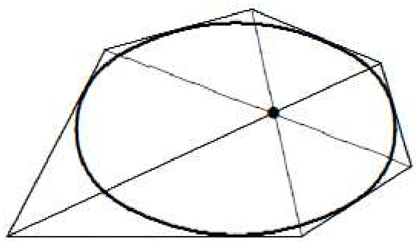


Figura 10: Teorema de Brianchon

Este teorema es el primer caso de dualidad en Geometría Proyectiva ya que es dual del teorema de Pascal.

Pero sin duda el padre de la Geometría Proyectiva moderna es Jean Victor Poncelet (1788-1867). Discípulo de Monge en la Politécnica participó en la campaña napoleónica de Rusia en 1812 como oficial del cuerpo de ingenieros del Ejército, donde fue hecho prisionero. Durante los años 13 y 14 estuvo recluido en la prisión de Saratoff, donde

[4]Entendemos por métodos geométricos puros aquellos en los que no interviene el Álgebra.

reelaboró las lecciones de Monge y Carnot y así dicen que nació la Geometría Proyectiva (Etayo, 1992; Moreno, 2005). En 1822 publica una de las obras que gestó durante sus años de reclusión *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, en el que apuesta por la Geometría Pura o Sintética. Entendía Poncelet que la Geometría podía alcanzar el mismo nivel de generalidad que el Álgebra, puesto que operaba también con símbolos indeterminados y una demostración hecha sobre una figura no tenía por qué ser válida solamente para ella, como se decía, sino también para cualquier otra que pudiera obtenerse de ella mediante unas variaciones, y en ese sentido se desarrolla su trabajo (Etayo, 1992).

Al igual que Desargues, Poncelet para desarrollar su geometría utiliza la proyección cónica o central, lo que le lleva a tomar como transformaciones propias de la misma las proyecciones y las secciones. Así distingue claramente las propiedades métricas de las figuras, de las proyectivas que son aquellas que no se alteran por la proyección central – como la separación armónica de cuatro puntos alineados-y que él llama gráficas. Las reglas elementales de esa proyección son las que permiten un tratamiento igual a los puntos ordinarios y a los ideales o del infinito, que pasarían a ser la misma cosa.

El *Tratado* de Poncelet está centrado en tres ideas (Etayo, 1992; Alonso et al., 2002; Moreno, 2005):

- Figuras homólogas. Dos figuras son homólogas si una de ellas procede de la otra mediante una sucesión de proyecciones y secciones. La idea de Poncelet consiste en encontrar para cualquier figura su homóloga más sencilla, estudiar en ella las propiedades invariantes mediante proyección y sección, y llegar de este modo a propiedades de la figura originaria.
- Principio de continuidad. Si una figura deriva de otra por un cambio continuo y es tan general como la primera, entonces una propiedad demostrada para la primera figura puede ser transferida a la otra sin consideraciones ulteriores. Este principio u otro análogo, ya había sido utilizado de algún modo por Carnot, Desargues e incluso Kepler (Etayo, 1992, p. 117) en el estudio de las cónicas, pero la novedad aportada por Poncelet es su aplicación también a los puntos del infinito, por deformación continua de los puntos propios. Introduce así las figuras del infinito y da una representación común a ellas y a las figuras a distancia finita, lo que constituye la esencia del método proyectivo. Aunque este principio sirvió para llegar a resultados válidos provocó reticencias entre algunos matemáticos, como Cauchy, que lo consideraban una inducción un tanto atrevida.
- Principio de dualidad. Si una afirmación sobre figuras planas es cierta, intercambiando en ella las palabras punto y recta, así como las relaciones de incidencia, la nueva proposición también lo es. A propósito de la paternidad de este principio Poncelet mantuvo una agria polémica con otro discípulo de Monge, Georgonne (1771-1859). Poncelet lo funda en la correspondencia entre polo y polar de una cónica, por lo que su punto de vista requiere la mediación de una cónica. Georgonne lo demostró de forma general por métodos analíticos, pero Poncelet afirmaba ser el primero en descubrirlo.

Para terminar los comentarios sobre el trabajo de Poncelet veremos otra de sus principales aportaciones. Como hemos visto trabaja con los puntos del infinito igual que con los propios. A esos puntos los llama a veces *imaginarios*, como a “todo objeto que se hiciese enteramente imposible o inconstructible” y dice que la recta del infinito es una “noción metafísica” (Etayo, 1992, p. 118). Y aunque la palabra *imaginario* es más propia de otros puntos, utilizando esta idea introduce la noción de *puntos cíclicos*. Desde el punto de vista analítico, dos cónicas se cortan siempre en cuatro puntos, soluciones del sistema formado por sus ecuaciones, pero estas cuatro soluciones no tienen por qué ser siempre reales; dos o incluso las cuatro pueden ser complejas o imaginarias. Pues bien, Poncelet, desde el punto de vista sintético, establece que si dos circunferencias tienen dos puntos reales de intersección, es porque también tienen dos puntos imaginarios comunes situados en la recta del infinito.Estos son los *puntos cíclicos* por los cuales "pasan" todas las circunferencias del plano. Del mismo modo introduce el *absoluto* del espacio o circunferencia imaginaria del plano del infinito común a todas las superficies esféricas del espacio (Etayo, 1992). Como veremos será Plücker quien defina los puntos cíclicos desde el punto de vista analítico.

El continuador de la obra de Poncelet en Francia fue Michael Chasles (1793-1880), considerado como uno de los últimos grandes geómetras franceses (Etayo, 1992; Moreno, 2005). También fue alumno de la Politécnica en los últimos tiempos de Monge y profesor de la misma en 1841, así como de la Sorbona desde 1846.

Chasles demostró la invarianza de la razón doble bajo las proyectividades, así como la propiedad de que cuatro puntos fijos de una cónica determinan con un quinto punto de la misma cuatro rectas cuya razón doble no depende de ese último punto. Prestó también gran atención al principio de continuidad al que encontraba el fallo de una demostración rigurosa, lo que no le impidió seguir fiel a los métodos sintéticos. Estudió la generalización de la proyectividad a las *correspondencias* (n, m) sobre la recta proyectiva, es decir, aquellas que a cada punto hacen corresponder n puntos distintos o confundidos, y a su vez cada punto es el correspondiente a m puntos distintos o confundidos (Etayo, 1992).Además introdujo el término *homografía* y definió las *correlaciones* (Alonso et al., 2002). Sus ideas quedaron recogidas en su *Tratado de geometría superior* publicado en 1852, ideas que fueron introducidas en España en 1865 por Echegaray.

Pero no solo fueron los geómetras franceses los que siguieron el camino iniciado por Poncelet. También en la órbita alemana hubo matemáticos que cultivaron la Geometría Proyectiva Sintética.

El primero de ellos fue el suizo Jakob Steiner (1796-1863), analfabeto hasta los catorce años llegó a ocupar una cátedra en la Universidad de Berlín hasta su jubilación (Etayo, 1992). En 1832 publica *Desarrollo sistemático de la dependencia mutua de las figuras geométricas,* y en palabras de Etayo (1992) "sistemático" es la palabra que mejor define esta obra. Fue un matemático brillante y aportó gran cantidad de resultados a la geometría entre ellos teoremas que con su nombre se siguen estudiando en la actualidad. Utilizó sistemáticamente la razón doble y el principio de dualidad, que llevó más lejos que nadie, de manera que llegó a hablar de cónicas de puntos y cónicas de rectas: una cónica puede ser considerada como el conjunto de sus puntos, pero también puede pensarse como el de sus rectas tangentes, que la identifican inequívocamente (Moreno, 2005).Su enorme prestigio hizo prevalecer su postura en Alemania, con menosprecio de la línea analítica que estaba dando una base sólida a la geometría con el empleo de las coordenadas homogéneas. Su postura era tan radical que llegó a amenazar con no publicar sus artículos en el *Journal für Mathematik* si los artículos de Plücker (1801-1868), máximo representante de los métodos analíticos seguían apareciendo allí. Esta polémica llevó a Plücker a abandonar la Geometría y dedicarse a la Física (Etayo, 1992;

Alonso et al., 2002; Moreno, 2005), pero antes de esto hizo importantes contribuciones a la Geometría Proyectiva.

Julius Plücker (1801-1868) estudió física y matemáticas y fue profesor de las mismas en las universidades de Berlín y Halle y en la de Bonn desde 1837 (Etayo, 1992). Sus primeros trabajos fueros sobre Geometría Sintética, pero tras el inicio de la polémica que hemos citado antes se pasó al campo analítico. Plücker creó un sistema de coordenadas homogéneas, aunque no fue el único pues también Möbius, Feuerbach y algunos otros lo hicieron con algunas variaciones. En el sistema ideado por Plücker cada punto del plano está determinado por tres números (x, y, z) tales que si z es distinto de cero, $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ son sus coordenadas cartesianas, mientras que las ternas $(x, y, 0)$ representan puntos del infinito. Una recta se escribe $ax + by + cz = 0$ y $z = 0$ será la ecuación de la recta del infinito. Este tipo de coordenadas permiten probar de forma sencilla y elegante el principio de dualidad. En efecto, observemos que una recta $ax + by + cz = 0$ queda caracterizada por la terna (a, b, c) de sus coeficientes o cualquiera otra proporcional a ella. A esta terna la llamó Plücker *coordenadas de la recta*. Si se fijan, la ecuación anterior da todos los puntos (x, y, z) que pertenecen a esa recta, pero si en la ecuación se fija el punto (x, y, z) y dejo variables (a, b, c), cada una de esas ternas da una recta que pasa por el punto, es decir, es la ecuación del haz de vértice ese punto. Se tiene por tanto la versión analítica del principio de dualidad, pues el intercambio de palabras *punto y recta* en Geometría Sintética equivale al de las palabras *constante y variable* en la Analítica. Además de las coordenadas homogéneas y de la demostración del principio de dualidad, Plücker simplificó la notación utilizando expresiones como l=0, para representar de forma abreviada la ecuación de una recta o $\alpha C + \beta C' = 0$ para representar haces de figuras del mismo tipo que C y C'. Este tipo de notación simplificó enormemente los cálculos, pero además equivale a que no sean únicamente los puntos los elementos básicos de la geometría, sino otras figuras con las que se puede operar como con ellos y que constituyen los elementos de un espacio, lo que conduce a generalizar el número de dimensiones (Etayo, 1992). Por último señalar el uso que hizo de los números complejos. Definió las coordenadas homogéneas complejas del mismo modo que las reales, y estudió analíticamente los *puntos cíclicos* cuyas coordenadas son $(1, i, 0), (1, -i, 0)$. Sirviéndose de ellos dio una definición de foco de una cónica que le permitiría extender el concepto a curvas de grado superior: un punto del plano de una cónica es un foco si las tangentes trazadas desde él pasan por los puntos cíclicos (Moreno, 2005). Los trabajos de Plücker sobre Geometría Analítica quedaron recogidos en los dos volúmenes de su obra *Analytisch-geometrische Entwichlungen* (1828-1831) y en la memoria *Über ein neues coordinaten system* (1829).

Pero Plücker no fue el único que utilizó coordenadas homogéneas, como ya hemos dicho. También Möbius (1790-1868), profesor de astronomía, director del observatorio de Leipzig y cultivador de distintos campos de la matemática, introdujo un tipo de coordenadas homogéneas -las llamadas *coordenadas baricéntricas*- en su obra *El cálculo baricéntrico* (1827) (Etayo, 1992). En este sistema las coordenadas de punto del plano se fijan respecto de un triángulo de referencia. A cada punto P se le asignan las masas que deben estar colocadas en los vértices del triángulo para que dicho punto se encuentre en el centro de gravedad. Estas masas son sus coordenadas baricéntricas y están determinadas salvo un factor de proporcionalidad, por lo que son homogéneas. Los puntos interiores del triángulo son los únicos que tienen las tres positivas, y los del infinito aquellos cuyas coordenadas suman cero. Otra de las aportaciones importantes de

Möbius es el concepto de *colineación*, aplicación biyectiva entre los puntos de dos planos que transforma rectas en rectas. Möbius ve que esta aplicación no difiere de la relación establecida mediante proyecciones y secciones, es decir establece una proyectividad entre cada recta y su transformada. Considera igualmente las *correlaciones* como transformaciones entre elementos duales (a cada punto del primer plano se le asigna una recta del segundo, y por dualidad también al revés), "por lo que en él se encuentra por primera vez la idea de proyectividad tal como la conocemos hoy" (Etayo, 1992, p. 125). También el concepto de *razón doble de cuatro rectas* concurrentes fue propuesto por Möbius (Moreno, 2005).

$$(abcd) = \frac{sen\ ac}{sen\ bc}\frac{sen\ bd}{sen\ ad}$$

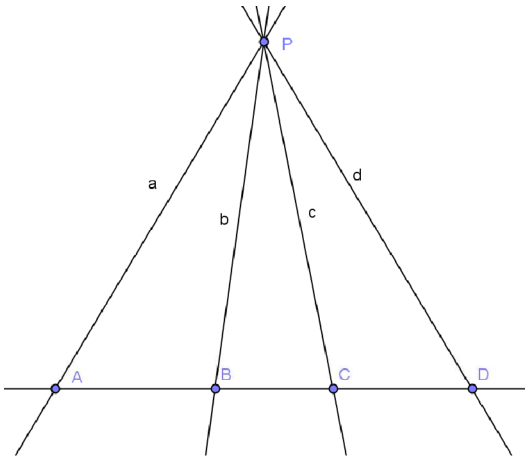


Figura 11: Razón doble de cuatro puntos obtenidos por proyección de cuatro rectas

La razón doble de cuatro puntos coincide con la de las cuatro rectas que resultan de proyectarlos desde un punto exterior a la recta que los contiene (**Figura 11**).

Pero aunque Möbius y Plücker hicieron importantes contribuciones a la Geometría Proyectiva analítica, como hemos dicho la influencia de Steiner hizo que, en general, los matemáticos alemanes optaran por la Geometría Sintética. En este grupo se encuentra también Staudt.

Karl Georg Christian von Staudt (1789-1867), fue profesor en las universidades de Würzburg y Nürenberg, y en la de Erlangen desde 1835 hasta su muerte (Etayo, 1992). En 1847 publica *Die Geometrie der Lage*, seguida de los *Beiträgezur Geometrie der Lage* que aparece en tres fascículos en los años, 1856, 57 y 58. En palabras de Etayo (1992, p. 126):

> (…) su obra, seguramente la más importante y completa, superaba a su época en muchos aspectos, sobre todo su tendencia a la aritmetización, hasta el punto de resultar más "moderna", y desde luego más rigurosa, uniforme y luminosa, que otras posteriores.

Según este autor Staudt, tras el estudio de las obras de Poncelet, Möbius y Steiner, se convenció de la necesidad de introducir un mayor rigor en los fundamentos y métodos de la Geometría Sintética, y de separar las propiedades descriptivas o de posición y métricas o de magnitud. Ese afán de rigor y generalidad le lleva a no insertar ni una sola figura en su obra (Etayo, 1992).Y si muchas fueron las aportaciones de Staudt a la

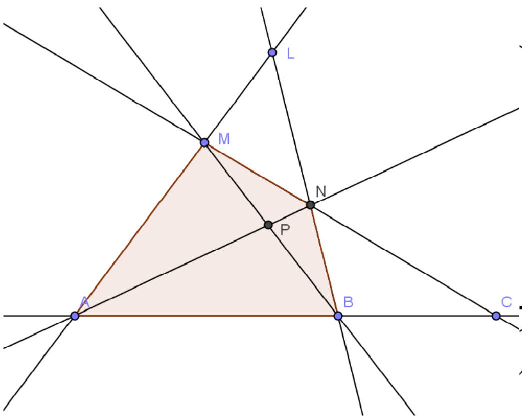
Geometría Proyectiva Sintética la más importante es que la liberó completamente de referencias a conceptos métricos, que no son invariantes por proyectividades, cosa que no habían conseguido ninguno de los matemáticos anteriores. Así la proyectividad en sentido de Poncelet -por la que dos figuras son proyectivas si puede pasarse de una a otra por un número de finito de proyecciones y secciones- se basa en la invarianza de la razón doble, que es un concepto métrico. Sin embargo, para Staudt dos figuras son proyectivas si la relación establecida entre ellas conserva las razones armónicas, las cuales pueden obtenerse por pura construcción gráfica, la del cuadrilátero completo[5](Etayo, 1992; Moreno, 2005).Aún así el libro de von Staudt tenía el defecto de usar el axioma de las paralelas, que es una noción afín, no proyectiva, problema que resolverá Klein años más tarde (Alonso et al. 2002).

Por último citar otra de las aportaciones importantes de Staud, la definición geométrica de los puntos imaginarios, que en Geometría Sintética no constituían hasta entonces "verdaderos entes sino sólo una locución oportuna" (Etayo, 1992, p. 128), con lo que completa la geometría de la posición. Etayo señala que su afán por liberar la Geometría Sintética de la métrica, le lleva contrariamente a unir las Geometrías Sintética y Analítica:

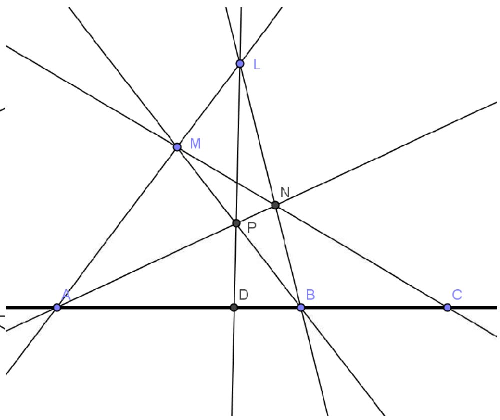
> Más, ironías del destino, esa perfecta construcción axiomática del espacio proyectivo con la que Staudt pretendía liberar a la geometría de la noción de número y de la métrica, le lleva justamente a la meta contraria. Porque demuestra que el conjunto de todos esos puntos, incluidos los imaginarios, es isomorfo al cuerpo de los números complejos, con lo que en realidad acaba probando la identidad de la geometría analítica sobre el cuerpo complejo (Etayo, 1992, p. 129).

---

[5]Un cuadrilátero completo lo forman cuatro rectas distintas, tres de las cuales no son concurrentes y sus seis puntos de intersección. Las cuatro líneas son llamadas lados del cuadrilátero y los puntos son los vértices del cuadrilátero completo. Se llaman opuestos dos vértices que no están sobre el mismo lado. Los pares de vértices opuestos determinan tres líneas diagonales, en general no concurrentes, que forman el llamado triángulo diagonal.



Cuadrilátero completo



Construcción de una cuaterna armónica

La recta *LP* determina sobre el lado *AB* un punto *D* tal que *A, B, C, D* forman cuaterna armónica.

Este autor señala que la obra de Staud marca el final y la culminación de un periodo en la historia de la Geometría Sintética. Ha quedado elaborado un método geométrico completo y durante cincuenta años, el trabajo de los geómetras consistirá principalmente en aplicarlo y extenderlo a nuevos problemas, dirigiendo sus esfuerzos hacia la revisión de sus principios y de su estructura.

En cuanto a la Geometría Analítico-Proyectiva destacan los trabajos de Edmond Laguerre (1834-1886) y Arthur Cayley (1821-1895). El primero de ellos se propone establecer las propiedades básicas de la Geometría Euclídea en términos proyectivos y encuentra una fórmula que mide el ángulo de dos rectas en términosde la razón doble de la cuaterna formada por esas rectas y otras dos que pasan por los puntos circulares del infinito. Arthur Cayley trabajó independientemente en la misma dirección. Cayley utilizando coordenadas consiguió probar que todas las propiedades métricas pueden obtenerse como casos particulares de propiedades proyectivas utilizando los puntos cíclicos o el absoluto del espacio. Años después, en 1871, Klein le comunica que no sólo la Geometría euclídea sino también las no euclídeas podrían ser subordinadas de manera análoga a la geometría proyectiva. Lo que llevó a Cayley a su famosa afirmación: “La geometría proyectiva es toda la geometría” (Etayo, 1992).

Félix Klein (1849-1925) en su famoso *Programa de Erlangen* (1872) clasifica las geometrías por los grupos de transformaciones: cada geometría es la teoría de los invariantes de un cierto grupo. En el caso de la Geometría Proyectiva la forman los invariantes por el grupo de las proyectividades.

Tras todos estos trabajos, que conectan a la Geometría Proyectiva con las demás -tanto euclídeas como las no euclídeas- así como con la Geometría Algebraica, comienza un periodo de fundamentación y formalización, que coincide con el de toda la matemática. Este periodo comienza en 1882 con Moritz Pasch (1843-1930) quien realiza el primer intento de fundamentación axiomática de la Geometría Proyectiva. Contribuciones posteriores se deben a Giuseppe Peano, Schur y Veronese, entre otros, pero habrá que esperar al siglo XX para que este trabajo de axiomatización se desarrolle por completo (Alonso et al. 2002; Etayo, 1992).

2.3. Contexto político y social en España en el siglo XIX

El siglo XIX es un siglo importante en la historia de España debido a los grandes cambios que se produjeron en su estructura política y social en este periodo.

En el primer tercio del siglo desaparecen los últimos vestigios del antiguo régimen, la nobleza pierde sus privilegios estamentales, se anulan las relaciones sociales feudales y la sociedad española se convierte en una sociedad de clases moderna. Aparecen nuevas clases sociales, como la burguesía y la clase media.

También en este siglo comienzan las luchas del proletariado - tanto agrícola como industrial- por sus derechos, luchas que comienzan siendo estrictamente reivindicativas, ajenas a las contiendas políticas y que terminarán politizándose.

Otro de los protagonistas importantes de esta época será el ejército. Los militares tendrán grandes privilegios durante el siglo XVIII e intervendrán de forma activa en los asuntos públicos en numerosas ocasiones a partir de la guerra de la Independencia, pero será a partir de la guerra carlista cuando esta intervención se haga más patente.

Por último señalar el papel de la Iglesia que para los liberales no sólo era una institución que necesitaba reformas urgentes, sino uno de los principales apoyos del absolutismo y como tal debía ser desmantelado. Para ello se llevaron a cabo dos medidas de gran envergadura: la supresión de las órdenes religiosas (1835) y la desamortización eclesiástica (1836 y 1841). El restablecimiento de las órdenes religiosas no llegará hasta el último cuarto de siglo, con la restauración alfonsina, aunque las relaciones entre Iglesia y Estado mejorarán durante los gobiernos moderados. Así en 1851 se firma el Concordato entre el gobierno y la Santa Sede en el que se proclama la unidad religiosa, así como la inspiración católica de toda la enseñanza en los establecimientos públicos y privados.

Analizaremos a continuación con más detalle la evolución política y social de España entre los años 1833 -comienzo de la Regencia de Mª Cristina- y 1909 en que se producen los sucesos de la *Semana Trágica* de Barcelona, ya que tal evolución influirá, como no puede ser de otra manera, en el ámbito educativo. La ideología política de los diferentes gobiernos quedará plasmada en los diferentes planes de estudios que serán aprobados en el periodo. Por otra parte el contexto político también condicionará la introducción de los saberes que se estaban desarrollando en Europa, y en el desarrollo de la ciencia en España.

Dividiremos el periodo en varias etapas, que se corresponden a las consideradas para realizar el estudio de la Geometría Analítica, aunque en el caso que nos ocupa los criterios seguidos para hacer la división han sido sociopolíticos y en el anterior, educativos.

2.3.1. (1833-1843): Las Regencias de Mª Cristina y Espartero.

El 29 de septiembre de 1833 muere Fernando VII, iniciándose un profundo proceso de cambio en las estructuras social y política del país, proceso que culminará con el fin del absolutismo y la creación de un nuevo Estado liberal.

Pero este cambio no será fácil ni pacífico: días después de la muerte de Fernando VII comienza la primera guerra carlista, cuyo detonante fue el problema sucesorio, pero cuyo trasfondo fue la lucha entre los defensores del absolutismo y los partidarios del cambio. Esta primera guerra finaliza, en el País Vasco, el 29 de agosto de 1839 con el Convenio de Vergara, pero durante todo el siglo se seguirán produciendo nuevos enfrentamientos, no llegándose a la paz definitiva hasta 1876. Este continuo estado de guerra tendrá importantes consecuencias económicas y sociales, afectando al desarrollo del país en todos los ámbitos, y en particular en el de la educación.

A la muerte de Fernando VII, Isabel II es aún menor de edad, por lo que su madre Mª Cristina de Borbón actúa como regente. En los primeros años de regencia el régimen inicia una tímida evolución hacia la apertura política, aunque no se producen reformas drásticas, siendo el cambio más importante la aprobación, en abril de 1834, del *Estatuto Real*, en el que se regulan unas nuevas Cortes. Pero la auténtica revolución liberal llegará de la mano de Juan Álvarez Mendizábal, financiero progresista de prestigio, que llevará a cabo medidas muy importantes durante su mandato, como la reforma de la Ley Electoral, el restablecimiento de la libertad de imprenta y otros derechos fundamentales, la supresión de algunas órdenes religiosas y la expulsión de los jesuitas (1835). Esta última medida, junto con la Real orden de 23 de junio de 1835 por la que se suprimen los estudios de *filosofía* en los centros religiosos, tendrá importantes repercusiones sobre estos estudios, precursores de la segunda enseñanza, ya que la enseñanza privada tenía una amplia implantación y no se propone una alternativa a la supresión de estos centros (Vea, 1995). Pero de entre todas las medidas llevadas a cabo en esta época destaca, sin duda, el decreto de desamortización de los bienes de las órdenes religiosas extinguidas (1836), que constituye la primera etapa de la desamortización de los bienes de la Iglesia. La segunda, en la que se expropiarán los bienes del clero secular, se llevará a cabo en 1841, siendo regente Espartero.

Al gobierno de Mendizábal le sigue uno moderado que termina en agosto de 1836, con el motín de La Granja, tras el que los progresistas vuelven al poder. En esta nueva etapa los progresistas emprenden de nuevo un amplio programa de reformas, con tres objetivos básicos: la instauración de un régimen liberal, tomando medidas como el establecimiento de la libertad plena de imprenta y reanudando la desamortización; el impulso de la acción militar para ganar la guerra; y la elaboración de una nueva Constitución que ve la luz en junio de 1837.

En el terreno educativo el 4 de agosto de 1836 se aprueba un Plan de Instrucción Pública conocido como *el Plan del Duque de Rivas*, que representa el punto de partida del establecimiento de los Institutos de Segunda Enseñanza, aunque no llega a entrar en vigor en la práctica ya que en octubre de ese mismo año se aprueba un *arreglo provisional* que estará vigente hasta 1845. En 1838 es presentado por el Marqués de Someruelos el *Proyecto de Ley sobre la Instrucción secundaria y superior*, que trata de organizar los dos niveles superiores de la enseñanza, pero que no pasará de ser un proyecto al no ser aprobado por las Cortes.

En octubre de 1837 los moderados ganan las elecciones y en el siguiente trienio se suceden diversos gobiernos moderados que se caracterizan por el abandono de la política reformista. Este periodo termina en octubre de 1840 con la renuncia de Mª Cristina y su marcha al exilio.

Tras la marcha de Mª Cristina se inicia una nueva etapa dentro del reinado de Isabel II, que tendrá como protagonista al general Espartero, que ejercerá como regente hasta 1843. Será este un periodo de inestabilidad política y social, caracterizado por las revueltas populares y los levantamientos armados. El último de ellos, en mayo de 1843, triunfará, obligando a Espartero a huir al exilio en julio de ese mismo año.

En lo que se refiere a la enseñanza, en estos años se intenta llevar a cabo la tan necesaria organización de la Enseñanza Media y Universitaria, de nuevo sin éxito. Así el 8 de junio de 1843 se aprueba el *Real Decreto por el que se crea la Facultad de Filosofía* -que incluye la segunda enseñanza bajo el nombre de estudios preliminares(Art. 14)- en el que se hace una defensa del estudio de las ciencias, que consideran se encuentra muy abandonado en nuestro país. Pero la reforma estará apenas tres meses en vigor, es derogada el 30 de agosto de 1843, siguiendo en la práctica el *Arreglo provisional de estudios* de 29 de octubre de 1836. Anterior a este plan de estudios es el *Proyecto de Ley sobre la organización de la enseñanza intermedia y superior de 12 de julio de 1841*, propuesto por Facundo Infante. A pesar de ser bastante comedido en sus planteamientos, debido al revés sufrido por el Marqués de Someruelos, este proyecto correrá su misma suerte y no conseguirá convertirse en ley, aunque en él se presentan, globalmente las líneas ideológicas que los progresistas van a defender en materia de educación a lo largo del siglo XIX (Vea, 1995).

En noviembre de 1843 Isabel II es declarada mayor de edad con solo trece años y en 1844 los moderados suben de nuevo al poder dando comienzo lo que se conocerá como la *década moderada*.

En cuanto a la organización social, la sociedad isabelina de mediados del siglo XIX es ya una sociedad de clases moderna, dividida en tres grandes grupos sociales: la clase dirigente, las clases medias y los sectores populares. Las leyes de la década de 1830 acabaron definitivamente con la sociedad del Antiguo Régimen y con los privilegios estamentales.

La clase dirigente está formada por la vieja aristocracia, la alta burguesía y las altas jerarquías del clero, el Ejército y la Administración. Grupos muy cerrados, evitarán la democratización del régimen, abortando cualquier intento subversivo y manteniendo en las conciencias de la población una mentalidad religiosa y tradicional enemiga de los cambios. En conjunto acapararán totalmente los centros de poder durante el reinado de Isabel II.

En las clases medias, que constituyen un grupo bastante heterogéneo y muy difícil de delimitar, se incluyen desde los campesinos acomodados, a los profesionales liberales de menor nivel, pasando por los mandos intermedios del ejército o los pequeños comerciantes y empresarios. Su ideología tiende a ser muy conservadora, apoyando a cualquier gobierno fuerte capaz de mantener el orden y la propiedad. Por eso, aunque la mayoría no tiene derecho al voto, es un sector clave en el que se asientan las clases dominantes, cuidando mucho todos los partidos su imagen ante esas clases. En el tema educativo destacar que la segunda enseñanza se crea enfocada principalmente a esta clase social.

Los sectores populares engloban campesinos, artesanos, trabajadores de servicios y trabajadores fabriles, siendo la clase social más numerosa. Su principal característica en la época isabelina es la pérdida de nivel de vida. Entre las clases trabajadoras destacan los trabajadores fabriles, en cuyo seno nacerá el movimiento obrero, que desembocará, en los años ochenta, en la formación del PSOE. Los gobiernos liberales defenderán la educación primaria gratuita para toda la población, aunque en la práctica el índice de analfabetismo será muy grande.

En definitiva, nos encontramos en un periodo marcado por la guerra civil, la inestabilidad política y profundos cambios en la estructura social. Un periodo en el que existen cuestiones prioritarias a la educación y en el que surge una nueva clase social – la clase media- que a pesar de no detentar el poder político ni el económico será muy bien considerada por la clase dirigente. En este contexto nace una nueva etapa educativa, heredera de los *estudios filosóficos* de las facultades menores, a la que se denominará enseñanza secundaria o segunda enseñanza.

2.3.2. (1844-1856): La Década Moderada y El Bienio Progresista.

En noviembre de 1843 la reina Isabel es declarada mayor de edad y jura la Constitución de 1837. Al año siguiente se inicia un periodo de diez años en el que los moderados estarán en el poder interrumpidamente. Este periodo, conocido como la *década moderada,* se caracterizó por el proceso de centralización y burocratización del aparato estatal que se llevó a cabo, por el endurecimiento de la represión, las intrigas palaciegas y la corrupción de la administración, así como por la inestabilidad política y social (Tortella et. al, 1981).

El personaje más importante de esta época es el general Narváez –aunque hubo un total de dieciséis gobiernos en diez años-, que sube al poder por primera vez en mayo de 1844. Dimite en febrero de 1846, y vuelve al poder en Octubre de 1847 tras una época de inestabilidad política y mediante un golpe de Estado. En 1848 se produce en España y en toda Europa, una ola de levantamientos, manifestaciones y protestas revolucionarias, que en el caso español se deberá más a la crisis económica, que a cuestiones políticas, y que serán duramente reprimidas por Narváez. A ellas hay que añadir la segunda guerra carlista que había comenzado en 1846 principalmente en Cataluña, y que se extenderá durante tres años.

La dictadura de Narváez durará hasta enero de 1851.Después se sucederán varios gobiernos moderados hasta que en julio de 1854 se produce el pronunciamiento de Vicálvaro, tras el que se forma un gobierno progresista.

En esta década se practica una política de reconciliación con la Iglesia, que culmina con la firma, en 1851, del *Concordato* entre la Santa Sede y el Estado español, en el que se proclama que la religión católica es "de la nación española" y por ello "la instrucción en las Universidades, Colegios, Seminarios y Escuelas públicas o privadas de cualquier clase, será en todo conforme a la doctrina de la misma religión católica" (Puelles, 2000, p.61); encargando a la Iglesia la misión de velar porque esto se cumpla aún en las escuelas públicas. Es decir, con la firma del Concordato, la Iglesia recobrará la influencia y los privilegios perdidos en épocas anteriores, en particular en el campo de la educación.

En 1845 se promulga una nueva Constitución, en teoría una reforma de la de 1837, pero en realidad un texto nuevo, de corte conservador. Esta Constitución vendrá refrendada por la *Ley Electoral de 1846* que restringirá drásticamente el número de votantes con relación a la ley progresista.

Otras medidas de interés que se llevan a cabo en esta época son la reforma de la Hacienda y la *Ley de Imprenta* estableciendo la censura. En la década de los cuarenta se inicia la construcción de las primeras líneas de ferrocarril, que junto con un importante programa de construcción de carreteras facilitarán el transporte de mercancías, lo que influirá positivamente en el desarrollo de la industria.

En materia educativa se tiene que, ante la necesidad de una reforma del sistema educativo y los fracasos de los proyectos del Marqués de Someruelos y de Facundo Infante, el ministro de gobernación Pedro José Pidal opta por ordenar el sector por Real decreto en vez de mediante una ley general de instrucción. Así el 17 de septiembre de 1845 se aprueba el Plan General de Estudios, plan que supondrá el espaldarazo definitivo al proceso de conformación del nuevo sistema educativo. Este plan será reformado varias veces en el periodo, así tenemos el Plan de estudios de 24 de junio de 1846, el Plan de estudios de 8 de julio de 1847, el Plan de estudios de 14 de agosto de 1849, el de 28 de agosto de 1850 y el Reglamento de estudios de 10 de septiembre de 1852, aunque ninguna supuso una mejora sustancial en el sistema educativo.

Entre 1850 y 1852 se encuentra al frente del gobierno Bravo Murillo, que llevará a cabo una mejora de la Deuda Pública. Esta mejora junto con la reforma de la Hacienda de 1845 y la reforma monetaria llevada a cabo en 1847 favorecerán el proceso de industrialización, sobre todo en Cataluña y el norte de España.

Como hemos dicho en julio de 1854 los progresistas vuelven al poder, de nuevo de la mano de Espartero y con O'Donnell como Ministro de Guerra. Esta coalición durará dos años, periodo al que se suele denominar como el *bienio progresista.*

En este periodo las Cortes constituyentes realizan una obra legislativa notable por su cantidad y significado: elaboran una constitución, que queda sin promulgar pero que se anticipa en muchos aspectos a la de 1869, y cubren sectores de tanta trascendencia como la desamortización, los ferrocarriles, los telégrafos y las sociedades de crédito.

En el terreno educativo los progresistas no promulgaron ningún plan de estudios, pero elaboraron un *Proyecto de Ley de Instrucción pública* (9 de diciembre de 1855), considerado por Vea (1995, p.332) "como primer paso de ruptura con la inercia decadente de la situación previa, revitalizador de la reforma educativa liberal y base para la elaboración de la Ley de Instrucción Pública de 1857".

Es esta una época de grandes dificultades económicas y de movimientos populares que reclaman la realización de los puntos del programa progresista. Uno de estos movimientos, producido en diferentes localidades de Castilla en junio de 1856, provoca la crisis definitiva de la coalición Espartero-O'Donnell, que acaba en julio de ese mismo año.

En el aspecto social hay que destacar la nueva orientación que sigue la lucha obrera. Hasta los años cuarenta las reivindicaciones de los obreros irán unidas a las de los patronos pero a partir de 1848, comenzarán a relacionarse estas con las ideas democráticas y republicanas. En el Bienio progresista los obreros separarán definitivamente su movilización de la de los patronos y tomarán conciencia de que se debe buscar una salida al problema obrero en el terreno de la política (Tortella, 1981).

Vemos, por tanto, que la inestabilidad política sigue caracterizando esta etapa, a pesar de lo cual se logra aprobar un plan de estudios que supondría, el espaldarazo definitivo al proceso de conformación del nuevo sistema educativo y la consolidación de la segunda enseñanza, aunque aún no la estabilidad del sistema educativo debido a sus numerosas reformas. Y aunque el intento de los progresistas de establecer una Ley General de Instrucción Pública fuese de nuevo fallido, su propuesta sentó las bases para la Ley de Instrucción Pública de 1857.

2.3.3. (1856- 1868): Esplendor y crisis de la Unión Liberal

Esta etapa tendrá como protagonistas a dos personajes -Leopoldo O'Donnell y Ramón Mª Narváez- y a una fuerza política -*La Unión Liberal*- fundada en 1854. Formación de orientación centrista en sus orígenes irá evolucionando hasta convertirse, en la práctica, en un partido conservador.

Narváez sube al poder, por primera vez en este periodo, en octubre de 1856 y lleva a cabo una política conservadora y de represión de las libertades públicas suspendiendo la desamortización y anulando todas las disposiciones de libertad de imprenta y las que se oponen al Concordato entre otras.

En junio de 1858 O'Donnell forma un nuevo gobierno de la Unión Liberal, que perdurará hasta 1863, siendo este un periodo de estabilidad política y de auge económico. La intentona carlista de abril de 1860 y la insurrección campesina De Loja en junio de 1861 son los únicos sucesos que vienen a enturbiar el clima político en esta etapa.

Hacia finales de 1862 el gobierno de la Unión Liberal comienza a perder prestigio y los progresistas se retraen de la vida parlamentaria ante la evidencia de que ni el sistema electoral ni la postura de la Reina les permitirán acceder al poder. En febrero de 1863 se disuelven las Cortes y vuelve a la inestabilidad política, sucediéndose ocho gobiernos y produciéndose varios intentos de *pronunciamientos* en los últimos años. El último de ellos –en septiembre de 1868- provocará la caída de la monarquía borbónica y el inicio del sexenio revolucionario.

En la revolución de 1868 será decisiva la participación de los trabajadores industriales, cuyas movilizaciones se habían vuelto desde 1863 abiertamente politizadas.

En el terreno de la educación señalar un hecho de especial importancia para el desarrollo del sistema educativo. El 9 de septiembre de 1857 se aprueba la Ley de Instrucción Pública, conocida como Ley Moyano, a partir de la Ley de bases de 17 de julio de 1857. Es la primera vez que se logra establecer una Ley General de Instrucción Pública, que dará cierta estabilidad al sistema educativo, ya que el desarrollo que se haga de este deberá estar supeditado a la Ley, aunque en la práctica los sucesivos planes de estudios y los criterios personales de los distintos ministros de Fomento "irán bordeando, e incluso contradiciendo, no pocas de las disposiciones legales contenidas en la Ley Moyano" (Vea, 1995, p. 443). Con todo, por esta Ley se regirá el sistema educativo del país hasta bien entrado el siglo XX.

En esta Ley se establece la separación de la antigua Facultad de Filosofía en dos: la Facultad de Filosofía y Letras y la Facultad de Ciencias, comenzando su andadura como facultades con entidad propia, aunque en estos primeros años aún no tendrán la misma consideración que las tradicionales de Medicina, Farmacia, Derecho, etc.

Por otra parte señalar la obra cultural llevada a cabo por diversas academias obreras como *El Fomento De Las Artes* de Madrid (1847) en el que se impartían clases de aritmética, gramática y francés y el *Ateneo Catalán De La Clase Obrera*, de Barcelona (1861), fundado con el propósito de realizar una obra de regeneración del obrero mediante la instrucción. (1868-1909): El Sexenio Revolucionario y La Restauración.

2.3.4. (1868-1909): El Sexenio revolucionario y La Restauración

Las causas de la revolución de 1868 –conocida como *La Gloriosa*- se remontan a cinco años atrás y son múltiples, pero se pueden resumir en dos: por un lado la crisis económica y por otro la política. La Reina se había ido apoyando alternativamente en los gobiernos conservadores de O'Donnell y Narváez, cuya política consistía en el mantenimiento del orden y del sistema oligárquico a cualquier precio, reprimiendo violentamente cualquier intento de protesta. Ante esto, progresistas demócratas y republicanos se van uniendo en la creencia de que el establecimiento de la República es la solución para conseguir la completa democratización del país y firman el Pacto de Ostende contra la monarquía.

En septiembre de ese año triunfa la revolución, provocando la salida de la Reina del país y en octubre se instaura un gobierno provisional bajo el mando del general Serrano. En enero de 1869 se celebran unas elecciones que serán ganadas por la tendencia monárquico-democrática y las Cortes inauguradas en febrero de ese mismo año elaboran una constitución, aprobada en junio. Se nombra Regente a Serrano y a Prim Presidente del Gobierno.

La nueva Constitución proclama, entre otras cosas, la soberanía nacional, estableciendo el sufragio universal para varones mayores de 25 años, la Monarquía democrática y parlamentaria como forma de Estado, la división de poderes y una exhaustiva declaración de derechos, entre ellos los de libertad de imprenta, derecho al voto, libertad de enseñanza, expresión, reunión y asociación y la libertad de culto.

En el orden interno los problemas fueron graves: la crisis agrícola, el desempleo, los levantamientos campesinos, las reacciones armadas republicanas en Cataluña, Valencia, Zaragoza y Andalucía en septiembre de 1869, el levantamiento de las partidas carlistas en Cataluña en el verano de ese mismo año y la fuerza creciente del partido republicano. A esto hay que añadir los problemas que existen en las colonias, en las que se comienzan a producir levantamientos armados en Cuba y Puerto Rico.

En esta situación de inestabilidad, Amadeo de Saboya es nombrado rey el 2 de enero de 1871. Pero los problemas con que se encuentra al llegar al país lo abruman y abdica en febrero de 1873. Durante su reinado tienen lugar tres elecciones generales a Cortes y se suceden en el gobierno seis gabinetes ministeriales. Durante este periodo la situación interna sigue siendo grave, durante los últimos meses de 1872 se producen levantamientos carlistas en Gerona, Guipúzcoa, Vizcaya y Navarra. El rey Amadeo sufre un atentado en Madrid, se produce un levantamiento republicano federal en El Ferrol, y se acentúa el conflicto colonial en Cuba.

Tras la abdicación de Amadeo I, el Congreso y el Senado reasumen todos los poderes y proclaman la República como forma de gobierno, comenzando así la Primera República española. Este periodo se caracteriza por la inestabilidad política, los pronunciamientos y las insurrecciones cantonales que comienzan en julio de 1873 en Cartagena, a lo que hay que añadir la guerra carlista que sigue abierta.

El 3 de enero de 1874 el general Pavía ocupa violentamente el parlamento y desaloja a los diputados. Pavía formará un nuevo gobierno republicano bajo la presidencia del general Serrano, que será nombrado presidente de la República en febrero. El mandato de Serrano se convertirá, de hecho, en una dictadura personal, concentrada en sofocar los últimos focos cantonalistas, derrotar a los carlistas en el Norte y volver a establecer el orden y el control del país desde el poder central. Aunque pudo detener el avance de los ejércitos carlistas, su posición a finales de año era muy débil, ya que había perdido el apoyo tanto de los grupos burgueses y las clases medias, que se habían ido incorporando paulatinamente a la causa Alfonsina, como del movimiento obrero, que decepcionado va alejándose de los demócratas y republicanos y adoptando las tesis anarquistas.

La Primera República termina el 29 de diciembre de 1874 con el pronunciamiento de Martínez Campos en Sagunto.

El último cuarto del siglo XIX coincide con una nueva etapa política conocida como *La Restauración*, etapa de cambios sociales y políticos: se instaura de nuevo la monarquía borbónica, en la figura de Alfonso XII, y se establece el bipartidismo como medio para reforzar el régimen.

En el aspecto social destacar que en la década de los ochenta el desarrollo económico aumentará la población obrera y se iniciará una nueva etapa del movimiento obrero con el nacimiento del socialismo español de inspiración marxista. Además las burguesías y las clases medias se interesarán cada vez más por los problemas de la sociedad y de la política y expresarán – tanto en la política como en el arte- su preocupación, su temor o su simpatía por los desheredados; es decir, el *problema social* pasará a un primer plano.

En los años noventa surgirá con fuerza el *regionalismo,* pero es la guerra lo que conferirá sus rasgos más característicos a la década final del XIX, guerra colonial y guerra internacional en 1898, fecha que marcará la historia posterior de España.

En el ámbito político destaca la figura de Antonio Cánovas que fue uno de los principales artífices del establecimiento del nuevo régimen y de la estabilidad política que se conseguirá en este periodo.

Tras el éxito del pronunciamiento, el poder es trasmitido por el general Primo de Rivera del general Serrano a Cánovas, como representante del Rey. Este desembarca en Barcelona en enero de 1875 y ratifica su confianza en Cánovas, quien en los meses siguientes, emprenderá una acción de gobierno encaminada a conseguir tres objetivos: la adaptación del régimen a la realidad política y la eliminación de las decisiones más radicales del Sexenio, la elaboración de una nueva Constitución, que se aprueba en 1876y la pacificación afrontando las dos guerras abiertas, la del Norte y la de Cuba.

Pero si hay algo que caracterizará a este periodo de la historia de España será el dualismo entre la Constitución formal y el funcionamiento real de la vida política. Rey, Cortes y Gobierno son los tres órganos principales de la monarquía parlamentaria establecida por la Constitución del 76, pero el funcionamiento de éstos no es el que cabe esperar. La función reservada al electorado es completamente pasiva, ya que los resultados de las elecciones se pactan de antemano entre las diversas fuerzas políticas y el Rey, siendo la figura del *cacique* fundamental en toda esta maquinaria electoral.

Se establece así un *turno organizado* de los partidos para acceder al gobierno del país. Utilizando este método, moderados y progresista, liderados por Cánovas y Sagasta respectivamente, se alternarán en el poder durante un cuarto de siglo.

Durante la segunda mitad de los años setenta gobierna ininterrumpidamente –y por lo general bajo la presidencia de Cánovas- el Partido Conservador canovista. La política del Partido Conservador se caracteriza por una parte, por las medidas represivas y los rígidos controles a que se va a someter a casi todas las libertades fundamentales. Se establece la censura previa de prensa y se publica la Ley de Imprenta en enero de 1879 en la que se considera delito cualquier ataque o crítica a la Monarquía o al sistema político, las libertades de reunión y asociación quedan sometidas a la interpretación del gobierno y sigue habiendo una distinción entre partidos legales e ilegales reconociéndose solamente a los partidos dinásticos.

Se restringe la libertad de cátedra mediante una circular firmada por el Ministro Orovio en febrero de 1875, lo que provoca la expulsión o el abandono de sus puestos de varios profesores de Universidad y de enseñanza secundaria, que defienden este derecho y se niegan a ajustar sus enseñanzas a los dogmas oficiales en materia religiosa, política o social.

Un grupo de estos profesores, entre los que se encontraban Francisco Giner de los Ríos, Gumersindo de Azcárate y Nicolás Salmerón, funda en 1876 la Institución Libre de Enseñanza. La Institución, que en sus estatutos se declaraba ajena a todo interés religioso, ideología o partido político, proclamando el derecho a la libertad de cátedra, la inviolabilidad de la ciencia y el respeto a la conciencia individual, llevó a cabo una importante labor de renovación cultural y pedagógica en España en los siglos XIX y XX (La institución libre de enseñanza, n. d.).

Como hemos dicho, el partido conservador gobernará ininterrumpidamente durante los primeros cinco años del régimen, pero en el sistema ideado por Cánovas la alternancia política es imprescindible y por tanto lo es un partido político que haga oposición, a la vez que acepta el nuevo régimen; este partido será el Partido Liberal.

Entre febrero de 1881 y enero de 1884 se da la primera etapa liberal, en la que la orientación liberal aún es bastante tímida. Aún así el gabinete de Sagasta toma medidas para terminar con la represión de la libertad de expresión: limita las denuncias por delitos de imprenta, devuelve a sus cátedras a los profesores represaliados y permite que las asociaciones obreras y republicanas vuelvan a actuar con libertad al tiempo que amnistía a los dirigentes republicanos, pero no se atreve a llevar a cabo otras medidas pedidas desde su izquierda. Esto junto con la recesión económica de 1882-84 ocasionará disturbios y protestas como el intento de pronunciamiento republicano de 1883. Ante estos sucesos el gobierno reaccionará con dureza contra las protestas populares y los golpistas. Pese a todo, el Rey encarga formar un nuevo gobierno a Cánovas, y los conservadores vuelven al poder en 1884.

Apenas se forme el nuevo gobierno modificará las medidas llevadas a cabo por los liberales volviendo a ejercer un control férreo sobre la prensa y enfrentándose a los nuevos conatos de sublevación republicana y a la oposición de la Universidad, llegando a cerrar la de Madrid al comienzo del curso 1884-1885.

En noviembre de 1885 muere Alfonso XII, dejando como regente a su segunda esposa Mª Cristina. Los líderes Cánovas y Sagasta firman el llamado *Pacto del Pardo* en el que se comprometen a apoyar la regencia, a facilitar el relevo en el gobierno y a no derogar la legislación que cada uno de ellos apruebe en el ejercicio del poder. Este acuerdo será decisivo para garantizar la estabilidad del régimen bajo la larga regencia, ya que ambos lo cumplirán, pero como contrapunto contribuirá a agudizar la corrupción política y a falsear la voluntad popular cada vez más ajena al régimen parlamentario.

Sagasta forma de nuevo gobierno en noviembre de 1885, gobierno que se mantendrá hasta 1890. El llamado Parlamento Largo incluye una amplia legislación en la que el gobierno llevará a cabo una importante reforma del sistema político. Entre los cambios de estos años destaca la libertad de imprenta (ley de julio de 1883), que unida a la libertad de cátedra permitirá un importante florecimiento intelectual en los años siguientes.

En el terreno económico, los años que van de 1876 a 1890 serán de relativa prosperidad económica, debido a la estabilidad política, a la política de librecambio que se impone en toda Europa y por el logro de un cierto equilibrio fiscal y presupuestario. También durante los años ochenta crecerá la producción agrícola gracias a una serie de años de buenas cosechas a los que se unió la crisis vitivinícola francesa por la plaga de la filoxera. Por último, el final de la guerra carlista (1876) y del conflicto abierto en las colonias (1878) también favorecerán esta época de bonanza económica, que será más acentuada en los años que van de 1878 a 1883. Sin embargo a partir de 1890 la situación económica cambia de forma radical, debido entre otras cosas al paso de las políticas de librecambio a otras proteccionistas y a la entrada de la plaga de la filoxera, que arruinará la producción de vinos.

En el terreno político, en los años 90 sigue la alternancia de partidos, sucediéndose gobiernos de dos o tres años. Esta década se caracteriza por el auge del movimiento obrero y la aparición, a finales de siglo, de los primeros movimientos políticos de carácter nacionalista en la periferia peninsular.

Pero sin duda los que marcará el fin de siglo será la reanudación de la guerra de Cuba y Filipinas, que terminará con la pérdida de las últimas colonias de ultramar. El *desastre* tendrá importantes consecuencias económicas, políticas y sociales. Durante los meses que siguen a la derrota surgen una serie de críticas tanto hacia el funcionamiento del sistema político como a la propia mentalidad derrotista y conformista del país. Entre ellas destacan las de los llamados *regeneracionistas*. Los regeneracionistas presentan programas basados en una reorganización política, la limpieza del sistema electoral, la dignificación de la vida parlamentaria, la reforma educativa, la acción orientada hacia la ayuda social, las obras públicas y, en definitiva, una actuación encaminada al bien común y no en beneficio de los intereses políticos de la oligarquía; sin embargo, no querrán formar partidos ni participar en la vida política (Hernández, et. al, 1997). Sin embargo su crítica dejará una profunda huella en el pensamiento político nacional, ya que algunos de los nuevos líderes políticos adoptarán muchas de las ideas regeneracionistas e intentarán aplicarlas.

En marzo de 1899 la presión política desemboca en un voto de censura hacia Sagasta, que en ese momento formaba gobierno, causado por la derrota. Francisco Silvela, nuevo líder conservador, forma un gobierno que presenta un programa regeneracionista, pero tal programa no se llevará a cabo debido por una parte a enfrentamientos dentro de los miembros del gobierno y por otra por la oposición de los grupos oligárquicos que se oponen a la reforma.

En marzo de 1901, Sagasta vuelve a formar gobierno y en mayo de 1902 Alfonso XIII es proclamado Rey al cumplir la mayoría de edad. Un año más tarde, ya retirado del gobierno, muere Sagasta. Con la muerte del viejo líder liberal, el inicio del nuevo reinado y las consecuencias del *desastre*, termina el primer periodo del régimen de la Restauración.

En los primeros años del reinado de Alfonso XIII se desarrollará un proceso lento, pero inexorable, de descomposición política y social, proceso que culminará en 1923 con el golpe de Estado del general Primo de Rivera, cuya Dictadura pondrá fin al sistema político de la Restauración.

Se puede dividir el reinado de Alfonso XIII en diferentes periodos de los cuales únicamente reseñaremos el que va de 1902 a 1909, en que se producen los sucesos de la *Semana Trágica.*

Los primeros años del reinado se caracterizan por las continuas crisis políticas: exceptuando el gobierno *largo* de Maura, en este periodo se contabiliza un gobierno cada cinco meses.

Entre las causas de esta inestabilidad política está la aparición de corrientes dentro de los partidos, la personalidad del nuevo Rey que, a diferencia de sus padres, intervendrá directamente en los asuntos de gobierno y a la práctica electoral vigente, que a pesar de las denuncias de los regeneracionistas y de los tímidos intentos de los gobiernos seguirá siendo la utilizada durante toda la Restauración. La reanudación del turno es inaugurada oficialmente desde el momento en que el monarca –a finales de 1902- relega de sus funciones a Sagasta y encarga a Silvela la formación de un nuevo gobierno. Con todo hay que decir que este método irá perdiendo eficacia a lo largo de los años, lo que contribuirá a la inestabilidad política.

Cuatro son las grandes cuestiones que cristalizarán en el periodo:

En primer lugar la conflictividad social, reflejada en las numerosas huelgas que se llevan a cabo desde los primeros años de siglo; la cristalización del movimiento nacionalista en especial del nacionalismo vasco y del catalanismo; y la reaparición de dos problemas históricos: la cuestión religiosa y el problema militar. En esta época se desarrollará un sentimiento anticlerical que tendrá como origen el importante incremento del clero regular en los primeros años del siglo debido principalmente a la repatriación de frailes y monjas procedentes de las últimas colonias. En cuanto al ejército una de las consecuencias de la pérdida de las últimas colonias de ultramar fue la desmoralización y el aumento del descontento en el seno del ejército al que algunos sectores de la sociedad hacían responsable del desastre.

Todas estas cuestiones tuvieron su máxima expresión en los sucesos de la Semana Trágica de Barcelona en julio de 1909, cuyo detonante fue la llamada de los reservistas para sofocar una revuelta en el norte de Marruecos, territorio que venía siendo ocupado por España desde 1904. La represión que sigue es durísima lo que llevará al monarca a destituir a Antonio Maura, retornando los liberales al gobierno (Hernández, et. al, 1997).

En cuanto al terreno educativo en este periodo nos encontramos con tres planes de estudios para la Facultad de Ciencias: El Plan de estudios de Eduardo Chao (1873), el Plan Lasala de 1880 y el plan de García Alix de 1900, aunque solo los dos últimos llegaron a ser efectivos.

Las ideas de los revolucionarios del 68 no podían dejar de influir sobre la Universidad, pero la actividad legislativa sobre la misma no quedó plasmada en novedades estables. Sí pudo ser importante el plan de estudios de Eduardo Chao en 1873, que fue publicado, pero no llegó a entrar en vigor. No obstante algunas de las ideas recogidas en el mismo fueron plasmadas en planes posteriores.

No corrió la misma suerte la Ley de Bases propuesta por Toreno en 1876, que ni siquiera llegó a aprobarse. Esta Ley daba amplias potestades al ministerio y al Real Consejo de Instrucción Pública, restituido al finalizar el periodo revolucionario, que ejercían un amplio control sobre el profesorado (Peset y Peset, 1992).

Los que sí entraron en vigor fueron el Plan Lasala de 1880 y el Plan de García Alix para la facultad de Ciencias, aprobado en 1900. La llegada al poder de los liberales había supuesto la vuelta de los institucionistas a sus cátedras y se planteó una reforma de la legislación universitaria, pero sin duda no se pudo llevar adelante y los liberales se conformaron con diferentes planes de estudios (Peset y Peset, 1992) que en el caso de la Facultad de Ciencias es el citado de García Alix.

En conclusión, el periodo 1868-1909 es un periodo largo y complejo en la historia de España en el que se produjeron grandes cambios tanto a nivel político como social. Pero a pesar de los cambios hay algo que persiste a lo largo del tiempo, la inestabilidad política y la guerra –guerra carlista, cantonalista o colonial-, hechos que no permitirán a España alcanzar el desarrollo de otras naciones europeas.

A pesar de todo ello, en este periodo se llevarán a cabo intentos por modernizar la Universidad española, aunque la represión de las libertades por parte de algunos de los gobiernos de esta época supusiera un retroceso en ese proceso modernizador.

2.4. Las Matemáticas en España en el siglo XIX

En este apartado estudiaremos el desarrollo de la Matemática en España en el XIX, y en particular el de la Geometría Analítica como disciplina científica.

2.4.1. Antecedentes

Como hemos visto la Geometría Analítica nace y empieza a desarrollarse en el siglo XVII. Este siglo fue especialmente fecundo en el campo de las Matemáticas ya que además de la Geometría Analítica surgen el Cálculo Infinitesimal, la Teoría de Números, el Cálculo de Probabilidades y la Geometría Proyectiva (Rey Pastor y Babini, 1986).

Pero mientras en gran parte de Europa se lleva a cabo este desarrollo de las Matemáticas, en España bajo el reinado de Felipe II, se produce un estancamiento en el terreno científico fruto de la represión política e ideológica iniciada en los años 1557-1559, y que se extenderá hasta finales del siglo XVII. En 1558 una pragmática regula la venta de libros extranjeros en territorio nacional y en 1559 se prohíbe la realización de estudios en el extranjero, lo que dejará a España totalmente aislada de la producción científica internacional. Además la Inquisición publica un índice de libros prohibidos que no hará sino aumentar durante todo el siglo.

Prácticamente sólo los jesuitas hacían ciencia, así casi toda la producción matemática de la época se debe a ellos. Gracias a los jesuitas y a un movimiento científico renovador denominado *novator,* España empieza a salir, a finales de siglo, del retraso científico en que se hallaba.

Así el primer texto español sobre la Geometría Analítica de Descartes es *Elementos de Matemáticas* (1706) del jesuita Pedro de Ulloa. Anterior a esta obra es *Análisis geométrica* de Omerique (1634-1698), en la que trata la Geometría Analítica de manera muy distinta a Descartes o Fermat, a pesar de lo cual mereció los elogios de Newton (Peralta,1999).

Durante el siglo XVIII la situación sigue mejorando, la llegada de los Borbones al poder y la influencia de los ilustrados harán que en España se lleve a cabo una promoción de la actividad científica y técnica, especialmente bajo el reinado de Carlos III. Desde principios de siglo se luchará contra el aislamiento que sufre el país desde el XVII, así en vez de prohibir los estudios en el extranjero como se había venido haciendo, se concederán becas para estudiar fuera de España, y se contratarán científicos y técnicos extranjeros.

También en este siglo se hace patente la necesidad de una reforma de las Universidades, y aunque se llevarán a cabo varios intentos estos serán insuficientes y la situación de las Universidades españolas al final de la centuria seguirá siendo muy precaria.

Se crean en este siglo otras instituciones dedicadas a la enseñanza y en las que el estudio de las ciencias alcanzó un gran nivel. Tales fueron el Seminario de Nobles de Madrid (1725), que dependía de la Corona, pero estaba regentado por los jesuitas; los Reales Estudios de San Isidro (1770), establecidos por Carlos III cuando los jesuitas fueron expulsados (1767); las Sociedades Económicas de Amigos del País, que se crearon a partir de 1776 por el empuje de los ilustrados para dar formación a los artesanos; el Seminario Vergara (1776) fundado por la Real Sociedad Vascongada de Amigos del País o el Real Instituto Asturiano de Gijón (1794) fundado por iniciativa de Jovellanos.

Además de todas estas instituciones se crearán, al igual que en toda Europa, las Academias, centros destinados a la investigación, ya que la labor de la Universidad se limitaba a la enseñanza.

La producción matemática en esta época es muy extensa, siendo sus principales protagonistas los jesuitas y los militares, en cuyas Academias también hubo un gran nivel en los estudios científicos y técnicos.

En el terreno didáctico destaca la obra de Benito Bails *Elementos de Matemática* (1775-1781), importante tanto por su extensión, consta de diez volúmenes, como por su contenido. Bails sintetizó sus *Elementos* en una obra en tres volúmenes titulada *Principios de Matemática* (1776) que "se convirtió en consulta obligada para los estudiosos de las Matemáticas en el último cuarto del siglo XVIII y sirvió de texto en numerosos establecimientos educativos" (Vea, 1995. p.151). Entre ellos se encuentran los Reales Estudios de San Isidro, la Escuela de Matemáticas de la Real Sociedad Económica Aragonesa de Amigos del País, el Real Instituto Asturiano de Gijón o en la Universidad (Vea,1995).

Estos centros son considerados por algunos autores como el punto de partida histórico de la segunda enseñanza en España (Vea, 1995, p. 112.), ya que representan un nuevo tipo de enseñanza dentro del sistema educativo preparatoria para los estudios universitarios. Vemos, pues, que en el último tercio del siglo XVIII la Geometría Analítica formaba parte de los estudios de gran parte de unos centros educativos que impartían enseñanzas no universitarias, y que pueden considerarse como el germen de la segunda enseñanza.

Pero los progresos hechos en estos años no tendrán continuidad en el comienzo del nuevo siglo, como veremos a continuación.

2.4.2. El siglo XIX

Si hay algo que caracterice al siglo XIX, en lo que se refiere al campo de las Matemáticas, es sin duda la fecundidad. A este siglo pertenecen matemáticos tan eminentes y prolíficos como Cauchy, Lobachevsky, Gauss, Abel, Galois, Weierstrass, Riemann, Cantor o Sonia Kovalevskaja, cuyas contribuciones a las Matemáticas son de sobra conocidas. Sin embargo de entre toda esta producción prácticamente no hay nada reseñable de autoría española.

Los avances conseguidos en España en el estudio de las ciencias –en particular las Matemáticas- durante el siglo XVIII se paralizan al comienzo de la nueva centuria, en primer lugar por la guerra de la Independencia y posteriormente por el clima de inestabilidad política y las sucesivas guerras presentes durante todo el siglo XIX.

Aunque en la primera mitad de siglo se llevará a cabo cierta obra en el campo de las Matemáticas, no será hasta mediados de siglo cuando se inicie la recuperación.

De la primera década cabe destacar la publicación de las *Instituciones de Cálculo diferencial e integral* (1801) de José Chaix (1766-1801) y la traducción de la Geometría Descriptiva de Monge de 1803, de autor desconocido.

Pero la figura más importante de estos años es sin duda José Mariano Vallejo (1779-1846), matemático granadino que realizó estudios en el extranjero con algunos de los científicos más importantes de la época como Gay Lussac, Cauchy o Laplace. Entre sus obras destacan las *Adiciones a la Geometría de Benito Bails* (1806), su *Memoria sobre curvas* (1807) y sobre todo su *Tratado elemental de matemáticas* (1813) que resumió en el *Compendio de matemáticas puras y mixtas* (1819). Estas dos últimas obras fueron reeditadas varias veces a lo largo de la primera mitad del siglo ya que fueron muy utilizadas en la Universidad, Colegios, Seminarios y posteriormente en la segunda enseñanza (García, 1984).

Sin embargo el impulso modernizador en el campo de las matemáticas en los primeros dos tercios del siglo XIX viene de parte del ejército. Eso es natural si tenemos en cuenta que la mayor producción matemática del siglo anterior se debe los jesuitas y los militares. La labor de los jesuitas se interrumpió al ser expulsados, pero la de los militares se vio potenciada gracias a la transformación que sufrió el Ejército en el periodo napoleónico y a la influencia de la Escuela Politécnica de París en la formación de los oficiales de Ingenieros y Artillería.

Entre los libros de texto realizados por ingenieros militares podemos destacar la *Geometría* (1819) de Mariano Zorraquín y los textos de Fernando García de San Pedro (1796-1854), entre los que figuran *Principios de Geometría Analítica Elemental*, en donde vincula la Geometría Analítica con el Cálculo Diferencial; Antonio Torner Carbó (1825-1833), quien escribe uno de los mejores libros españoles sobre Cálculo Integral (Peralta, 2008) y Miguel Ortega y Sala (1848-1912).

Una mención aparte merece Juan Cortázar (1809-1873), ingeniero por París y licenciado en Ciencias por Madrid, catedrático de Álgebra Superior y Geometría Analítica, autor de diversos *Tratados* (Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría…) que también gozaron de gran prestigio y de los que llegaron a publicarse medio millón de ejemplares repartidos en 150 ediciones, a pesar de su nivel elemental (Escribano, 2000, p. 299).

También la Armada contribuyó al proceso de actualización científica, en particular el grupo que formó parte del Observatorio de San Fernando de Cádiz, que publicó en 1848 la primera revista de Matemáticas y Física en español: el *Periódico Mensual de Matemáticas y Física*. Esta revista tuvo una vida efímera, seis meses, por insuficiencia de suscriptores pero marcó un hito en la historia del periodismo científico español y puso de relieve lo que diversos autores han apuntado: que matemáticas y ejército estuvieron fuertemente vinculados en España durante una buena parte del ochocientos, más si tenemos en cuenta que la mayor parte de sus escasos suscriptores eran instituciones o personas de índole militar (Sánchez, 1992).

En relación a la enseñanza de las Matemáticas en esta primera mitad de siglo podemos decir que con la aprobación del Plan General de Instrucción Pública de 1836 (Plan del Duque de Rivas) comienzan las primeras reformas en la enseñanza superior. En estos años se inicia la andadura de la enseñanza secundaria, y se crean las primeras Escuelas de Ingenieros, quienes harían importantes aportaciones al desarrollo de las Matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX. Además en 1847 se funda la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Señalar que prácticamente todos sus académicos eran militares o ingenieros civiles, lo que deja patente dos cosas: por un lado que la matemática era solo considerada como un instrumento a aplicarse en actividades de una práctica inmediata (García, 1984), y por otra parte la gran influencia que ejercieron tanto unos como otros en el desarrollo de las Matemáticas y en su enseñanza durante el siglo, como ya hemos señalado.

Todo esto hace que durante la segunda mitad del siglo la situación científica mejore. En 1857 se aprueba la Ley de Instrucción Pública, conocida como Ley Moyano, en la que se establece la creación de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales y la Facultad de Filosofía y Letras, a partir de la antigua Facultad de Filosofía. En estos primeros años estas Facultades no tiene la misma consideración que las tradicionales Facultades Mayores, ya que los estudios que en ellas se realizan se consideran como preparatorios para otros estudios, o para la carrera de profesor, tal como se expone en el Reglamento del Marqués de Corvera (1858), que desarrolla la Ley Moyano.

Pasará bastante tiempo hasta que las ciencias sean consideradas por sí mismas, sin tener en cuenta su utilidad para otros estudios. Pero este cambio de concepción no será fácil ya que en esa época los poderes públicos se muestran reticentes a impulsar la enseñanza e investigación de las ciencias independientemente de sus aplicaciones. Sin embargo a partir de los años sesenta tanto científicos como ingenieros –entre los que destaca Echegaray- mostrarán su apoyo hacia los estudios teóricos, y desde 1873 se comienza a cambiar el modelo de universidad en España del estilo napoleónico –cuyo principal objetivo era la formación de profesionales- al estilo alemán, donde se da gran importancia a las ciencias básicas y cuya finalidad principal es la investigación (Peralta, 1999).

Todo ello, junto con la libertad ideológica existente en el sexenio y la calma política de la Restauración, posibilitará el crecimiento del número de profesionales dedicados al estudio de las Matemáticas. Así, a los ingenieros militares, que continuarán con su labor en esta época, hay que añadir los ingenieros civiles y los profesores de enseñanza media y de Universidad. La labor de estos grupos se concentrará principalmente en importar los desarrollos matemáticos que se habían ido creando a lo largo del siglo fuera de nuestras fronteras para poder poner al país al nivel de otros países europeos. La cantidad de información que se recibió fue muchísima y en ocasiones no se supo elegir correctamente el campo de trabajo, por lo que hubo matemáticos trabajando en ramas de las Matemáticas que se habían abandonado en Europa hacía tiempo. Aún así la labor realizada fue muy importante.

Cabe destacar cuatro figuras en este siglo: José Echegaray (1832-1916), Zoel García de Galdeano (1846-1924), Eduardo Torroja y Caballé (1847-1918) y Ventura Reyes y Prósper (1863-1922).

Del primero dice Rey Pastor en el discurso de inauguración del V Congreso de la Asociación para el Progreso de las Ciencias de Valladolid (Rey Pastor, 1915, p. 9) "Este hombre extraordinario que inicia en España el tránsito de la Matemática del siglo XVIII a la de Gauss y Cauchy (…)", y añade "Para la matemática española, el siglo XIX comienza en 1865, y comienza con Echegaray". José Echegaray introdujo en 1867 la Geometría Superior de Chasles (publicada en 1852) pero también lo hizo con el Cálculo de variaciones, los Determinantes, la Teoría de Galois y las Funciones elípticas y abelianas (Peralta, 2008, p. 224)

En cuanto a Zoel García de Galdeano llevó a cabo una enorme labor de importación de conocimientos de otros países, introduciendo teorías de diversos campos de las Matemáticas, con el fin de modernizar la matemática de nuestro país. Esta labor quedó plasmada en sus más de doscientos trabajos entre libros, artículos, recesiones e informes

(Hormigón, 1991). Además fundó, en 1891, la primera revista española de Matemáticas: *El Progreso Matemático*, que se publicó en dos periodos 1891-1896 y 1899-1900.

Eduardo Torroja se convertiría en los últimos años del siglo XIX y principios del XX en la figura más influyente políticamente de la comunidad matemática española, siendo en la última década del siglo Consejero de Instrucción pública. Catedrático de la Universidad Central y académico de Ciencias, su actividad científica se centró fundamentalmente en el área de la Geometría, con la introducción de la Geometría Sintética y la Geometría Proyectiva de Staud (que data de los años cincuenta) en 1899. Debido a su influencia tanto política como científica, la Geometría y en particular estas últimas tendrán un papel protagonista en los planes de estudios de la facultad de ciencias de finales de siglo, especialmente en el de 1900, aunque en Europa se habían impuesto ya los métodos analíticos (Hormigón, 1983; Etayo, 1992).

Formó a su alrededor una auténtica escuela con discípulos como Vegas, Jiménez Rueda o Rey Pastor (Peralta, 2008).

Por último nos fijaremos en la figura de Ventura Reyes y Prósper. Personaje polifacético, catedrático de Instituto de Matemáticas, Física y Química y Ciencias Naturales, se dedicó al cultivo de todas las ciencias, así lo mismo hace una clasificación de aves exóticas de España y Portugal, que escribe sobre moluscos o Arqueología, perteneciendo a distintos organismos científicos internacionales. Pero destaca especialmente en matemáticas, en las que realiza de modo individual trabajos de investigación, así introduce en nuestro país las geometrías no euclídeas y la Lógica simbólica –cuyas primeras ideas habían sido dadas a conocer por José Rey y Heredia-, y es el único español que en el siglo XIX publica en revistas internacionales de calidad.

En el caso que nos ocupa destacan los trabajos *Sur la géométrie non-Euclidienne* y *Sur les propriétés graphiques des figures centriques* publicados en *Mathematische Annalen* en 1887 y 1888, respectivamente. En el primero se trata de demostrar, en relación con el teorema fundamental de Staud, que el cuarto punto de una cuaterna armónica depende exclusivamente de los otros tres, independientemente de toda hipótesis sobre la teoría de las paralelas. Este resultado ya había sido demostrado por Klein, pero la demostración de Reyes es mucho más simple y “ciertamente bella” en palabras de Etayo (1992, p. 134). El segundo se trata de una demostración “extremadamente sencilla y elegante” del teorema de Desargues aplicado a triedros homológicos del mismo vértice (Etayo, 1992, p. 134).

Entre otros científicos que contribuyeron a mejorar el nivel matemático de nuestro país podemos citar a S. Archilla que introdujo en España el análisis de Cauchy; Juan Jacobo Durán Loriga, que realizó trabajos sobre la Geometría del Triángulo y Eulogio Giménez, profesor de la Institución Libre de Enseñanza que trabajó en la Geometría de Steiner y en Teoría de Números.

Como hemos visto, tanto la Geometría Analítica clásica como la Proyectiva en sus vertientes sintética y analítica, son introducidas en nuestro país con varios años de retraso, incluso décadas, después de su publicación, lo que hizo que el país fuera siempre rezagado en el tema científico con respecto a otros países. Este retraso se verá reflejado en los planes de estudios de secundaria y la Facultad de Ciencias, y en los textos utilizados durante el siglo en el estudio de la Geometría Analítica, como veremos en este estudio.

Tras la derrota militar de 1898, que supuso la pérdida de las últimas colonias de ultramar se inicia un proceso de regeneración en España a todos los niveles. Esto repercutirá favorablemente en el desarrollo científico y en particular en el de las Matemáticas.

En 1900 se aprueba un nuevo plan de estudios para las Facultades de Ciencias Exactas (Plan García Alix). Este plan, que estudiaremos con más detalle más adelante ocupará buena parte del primer tercio del siglo XX y es equiparable ya al de otras naciones europeas.

2.5. La Geometría Analítica en la Educación Secundaria y en la Facultad de Ciencias en España en el siglo XIX.

A continuación estudiaremos el desarrollo de la educación secundaria y de la Facultad de Ciencias en España en el siglo XIX, por ser los niveles educativos en los que centramos nuestro estudio. También estudiaremos en este apartado la Geometría Analítica desde el punto de vista curricular, viendo el tratamiento que se hace de ella en los diferentes planes de estudios.

Para ello hemos analizado todos y cada uno de los planes de estudios de secundaria y/o la Facultad de Ciencias vigentes en nuestro país desde 1836 hasta 1909. Para cada uno de ellos incluimos una tabla en la que se recogen las principales características del plan: Fecha de aprobación y publicación, gobernantes en el momento de la publicación, objetivos del plan, estructura del mismo con las asignaturas que comprende y su carga horaria, el nivel que es necesario para acceder a esos estudios, las listas de libros de texto publicadas por el gobierno si las hubiera y el curso y/o asignatura en los que aparecen contenidos de Geometría Analítica.

Dividiremos el siglo XIX en cuatro periodos, dos de ellos pertenecientes al desarrollo de la educación secundaria y los dos últimos a la Facultad de Ciencias, que es donde pasa a estudiarse la Geometría Analítica a partir de su creación en 1857. En el caso de la educación secundaria utilizaremos los periodos propuestos por Vea (1995): Nacimiento de la segunda enseñanza (1836-1845) y Asentamiento de la segunda enseñanza (1845-1857). En el caso de la Facultad de Ciencias el primer periodo va desde la creación de la misma con la Ley Moyano hasta el Sexenio Revolucionario (1857-1868), y el segundo desde este último hasta los primeros años del siglo XX (1868-1909).

2.5.1. Los orígenes de la Educación Secundaria en España

La segunda enseñanza, hoy denominada enseñanza secundaria nace como tal en el segundo tercio del siglo XIX. Concretamente el primer plan de estudios específico de educación secundaria es de 1836. Sin embargo, y aunque históricamente existían ya unos estudios intermedios entre la escuela de primeras letras y la Universidad, puede considerarse el siglo XVIII como punto de arranque de esta etapa educativa (Vea, 1995).

La creación de una serie de centros, como el Seminario de Nobles (1725), los Reales Estudios de San Isidro (1770), el Seminario Vergara (1776), el Real Instituto Asturiano de Gijón (1794) o las Sociedades Económicas de Amigos del País, permitirá un nuevo tipo de enseñanza dentro del sistema educativo español, que amplía los estudios de primeras letras y prepara para las Facultades Mayores. Además, años después estos estudios serán reconocidos como válidos para la obtención del grado de Bachiller mediante la Real Cédula de 25 de octubre de 1787 (Utande, 1964. pp. 3-4), con lo que podemos considerarlos en los orígenes de la segunda enseñanza.

Vea (1995) considera el comienzo de los antecedentes históricos de la segunda enseñanza en el plan de estudios de la Universidad de Salamanca de 1771. En este plan de estudios aparecen regulados los *Estudios de Latinidad y de Gramática* y *La Facultad de Artes y Filosofía,* conducentes a la obtención del grado de Bachiller en Artes, aunque la necesidad de realizar todos estos estudios y de estar en posesión del título de Bachiller en Artes para acceder a las Facultades Mayores no está muy clara en el texto, según señala Vea. En la práctica los conocimientos exigidos para acceder a las Facultades mayores debían ser mínimos como pondrá de relieve más tarde el *Informe Quintana* (1814).

La Facultad de Filosofía estará muy vinculada a la segunda enseñanza hasta mediados del siglo XIX, y aunque en el plan de estudios de 8 de julio de 1847 esta facultad aparecerá ya como una más, independiente de la segunda enseñanza, la vinculación entre ambas seguirá existiendo hasta la Ley General de Educación promulgada en 1857.

El intento de regulación de estos estudios intermedios, así como la creación de los centros educativos citados al comienzo ponen de relieve la necesidad de una etapa formativa intermedia entre la escuela de primeras letras y los estudios universitarios. Ante el problema existente, algunos personajes interesados en la educación -como Jovellanos y Quintana- expondrán sus ideas para el establecimiento y desarrollo de la nueva etapa (Vea, 1995).

El 12 de julio de 1807 se publica una Real Cédula "por la qual se reduce el número de las Universidades literarias del Reyno; se agregan las suprimidas á las que quedan, según su localidad; y se manda observar en ellas el plan de Estudios aprobado para la de Salamanca, en la forma que se expresa" (cit. Utande, 1964, p.5). Este plan de estudios, conocido como Plan Caballero, está elaborado directamente por el poder central sin mediar la propuesta de ningún claustro universitario, lo que hará posible el establecimiento de un sistema educativo uniforme en todas las Universidades. En él se desarrollan los planes de estudios de las enseñanzas que se van a cursar en la Universidad: en primer lugar el *Plan de Gramática latina,* después el *Plan de lenguas* y los estudios de la *Facultad de Filosofía*, entre los que se incluye la *Aplicación de la Álgebra á la Geometría* (Utande, 1964), y por último los planes de estudios para las *Facultades Mayores*: Medicina, Leyes, Cánones y Teología.

El siguiente paso se dará en 1812 con la aprobación de la Constitución. Su título IX se dedica exclusivamente a la instrucción pública, y aunque respeta la estructura educativa existente en ese momento – sólo recoge la enseñanza primaria y la universitaria- incluye importantes ideas renovadoras en el campo educativo, entre ellas destacan la defensa de la universalidad de la educación primaria, la uniformidad del sistema educativo para todo el Estado, y que son Las Cortes y no el Gobierno quienes tienen las competencias de educación.

Con objeto de elaborar una ley de instrucción pública que amplíe y desarrolle los principios constitucionales Manuel José Quintana elabora en 1813 el *Informe de la Junta creada por la Regencia para proponer los medios de proceder al arreglo de los diversos ramos de instrucción pública*, más conocido como *Informe Quintana.*

En él aparecen ya tres niveles educativos: junto con los tradicionales estudios de primeras letras y universitarios aparece la segunda enseñanza como un nivel educativo con entidad propia. En el informe se hace una amplia exposición de objetivos y contenidos de este nivel dotándole de una doble finalidad de etapa formativa a la vez que preparatoria para los niveles superiores.

Según Vea (1995, p. 116) "el *Informe* enfoca el aspecto formativo de la segunda enseñanza hacia las asignaturas de implantación más moderna, que habían sufrido la indiferencia y el desprecio académico, social y político en los tiempos precedentes", y en la presentación de las asignaturas científicas señala la necesidad de que la segunda enseñanza contenga también una formación útil para la práctica de algunas profesiones. En cuanto a los centros en que debe impartirse este nivel de enseñanza, en el informe se establece la creación de unos nuevos centros a los que denomina *universidades de provincia.*

Por último señalar el fuerte contenido ideológico del *Informe* en el que se defiende que la instrucción debe ser igual, universal, uniforme, pública y libre, según corresponde a las ideas liberales. Esta carga ideológica se transmitirá a la segunda enseñanza -de la que no se desprenderá a lo largo de todo el siglo XIX- cuando al desarrollar algunas asignaturas, como Ética, fija la necesidad de la formación de ciudadanos en los principios del liberalismo (Vea, 1995).

Estas ideas quedarán plasmadas en gran medida en el **Reglamento General de Instrucción Pública aprobado por Decreto de las Cortes el 29 de Junio de 1821**. Este reglamento dedica su título tercero a la segunda enseñanza, y en el artículo 21 fija la finalidad de este nivel educativo, señalando de nuevo la doble finalidad preparatoria y formativa. El reglamento también denomina *Universidades de provincia* a los centros donde debe impartirse la segunda enseñanza y en el artículo 24 se establecen las cátedras que forman parte de ellas, pudiéndose observar que disminuye el peso de las asignaturas tradicionalmente consideradas de humanidades a favor de las asignaturas de ciencias y de asignaturas de creación más moderna (Vea, 1995).

En los títulos IV y V, dedicados a los estudios universitarios también se hace mención a la segunda enseñanza, estableciendo la obligatoriedad de aprobar en las *Universidades de provincia* algunos de los cursos correspondientes al currículo de la segunda enseñanza para poder acceder a los estudios universitarios. Este hecho "es de especial trascendencia –y supone un espaldarazo fundamental en la implantación de la nueva etapa educativa- por la importancia académica concedida a los estudios de segunda enseñanza" (Vea, 1995, p. 118).

Pero en 1823 se restablece el poder absoluto de Fernando VII y se deroga el Reglamento General de Instrucción Pública de 1821, promulgándose –bajo el ministerio de Calomarde- el *Plan literario de estudios y arreglo general de las universidades del Reino* (1824) y el *Reglamento general de las escuelas de latinidad y colegios de humanidades* (1826), entre otros.

En estas disposiciones se contemplan las tres etapas educativas implantadas en el reglamento de 1821, pero se entremezclan dichas etapas. Así en los Colegios de Humanidades se pueden impartir desde las primeras letras a materias propias de la Facultad de Filosofía, pasando por los contenidos de las Escuelas de Latinidad; y en las Universidades se puede comenzar desde el estudio de Latín, es decir se puede cursar todo menos la primera enseñanza (Vea, 1995).

En 1833 muere Fernando VII y comienza la regencia de Mª Cristina, y con ella el desarrollo del liberalismo. En 1835 se publica la Real orden de 23 de junio de 1835 por la que se suprimen los estudios de *filosofía* en los centros religiosos, y de 4 de julio de 1835 es el Real Decreto en el que se procede a una nueva expulsión de los jesuitas –que habían retornado por Real Decreto de 29 de mayo de 1815. Ambas órdenes tendrán importantes consecuencias sobre el sistema educativo, ya que como señala Vea (p. 120), "dejan a la enseñanza, al menos la privada que tenía una amplia implantación, de la filosofía en precario; ya que no se propone una alternativa a la supresión de estos centros".

En 1836 se aprueba el Plan General de Instrucción Pública -más conocido como Plan del Duque de Rivas-, que a pesar de su escasa vigencia –se aprobó en agosto de 1836 y se derogó en octubre de ese mismo año- es un hito importante en el establecimiento de la enseñanza secundaria y se considera el punto de arranque del establecimiento de los Institutos de segunda enseñanza (Vea, 1995).

2.5.2. El nacimiento de la segunda enseñanza (1836-1845)

En este periodo se aprobaros tres planes de estudios correspondientes a este nivel educativo y dos leyes se quedaron en proyecto. Aun así, a pesar de que sobre el papel el nuevo nivel educativo era una realidad, el número de institutos en el país era escaso, y el cambio de planes en tan corto espacio de tiempo dificultó la implantación del mismo.

El primer plan de estudios fue el ya mencionado **Plan General de Instrucción pública de 4 de agosto de 1836** (Gaceta de Madrid de 9 de agosto), elaborado por el Duque de Rivas. Este plan estuvo apenas tres meses en vigor ya que fue sustituido por el Arreglo provisional de 29 de octubre de 1836.

El plan del Duque de Rivas comienza presentando en su preámbulo la mala situación del sistema educativo, en particular del público y la importancia que para un sistema liberal como el que se está implantando en el país tiene una buena instrucción, así afirma que:

> (...) si en todos los tiempos es necesario atender a tan interesante objeto [la instrucción], ahora se hace mayor entre nosotros esta necesidad, por cuanto hemos entrado en un régimen de libertad. Los progresos políticos están íntimamente relacionados con los progresos de la ilustración. En vano pretenderemos ser libres si no somos instruidos (...) (Exposición).

A lo largo del prólogo insiste en los principios liberales en los que se basa el plan, y siguiendo estos principios proclama la necesidad de la emancipación de la educación y de impulsar la libertad de enseñanza. Pero esto no implica el dejar la educación en manos privadas, al contrario, defiende la enseñanza pública o una combinación de ambas pues:

> (…) la enseñanza privada solo es susceptible de aplicarse á aquellas ciencias que, menos elevadas, son de una comprensión menos difícil y de un uso mas general. Las ciencias sublimes, las que tienen un carácter puramente especulativo, ó exigen gastos y adelantos cuantiosos, y acaso pérdidas considerables, necesitan que el Gobierno las acoja bajo su protección (Exposición).

Otro tema que se trata en el preámbulo, y posteriormente en el articulado, es el de la gratuidad de la enseñanza primaria, defendiendo que esta debe llegar a todos los ciudadanos "sin distinción de clase ni fortuna", sin embargo justifica la no gratuidad de la secundaria por ser una enseñanza enfocada a la clase media, pues las clases populares –se dice en el preámbulo- no pueden acceder a un nivel superior al elemental ya que para ello se necesita una formación moral de la que ellos carecen por el ambiente en el que se han educado en su infancia. Sin embargo en los artículos 92 y 93 se considera la posibilidad de la exención de la matrícula para los alumnos más pobres como premio de conducta, de aplicación y de aprovechamiento en los estudios de Institutos elementales.

La idea de una educación secundaria dirigida a una clase social muy determinada –la clase media- también la plasma en el prólogo cuando habla de "la naturaleza de la instrucción que debe suministrarse". Al tratar este tema afirma que "la instrucción debe ser acomodada a las necesidades de la sociedad" y asegura que los problemas de la instrucción en España vienen precisamente de que esto no se ha tenido en cuenta, "permaneciendo [los estudios públicos] como los habían creado las necesidades de hace cuatro o cinco siglos" (Exposición). Defiende que la sociedad exige que se tengan en cuenta nuevas carreras y nuevos estudios, sobre todo "ciertos ramos de instrucción comunes a la clase media, á esta clase que antes no existía, y ahora tiene tanta influencia en los destinos de las naciones" (Exposición), y vuelve a insistir en este punto al exponer los fines de cada uno de los niveles de instrucción:

> La primera es aquella de que ningún español debe carecer; la segunda comprende aquellos estudios que son necesarios para completar la educacion general de las clases acomodadas, y emprender con fruto el que conduce al ejercicio de las diferentes profesiones; en fin, la tercera enseñanza abarca las facultades mayores y escuelas especiales, con todos los estudios que sirven para completar la suma de los conocimientos humanos (Exposición).

Y también en el articulado cuando expone los objetivos de este nivel educativo:

> Art. 25. La instrucción secundaria comprende aquellos estudios a que no alcanza la primaria superior, pero que son necesarios para completar la educación general de las clases acomodadas y seguir con fruto las Facultades mayores y Escuelas especiales.

Como vemos, se apuesta por una enseñanza clasista, con unos contenidos amplios y generales que preparen convenientemente a las clases medias acomodadas para ocupar su puesto en el nuevo estado liberal.

Todas estas ideas son desarrolladas en el articulado (Utande, 1964, pp.17-35), que comienza dividiendo, como hemos visto, el sistema educativo en tres niveles: instrucción primaria, instrucción secundaria y tercera enseñanza.

La instrucción secundaria la desarrolla en el título II, que comienza exponiendo los objetivos de este nivel educativo, en el artículo 25, citado anteriormente. En él se da a la educación secundaria una doble finalidad, por un lado la de dar una formación general y por otro la de servir como estudios preparatorios para los niveles superiores. Para alcanzar esta doble finalidad divide la instrucción secundaria en elemental y superior (art. 27).

Las asignaturas que deben cursarse en la instrucción secundaria elemental –que se dará en establecimientos públicos que llevarán el nombre de *institutos elementales* (art. 29)- aparecen en el artículo 28, pero en él no se hace ningún tipo de especificación acerca, por ejemplo, de los años en que deben cursarse o en el orden en esto debe hacerse. En el artículo 32 se regulan las asignaturas que deben cursarse en la instrucción secundaria superior, estudios que se darán en establecimientos públicos denominados *Institutos superiores* (art. 33) (ver **Tabla 1**).

En ambos niveles aparecen las Matemáticas, pero no se especifican los contenidos que deben estudiarse dentro de esta asignatura.

En el artículo 38 se establece que para acceder al Instituto superior, el interesado se someterá a un "examen severo" sobre las asignaturas obligatorias del Instituto elemental.

En cuanto a los títulos obtenidos al finalizar estos estudios a pesar de no establecerse distintas ramas en la educación secundaria, a la hora de establecer las titulaciones sí se hace esta distinción. Así en la sección tercera, en la que se regula este punto, se fija que solo se podrán conferir grados académicos en los Institutos superiores o en las Facultades Mayores (art. 96). Estos grados son los de Bachiller, Licenciado, y Doctor en Ciencias y en Letras y en Facultad mayor (art. 97).

Plan del Duque de Rivas
Plan de estudios de 4 de agosto de 1836 **Gaceta de Madrid** de 9 de agosto de 1836
Regente: Mª Cristina **Presidente del gobierno**: José Mª Calatrava **Ministro de Gobernación**: Duque de Rivas
Objetivos /Finalidades: Art. 25. La instrucción secundaria comprende aquellos estudios a que no alcanza la primaria superior, pero que son necesarios para completar la educación general de las clases acomodadas y seguir con fruto las Facultades mayores y Escuelas especiales.
Estructura del plan de estudios
Asignaturas Instrucción secundaria elemental (art. 28) Gramática española y la tina Leguas vivas más usuales Elementos de: Matemáticas Geografía, Cronología e Historia, especialmente la nacional. Historia natural. Física y Química. Mecánica y Astronomía física. Literatura, principalmente la española. Ideología. Religión, de moral y de política. Dibujo natural y lineal. Instrucción secundaria superior (art 32) Comprenderá las mismas materias que la elemental, pero con mayor extensión, además la economía, política, Derecho natural, Administración y cuantas preparan de un modo especial para las Facultades Mayores. En estos establecimientos se enseñará el Griego, Árabe y Hebreo, según fuese más conveniente.
Nivel de ingreso: Instrucción secundaria elemental – desde la primaria. Instrucción secundaria superior – desde la secundaria elemental tras un examen (art.38).
Libros de texto: Art. 85. Los profesores no tienen obligación de seguir ningún texto, ni podrán imponerlo a sus alumnos.
GEOMETRÍA ANALÍTICA: No aparecen específicamente en el plan contenidos de Geometría Analítica

Tabla 1: Plan del Duque de Rivas

Además en el título III, dedicado a la tercera enseñanza se especifica qué grado –Bachiller en Ciencias o en Letras- es necesario para poder acceder a cada una de las Facultades mayores y en las Escuelas especiales.

Por último señalar que en el artículo 84 se especifica que en los Institutos superiores y Facultades mayores los profesores no tienen obligación de seguir ningún texto, ni se lo podrán imponer a sus alumnos. Por ello al principio de cada curso presentarán a la aprobación del claustro la programación de su asignatura que se "fijará a la puerta de las aulas respectivas". Además para que los profesores tengan derecho a un sobresueldo deberán haber publicado alguna obra o tratado sobre la signatura de su cátedra (art. 87). Todo esto favoreció la disparidad de contenidos en segunda enseñanza y la publicación de libros de escasa calidad (Vea, 1995).

Pero el plan no llegó a llevarse a efecto pues el 12 de agosto de 1836 se produce el motín de la Granja, lo que provocó el cambio del gobierno moderado por otro progresista. En circular del Ministerio de Gobernación de fecha 4 de septiembre de 1836 se suspende su ejecución y en el mes de octubre se aprueba una nueva normativa, que aunque nace con carácter de provisionalidad estará en vigor durante una década.

A la **Real Orden de 29 de Octubre de 1836** (G.M de 6 de noviembre) en la que se aprueba **el arreglo provisional de estudios**, la precede el Real Decreto de 8 de octubre de 1836destinado fundamentalmente al restablecimiento de la Dirección General de Estudios, suprimida y sustituida por el Real Consejo de Instrucción Pública por el plan del Duque de Rivas (Vea, 1995). Una vez restituida recibe el encargo de elaborar un plan de estudios provisional para el curso 1836-1837 que verá la luz el 29 de octubre, como ya hemos dicho.

El arreglo comienza con una amplia exposición en la que se explican las dificultades para poner en marcha un plan general de enseñanza: falta de tiempo, escasez de recursos materiales, y pocos profesores. Por ello se opta por la reforma de los dos niveles, secundario y superior, que requieren más pronta reestructuración. En particular, en relación a la segunda enseñanza dice:

> La secundaria que se daba en las universidades y en los colegios agregados á ellas con el nombre de filosofía, se hallaba en el estado mas deplorable: desacertada elección y distribución de materias; vicioso método; libros de texto latinos, atrasados en conocimientos, impropios de este siglo; escasez de maestros; falta de instrumentos y toda especie de medios necesarios para dar á los jóvenes una instrucción correspondiente. Con estos elementos ¿qué progresos podrían hacer los alumnos, ni que preparación científica pudieran llevar á las clases de la enseñanza superior? (Exposición).

A pesar de ser un plan llevado a cabo por los progresistas, el arreglo no supone una ruptura frente a la situación anterior –el plan fernandino de 1824- hecho que Vea (1995) achaca más a la imposibilidad material que a los deseos de los promotores. Así, solamente se llevan a cabo modificaciones respecto de las asignaturas que componen el currículum, incorporando algunos estudios y suprimiendo otros. Las ciencias van a ser las grandes beneficiadas en el cambio y la Metafísica la peor parada, pues desaparece.

Los estudios de segunda enseñanza los desarrolla en la sección primera. En el artículo 1 fija su duración en tres años. La distribución de materias por cursos se hace en los artículos 3 a 5, y llama la atención la no inclusión del Latín como asignatura de segunda enseñanza. Además de las asignaturas obligatorias aparecen las lenguas vivas y el Dibujo natural como optativas, pero en el caso de querer cursarlas el alumno debe pagarlas aparte (ver **Tabla 2**).

Arreglo provisional de 29 de octubre de 1836			
Real Orden de 29 de Octubre de 1836, en la que se aprueba el arreglo provisional de estudios **Gaceta de Madrid de** 6 de noviembre de 1836			
Regente: Mª Cristina **Presidente del gobierno:** José Mª Calatrava **Ministro de Gobernación:** Joaquín Mª López			
Estructura del plan de estudios			
Asignaturas	**Clases semanales por curso**		
	1º	**2º**	**3º**
Elementos de matemáticas	6		
Lógica y principios de Gramática general	6		
Geometría aplicada al Dibujo lineal	3		
Continuación de los elementos de Matemáticas		6	
Física experimental, con algunas nociones de Química		6	
Geografía matemática y física		3	
Filosofía moral y fundamentos de religión			6
Historia, particularmente de España			3
Principios generales de Literatura, y en especial de la española.			3
*Este currículum se complementa en horas extraordinarias de lenguas vivas y Dibujo natural, que deben pagarse aparte por quién las reciba. ** En el caso de las Matemáticas en el preámbulo se establece que la duración adecuada es de una hora.			
Nivel de ingreso: No se especifica			
Libros de texto: Libre elección de libro de texto (art 45 y 46)			
Geometría Analítica: No aparecen específicamente en el plan contenidos de Geometría Analítica			

Tabla 2: Arreglo provisional de 29 de octubre de 1836

En algunas materias se especifica que la duración de las clases debe ser de hora y media, aunque esto no se hace para todas, y en el caso particular de las Matemáticas se indica en el preámbulo que la duración adecuada es de una hora.

En cuanto a los libros de texto, su utilización se regula en los artículos 45 y 46, en los que se expresa la libre elección de texto, o incluso la no elección de ninguno.

En conclusión, este arreglo supone un paso atrás en lo referente a la organización del sistema educativo respecto del plan del Duque de Rivas, y aunque mejora la situación educativa del reinado de Fernando VII, no supone una ruptura frente a ella.

En 1838 es presentado el *Proyecto de Ley sobre la Instrucción secundaria y superior de 29 de mayo de 1838* por el Marqués de Someruelos, primer intento de organizar la segunda enseñanza en base a una ley y que no pudo entrar en vigor al no ser aprobado por las Cortes.

En octubre de 1840 se produce la renuncia de Mª Cristina, y en mayo del año siguiente Espartero asume la regencia, cargo que desempeñará hasta julio de 1843. En junio de ese año, siendo por tanto aún Espartero regente, y con Pedro Gómez de la Serna la frente del ministerio de Gobernación se aprueba el **Real Decreto de 8 de junio de 1843** por el que se "crea en la universidad de Madrid una Facultad completa de filosofía". Al día siguiente se publica una Resolución "para llevar a efecto el decreto anterior".[6]

En el preámbulo del Real Decreto se hace una defensa de los estudios filosóficos, y en particular de las ciencias físico-matemáticas y naturales, argumentando que España se encuentra muy retrasada respecto al resto de países europeos en su estudio ya que " por carecer nuestro suelo de objetos inmediatos de aplicación y lucro, no han sido apetecidas ni buscadas sino por muy corto número de aficionados a examinar y conocer los fenómenos de la naturaleza", pero que es necesario potenciar su estudio por las numerosas ventajas que reporta.

> (...) ya se les considere como órganos de la civilización y cultura, ya como preparatorias para diversas carreras y profesiones, ya en fin como medios eficaces de acelerara el proceso fabril o industrial de que tanto necesita nuestra patria (Preámbulo).

Se establece así una triple finalidad para los estudios filosóficos: además de fomento de la cultura y preparación para los estudios superiores se les considera un medio para mejorar la industrialización del país.

Comienza el articulado estableciendo la nueva Facultad de Filosofía en la Universidad de Madrid, las cátedras que comprenderá y dotándola del mismo rango que las Facultades mayores en su artículo tres.

La estructura de los estudios de la Facultad de Filosofía se regula en el artículo 4 del Real Decreto que dice:

> Los estudios de la facultad de filosofía se dividirán en estudios preliminares, que preparan al de las demás facultades, los cuales deben preceder al grado de Bachiller que se exigirá como indispensables para matricularse en todas ellas desde el curso 1845 á 1846; en estudios de ampliación que dan la conveniente extensión á los anteriores, y se consideran necesarios para el grado de licenciado, y en superiores, que son el complemento de la carrera de filosofía, los cuales se requieren para optar al grado de doctor.

Los estudios preliminares se cursarán en tres años, y son los correspondientes a la segunda enseñanza, según se explicita en el artículo 14; los estudios de ampliación en cuatro años y los estudios superiores en dos años.

---

[6] Real Decreto de 8 de junio de 1843 y Resolución de 9 de junio de 1843 para llevar a efecto el decreto anterior. Gaceta de Madrid de 9 y 10 de junio de 1843

En los tres cursos de los estudios preliminares predominan las materias científicas frente a las de tipo humanístico, especialmente las Matemáticas y destaca la ausencia del Latín a lo largo de los tres cursos (art. 5) (ver **Tabla 3**).

Plan de estudios de la facultad de Filosofía de 8 de junio de 1843			
Plan de estudios de 8 de junio de 1843 (Se crea la facultad de filosofía) y ***Resolución de 9 de junio de 1843*** *para llevar a efecto el decreto anterior* Gaceta de Madrid de 9 de junio de 1843 / *10 junio de 1843*			
Regente : Espartero **Ministro de Gobernación**: Pedro Gómez de la Serna			
Objetivos: En el preámbulo se les da una doble finalidad, formativa y preparatoria para estudios posteriores que después no se contempla en el articulado: "(...) ya se les considere como órganos de la civilización y cultura, ya como preparatorias para diversas carreras y profesiones, ya en fin como medios eficaces de acelerara el proceso fabril o industrial de que tanto necesita nuestra patria" Art. 4 "(...) (Los) estudios preliminares, que preparan al de las demás facultades, los cuales deben preceder al grado de Bachiller que se exigirá como indispensables para matricularse en todas ellas desde el curso 1845 á 1846, (...)"			
Estructura del plan de estudios (Art. 4-5) Estudios preliminares (3 años), Estudios de ampliación (4 años), Estudios superiores (2 años)			
Asignaturas (Art. 5)	**Clases semanales por curso**		
	Estudios preliminares		
	1º	**2º**	**3º**
Nociones generales de filosofía (30 lecciones) / Gramática general y literatura	3		
Aritmética y álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado, geometría / Historia natural (80 lecciones)	6		
Continuación del álgebra, trigonometría rectilínea y esférica, aplicación del álgebra a la geometría con secciones cónicas		6	
Psicología, ideología y lógica		6	
Física experimental con nociones de química, geografía y cosmografía			4
Filosofía moral, teología natural, fundamentos de religión			6
Las lecciones serán de hora y media (Art. 8)			
Nivel de ingreso: Un examen de las materias de la enseñanza primaria elemental y superior (Art. 1 del reglamento)			
Libros de texto: Libre elección			
Geometría analítica			
Asignatura : Continuación del álgebra, trigonometría rectilínea y esférica, aplicación del álgebra a la geometría con secciones cónicas **Curso**: 2º de estudios preliminares Contenidos: Art 16: **"(...) la aplicación del álgebra a la geometría, continuando en el estudio de las curvas, que se llaman secciones cónicas"** Según el artículo 6, en el cuarto curso (1º de los estudios de ampliación) se verá Geometría Analítica.			

Tabla 3: Plan de estudios de la facultad de Filosofía de 8 de junio de 1843

En la Resolución que acompaña al Real Decreto se concretan entre otros aspectos los requisitos para acceder a los estudios de la Facultad de Filosofía, exigiendo un examen de todas las materias de la educación primaria (art. 1), lo que garantizaba cierto nivel en los alumnos que accedían a estos estudios.

En relación a los libros de texto no se hace ninguna mención, aunque se valora positivamente a los autores de textos para la enseñanza de cara a la provisión de plazas docentes.

Pero este Real Decreto tampoco se llevará a la práctica, pues fue derogado el 30 de agosto de 1843, reponiéndose el arreglo provisional de 1836, debido a que Espartero cae en julio de 1843 volviendo los moderados al poder.

Anterior a este plan de estudios es el *Proyecto de Ley sobre la organización de la enseñanza intermedia y superior de 12 de julio de 1841*, propuesto por Facundo Infante. A pesar de ser bastante comedido en sus planteamientos, debido al revés sufrido por el Marqués de Someruelos, este proyecto correrá su misma suerte y no conseguirá convertirse en ley, aunque en él se presentan, globalmente las líneas ideológicas que los progresistas van a defender en materia de educación a lo largo del siglo XIX (Vea, 1995).

Haremos a continuación una revisión de los contenidos de Geometría Analítica que se hallan en los planes de estudios y en los libros de texto de segunda enseñanza de este periodo.

2.5.2.1. La Geometría Analítica en la Enseñanza Secundaria (1836-1845)

Comenzaremos el análisis de los contenidos de Geometría Analítica en los planes de estudios de este periodo señalando que la nota característica del mismo va a ser la falta de precisión. Esta imprecisión –debida sin duda a que nos encontramos en un periodo de formación de una nueva etapa educativa- se da en los planes de estudios, tanto a la hora de delimitar los diferentes niveles educativos, como al distribuir las asignaturas por cursos y, sobre todo, al establecer los contenidos que deben comprender las distintas materias. A ello hay que añadir la libertad a la hora de elegir texto o desarrollar los programas por los profesores, medida tendente a favorecer la libertad de cátedra, pero que en la práctica ayudará a fomentar esta falta de concreción y uniformidad en la enseñanza.

En el plan de estudios de 4 de agosto de 1836 del Duque de Rivas los estudios de matemáticas aparecen bajo la denominación de *Elementos de matemáticas*, sin hacer ninguna especificación acerca de los contenidos que debe abarcar en cada nivel, indicando únicamente que la secundaria superior *comprenderá las mismas materias que la elemental pero con mayor extensión.*

El arreglo provisional de estudios de 29 de octubre de 1836 que sustituyó a este plan de estudios no mejora la situación a la hora de establecer los contenidos de las asignaturas, aunque es mucho más preciso a la hora de establecer la estructura de la segunda enseñanza, ya que determina su duración y establece el reparto de asignaturas por curso. En el caso de las Matemáticas se fijan dos asignaturas, en primero y en segundo, nuevamente bajo la denominación de *Elementos de Matemáticas*, pero siguen sin especificarse los contenidos que deben estudiarse en cada uno de los cursos.

En este caso la falta de concreción en el currículo es más grave que en el plan anterior ya que este no entró en vigor, pero el arreglo provisional estuvo vigente casi durante diez años, ya que el Plan de estudios de 8 de junio de 1843 será derogado en agosto de ese mismo año, como hemos visto.

En este plan se establece la Facultad de Filosofía en la Universidad de Madrid, facultad que comprendía, como ya hemos visto, tres tipos de estudios, siendo los primeros –los estudios preliminares- los correspondientes a la segunda enseñanza.

Estos estudios comprendían tres años, en los que las ciencias tenían un peso importante -en particular las Matemáticas- cursándose en el primer curso *Aritmética y álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado*, y en segundo *Continuación del álgebra, trigonometría rectilínea y esférica, aplicación del álgebra á la geometría con secciones cónicas.*

A diferencia de los planes anteriores, en la Resolución de 9 de junio de 1843 en la que se desarrolla el plan, se dan indicaciones acerca de los contenidos de cada una de las materias, aunque tan vagas, que en muchos casos no aportan prácticamente ninguna información. En el caso de las Matemáticas, estas directrices se recogen en los artículos 15 y 16 que dicen textualmente:

> 15. Segunda seccion, un catedrático=Se dará con toda la extensión la aritmética, el álgebra hasta ecuaciones de segundo grado, valiéndose de las demostraciones más sencillas, y por último con la extension debida la geometría tan interesante para todas las clases de la sociedad. En el final del curso se darán 80 lecciones de elementos de historia natural. En cada una de ellas se procurará exponer las bases, objeto y modo de conseguirlo para rectificar las ideas equivocadas que suelen acompañar desde la niñez, procurando difundir el espíritu de clasificar tan útil en el estudio de cualquier ciencia. Las lecciones serán diarias.
>
> 16. Curso segundo=Primera seccion, un catedrático=Se completará el estudios del álgebra, y continuando el de la geometría deben exponerse los tratados de trigonometría rectilínea y esférica para hacer en seguida la aplicación del álgebra á la geometría, continuando en el estudio de las curvas, que se llaman secciones cónicas. Las lecciones serán diarias.

Como vemos, en el caso de las Matemáticas la resolución no concreta demasiado y, en particular, en lo que se refiere a los contenidos de Geometría Analítica no aporta nada nuevo a lo que establece el plan de estudios.

Es digna de señalar la denominación de los contenidos de Geometría Analítica en los diferentes cursos: en segundo curso aparece bajo el nombre de *Aplicación del álgebra a la geometría* - nombre que aparecía ya en el plan de estudios de la Universidad de Salamanca que recoge la Real Cédula de 1807 (Utande, 1964, p. 6)-, mientras que en el cuarto curso de la Facultad de Filosofía (primero de los estudios de ampliación)el plan establece el estudio del *cálculo diferencial é integral y la geometría analítica*, es decir utiliza otra denominación para esta asignatura que, se supone, abarca contenidos de más nivel.

En cuanto a los libros de texto, hemos visto que no existen listas oficiales y existía libertad a la hora de elegir las obras. En el apartado dedicado a la selección de las fuentes recogemos los textos de Matemáticas de los autores más relevantes del periodo. Como veremos, tampoco en los libros de texto existe un criterio unificador en cuanto a los contenidos que deben incluir. Se observa que los libros anteriores a 1836, son más generales, tanto en los contenidos como en el público al que van dirigidos y esto se va concretando en los libros de publicación posterior.

En conclusión, la falta de concreción en el currículo, la ausencia de uniformidad en los contenidos en los libros de texto y la libertad de elección de los mismos impiden concretar los contenidos de Geometría Analítica y el nivel educativo en que se estudiaron en este periodo, pero la presencia de los mismos tanto en algunos planes, como en los textos indica su estudio en los niveles preparatorios para las Facultades Mayores.

2.5.3. El asentamiento de la segunda enseñanza. (1845-1857)

En 1845, siendo Narváez Presidente del Gobierno y Pedro José Pidal Ministro de Gobernación, se aprueba el Plan General de estudios de 17 de septiembre de 1845 (G. M de 25 de septiembre) (Utande, pp. 39-62), y días después el Reglamento de estudios de 22 de octubre de 1845[7] que lo desarrolla.

Una reforma del sistema educativo era necesaria –especialmente de las enseñanzas secundaria y universitaria-, como se expone en el preámbulo:

> Careciendo de un sistema uniforme y bien ordenado; regida en general por disposiciones interinas, cuyo carácter tienen también casi todos los profesores, dotados estos mezquinamente, desatendidos ciertos estudios a que es preciso dar impulso; privados todos de aquel enlace que constituye el verdadero edificio del saber humano; y por último, introducido el desorden en la administración económica, no habría persona alguna en España que no clamase por su pronto y eficaz remedio.

Pero ante los fracasos de los proyectos del Marqués de Someruelos y de Facundo Infante, Pedro José Pidal optó por ordenar el sector por real decreto en vez de mediante una ley general de instrucción.

En este plan se conserva la idea del plan del duque de Rivas de una educación secundaria enfocada hacia las clases medias, y que debe tener una doble finalidad, por un lado debe dar una formación cultural para aquellos que no deseen seguir estudiando, a la vez que debe preparar para los estudios superiores a aquellos que quieran hacerlo. Esto lo expresa en el preámbulo cuando presenta la enseñanza secundaria, etapa educativa a la que se le da mucha importancia y que persigue dos objetivos:

> Preséntase en primer lugar aquella [enseñanza] que es propia especialmente de las clases medias, ora pretendan sólo adquirir los elementos del saber indispensable en la sociedad a toda persona regularmente educada, ora intenta allanarse el camino para estudios mayoras y de adquisición más difícil.

También se señala que es necesario “calcular con tino la dosis de instrucción” que hay que darles a los jóvenes en esta edad, teniendo en cuenta que esto varía dependiendo de “los climas y los pueblos”. Es decir en el plan se defiende que dependiendo de la raza, las costumbres y el clima se deben incluir en este nivel unas asignaturas u otras y que los planes y métodos provechosos en el norte de Europa no lo son en nuestro país.

Basándose en estas ideas el plan la enseñanza secundaria se divide en dos niveles, elemental y de ampliación correspondientes a los dos fines principales.

Los contenidos y la duración de la segunda enseñanza elemental se regulan en el artículo tres, que establece una etapa de cinco años en cada uno de los cuales se

[7] G. M de 31 de octubre, 1 ,2 ,3 4 y 7 de noviembre.

cursarán únicamente tres asignaturas, que van variando a lo largo de los cursos (ver **Tabla 4**). Aunque también se ofertan dos asignaturas voluntarias, el Dibujo lineal en los cinco cursos, y el *Complemento del Álgebra, aplicación de esta a la Geometría, secciones cónicas y principios de cálculo diferencial e integral* (Art. 5). La ordenación y duración de estas se fija en el artículo 147 del reglamento. Como se puede observar en la tabla 4 en este plan predomina el estudio de las lenguas –latina y castellana- que ocupa las dos quintas partes del currículo, hecho que se justifica en el preámbulo.

> El arreglo de la elemental se ha seguido por norma el suministrar a los jóvenes aquellos conocimientos que naturalmente propenden a formar su corazón, ejercitar su entendimiento, desenvolver sus facultades, perfeccionar su gusto; en una palabra, que asientan sobre sanos y sólidos cimientos su educación moral, religiosa y literaria. Para esto ha sido preciso dar de nuevo a las humanidades toda la importancia que habían perdido.

También en el preámbulo se ponen de manifiesto los extremos en que se había caído a la hora de establecer las asignaturas de la educación secundaria explicando que antiguamente solamente el latín y el estudio de la filosofía escolástica formaban este nivel educativo olvidando el estudio de las ciencias, pasándose después al extremo contrario, abandonándose casi del todo el estudio de las humanidades. El resultado fue, según se explica, que sin conseguir que los alumnos saliesen bien preparados en el estudio de las ciencias tampoco lo estaban en el de las humanidades.

Pero en vez de tratar de mejorar el estudio de ambas ramas, el plan se decanta claramente por la defensa de las humanidades, especialmente en la primera enseñanza elemental. Este hecho también queda patente cuando justifica el orden que debe darse a las asignaturas:

> Algunos quieren, a imitación de lo practicado en países extranjeros, que se principie por las Matemáticas, con el estudio más propio para acostumbrar a la meditación y al raciocinio; pero en España la experiencia ha demostrado que en tan tierna edad es prematuro, y que los niños generalmente manifiestan más aptitud y gusto para las Ciencias morales. Preciso ha sido, pues, dejar las matemáticas para los últimos años, y aún entonces no son obligatorias más que en la parte indispensable para los usos comunes de la vida; a los que deseen profundizarlas o necesiten mayores conocimientos, se les proporciona después los medios de elevarse a las teorías más sublimes (Preámbulo).

Es decir supone a los niños españoles peor dotados para las ciencias –en particular las Matemáticas- por lo que éstas sólo se estudiarán los últimos años y solamente unos conocimientos básicos, aunque el artículo 5 –que se encuentra dentro de la sección donde se especifican las asignaturas de 5º curso, da la posibilidad de ampliar estos estudios para los que lo deseen, como ya hemos señalado.

Vemos que el currículum de 1845 –al menos en lo que a la secundaria elemental se refiere- es de corte tradicional y supone un paso atrás respecto de los presentados en el periodo anterior, especialmente el del plan de 1843.

Sin embargo la estructuración de la segunda enseñanza de ampliación es novedosa, pues la divide en dos secciones, ciencias y letras, cosa que en los planes anteriores no se explicita –aunque luego había diferentes titulaciones como ya hemos visto-.Cuando habla de esta enseñanza -que *es la que prepara para el estudio de ciertas carreras, o sirve para perfeccionar los conocimientos adquiridos en la elemental* (art.6)- en el preámbulo dice:

No ha sido preciso tanto esmero en la parte de la segunda enseñanza llamada de ampliación. Aquí ha bastado reunir las ciencias que pueden servir de preliminares a las diferentes carreras, para que cada cual vaya a buscar como en un vasto almacén los conocimientos que necesite, desechando aquellos que no conduzcan a su especial objeto; al tratar de las diferentes Facultades es cuando especifica el proyecto de los estudios preparatorios que para cada una debe hacer el cursante.

Plan Pidal

Plan de estudios de 17 de septiembre de 1845/ Reglamento de 22 de octubre de 1845
Gaceta de Madrid de 25 de sept. de 1845 / 31 de octubre, 1 ,2 ,3 4 y 7 de noviembre

Reina: Isabel II
Presidente del gobierno: Ramón Mª Narváez
Ministro de Gobernación: Pedro José Pidal.

Finalidad: Doble finalidad, proporcionar una cultura general y preparar para los estudios superiores.

Estructura del plan de estudios

Segunda Enseñanza Elemental (Art. 3)

Asignaturas	**Clases semanales por curso**				
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**
Matemáticas	*6			* * 6	
Historia	3	3			
Lengua castellana- Lengua latina	6	6	6	6	6
Principios de Moral y Religión		6			
Lengua francesa			3	3	
Principios de Psicología, Ideología y Lógica			6		
Elementos de Física con algunas nociones de Química					6
Nociones de Historia natural					3

***** Ejercicios de cálculo aritmético- Nociones elementales de Geometría- Elementos de Geografía
****** Complemento de la aritmética, Álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive, Geometría: Trigonometría rectilínea, Geometría práctica
Asignaturas voluntarias: Dibujo lineal y de figura. **(Durante los cinco años, Art. 4)**
Complemento del Álgebra, aplicación de esta a la Geometría, secciones cónicas y principios de Cálculo diferencial e integral **(Art. 5)** Las clases serán de hora y media, excepto las de Historia, Francés e Historia Natural que serán de una hora y las de Lengua castellana/latina que tendrán una duración de dos horas y media. (art. 147 del Reglamento).

Segunda Enseñanza de Ampliación (Art. 6)

Sección ciencias	**Sección letras**
Matemáticas sublimes Química general, Mineralogía, Zoología, Botánica, Astronomía física	Lengua inglesa, Lengua alemana, Perfección de la lengua latina, Lengua griega, Lengua hebrea, Lengua árabe, Literatura general y , en particular, la española, Filosofía con un resumen de su historia, Economía política, Derecho político y administrativo

Nivel de ingreso: Primera enseñanza elemental (Art. 252 del Reglamento)

Libros de texto: Lista de 6 textos por asignatura como máximo (Art. 48 del Plan).
En el reglamento para la ejecución del plan de estudios se permite que para el curso 1845-46 que los claustros elijan los libros de texto libremente. (G.M 31-10-1845)

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Asignatura dentro de la que se imparte: Complemento del Álgebra, aplicación de esta ala Geometría, secciones cónicas y principios de Cálculo diferencial e integral
Curso: 5º de segunda enseñanza elemental
Obligatoriedad: No obligatoria

Tabla 4: Plan Pidal

Las asignaturas que se cursan en la sección de ciencias de este nivel aparecen en el artículo 6 del plan: Matemáticas sublimes, Química general, Mineralogía, Zoología, Botánica y Astronomía Física.
Los establecimientos en los que se impartirá la segunda enseñanza –que se siguen denominando Institutos- se dividen en tres categorías: de primera clase o superiores, de segunda clase y de tercera. En los de segunda clase se imparte la segunda enseñanza elemental, en los de tercera "sólo se proporciona parte de la misma enseñanza", y en los de primera clase o superior "además de la primera enseñanza elemental, existen algunas asignaturas correspondientes a la de ampliación, debiendo ser dos por lo menos" (Art. 56).En cuanto a los centros privados, cuya creación se limita mucho en este plan, se denominarán Colegios o Liceos, pero nunca Institutos (Art. 79).

Y en relación a la titulación obtenida, el artículo 8 establece que "la segunda enseñanza elemental y la de ampliación constituyen juntas la Facultad de Filosofía". Los alumnos que aprueben la segunda enseñanza elemental obtendrán el título de Bachiller en Filosofía (Art. 9). Para ser Licenciado en Ciencias o en Letras hay que estar en posesión del título de Bachiller y además aprobar ciertas asignaturas, entre ellas el *Complemento de las matemáticas elementales,* en el caso de la licenciatura en Ciencias. Quién apruebe los estudios de Licenciado en Letras y Ciencias, hechos por lo menos en cuatro años, podrá optar al título de Licenciado en Filosofía (Art. 12).

En lo que se refiere a los libros de texto en el artículo 48 se establece que los profesores deberán elegir libro de texto de entre una lista de al menos seis títulos designados por el Gobierno. Sin embargo cuando se publica el Reglamento, se establece que para el curso 1845/46 se permite a los claustros, oídos los profesores, elegir los libros, dada la precipitación con que debería hacerse la elección de los mismos y el hecho de que en muchas asignaturas o no existían obras o las que había eran de muy mala calidad.

Un año después se publicará una reforma de este plan de estudios, también bajo el ministerio de Pedro José Pidal, el **Plan de estudios de 24 de julio de 1846**. Reforma en la que la segunda enseñanza elemental sufrió numerosos cambios.

El currículo es sustancialmente distinto al del plan de 1845,especialmente en la ordenación de las asignaturas, siendo especialmente significativa la disminución del número de clases en los dos primeros cursos al suprimir las clases de la tarde (ver **Tabla 5**).Salen beneficiadas las ciencias, en particular las Matemáticas, que pasa de 12 clases semanales a 18, aunque hay que tener en cuenta que seis de ellas –las de primero son de *Elementos de geografía*-, que en el plan de 1845 sólo tenía dos clases en primer curso. Además la asignatura de Matemáticas que aparecía en cuarto en el plan Pidal se desdobla en dos en el nuevo plan: *Aritmética y Geometría*-en cuarto curso- y *Álgebra, Trigonometría rectilínea y Topografía*, en quinto. Sin embargo el plan de 1846 no hace ninguna alusión a la asignatura voluntaria de Matemáticas, propugnada por el plan anterior.

En la enseñanza de ampliación se hacen muy pocas reformas y principalmente en la sección de ciencias. Así el artículo 3 establece que se añadirá en la sección de ciencias de la segunda enseñanza de ampliación la asignatura de "Ampliación de Física", "que no se establecerá hasta que produzca resultados la escuela normal creada por Real Decreto de 24 de junio último".

En el artículo 4 se fijan los estudios de Matemáticas para obtener los grados de Licenciado y Doctor en Ciencias:

> El estudio completo de las matemáticas durará cuatro años, arreglado al programa que se publique. Los dos primeros años serán los incluidos en los estudios

elementales de filosofía; el tercero se exigirá para el grado de licenciado en ciencias, y el cuarto para el de doctor en las mismas.

En el artículo 6 se habla de un curso preparatorio - en particular para las carreras de teología y jurisprudencia- estableciendo las asignaturas que deben cursarse.

En cuanto a los contenidos de las asignaturas, en el artículo 12 se expresa la voluntad del gobierno de fijar unos programas para las asignaturas, que deberán ser seguidos por los profesores obligatoriamente, con el fin de establecer una uniformidad en las enseñanzas, sin embargo no se hace ninguna mención a los libros de texto en el plan.

Plan de estudios de 24 de julio de 1846					
Gaceta de Madrid de 26 de julio de 1846					
Reina: Isabel II **Presidente del gobierno:** Javier Istúriz **Ministro de Gobernación:** Pedro José Pidal					
Estructura del plan de estudios					
Asignaturas	**Clases semanales por curso**				
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**
Matemáticas	2 *			6**	6***
Historia			3	3	
Lengua castellana- Lengua latina	6	6	6	6	
Principios de Moral y Religión					
Lengua francesa #					
Principios de Lógica			6		
Elementos de Física con algunas nociones de Química					6
Nociones de Historia natural					3
*Elementos de Geografía **Aritmética y Geometría *** Álgebra, Trigonometría rectilínea y Topografía # El Francés es obligatorio pero se puede cursar en cualquiera de los 5 cursos. (sin asignación temporal) Las clases de Historia e Historia natural tendrán una duración de una hora, las de Matemáticas, Religión y Lógica de hora y media, y las de Lengua castellana y Elementos de Física de dos horas y media.					
Nivel de ingreso: Primera enseñanza elemental (Art. 252, Reglamento de 1845)					
Libros de texto: Lista en R.O. de 1 de septiembre de 1847					
GEOMETRÍA ANALÍTICA					
No aparecen contenidos de geometría analítica.					

Tabla 5. Plan de estudios de 24 de julio de 1846

Una nueva reforma del plan de 1845 se llevará a cabo en 1847. **El Plan de estudios de 8 de julio de 1847 (*Modificación del Plan de 17 de Septiembre de 1845)* (**G. M. de 12 de julio. Utande, 1964, pp. .65-79)**,** se aprueba siendo Ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas Nicomedes Pastor Díaz y se desarrolla mediante el Reglamento de 19 de agosto de 1847(G.M de 22 a 26 de agosto).

Comienza el preámbulo alabando los resultados obtenidos en la instrucción a raíz de la implantación del plan Pidal señalando la cooperación de las provincias a la que "se debe el que en tal corto tiempo se hayan creado o reformado cincuenta Institutos de segunda enseñanza". Esto indica que a raíz de la aprobación del plan Pidal la implantación de la educación secundaria fue un hecho, aunque como también se señala en el preámbulo "no todos estos establecimientos (...) se encuentran hoy en el grado de perfección que debe apetecerse (...)", aunque se confía que con el tiempo mejoren hasta llegar a igualase a los mejores centros de Europa. No obstante se reconoce la necesidad de una reforma.

También en el preámbulo se indica que las modificaciones realizadas en el plan son pocas, no así en el reglamento. Así en el plan no se establecen las finalidades de cada una de las etapas educativas o la titulación a la que conduce cada una de ellas, por lo que se deduce que se conservan las indicadas en el plan anterior.

En el artículo 1 se establece que la enseñanza en los establecimientos públicos del reino comprenderá cuatro clases de estudios: Estudios de segunda enseñanza, estudios de Facultad, estudios superiores y estudios especiales. Se establece así una separación entre los estudios de segunda enseñanza y de la Facultad de Filosofía, aunque la titulación que se obtiene tras cursar la segunda enseñanza y realizar unos exámenes es la de Bachiller en Filosofía (arts. 302 y 304 del Reglamento), conservando así una relación entre ambos estudios. Además a la Facultad de Filosofía aún no se le da el rango que a las Facultades Mayores, ya que es posible estudiar simultáneamente en una Facultad Mayor y en la de Filosofía, pero no en dos Facultades Mayores (art. 31 del plan).

El título I se dedica a los estudios de segunda enseñanza, que es continuación de la instrucción primaria elemental completa y se dará en cinco años. Para acceder a ella es necesario tener diez años, haber cursado la instrucción primaria, y pasar un examen "particularmente en la gramática y escritura" (art. 182 del reglamento).

En el artículo 2 del plan se establecen las materias que comprenderá la segunda enseñanza. Su ordenación por cursos, las horas semanales y la duración de las clases viene regulados en los artículos 65 y 66 del reglamento (ver **Tabla 6**). Por otra parte el artículo 67 establece la posibilidad de estudiar un "segundo curso de matemáticas elementales" a aquellos alumnos que quieran seguir estudiando en las escuelas especiales:

> En el último año, los que quieran seguir carrera para escuelas especiales, en vez del estudio de la lógica, podrán hacer el del segundo curso de matemáticas elementales, que consistirá en el complemento del álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y la topografía (art. 67).

En este plan las asignaturas que más peso siguen teniendo en el currículo son las lenguas latina y castellana. Hay que observar la importancia que tiene también el estudio de la religión, cuyo número de horas semanales, en el conjunto de los estudios, sólo es superada por el latín-castellano, y las matemáticas. Estas últimas pierden horas lectivas en esta reforma, ya que de las seis horas en cuarto y en quinto que establecía el plan de 1846, pasamos a tres horas en tercero, manteniéndose las seis en cuarto.

Además hay que tener en cuenta que para acceder a la segunda enseñanza se exige pasar un examen fundamentalmente de gramática y escritura, sin dar importancia al nivel con que se accedía en el resto de las asignaturas, con lo que es muy posible que en tercero hubiese que comenzar el aprendizaje de las matemáticas con un nivel inferior al correspondiente a la educación secundaria.

Si a esto añadimos la Real Orden de 5 de septiembre de 1847 –que da instrucciones para aquellos alumnos que deban cambiar de plan-, que dispone

Los alumnos de quinto año repetirán el estudio de la lógica, á pesar de haberlo hecho en tercero, en atención a la importancia de esta enseñanza, y á que cuando la cursaron no se hallaban todavía en estado de aprovechar debidamente de ella. Sin embargo, el que prefiera estudiar en su lugar el segundo año de matemáticas, ó repetir cualquiera otra asignatura, podrá hacerlo, manifestándolo al tiempo de matricularse.

Plan de estudios de 8 de julio de 1847					
Plan de estudios de 8 de julio de 1847/ Reglamento de 19 de agosto de 1847 **Gaceta de Madrid de 12 de julio de 1847 /22-26 agosto 1847**					
Reina: Isabel II **Presidente del gobierno:** Joaquín Francisco Pacheco y Gutiérrez Calderón **Ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas:** Nicomedes Pastor Díez					
Estructura del plan de estudios					
Asignaturas	**Clases semanales por curso**				
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**
Religión y moral	2	2	1	1	1
Latín y Castellano	6	6	6		
Retórica y poética				5	1
Elementos de Geografía	3	2	1		
Elementos de Historia general y particular de España		2	2	2	
Elementos de Matemáticas			3*	6**	
Elementos de Psicología, Ideología y Lógica					5
Elementos de Física experimental y nociones de Química					5
Nociones de Historia natural					3
* Curso preparatorio de matemáticas (aritmética y algunas nociones de geometría) ** Matemáticas elementales (álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive, geometría trigonometría plana y nociones de topografía) **Asignaturas complementarias** (voluntarias por el Art. 7 de la R.O de 26 de agosto de 1847, Vea, 1995, p. 285) Lenguas vivas, Dibujo, Gimnástica y enseñanzas de adorno Todas las lecciones serán de hora y media, excepto las de latín, que serán de dos horas. (Art. 65 del Reglamento)					
Nivel de ingreso: Diez años, haber cursado la instrucción primaria, y pasar un examen. (Art. 182 del reglamento)					
Libros de texto: (Art. 30 del plan y 80 del Reglamento) Lista en Orden de 8 de septiembre de 1847 (Gaceta de Madrid de 11 de septiembre de 1847)					
GEOMETRÍA ANALÍTICA					
Asignatura dentro de la que se imparte: Segundo curso de matemáticas elementales **Curso:** 5º **Obligatoriedad:** Optativa, para aquellos que quieran estudiar en las escuelas especiales.					

Tabla 6: Plan de estudios de 8 de julio de 1847

Es decir, se daba preferencia a repetir una asignatura que ya se había cursado, que a completar los estudios de matemáticas -hay que recordar que en el plan de 1846 las matemáticas se estudiaban en cuarto y en quinto-, lo que nos da una idea precisa de la consideración en que tenía el gobierno –en este caso moderado- el estudio de las matemáticas.

Para la delimitación de los contenidos el artículo 30 del plan establece que los catedráticos deberán elegir los libros de texto de entre los comprendidos en una lista que el Gobierno publicará todos los años y que al menos contendrá seis para cada asignatura. Además, aunque el Reglamento no establece un programa concreto para las asignaturas, indica que la Dirección General de Instrucción Pública publicará los programas de todas las asignaturas que "seguirán los profesores estrictamente". Esta medida, que pretende conseguir una uniformidad en las enseñanzas que aún no se ha conseguido del todo, supone una limitación a la libertad de cátedra, que como señala Vea (1995), fue un tema siempre conflictivo y que distanciaba a moderados-autores de este reglamento- y progresistas.

Pero de nuevo el plan de 1847 no llegará a estar vigente ni siquiera los cinco años necesarios para que una promoción los completara. El **14 de agosto de 1849** (G.M. de 16 de agosto; Utande, 1964, pp. 83-87) -bajo el ministerio de Bravo Murillo- se aprueba un nuevo arreglo para las asignaturas de segunda enseñanza. En él se lleva a cabo una nueva distribución de materias y horas, se fijan las horas de entrada y de salida lo que hará posible un mayor control de los alumnos y se toca el tema económico indicando que es necesario mejorar la remuneración de los catedráticos cuya dedicación aumenta por el arreglo, pero también se dice que "(...) el presupuesto de los Institutos provinciales, lejos de aumentarse resultará algún tanto disminuido."

El articulado comienza estableciendo la distribución de las asignaturas por cursos indicando que todos los centros tanto públicos como privados deben seguir el orden y la distribución de asignaturas que indica el plan (ver **Tabla 7**).

En este plan de nuevo se favorece a las letras, aunque se aumenta la carga académica de casi todas las asignaturas al equiparar la duración de las clases de todas ellas que serán de hora y media, cosa que no ocurría en anteriores planes. En un primer momento se podría pensar que se beneficia a las ciencias, pero si comparamos por asignaturas las más favorecidas con el aumento de clases semanales son el Latín y Castellano, y la Religión y Moral. Según señala Vea (1995) estas asignaturas van a constituir el "núcleo central "de la segunda enseñanza ya que de las 90 clases de los cinco años 41 corresponden a estas dos asignaturas, por lo que el plan de Bravo Murillo ofrece "una visión anclada en el pasado de la segunda enseñanza, concebida más como estudios de latinidad y humanidades que como una enseñanza de progreso en sintonía con los nuevos aires liberales" (Vea, 1995, p.298).

Concluye el plan estableciendo los sueldos de los profesores, y en su último artículo dice textualmente: "En todo aquello que no se altere por el presente arreglo, o lo estuviere ya por anteriores disposiciones, queda subsistente el título II, sección 2ª, del reglamento vigente de estudios" (art. 11), que es el título en el que se regula la segunda enseñanza, por lo que se mantiene la normativa relativa a acceso a la educación secundaria, titulación, libros de texto, etc.

Entre las disposiciones complementarias al plan se encuentran la Real Orden de 14 de agosto de 1849 (Utande, p.88), y la Real Orden de 16 de agosto de 1849 (G.M. de 17 de agosto), en la que se dan unas indicaciones metodológicas generales para las asignaturas haciendo hincapié en que es necesario adecuar las enseñanzas al nivel elemental al que están dirigidas ya que algunos profesores

> (...) no han tenido en cuenta, quizas llevados de su entusiasmo por la ciencia, que si de los estudios superiores de facultad, á pesar de su mayor elevación, no salen completamente formados los hombres, menos aun se debe esperar semejante resultado de las escuelas elementales, en donde únicamente debe aprenderse el arte de estudiar la ciencia, no la ciencia misma.

Así dice que la Reina

> ha tenido á bien mandar se excite á los mencionados catedráticos á que se ajusten, cuanto sea posible en sus explicaciones, á la sencillez de los textos, á los límites que los programas prescriben y á la comprensión de sus alumnos (...).

Es decir muchos profesores daban sus lecciones por encima de los niveles establecidos en los libros de texto y programas fijados por el gobierno para algunas materias, y este opta por ordenar que se bajen dichos niveles en vez de ampliar el tiempo dedicado a estas asignaturas.

<table>
<tr><th colspan="6">Plan de estudios de 14 de agosto de 1849</th></tr>
<tr><td colspan="6">Gaceta de Madrid de 16-17 agosto de 1849</td></tr>
<tr><td colspan="6">Reina: Isabel II
Presidente del gobierno: Ramón Mª Narváez
Ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas: Juan Bravo Murillo</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Estructura del plan de estudios</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Asignaturas</td><td colspan="5">Clases semanales por curso</td></tr>
<tr><td>1º</td><td>2º</td><td>3º</td><td>4º</td><td>5º</td></tr>
<tr><td>Religión y moral</td><td>6</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Latín y Castellano</td><td>12</td><td>12</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Retórica y poética</td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>Geografía</td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Historia</td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Matemáticas</td><td></td><td></td><td>6*</td><td>6**</td><td></td></tr>
<tr><td>Psicología y Lógica</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>Física</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>Nociones de Historia natural</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="6">* Aritmética y Álgebra
** Geometría, Trigonometría y Topografía
Todas las lecciones serán de hora y media (Art.2)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Nivel de ingreso: Diez años, haber cursado la instrucción primaria, y pasar un examen. (Art. 182 del reglamento de 1847)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Libros de texto: Art. 80 del Reglamento de 1847
Lista en R.O. de 22 de septiembre 1849 (Gaceta de Madrid de 25 septiembre de 1849)</td></tr>
<tr><td colspan="6">GEOMETRÍA ANALÍTICA</td></tr>
<tr><td colspan="6">Se siguen las directrices del reglamento de 1847</td></tr>
</table>

Tabla 7: Plan de estudios de 14 de agosto de 1849

En enero de 1850 Bravo Murillo asume la presidencia del gobierno, y en agosto se elabora un nuevo plan de estudios –siendo ministro de Comercio, Instrucción y obras Públicas Manuel de Seijas Lozano- que constituye el punto de confluencia del plan de estudios y el reglamento de 1847, con la reforma realizada por Juan Bravo Murillo en 1849 (Vea,1995).

El Plan de estudios de 28 de agosto de 1850, por el que se ordena la segunda enseñanza y los estudios universitarios, es un nuevo intento de plan general de instrucción, sin llegar al rango de ley pero con la vista puesta en la elaboración de una Ley de Instrucción Pública. Este deseo se deja patente en el preámbulo en el que tras comenzar alabando las reformas anteriores, y los logros obtenidos en educación gracias a ellas indica que han sido "objeto de ataques inmerecidos, censuras infundadas y una oposición tenaz". Y tras criticar la situación de la enseñanza anterior a las reformas elogiar a los planes 1845 y 47 se justifica la reforma, argumentando que estos planes abarcaron hasta donde les permitieron los elementos de los que disponían, y que se hace necesario dar "otro impulso a la institución".

En relación a la educación secundaria se dice que "escasos adelantos pueden hacerse por ahora", señalando que es necesario introducir el estudio del Griego, "cimentar esta educación en el principio religioso", fomentar más el estudio del latín y "ordenar los otros conocimientos de manera que produzcan a la vez la economía para los pueblos y fijeza en las nociones que adquieran los alumnos". Es decir se le va a dar a la segunda enseñanza un carácter aún más humanista, centrándolo en el estudio de las lenguas muertas, a pesar de ser una de las críticas que hace en la exposición a los sistemas existentes antes de la reforma de 1845. Este hecho contrasta con la necesidad de potenciar las ciencias físico-matemáticas, idea que plasma al hablar de las reformas que es necesario introducir en las Facultades.

> A las ciencias físico-matemáticas y a las naturales era conveniente darles mayor extensión, tanto para que abarcase su enseñanza todo lo que estos importantes ramos del saber contienen de interesante, cuanto porque de ellas en gran manera depende el porvenir de nuestra industria, harto necesitada de los auxilios de la ciencia. Además es indispensable ir formando profesores en ciertos ramos que son base de toda enseñanza industrial, de la que con afán se ocupa el Gobierno (Preámbulo).

También en el preámbulo se hace una exposición de los objetivos generales de la segunda enseñanza.

> Siendo esta el complemento de la instrucción primaria, y aquella en que los jóvenes deben completar su educación, estudiar idiomas vivos y muertos, adquirir un conocimiento, aunque elemental, de ciertos ramos del saber, necesarios para presentarse en el mundo sin las prevenciones y errores extendidos en el vulgo, no sólo prepara al estudio profundo de las ciencias, sino que constituye al hombre culto y dispuesto a recibir una instrucción superior general o especial, científica y artística, y aun simplemente social.

Este doble objetivo para la secundaria, que viene siendo común en todos los planes de estudios, no se tiene en cuenta sin embargo en el articulado, en el que no aparece su carácter formativo.

> Art. 3. º La segunda enseñanza es continuación de la primaria elemental completa: sirve de preparación para los estudios de Facultad y para alguno de los especiales.

Comienza este articulado dividiendo la instrucción pública en cuatro clases de estudios: Instrucción primaria, Estudios de segunda enseñanza, Estudios especiales y Estudios de Facultad.

Como hemos visto en su artículo tres define la enseñanza secundaria, y el título II, que consta solamente de tres artículos, es el dedicado este nivel educativo. En el primero de ellos –el sexto- se establece que para acceder a la segunda enseñanza se necesita la edad de diez años, sin hacer ninguna referencia a la capacitación académica lo que supone una vuelta atrás y una cierta devaluación de la primera enseñanza y también de la segunda.

En el artículo siete se establece la duración de estos estudios –cinco años- y las materias que comprenderán, que son prácticamente las mismas que las presentadas en el plan de 1847, salvo el Dibujo y la Gimnasia -que desaparecen- y las Lenguas vivas cuyo estudio no es obligatorio. Llama la atención el artículo 8, que deja la puerta abierta a una ampliación de materias, en particular la inclusión del Griego:

> Según vayan perfeccionándose los métodos de enseñanza, se irán también aumentando progresivamente las materias pertenecientes a esta clase de estudios, hasta que comprendan la Lengua griega y otros conocimientos comunes a todas las Facultades y que deben formar parte de una educación general completa.

Aparece aquí como vemos la idea de la misión formativa de la segunda enseñanza que se había obviado anteriormente.

La distribución de materias por curso se deja en manos de un posterior reglamento (art.35), que en este caso aparecerá en la **Real Orden de 31 de agosto de 1850**(G.M. de 5 de septiembre).

Las diferencias con el plan de 1849 son pocas, se le asigna una hora más a la semana a las ciencias naturales y a la retórica, con lo que aumenta así aún más la diferencia del estudio del latín-castellano con otras asignaturas, se eliminan las dos horas de Religión en quinto curso y se hace un cambio en las horas de Historia (ver **Tabla 8**).

En relación con las Matemáticas no se especifican cuáles deben ser los contenidos que deben estudiarse en cada uno de los cursos en que aparecen, y no se hace ninguna referencia al tercer curso voluntario de Matemáticas, aunque en disposiciones posteriores se hará aunque de manera indirecta, como veremos.

En cuanto a los libros de texto, los artículos 38 y 39 establecen que todas las asignaturas, excepto las que expresamente se señalen en los reglamentos, se explicarán por textos, los cuales se elegirán por los catedráticos de entre los comprendidos en las listas que al efecto publique el Gobierno, en las que no aparecerán más de tres obras para cada asignatura.

Los grados académicos de Bachiller, Licenciado y Doctor se mantienen, pero determinando las calificaciones que es necesario obtener para poder optar a ellos.

El plan irá desarrollándose a lo largo de una serie de órdenes que culminarán con la aprobación del **Reglamento de 10 de septiembre de 1851** (G.M. de 12, 13, 14, 15 y 16 de septiembre).En este reglamento se tratan todos los aspectos referentes a la educación, desde la ordenación de los distritos universitarios, al funcionamiento interno de los centros de enseñanza, pasando por la ordenación académica, que se desarrolla en la sección cuarta que trata los puntos relativos al desarrollo “del curso literario y del método de enseñanza”.

La distribución de asignaturas para la segunda enseñanza se mantiene exactamente igual a la desarrollada en la Real Orden de 31 de agosto de 1850, sin embargo el tiempo docente dedicado a cada asignatura sí sufre cambios. En el artículo 138 se fija la duración de las clases y como debe distribuir el profesor el tiempo de cada una de ellas, volviéndose a las clases de hora y media en todas las asignaturas, excepto las de latinidad, que en primero y segundo serán de dos horas por la mañana y dos por la tarde.

Plan de estudios de 28 de agosto de 1850

Plan de estudios de 28 de agosto de 1850 , Circular de 31 de agosto de 1850, Reglamento de 10 de septiembre de 1851
Gaceta de Madrid de 3, 4 y 5 septiembre 1850 / 12, 13, 14, 15 y 16 de septiembre de 1851

Reina: Isabel II
Presidente del gobierno: Juan Bravo Murillo
Ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas: Manuel de Seijas Lozano

Objetivos: "Siendo esta el complemento de la instrucción primaria, y aquella en que los jóvenes deben completar su educación, estudiar idiomas vivos y muertos, adquirir un conocimiento, aunque elemental, de ciertos ramos del saber, necesarios para presentarse en el mundo sin las prevenciones y errores extendidos en el vulgo, no sólo prepara al estudio profundo de las ciencias, sino que constituye al hombre culto y dispuesto a recibir una instrucción superior general o especial, científica y artística, y aun simplemente social."

"**Art. 3. º** La segunda enseñanza es continuación de la primaria elemental completa: sirve de preparación para los estudios de Facultad y para alguno de los especiales."

Estructura del plan de estudios

Asignaturas	**Clases semanales por curso**				
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**
Religión y moral	6	1	1	1	
Latín y Castellano	12	12	6		
Retórica y poética (acompañadas de la traducción y composición latinas)				6	1
Elementos de Geografía y de Historia		5	5	5	
Elementos de Matemáticas			6	6	
Elementos de Psicología y Lógica					6
Elementos de Física y nociones de Química					6
Nociones de Historia natural					5

Asignaturas voluntarias: Lenguas vivas, dibujo y enseñanzas de adorno para alumnos internos, los externos podrán estudiar las lenguas vivas y dibujo privadamente ó en las clases del Instituto que serán para ellos gratuitas. (Art.147)

No se especifica la duración de las clases. (Plan de 1849: Todas de 1 hora y media)
En el Reglamento de 1851: Todas de hora y media excepto las de latín que los dos primeros años serán de dos horas.(Art.138)

Nivel de ingreso: Diez años y haber cursado la primera enseñanza elemental
Reglamento: Diez años, haber cursado la primera enseñanza elemental y pasar un examen de algunos contenidos de esta.

Libros de texto: Arts. 38 y 39 del plan.
Listas en RO 26 septiembre 1850 (G. de M. de 28 -9-1850)//RO 5 septiembre 1851 (G. de M. de 6 -9-1851)

GEOMETRÍA ANALÍTICA

No aparecen referencias del tercer curso de matemáticas en el que se impartía ni en el plan de estudios ni en la R.O. de 31 de agosto. Sin embargo el artículo 8 de la RO 10 septiembre 1850 (GM 12 -9-1850) en la que se dan las instrucciones para el comienzo del curso, las horas en que comienzan las clases a lo largo del año, como se deben repartir los profesores las asignaturas, etc., se hace referencia a ella, debiendo pagar los propios alumnos que quieran recibirla al profesor.

Tabla 8: Plan de estudios de 28 de agosto de 1850

Las Matemáticas ocupan la misma ubicación y dedicación temporal, manteniendo también la indefinición de contenidos en cada uno de los cursos y sin hacer ninguna precisión que permita ordenarlos.

En cuanto a la manera de controlar la uniformidad de la enseñanza, además de fijar listas de libros de texto –como se hace en el plan-, también se fijan los programas oficiales de las asignaturas que publicará el Gobierno (arts. 140,141) y en el artículo 244 se dan instrucciones a los profesores para que realicen la programación de su asignatura al principio de curso, programación que los alumnos tiene la obligación de adquirir.

Para acceder a la segunda enseñanza, además de tener diez años y realizados los estudios de primera enseñanza elemental –requisitos fijados en el plan-, se establece la obligación de realizar un examen, "particularmente en la escritura, gramática y ortografía," quedando así de nuevo relegados los conocimientos científicos. Y para ingresar en las Facultades Mayores, el reglamento reafirma la obligatoriedad de poseer el grado de Bachiller en Filosofía, para lo cual será necesario superar dos pruebas, reguladas en sus artículos 435 a 442.

En cuanto a los establecimientos en que debe cursarse la segunda enseñanza, reglamento también regula la posibilidad de realizar estos estudios en centros distintos de los Institutos.

Vemos que este reglamento supone un nuevo retroceso y una vuelta a la tradición que se ve reflejada en la potenciación del estudio del latín, alrededor del cual gira toda la enseñanza secundaria –especialmente los primeros años-, en equiparar los Seminarios Conciliares con los Institutos o en fomentar la enseñanza doméstica, entre otros.

De nuevo bajo el ministerio de Bravo Murillo y siendo Ventura González Romero Ministro de Gracia y Justicia -Ministerio al que retorna la Instrucción pública, un síntoma más de la regresión que estaba sufriendo la educación en España-, se aprueba un nuevo **Reglamento el 10 de septiembre de 1852** (G.M. de 17 de septiembre; Utande, 1964, pp. 117 a 160). Dos días antes se publica una Real Orden[8] en la que se recogen los cambios reglamentarios precisos para la adaptación de planes de estudios. Entre ellos destacaremos el cambio de la edad de acceso a la segunda enseñanza –de 10 años se pasa a nueve-, y la propuesta de una segunda enseñanza de seis años, lo que supone un retroceso de casi treinta años, pues esta estructura es muy similar a la del plan de Calomarde de 1824 (Vea,1995). Los tres primeros denominados *de latinidad y humanidades* y los tres últimos, *estudios elementales de segunda enseñanza*, que incluyen el *año preparatorio* para las facultades que antes se realizaba después de los estudios de segunda enseñanza, cambios que se confirmarán en el reglamento.

Su preámbulo comienza reconociendo la labor de las reformas hechas desde 1845 en la instrucción pública a la que considera "uno de los elementos, sino ya el primero, de los que constituyen la prosperidad del Estado", frase que plasma el ideal liberal sobre la importancia de la enseñanza en el desarrollo y progreso de España.

Pero pese a reconocer la mejora que ha sufrido la enseñanza desde 1845 se considera necesaria una reforma y se nombra una Comisión encargada de revisar el antiguo plan de estudios así como el reglamento en vigor. Hecho esto se presenta una reforma que en algunos aspectos presenta unos cambios radicales, tal y como se reconoce en el preámbulo. Estos cambios se refieren por una parte a la enseñanza en sí misma, por otra al régimen de los establecimientos de instrucción. En lo que se refiere a la segunda enseñanza la primera modificación expresada en el preámbulo es la de sus objetivos, "considerando la segunda enseñanza no como estudios generales que completan la educación, sino como medio de prepararse para las Facultades mayores".

Este cambio de planteamiento se debe a que en el plan y reglamento vigentes se establecían demasiadas asignaturas en un mismo año, lo que impedía "los

[8] Real Orden de 8 de septiembre de 1852. Gaceta de Madrid de10 de septiembre de 1852.

adelantamientos de la juventud, que desmayaba rendida al peso de sus difíciles tareas", opinión avalada, parece ser, por padres y profesores (Vea, 1995).

Por ello, y porque el estudio del latín es imprescindible para entender las "obras científicas y literarias más estimadas en todas las Facultades", el reglamento aumenta el número de años, el tiempo y las horas de estudio del latín[9], que será la única asignatura que se estudie en los tres primeros cursos, junto con la Religión.

Por último señala la supresión del estudio de las Lenguas vivas del currículo, indicando que esos estudios pueden adquiridos de manera privada por quienes lo deseen.

Dentro del articulado, las tres primeras secciones se ocupan de la organización general del sistema educativo, y la cuarta *del curso literario y método de enseñanza*.

En el título I comienza estableciendo el calendario escolar. De nuevo se muestra aquí el especial interés que se tiene por los estudios del latín y las humanidades que durarán dos meses más que el resto. Esta predilección se demuestra también en el artículo 67 que regula la duración de las clases y su organización, en el que se especifica que las clases serán de hora y media, excepto las de latín y humanidades que durarán tres horas por la mañana y dos por la tarde.

En este artículo también se establece cómo debe distribuirse el tiempo de las clases, lo que supone un control sobre el profesor. Este control se explicita también en los artículos siguientes: en el artículo 68 se fija que el profesor debe *procurar* concluir el programa de la asignatura al menos quince días antes de los exámenes ordinarios para que el alumno pueda repasar y en el artículo 69 se exige a los profesores que sigan estrictamente los programas que para la asignatura haya fijado el gobierno –excepto en los estudios de doctorado-. El artículo 70 trata sobre los libros de texto, y siguiendo las directrices señaladas en el preámbulo establece que el Gobierno fijará las obras de texto, que serán las mismas para todas las escuelas.

Todas estas medidas suponen una reducción drástica de la libertad de cátedra, objetivo perseguido por los liberales moderados, y a lo que se oponían los profesores y los liberales progresistas (Vea, 1995).

El título II está dedicado a desarrollar el currículo de la segunda enseñanza. Comienza dividiendo esta en dos periodos: el primero llamado *de Latinidad y Humanidades* y el segundo *de Estudios elementales de Filosofía*, ambos de tres años de duración (art.72). El primero se limita prácticamente al estudio del latín y en el segundo se tratan los elementos de Filosofía, entendiendo este término en su sentido tradicional en el que se incluye el estudio de las ciencias. Con esta distribución se considera innecesario el curso preparatorio para las Facultades, que antes era obligatorio cursar después de la segunda enseñanza, y por tanto se elimina.

Vea (1995) señala que tanto la denominación como la estructura suponen un una vuelta al plan de 1824, y a los esquemas clásicos de la enseñanza en España, lo que conlleva la pérdida de la modernidad buscada desde finales del siglo XVIII e impulsada con los primeros planes de estudios de la era isabelina.

En los artículos 72 y 73 se distribuyen las materias por cursos (ver **Tabla 9**). Una vez aprobados los tres primeros cursos, el artículo 73 establece que los alumnos que quieran matricularse en los Estudios elementales de Filosofía habrán de pasar un examen. Tras esto se fijan las asignaturas que componen estos estudios y se indica que aprobados esos tres cursos se podrá aspirar al grado de Bachiller en Filosofía, imprescindible para poder

[9] La asignatura se llama Latín y Castellano.

acceder a las Facultades mayores (art. 196). Como se anunciaba en el preámbulo disminuyen tanto el número de asignaturas cursadas por los alumnos, como el tiempo docente dedicado a algunas de ellas y el número de horas que estos están en el Instituto. A pesar de esto el artículo 81 establece que quedan suprimidos los años preparatorios para el estudio de las Facultades de Farmacia, Medicina y Jurisprudencia, como ya se había adelantado en el preámbulo.

Plan de estudios 10 de septiembre de 1852						
Plan de estudios de 10 de septiembre de 1852 **Gaceta de Madrid de 17 de septiembre de1852**						
Reina: Isabel II **Presidente del gobierno:** Juan Bravo Murillo **Ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas:** Ventura González Romero						
Objetivos "considerando la segunda enseñanza no como estudios generales que completan la educación, sino como medio de prepararse para las Facultades mayores."						
Estructura del plan de estudios						
Asignaturas	**Clases semanales por curso**					
	Latinidad y Humanidades			**Estudios elementales de Filosofía**		
	1º	**2º**	**3º**	**1º**	**2º**	**3º**
Religión y moral	2*	2*	2*			
Latín y Castellano	12*	12*	12*	2	2	2
Elementos de Geografía y de Historia				6		
Elementos de Matemáticas				6	6	
Elementos de Psicología y Lógica. Elementos de Ética						6
Elementos de Física general y de Química general					6	
Nociones de Historia natural						6
En el periodo de latín y humanidades las clases serán de tres horas por la mañana y dos por la tarde.* En los Estudios elementales de Filosofía las clases serán todas de hora y media. (Art. 67) * Dos días a la semana la última hora de la tarde será de Religión. (Art. 72)						
Nivel de ingreso: Nueve años (Art. 194) y haber cursado la primera enseñanza elemental (Art. 294) Para pasar del primer periodo al segundo es necesario haber aprobado los tres primeros cursos y pasar un examen.						
Libros de texto: Art. 70 Lista en R O 15 septiembre 1852 (Gaceta de Madrid de 19-9-1852)						
GEOMETRÍA ANALÍTICA						
No aparece en este plan						

Tabla 9: Plan de estudios de 10 de septiembre de 1852

En el caso de las Matemáticas la situación es la misma que en el plan de 1850, el mismo número de clase y en los mismos cursos, y de nuevo no se especifican los contenidos que deben estudiarse en cada uno de ellos, aunque en opinión de Vea (1995, p. 396)

> Si cabe pensar algo es el mantenimiento de la idea del plan de 1849 de Bravo Murillo, tanto por no modificarlo esencialmente las disposiciones legales posteriores como por la afinidad ideológica de los autores de las reformas de 1850 y 1851 con Juan Bravo Murillo –que era Presidente del Consejo de Ministros en el momento de publicar el reglamento de 1851-.Por lo que cabe pensar en una distribución de Aritmética y Álgebra para el primer curso de Matemáticas, y de geometría, Trigonometría –probablemente sólo plana- y Topografía para el segundo.

En cuanto a los estudios de un tercer año de Matemáticas que amplíe los contenidos vistos en el segundo periodo de la segunda enseñanza, no se hace ninguna referencia a ellos en ningún punto del reglamento.

En el artículo 194 se fijan los requisitos para matricularse en la segunda enseñanza: tener nueve años de edad –inferior a la de otros planes de estudios- acreditar mediante un certificado expedido por un profesor de primeras letras el haber realizado "los estudios prevenidos en el artículo 4º de la ley de Instrucción primaria", y pasar en el Instituto un "examen riguroso, particularmente de la escritura, gramática y ortografía", dejando de nuevo relegadas el resto de asignaturas, sin importar los conocimientos que de ellas se posean. También se trata de las condiciones para acceder a los Estudios Elementales de Filosofía y a las Facultades mayores –que ya hemos comentado-, y para pasar de un curso a otro.

En conclusión, la reforma de Ventura González Romero lejos de establecer una segunda enseñanza moderna acorde con los ideales liberales y tan necesaria para el progreso del país, supone una vuelta al pasado y a los antiguos *estudios de latinidad,* "alcanzando el punto máximo de conservadurismo del periodo 1845-1857" (Vea, 1995, p.331).

Después de diez años de gobierno moderado suben al poder los progresistas, aunque sólo durante dos años -de 1854 a 1856-, periodo en el que no se llegó a promulgar ningún plan de estudios ya que todos sus esfuerzos se dirigieron hacia la elaboración de una Ley General de Instrucción pública, que una vez más se quedó en proyecto al no conseguir los progresistas que fuera aprobada por las Cortes.

Habrá que esperar hasta 1857 para que una ley que dote al sistema educativo de una estabilidad que aún no había conseguido, vea la luz, ley que marcará un antes y un después en el desarrollo del sistema educativo español.

Como hemos hecho para el periodo anterior revisaremos los contenidos de Geometría Analítica en la enseñanza secundaria durante estos años.

2.5.3.1. La Geometría Analítica en la Enseñanza Secundaria (1845-1857)

Como hemos visto el periodo que estamos estudiando comienza con la aprobación del Plan General de estudios de 17 de septiembre de 1845. En este plan se establece una enseñanza secundaria dividida en dos niveles -elemental y de ampliación- de corte clásico el primero, con preferencia en el estudio del latín y de las asignaturas de humanidades, y con una orientación más moderna el segundo que se divide a su vez en dos secciones: Ciencias y Letras.

Siguiendo el planteamiento expresado en el preámbulo de incluir el estudio de las matemáticas en los últimos años, "y aún entonces no son obligatorias más que en la parte indispensable para los usos comunes de la vida", estas se estudian primero y cuarto de la segunda enseñanza elemental. Los contenidos fijados para el primer curso son *Ejercicios de cálculo aritmético. Nociones elementales de geometría. Elementos de Geografía;* y para el cuarto *Complemento de la Aritmética; Álgebra hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive; Geometría; Trigonometría rectilínea; Geometría práctica.*

Como vemos, al limitarse a un estudio de los contenidos básicos de las Matemáticas no se incluyen dentro de las asignaturas de estos dos cursos contenidos de Geometría analítica. Sin embargo al especificar las asignaturas de 5º curso se da la posibilidad de ampliar estos estudios para los que así lo deseen:

> Art 5: Donde pudiere ser, habrá un segundo profesor de Matemáticas elementales, que alternando con el primero, explicará a los que quieran seguir este estudio el complemento del Álgebra, la aplicación de ésta a la Geometría, las secciones cónicas y los principios del cálculo diferencial e integral.

Dada la situación económica y la escasez de medios y profesorado cualificado, es muy probable que esta asignatura se pudiera ofertar en muy pocos centros.

Señalar también que los contenidos de Geometría Analítica siguen apareciendo bajo la denominación de *aplicación del álgebra a la geometría*, junto con el estudio de las *secciones cónicas*.

Además de esta asignatura, en la segunda enseñanza de ampliación se incluye una asignatura, *Matemáticas sublimes,* que debía cursarse al menos en dos años y de la que no se especifica su contenido, aunque Vea (1995) señala que esta denominación respondía en algunos textos a los contenidos expuestos para la asignatura adicional de Matemáticas de la segunda enseñanza elemental.

El Plan de 24 de junio de 1846 modifica la ordenación de contenidos de la segunda enseñanza, y en el caso particular de las Matemáticas se introducen bastantes cambios. Como ya hemos señalado se produce un aumento de la dedicación docente en el conjunto de los cinco cursos. Las seis clases de primer curso son de *Elementos de geografía* -que siguen formando parte de la asignatura de Matemáticas- y que en el plan de 1845 sólo tenía dos clases en primero. El resto corresponden a dos nuevas asignaturas: *Aritmética y Geometría*-en cuarto curso- y *Álgebra, Trigonometría rectilínea y Topografía*, en quinto, que corresponden a una reorganización de los contenidos de las asignaturas que aparecen en el plan Pidal.

En relación a los estudios de ampliación, la reforma de 1846 hace muy pocos cambios, manteniéndose dos cursos más de Matemáticas, conducentes a los títulos de Licenciado, y Doctor en ciencias, respectivamente, como se expresa en el artículo 4.

Sin embargo, en este plan no se hace ninguna alusión a la asignatura voluntaria de Matemáticas, propugnada por el plan y el reglamento de 1845. No sabemos si esto indica que en ese punto se mantienen las disposiciones del plan anterior, o es que se deseaba eliminarla.

En cualquier caso la idea de una asignatura voluntaria de Matemáticas que amplíe los conocimientos adquiridos en la educación secundaria volverá a aparecer en el Reglamento de 19 de agosto de 1847 que desarrolla el Plan de estudios de 8 de julio de 1847. Este reglamento establece dos asignaturas de Matemáticas, en los cursos tercero y cuarto de la segunda enseñanza, denominadas *Curso preparatorio de Matemáticas (aritmética y algunas nociones de geometría)* y *Matemáticas elementales (álgebra* *hasta las ecuaciones de segundo grado inclusive, geometría trigonometría plana y nociones de topografía)*, respectivamente (art. 66), de lección alterna la primera y diaria la segunda. Frente a un recorte horario en la asignatura de tercero, el artículo 67 establece la posibilidad de estudiar un *segundo curso de matemáticas elementales* a aquellos alumnos que quieran seguir estudiando en las escuelas especiales.

> En el último año, los que quieran seguir carrera para escuelas especiales, en vez del estudio de la lógica, podrán hacer el segundo curso de matemáticas elementales, que consistirá en el complemento del álgebra, la trigonometría, la geometría analítica y la topografía (art. 67).

Dos comentarios acerca de esta asignatura. En primer lugar señalar la diferencia de matiz en el carácter de esta tercera asignatura de Matemáticas, que pasa de ser voluntaria -es decir, una asignatura complementaria al currículo establecido-, a ser optativa, ya que se puede elegir entre cursar las Matemáticas o la Lógica, pero hay que cursar obligatoriamente una de las dos. Además va dirigida a un grupo de alumnos muy concreto, los que quieran realizar los Estudios Especiales, que sin duda necesitarían una ampliación de los conocimientos básicos de Matemáticas que recibían en la segunda enseñanza.

A esto hay que añadir el artículo 78 que regula quién debe impartir esta asignatura:

> Cuando se presenten alumnos que quieran estudiar los cálculos sublimes y la mecánica donde no haya nombrado profesor especial para estas materias, las enseñarán en horas distintas los catedráticos de matemáticas elementales, recibiendo por este trabajo una retribución proporcionada.

Se observa que a diferencia del plan de 1845 que limitaba la posibilidad de ofertar la tercera asignatura de matemáticas a aquellos centros que tuvieran medios –que debían ser muy pocos-, el plan de 1847 asegura que todo alumno que desee cursar esta asignatura podrá hacerlo, ya que no se fija un número mínimo de alumnos para que se dé la asignatura, y garantiza que todos los centros tendrán un profesor que la imparta. Esto da idea de la importancia que se dio a este *segundo curso de matemáticas elementales.* Importancia que irá perdiendo a lo largo del tiempo.

Un segundo comentario que debemos acerca de esta asignatura es sobre los contenidos que abarca. En relación con el plan de 1845 desaparecen el Cálculo Diferencial e Integral y aumentan los contenidos de Geometría. Los contenidos de Geometría Analítica, aparecen en este plan bajo esta denominación, en vez de la anterior *Aplicación del álgebra a la geometría.*

El Plan de estudios de 14 de agosto de 1849 presenta algunos cambios en la enseñanza de las Matemáticas. Aunque sigue habiendo dos cursos de Matemáticas, uno en tercero *–Matemáticas: Aritmética y Álgebra-*, y otro en cuarto *–Matemáticas: Geometría, Trigonometría y Topografía-*, aumenta el número de horas en tercero –pasa a ser de lección diaria- y cambia la distribución de los contenidos a lo largo de los dos cursos.

En cuanto a la tercera asignatura de matemáticas que aparecía en el plan de 1847, en este no se hace ninguna referencia a ella cuando se hace la distribución de materias por curso, sin embargo, existen dos artículos cuyo contenido nos hace pensar que esta asignatura se conserva. Por un lado está el artículo 11, último del plan, que dice:

> En todo aquello que no se altere por el presente arreglo, o no lo estuviere ya por anteriores, queda subsistente el título II, sección 2ª, del reglamento vigente de estudios.

Y ese título es el referente a la segunda enseñanza y en su artículo 67 habla del *segundo curso de matemáticas elementales*, como ya hemos visto. Por otra parte el artículo 8 establece:

> (...) Si se presentasen por lo menos cuatro alumnos para el tercer año de Matemáticas, les enseñará el mismo catedrático en horas extraordinarias, con el sueldo que se designará; y si hubiese dos catedráticos, desempeñarán alternativamente la enseñanza de dicho tercer año, sin aumento alguno en la dotación que tuvieran señalada.

Todo ello nos lleva a pensar que esta tercera asignatura de Matemáticas se rige por lo establecido en el plan de 1847, excepto en los cambios especificados en el artículo 8, consistentes en fijar un número mínimo de alumnos para poder impartirla, y en no gratificar a los profesores que la impartan, si en el Instituto hay dos. Ambos cambios suponen un perjuicio para esta asignatura, especialmente el primero, ya que si consideramos el reducido número de alumnos que cursaban la segunda enseñanza, en muchos centros no se conseguirían los cuatro alumnos necesarios para poder impartirla.

Además de en los estudios elementales, este tercer curso también aparece en la S*ección de ciencias físico-matemáticas* de la Facultad de Filosofía, junto con los *Cálculos sublimes* y otras asignaturas de ciencias, para obtener el grado de licenciado.

El plan de estudios de 28 de agosto de 1850 hace en su preámbulo una defensa de los estudios de las Ciencias físico-matemáticas, defensa que contrasta con la organización de materias para la segunda enseñanza que hace en el artículo 7. En relación con las Matemáticas sólo se dice que se deben estudiar *Elementos de Matemáticas*, sin hacer más especificaciones, y no se hace referencia en ningún momento al tercer año.

En la Real Orden de 31 de agosto de 1850, en la que se distribuyen las materias por cursos, se establecen dos asignaturas de lección diaria en los cursos tercero y cuarto, bajo la denominación genérica de *Matemáticas*, sin especificar los contenidos que debían incluirse en cada una de ellas. Tampoco se hace ninguna mención en esta Real Orden al tercer año de Matemáticas.

Sin embargo en la Real Orden de 10 de septiembre de 1850, en la que se exponen algunas disposiciones adicionales para el desarrollo del plan sí se hace alusión al tercer curso de Matemáticas en su artículo 8:

> Los dos cursos de matemáticas se darán por el mismo profesor donde no hubiere más que uno para esta asignatura; donde hubiere dos alternarán en esta enseñanza. Si se presentasen alumnos para estudiar el año de álgebra superior y geometría analítica, alternarán tambien en esta enseñanza los Catedráticos de matemáticas si fueren dos; pero si no hubiere mas que uno, este deberá darla en horas extraordinarias, mediante una retribución que le habrán de satisfacer sus discípulos de esta clase.

Existen dos diferencias en este artículo respecto a las leyes anteriores, por un lado no se fija un número mínimo de alumnos para que pueda impartirse la clase, pero a cambio se establece que sean los mismos alumnos los que paguen al profesor por su trabajo. Esta medida, de carácter económico, va a afectar muy negativamente a esta asignatura que vuelve a ser, más que nunca voluntaria. Como afirma Vea, que el coste de dicha asignatura sea a cargo de quienes la reciban

> supone una pérdida de oficialidad real de la asignatura, que se imparte al margen de cualquier recomendación educativa, que está vacía de valor académico y que,

> sólo, la consciencia sobre el nivel de formación matemática de la segunda enseñanza, el interés por el aprendizaje de una materia útil y la capacidad económica de los padres o tutores de los alumnos van a favorecer su estudio (Vea, 1995, p. 396).

El artículo 151 del Reglamento de 10 de septiembre de 1851 dice exactamente lo mismo que el citado anteriormente, sin embargo añade: "En uno y otro caso los alumnos habrán de estar matriculados en el Instituto para que les sea válido el estudio; pero en el segundo no pagarán derechos". El obligar a los alumnos a estar matriculados en la asignatura para poder cursar este tercer curso de Matemáticas lo vuelve a dotar de oficialidad real y de un reconocimiento académico que se no explicitaba en la legislación de los años anteriores. Este valor académico aumenta si tenemos en cuenta que era necesario tener aprobado el *álgebra superior y la geometría analítica* para poder cursar algunas de las asignaturas de la sección de ciencias de la Facultad de Filosofía, como se establece en el artículo 158 del reglamento.

El Reglamento de estudios de 10 de septiembre de 1852, supone una vuelta a la antigua estructura de los estudios filosóficos –aunque con bastantes diferencias- con dos periodos: el primero de Latinidad y Humanidades -que se limita prácticamente al estudio del latín-, y el segundo denominado Estudios Elementales de Filosofía, en el que se incluyen los contenidos científicos.

Los contenidos de Matemáticas se incluyen, pues, en el segundo periodo. Se establecen dos asignaturas de lección diaria, en primero y segundo, denominadas *Elementos de Matemáticas y Continuación de los Elementos de Matemáticas*, respectivamente, sin especificarse en el reglamento los contenidos de dichas asignaturas.

En este plan desaparece totalmente el tercer curso de Matemáticas de la segunda enseñanza –y con él los contenidos de Geometría Analítica-, ya que no se hace ningún tipo de referencia a él, ni a la hora de distribuir las asignaturas por cursos, ni a la hora de establecer las asignaturas que debía impartir cada profesor, como ocurría en otros casos. Sin embargo la asignatura se mantendrá en la Facultad de Filosofía con la denominación dada en el reglamento de 1851 *–álgebra superior y geometría analítica-* hasta 1857, como consta en las listas de libros de texto propuestos para esta Facultad.

El fijar los libros de texto que debían ser utilizados por los profesores fue costumbre en todos los planes de estudios del periodo. Esta medida, con la que se controlaba en gran parte la labor del profesor, estaba encaminada a conseguir una uniformidad en la enseñanza de la que careció el periodo anterior.

Siguiendo la norma, cada año se publicaron las listas a principio de curso, exceptuando el curso 1845/1846.

Las listas de libros correspondientes a la asignatura voluntaria de Matemáticas, en la que se incluyen los contenidos de Geometría Analítica, se encuentran recogidas en el apartado de selección de las fuentes (capítulo 3).

Hay que señalar, que aunque la asignatura voluntaria de Matemáticas desaparece de la segunda enseñanza a partir del plan de estudios de 1852, sigue apareciendo en las listas de los libros de texto, pues, como ya hemos señalado antes, era una asignatura del currículo de la Facultad de Filosofía, en la sección de Ciencias.

En conclusión, durante este periodo los contenidos de Geometría Analítica formaron parte del currículo de la segunda enseñanza, aunque como asignatura optativa unas veces, como voluntaria la mayoría. En los primeros planes de estudios fue mejor valorada, pero a medida que estos van volviéndose más conservadores aumentan las trabas que se ponen al estudio de esta asignatura, llegando a desaparecer en el plan de estudios de 1852, aunque se mantenía dentro de los estudios de la Facultad de Filosofía.

2.5.4. De la Ley Moyano al Sexenio Revolucionario (1857-1868)

En esta situación educativa se llega al 9 de septiembre de 1857, fecha en la que se aprueba la Ley de Instrucción Pública (Gaceta de Madrid de 10 de septiembre), siendo ministro de Fomento Claudio Moyano; aunque ya el 17 de julio de ese mismo año se había aprobado la Ley de Bases.

La Ley Moyano divide la instrucción pública en cinco clases de estudios: primera enseñanza, segunda enseñanza, estudios de Facultad, enseñanzas superiores y enseñanzas profesionales.

La segunda enseñanza, queda dividida en dos tipos: estudios generales, que se cursan en seis años; y estudios de aplicación a las profesiones industriales. Con los primeros se obtiene el título de Bachiller en Artes y con los segundos un certificado de perito en la carrera correspondiente.

En lo que a nuestro tema de estudio se refiere, hemos de señalar que entre las asignaturas que se fijan para este periodo educativo no se encuentra la Geometría Analítica, que pasa a formar parte del currículo de la Facultad de Ciencias como veremos.

Las Facultades y las Escuelas de Enseñanza Superior y Profesional las desarrolla en el título III. En él enumera las seis Facultades que puede haber en la Universidad: Filosofía y Letras, Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Farmacia, Medicina, Derecho y Teología (art. 31).

En el articulado se establece que la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, se divide en tres secciones: Ciencias Físico-matemáticas, Ciencias Químicas y Ciencias Naturales, cuyos estudios se regularán en reglamentos, aunque en el artículo 34 especifica las asignaturas que comprende, que son: Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo diferencial e Integral, Geometría Descriptiva, Geodesia, Mecánica, Física, Astronomía, Geografía física y matemática, Química, Análisis químico, Mineralogía, Botánica, Zoología, Geología y Ejercicios gráficos y trabajos prácticos.

En las Facultades se podrán obtener tres grados: Bachiller - que no se debe confundir con el Bachiller en Artes- Licenciado y Doctor (art. 32).

En los capítulos II y III regula las enseñanzas superiores y las profesionales. Las primeras comprenden las Ingenierías de Caminos, Canales y Puertos, Minas, Montes, los Ingenieros agrónomos, los industriales, la enseñanza de Bellas Artes (que incluye Arquitectura), la de Diplomática y la de Notario. Estas carreras son interesantes desde el punto de vista de nuestro estudio pues en el artículo 76 se fija que "se estudiarán en las facultades de Filosofía y Letras y en la de Ciencias exactas, físicas y naturales, las materias pertenecientes a ellas, que forman parte de otras facultades ó carreras". En el caso de las enseñanzas superiores, en casi todas ellas se estudian varias asignaturas de las que forman parte de la facultad de Ciencias, en particular la Geometría Analítica aparece en los planes de estudios de todas las ingenierías y de Arquitectura (arts.48-57).

En cuanto a los programas y libros de texto que se deben utilizar, en el artículo 84 se establece que el gobierno publicará programas generales para todas las asignaturas, excepto las propias de doctorado. De igual manera las asignaturas de todos los estudios hasta el grado de licenciado "se estudiarán por libros de texto: estos libros serán señalados en listas que el Gobierno publicará cada tres años" (Art. 86)

También se establece en la Ley que las Universidades y Escuelas superiores y profesionales serán sostenidas por el Estado (art. 126) y que habrá diez Universidades, una Central, en Madrid, y nueve de Distrito: Barcelona, Granada, Oviedo, Salamanca, Santiago, Sevilla, Valencia, Valladolid y Zaragoza (arts. 127, 128). En la primera se establecerán todas las facultades hasta el grado de doctor, pero en las demás solo algunas de ellas y en algunos grados.

La ley fija las Universidades en las que se creará cada una de las nuevas facultades, excepto para la Facultad de Ciencias, lo que supone un agravio comparativo con respecto a las demás, como señala Vea (1998). Habrá que esperar a 1860 para que queden explícitamente establecidas las Universidades en las que habrá Facultad de Ciencias: en Madrid, donde se cursará hasta el doctorado y Barcelona, Granada, Santiago, Sevilla, Valencia y Valladolid, donde se podrá cursar el grado de Bachiller (Vea, 1998, p. 543). Aún así en el art. 136 de la Ley se fija cómo está constituida la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, que contará con una Escuela Superior de Ciencias Exactas, Física y Química, un Museo de Historia natural y un Observatorio astronómico.

La ley solo establece esquemáticamente cada tipo de estudios, que serán debidamente desarrollados en posteriores reglamentos. El primero de ellos es el **RD de 23 de septiembre de 1857** (G.M de 24 de septiembre) se dictan las disposiciones provisionales que deben regir durante el curso 1857/58, y en cuyo artículo 34 se desarrollan los estudios de la Facultad de Ciencias.

En el R.D se establece que los tres primeros cursos son comunes para las tres secciones, obteniendo al final de ellos el grado de Bachiller en Ciencias, tras lo que se podrá ingresar en cualquiera de las tres secciones. Cursando otros dos años las asignaturas que se especifican para cada una de ellas se obtendrá el grado de Licenciado en Ciencias físico-matemáticas, Químicas o Naturales, y tras otros dos años más el grado de Doctor en las diferentes secciones (ver **Tabla 10**).

Pero como decimos, esas son unas disposiciones provisionales, aprobándose los programas de las Facultades de Filosofía y Letras, Ciencias, Derecho, Medicina y Farmacia por el **R.D. de 11 de septiembre de 1858** (Gaceta de Madrid de 10 de septiembre).

En la exposición se establecen los fines de las Facultades de Filosofía y Letras y Ciencias:

Sirven para formar profesores que las enseñen dignamente, y para que en ellas adquieran la preparación necesaria los alumnos de aquellas carreras que exigen otras preliminares además de la segunda enseñanza.

Plan de estudios de 23 de septiembre de 1857							
Gaceta de Madrid de 24 de septiembre de 1857							
Reina: Isabel II **Presidente del gobierno:** Ramón María Narváez **Ministro de Fomento:** Claudio Moyano Samaniego							
Estructura del plan de estudios							
Asignaturas de la Facultad de Ciencias Físico-matemáticas	**Clases semanales por curso**						
	Bachiller			**Licenciado**		**Doctor**	
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**
Álgebra	6						
Física	6						
Geometría Y Trigonometría		6					
Química		6					
Historia natural			6				
Ejercicios gráficos			6				
Geometría Analítica				6			
Geometría Descriptiva				6			
Cálculos diferencial e integral					6		
Geografía astronómica, física y política					6		
Mecánica						6	
Geodesia						6	
Astronomía física y de observación							6
Física matemática							6
Nivel de ingreso: Se requiere poseer el título de Bachiller en Artes							
Libros de texto: No existen listas de libros para ese curso.							
GEOMETRÍA ANALÍTICA							
Existe una asignatura de Geometría Analítica en cuarto curso de carrera, el primero de los estudios de licenciatura.							

Tabla 10: Plan de estudios de 23 de septiembre de 1857

Por ello se dispone que los primeros estudios tanto en una como en otra “sean aquellos que disponen el entendimiento para la aplicación concreta, objeto de las demás profesiones facultativas” (Exposición). Vemos así que en la práctica no se le da el mismo rango a estas facultades que a las demás, pues no se consideran como carreras en sí mismas. Esto se remarca más adelante cuando se dice “por lo mismo que sus estudios no son de aplicación inmediata, es menos fácil que, en las demás distinguir lo necesario de lo meramente útil” (Exposición). Y se señala que aunque los que se dedican a su estudio insisten en que se extiendan sus enseñanzas en las Universidades, “desde la esfera del Gobierno hay que mirar la cuestión bajo un punto de vista práctico y poner en relación los esfuerzos que se exijan a los alumnos con las ventajas que racionalmente puedan prometerse de la carrera emprendida” (Exposición).

En el articulado se especifica que para poder matricularse en la Facultad de Ciencias se requiere ser Bachiller en Artes, y se deja libertad en cuanto al orden y la duración de los estudios ya que la reforma "acomoda los estudios á la diversidad de capacidades y de fortunas", según se especifica en el prólogo.

Así en el artículo 2 se establece que para obtener el grado de bachiller en esa Facultad se deben cursar "en dos años a lo menos" siete asignaturas, entre las que se encuentran *Complemento de Álgebra, Geometría y Trigonometría rectilínea y esférica,* y *Geometría Analítica en dos y tres dimensiones* (ver **Tabla 11**).

Los estudios posteriores al grado de Bachiller se dividen entre secciones: Ciencias Exactas, Ciencias Físicas y Ciencias Naturales. Para ser licenciado se deben estudiar al menos en dos años una serie de asignaturas, específicas para cada sección (arts. 4, 6,8). De igual manera para ser doctor se deben cursar unas asignaturas específicas para cada sección (arts. 5, 7 y 9), aunque en este caso no se fija el tiempo mínimo para realizarlas.

En el **R.D. de 20 de septiembre de 1858** (Gaceta de 23 de septiembre) en el que se aprueban los programas de las carreras superiores y profesionales se expresa de nuevo la idea de la Facultad de Ciencias como una facultad preparatoria para otros estudios, a la vez que se intenta potenciar a través de esta vía. Así se dice que "no es conveniente que los estudios propios de la enseñanza superior se emprendan antes de la adolescencia" (Exposición) por la falta de madurez de los alumnos, por lo que es provechoso, tras finalizar el Bachillerato, prepararse para ellas durante unos años y hacerlo en la Facultad de Ciencias.

Por otra parte se pretende dar un impulso a esta nueva facultad, como decimos:

> Es necesario vivificar la Facultad de Ciencias con tan ventajosas condiciones de estudio, estableciendo su enseñanza en edificio a propósito, dotándola de un reglamento conveniente, adoptando, en fin, las providencias necesarias para convertirla en una verdadera Escuela Politécnica (Exposición).

Pero mientras esto ocurre se aconseja seguir con los estudios de las carreras especiales tal y como se encuentran pues "en el día casi todos los estudios de ciencias puras, que exigen las carreras especiales, se hacen en sus mismas escuelas, donde una disciplina severa produce sazonados frutos de doctrina y aprovechamiento" (Exposición). Es decir en la práctica los estudios preparatorios se hacían en las propias escuelas y no en la Facultad, y así se propone seguir haciéndolo, al menos de momento.

A pesar de todo en el articulado se recoge que para ingresar en las Ingenierías y en Arquitectura se necesita el Bachiller en Artes y haber estudiado en la Facultad de Ciencias al menos en tres años (excepto Agrónomos que son dos) una serie de asignaturas que varían según la carrera (art. 1 de los programas de cada carrera), con lo que parece que la idea es que en el futuro la nueva facultad sí se haga cargo de esos estudios.

Entre las asignaturas que se deben cursar se encuentra la Geometría Analítica, para todas las ingenierías y la Arquitectura.

Este plan de estudios estará en vigor durante ocho años, hasta que el **24 de octubre de 1866** y siendo Ministro de Fomento Manuel de Orovio se aprueba una nueva reforma de la Facultad de Ciencias.[10]

[10] El Real Decreto en el que se reforma la Facultad de Ciencias, así como otro en el que se fijan los estudios previos al ingreso en las escuelas especiales que han de realizarse en esa facultad, ambos aprobados el 24/09/1866, se publican en la Gaceta de 24 de octubre, y de nuevo en la de 27 pues en la primera publicación hay errores.

<table>
<tr><th colspan="4">Reglamento del Marqués de Corvera</th></tr>
<tr><td colspan="4">R.D de 11 de septiembre de 1858 /RO de 13 de septiembre de 1858
Gaceta de Madrid de 14 de septiembre de 1858</td></tr>
<tr><td colspan="4">Reina: Isabel II
Presidente del gobierno: Leopoldo O'Donnell
Ministro de Fomento: El Marqués de Corvera</td></tr>
<tr><td colspan="4">Finalidades: Fines prácticos:
Sirven para formar profesores que las enseñen dignamente, y para que en ellas adquieran la preparación necesaria los alumnos de aquellas carreras que exigen otras preliminares además de la segunda enseñanza (Exposición).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Estructura del plan de estudios</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Asignaturas del grado de Bachiller y de la sección de Ciencias Exactas. (Arts.2, 4 y 5)</td><td colspan="3">Clases semanales por curso (Art. 10)</td></tr>
<tr><td>Bachiller</td><td>Licenciado</td><td>Docto</td></tr>
<tr><td>Al menos dos años</td><td>Al menos dos años</td><td></td></tr>
<tr><td>Complemento de Álgebra, Geometría y Trigonometría Rectilínea y Esférica</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Geometría Analítica de dos y tres dimensiones</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Geografía</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ampliación de Física Experimental</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Química General</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Zoología, Botánica y Mineralogía con nociones de la Geología</td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cálculos diferencial é integral de diferencias y variaciones</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Mecánica</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Geometría Descriptiva</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Geodesia</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Astronomía física y de observación</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>Física matemática</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="4">Además de las asignaturas indicadas arriba, los alumnos del grado de Bachiller "probarán tener conocimientos de dibujo lineal hasta copiar los órdenes de Arquitectura. (art.2)
Durante el periodo de licenciatura "se ejercitarán diariamente los alumnos, bajo la dirección de sus profesores, en la resolución de problemas y demás trabajos gráficos correspondientes a las asignaturas que comprende". (art. 4)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nivel de ingreso: Se requiere poseer el título de Bachiller en Artes (art. 1)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Libros de texto: Gaceta de Madrid de 14-9-1858/ R.O. 25-9-1858/Circular de 12 de octubre de 1859/R.O. 15-10-1861/R.O.10-9-1862/R.O. 26-9-1863/R.O. 31-9-1864 (para el trienio)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Geometría analítica</td></tr>
<tr><td colspan="4">Existe una asignatura de Geometría Analítica dentro de los estudios de Bachiller, y en las Ingenierías de Caminos, Canales y Puertos, de Montes, Industriales y Agrónomos y en la de Arquitectura, que se debe cursa en la Facultad de Ciencias. (art. 1 de cada programa de estudios del R.D. de 20 de septiembre de 1858).</td></tr>
</table>

Tabla 11: Reglamento del Marqués de Corvera

En la exposición se defiende de nuevo la idea de una facultad de Ciencias preparatoria para las escuelas especiales, desarrollándose esta idea en el articulado:

> Art.6. La Facultad de Ciencias dará en adelante los estudios teóricos que son de su instituto á otras Facultades y carreras, (…)
>
> Art. 7. Los aspirantes al título de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, de Ingenieros de Minas e Industriales, cursarán tres años en la Facultad de Ciencias, y dos los aspirantes á Ingenieros de Montes, sin perjuicio de los estudios prácticos y de aplicación propios de cada carrera, que harán en las respectivas Escuelas especiales á tenor de lo que dispongan los reglamentos.

Esta medida encontró gran oposición por parte de las Escuelas de Ingenieros, que llevaban funcionando más de una década, y en las que el nivel de estudios era superior al de dicha Facultad (Sánchez, 1992).

En la *Revista de Obras Públicas*, y de manera anónima, Echegaray argumentaba que las enseñanzas de facultades y escuelas especiales eran radicalmente distintas y que lo que ocurriría con esa medida sería que la Facultad de Ciencias se vería perjudicada. Echegaray auguraba que esta facultad terminaría siendo poco más que la preparación por el Estado para el ingreso en las Escuelas Especiales, de tal manera que en ella se enseñarían las materias que enseñaban hasta entonces profesores particulares y poco más (García, 1984; Sánchez, 1992).

Con todo, como señala Sánchez (1992), el que se siguieran impartiendo las asignaturas de matemáticas puras en las respectivas escuelas y en escuelas privadas redundó en perjuicio de las Facultades de Ciencias, pues si bien es cierto que una matemática más avanzada y pura podría haberse visto perjudicada por la asociación con las escuelas especiales, la matemática española no se encontraba todavía en tal estado de desarrollo.

Así, y a pesar de que también los alumnos que querían cursar Medicina y Farmacia debían hacer los estudios comunes en esta facultad, el número de alumnos que se contabilizaban en el curso 1857/58 eran de 327, frente a los 4216 de Derecho o los 1372 de Medicina; y de 642 en el curso 1867/68, frente a más de 4000 en Derecho y casi 6000 en Medicina (Peset y Peset, 1992). También el número de catedráticos, recogido en el R.D de 14 de marzo de 1860, es menor en esta Facultad que en las restantes, incluso en la de Filosofía y Letras que se creó junto a ella (Sánchez, 1992), lo que demuestra el poco desarrollo que tuvo en los primeros años.

En cuanto a la organización de los estudios, el plan de Orovio divide la facultad en dos secciones: Ciencias Físico-matemáticas y químicas y Ciencias naturales (art. 2). Se establece que los estudios de Bachiller serán comunes a ambas (art. 2) y se cursarán en dos años, en los cuales se estudiarán las asignaturas que se especifican en el artículo 3 (ver **Tabla 12**), es decir, en este plan se vuelvan a fijar las asignaturas que se deben estudiar en cada curso. Para obtener el grado de Licenciado se deben cursar dos años más y otro más para obtener el grado de doctor. En ambos casos se fijan las asignaturas que se deben estudiar cada curso.

Tras el R.D de reforma de la Facultad de Ciencias se incluye otro de igual fecha (24 de octubre), en el que se indican los estudios a realizar en esta Facultad por los alumnos de las carreras de Ingeniero de Caminos, de Minas, de Montes e Industriales. Entre ellos, de nuevo, se encuentra la Geometría Analítica, que en este caso se cursará en segundo curso de cada una de las carreras citadas.

Plan de Orovio

R.D de 24 de octubre de 1866 de reforma de la Facultad de Ciencias
Gaceta de Madrid de 25 y 27 de octubre de 1866.

Reina: Isabel II
Presidente del gobierno: Ramón María Narváez
Ministro de Fomento: Manuel de Orovio

Finalidades:
Art.6. La Facultad de Ciencias dará en adelante los estudios teóricos que son de su instituto á otras Facultades y carreras, (…)

Estructura del plan de estudios

Asignaturas del grado de Bachiller y de la sección de Ciencias Físico-Matemáticas (Art. 2)	**Clases semanales por curso (Art. 10)**				
	Bachiller		**Licenciado**		**Docto**
	1º	**2º**	**1º**	**2º**	
Complemento de Álgebra, Geometría y Trigonometría Rectilínea y Esférica	6				
Química general	6				
Mineralogía y Botánica	3				
Geometría Analítica de dos y tres dimensiones		6			
Ampliación de la Física		3			
Cosmografía		3			
Zoología		3			
Cálculo diferencial e integral			6		
Geometría descriptiva			6		
Ampliación de la Química			3		
Mecánica racional				6	
Geodesia				3	
Prácticas de química				3	
Astronomía física y de observación					3
Análisis química					3

Art.4 Los alumnos de la Facultad de Ciencias deberán dar pruebas en el grado de Bachiller de conocimiento de Dibujo Lineal hasta copiar dos órdenes de Arquitectura; asimismo en el periodo de la Licenciatura deberán estudiar privadamente lengua inglesa o alemana.

Nivel de ingreso: Se requiere poseer el título de Bachiller en Artes (art. 2)

Libros de texto: R.D 22 de septiembre de 1867.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Existe una asignatura de Geometría Analítica en el segundo curso de los estudios de Bachiller, y en segundo curso de las Ingenierías de Caminos, Canales y Puertos, de Montes, Industriales y de Minas, que se debe cursa en la Facultad de Ciencias. (art. 2 del R.D en el que se regulan estos estudios)

Tabla 12: Plan de Orovio

Por último señalar que en el artículo 1 del RD de reforma se establece que en la Universidad Central habrá una Facultad de Ciencias completa, pero no se especifica en qué otras Universidades y hasta qué grado se creará. Sin embargo, un año después, en el RD de 19 de julio de 1867 se establece que además de los estudios completos en Madrid, habrá hasta el Grado de Licenciado en la sección de Ciencias Físico-Matemáticas en Barcelona, y hasta el Grado de Bachiller en Granada, Sevilla y Valencia (art.2) suprimiéndose las facultades de las Universidades de Santiago, Valladolid y Zaragoza (art.3).

Como vemos, a lo largo de los años en vez de ir desarrollándose y extendiéndose se cierran facultades y en las que quedan prácticamente sólo se dan los estudios preparatorios para otras carreras. Peset y Peset (1992) achacan esta falta de desarrollo a las características del país:

> (…) en una España agrícola y subdesarrollada las salidas eran pocas, todo lo más la enseñanza en la universidad o en los institutos. De ahí que no se multiplicasen las Facultades de Ciencias, eran costosas, y muchas veces, aun existiendo, no poseen más que los cursos de preparatorio para otras carreras… (Peset y Peset, 1992, p. 38)

Por otra parte esta centralización hizo muy difícil que se pudiese generar una dinámica académica de promoción de nuevas disciplinas y competencia por el profesorado como la que se dio en las Universidades alemanas del mismo siglo, como señala Sánchez, (1992), lo que impidió un desarrollo de la Ciencia en España equiparable al resto de Europa.

Por tanto se llega al último tercio de siglo con una Facultad de Ciencias que no tiene en la práctica entidad en sí misma, con continuos cambios de currículum y pobre en alumnado y profesorado, lo que repercute de forma claramente negativa en la educación científica universitaria de este periodo y en el desarrollo de la ciencia en España.

Como en periodos anteriores haremos para este una revisión de la presencia de la Geometría Analítica en el currículo, en este caso de la Facultad de Ciencias.

2.5.4.1. La Geometría Analítica en la Facultad De Ciencias (1857-1868)

Como hemos visto en el artículo 34 de la Ley Moyano se establecen las asignaturas que comprende la recién creada Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales. Las asignaturas de Matemáticas que se incluyen son: Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral y Geometría Descriptiva. Por tanto la Geometría Analítica pasa a ser una asignatura propia de los estudios de la Facultad de Ciencias.

En cuanto a las enseñanzas superiores se estudia la Geometría Analítica en todas las ingenierías y en Arquitectura, como se establece en los artículos 47 a 58 de la Ley, en los que se enumeran los estudios que forman parte de cada una de ellas.

Así mismo en el art. 34 del RD de 23 de septiembre de 1857 en el que se dictan las disposiciones provisionales que deben regir durante el curso 1857/58, se recogen las asignaturas que se estudiarán en cada curso de la Facultad de Ciencias. La Geometría Analítica aparece en el cuarto año en la sección de Ciencias Físico-matemáticas, junto con la Geometría Descriptiva, y en el quinto de Ciencias Químicas.

Por otra parte, como hemos visto, en el R.D. de 11 de septiembre de 1858, en el que se establecen los programas de estudios de diversas facultades, se fija que para obtener el grado de Bachiller en la Facultad de Ciencias se deben cursar una serie de asignaturas, entre las que se encuentra la *Geometría Analítica en dos y tres dimensiones.* De la misma manera para ingresar en las Ingenierías y en Arquitectura es necesario haber estudiado en la Facultad de Ciencias una serie de asignaturas entre las que se encuentra, en todos los casos la *Geometría Analítica en dos y tres dimensiones* (R.D. de 20 de septiembre de 1858).

En cuanto a la reforma de Orovio de 1867, encontramos que en el segundo curso de facultad, correspondiente a los estudios de Grado de Bachiller, hay que cursar la asignatura de *Geometría Analítica en dos y tres dimensiones*, que es de lección diaria, frente a las otras junto con las que se estudia (*Ampliación de Física, Cosmografía y Zoología*), que son de lección alterna (art. 3), dándole así mayor relevancia que a estas.

Y en el R.D de 24 de octubre de 1866 en el que se indican los estudios a realizar en la Facultad de Ciencias por los alumnos de las escuelas especiales aparece la *Geometría Analítica en dos y tres dimensiones* en el segundo año de las carreras de Ingeniero de Caminos, de Minas, de Montes e Industriales (arts. 3, 4,5 y 6).

En cuanto a los libros de texto, al igual que en el periodo anterior, fue costumbre publicar listas de los libros que debían ser seguidos por el profesorado. En muchos casos no fueron listas anuales, sino para el trienio, pero en todos ellos encontramos obras de Geometría Analítica.

Dichas listas se encuentran recogidas en la parte de selección de las fuentes, como en los periodos anteriores.

Vemos así que la Geometría Analítica forma parte del currículo de la Facultad de Ciencias dentro del grado de Bachiller. Y lo hace como una asignatura propiamente dicha, y no como parte de una asignatura general de Matemáticas, al contrario de lo que ocurría en periodos anteriores.

También se encuentra dentro de los estudios preparatorios para las Escuelas Especiales, ya que aunque en la práctica no se hicieran dentro de esta Facultad y se dieran en las propias escuelas forma parte de su programa de estudios.

Se reconocen así los estudios de esta rama de la Geometría, que tiene ya entidad propia, y se encuentra al mismo nivel de consideración que otras disciplinas matemáticas, como el Álgebra o el Cálculo Diferencial e Integral.

Pero no será hasta el último tercio de siglo cuando la ciencia española en general y la Geometría en particular empiecen a salir del estado de estancamiento en que se encontraba, con la introducción de las teorías que se estaban desarrollando en Europa desde tiempo atrás. Este desarrollo también se verá reflejado en la Facultad de Ciencias que empezará a tener el mismo rango académico que las demás, dejando a un lado su vertiente de estudios preparatorios para otras facultades.

2.5.5. Revolución y restauración (1868-1906)

En septiembre de 1868 triunfa un pronunciamiento en contra de la Reina, lo que provoca la caída de la monarquía Borbónica y el inicio del sexenio revolucionario. En 1971 Amadeo de Saboya es proclamado Rey, pero abdica en febrero de 1873, proclamándose la Primera República Española.

Las ideas revolucionarias influyeron, como no podía ser de otra manera, en el terreno educativo, en particular en la Universidad. En especial su fe en la libertad de enseñanza y su permisión hacia la apertura de escuelas libres "fueron semilleros ricos que anunciarían el futuro", aunque la actividad legislativa sobre la Universidad pública no quedó plasmada en novedades estables (Peset y Peset, 1992, p. 38). Así en este periodo se aprueba el plan de estudios de Eduardo Chao (**Decreto de 2 de junio de 1873**, Gaceta de Madrid de 7 de junio), que no llegó a entrar en vigor pues su implantación se retrasó un año y nunca llegó a llevarse a cabo, ya que el periodo republicano termina en diciembre de 1874, dando paso a la Restauración Borbónica.

Sin embargo algunas de sus propuestas merecen ser resaltadas. En la exposición se hace una defensa de la instrucción pública y en particular de la ciencia, como valores de la República:

> Y es que la indiferencia hacia la Instrucción pública, explicable en los poderes absolutos y despóticos, es inconcebible en las Repúblicas, que al traer a la vida política a todos los ciudadanos, al exigirles varoniles virtudes y grandeza de propósitos, están obligadas a abrir con mano generosa los tesoros de la instrucción y a facilitar el camino de la ciencia, que ya no pude ser patrimonio de las clases privilegiadas, sino un bien común para todos los hombres (Exposición).

El apoyo a la ciencia se hace plausible a través del desarrollo de sus estudios, de los que se destaca su importancia:

> Al establecer con la debida extensión los estudios de ciencias matemáticas y naturales, tiene en cuenta la importancia creciente de estos conocimientos, el vivo interés que despiertan en toda inteligencia culta, las fecundas aplicaciones que encierran y la utilidad inmensa que reportan en época de tan maravillosos progresos industriales. (Exposición)

Una de las medidas que pretenden llevarse a cabo para potenciar estos estudios es establecer la Facultad de Historia Natural en el Museo del Prado “edificio que para sus estudios y colecciones se erigiera” (Exposición), de la que pasarán a depender el Jardín Botánico y el Gabinete de Historia natural (art. 14).

A pesar de todo ello se manifiesta, también en la exposición, la imposibilidad de establecer las Facultades de Filosofía, Letras, Matemáticas, Física y Química e Historia Natural en otras universidades salvo en la de Madrid, por motivos presupuestarios.

En el articulado se desarrollan las hasta entonces Facultades de Filosofía y Letras y Ciencias, que divide en cinco: De Filosofía, de Letras, de Matemáticas, de Física y Química y de Historia Natural (art. 1).

En el artículo 7 se establecen los estudios de la Facultad de Matemáticas aunque no se distribuyen por cursos:

> Los estudios de la Facultad de Matemáticas serán:
> *Análisis matemático*, comprendiendo las doctrinas comúnmente incluidas en el Álgebra, la combinatoria, los cálculos y la teoría de números, tres cursos. El primero de estos comenzará con una *Introducción* sobre el concepto, método y división de las ciencias matemáticas.
> *Geometría*, comprendiendo, además de la elemental las teorías puramente geométricas de orden superior.
> *Geometría Analítica*, con *Trigonometría y Poligonometría.*
> *Geometría descriptiva.*
> *Mecánica racional.*
> *Mecánica celeste.*
> *Astronomía esférica.*
> *Geodesia.*
> *Física matemática.* (En la Facultad de Física y Química).

Y en el 9 que el Observatorio astronómico y meteorológico de Madrid dependerá exclusivamente de la Facultad de Matemáticas.

Para ingresar en cada una de las cinco facultades habrá que realizar un examen de ingreso que "versará sobre las asignaturas de la segunda enseñanza que el claustro acuerde" y además para la de Matemáticas habrá que realizar un examen de Dibujo Lineal (art. 20). Sin embargo se suprimen los "exámenes de prueba de curso" y el grado de Licenciado, conservándose el de Doctor (art. 30), que será necesario para ser profesor de Facultad e Instituto (art. 31).

Como vemos en este plan se pretendía dar una mayor importancia a las ciencias, tal y como se plantea en la exposición, estableciendo Facultades independientes para cada una de ellas, y dotándolas de las instalaciones necesarias para su desarrollo, aunque eso solo se pudiera llevar a cabo, de momento, en la Central. Se les da así a las Facultades de Ciencias entidad propia, no quedando tan limitadas como en el periodo anterior a una ciencia tan solo auxiliar para la universidad o docente para secundaria.

Pero como hemos dicho el 10 de septiembre de 1873 se publica un decreto aplazando por un año su entrada en vigor, que no llegó a ponerse en práctica tras la Restauración.

En 1874 con la proclamación de Alfonso XII como Rey termina el periodo del sexenio y se produce una vuelta a idearios más conservadores. Sin embargo la Restauración canovista supuso la definitiva entrada de las ciencias modernas en la Universidad, entrada que no se hizo sin tensiones. La vieja enseñanza humanista no veía con buenos ojos a los nuevos saberes y los conservadores veían como enemigos a los cultivadores de las ciencias (Peset y Peset, 1992). Por ello una de las primeras medidas que se tomarán en materia de educación será la restitución del Real Consejo de Instrucción Pública, que tendrá unas amplias misiones a la hora de informar y vigilar, controlar y programar (Peset y Peset, 1992).

De igual forma el Proyecto de Bases de Toreno (1876), que finalmente fracasó y no pasó de proyecto, daba amplias potestades al Ministerio y al Consejo para controlar la enseñanza, explicitando que los profesores deberían seguir los programas y textos aprobados por el Gobierno.

Sin embargo en el plan de estudios de 13 de agosto de 1880 (Gaceta de Madrid de 16 de agosto), firmado por Fermín Lasala, se promulga en su exposición la libertad de enseñanza. Pero se entiende tal libertad como "la facultad de enseñar y aprender fuera del organismo que á la instrucción pública fije el Estado", es decir se reconocen los estudios libres en todos los niveles educativos, como se indica en otro punto de la exposición y en el artículo 1. Por otro lado se da libertad para poder cursar los estudios en los centros públicos "en la forma, en el tiempo que más sea de su agrado y conveniencia", aunque estima que se deben fijar un orden y una distribución de asignaturas, para evitar "una instrucción incoherente y somera", pues en la mayor parte de los casos simplemente lo que se pretende es obtener un título en el menor tiempo posible.

> Fuerza confesar que por lo común se subordina la ciencia á fines de utilidad inmediata, no se busca en las aulas una cultura superior sino medios de habilitarse rápidamente para el ejercicio de las profesiones, una preparación en cierto modo mecánica para ganar un título académico (Exposición).

Plan Lasala						
Plan de estudios de 13 de agosto de 1880 **Gaceta/ BOE de** 16 de agosto de 1880						
Rey: Alfonso XII **Presidente del gobierno:** Cánovas del Castillo **Ministro de Fomento:** Fermín Lasala						
Estructura del plan (Arts. 30-36): Tres secciones: Físico-matemáticas, Físico-químicas y Naturales						
Asignaturas **Sección Físico-matemática**	**Clases semanales por curso**					
	Estudios de licenciatura					**Estudios de doctorado**
	Estudios comunes		**Estudios especiales**			
	1er grupo	**2ºgrupo**	**1er grupo**	**2ºgrupo**	**3er grupo**	
Análisis matemático	3*	3				
Geometría	3					
Química general	3					
Mineralogía y botánica	3					
Geometría Analítica		3				
Ampliación de Física		6				
Zoología		3				
Dibujo		3				
Cálculo diferencial e integral			6			
Geometría descriptiva			3			
Práctica del curso de Ampliación de la Física			3			
Mecánica racional				3		
Cosmografía y Física del globo				3		
Física superior				3	3	
Prácticas de Física				3	3	
Astronomía teórico-práctica						3
Física matemática						3
* Serán de lección diaria los cursos de Ampliación a la Física y Cálculos diferencial e integral, y los demás de lección alterna. (art. 34).						
Nivel de ingreso: Para matricularse en el primer curso es necesario haber cursado los estudios de secundaria.						
Libros de texto: No se habla de libros de texto, ni hay listas de libros publicadas en estos años.						
GEOMETRÍA ANALÍTICA						
Se estudia la asignatura *Geometría Analítica* en el segundo grupo de los estudios comunes.						

Tabla 13: Plan Lasala

Más adelante se señala que el Consejo superior opina que han de añadirse nuevas asignaturas y cátedras en todos los niveles de la instrucción pública, aunque habrá que hacerse de forma progresiva. En el caso de la Facultad de Ciencias se propone extender los ejercicios prácticos, nombrar a sus secciones con "denominación que concrete el concepto de cada una" y ordenar los estudios agrupando los que son comunes a las tres, señalando "luego los propios y característicos porque ellos se distinguen". Señalar que se pretende reducir el número de alumnos por clase, dividiendo en secciones las cátedras que sean muy numerosas (exposición y art. 55).

Todo lo anteriormente expuesto se desarrolla en el articulado. La segunda enseñanza se regula en los artículos 3 a 11, dividiendo sus estudios en generales y de ampliación; y las Facultades en los artículos del 12 al 54, dividiendo sus estudios en Licenciatura y Doctorado, desapareciendo el grado de Bachiller de las mismas. Se establece que para matricularse en el primer año de Facultad se deben haber cursado los estudios generales de segunda enseñanza, pero para la admisión a "la prueba de curso", se debe estar en posesión del título de Bachiller, que suponemos se obtiene tras la segunda enseñanza, pero no se especifica en ningún punto del texto. De la misma manera para matricularse en los estudios de doctorado deben haberse cursado los estudios de licenciatura, pero para poder doctorarse es necesario tener el título de Licenciado (art.12).

La Facultad de Ciencias queda dividida en tres secciones: Físico-matemáticas, Físico-químicas y Naturales (art. 30). En la Universidad Central se cursarán los estudios completos de las tres secciones, en Barcelona los de Licenciatura en Ciencias Físico-matemáticas y Físico-químicas y en Granada, Santiago, Sevilla, Valencia, Valladolid y Zaragoza "por lo menos las indispensables para las carreras de Medicina y Farmacia" (art. 31). Como vemos se siguen cursando las asignaturas necesarias para algunas Facultades en la de Ciencias, pero en este plan ya no se da tanta importancia a este aspecto como en planes anteriores, ni se hace referencia a los Estudios Especiales (Ingenieros y Arquitectura).

En el artículo 32 se establecen las asignaturas de esta facultad, divididas en aquellas que son comunes a las tres secciones, las específicas para el grado de Licenciado y las específicas para el grado de Doctor. Como se indicaba en el articulado no se fijan las asignaturas por curso, pero sí se establece el orden en que se deben cursar algunas asignaturas. Por ejemplo el Cálculo diferencial e integral debe cursarse antes de la Mecánica, Geodesia y Física superior (art. 34), y el Análisis matemático y la Física superior se cursarán en dos años (art. 33). En el art 36 se da la "agrupación normal" de los estudios de la facultad (ver **Tabla 13**), estableciéndose grupos de asignaturas según el orden en que deben cursarse.

Este plan de estudios estuvo vigente durante veinte años, a pesar de la llegada al poder de los liberales en 1881, llegada que supuso la vuelta de los institucionistas a las cátedras y la continuación de las reformas que se paralizaron al inicio de la Restauración.

El siglo termina con una nueva reforma de la Facultad de Ciencias, mediante el plan de estudios aprobado el **4 de agosto de 1900** (Gaceta de Madrid de 7 de agosto), firmado por Antonio García Alix, primer Ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes.

Este plan nace bajo el impulso de regeneración nacional y en particular científica que se produjo en nuestro país como consecuencia de la crisis de 1898. Como señala Peralta (1999, p. 60) el plan, que estuvo vigente durante buena parte del primer tercio del siglo XX, "supuso un gran esfuerzo de modernidad, que equiparaba estos estudios a los de otras naciones europeas".

En la exposición se considera que la organización vigente de la Facultad de Ciencias no satisface las necesidades de la enseñanza "en parte por el desarrollo que han alcanzado algunas ciencias que deben ser objeto de asignaturas especiales, y en parte por lo defectuoso de la sección Físico-química". Así considera como principales deficiencias de la misma el que las asignaturas no son suficientes, que las secciones se entremezclan y que no se le da la importancia que merecen las enseñanzas prácticas. Para solucionar esto último recupera la idea de Eduardo Chao de crear un gran núcleo de instituciones científicas, recuperando para la Facultad el Museo de Ciencias naturales y el Observatorio Astronómico (exposición y art. 10).

Plan de García Alix

Plan de estudios de 4 de agosto de 1900
Gaceta7 agosto 1900

Regente: María Cristina
Presidente del gobierno:
Ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes: Antonio García Alix.

Estructura del plan (arts. 2 y 3): Cuatro secciones: Ciencias exactas, físicas, químicas y naturales.

Asignaturas Sección de Ciencias Exactas	**Clases semanales por curso**				
	Estudios de licenciatura				**Estudios de doctorado**
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	
1. Análisis matemático. 1º	5				
2. Análisis matemático. 2º		5			
3. Elementos de cálculo infinitesimal			6		
4. Curso de Análisis superior					5
5. Geometría Métrica	5				
6. Geometría de la posición			5		
7. Geometría Analítica		5			
8. Geometría Descriptiva				5	
9. Estudios superiores de Geometría					5
10. Mecánica racional				5	
11. Cosmografía Física y del Globo			5		
12. Astronomía esférica y Geodesia				5	
13. Astronomía del sistema planetario					5
Química general*	5				
Física general*		5			

***Se completará el cuadro de enseñanzas de las secciones con aquellas asignaturas de las demás cuyo conocimiento se considera preciso para el de cada una de aquellas, como lo s para la de Exactas las señaladas con el nº1 en las secciones de Física y Química (Física General y Química General) (…) (art. 2).
Las clases de la sección de Ciencias Exactas se darán en cinco lecciones semanales, de las que dos se dedicarán a ejercicios prácticos en las asignaturas señaladas con los números 1, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, y 13 y una sola en 2, 7 y 10, exceptuándose la asignatura de Elementos de Cálculo Infinitesimal, que será diaria (art. 2)
Las lecciones dedicadas a ejercicios prácticos en las asignaturas de exactas durarán hora y media, como las dedicadas al estudio de la teoría (art. 7).

Nivel de ingreso:
Título de Bachiller y realizar un examen de ingreso de las asignaturas de ciencias de la segunda enseñanza, de Francés y Dibujo (art.1).

Libros de texto: No se habla de libros de texto, solo de programas de las asignaturas.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Se cursa en segundo de la Sección de Ciencias Exactas, pero también se cursa en las secciones de Ciencias Físicas y Ciencias Químicas.

Tabla 14: Plan de García Alix

Para solucionar los otros dos problemas se divide la Facultad en cuatro secciones: Ciencias Exactas, Ciencias Físicas, Ciencias Químicas y Ciencias Naturales (exposición y art. 2).

También en la exposición se pone de relieve el carácter "especulativo o de ciencia pura" de las enseñanzas de la Facultad de Ciencias, aunque algunas asignaturas siguen siendo preparatorias para otras Facultades o Escuelas, cambiando así el enfoque que a estos estudios se le había venido dando desde su origen.

Se señala la imposibilidad de ampliar los estudios de cada sección como sería necesario, pero que sí se ha hecho en algunos casos. En particular en la facultad de Ciencias Exactas se amplían los cursos de Análisis Superior y Estudios superiores de Geometría en el periodo de doctorado, y la asignatura de Geometría se divide en Geometría de la Posición y Geometría Métrica.

En el articulado se establece que para matricularse en la Facultad de Ciencias será necesario poseer el título de Bachiller y realizar un examen de ingreso de las asignaturas de ciencias de la segunda enseñanza, de Francés y Dibujo (art.1).

Como ya hemos señalado se divide la Facultad en cuatro secciones de las que se especifican sus asignaturas, que van numeradas, pues aunque en el artículo 3 se distribuyen por cursos, se establece que su orden podrá ser alterado, siempre que se mantenga el de algunas en particular (ver **Tabla 14**). El periodo de Licenciatura comprenderá cuatro años y uno el de doctorado.

En el artículo cuatro se establece que los catedráticos de las asignaturas de los dos primeros cursos o de aquellas asignaturas que se consideren preparatorias para otras Facultades o Escuelas deben explicar el programa de la asignatura íntegramente "a fin de que la preparación que reciban los alumnos sea completa". En este último caso, en la preparación de los programas deben atender en lo posible a las observaciones de los Claustros y Escuelas que utilicen aquellas enseñanzas "sin menoscabo de su independencia de criterio y libertad para la exposición de las asignaturas que les estén encomendadas, ni del carácter especulativo que corresponde a las enseñanzas de la Facultad" (art. 4). Sin embargo no se hace ninguna referencia a que se tengan que seguir unos textos determinados, ni existen listas de libros de texto oficiales.

También se establece en el articulado que sólo existirán las cuatro secciones completas, es decir hasta el grado de Doctor, en Madrid. En Barcelona sólo hasta el grado de licenciado de las secciones de Exactas, Físicas y Químicas, en Zaragoza solo las de Exactas y Físicas, en Valencia la de Química y en Sevilla y Granada "subsistirán" las asignaturas de los dos primeros cursos de las secciones de Exactas, Físicas y Químicas (art. 9).

Por último señalar que a los estudios científicos se les da el carácter práctico que se venía demandando desde hacía años, no solo al establecer clases prácticas de las asignaturas, sino porque en algunas de ellas se fija que deben realzarse excursiones de carácter científico.

El 12 de agosto de 1900 (Gaceta de Madrid de 15 de agosto) se publica una Real Orden en la que se dictan reglas para llevar a cabo la reforma. Entre las medidas que fija está la reorganización de los catedráticos cuyas asignaturas han sido divididas en el nuevo plan, como es el caso de la Geometría. En este sentido la Orden establece que en las Universidades de Barcelona y Zaragoza el catedrático de Geometría y Geometría Analítica lo será de Analítica y de Geometría Métrica o de Posición según elija, y el de Descriptiva tendrá que dar ésta, y aquella de las dos anteriores que no haya sido elegida. En Sevilla, Granada y Valencia el catedrático de Geometría y Geometría Analítica dará esta última y la Geometría Métrica (pto.1º).

Además en la orden se establecen las equivalencias entre asignaturas del plan antiguo y el nuevo (ptos. 9 y 10) y la equivalencia de títulos (pto. 11).

Por último el 28 de septiembre de 1900 (Gaceta de 29 de septiembre), se aprueba una Real Orden en la que se dictan reglas para dar cumplimiento a la reforma y se reorganizan los estudios de la Facultad de Ciencias Químicas. También se establece la distribución de las asignaturas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, asignando los catedráticos de cada una de ellas, siendo el de Geometría Analítica Miguel Vegas y Puebla Collado, y el de Geometría Descriptiva y Estudios superiores de Geometría Eduardo Torroja.

2.5.5.1. La Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias (1868-1906)

Como hemos visto la Geometría Analítica aparece en todos los planes de estudios de este periodo.

Así en el plan de Eduardo Chao tenemos la asignatura de *Geometría Analítica con Trigonometría y Poligonometría*, aunque al no haber un Reglamento que lo desarrolle no es posible saber en qué curso se habría estudiado.

En el Plan de estudios de 1880 encontramos la asignatura de *Geometría Analítica* en el segundo grupo de los estudios comunes, es decir se debe cursar tras la Geometría; y en el Plan de García Alix se estudia la *Geometría Analítica* en el segundo curso de la Licenciatura de Ciencias Exactas, pero también en la de Ciencias Físicas y Ciencias Químicas (art. 3).

Y en este estado de cosas finaliza el siglo. La Facultad de Ciencias, y en particular la Sección de Ciencias Exactas, comienza a tener entidad propia, con un carácter más investigador, a pesar de seguir impartiendo asignaturas preparatorias para otras Facultades, y con una oferta de asignaturas más adaptada a los nuevos tiempos.

El Plan de 1990 supuso, como ya hemos comentado, la modernización de la Facultad, que la equipara con las de otras naciones europeas. Hay que destacar, en el Plan de la Sección de Matemáticas, el dominio de la Geometría, debido, sin duda, a la influencia de Torroja -quien fue Consejero de Instrucción Pública en la última década del siglo- y de su discípulo Miguel Vegas (Millán, 1991), catedráticos de Geometría Analítica y Descriptiva de la Universidad Central, respectivamente.

En el caso de la Geometría Analítica vemos que es una asignatura plenamente consolidada en el currículo de la Facultad pues aparece no solo en todos los planes de este periodo, dentro de la Sección de Ciencias Exactas, sino en todos los programas de la Facultad de Ciencias desde su creación en 1857.

A lo largo del último cuarto de siglo los contenidos de esta asignatura irán evolucionando, basándose en los últimos años en la moderna Geometría Proyectiva como nos mostrará el análisis de los libros de texto.

CAPÍTULO 3: Diseño de la investigación

Introducción

A lo largo de este capítulo describiremos la metodología utilizada para la realización de esta investigación, la cual hemos contextualizado en los capítulos anteriores.

Debemos recordar que se trata de una investigación de tipo histórico-epistemológico basada en el análisis de libros de texto antiguos, por ello en el primer capítulo se ha descrito el método histórico y sus fases, la técnica de análisis de contenido y se ha explicado la importancia del libro de texto en este tipo de investigaciones, y lo oportuno de su utilización como fuente primaria. En el presente capítulo se presentan estas técnicas adaptadas a nuestra investigación.

En el capítulo 2 se ha dado una visión general del contexto social, político y científico de España en el XIX, de la evolución de la Geometría Analítica como disciplina científica desde su nacimiento hasta el siglo XIX, y de su incorporación al sistema educativo español. Esto nos ha permitido tener una visión de la situación de la Geometría Analítica en nuestro país en el siglo XIX, tanto como disciplina científica, como materia curricular, y ello nos ha servido para definir los periodos en que hemos dividido la etapa de estudio y para elegir las obras que han sido analizadas.

En cada uno de los apartados de este capítulo se desarrollarán las etapas que caracterizan una investigación de tipo histórico. Así, a partir de la revisión bibliográfica realizada, formularemos el problema de estudio. Tras ello se especificarán los objetivos e hipótesis de la investigación y seguidamente el resto de etapas del trabajo, entre las que se encuentran la selección de las fuentes documentales, el método de recogida de datos y las categorías de análisis de la documentación.

3.1. Formulación del problema

En este epígrafe formularemos nuestro problema de investigación explicitando los interrogantes que nos planteamos al comienzo de la misma. Pero antes de esto, en el apartado 3.1.1 hacemos una revisión de los trabajos realizados sobre el estudio de la Geometría en nuestro país en el siglo XIX, para tener una idea clara del estado de la cuestión, con el fin de enmarcar nuestro trabajo y ver cómo podemos contribuir a este estudio.

3.1.1. Investigaciones acerca de la G.A. en España en el siglo XIX

Antes de formular nuestro problema de investigación y con el fin de contextualizar y mostrar las aportaciones de nuestro trabajo, realizaremos una revisión de las investigaciones realizadas sobre Geometría en España en el siglo XIX.

Destacaremos los trabajos de Millán (1991) y de Velamazán (1993), sobre los estudios de Geometría superior en España en el siglo XIX.

En el primero de ellos se presenta un estudio sobre el cultivo de la Geometría en nuestro país a lo largo del siglo. En él se analiza la introducción de las nuevas corrientes geométricas, desde las novedades surgidas en Francia en el periodo de la Revolución hasta la Geometría Proyectiva; su estudio en la universidad, los matemáticos más influyentes en esta rama y las obras de texto más utilizadas en la época, aunque no se realiza ningún tipo de análisis del contenido de dichas obras.

Se incide especialmente en el proceso de penetración de la Geometría Proyectiva, y cómo ésta llegó a monopolizar los estudios geométricos previstos en los planes de estudios de matemáticas en la Universidad a finales de siglo.

En el segundo trabajo, que complementa el primero, se analiza la aportación científica militar a las diversas ramas de la Geometría desarrolladas en el XIX, entre ellas la Geometría Analítica. En el artículo se pone de relieve la importante contribución del Ejército de Tierra al estudio de estas disciplinas, generalmente a través del profesorado de sus Academias militares, que destacó en su papel investigador, docente e importador de nuevas teorías, y que llevó a cabo una importante producción de manuales de Geometría, citándose en el trabajo tales profesores y manuales.

También sobre la modernización de la Geometría en España versa el trabajo de Hormigón (1983), que se centra en la figura de García de Galdeano y en su labor de introducción en la comunidad matemática española de las nuevas ideas en este terreno.

Especialmente importantes, en lo que a nuestro estudio se refiere, son dos de los trabajos de Escribano: *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española* (Escribano, 1998) y *El Programa de Geometría Analítica (1880) de Santiago Mundi* (Escribano, 2004).

En el primero de ellos, que constituye su memoria de tesis doctoral, realiza un estudio histórico sobre la obra de Sixto Cámara, catedrático de Geometría Analítica en la Universidad de Valencia. En este trabajo, y a fin de contextualizar al autor, Escribano hace una revisión de la Geometría Analítica española "de Zorraquín a Vegas", realizando un estudio descriptivo de las obras de Zorraquín, Cortázar, Mundi y Vegas, destacando las diferencias entre los contenidos de unas y otras. También hace referencia a las obras de Lacroix y Sánchez Solís, aunque de forma más superficial y da una relación exhaustiva de las obras de Geometría Analítica más utilizadas en el periodo, tanto en la enseñanza civil como en la militar. En este estudio se pone de relieve la evolución que siguieron los contenidos de Geometría Analítica en los libros de texto a lo largo del siglo, evolución que se explicita completamente en el segundo trabajo de este autor citado anteriormente.

En este artículo se realiza un estudio histórico del *Programa razonado de Geometría Analítica* que Santiago Mundi defendió en las oposiciones a la cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de Barcelona. Según indica Escribano en el resumen:

> Este *Programa* supone un punto de inflexión (de la métrica a la proyectiva) en la didáctica de la geometría analítica en las universidades españolas. De un lado, la propuesta de Mundi refleja el ocaso de un modelo de geometría analítica (…) anclado en los métodos exclusivamente métricos. Y del otro, un paso hacia los métodos proyectivos que culminaría, años más tarde, con la segunda edición del *Tratado de Geometría analítica* (1906-1907) de Miguel Vegas, donde la geometría métrica aparece como un caso particular de la geometría proyectiva.

La intención de nuestro trabajo es constatar todos estos hechos a través del análisis de los libros de texto utilizados en el siglo XIX, a la vez que complementar los trabajos anteriores estudiando el tratamiento dado a los contenidos de Geometría Analítica en las obras destinadas a su enseñanza.

3.1.2. El problema de investigación

El propósito inicial de este trabajo fue estudiar la evolución histórica de la Geometría Analítica a lo largo del siglo XIX en nuestro país, a través del tratamiento que se hace de ella en los libros de texto utilizados en la enseñanza secundaria. Un primer trabajo de investigación nos mostró que la Geometría Analítica desaparece del currículo de segunda enseñanza a partir de 1857, año en que pasa a formar parte de los planes de estudios de la Facultad de Ciencias, como hemos visto en el capítulo 2, por lo que decidimos ampliar a este nivel educativo nuestro estudio.

Las disciplinas geométricas, dentro de las que se engloba la Geometría Analítica, experimentaron un extraordinario crecimiento en la España del siglo XIX, lo que las dota de gran importancia a la hora de estudiar el desarrollo de las Matemáticas en nuestro país en este periodo, tal como señala Millán (1991).

Por otra parte, la Geometría Analítica se vio envuelta en una polémica, iniciada en la década de los sesenta del siglo pasado, sobre qué tipo de geometría debía estar presente en la formación matemática de todo ciudadano, la Geometría Sintética o la Analítica; controversia que recogía argumentos de varios matemáticos importantes de principios del siglo XIX, como Poncelet, Chasles y Monge, quienes reivindicaron la importancia de los métodos sintéticos de la geometría pura, frente a los potentes métodos analíticos (Gascón, 2002).

Gascón continúa argumentando que aunque la discusión iniciada en los sesenta está actualmente bastante olvidada, ha tenido una influencia directa en la comunidad escolar; y aunque en estos momentos se ha alcanzado un cierto consenso confinando la Geometría Sintética a la ESO y la Geometría Analítica al Bachillerato, es previsible que la citada controversia vuelva a aparecer, "puesto que no ha sido cerrada con argumentos sólidos y, lo que es más evidente, no se ha dado ninguna respuesta a la flagrante discontinuidad entre la geometría sintética de la ESO y la geometría analítica del Bachillerato" (Gascón, 2002, pp.13-14); de hecho en las últimas reformas curriculares se han introducido unos contenidos básicos de Geometría Analítica en cuarto de ESO.

Por todo ello consideramos que resulta pertinente una investigación histórica sobre el estudio de la Geometría Analítica en nuestro país, en el siglo XIX.

Abordamos el problema de investigación desde dos puntos de vista:

- Desde el punto de vista de las Matemáticas como disciplina científica, estudiando el nacimiento y el desarrollo de la Geometría Analítica como una nueva rama de las Matemáticas, y su introducción y evolución en España en el siglo XIX.
- Desde el punto de vista de las Matemáticas como contenido curricular, estudiando la introducción y desarrollo de la Geometría Analítica en el currículo de secundaria y en el de la Facultad de Ciencias.

La complejidad de una investigación de esta naturaleza, por la multiplicidad de variables que pueden ser consideradas, exige una acotación clara del campo de estudio, por ello, y a pesar de la importancia que tuvieron en el desarrollo de la Geometría Analítica en nuestro país los ingenieros, tanto civiles como militares, y del peso que tuvo esta asignatura en los planes de estudios de sus escuelas y Academias (Escribano, 2000; Español, 2003; Millán, 1991; Velamazán, 1993) decidimos centrarnos en los niveles de educación secundaria y universitario.

Por otra parte, dada la gran cantidad de contenidos de Geometría Analítica susceptibles de estudio decidimos centrarnos en lo que en algunas obras se denominan *problemas determinados* y la teoría implícita en su resolución; y en el caso de los lugares geométricos nos restringimos al caso de la recta.

La elección de estos contenidos fue debida a dos motivos fundamentalmente: por un lado los problemas relativos a la recta se encuentran en todos los libros del periodo, dándonos así la oportunidad de ver su evolución a través del tiempo; por otra parte los llamados *problemas determinados*, característicos de los libros más antiguos, nos muestran de forma patente una manera característica de hacer Geometría Analítica en el siglo XIX.

Para llevar a cabo el estudio hemos recurrido a dos tipos de fuentes: por un lado las Leyes, Decretos y Órdenes ministeriales correspondientes a la educación secundaria y a la Facultad de Ciencias, cuyo estudio, realizado en una investigación anterior como ya hemos señalado, nos mostró la presencia de contenidos de Geometría Analítica en sus currículos.

Por otro lado, la parte central del trabajo ha consistido en el análisis de contenido de los libros de texto o manuales escolares más utilizados en la segunda enseñanza o en la Facultad de Ciencias.

Pretendemos, por tanto, realizar un estudio histórico acerca de la Geometría Analítica en España a lo largo del siglo XIX, a través del análisis de los libros de texto utilizados para su estudio en educación secundaria y en la Facultad de Ciencias[11].

Los interrogantes que nos planteamos son los siguientes:

- ¿Qué contenidos de Geometría Analítica plana se estudiaban en secundaria y en la Universidad en España a los largo del siglo XIX?
- ¿Qué tratamiento se hace de ellos en los libros de texto?
- ¿Cuál fue su evolución a lo largo de los años? ¿Hubo grandes cambios o fueron los mismos a lo largo del siglo?
- Estudios de otros autores muestran que a finales de siglo la Geometría Analítica estudiada en nuestro país utilizaba conceptos de la Geometría Proyectiva. ¿En qué momento se produjo ese cambio hacia la Geometría Proyectiva?
- ¿Dicho cambio se produjo de forma abrupta o se llevó a cabo de forma paulatina?
- ¿Cuáles fueron los principales factores que influyeron en esa evolución?

A partir de las preguntas anteriores formularemos nuestros objetivos y nuestras hipótesis.

[11] A partir de ahora cuando nos refiramos a libros de texto se entenderá que son los utilizados en estos niveles educativos.

3.2. Objetivos de la investigación

Como ya hemos dicho el objetivo fundamental de este trabajo es analizar la evolución histórica de la Geometría Analítica y de su estudio durante el siglo XIX en España, a través del tratamiento que se hace de ella en los libros de texto de la época.

Para la consecución de este objetivo, se plantearon los siguientes objetivos particulares:

1. Identificar y analizar los planes de estudios de educación secundaria y de la Facultad de Ciencias donde aparecen contenidos de Geometría Analítica.
2. Identificar los principales libros de texto de Geometría Analítica utilizados en la segunda enseñanza, en las Facultades de Ciencias del país.
3. Realizar un análisis de contenido de una muestra significativa de los textos citados en el punto anterior, con el fin de caracterizar el tratamiento dado a la Geometría Analítica en los mismos.
4. Realizar un análisis comparativo de las obras analizadas con el fin de establecer la evolución seguida por la Geometría Analítica en España en el periodo fijado.
5. Identificar los factores sociales, culturales, científicos y académicos que influyeron en esta evolución y la forma en que lo hicieron.

3.3. Hipótesis de la investigación

Como consecuencia de los interrogantes planteados, de la caracterización de la investigación en la línea *Historia de la educación matemática*, de las fuentes primarias con las que se va a trabajar y de los objetivos planteados, hemos formulado las siguientes hipótesis:

1. La Geometría Analítica fue materia de estudio en los niveles de secundaria y/o universidad durante el siglo XIX.
2. La Geometría Analítica en nuestro país conservó durante muchos años del siglo XIX reminiscencias de los problemas clásicos a la hora de unificar álgebra y geometría, tales como la homogeneidad de las ecuaciones, o la interpretación de las soluciones negativas.
3. Los modos de hacer Geometría Analítica durante casi todo el siglo están más próximos a la geometría de Descartes que a la actual, conjugando en la resolución de problemas los métodos analíticos con los sintéticos, probablemente por la influencia de los matemáticos franceses.
4. La Geometría Analítica fue evolucionando durante el siglo XIX de una geometría próxima a la de Descartes hacia la Geometría Analítica Proyectiva, probablemente por la influencia de la escuela alemana.
5. Esta evolución fue lenta en nuestro país, llevándose a cabo en el último tercio de siglo.
6. Las condiciones sociales, culturales y políticas de España en aquellos años influyeron de forma decisiva en esta lenta evolución y en el tratamiento de la Geometría Analítica, y en general de las Matemáticas, en los diferentes planes de estudios de los niveles considerados.

3.4. Metodología

Como ya se ha señalado, la presente investigación se enmarca dentro de la corriente histórica del estudio y análisis de libros de texto.

En el capítulo 1 caracterizamos la Investigación Histórica en Educación Matemática, y se puso de manifiesto la importancia del libro de texto como fuente documental en este tipo de investigación. Así mismo se definió y caracterizó el análisis de contenido como técnica de análisis de textos en general. De la misma forma, en este capítulo se trataba de forma general el método histórico, describiendo las fases propuestas por Ruiz (1976) y González y Sierra (2003).

Seguidamente desarrollamos todo lo anterior aplicado a nuestra investigación, desde las fases que se han seguido en el desarrollo del trabajo, hasta la aplicación de la técnica del análisis de contenido a nuestro estudio.

3.4.1. Etapas de la investigación

Como hemos señalado en el desarrollo de esta investigación hemos seguido las fases propuestas por Ruiz (1976) y González y Sierra (2003):

- **Planteamiento de la investigación.**

Inicialmente se seleccionó el campo de estudio teniendo en cuenta para ello la relevancia social y científica del problema; su viabilidad en cuanto a la existencia de recursos documentales suficientes, la valoración de esos recursos y el tiempo disponible para su realización; la originalidad y cierto interés personal basado en la práctica docente y en una predilección por la investigación histórica. Una vez elegido el tema se pasó a realizar una búsqueda de documentación y una serie de lecturas relacionadas con el tema con el fin de conocer el estado de la cuestión; se determinó la línea de investigación enmarcándola dentro de la corriente histórica del estudio y análisis de libros de texto y se establecieron los periodos de tiempo que se van a investigar desde un punto de vista histórico-pedagógico.

Con estos datos se plantearon las preguntas a las que se pretendía dar respuesta, los objetivos que se pretendían cubrir mediante esta investigación y se enunciaron unas hipótesis como un intento de dar respuesta a las preguntas planteadas.

Esta parte de la investigación se ha resumido en el apartado anterior.

- **Heurística. Crítica.**

Se trata de una etapa de búsqueda y clasificación de los documentos utilizados en nuestra investigación.

En primer lugar se determinaron cuáles iban a ser las fuentes y se procedió a su localización. Para la realización de este trabajo hemos utilizado dos tipos de fuentes documentales: por una parte las Gacetas de Madrid (precursoras del BOE) donde hemos localizado los planes de estudios de los dos niveles considerados y los libros de texto originales utilizados en el periodo y en los niveles educativos considerados.

Las Gacetas de Madrid se encuentran en el Fondo Histórico de la Universidad de Salamanca en gran medida, así como algunos de los libros analizados. Otras obras se han solicitado por préstamo interbibliotecario, y además se han sondeado fondos digitales en Internet, como Google Books, la Biblioteca Virtual de Andalucía, la Biblioteca de la Universidad de Granada, Biblioteca de la Universidad de La Rioja, el fondo digital de la Biblioteca Nacional, la Biblioteca virtual Miguel de Cervantes y la colección histórica digitalizada del BOE.

Seguidamente se llevó a cabo la selección y recogida de los textos que iban a ser analizados y se determinó la crítica histórica estudiando la autenticidad (crítica externa) y fiabilidad (crítica interna) de las fuentes documentales. La autenticidad se ha asegurado obteniendo las obras de bibliotecas universitarias, del CSIC o de la Biblioteca Nacional, tanto en el caso de libros físicos como en formato digital. En este caso todas ellas provienen de estas dos últimas, aunque los pertenecientes al CSIC se hayan localizado a través de Google Books.

En cuanto a los planes de estudios, gran parte de los originales se encuentran en la Biblioteca de la Universidad de Salamanca, y los digitales proceden de la página oficial del BOE.

La fiabilidad viene dada por el hecho de haber utilizado como fuentes documentales los libros de texto.

- **Análisis de la documentación.**

Una vez llevada a cabo la recogida de datos se procedió al análisis utilizando la técnica del análisis de contenido.

- Par ello nos centraremos en el estudio de las estructuras conceptuales, en los sistemas de representación y en el análisis fenomenológico (Rico, Marín, Lupiáñez, Gómez, 2008) para caracterizar, de manera sistemática, desde un punto de la Didáctica de la Matemática cada una de las obras. Ello nos permitirá hacer un análisis de los cambios entre las distintas obras a través del tiempo, y nos mostrará la evolución del estudio de la geometría analítica en el periodo que estamos estudiando.

Para ello se realizaron fichas bibliográficas para cada texto y se establecieron unas categorías de análisis relacionadas con tres puntos de interés: el autor, la estructura de la obra y el tratamiento que se da a la Geometría Analítica y en particular a las cuestiones que conducen a ecuaciones de primer grado. Todo esto se encuentra desarrollado en el punto 3.4.3 de este capítulo.

- **Hermenéutica.**

Hemos tratado de dar una respuesta adecuada a las preguntas planteadas, identificando los contenidos de Geometría Analítica plana que se estudiaban en el periodo y niveles educativos considerados, el tratamiento que se hace de ellos en los libros texto y señalando los sucesivos estadios de desarrollo de su evolución a lo largo del siglo. Posteriormente hemos intentado indicar las causas que han influido en dicha evolución.

- **Exposición**.

En esta última fase redactamos los resultados de la investigación, obteniendo las conclusiones y estableciendo las perspectivas futuras, dando lugar a la presente memoria.

Dado que en el apartado anterior hemos desarrollado la parte del planteamiento de la investigación, dedicaremos el resto del capítulo a establecer cómo se llevó a cabo la selección de las fuentes documentales y cómo se procedió a recoger los datos procedentes de dichas fuentes.

3.4.2. Selección de las fuentes

En este apartado explicamos cómo hemos realizado la selección de los textos analizados. Para ello incluimos un breve resumen de los planes de estudios vigentes en cada uno de los periodos en que hemos dividido el siglo, así como del tratamiento de la Geometría Analítica en dichos planes. Insertamos además las listas de libros de texto aprobados por el gobierno en cada curso escolar, en caso de que las hubiera, o los libros de los autores más representativos en el periodo. De todos ellos damos la lista de las obras seleccionadas finalmente, junto con los criterios de selección.

3.4.2.1. Periodos

Como hemos señalado con anterioridad a la hora de realizar este trabajo sobre la Geometría Analítica en España nos vimos en la necesidad de acotar el campo de estudio, restringiendo el mismo a la educación secundaria y la Universidad, en particular a la Facultad de Ciencias.

El siguiente paso fue acotar el periodo de tiempo en que íbamos a realizar el trabajo. Como el primer plan de estudios específico de enseñanza secundaria fue el Plan del Duque de Rivas y data de 1836 (Vea, 1995) y el último de la Facultad de Ciencias fue llevado a cabo por García Alix en 1900, llevaremos a cabo nuestro estudio entre 1836 y 1906, fecha del último libro analizado, correspondiente a este último plan.

Dividiremos el periodo en dos grandes espacios de tiempo: 1836-1857 y 1857-1906. El año de división 1857 corresponde al de publicación de la Ley Moyano, la creación de la Facultad de Ciencias y el paso de los estudios de Geometría Analítica de la segunda enseñanza a la Universidad. La división de cada uno de ellos corresponde a la realizada en el capítulo 2 en relación con el desarrollo de la educación secundaria y la Facultad de Ciencias.

Así el primer periodo lo dividiremos a su vez en otros dos, 1836-1845, 1845-1857, al igual que el segundo que queda dividido entre 1857-1868 y 1868-1906.

Veremos a continuación los textos de Geometría Analítica aprobados por los distintos gobiernos, o más utilizados, en la educación secundaria y en la Universidad en los periodos considerados. Estos están extensamente explicados en el capítulo 2, por lo que solamente incluiremos, a continuación, un breve resumen de la realidad educativa en cada uno de ellos en lo que a nuestro estudio incumbe.

- **1836-1845**

En este periodo se aprobaros tres planes de estudios correspondientes a este nivel educativo (Plan de estudios de 4 de agosto de 1836 –del Duque de Rivas-, arreglo provisional de 29 de octubre de 1836 y Plan de estudios de la Facultad de Filosofía de 8 de junio de 1843) y dos leyes se quedaron en proyecto. Aun así, a pesar de que sobre el papel el nuevo nivel educativo era una realidad, el número de institutos en el país era escaso, y el cambio de planes en tan corto espacio de tiempo dificultó la implantación del mismo.

Recordar que el último de ellos, en el que se "crea en la Universidad de Madrid la Facultad de Filosofía" (RD de 8-06-1843), se considera un plan de estudios de segunda enseñanza pues es en esta Facultad en la que se daba preparación para las Facultades Mayores. Sus estudios se dividían en tres tipos, preliminares (3 años), de ampliación (4 años) y superiores (2 años), siendo los primeros los preparatorios y que podemos considerar como de segunda enseñanza, por tanto. En el segundo curso aparece el estudio de la A*plicación del Álgebra a la Geometría, con secciones cónicas.*

En este periodo no existen listas de libros de texto oficiales, es más, en los planes de estudios se daba completa libertad a los profesores para elegir libro de texto o realizar sus propios programas para las asignaturas, por lo que se han buscado los textos de matemáticas más utilizados en el periodo que incluyeran contenidos de Geometría Analítica.

Según explica Vea (1995), con el título de *Elementos de Matemáticas* –que es como se denominan las asignaturas de Matemáticas en el arreglo provisional- se publicaron multitud de libros de texto de segunda enseñanza a lo largo del siglo XIX, los cuales incluían "habitualmente" Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría. A pesar de esto hemos localizado obras, de los principales autores de la época, que también incluyen contenidos de Geometría Analítica.

Ente ellas se encuentran los *Elementos de matemáticas puras y mistas* de Alberto Lista, que alcanzaron su tercera edición en 1838, en cuyo prólogo[12]se expresa que la obra va dirigida a la enseñanza elemental. Este texto incluye la *aplicación del Álgebra á la Geometría.*

También se puede encontrar esta denominación en el tomo II del *Tratado elemental de matemáticas* de José Mariano Vallejo, que fue reeditado por cuarta vez en 1841, y en su *Compendio de matemáticas puras y mixtas*, cuya cuarta edición data de 1840.

También citaremos el *Curso completo elemental de Matemáticas puras* de S. F. Lacroix (traducido por Rebollo), que en 1846 alcanzaba su octava edición. Esta obra, que aparecerá en todas las listas de libros propuestos por el gobierno para la educación secundaria en el periodo que estudiaremos a continuación, consta de cuatro volúmenes, siendo el título del último *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra á la geometría.*

Otro de los autores que incluyen la Geometría Analítica en sus obras es José Odriozola en el tomo III de su *Curso completo de matemáticas puras,* cuya segunda edición es de 1844, aunque en este caso se especifica en el prólogo que ese tercer tomo es de un nivel superior a la segunda enseñanza. De 1844 también son los *Elementos de Matemáticas* de Agustín Gómez de Santa María, obra recomendada para la enseñanza secundaria, que no incluye la Geometría analítica.

- **1845-1857**

En este segundo periodo se consolidará la nueva etapa educativa. En él se aprueban seis planes de estudios diferentes, comenzando por el Plan Pidal de 1845. En este plan todavía se mantiene la relación de la segunda enseñanza con la Facultad de Filosofía ya que el artículo 8 establece que "la segunda enseñanza elemental y la de ampliación constituyen juntas la Facultad de Filosofía". Aunque teóricamente el plan de estudios de 1847 diferencia ambos estudios, la titulación que se obtiene tras cursar la secundaria y realizar dos exámenes será la de Bachiller en Filosofía (Arts. 302 y 304 del Reglamento de 19 de agosto de 1847), y a esta Facultad aún no se le da el mismo rango que a las Facultades Mayores. Aclaramos esto pues la asignatura de Geometría Analítica aparece,

[12] Se ha consultado la segunda edición, publicada en 1825

en varios planes de estudios, dentro de los estudios de esta Facultad, así como los libros de texto aprobados por el gobierno.

El fijar los libros de texto que debían ser utilizados por los profesores fue costumbre en todos los planes de estudios del periodo. Siguiendo la norma, cada año se publicaron las listas a principio de curso, exceptuando el curso 1845/1846. En el Reglamento de estudios de 22 de octubre de 1845 se explica que debido al poco tiempo de que se dispone para la elaboración de las listas de libros de texto, y viendo que en muchas asignaturas no se dispone de obras de calidad, se permite a los claustros de las facultades, oídos los profesores, elegir los libros libremente.

Se han localizado las listas de todos los cursos correspondientes a este periodo. Es importante señalar que se han buscado las obras correspondientes a la asignatura voluntaria de Matemáticas, ya que en ella es en la que se incluyen los contenidos de Geometría Analítica. Esta asignatura, aunque podía cursarse voluntariamente en la educación secundaria, formaba parte del currículo de la Facultad de Filosofía, y por tanto las obras recomendadas para su estudio se encuentran formando parte de la lista de libros para esta Facultad y no de la de segunda enseñanza, aunque a veces ambas listas se incluyen una a la otra.

Las listas de libros para el **curso1846/1847** aparecen en la Gaceta de Madrid de 8 de septiembre de 1846. En el artículo 1 se dice que son provisionales para el próximo curso, y el 2 especifica "que las fechas de edición son solo para ilustración, pudiendo servir cualquiera otra edición que de las mismas obras exista". En este caso las listas de segunda enseñanza –que reproducimos a continuación- aparecen dentro de la Facultad de Filosofía, ya que esta está formada por la segunda enseñanza elemental y superior.

ENSEÑANZA ELEMENTAL
CUARTO AÑO

Aritmética y geometría

Los tomos 1º y 3º del *Tratado de matemáticas* de Lacroix, traducido por Rebollo, última edición de Madrid.

Primera y segunda parte del *tomo 1º de la obra de D: José Mariano Vallejo,* titulada Tratado elemental de matemáticas: última edicion de Madrid.

Los tomos 1º y 2º del *Curso completo de matemáticas puras*, por D. José Odriozola, reformado por el mismo: ultima edicion.

Matemáticas puras por Francoeur, traduccion de D. Alberto Lista.

Tratado de aritmética por D. Juan Cortázar: un tomo en 8º. marquilla, 1846.

AÑO QUINTO

Algebra, trigonometría rectilínea, topografia.
Las mismas obras expresadas arriba

ENSEÑANZA DE AMPLIACION
CIENCIAS

Matemáticas sublimes

> Las mismas obras que se han indicado para los ultimos años de filosofia en la parte que no se hayan estudiado entonces.

Como vemos, no se especifican obras para la asignatura voluntaria denominada *Complemento del Álgebra, aplicación de esta a la Geometría, secciones cónicas y principios de Cálculo diferencial e integra*[13]*l,* pero suponemos que habría que seguir las mismas recomendaciones que para el caso de las Matemáticas sublimes, utilizando las obras recomendadas para la segunda enseñanza elemental, limitándose a los contenidos expuestos en el título de la asignatura.

La lista de libros de texto propuestos por el Gobierno para el **curso 1847/1848,** aparece en la Orden de 8 de septiembre de 1847, publicada en la Gaceta de Madrid de 11 de septiembre. Hay que señalar que la LISTA NÚMERO 1, correspondiente a la segunda enseñanza, se dividen en tres partes: Parte Elemental, Lenguas Vivas y Facultad de Filosofía; y dentro de esta, se encuentran los libros recomendados para seguir el *Segundo curso de Matemáticas.* Para este curso y bajo el epígrafe *Complemento del álgebra y aplicación del álgebra á la geometría elemental y á las líneas y superficies de 1º y 2º orden,* aparecen las siguientes obras:

> *Geometría analítica* por Zorraquin.
>
> Idem por Santa María
>
> *Tratado elemental de trigonometría y aplicación del álgebra á la geometría* por Lacroix, traducido por Rebollo.
>
> Idem de D. José Mariano Vallejo.
>
> Nota: Se advierte que el profesor que elija cualquiera de estas dos últimas obras debe ampliar la parte relativa á las superficies de segundo órden, consultando una de las obras de Biot, Comte, Lefebure de Fourcy y Cirode.

Las listas para el **curso 1848/49** aparecen en la Gaceta de Madrid de 15 de septiembre de 1848 y de nuevo las listas de la Facultad de Filosofía se encuentran dentro de las listas de la segunda enseñanza. Encontramos entre las asignaturas de esta Facultad:

> *Complemento del Algebra y su aplicacion á la geometría elemental y á las lineas y superficies de primero y segundo órden*
>
> *Geometría analítica* por Zorraquin
>
> Idem por Santa María

Los libros recomendados para el **curso 1849/ 1850** se pueden localizar en la Gaceta de Madrid de 25 de septiembre de 1849, y en el caso que nos ocupa aparece exactamente lo mismo que para el curso anterior.

Para el **curso 1850/1851** (G.M. de 28 -9-1850) vuelven a aparecer las obras de Zorraquín y Santa María, pero lo que cambia es la denominación de la asignatura que aquí aparece ya como *Algebra superior y geometria analítica.* El nombre de la asignatura y las obras recomendadas para su estudio se repetirán en las listas del resto

[13] Aparece en el Plan Pidal (1845), como hemos visto en el capítulo2.

de los cursos, es decir **1851/1852, 1852/1853, 1853/1854, 1854/1855, 1855/1856 y 1856/1857.** Dichas listas se pueden consultar en la Gaceta de Madrid de 6 de septiembre de 1851, 17 de septiembre de 1852, 21 de septiembre de 1853, 18 de octubre de 1854, 14 de octubre de 1855 y 18 de septiembre de 1856, respectivamente.

Hay que señalar, que aunque la asignatura voluntaria de Matemáticas desaparece de la segunda enseñanza a partir del plan de estudios de 1852, sigue apareciendo en las listas de los libros de texto, pues, como ya hemos señalado antes, era una asignatura del currículo de la Facultad de Filosofía, en la sección de Ciencias.

- **1857-1868**

En 1857 siendo ministro de Fomento Claudio Moyano se aprueba la Ley de Bases de la Instrucción Pública, ley que abarcaba toda la instrucción pública, desde la primaria a la Universidad, pasando por la secundaria, escuelas superiores de ingenieros, de bellas artes y un largo etcétera. Mediante esta ley se crea la Facultad de Ciencias, cuyo programa de estudios se desarrolla mediante el R.D de 11 de septiembre de 1858 aunque en la práctica solo se creó completa en Madrid. Además de este plan de estudios, en estos años se aprobará otro en 1866 firmado por Manuel de Orovio.

Durante este periodo se siguen considerando los estudios de Ciencias como preparatorios para la Universidad o para la docencia en secundaria (Peset y Peset, 1992), y aún no como una carrera en sí misma. En el plan de 1857 se establece que también los alumnos de las Escuelas Especiales deben cursar los primeros años en esta facultad, pero en la práctica esto no se llega a llevar a cabo. En 1866 la reforma de Orovio recoge esto mismo, para intentar potenciar esta Facultad, pero esta medida encontró gran oposición por parte de las Escuelas de Ingenieros (Sánchez, 1992; García, 1984).

En ambos planes aparece la Geometría Analítica formando parte del currículo de la Facultad de Ciencias dentro del grado de Bachiller, y lo hace como una asignatura propiamente dicha, y no como parte de una asignatura general de Matemáticas, al contrario de lo que ocurría en periodos anteriores. También se encuentra dentro de los estudios preparatorios para las Escuelas Especiales, ya que aunque en la práctica no se hicieran dentro de esta Facultad y se dieran en las propias escuelas forma parte de su programa de estudios.

En este periodo se publican listas de libros por medio de las siguientes Órdenes:

R.O. 25-9-1858. (Gaceta 1-10-1858); R.O. 15-10-1861. Gaceta (20-10-1861); R.O. 10-9-1862, (Gaceta 13-9-1862); R.O. 26-9-1863, (Gaceta 30-9-1862); R.O. 31-8-1864. (Gaceta 3-9-1864) (para el trienio 1864/67), y en todas ellas se encuentran las siguientes obras:

Tratado de Geometría Analítica por **D. Juan Cortázar**,

Idem por **Zorraquín,**

Idem por **Santa María**.

En el año 1867 se publica una nueva lista "para el trienio" (R.O. 22-9-1867, G.M. 24-9-1867),aunque no hemos podido localizar más listas hasta 1875. En ella aparecen las siguientes obras:

Tratado de Geometría Analítica Por **D. Juan Cortázar,** Idem por **Lefebure de Tourey,**

Idem por **Santa María**.

- **1868-1906.**

En este periodo nos encontramos con tres planes de estudios para la Facultad de Ciencias, aunque solo dos llegaron a ser efectivos: el Plan Lasala de 1880, en el que se crea la asignatura de Geometría, que debía ser explicada por el profesor de Geometría Analítica (Millán, 1991) y el Plan de García Alix de 1900 en el que dicha asignatura se dividía en dos, Geometría Métrica y Geometría de la Posición, que establecerá un predominio de la Geometría, frente al Álgebra y al Análisis (Escribano, 1998). En ambos planes se conserva, además la asignatura de Geometría Analítica.

Los textos matemáticos que se estudian en las Facultades y Escuelas de Ingenieros son inicialmente los mismos que los del periodo anterior, aunque hacia 1880 ya es frecuente el uso de manuales universitarios escritos por catedráticos de esta época. También se traducen textos extranjeros, como la *Geometría* de Vincent, el *Álgebra* de Lebefure de Fourcy, la *Geometría y Trigonometría* de Baltzer, el *Tratado de Geometría Elemental* de Rouché y Comberousse, el *Cálculo* de Navier o las *Lecciones de Álgebra* de Cirodde; aunque los libros traducidos –casi siempre franceses- estaban en muchos casos pasados de moda, como señalaría Rey Pastor en 1915, en el discurso inaugural del Congreso de la Asociación Española para el progreso de las Ciencias de Valladolid (Peralta, 2008).

Como hemos dicho en el periodo anterior, desde 1867 no aparecen más listas de libros hasta 1875, (R.O. 30-9-1875, Gaceta 3-10-1875), donde se da permiso a los catedráticos para seguir el texto que quieran, siempre que lo apruebe la Universidad. Al no haber nuevas publicaciones hasta los años 80 suponemos que se seguían utilizando las mismas obras que hasta ese momento, máxime cuando D. Juan Cortázar fue el catedrático de Geometría Analítica en la Universidad Central hasta su muerte en 1873 (Iruste, 1912).

En el último cuarto de siglo las facultades experimentarán un desarrollo que se verá reflejado en el aumento de las publicaciones (Millán, 1991), así en 1883 se publican la *Geometría Analítica* de Ignacio Sánchez Solís, las *Lecciones de Geometría Analítica* de Santiago Mundi y Giro y los *Elementos de Geometría Analítica* de José María Villafañe, catedráticos de la asignatura en Madrid, Barcelona y Valencia respectivamente. Según Escribano (2000, p. 297)

> no se trata en general de obras relevantes por su contenido científico o por lo avanzado de sus planteamientos ni puede decirse que existan grandes diferencias conceptuales entre ellas, aunque su publicación representa, en cierto modo, un punto de inflexión en el desarrollo de esta materia en España.

También fue especialmente relevante la obra *Tratado de Geometría Analítica* de Miguel Vegas y Puebla-Collado, quien sucedió a Sánchez Solís en la cátedra de Geometría Analítica en Madrid, editado por primera vez en 1894 (Escribano, 2000).

Una vez obtenida una lista completa de los libros de texto más utilizados en cada periodo se procedió a realizar la selección de los que serían analizados.

3.4.2.2. Selección de las fuentes

El principal criterio para la inclusión de un texto como fuente primaria fue que la obra estuviera incluida en alguna de las listas oficiales de libros de texto de los planes de estudios de los niveles considerados, o que fueran de algún autor relevante de la época, en caso de no haber listas de libros para un periodo concreto.

La selección de los autores y obras en este caso se ha hecho consultando las listas oficiales de texto, incluidas en el apartado anterior, en el caso en que las hubiera, y las siguientes fuentes secundarias que nos han servido para estimar la relevancia de cada obra y/o la de su autor: Escribano (1998, 2000, 2004), Español (2003), Maz (2005), Millán (1991), Vea (1995) y Velamazán (1993 y 1994).

A partir de la información obtenida elaboramos un listado de los libros más utilizados en el periodo y se procedió a su localización, información que organizamos en la **Tabla 15**.

Autor	Título	Descripción	Año de ed.	Localización
Lefebure de Tourey (¿-¿)	*Tratado de Geometría Analítica*			No se ha localizado
Lacroix (1765-1843)	*Curso completo elemental de matemáticas puras*	Traducido por Rebollo. Tomos II, III y IV.	1846	USAL C.C.Educación /BI/1327, 1328 y 1329
Louis Benjamin Francoeur (1773-1849)	*Matemáticas puras* Traducción de D. Alberto Lista			No se ha localizado.
Lista, Alberto (1775-1848)	*Elementos de matemáticas puras y mixtas*	TII	1822	USAL BG/13079(4) T2
		Tomos I y III La G. Analítica está en el tomo III	1823-25	BG/ 90638 T3 BG/13079(3) T3 BG/13079(1) T1
		T II	1838	BG/13079(2) T2
Vallejo, José Mariano (1779-1846)	*Compendio de matemáticas puras y mixtas*	2º ed. corregida y aumentada TI, TII La G. Analítica está en el Tomo II	1826-27	USAL BG/13005T1, BG/13006 T2
		TII	1835	B.P. Soria, USE, UR
		4ª ed., TI, TII	1840	USAL CE/BI/1330 T2 CE /BI/1331 T1
		TII	1844	UCM, UDE, UM
	Tratado Elemental de matemáticas	TII. Parte primera que contiene la trigonometría esférica, la aplicación del	1813	B.P. DE CACERES

		álgebra a la geometría...		
		1ª parte tomo II	1817	USAL BG /48806
		Tomo I	1821	BG/39404
		Tomos I y II	1821-1824	BG/72597-98
Zorraquín, Mariano (¿-1823)	*Geometría Analítica*		1819	CSIC a través de Google Books
Gómez de Santa Mª, Agustín (¿-?)	*Geometría analítica o, aplicación del análisis a la geometría*		1846	UPC Biblioteca Nacional
Odriozola, José (1785-1864)	*Curso completo de matemáticas puras*	Tomo III	1829	B.P. Zamora: ZA 8834 Biblioteca Digital Hispánica. (febrero 2012)
		Tomo III	1844	CSIC, UPM, UOV
		Tomo III	1843-44	USAL BG/46011 BG/13144
		Tomo III	1850	B.P. Segovia
Cortázar, Juan (1809-1873)	*Tratado de Geometría Analítica*		1862	UVa
			1867	Biblioteca Digital Hispánica (Julio 2012)
Sánchez Solís, Ignacio (1816-1890)	*Geometría Analítica*		1883	USAL IB/Desp.58
Villafañe, José María (1830-1915)	*Elementos de Geometría Analítica*		1883	Biblioteca Digital Hispánica (Julio 2012).
Mundi y Giro, Santiago (1842-1915)	*Lecciones de Geometría Analítica*		1883	Biblioteca Digital Hispánica (Julio 2012).
Vegas y Puebla-Collado, Miguel (1856-1943)	*Tratado de Geometría Analítica*		1894	Biblioteca Digital Hispánica (Julio 2012).
			1906	USAL AZ/514.1 VEG.tra

Tabla 15: Localización de los textos

Además de los criterios anteriores a la hora de seleccionar las obras se tuvieron en cuenta las siguientes cuestiones:

- Que estuviera disponible.
- Que fuera una edición original y en español.
- Que hubiera sido publicada en el siglo XIX, o primeros años del siglo XX.
- La relevancia de su autor.

- La trascendencia o influencia del texto en la época.
- Que hubiera al menos un texto de cada uno de los planes de estudios vigentes en el siglo XIX.

Siguiendo estos criterios las obras seleccionadas fueron las siguientes:

Vallejo, J.M (1817) *Tratado elemental de matemáticas.* Tomo II. Madrid. Imprenta de Doña Catalina Piñuela.

Zorraquín, M (1819). *Geometría analítica-descriptiva.* Alcalá. Impresor de la Real Universidad.

Lista, A. (1823) *Elementos de matematicas puras y mistas (sic).* Tomo III. Madrid. Imprenta de Don Leon Amarita.

Odriozola, J. (1829) *Curso completo de matemáticas puras.* Tomo III. Madrid. Imprenta que fue de García.

Vallejo, J.M (1840) *Compendio de matemáticas puras y mixtas. Tomo II.* Madrid. Imprenta Garrasayaza.

Lacroix, S.F. (1846) *Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría.* Tomo IV. Madrid. En la Imprenta Nacional.

Santa María, A. Gómez (1846) *Tratado completo de matemáticas.* Tomo IV. Madrid. Imprenta de corrales y compañía.

Cortázar, J. (1862). *Geometría Analítica.* Madrid. Imprenta de D.F. Sánchez.

Mundi, S. (1883) *Lecciones De Geometría Analítica.* Barcelona. Establecimiento tipográfico la academia, de Evaristo Ullastres.

Sánchez Solís, I. (1883) *Geometría Analítica.* Madrid. Establecimiento tipográfico de G. Juste.

Vegas, M. (1906) *Geometría Analítica.* Madrid. Establecimiento tipográfico de G. Juste.

Como se puede observar existen obras cuya fecha de publicación no está dentro de los periodos fijados para el estudio en estos casos se buscaron ediciones posteriores, pero o bien no se localizaron o bien no estaban disponibles.

Por otra parte tomando como criterio las listas de libros aprobadas por el gobierno las obras seleccionadas quedarían clasificadas por periodos como se muestra en la **Tabla 16** Hay que tener en cuenta que algunas de las obras aparecen en las listas de libros de texto correspondientes a más de un periodo, aunque se trabajaría con ediciones distintas a las analizadas en algunos casos.

Una vez localizadas las fuentes se procedió a realizar fichas bibliográficas respectivas para cada texto. Como indica Ruiz (1976), en toda investigación de corte histórico se debe realizar una crítica interna y una crítica externa.

Periodos	Obras
1836-1845	Vallejo, J.M (1817) *Tratado elemental de matemáticas.* Tomo II Lista, A. (1823) *Elementos de matematicas puras y mistas* (sic). Tomo III Odriozola, J. (1829) *Curso completo de matemáticas puras*. Tomo III. Vallejo, J.M (1840*) Compendio de matemáticas puras y mixtas*. Tomo II. Lacroix, S.F. (1846) *Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría.* Tomo IV.
1845-1857	Vallejo, J.M (1817) *Tratado elemental de matemáticas.* Tomo II Odriozola, J. (1829) *Curso completo de matemáticas puras*. Tomo III. Lacroix, S.F. (1846) *Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría.* Tomo IV. Santa María, A. Gómez (1846) *Tratado completo de matemáticas.* Tomo IV. Cortázar, J. (1862). *Geometría Analítica.* Zorraquín, M (1819). *Geometría analítica-descriptiva.*
1857-1868	Santa María, A. Gómez (1846) *Tratado completo de matemáticas.* Tomo IV. Cortázar, J. (1862). *Geometría Analítica.* Zorraquín, M (1819). *Geometría analítica-descriptiva.*
1868-1906	Mundi, S. (1883) *Lecciones De Geometría Analítica.* Sánchez Solís, I. (1883) *Geometría Analítica.* Vegas, M. (1906) *Geometría Analítica.*

Tabla 16: Obras agrupadas por periodos

De la crítica externa ya hemos hablado en el apartado anterior, por lo que nos ocuparemos en este caso únicamente de la crítica interna. Para ello se llevó a cabo el análisis elaborando una serie de fichas que permitieran establecer lo que el autor plantea, realizando una ubicación de cada uno de los autores en su época, caracterizando cada uno de los textos, utilizando elementos de bibliometría e identificando los contenidos relacionados con el concepto a estudiar, tratando de que tales fichas permitieran establecer criterios de relación. Asimismo, se pretendió que la información así obtenida a través de las fichas y campos diseñados fuera lo más precisa y veraz posible, controlando así la crítica interna.

Todas las fichas utilizadas para el análisis, así como las categorías utilizadas se explican en el siguiente apartado.

3.4.3. Metodología de análisis

Realizaremos el análisis de las fuentes utilizando la técnica de análisis de contenido propuesta por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). Estos autores presentan el análisis de contenido como "una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares" (p.9), y añaden que

> Esto se realiza mediante el estudio de las estructuras conceptuales en la que nuevos conceptos se insertan, por la determinación de los sistemas de representación mediante los cuales tales conceptos se expresan y por la delimitación y conocimiento de las cuestiones para cuya respuesta tales conceptos fueron construidos, acotados, a su vez, por los campos en que tales conceptos se utilizan como herramientas para plantear y resolver problemas (p.9).

Es decir, el análisis de contenido de un texto escolar de matemáticas se diversifica en tres tipos de análisis: el análisis de la estructura conceptual, el de los distintos sistemas de representación utilizados para expresar dichos conceptos y el análisis fenomenológico de los conceptos estudiados, junto con los procesos de modelización en que tales conceptos se implican.

Para llevar a cabo la recogida de datos de forma eficiente y sistemática hemos definido una serie de categorías y unidades de análisis. Al ser esta investigación de carácter descriptivo y cualitativo no se han definido variables independientes, pero se han fijado tres puntos de interés: la obra, el autor y los contenidos de Geometría Analítica.

En cada uno de ellos hemos definido una serie de campos, basándonos en los definidos por (González, 2002) y (Maz, 2005) que permiten organizar la información obtenida, como ya hemos señalado.

Para llevar a cabo el **análisis de la obra** hemos definido diez campos, divididos en dos categorías:

- **Referencia de la obra** se incluyen su título, el autor, el año de la primera edición, así como la editorial y lugar de edición; el año de la edición consultada, indicando asimismo editorial y lugar de edición; y localización del manual consultado.
- **Caracterización de la estructura de la obra** en la que analizaremos su extensión y estructura (CEO1), el índice (CEO2), los objetivos generales (CEO3) de la obra, autores en que se basa (CEO4) y otras influencias, y los planes de estudios en los que aparece como texto oficial (CEO5).

Para el **estudio del autor** hemos definido seis campos, que hemos unido bajo la denominación **Caracterización del autor**, y que incluyen su fecha y lugar de nacimiento, principales lugares de formación y trabajo relacionados con las matemáticas, pertenencia a estamentos, grupos o instituciones, su relación con personas significativas en el campo de las matemáticas y sus obras.

El siguiente apartado se centra en nuestro tema de estudio, la Geometría Analítica. Nos ceñiremos en esta investigación al estudio de la Geometría Analítica en el plano, dejando de lado el estudio de la Geometría Analítica en el espacio. Esta elección se debe, por una parte, a que es en la geometría plana donde un primer análisis nos ha mostrado dos modos diferentes de trabajar, uno que conserva reminiscencias de la geometría de Descartes, y otro que utiliza ya las coordenadas de modo similar al actual; por lo que nos parecía imprescindible acometer el estudio de esta parte. Por otro lado, pensamos que ampliar el campo de estudio a la geometría en el espacio dificultaría el análisis al aumentar de forma considerable el material que debería ser analizado.

Bajo el nombre de **Caracterización del tratamiento dado a la Geometría Analítica** hemos definido los siguientes campos: definición (D), construcción geométrica de las soluciones algebraicas (S), segmentos negativos (SN), coordenadas (C), ecuaciones de la recta (ER), gráficos (GR), lugar geométrico (LG), contenidos de Geometría Proyectiva (GP) y problemas que resuelve (PR) que incluye cinco subcampos: problemas determinados (PRD), problemas de incidencia (PRI), problemas de paralelismo (PRP), problemas de distancias (PRD) y problemas de ángulos (PRA).

Veamos con detalle cada uno de los puntos de interés junto con los campos que se han definido en cada uno de ellos.

3.4.3.1. Caracterización de la obra

La caracterización de la obra la llevaremos a cabo teniendo en cuenta dos aspectos: por un lado haremos una ficha de referencia de la obra en la que aparecen los datos más significativos de la misma, y que nos permitirán identificarla; y por otro lado estudiaremos la estructura de la misma, lo que nos permitirá tener una visión global de la estructura y contenido de la misma.

- **Referencia de la obra:**

En este apartado se han considerado algunos campos usuales cuando se trabaja con libros:

Título completo de la obra
Autor: Se indica el nombre completo del autor.
Primera edición: Se incluye el año, la editorial y el lugar de la primera edición del texto para poder situarla correctamente en el momento en el que apareció.
Edición analizada: Se indican el año, la editorial y el lugar de la edición del texto que se ha analizado por las posibles diferencias que tuviera respecto del texto original.
Localización del manual utilizado: Indicamos la procedencia del manual analizado para que pueda ser localizado de forma inmediata por cualquier otro investigador.

Referencia de la obra
Título:
Autor:
Año, editorial y lugar de la edición consultada:
Año, editorial y lugar de la primera edición:
Localización:

Tabla 17: Ficha de referencia de la obra

La función de esta ficha es simplemente identificar la obra, permitiéndonos encuadrar la obra en el momento y lugar en que fue escrita, sin que se use para realizar ningún tipo de análisis.

- **Caracterización de la estructura de la obra**

Con este estudio se pretende dar una visión general de la estructura de cada obra. Este aspecto es especialmente importante en nuestro caso ya que nos vamos a centrar únicamente en el estudio de la geometría analítica en el plano, aunque el autor estudie también la del espacio. Al explicitar el índice podremos hacernos una idea del peso de cada una de ellas dentro de la obra, y cómo han ido variando los contenidos estudiados a lo largo de los años.

Los campos que estudiaremos en este bloque son:

CEO1-Extensión y estructura del material. Se indica el tomo que se está analizando, si es que hubiere más de uno; el número de páginas de este y la forma en que está dividido el texto en introducción, prólogo, capítulos, notas, apéndices, etc.

CEO2-Índice. Se explicita el índice del tomo que se está analizando, en lo concerniente a la Geometría Analítica, para tener así una idea clara de los contenidos de esta disciplina que fueron tratados por el autor. Como estudiaremos obras de diferentes épocas, a lo largo del siglo XIX y principios del XX este campo nos permitirá observar cómo se fueron introduciendo o desapareciendo distintos contenidos de geometría analítica a través del tiempo.

CEO3-Objetivos generales de la obra. Se indican los objetivos, intenciones o deseos del autor explicitados en la obra, por ejemplo en el prólogo, si lo hubiera.

CEO4-Autores en que se basa y otras influencias. En este apartado se recogen todos aquellos autores a los que se hace referencia en el texto, tanto en el desarrollo del mismo como en la introducción.

Este campo da una idea acerca de cuáles son los autores y las obras de mayor influencia en la introducción y desarrollo de la Geometría Analítica en España en esta época.

CEO5-Planes de estudios. Se indicará si la obra fue recomendada en alguno, o varios, planes de estudios de educación secundaria o de la facultad de ciencias, como texto oficial.

Caracterización de la estructura de la obra (Título)
CEO1: Extensión y estructura del material:
CEO2: Índice:
CEO3: Objetivos generales de la obra:
CEO4: Autores en que se basa y otras influencias:
CEO5: Planes de estudios:

Tabla 18: Ficha de caracterización de la estructura de la obra

3.4.3.2. Caracterización del autor

En este apartado se pretende caracterizar brevemente el contexto histórico y científico de la época en que cada autor se formó y desarrolló su obra, con especial atención al estado de la disciplina matemática, para identificar posibles influencias en su formación y desempeño en el área de las matemáticas.

Los campos definidos en este apartado son los que siguen:

CA1-Fecha y lugar de nacimiento y fallecimiento.
Este campo ubica al autor en un periodo histórico determinado, permitiendo así conocer el contexto social, cultural y político en el que vivió, lo que ayuda a interpretar su caracterización ideológica y política.

CA2-Centros donde cursó estudios.
Instituciones donde realizó sus estudios principales, o aquellos centros académicos de renombre donde amplió o perfeccionó su formación matemática. Este campo ayuda a caracterizar el contexto científico del autor, para así interpretar sus posicionamientos intelectuales.

CA3-Lugares donde ejerció su profesión relacionada con las matemáticas y permanencia a estamentos, grupos o instituciones.
Se hace mención de los centros de educación donde llevó a cabo su actividad matemática. Este campo completa la caracterización científica del autor; también contribuye a interpretar su posición intelectual e institucional sobre la educación.

CA4-Relación con personas significativas en el campo de las matemáticas (si procede).
Se mencionan aquellos individuos que por su bagaje matemático influyeron de alguna manera en los autores por las relaciones que establecieron con ellos. Este campo ayuda a explicar la posición científica del autor sobre las matemáticas y sobre la educación.

CA5-Obras publicadas.
Mención de las obras más importantes publicadas por el autor. Este campo ubica al autor como matemático y como educador.

CA6-Otra información relevante.

Referimos aquí aquella otra información que es relevante sobre el autor aunque no tenga relación con su labor como autor de textos. Este campo incluye cualquier información útil para completar las caracterizaciones anteriores.

Autor
CA1- Fecha y lugar de nacimiento y fallecimiento:
CA2- Centros donde cursó estudios:
CA3-Lugares donde ejerció su profesión relacionada con las matemáticas y permanencia a estamentos, grupos o instituciones:
CA4-Relación con personas significativas en el campo de las matemáticas:
CA5-Obras publicadas:
CA6-Otra información relevante:

Tabla 19: Ficha de caracterización del autor

Los datos recogidos en estos puntos nos servirán para contextualizar la obra y a su autor dentro de un periodo histórico determinado, pudiendo relacionar así los contenidos incluidos en la misma con las ideas matemáticas y el contexto socio-político y cultural de la época. Esto nos permitirá inferir la influencia que tuvo el contexto histórico en la evolución de la Geometría analítica, tanto como materia curricular, como disciplina científica.

3.4.3.3. Caracterización del tratamiento dado a la Geometría Analítica

Con los campos definidos en este apartado se pretende sistematizar la información hallada en los textos, concerniente a la Geometría Analítica plana: definiciones, ejemplos, problemas, etc. Esto permitirá apreciar los diversos tratamientos dados por los autores a nuestro tema de estudio, así como los cambios en la estructura conceptual, fenómenos y contextos, sistemas de representación y problemas.

Dichos campos son:

D-Definición.
En este campo incluimos la definición de Geometría Analítica que da el autor.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual.

U-Unidad. Ecuaciones homogéneas y heterogéneas.
En este apartado se recogen todas aquellas definiciones relacionadas con el segmento unidad y las ecuaciones homogéneas y heterogéneas. Esto nos permitirá conocer hasta cuándo se conservaron, y de qué modo, las reminiscencias de la geometría de Descartes.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual y a los sistemas de representación.

SN-Segmentos negativos.
Recoge el tratamiento que el autor hace de los segmentos negativos: su interpretación y su construcción geométrica. Esto nos permitirá saber cómo se resuelve en cada momento y cómo va evolucionando a lo largo del siglo este problema, uno de los más importantes en los orígenes de la Geometría Analítica.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual, a los sistemas de representación y al campo de fenómenos de la Geometría Analítica.

E-Construcción geométrica de las soluciones algebraicas de las ecuaciones de primer y segundo grado.
Se recogerán todas las expresiones algebraicas cuya construcción geométrica explique el autor, explicitando la construcción de algunas de ellas. Este campo nos muestra también una forma de hacer geometría perdida en nuestros días.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual, a la fenomenología de los conceptos implicados y a los sistemas de representación.

C-Coordenadas.
Recogeremos los diferentes tipos de coordenadas utilizadas por el autor, así como las ecuaciones de cambio de unos sistemas a otros.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual y a los sistemas de representación.

ER-Ecuaciones de la recta.
Aquí se incluyen las diferentes ecuaciones de la recta que utiliza el autor. Esto nos permitirá observar cómo y cuándo se fueron introduciendo nuevos conceptos matemáticos, como por ejemplo, el cálculo matricial.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual y a los sistemas de representación.

GR-Gráficos.
Tipos de gráficos utilizados por el autor, uso y ubicación de los mismos (dentro del texto, en láminas aparte, etc.).

El contenido de este campo corresponde a los sistemas de representación.

LG-Lugar geométrico.
Se recoge la definición de lugar geométrico, si la da el autor, y los diferentes casos en que utiliza el concepto, aunque no lo defina explícitamente.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual y a los sistemas de representación.

GP-Contenidos propios de la Geometría Proyectiva.
Se incluyen conceptos propios de la Geometría Proyectiva que se aplicarán a la Geometría Analítica.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual.

PR-Problemas que resuelve, que incluye cinco subcampos:

- **PRDT: Problemas determinados:** En los que el autor resuelve un problema que tiene solución única.

Un estudio previo nos muestra que el método de resolución de algunos autores se ha perdido en nuestros días, pues tras pasar resolver el problema geométrico utilizando el álgebra construyen geométricamente las soluciones algebraicas. Por ello especificaremos la resolución de los problemas más significativos, y utilizaremos la siguiente notación para distinguir cada uno de los pasos que utiliza el autor para la resolución del problema: **PG:** Planteamiento geométrico, **PRA:** Planteamiento y resolución algebraicos, **RG:** Resolución geométrica, **CS:** Comprobación de la solución obtenida.

- **PRI: Problemas de incidencia:** Problemas de posiciones relativas entre rectas.
- **PRP: Problemas de paralelismo y perpendicularidad:** Problemas en los que aparecen implicados los conceptos de paralelismo o perpendicularidad.
- **PRDI: Problemas de distancias:** Distancias entre puntos, rectas y punto-recta.
- **PRAN: Problemas de ángulos:** Ángulos entre dos rectas.
- **PEJ: Ejercicios**. Ejercicios resueltos y propuestos por el autor.

Se recogen todos los problemas y ejercicios propuestos y resueltos por el autor, catalogándolos según las subclases propuestas e incluyendo la resolución de aquellos más significativos, bien por los conceptos que impliquen, bien por la manera en que están resueltos. Las subclases propuestas se corresponden con los problemas clásicos de la Geometría Analítica.

El contenido de este campo corresponde a la estructura conceptual y a la fenomenología de los conceptos implicados.

Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica	
D-Definición:	
U-Unidad. Ecuaciones homogéneas y heterogéneas:	
SN-Segmentos negativos:	
E-Construcción geométrica de las soluciones algebraicas de las ecuaciones de 1º y 2º grado:	
C-Coordenadas:	
ER-Ecuaciones de la recta:	
GR-Gráficos:	
LG-Lugar geométrico:	
GP-Contenidos propios de la Geometría Proyectiva:	
PR-Problemas que resuelve:	PRDT: Problemas determinados:
	PREJ: Ejercicios
	PRI: Problemas de incidencia:
	PRP: Problemas de paralelismo y perpendicularidad:
	PRD: Problemas de distancias:
	PRAN: Problemas de ángulos:

Tabla 20: Ficha de caracterización del tratamiento dado a la Geometría Analítica

En la siguiente tabla se indica en qué tipos de análisis están implicados cada uno de los campos que hemos definido.

CAMPO	Estructura Conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología
D	X	X	
U	X		
SN	X	X	X
E	X	X	X
C	X	X	
ER	X	X	
GR		X	
LG	X	X	
GP	X		
PR	X		X

Tabla 21: Campos utilizados en el análisis de contenido.

3.4.3.4. Procedimiento para realizar los análisis

El análisis de las diferentes obras se realizará siguiendo el siguiente esquema:

2. Autor

Teniendo en cuenta los datos recogidos en las categorías definidas en Caracterización del autor insertaremos una breve biografía en la que se pondrán de manifiesto principalmente el contexto social, cultural y político en el que vivió el autor, su posición filosófica y científica y su posición intelectual y educativa.

3. Referencia de la obra.
Se incluirán los datos consignados en este apartado y que hemos especificado al comienzo.

4. Caracterización de la estructura de la obra
Aquí se explicita la información obtenida en los campos CEOn, que nos dará una visión global de la obra: su extensión, los contenidos que incluye, los objetivos para los que fue creada y su uso en la enseñanza, así como los autores que tuvieron influencia en su creación. También los planes de estudios en los que fue propuesta oficialmente como texto de referencia, lo que nos dará una idea de su influencia en la enseñanza a lo largo del siglo.

5. Caracterización del tratamiento dado a la Geometría Analítica.
Con los datos recogidos en los diferentes campos definidos en esta categoría llevaremos a cabo el análisis de contenido siguiendo el siguiente esquema:

5.1. Análisis de la estructura conceptual.
5.2. Sistemas de representación.

- Lenguaje natural (enunciados, definiciones, resultados…)
- Gráficos
- Tablas y cuadros
- Notaciones

5.3. Fenomenología.

Una vez analizados los diferentes libros llevaremos a cabo una comparativa entre los contenidos de cada uno de ellos, con el objeto de mostrar la forma en que han evolucionado a lo largo del tiempo. Dicha comparativa se realizará entre los campos definidos para analizar la estructura conceptual (D, U, SN, E, C, LG, GP Y ER), entre los sistemas de representación que se identifiquen en las obras y entre los campos de fenómenos que resulten al analizar los textos.

Para la recogida de datos utilizaremos las siguientes tablas. En la **Tabla 22** se recogen, por un lado las unidades de análisis consideradas para llevar a cabo la caracterización de la Geometría Analítica, y por otro todas las obras estudiadas, en ella reflejaremos qué contenidos y de qué manera aparecen en cada uno de los libros.

CAMPOS	OBRA1	OBRA2	OBRA3	OBRA4	OBRA5
D					
U:					
SN:					
E:					
C:					
LG:					
GP:					
ER:					

Tabla 22: Tabla para el estudio comparativo de contenidos de Geometría Analítica en las diferentes obras analizadas. Estructura conceptual

En la **Tabla 23** y en la **Tabla 24** hacemos lo propio con los sistemas de representación y la fenomenología.

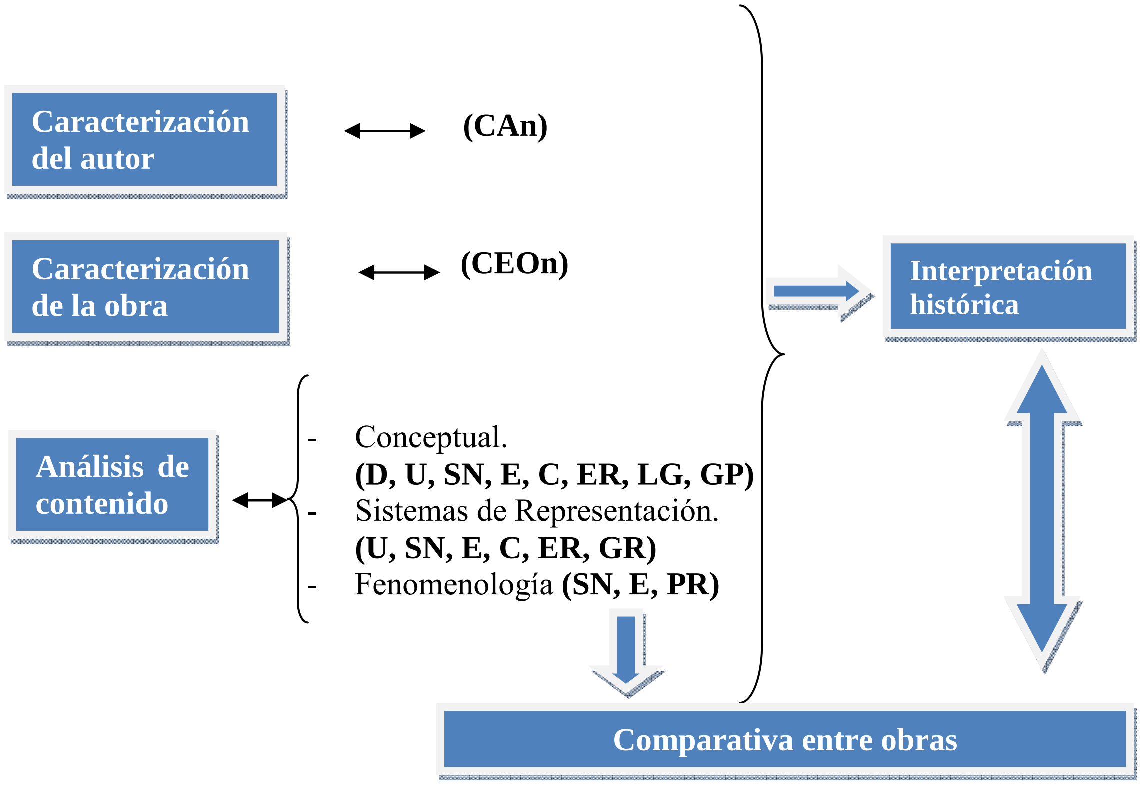
Autor /texto	Lenguaje natural	Tablas	Gráficos	...	...
Obra 1					
Obra2					
Obra 3					
Obra 4					
Obra 5					

Tabla 23: Tabla para el estudio comparativo de contenidos de Geometría Analítica en las diferentes obras analizadas. Sistemas de representación

Autor /texto	Fenómeno1	Fenómeno2	Fenómeno3	...	...
Obra 1					
Obra2					
Obra 3					
Obra 4					
Obra 5					

Tabla 24: Tabla para el estudio comparativo de contenidos de Geometría Analítica en las diferentes obras analizadas. Fenomenología

Por último, resumimos, mediante el siguiente esquema la forma en que van a realizarse los análisis de las obras.



CAPÍTULO 4: Análisis de los textos

Introducción

En este capítulo se presentan los datos obtenidos tras realizar el análisis de los textos seleccionados, atendiendo a las categorías especificadas en el capítulo anterior.

Los libros se presentan por orden cronológico de publicación y no agrupados en los periodos fijados con anterioridad. Esta organización se debe fundamentalmente a que existen libros que fueron utilizados como texto en diferentes periodos y niveles educativos, como se muestra en la **Tabla 16** del apartado anterior.

Por otra parte, como uno de los objetivos de nuestro trabajo es el de estudiar la evolución de la Geometría Analítica como disciplina científica, el presentar el análisis de los libros de forma cronológica muestra esta evolución de forma mucho más clara, que si se hubiese hecho agrupados por periodos. Si se hubiese hecho así en el caso particular de la obra de Zorraquín -cuya única edición data de 1819 pero que fue utilizado en segunda enseñanza y en la Universidad desde 1847 hasta 1868- el análisis de este libro se presentaría después del de otras obras publicadas con posterioridad a él, siendo, sin embargo el primer autor que aunó la Geometría Analítica y la Descriptiva en una misma obra (Velamazán, 1993).

Para cada libro el análisis se organiza en los tres aspectos especificados en el apartado de metodología: el autor, la caracterización de la obra y la caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica. En este último apartado se presenta el análisis de la estructura conceptual, de los sistemas de representación y de la fenomenología. En la parte de fenomenología además de recoger los enunciados de los problemas agrupados por categorías se incluye la resolución de los problemas que hemos considerado más representativos de cada una de estas categorías.

4.1. Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo (1817)

4.1.1. Autor

José Mariano Vallejo nace en Albuñecas (Granada) en 1779 y muere en Madrid en 1846 (CA1). Los primeros pasos en el estudio de las Matemáticas los da en la Cátedra de Ética de la Facultad de Filosofía y Artes de la Universidad de Granada. De aquí se traslada a Madrid donde prosigue sus estudios en la *Sección de Arquitectura* de la Academia de Bellas Artes de San Fernando, en la que ingresa en 1799 (Gentil, 1999). Aunque de formación fundamentalmente autodidacta recibió ayuda de D. Antonio Varas (CA2), quien fue uno de los directores de matemáticas de esta Academia junto con D. Benito Bails.

Siendo aún estudiante es nombrado en esta institución profesor sustituto en 1801, docencia que compatibilizó desde el año siguiente y hasta 1804 con la de la enseñanza de *Matemáticas, Ataque, Fortificación y Defensa* en el Seminario de Nobles, donde obtuvo por oposición la cátedra de dicha asignatura (Hernández y Medrano, 1990). Será durante la permanencia en el Seminario, entre 1802 y 1809, cuando se geste la mayor parte de su obra matemática y cuando empiecen a surgir sus preocupaciones de carácter pedagógico, que serán una constante a lo largo de toda su vida. Además de su labor científica durante su estancia en el Seminario llevó a cabo con sus alumnos diversos trabajos de tipo práctico, entre ellos una nivelación en Madrid. Al poco tiempo de acceder a la cátedra, el director del centro le encarga que reorganice los estudios de Matemáticas (CA3). Como consecuencia de este encargo comienza en 1804 la elaboración de su *Tratado Elemental de Matemáticas,* aunque no iniciará su publicación hasta 1812. En estos años publica su *Aritmética para niños* (1806) y sus *Adiciones a la Geometría de D. Benito Bails* (1806) (Hernández y Medrano, 1990) (CA5).

En 1808 estalla la Guerra de Independencia y por esa razón en 1809 abandona Madrid y se traslada a Cádiz, donde comienza su andadura política, ocupando importantes cargos en la administración pública y siendo elegido Diputado a Cortes por Granada en 1813. Durante la guerra seguirá con su labor científica y colaborará con el ejército, trabajando en el Laboratorio de Fuegos Artificiales de Artillería de la Plaza de Cádiz -donde estudió la trayectoria de las granadas lanzadas por los franceses durante el sitio de esta ciudad- y promoviendo, posteriormente, la creación de la Academia Militar de San Fernando (CA3).

Durante el Sexenio Absolutista, además de atender a la edición de sus obras de matemáticas desarrolla una amplia actividad societaria. Entre otras cosas es director del Gabinete Geográfico, socio de la Academia de Ciencias de Barcelona y de la Sociedad Económica Matritense de Amigos del País, de la que es bibliotecario. A través de éstas canaliza su actividad científica enviando varias memorias sobre diversos temas, entre las que destacaremos una en la que defiende el sistema de numeración decimal. También en estos años escribe sobre temas dirigidos a un público más numeroso, como muestran dos obras de 1815 sobre agricultura y mecánica práctica (Hernández y Medrano, 1990; Gentil, 1999) (CA3).

Durante el Trienio Liberal, además de asumir responsabilidades en Gobernación, es nombrado, en 1821, miembro de la Dirección General de Estudios.

Con el regreso del absolutismo, Vallejo debe emprender el camino del exilio, fijando su residencia en París. Su estancia en el extranjero es aprovechada para mejorar y poner el día sus conocimientos científicos y técnicos, asistiendo al Instituto de París, a la Sorbona, el Observatorio astronómico de París y a la Escuela Politécnica entre otras instituciones (CA2). En estos centros recibe clases de Lacroix, Laplace, Cauchy y Gay-Lussac, que tendrán gran influencia en su obra, especialmente Cauchy. Tras su regreso a España publicara una nueva edición del *Tratado Elemental*, en el que destaca la influencia de este matemático en el tema del Cálculo Diferencial e Integral (CA4).

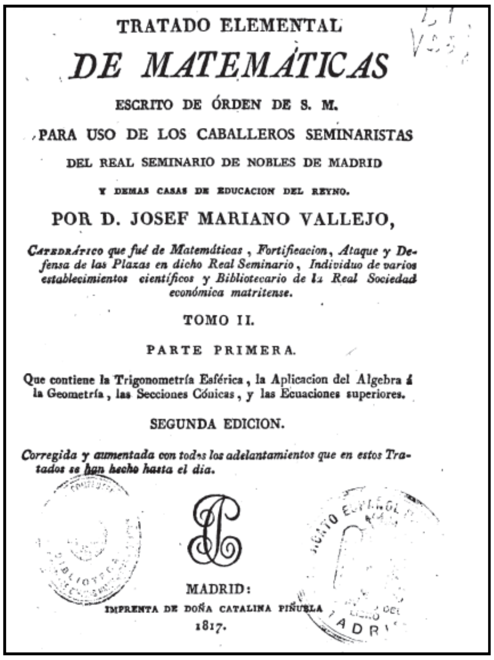
Además recorre Europa, visitando Bélgica, Inglaterra y Holanda, con el fin de ponerse al día en la utilización de las nuevas tecnologías, tanto de tipo industrial como agrícola (CA6).

En 1829 vuelve a España y retoma su labor científica y, tras la muerte de Fernando VII, su participación en la vida política. En 1833, mediante Real Orden, se generaliza a todas las escuelas su método para la enseñanza de la lectura, y es nombrado Vocal de la Inspección General de Instrucción Pública, dedicándose principalmente a la enseñanza primaria. Así contribuye a la creación de dos Escuelas Normales en Madrid y a la ampliación de los programas de estudios para maestros (Maz, 2005).

Entra en el gobierno como Director General de Estudios en 1835 y vuelve a ser elegido diputado por Granada en 1836, llegando a Senador por esa ciudad en 1844. Al tiempo escribe y hace campaña en pro de urgentes reformas sobre diversos asuntos, entre ellos la necesidad de la canalización de agua corriente en las ciudades, informes sobre la nueva división territorial administrativa, ferrocarriles y sistema métrico decimal (Ausejo, n.d.a). Además publica nuevas ediciones de sus obras de Matemáticas. Por otra parte sigue perteneciendo a instituciones científicas, como la Real Sociedad Económica Matritense de Amigos del País, a la que se incorpora después del exilio; del Ateneo Científico, Literario y Artístico de Madrid, del que es socio fundador, y en el que participó activamente con la lectura de numerosas memorias; y de la Academia de Ciencias Naturales (Hernández y Medrano, 1990) (CA3).

Entre sus obras se encuentran: *Aritmética para niños* (Madrid, 1804), *Adiciones a la Geometría de don Benito Bails* (Madrid, 1806), *Memoria sobre la curvatura de las líneas* (Madrid,1807), *Máximas militares y políticas* (Madrid, 1808), *Tratado completo del arte militar* (Palma, 1812), *Tratado elemental de Matemáticas* (3 tomos en cinco volúmenes, los dos primeros editados en Palma, el tercero en Valencia, 1812-1817), *Disertación sobre el modo de perfeccionar la agricultura* (Madrid, 1815), *Compendio de mecánica práctica* (Madrid, 1815), *Compendio de Matemáticas puras y mixtas* (Valencia, 1819), *Teoría de la lectura* (Madrid, 1825), *Modo de poner en ejecución el nuevo método de enseñar a leer* (París, 1826), *Ideas primarias que deben darse a los niños ... acerca de los números* (París,1826), *Nueva cartilla* (París, 1826), *Método de enseñar a escribir* (París, 1827), *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas* (Madrid, 1833), *Instrucción ... para enseñar a leer ...* (Madrid, 1834), *Nociones geográficas y astronómicas para comprender la nueva división del territorio español* (Madrid, 1834), *Definiciones y extractos de las principales reglas y operaciones de la Aritmética* (Madrid, 1840), *Explicación del sistema decimal* (Madrid, 1840), *Nociones generales de Ideología y Gramática española* (Madrid, 1842), *Nueva construcción de caminos de fierro* (Madrid, 1844), *Programa llamando licitadores a la empresa de traída de aguas a Madrid* (Madrid, 1845). Póstumamente aparecieron un *Tratado completo de Matemáticas* y un *Algebra* (París, 1856), (Ausejo, n.d.b) (CA5).

4.1.2. Caracterización de la obra.


TRATADO ELEMENTAL

DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL REAL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REYNO.

POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,

Catedrático que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Real Seminario, Individuo de varios establecimientos científicos y Bibliotecario de la Real Sociedad económica matritense.

TOMO II.

PARTE PRIMERA.

Que contiene la Trigonometría Esférica, la Aplicacion del Algebra á la Geometría, las Secciones Cónicas, y las Ecuaciones superiores.

SEGUNDA EDICION.

Corregida y aumentada con todos los adelantamientos que en estos Tratados se han hecho hasta el dia.

MADRID:

IMPRENTA DE DOÑA CATALINA PIÑUELA

1817.

Figura 12: Carátula del libro. Tratado elemental de matemáticas. J.M. Vallejo

El libro analizado corresponde al Tomo 2, parte primera, de la segunda edición del *Tratado elemental de matemáticas* de José Mariano Vallejo, impresa en Madrid, en 1817 en la imprenta de Doña Catalina Piñuela (Figura 12). La primera edición de esta obra se hizo en Mallorca en 1813. El ejemplar utilizado se encuentra en la biblioteca de la Universidad de Salamanca, con referencia BG 48806 (RO).

Este volumen contiene la Trigonometría esférica, la Aplicación del Álgebra a la Geometría, las Secciones Cónicas y las Ecuaciones superiores, tal y como se refleja en la portada (figura1). Consta de 320 páginas, de las cuales dedica 60 a la Aplicación del Álgebra a la Geometría; y de 9 láminas con las gráficas y dibujos al final del tomo (CEO1).

El índice (p. 317) (CEO2) está dividido en epígrafes en los que explica los contenidos que desarrolla en cada uno de ellos.

Incluimos solamente los títulos de los mismos, que nos dan idea de los contenidos tratados:

- Consideraciones acerca de las líneas trigonométricas
- De la Trigonometría esférica
- Resolución de los triángulos esféricos
- **Aplicacion del Algebra á la Geometría (sic)**
- **Determinacion de los puntos y las rectas sobre un plano (sic)**
- **De los puntos, de la linea recta y del plano, considerados en el espacio**
- **De la transformacion de las coordenadas (sic).**
- Idea general de la teoría de las curvas.
- De las lineas de segundo órden ó secciones cónicas (sic).
- De las lineas de segundo órden en general suponiendo rectangulares los eges (sic).
- Digresion acerca de las superficies curvas (sic).
- Teoria general de las ecuaciones (sic)

Debemos señalar que en el texto los puntos que hemos resaltado en negrita aparecen bajo el mismo epígrafe, titulado *Aplicacion del Álgebra a la Geometría* (sic).

De todos ellos solo hemos analizado los correspondientes a la Aplicación del Álgebra a la Geometría y al estudio de los puntos y la recta en el plano y las transformaciones de coordenadas en el plano.

En el índice cita a Descartes y en la página 91 hace alusión a *algunos Geómetras franceses,* sin nombrar a ninguno en particular, en relación con la notación. Además de estos, a lo largo del texto cita en varias ocasiones a Newton y también hace referencia a uno de sus profesores, el Catedrático D. Antonio Varas (CEO4).

El objetivo de la obra (CEO3) queda patente en la portada (Figura1) en la que se especifica que está "escrito por orden de S.M para el uso de caballeros seminaristas del real seminario de nobles de Madrid y demás casas de educacion del Reyno" (sic). Además se incluye una circular del Consejo de Indias de 1 de abril de 1816, recomendando este Tratado elemental de Matemáticas para "su uso en las universidades del Reyno" (sic), así como en las universidades, colegios y demás establecimientos científicos en "ambas Américas, sus islas adyacentes y Filipinas".

Por otra parte aparece en las listas de diferentes planes de estudios de educación secundaria (CEO5) como el plan de estudios de 17 de septiembre de 1845 (Plan Pidal), para el curso 1846/47 (Lista en R.O. de 1 de septiembre de 1846, Gaceta de Madrid de 8 de septiembre de 1846); y en el Plan de estudios de 8 de julio de 1847/ Reglamento de 19 de agosto de 1847, para el curso 1847/1848 (Orden de 8 de septiembre de 1847, G.M. de 11 de septiembre).

En el primero aparece explícitamente la Geometría Analítica dentro de una asignatura denominada: *Complemento del Álgebra, aplicación de esta a la Geometría, secciones cónicas y principios de Cálculo diferencial e integral,* que se incluía en 5º curso de segunda enseñanza elemental, pero que era de carácter voluntario.

En el segundo aparece la Geometría Analítica dentro del *Segundo curso de matemáticas elementales*, que se estudiaba en 5º, siendo, como en el plan anterior, optativa para aquellos que quisieran estudiar en las escuelas especiales.

4.1.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.1.3.1. Análisis de la estructura conceptual.

Se observan en la obra dos partes claramente diferenciadas por los contenidos, los tipos de problemas que resuelve y el modo en que lo hace, siendo siempre problemas de tipo geométrico y utilizando el Álgebra en su resolución. La primera la titula *Aplicacion del Algebra á la Geometría* (sic) y en ella utiliza el Álgebra para resolver problemas geométricos de manera similar a como se utiliza para resolver los aritméticos, con la diferencia de que en los primeros se opera con segmentos en vez de con números. Estas operaciones llevan implícitas una serie de conceptos como la construcción con regla y compás de las diferentes operaciones algebraicas, la necesidad de que las ecuaciones sean homogéneas y la cuestión de la validez de las soluciones negativas. Todos estos conceptos son desarrollados por el autor, como veremos con más detalle.

En la segunda Vallejo trabaja con sistemas de coordenadas, obteniendo la ecuación de una recta y resolviendo problemas relativos a los puntos y las rectas de un plano, de forma muy similar a la actual.

1. Aplicación del Álgebra a la Geometría

1.1. Definición

La primera parte comienza con la definición (D) de Aplicación del Álgebra a la Geometría, explicando en qué consiste y qué utilidad tiene esta aplicación:

> 95. El Algebra es mas general que la Geometría, porque con la letra *a*, por egemplo, podemos espresar no solo una cantidad cualquiera discreta, sino una cantidad continua como una linea, una superficie &c. La Geometría es mas clara que el Algebra, porque presenta á los sentidos los objetos de las lineas que forman el asunto de nuestras investigaciones. Cuando para generalizar ó facilitar alguna verdad geométrica se hace uso del Algebra ó de la análisis algebráica, se dice que *se aplica el Algebra á la Geometría*; y cuando para hacer sensible alguna verdad algebráica ó analítica se hace uso de la Geometría, se dice que *se aplica la Geometría al Algebra ó á la análisis*. Pero en general se comprende bajo el nombre de *Aplicacion del Algebra á la Geometría, al uso que se hace de estas dos ciencias,*

> *ya sea para resolver alguna cuestion perteneciente á una de ellas, ya para resolver cualquier otra, sea de la especie que sea.* (…)
> La aplicación del Algebra á la Geometría tiene dos partes, á saber: manifestar cómo se pueden traducir en Geometría los resultados de la análisis, y cómo se pueden escribir analíticamente las cuestiones de la Geometría (p. 68).

1.2. Método analítico y método sintético

En esta parte también explica la diferencia entre dos métodos de resolución de problemas, el analítico y el sintético:

> 117. Para manifestar como se traducen las cuestiones de Geometría á ecuaciones algebráicas, nos propondrémos resolver algunos problemas, y lo egecutarémos empleando el método analítico que *consiste en suponer hecho lo que se trata de egecutar.*
> De esta suposición resulta inmediatamente que se ha de verificar alguna condicion, que hallándose escrita, suministre una ecuacion entre las cosas que se dan conocidas y las que se buscan ó son desconocidas. Indagando después las consecuencias que resultan de esta condicion, que se supone verificada, ó de la ecuacion que resulta de ella, se llega á descubrir por último la cantidad ó cantidades desconocidas, ó á indicar el procedimiento que es necesario seguir para egecutar lo que se pide.
> En el método sintético se procede al contario: enunciada una proposicion se parte de una de las anteriormente demostradas; despues, esta se combina con otra de las anteriores, luego con otra, y así se continúa hasta llegar á tener la proposicion que se enunció. El primer método, abrazando el asunto propuesto en toda su extensión, le hace pasar por diferentes formas, haciendo diversas traducciones del enunciado hasta llegar á tener lo que se busca, espresado por una condicion sencilla conocida, y por lo mismo se llama *método de descomposicion*; el segundo que presenta siempre la proposicion enunciada, como la última consecuencia de la serie de proposiciones que forman la demostración, es una *composicion;* porque se va añadiendo principio sobre principio, hasta que se llega á esta consecuencia.
> El método analítico se ha llamado método de invencion, el método sintético se dice que es mas propio para la enseñanza (p. 74).

Esta exposición de los métodos analítico y sintético es propia de Bézout y aparece en su *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* (1781), según explica Schubring (2005).

> (…) Bézout explicitly weighed the advantages of the analytic and the synthetic methods for his part on algebra. (…) was the first to introduce the distinction between *génie* and the public at large, declaring the analytic metod to be suitable only for the "inventeurs", while the synthetic method was more appropriate for the majority (…) (Schubring, 2005, p. 124).

Vallejo resuelve un problema (PRDT) -el 118, que hemos recogido en la parte de fenomenología- con todo detalle para mostrar la diferencia entre ambos métodos. Como indicamos tras la resolución del problema, Vallejo señala que el método analítico no es "esencial al Álgebra", pero que hará uso de esta última "ya que por su medio se facilita mucho la resolución de las cuestiones" (p. 77), y por otra parte defiende este método frente al sintético.

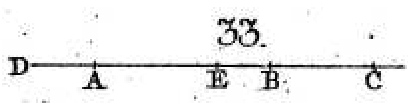
Obsérvese que los métodos analítico y sintético a los que se refiere Vallejo son el *análisis* y la *síntesis* de los antiguos griegos, y no los métodos de resolución utilizados actualmente en las Geometría Analítica y Sintética[14].

1.3. Construcción de expresiones algebraicas

Antes de explicar los métodos anteriores desarrolla lo definido en el punto 95. Como ha explicado, la aplicación del Álgebra a la Geometría tiene dos partes, la primera de ellas consiste en traducir a la Geometría los resultados del Álgebra, o dicho de otra manera, consiste en construir geométricamente las soluciones de las ecuaciones algebraicas. Por tanto surge la necesidad de aprender a operar con segmentos de la misma manera que se hace con números, por lo que Vallejo, en esta primera parte del texto, explica cómo construir diferentes expresiones algebraicas (E).

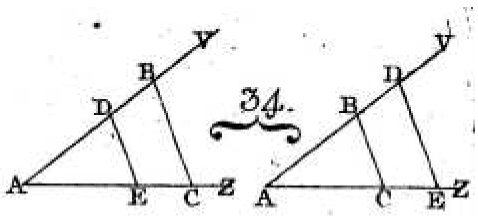
Comienza explicando cómo construir una suma de segmentos:

> 96. Sea la ecuacion propuesta *x=a+b-c:* cuando se dice que se construya esta ecuacion, lo que se pide es espresar por medio de una linea el valor de *x*; para esto, se tirará una linea indefinida *DC* (fig. 33), y desde uno cualquiera de sus puntos, tal como *A*, se tomará hácia la derecha, por egemplo, una parte *AB* igual con la cantidad *a*; desde *B* tambien hacia la derecha, se tomará otra parte *BC* igual con *b*, y desde *C* hácia la izquierda se tomará *CE* igual con *c*, y tendremos *AE=AB+BC-CE*; y substituyendo en vez de estas lineas sus valores *a, b*, *c*, será *AE =a+b-c*; pero ántes teníamos *x=a+b-c*, luego *AE=x*; luego hemos encontrado una linea que espresa el valor de *x*, que era lo que se pedia. Luego está reducida la operación á encontrar una cuarta proporcional aritmética á las tres cantidades dadas *a, b, c* (p. 68).



Seguidamente explica cómo se construyen diferentes cocientes, todos ellos de grado uno, ya que la solución de cualquier problema geométrico en el plano debe ser un segmento:

Comienza con el caso más sencillo: $x = \frac{ab}{c}$, del que va dando variaciones cada vez más complejas.



Para su construcción utiliza la semejanza de triángulos. Construye dos rectas que se cortan en un punto A, AV, y AZ (fig.34) "que formen un ángulo cualquiera VAZ"; sobre una de ellas toma "una parte AE igual con el denominador c y otra parte AC igual con una cantidad cualquiera de las del numerador, por egemplo, con a". En la otra recta toma *AD=b*, y así, uniendo los puntos *E, D* y trazando una paralela a este último segmento por *C* se obtiene un nuevo segmento, *AB*, cuya longitud es la buscada.

> En efecto, los triángulos *AED, ACB*, son semejantes por ser la *CB* paralela á *DE*, y dan $AE : AC :: AD : AB = \frac{AC \times AD}{AE}$;

[14] Sobre esos conceptos consultar González (2007).

> y poniendo en vez de *AC, AD, AE*, sus valores *a, b, c*, será $AB=\frac{ab}{c}$; y como por supuesto $x=\frac{ab}{c}$, se tendrá *AB*=*x*, que era lo que se pedia. Luego está reducida la operación á encontrar una cuarta proporcional geométrica á las tres cantidades *c, a, b*. (p. 69)

La primera variación que hace es aquella en que *a*=*b*:

> 99. Si la ecuacion fuese $x=\frac{a^2}{c}=\frac{aa}{c}$, se reduciria la operacion á encontrar una tercera proporcional á las dos cantidades *c, a*; lo que se obtendría con la construccion anterior, tomando la tercera parte *AD* igual con la segunda *AC*. (p. 69)

Tras estas construcciones llega a la siguiente conclusión:

> 100. Toda ecuacion en que la incógnita esté representada por un quebrado, se puede construir con el auxilio de las cuartas y terceras proporcionales; para lo cual no hay mas que descomponer el numerador y denominador en tantos factores como dimensiones tengan, y añadir por factor tantas veces una letra igual con la unidad, cómo y dónde se necesite, para que el número de dimensiones del numerador sea una una unidad mas que el del denominador (p. 69).

En los puntos siguientes sigue explicando construcciones de diferentes tipos de fracciones, como por ejemplo, $x=\frac{ab+db}{c+d}$, $x=\frac{a^2-b^2}{c}$, entre otras (pp. 69-71).

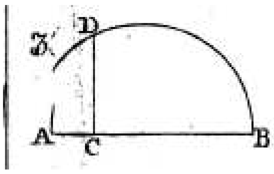
Es interesante la construcción de la ecuación $x=\frac{b^5}{a}$, ya que para su construcción hace uso explícito de la unidad (U):

> (…) Como aquí al denominador le faltan tres dimensiones para tener una ménos que el numerador, espresarémos la unidad por una letra cualquiera, tal como *c*; y como toda potencia de la unidad es igual con ella misma, si se multiplica el denominador *a* por una potencia cualquiera de *c*, no se alterará su valor, ni por consiguiente el del quebrado; y multiplicando por c^3 que es lo que necesita para que el denominador haya sido solo una dimension ménos que en el numerador, se tendrá $x=\frac{b^5}{c^3\times a}$, que descompondremos en factores del modo siguiente: $x=\frac{b^2}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}$: y estaria reducido á encontrar primero una tercera proporcional á *c* y *b* que llamándola *m* daria $x=m\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}$. (…). (p. 70)

El uso de la unidad es necesario pues operar con segmentos lleva implícita la homogeneidad de las ecuaciones, ya que no tendría sentido, por ejemplo, sumar un área (grado dos) con un volumen (grado tres). Vallejo no habla de ecuaciones homogéneas, simplemente de *dimensión* de las expresiones algebraicas, pero tampoco explica este concepto, ni el de *unidad*, que utiliza de forma explícita como hemos visto. No solo utiliza la unidad en los ejemplos anteriores, también lo hace en la construcción de otros cocientes y de algunos radicales (E), como por ejemplo en la de $x=\sqrt{abc}$ y en la de la solución de la ecuación de segundo grado como veremos a continuación.

Vallejo realiza las construcciones de los siguientes *radicales de 2º grado:* $x=\sqrt{ab}$, $x=\sqrt{abc}$, $x=\sqrt{a}$, $x=\sqrt{a^2+2bc-\frac{mnd}{p}}$, $x=\sqrt{a^2+b^2}$, $x=\sqrt{a^2b^2}$, $x=\sqrt{ab+c^2+ef-gh}$.

> 108. Si fuese la ecuacion $x=\sqrt{abc}$, en que debajo del radical hay tres dimensiones, podríamos poner por denominador á la cantidad que hay debajo del radical una letra cuyo valor fuese igual con la unidad, tal como *d*; y seria $x=\sqrt{\frac{abc}{d}}=\sqrt{\frac{ab}{d}\times c}$, hallaríamos primero una cuarta proporcional á *d, a* y *b*, y llamándola *m* se tendría $x=\sqrt{mc}$, que quedaria construida hallando una media proporcional entre *m* y *c*. (p.71)

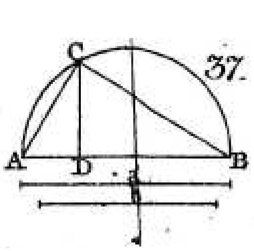


Para construir la ecuación $x=\sqrt{ab}$ toma sobre una recta un segmento *AC* igual a *a*, y a continuación, sobre la misma recta, el segmento *CB=b*. Construye un "semicírculo *ADB*" de diámetro *AB*, y sobre el punto *C* traza una perpendicular a dicho diámetro, que corta a la circunferencia en un punto *D*.(fig. 35) El segmento *DC* es el valor buscado, "…lo que dará, por ser dicha perpendicular media proporcional entre los segmentos del diámetro, *AC:DC::DC:CB;* de donde $DC^2=AC\times CB=ab$, y $DC=\sqrt{ab}$, pero $x=\sqrt{ab}$, luego *DC=x*, que era lo que se pedia".(p. 71)

En el caso de que el radicando sea un polinomio indica que siempre se puede construir por dos métodos, o por una media proporcional, ó con el auxilio del triángulo rectángulo.

Veamos, por ejemplo el caso de $x=\sqrt{a^2-b^2}$. Considera los casos en que $a^2>b^2$ y $a<b$.

En el caso $a^2>b^2$ realiza las dos construcciones que hemos señalado anteriormente.



En un caso construye el cateto desconocido de un triángulo rectángulo de hipotenusa *a* y cateto *b*. Para ello dibuja una semicircunferencia de diámetro *AB* (Fig. 37), y sobre ella toma un punto *C*, de tal manera que *BC=b*, con lo que la cuerda *AC* coincide con el valor de *x* buscado *porque el triángulo ACB es rectángulo en C, y da* $AC^2=AB^2-BC^2=a^2-b^2$*; de donde* $AC=\sqrt{a^2-b^2}$*; pero* $x=\sqrt{a^2-b^2}$*, luego AC=x, que era lo que se pedia.*(p. 72).

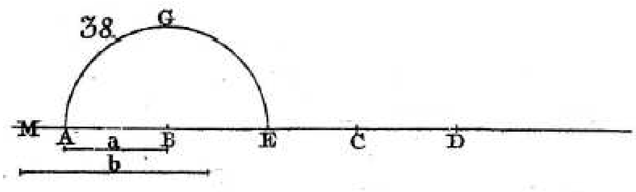
Además de esta construcción añade, como hemos dicho, otra mediante una media proporcional.

> Esta expresión tambien la pudiéramos haber construido por una media proporcional; pues resolviendo en factores lo que hay debajo del radical; será

> $x=\sqrt{(a+b)(a-b)}$; ó tambien suponiendo $b^2=am$, será $x=\sqrt{a^2-am}=\sqrt{a(a-m)}$. (p. 72)

El caso $a<b$ es especialmente interesante pues se observa la necesidad de comprobar geométricamente todos los resultados obtenidos algebraicamente.

En este caso mediante el Álgebra obtiene que el radical obtenido sería imaginario, por lo que concluye que no se podría construir, pero no se queda ahí, sino que demuestra que, efectivamente, dicho radical no se puede construir ni aplicando el teorema de Pitágoras, ni mediante la construcción de una media proporcional.



> Se ha construido este radical en el supuesto de ser $a^2>b^2$, ó $a>b$, porque de otro modo, como el radical sería imaginario, no se podría construir. En efecto, al intentarlo, en este caso, por medio del triángulo rectángulo, no se podría colocar la cuerda igual con b, porque esta cuerda deberia ser mayor que el diámetro AB, lo que no puede ser. Si la quisiéramos construir por la media proporcional, tampoco podria ser; porque si suponemos que estén representadas las cantidades a y b por las lineas señaladas con estas letras en la (fig. 38), se deberá hallar una media proporcional entre $a+b$ y a-b; para esto desde un punto cualquiera de una recta indefinida, tal como A, se tomará una parte $AB=a$; desde B á C se tomará otra $BC=B$; y se tendrá que AC será una de las lineas entre que se deberá hallar la media proporcional; á continuación de C se deberá colocar la linea que esprese á a-b; para lo cual se tomará una parte $CD=a$, y desde D hácia la izquierda una parte $DE=b$, porque b es negativa; sobre AE se trazaria una semicircunferencia AGE; y como levantando una perpendicular desde C jamás encontrará á la circunferencia, se sigue que también se ve en este caso que no se puede construir (p. 72).

Se observa que se preocupa mucho en comprobar que, en efecto, la Geometría no contradice al Álgebra, y que si algebraicamente no podemos encontrar una solución real, tampoco la podremos encontrar a través de la Geometría, sea cual sea el método empleado en la construcción.

Una de las aplicaciones de estas construcciones es la resolución de la ecuación de segundo grado (E). Esta construcción es interesante, entre otras cosas, porque en ella realiza la construcción de una solución negativa (SN).

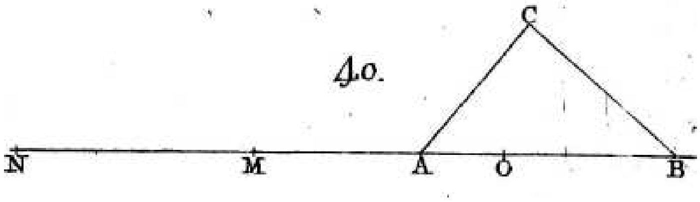
El problema de las soluciones negativas es el segundo problema importante, junto con el de la homogeneidad de las ecuaciones, que aparece cuando se plantean las operaciones con segmentos.

Vallejo trata este tema por primera vez después de explicar cómo se construye $x=a+b$-c:

> 97. Es indiferente el tomar estas partes [a, b y c] hacia la derecha ó hacia la izquierda del punto que se elige, que se llama *punto de origen;* pero lo esencial es, que si las cantidades positivas se toman de izquierda á derecha, como las negativas influyen en sentido opuesto al de las positivas, se deben tomar de derecha á izquierda: Si las primeras se tomasen de abajo arriba, las segundas se deberian tomar de arriba abajo; y en general, eligiendo á arbitrio la posicion de las cantidades positiva, la de las negativas será exactamente la contraria a las primeras. (p. 68)

Y aplica esto en la construcción de las soluciones de las ecuaciones de segundo grado (E), como hemos dicho:

Sea ahora la ecuacion de segundo grado $x^2 + px = q$: resolviéndola por la regla dada [I. 253] será $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$; que separando los valores de la incógnita da $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} \\ x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} \end{cases}$. Para construir estos valores de *x*, primero construiremos el radical $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$; pero ántes observarémos que como q no tiene mas de una dimension, necesitamos multiplicarla por la unidad espresada, v.g., por *a*, y el radical se convertirá en $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + aq}$, y haciendo $aq = m^2$, que da $m = \sqrt{aq}$, el radical será $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}$;por consiguiente formaríamos un triángulo rectángulo *ABC* (fig. 40)



En que uno de los catetos *CA* fuese igual con $\frac{1}{2}p$, y el otro *CB*=*m*; con lo cual se tendría

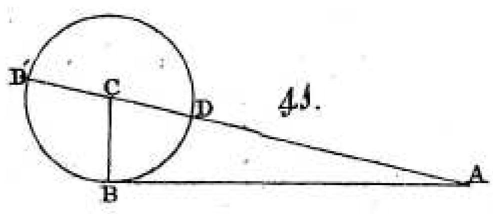
$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}P\right)^2 + m^2} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}$; ahora, tomando desde *B* hácia la izquierda una parte $BO = \frac{1}{2}p$, por ser $\frac{1}{2}p$ negativo, se tendrá

$AO = AB - BO = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2} - \frac{1}{2}p = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, que es el primer valor de *x*.

Para construir el 2º se tomará desde *A* hácia la izquierda una parte $AM = \frac{1}{2}p$, y desde M tambien hácia la izquierda otra parte $MN = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, ó =*AB*; y se tendrá $AN = -AM - MN = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$.

Si q tuviese el signo ménos se construiria el radical por lo dicho (111). (p. 74)

Además de esta construcción lleva a cabo otra, pero de forma totalmente geométrica, es decir no obtiene primero las soluciones algebraicamente y después las construye con regla y compás, como hace en el punto anterior, sino que lo hace directamente.

> No es necesario resolver las ecuaciones de 2º grado para encontrar gráficamente las raices; estas se obtienen inmediatamente por las propiedades de las lineas proporcionales consideradas en el círculo.
>
> 
>
>
> Sea la ecuacion $x^2+px=q$, ó poniendo en vez de *q* el valor m^2 que podemos hacer que tenga, siendo *m* una media proporcional entre *q* y la unidad, se la puede transformar en $x(x+p)=m^2$, que se refiere á la propiedad de las secantes y de las tangentes que parten de un mismo punto; porque si se describe (fig. 41) con una radio $BC=\frac{1}{2}p$ la circunferencia *DBD'*, se le tira una tangente *AB* cuya longitud sea *m*, y por los puntos *A* y *C* se tira una secante *ADD'*, llamando *x* á la linea *AD*, se tendrá
>
> $$AD'=AD+DD'=AD+2CB=x+2\times\frac{1}{2}p=x+p\,;$$
>
> y como toda tangente es media proporcional entre la secante y su parte esterna, se tendrá *AD':AB::AB:AD*, de donde $AD\times AD'=AB^2$, ó $x(x+p)=m^2$, ó $x^2+px=q$, que es la ecuacion propuesta (p. 74).

1.4. Soluciones negativas

Posteriormente resuelve varios problemas con los que ilustra la teoría explicada y en uno de ellos, el resuelto en el punto 124, aparecen de nuevo los segmentos negativos (SN):

> Propongámonos ahora prolongar una recta dada, dividida de un modo cualquiera, con la circunstancia de que el rectángulo formado por la linea, despues de prolongada, y por la prolongacion, sea igual al cuadrado de la distancia que hay desde el punto de division hasta el estremo de la prolongacion.

En la parte final de la resolución, cuando estudia las soluciones que tiene el problema dependiendo de los valores de los datos, aparecen soluciones negativas. Vallejo propone que tales soluciones indican un error en el enunciado del problema y se debe cambiar el enunciado del mismo “diciendo en vez de prolongar, acortar,” es decir, muestra la idea de que las soluciones negativas provienen de un enunciado expresado de manera errónea (Ver problema 124 resuelto en el apartado de fenomenología). Este modo de interpretar las soluciones negativas es característico de un cierto periodo en Francia, parte de D’Alembert, pero también aparece en otros autores como en Bézout y en cierto modo en Carnot, aunque este desarrollará su propia teoría sobre los negativos basándose en las ideas del primero (Schubring, 2005).

No solamente aparecen problemas con las cantidades negativas en esta primera parte del texto, sino que también lo hacen en algunas cuestiones tratadas en la segunda, como veremos.

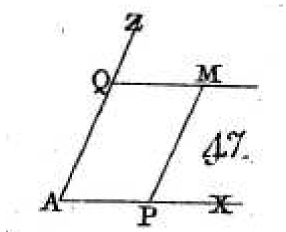
2. Sistemas de coordenadas

Tras resolver varios problemas llega a la conclusión, de que el método explicado no es suficiente para resolver todos los tipos de problemas geométricos que se puedan plantear, por lo que se hace necesario utilizar otro más general, justificando la introducción de un nuevo método de resolución de problemas geométricos mediante el uso del Álgebra:

> 132. Más para buscar un método que asegure la posibilidad de poner todos los problemas en ecuacion y de un modo uniforme, consideraremos que una cuestion de Geometría se puede reducir siempre en última análisis á encontrar uno ó muchos puntos dispuestos en virtud de ciertas condiciones dadas; de donde se sigue que para cumplir con el objeto propuesto, es necesario indagar como se puede espresar analíticamente la posición de los puntos del espacio (p.82).

Comienza Vallejo el apartado dedicado a la determinación de los puntos y las rectas en un plano definiendo los conceptos referentes a los ejes de coordenadas (C):

> 133. El espacio, como le consideran los Geómetras, es una estensión indefinida en la cual se conciben colocados todos los cuerpos. En él no se puede determinar el lugar absoluto de estos, sino solo sus situaciones relativas que son las únicas cuyo conocimiento necesitamos, para lo cual se refieren estos puntos á objetos fijos cuya posición se supone conocida.



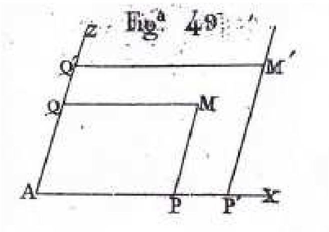
> 134. Cuando se quiera fijar la posicion de un punto que se halla sobre un plano, se conciben dos rectas *AX, AZ* (fig 47) que formen entre sí un ángulo cualquiera dado; con lo cual todo punto *M* situado en dicho plano, está determinado cuando se conocen las longitudes de las rectas *MQ, MP*, tiradas desde este punto paralelamente á las lineas *AX, AZ*, y terminadas en esas lineas; porque por las propiedades de las paralelas *AQ=PM*, y *AP=QM*. Luego conociendo estos valores se pueden tirar las rectas *PM* y *QM*, que por su interseccion determinen el punto *M*. (p.83)

Como vemos, los ejes pueden formar cualquier ángulo, es decir utiliza tanto coordenadas rectangulares como oblicuas, aunque cuando saca las ecuaciones de una recta, lo cual hace suponiendo que los ejes forman un ángulo ξ cualquiera, dice que para simplificar los cálculos se suele tomar $\xi= 1/2\pi$.

> 159. Hasta ahora hemos supuesto que el ángulo ξ formado por los eges de las coordenadas era un ángulo cualquiera: lo mas frecuente es suponer recto este ángulo á que $\xi= 1/2\pi$, y se le da este valor porque contribuye para simplificar los cálculos (…) (p.91)

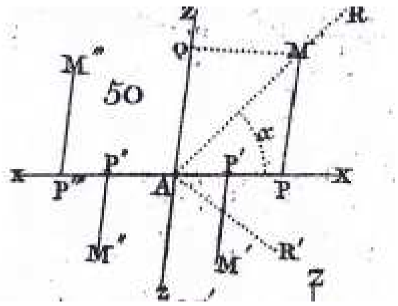
Es decir, en la práctica utiliza coordenadas rectangulares, aunque posteriormente explica cambios de ejes entre coordenadas oblicuas y rectangulares.

Continúa explicando cómo expresar un punto respecto de este sistema de ejes. Existe una diferencia de notación a la hora de darlas coordenadas de un punto, ya que las da como intersección de dos rectas, $x=a$, $z=b$, y no con sus valores entre paréntesis (a, b) como se hace actualmente.



> (…) si, por egemplo, habiendo medido las longitudes *AP, PM* (fig. 49) que determinara el punto *M,* se encuentra la primera igual con a, y la segunda igual con b, tendrémos para fijar la posición de este punto las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$ y como bastan para este objeto se llaman las ecuaciones del punto *M.* (p.84)

Explica con todo detalle cómo son las coordenadas de puntos que no están situadas en el primer cuadrante (él no utiliza este término, sino ángulo):

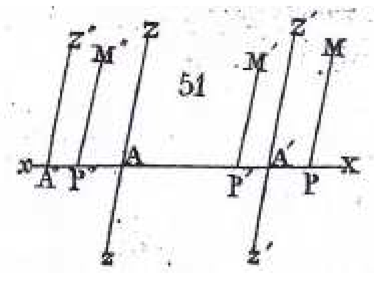


> 141. Aquí hemos considerado que el punto M se halla en el ángulo *ZAX*, (…) si el punto se hallase en el ángulo *XAz* (fig. 50), y fuese tal como el punto *M'*, su ordenada *M'P'* tendria una posición inversa á la de *PM,* por lo que sería negativa, lo que se señala en el cálculo con el signo -, de manera que el ángulo *XAz* es el ángulo de las abscisas positivas y de las ordenadas negativas (…) (p.84)

De forma análoga explica que el "ángulo zAx es el de las coordenadas negativas y el xAZ el de las abscisas negativas y ordenadas positivas". (p.85)

Aparentemente utiliza las coordenadas negativas con total normalidad, y decimos aparentemente porque añade una extensa nota al pie de página en la que demuestra que los signos van tal como ha indicado:

> Que los puntos que se hallan en los otros ángulos *zAX, zAx, ZAx,* corresponden á valores negativos de las coordenadas, lo podemos demostrar á priori del modo siguiente. (p.85)



Para hacerlo toma un eje *A'Z'* paralelo al *AZ,* llama a la distancia $AA'=A$, y x' a la abscisa del punto *M,* siendo x la antigua. Se tiene entonces que $x=Ex'$.

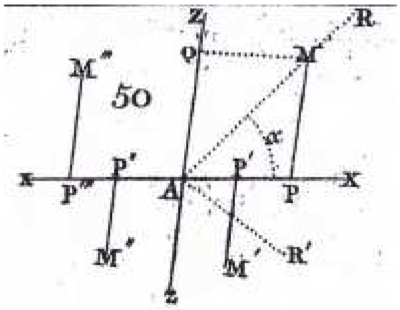
> Pero si consideramos un punto *M'* situado en el ángulo *Z'A'A*, y representamos tambien su abscisa *A'P'* por la variable x', suponiéndole siempre un valor cualquiera, tendrémos $AP'=AA'-A'P'$ ó $x=A-x'$; donde se ve que si se desea que la espresion analítica $x=A+x'$ sea aplicable á un mismo tiempo á los puntos situados en el ángulo *XA'Z',* y á los puntos situados en el ángulo *AA'Z',* es necesario considerar respecto de estos, los valores de x' como negativos, de manera que la mudanza de signo corresponde á su mudanza de posición con relacion al ege *A'Z'* (p.85).

No conforme con esto hace la demostración con un punto situado sobre el eje *A'Z',* otro sobre *AZ* y el punto *M''* de la figura.

Como vemos lleva a cabo una demostración que no hace si no complicar un concepto poco menos que evidente desde el punto de vista actual. Pero el hecho de que la desarrolle y de modo tan exhaustivo nos hace pensar que en ese momento no se consideraba como tal y nos da, de nuevo, una idea de los problemas que surgen siempre que hay magnitudes negativas en juego.

Además de las coordenadas rectangulares y oblicuas explica las coordenadas polares (C), aunque no da ecuaciones de cambio de unas a otras.

> *Tambien se puede fijar la posición de un punto sobre un plano, por medio de la distancia de dicho punto al orígen, y del ángulo que forma la recta que espresa esta distancia con otra recta fija, que pase por el orígen.*



> A las ecuaciones que fijan la posición de los puntos y de las lineas por medio de un ángulo y la magnitud de una linea, se caracterizan con el nombre de *ecuaciones polares*; al punto de orígen que es respecto del cual se cuenta la distancia, se llama *polo*; y á la linea AMR en que se mide esta distancia, se le llama *radio vector*, y por eso la hemos espresado con *r*. (p. 87)

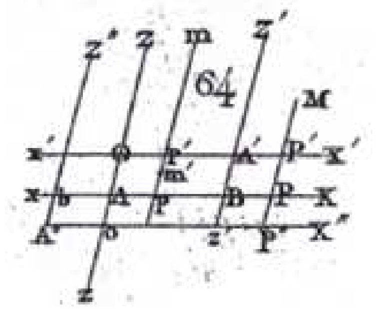
Señalar que en una *Advertencia* que incluye al comienzo de la obra indica que las coordenadas polares se han añadido en esta segunda edición.

Tras tratar la determinación del punto, la recta y el plano en el espacio pasa a estudiar las ecuaciones de cambio entre distintos sistemas de coordenadas.

Indica que este punto lo expondrá "por el sencillo método con que mi Catedrático D. Antonio Varas lo explicó á sus discípulos en el año 1808". (p. 118)

Considera tres casos: el primero en que sólo cambia el origen, el segundo en que sólo cambia la dirección de los ejes, y el tercero en que cambian ambas cosas.

En el primer caso considera varias posibilidades. En primer lugar que calcula las ecuaciones de cambio para un punto situado en el primer cuadrante, considerando que el nuevo origen también está en el primer cuadrante.



> Para lo 1º supongamos que *A* (fig. 64) sea el origen de las coordenadas, y *AX, AZ*, los eges; si dentro del mismo ángulo *ZAX* tomamos ó se nos da el punto A', y suponemos que los nuevos eges sean *A'X', A'Z'*, resultará que pues A' se nos da ó la elegimos, nos serán conocidas las distancias A'O, A'B, y llamándolas *a* y *b*, se tendrá *A'O=AB=a,A'B=AO=b.*
>
> Ahora si concebimos un punto *M* en el mismo plano, sus coordenadas con relación á los antiguos eges serán *AP* y *MP*, y con relación á los nuevos *A'P', MP'*; y lo que se nos propone es hallar el valor de las primitivas coordenadas en valores de las nuevas; y así, llamando *x, z,* á las primitivas, y *x´', z'*, á las nuevas, se tendrá
>
> $$x = AP = AB + BP = AB + A'P' = a + x'$$
> $$z = MP = MP' + P'P = MP' + A'B = z' + b$$
>
> Luego tenemos que *x=x'+a, z=z'+b* (e) *son las fórmulas para pasar,* en este caso, *de las coordenadas x, z, á las x', z'.* (p. 118)

Tras esto considera los casos en que los puntos considerados están en el segundo o el tercer cuadrante, es decir, no considera esas como unas fórmulas generales, sino que, como hace en otros casos cambia el signo de la variable y lo identifica con el del punto considerado:

> Para que estas ecuaciones convengan á los puntos situados en el ángulo *Z’A’x’*, es necesario suponer la *x’* negativa, porque para uno cualquiera de estos puntos tal como *m*, se tendrá *Ap=AB-pB=AB-p’A’*, y poniendo en vez de estas lineas sus valores, será *x=a-x’*. (p. 118).

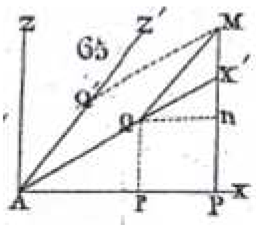
Seguidamente considera los casos en que el punto, (*m’*, fig.64) esté situado en el tercer cuadrante, y de que el nuevo origen esté situado en cada uno de los cuadrantes distintos del primero, considerando en cada caso los cambios de signo correspondientes.

En este último supuesto no conforme con indicar cuáles serían los signos de las coordenadas del punto en cada caso - por ejemplo *–a* y *b* si el nuevo origen estuviera en el segundo cuadrante- demuestra que, efectivamente, las ecuaciones para pasar de un sistema a otro son las obtenidas de (e) haciendo los cambios de signo pertinentes.

Tras esto considera que se puede proceder en un orden inverso y *determinar la posición de uno cualquiera de los sistemas con relación al otro*” (p. 119). Para ello considera *x’=0, z’=0*, pero en vez de obtener directamente de (e) las coordenadas del origen A lo obtiene como corte de dos rectas, como vimos que era su forma de determinar un punto en el plano.

> Para conseguirlo hagamos *x’=0* en la ecuacion *x=x’+a* y tendremos *x=a*, ecuacion que nos dice que el origen dista del ege de las *z* una magnitud espresada por *a*; luego si en el ege *AX* tomamos *A’B=a*, y se tira por el punto *B* la *BZ’* paralela á *AZ*, el origen se hallará en esta línea; y si hacemos *z’=0* en la ecuación *z=b+z’*, resultará *z=b*; que nos dice que el nuevo origen dista del ege de las *x* una magnitud espresada por *b*; luego si en *AZ* tomamos una magnitud *AO=b*, y por O se tira la *OX* paralela á la *AX*, el nuevo origen se hallará en esta linea; y como ántes se debía hallar en la *BZ’* se hallará en el punto de intersección *A’* de estas dos lineas. (p. 119)

Después hace el mismo cálculo para *A* suponiendo que el origen conocido es *A’*.



En el segundo caso, en que solo cambia la dirección de los ejes, considera solamente el caso en que el primer sistema es rectangular y el segundo oblicuo.

> Supongamos primero que los eges dados sean rectangulares y estén representados por *AX, AZ* (fig. 65), y que se quiera pasar á otro sistema en que los eges formen un ángulo cualquiera tal como el *Z’AX’*; si tomamos un punto cualquiera tal como *M* y bajamos *MP* perpendicular á *AX*, y desde *M* la *MQ* paralela á *AZ’*, serán las coordenadas dadas *AP*, *MP*, que señalarémos con *x, z*, y las que indagamos *AQ*, *MQ*, que señalarémos con *x’, z’*; y tirando desde *Q* la *Qn* paralela á *AX*, bajando la *Qp* perpendicular á *AX*, y llamando α al ángulo *XAX*’, β al *Z’AX*, el triángulo rectángulo *AQp* dará
>
> $$Ap = AQx'cosQAp = x'cos\alpha, Qp = Pn = AQx'senQAp = x'sen\alpha$$
>
> y el MQn dará
>
> $$Qn = pP = QMcosMQn = z'cosZ'AX = z'cos\beta, Mn = MQsen\beta = z'sen\beta$$

Y como *x=AP=Ap+pP*, y *z=MP=Mn+nP*, substituyendo en estas ecuaciones los valores anteriores resultará

$$x = x'cos\alpha + z'cos\beta, \text{ y } \; z = z'sen\beta + x'sen\alpha \quad \text{(f)}$$

Ecuaciones que nos servirán para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares x, z, á otro de coordenadas oblicuas x', z', en que el ángulo formado por el ege de las *x'* con el de las *x* es α, y el que forma el ege de las *z'* con el mismo ege de las *x* es ϐ. (p. 120)

Tras esto pasa a considerar el caso tres en que cambian tanto el origen de coordenadas como la dirección de los ejes. Considera varios casos, el primero en que el sistema de ejes original es rectangular y el segundo es oblicuo, obteniendo en este caso (p. 120):

$$x=a+x'\cos.\alpha+z'\cos.\beta, \quad z=b+x'\text{sen}.\alpha+z'\text{sen}.\beta\} \text{(g)}$$

que *son las ecuaciones para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares x,z á otro de coordenadas oblicuas* x',z', en que α y ϐ espresan los ángulos que forman los eges de las *x'* y de las *z'* con el de las *x*, y *a* y *b* son las coordenadas del nuevo orígen con relacion á los eges primitivos de las *x* y de las *z*.

También considera el caso contrario, pasar de un sistema de coordenadas oblicuas, para ello despeja *x* y *z* en las ecuaciones anteriores, obteniendo (p. 120):

$$x'=\frac{(x-a)\text{sen}.\beta-(z-b)\cos.\beta}{\text{sen}.(\beta-\alpha)}, z'=\frac{(z-b)\cos.\alpha-(x-a)\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\beta-\alpha)} \text{(h)};$$

y si tuviesen un mismo orígen tambien los nuevos eges, hariamos en estas fórmulas $a=o$, $b=o$, y tendríamos

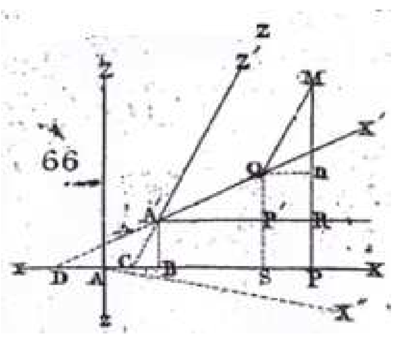
$$x'=\frac{x\text{sen}.\beta-z\cos.\beta}{\text{sen}.(\beta-\alpha)}, z'=\frac{z\cos.\alpha-x\text{sen}.\alpha}{\text{sen}.(\beta-\alpha)} \text{(k)},$$

para pasar de un sistema de coordenadas oblicuas x',z', *á otro de coordenadas rectangulares* x, z, espresando α y ϐ los ángulos que forman los eges de las *x'* y de las *z'*, con el ege de las *x*.

También considera los casos en que ambos sistemas son rectangulares, es decir ϐ-α=1/2π, con cambio y sin cambio de origen. Para el primer caso las ecuaciones obtenidas son (p. 121):

$$x=a+x'\cos.\alpha-z'\text{sen}.\alpha, \quad z=b+x'\text{sen}.\alpha+z'\cos.\alpha\} \text{(l)}.$$

y para el segundo $$x=x'\cos.\alpha-z'\text{sen}.\alpha, \quad z=x'\text{sen}.\alpha+z'\cos.\alpha\} \text{(m)}$$



Considera también el caso en que el nuevo eje de las *x'* "cayese por la parte inferior de *AX*" (fig. 66), obteniendo en ese caso

$$x = x'cos\alpha + z'sen\alpha, \text{ y } \; z = z'cos\alpha - x'sen\alpha \quad \text{(n)},$$

pues "el ángulo α seria negativo, y su seno variaría de signo" (p. 121).

También considera el caso en que ambos sistemas son oblicuos. Para calcular las ecuaciones de cambio toma los sistemas *AX, AZ* y *AX', AZ'*, ambos oblicuos y un tercero *AX'', AZ''*, que es rectangular. Aplica las ecuaciones obtenidas (f) para el paso e un sistema rectangular a uno oblicuo entre *AX'', AZ''* y *AX, AZ*, y también entre *AX'', AZ''* y *AX', AZ'*. Combinado ambas obtiene finalmente (p. 121):

$$x = \frac{x' sen\varphi + z' sen\theta}{sen\gamma}, z = \frac{x' sen\psi + z' sen\lambda}{sen\gamma} (p)$$

> en las cuales γ es el ángulo que forman los eges primitivos; φ el que forma el antiguo ege de ordenadas con el nuevo de abscisas; θ el que forman los eges de las ordenadas; ψ el que forman los eges de las abscisas; y λ el que forma el ege primitivo de las abscisas con el nuevo de las ordenadas.

Y si además se cambia también el origen las fórmulas serían (p. 121):

$$x = a + \frac{x' sen\varphi + z' sen\theta}{sen\gamma}, z = b + \frac{x' sen\psi + z' sen\lambda}{sen\gamma} (q)$$

3. Ecuaciones de la recta

En cuanto a las rectas, Vallejo no utiliza el término lugar geométrico (LG), pero sí explica la relación que puede establecerse entre una ecuación y una "linea" indicando que de igual manera que se puede expresar la posición de un punto analíticamente podemos hacerlo para todos los puntos de una línea:

> Generalizando este resultado se ve que si todos los puntos de una linea cualquiera, recta ó curva, son tales que existe la misma relacion entre las ordenadas y las abscisas de cada uno de ellos, la ecuacion entre *x* y *z* que esprese esta relacion, debe caracterizar á esta linea. (…)
>
> 150. Una ecuacion que espresa de este modo la relacion que tienen entre sí las abscisas y las ordenadas de cada punto de una linea, se llama *la ecuacion de esta linea*; y esta es *continua ó discontinua*, según convenga ó no convenga la misma ecuacion á todos los puntos de que está compuesta.(p.88)

Basándose en esta idea deduce diferentes ecuaciones de la recta (ER). En la *Advertencia* que citábamos anteriormente indica que en esta edición se han añadido "varios modos de fijar la posición de una linea recta (…), que hasta ahora se ha acostumbrado a poner, aunque dislocadamente, en los tratados de Mecánica".

En primer lugar da la ecuación de una recta paralela al eje de las ordenadas y a continuación lo que hoy llamamos ecuación explícita, en el caso de coordenadas rectangulares y oblicuas, en primer lugar para rectas que pasan por el origen y después en general:

> (…) para hallar la ecuacion de la linea recta *AM* (fig. 53), supondremos primero que pase por el orígen de las coordenadas, puesto que la elección de los eges es arbitraria; y suponiendo que *AX, AZ*, sean dichos ejes, llamaremos α al ángulo *MAP* que forme dicha linea con el de abscisas, que nos es conocido porque hemos elegido nosotros la posición de dicho ege; y llamando ζ al ángulo *ZAP* que forman los eges, que tambien nos es conocido por la misma razon, tendrémos que si desde un punto cualquiera *M*, tomado en esta recta, se tira la ordenada *PM* paralela al ege

> de las ordenadas *AZ*, el triángulo *MAP* nos dará *PM: sen.MAP::AP:senAMP*, de donde $\frac{PM}{sen.MAP} = \frac{AP}{sen.AMP}$; y como desde cualquier punto que se tire la *MP* paralela á *AZ,* resultará una ecuacion de esta especie, si llamamos *z* á todas estas paralelas *MP,M'P', M''P''&c,x* á las *AP, AP', AP''&c*., y observamos que el ángulo $AMP = MAZ = ZAX - MAX = \zeta - \alpha$, resultará $\frac{z}{sen.\alpha} = \frac{x}{sen.(\zeta - \alpha)}$, de donde $z = x \times \frac{sen.\alpha}{sen.(\zeta - \alpha)}$, y como esta ecuacion se verifica en todos los puntos de la recta *AM,* se dice que es la ecuacion de esta recta (p.88).

De nuevo muestra tener problemas con el uso de las cantidades negativas en este punto, pues la ecuación anterior solo es válida para los puntos del primer cuadrante, en vez de considerarla como la ecuación general, y que sean *x* y *z* los que lleven implícitos los signos. Hace la consideración de que si la abscisa o la ordenada son negativas se ha de cambiar su signo, y escribir este cambio explícitamente:

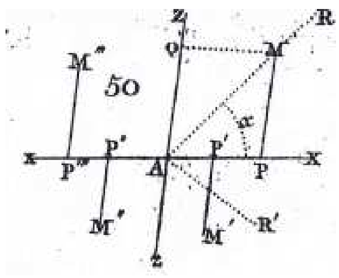
> Aunque la hemos obtenido (la ecuación) considerando los puntos situados en el ángulo *ZAX*, conviene también á los puntos situados en los otros ángulos de los eges, con tal de que se mude en ellos convenientemente el signo de las variables *x* y *z*. Si se hace en ella, por egemplo, *x* negativa para tener los puntos situados del lado de las abscisas negativas, dará $z = -x \times \frac{sen.\alpha}{sen.(\zeta - \alpha)}$, es decir, que para esos puntos z viene á ser tambien negativa; (…) (p.89)

Obtiene de forma análoga la ecuación de una recta que no pasa por el origen, $z = x \times \frac{sen.\alpha}{sen.(\zeta - \alpha)} + b$, y hace la observación de que "lo mas frecuente es suponer recto este ángulo ó que $\zeta = \frac{\pi}{2}$, y se le da este valor porque contribuye para simplificar los cálculos". (p.91) De esta consideración obtiene la nueva ecuación: $z = x \times \text{tang}.\alpha + b$ (p.91), de la que obtiene la ecuación explícita de la recta en la forma que la conocemos actualmente:

> 160. Haciendo para mayor sencillez tang.α=*a* tendrémos *z=ax+b* que es *la ecuacion de la linea recta, cuando las coordenadas son rectangulares, siendo la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el ege de las abscisas, y representando b la distancia del orígen al punto que corta al ege de las ordenadas;* o lo que viene a ser lo mismo, este valor es de la ordenada correspondiente á *x=0*; por lo que si *b*=0, la ecuacion *z=ax será la de una recta que pase por el orígen de las coordenadas.*(p.91)

También calcula la de una recta conocidos dos puntos, que plantea como un problema. No la calcula en un caso particular sino que obtiene la ecuación de la recta que pasa por dos puntos genéricos $(x', z'), (x'', z'')$. Además da "la ecuacion de una recta, sujeta á pasar por un punto cuyas coordenadas son x', z', y que forma con el ege de abscisas un ángulo cuya tangente trigonométrica es a" (p.93), es decir lo que hoy llamamos la ecuación punto-pendiente; la ecuación polar, y "la ecuacion de una recta por medio de la perpendicular á esta recta tirada desde el origen" (p.97), $d = x\cos.\alpha + zsen.\alpha$ donde d es la distancia de la recta al origen de coordenadas, *M (x, z)* un punto genérico de la recta *RR'*, y α el ángulo que forma dicha perpendicular con el eje de abscisas.

Además da otro método, no ecuación, para determinar una recta que consiste en dar los ángulos que forma la recta con los dos ejes de coordenadas, indicando que es necesario dar los dos ángulos:



> Tambien *queda determinada la posición de una recta sobre un plano, cuando se conocen los ángulos que forma con los eges de las coordenadas* (…). Uno solo no basta; porque si se nos pidiese el determinar recta que forme con la *AX* en el plano de los eges, un ángulo por ejemplo de 60º, cumpliria con esta circunstancia no solo la *AR*, sino tambien la *AR'*(…) (p.91, fig.50).

Observa que los dos ángulos "no se pueden tomar á arbitrio á un mismo tiempo" (p.92), y deduce las condiciones que tienen que cumplir cuando los ejes son rectangulares, obteniendo que si α y ζ son tales ángulos, deben verificar $1=\cos^2\alpha+\cos^2\zeta$ (p.92), es decir deben ser complementarios.

La necesidad de dar dos ángulos nos muestra que en ese momento aún no existía el convenio actual -o Vallejo no lo conocía, cosa menos posible dada su preparación- de medir los ángulos positivos en sentido antihorario, pues siendo así la recta queda determinada perfectamente dando el ángulo que forma con el eje de abscisas. Esto queda confirmado con el comentario que hace posteriormente:

> Tambien se podría emplear un solo ege y un solo ángulo, con tal que se espresase por que lado de dicho ege se debia contar el ángulo (…) (p.92)

En esta parte también plantea una serie de problemas en las que utiliza las ecuaciones de la recta o las coordenadas de un punto, problemas relativos a incidencia, perpendicularidad y paralelismo, ángulos y distancias, recogidos en la parte de fenomenología.

4.1.3.2. Sistemas de representación

En la obra de Vallejo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente las construcciones geométricas. No utiliza tablas, ni siquiera para la definición de las rectas, ya que las rectas con las que trabaja son genéricas, es decir no hay ejemplos de problemas con datos concretos.

Utiliza el lenguaje natural en definiciones, enunciados y resultados.

Las únicas definiciones que da Vallejo son la de Aplicación del Álgebra a la Geometría (D) y las de método analítico y método sintético que utiliza en la resolución de los problemas que propone (PRD). Sin embargo todas las explicaciones de las construcciones geométricas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E). Además en algunos casos, como el de la construcción de cocientes, llega a unas conclusiones generales, en las que explica de forma resumida, y sin utilizar más que el lenguaje literal, cómo construir cualquier cociente.

También de forma literal explica cómo interpretar y construir las cantidades negativas (SN), o cómo utilizar la unidad para conseguir que una ecuación sea homogénea (U).

También utiliza el lenguaje natural en los enunciados de los problemas así como algunos teoremas que deduce de estos mismos problemas. (PR)

El lenguaje simbólico aparece a lo largo de todo el texto, como no podía ser de otra manera al utilizar el álgebra.

En la primera parte aparecen expresiones algebraicas como las fracciones algebraicas o expresiones irracionales (E, PRD); y en la segunda utiliza estas expresiones para escribir las ecuaciones de la recta, las ecuaciones de un punto, la distancia entre dos puntos, etc. (C, ER, PR)

Señalar que utiliza expresiones simbólicas en desuso hoy en día, para denotar la proporción entre cuatro segmentos. (E, PRD)

> En efecto, los triángulos *AED*, *ACB*, son semejantes por ser la *CB* paralela á *DE*, y dan $AE : AC :: AD : AB = \dfrac{AC \times AD}{AE}$; (p. 69)

En cuanto a los gráficos (GR), que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él (CEO1).

Hay de dos tipos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas determinados resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución. (PR)

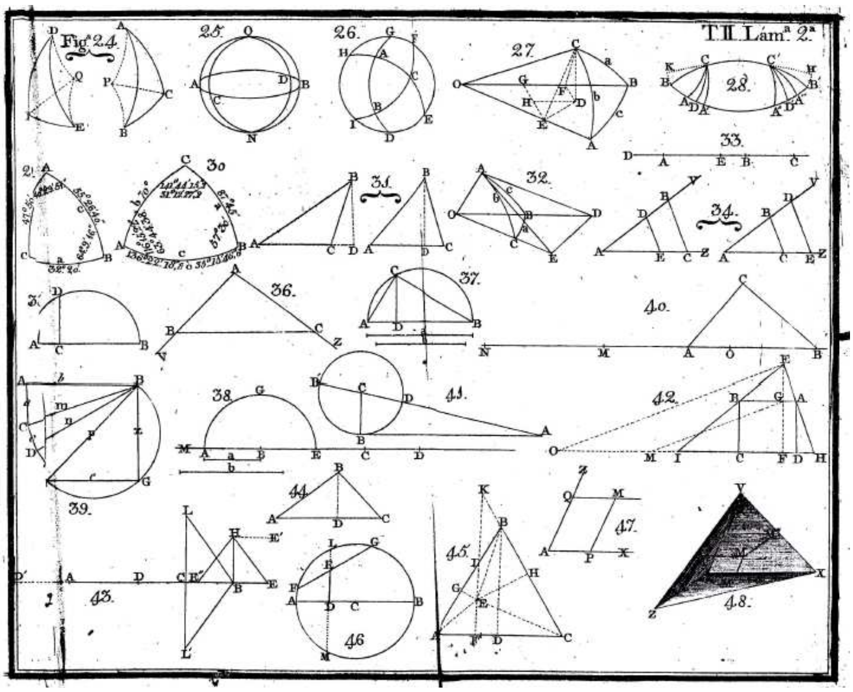


Figura 13: Lámina 2ª.Tratado elemental de matemáticas. J.M. Vallejo

El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, de diferentes tipos, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc.; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso, en sus razonamientos. (SN, E, C, N, ER)

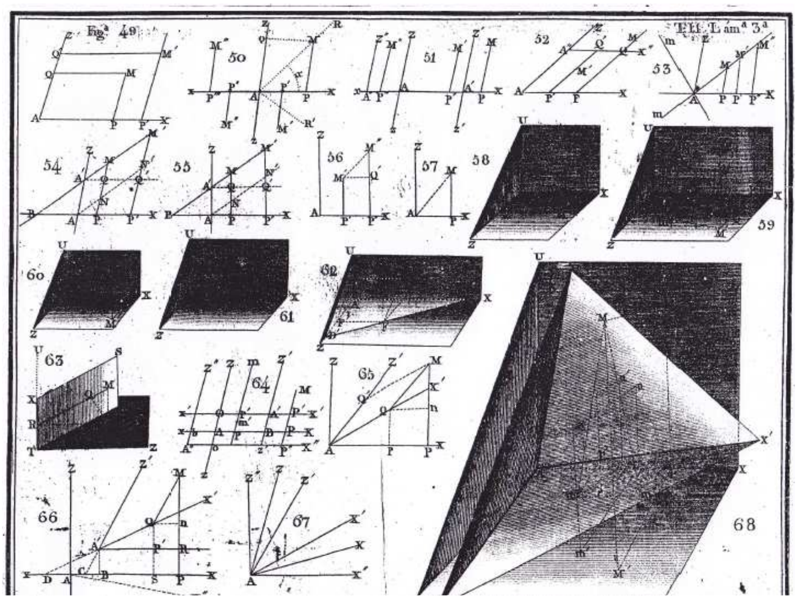


Figura 14: Lámina 3ª.Tratado elemental de matemáticas. J.M. Vallejo

4.1.3.3. Fenomenología:

Los objetivos que Vallejo trata de alcanzar con los problemas que plantea y resuelve los deja bien claros en el texto. Con los primeros el autor trata de mostrar cómo se aplica el Álgebra a la resolución de problemas geométricos, a la vez que muestra cómo utilizar los métodos analítico y sintético en la búsqueda de resultados y en la demostración de los mismos. Como veremos Vallejo solo pone un ejemplo de construcción de las fórmulas algebraicas que ha explicado anteriormente, es decir, de la aplicación de la Geometría al Álgebra; los demás son ejemplos del Álgebra a la Geometría. Hace una referencia al uso que se da a esos métodos en la Mecánica (PRDT), pero no propone ningún problema de aplicación directa.

En cuanto a los problemas que resuelve en la segunda parte, son todos ellos problemas teóricos, con los que pretende encontrar una fórmula o un método general para calcular el ángulo que forman dos rectas, o su punto de corte, etc. (PRI,PRP,PRD,PRAN)

En cualquier caso todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, porque aunque hace mención a la Mecánica, no pone ejemplos concretos.

Encontramos por tanto cuatro tipos de problemas, atendiendo a su fenomenología:

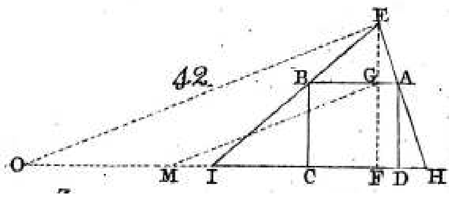
1. **Para mostrar los métodos analítico y sintético (PRDT)**

En este apartado resuelve un único problema, cuya resolución incluimos:

118. Problema. Dado un triángulo cualquiera como el HEI inscribirle un cuadrado.

Este problema lo pone como ejemplo de resolución por los métodos analítico y sintético, aunque en él también podemos ver la construcción de una cuarta proporcional.

Empieza aplicando el método analítico. Supone el problema resuelto y construye el cuadrado que supone que es la solución, para deducir qué propiedades se cumplen en la figura. Aplicando semejanza de triángulos entre el triángulo dado y el que se forma sobre el cuadrado construido llega a la conclusión de que el lado del cuadrado es cuarta proporcional entre la suma de la base y la altura del triángulo, la altura y la base. Construye esa cuarta proporcional y comprueba, de nuevo algebraicamente que la solución construida es la correcta, justificando este modo de proceder basándose en las ideas de Newton. Veamos todo esto con detalle:



Resolucion por el método analítico: supongo ya hecho lo que se me pide, y que ABCD sea el cuadrado inscrito. (p. 75)

PG: Por ser *ABCD* (fig. 42) un cuadrado se deduce que *AB=GF*. Por otra parte se tiene que los triángulos *HEI* y *AEB* son semejantes, de donde obtiene *EF: EG=EF-GF::HI:AB*,

RG: Como *AB=GF*, sustituyéndolo en la expresión anterior obtiene:

> *EF:EF-GF::HI:GF*; pero si se verifica esta proporción, se tendrá tambien esta otra *EF+HI:EF-GF+GF::HI:GF,* ó *EF+HI:EF::HI:GF.* Luego para hallar *GF* que es igual con el lado *BC* del cuadrado, no hay mas que hallar una cuarta proporcional á la suma de la base y la altura del triángulo, á la altura, y á la base: por consiguiente tomando en la altura *EF* esta parte *GF*, se tendrá el punto *G,* por donde tirando la *AB* paralela á la base *HI,* y desde *A* y *B* las perpendiculares *AD, BC,* se tendrá el cuadrado *ABCD* inscrito en el triángulo *HEI.* (p. 75)

A continuación realiza la construcción geométrica de la cuarta proporcional y explica los motivos por los cuales la construye en la misma figura:

> Esta cuarta proporcional se podria hallar según lo espuesto (98) en un parage cualquiera, pero es mas elegante practicar la construccion en la misma figura (…) (p. 75)

La construye de la siguiente manera: Prolonga el lado *FI* hasta *O* de manera que *FO=EF+HI;* toma *M* de manera que *FM=HI*; une el punto *O* con *E* y traza por *M* una paralela a la recta *OE.* Esta paralela corta a la altura *EF* en un punto *G* de manera que *GF* es la cuarta proporcional buscada; *porque los triángulos semejantes OEF, MGF, dan OF=EF+HI:EF::MF=HI:GF***.** (p. 76)

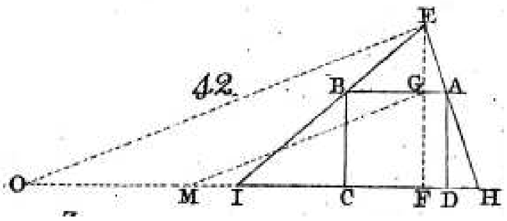
CS: Después de haber resuelto el problema hace una nueva comprobación de que la solución es la correcta pero antes de hacerlo explica los motivos de esta nueva comprobación, explicación que nos ayuda a entender su proceder:

> 120. En este procedimiento se advierte que esta última proporcion no es mas que una consecuencia de haber supuesto hecho lo que se pedia, y que por consiguiente AB=BC; pero nuestro entendimiento no queda satisfecho, y quiere cerciorarse de si en efecto hallando esta cuarta proporcional se verificará que AB=BC. Por eso el gran Neuton no juzgaba digna de la luz pública ninguna proposicion en que despues de encontrar su resolucion por el método analítico no fuese acompañada de una demostración sintética. (p. 76)

Y tras esta consideración lleva a cabo la comprobación de que la solución obtenida es la correcta:

> Y así, para convercernos de que no nos hemos equivocado, deberémos partir de esta última proporcion, hasta llegar á tener que *AB=BC*, para lo cual no hay mas que invertir el orden de los raciocinios; por lo que fundándonos en que la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente, la proporcion *EF+HI:EF::HI:GF* se convertirá en *EF+HI-HI:EF-GF::HI:GF* ó en *EF:EG::HI:GF;* pero los triángulos semejantes *AEB, HEI,* dan *EF:EG::HI:AB,* y como estas dos proporciones tienen comunes los tres primeros términos, los cuartos también serán iguales, luego *AB=GF;* pero *GF=BC* por lados opuestos del paralelogramo *GBCF,* luego *AB=CB;* por consiguiente teniendo los lados contiguos iguales el paralelogramo *ABCD,* y rectos sus ángulos, será cuadrado; y como todos los ángulos están en el perímetro del triángulo, se sigue que este cuadrado está inscrito en el triángulo, que era lo que se pedia. (p. 76).

Seguidamente resuelve el mismo problema utilizando el método sintético, para ello primeramente enuncia cómo construir el cuadrado (lo hace de la misma manera que en el analítico) y después demuestra que el cuadrilátero así construido es, en efecto, un cuadrado. La demostración es análoga a la hecha al final de la resolución anterior.



> Resolucion por el método sintético: bájese la *EF* perpendicular á la *HI;* prolónguese la *FI* de modo que *FO* sea igual con *EF+HI;* únase el punto *O* con *E*, por medio de la *OE*, y tómese también *FM=HI*; por el punto *M* tírese la *MG* paralela á *OE,* por el punto *G* donde encuentre á la *EF*, tírese la *AB* paralela á *HI*, y desde sus estremos *A,B,* bájense las perpendiculares *AD, BC*, con lo que se tendrá el cuadrado *ABCD* inscrito en el triángulo *HEI.* (p.76)

Demostración: Los triángulos *OEF* y *MGF*, dan *OF:EF::MF:GF*, sustituyendo *OF* y *MF* por lo que valen tendremos: *EF+HI:EF::HI:GF*, de donde se obtiene esta otra proporción: *EF+HI-HI:EF-GF::HI:GF*, que se convierte en: *EF:EG::HI:GF*,

> pero los triángulos semejantes *AEB, HEI*, dan *EF:EG::HI:AB*, y como estas dos proporciones tienen comunes los tres primeros términos, los cuartos también serán iguales y por consiguiente *AB=GF*. Mas por la construccion hecha, *GF=BC*, luego *AB=CB*; y siendo rectos los ángulos *A, B, C,* D, y estando en el perímetro del triángulo, se sigue que tenemos inscrito el cuadrado *ABCD* que se nos pedia en el triángulo *HEI* (p. 76).

Obsérvese que no utiliza para nada el Álgebra en la resolución de este problema, más adelante explica por qué lo ha hecho así:

> 123. Hemos resuelto este problema de propio intento sin hacer uso del Algebra, para dar á conocer que el método analítico no le es esencial al Algebra; y así es que en las colecciones matemáticas de Pappus se encuentran una multitud de cuestiones resueltas por este método, y que todas empiezan suponiendo hecho lo que se intenta hacer.

> En adelante, siempre harémos uso del Algebra, ya que por su medio se facilita mucho la resolucion de las cuestiones, y ya porque nuestro objeto es aquí manifestar cómo se traducen en Algebra las cuestiones de Geometría. (p. 77)

Pero antes hace una serie de consideraciones sobre cada uno de los métodos:

> Por la comparación de estos dos métodos se ve que el analítico es mucho más largo que el sintético, y que si se omite en él la segunda parte ó la composicion, no es tan claro como el sintético; por eso se ha considerado al primero como el único para hallar cosas nuevas, y se le ha llamado *método de invencion*, y al segundo como mas propio para la enseñanza.(…)Sin embargo no se debe hacer uso del método sintético hasta haber ya demostrado con sencillez y claridad el número de principios que son indispensables, para que luego el método analítico se pueda aplicar con la generalidad que le es propia; y por eso de aquí en adelante siempre preferirémos y harémos uso del método analítico.(p. 77)

Es decir, está justificando el uso del método analítico frente al sintético, aunque este último sea, según sus palabras más propio para la enseñanza.

2. **Para mostrar la construcción de expresiones algebraicas y soluciones negativas (PRD)**

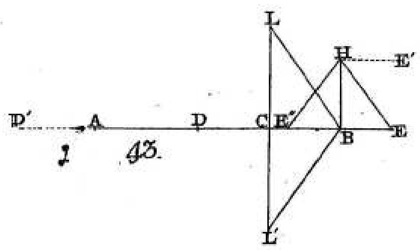
En este caso solo plantea y resuelve un problema en el que Vallejo muestra cómo resolver mediante el uso del Álgebra un problema geométrico y cómo construir geométricamente la solución obtenida algebraicamente, en este caso un cociente.

> 124. Prolongar una recta dada, dividida de un modo cualquiera, con la circunstancia de que el rectángulo formado por la linea, despues de prolongada, y por la prolongacion, sea igual al cuadrado de la distancia que hay desde el punto de division hasta el estremo de la prolongacion (p. 77).

124. Prolongar una recta dada, dividida de un modo cualquiera, con la circunstancia de que el rectángulo formado por la linea, despues de prolongada, y por la prolongacion, sea igual al cuadrado de la distancia que hay desde el punto de division hasta el estremo de la prolongacion.

Este problema es interesante pues en él aparecen soluciones negativas, que Vallejo justifica mediante un cambio en el planteamiento del problema, como veremos al final del mismo.

Lo resuelve utilizando el método analítico, es decir supone el problema resuelto siendo AB (fig. 45) la línea dada, BE la prolongación y C el punto de división que se citan en el enunciado. Imponiendo las condiciones dadas obtiene una ecuación de primer grado cuya incógnita es BE=x. Resolviéndola obtiene que la solución es una tercera proporcional a *a-2b* y a *b* siendo *a* y *b* las dos partes en que queda dividido el segmento AB de partida. Construye dicha 3ª proporcional y hace la comprobación algebraica de que la solución obtenida es la correcta. Estudiando las soluciones que se pueden obtener dependiendo de los valores de a y b obtiene un caso en que las soluciones son negativas, justificándolas como válidas, como ya hemos dicho:



PG: Sea *AB* la “linea” dada, dividida de un modo cualquiera en el punto *C*. Supone hecho lo que se pide y que la prolongación es *BE*,

> con lo que se tendrá $AE \times EB = CE^2$; haciendo ahora la linea dada *AB=a, CB=b,* y *BE=x*, se tendrá $AE = AB + BE = a + x,\ y\ CE = CB + BE = b + x$
>
> **PRA:** substituyendo estos valores en la ecuacion de arriba será**:** $(a+x)x = (b+x)^2$, operando, trasponiendo, haciendo la destrucción y resolviendo en factores, se tendrá $x(a-2b) = b^2$, que da $x = \dfrac{b^2}{a-2b}$, cuyo valor nos indica que la prolongacion que se pide debe ser una tercera proporcional á *a-2b* y á *b* (p.78).

RG: Construye en la misma figura esta tercera proporcional por un método diferente al utilizado cuando explica la construcción de la fórmulas, pero basándose como allí en la semejanza de triángulos.

Toma hacia la izquierda de C una parte *CD=CB=b*, quedando *AD=AB-DB=AB-2CB=a-2b*, y levanta sobre *C* una perpendicular *CL=AD=a-2b*. Por otra parte, tira por *B* una paralela a *CL*, igual a *CB*, y por el punto *H* así hallado tira una paralela, *HE,* a *LB*, la cual corta a la recta *AB* en un punto *E,* de manera que *BE* es la tercera proporcional buscada.

> En efecto, los triángulos semejantes *LCB, HBE*, dan $CL = AD = a\text{-}2b : CB = b :: BH = CB = b : BE = \dfrac{b^2}{a-2b}$. Pero ántes se tenia $x = \dfrac{b^2}{a-2b}$, luego *BE=x.* (p. 78)

CS: Hace la comprobación algebraica del resultado obtenido, lo que él llamaría por el método sintético, pero de manera muy somera.

> Ahora, invirtiendo los raciocinios, podríamos llegar al primer supuesto de $(a+x)x = (b+x)^2$, ó de ser $AE \times EB = CE^2$. (p. 78)

Después analiza las soluciones del problema dependiendo de si *b* es mayor, menor o igual a $\frac{1}{2}a$, pero en vez de hacerlo utilizando la ecuación algebraica que le da el valor de *x,* que sería lo más fácil; lo hace, únicamente, utilizando la Geometría, interpretando así geométricamente la ausencia de solución, o la aparición de soluciones negativas en algunos casos:

> Si *B* fuese menor que $\frac{1}{2}a$, el punto *D* caerá siempre entre *A* y *C*, y se verificará la construcción indicada. Si $b = \frac{1}{2}a$, el punto *D* caerá sobre el punto *A* y será
>
> *AD = a-2b = a-a = 0,* y por consiguiente el punto *L* caerá en *C*, la *LB* se confundirá con la *CB*, y por consiguiente la *HE'* será paralela á la *AB;* por lo que jamas la

llegará á encontrar. Pero si $b > \frac{1}{2}a$, el punto *D* caerá hácia la izquierda de *A*, por egemplo en *D'*, y será *AD'* una cantidad negativa; luego la *CL* se deberá tomar por la parte inferior de la *AB*, esto es, estará representada por la *CL'*; uniendo el punto *L'* con el punto *B* y tirando por *H* la *HE''* paralela á *BL'*; la prolongacion *BE''* será negativa, y espresará que en este caso no se puede efectuar la prolongacion pedida, á ménos que no se trastorne el enunciado de la cuestion; por lo que el problema se deberia proponer diciendo en vez de *prolongar, acortar,* etc.(p. 78)

3. Para obtener resultados teóricos de Geometría mediante el uso del Álgebra

En este caso plantea y resuelve tres problemas, 125, 126 y 129 y deduce de estos dos últimos sendos teoremas, enunciados en los puntos 128 y 130, que también demuestra.

125. Dados los tres lados de un triángulo hallar su superficie (p. 78).

126. Para esto, propongámonos resolver la siguiente cuestion: Determinar dentro de un triángulo equilátero un punto tal que bajando desde él perpendiculares á los tres lados, la suma de dichas tres perpendiculares sea igual con la altura del triángulo (p. 79).

128. Teor. Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo equilátero se tiran perpendiculares á los lados, la suma de estas tres perpendiculares es igual á la altura de dicho triángulo (p. 81).

129. Dado un círculo AGB (fig 46) y la posicion del diámetro AB, hallar un punto E fuera de ese diámetro, tal que bajando desde él una perpendicular ED á dicho diámetro, el cuadrado de esta perpendicular junto con el rectángulo formado por las partes de una linea cualquiera FG que pase por dicho punto, sea igual al rectángulo formado por las partes en que queda dividido dicho diámetro (p.81).

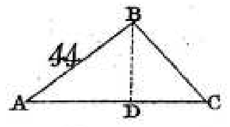
130. Teor. Si desde un punto cualquiera dentro de un círculo baja una perpendicular á un diámetro cualquiera, y por el mismo punto se tira una cuerda, se verificará que el cuadrado de la perpendicular junto con el producto de los segmentos de la cuerda, será igual al producto de los segmentos que causa en el diámetro la perpendicular bajada (p. 82).

En los siguientes no lleva a cabo la construcción geométrica de las soluciones, sólo calcula la algebraica. En el 125 no sería posible pues lo que se calcula es un área, y los demás son ejemplos de problemas que en realidad no lo son, sino que son teoremas. La forma de obrar en todos ellos es la misma por lo que reproducimos sólo la solución de los dos primeros, 125 y 126 (este junto con el teorema que deduce de él).

125. Dados los tres lados de un triángulo hallar su superficie.

En este problema, obviamente, no construye la solución, pues lo que busca es un área, pero es interesante pues de él deduce otra aplicación del Álgebra que es la de deducir o demostrar propiedades geométricas o encontrar un teorema a partir de un problema.
Para resolverlo plantea un sistema de ecuaciones utilizando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos en que la altura relativa a la base divide al triángulo dado.

PG: Sea *ABC* (fig. 44) el triángulo dado, y supongamos conocida la superficie que es lo que buscamos. De esto resulta que si se baja la perpendicular *BD* á la base *AC*, tendremos $sup.triáng.ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$.



Ahora, para hallar el valor de *BD* espresámos los lados con las letras minúsculas correspondientes á los ángulos opuestos, y será *BC=a, AB=c, AC=b*, á la perpendicular *BD* la llamarémos z, y *x* al segmento *DC;* con lo cual. $superf.\,de\,triáng.ABC = \frac{1}{2} b \times z$;

PRA: pero los dos triángulos rectángulos *ABD, BDC,* dan el 1º. $BD^2 = AB^2 - AD^2$, ó $z^2 = c^2 - (b-x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$, y el 2º . $BD^2 = BC^2 - DC^2$, ó $z^2 = a^2 - x^2$, por consiguiente igualando los dos valores de z^2, tendrémos $c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$ (…) de donde resulta $x = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$. (p. 78)

A continuación sustituye este valor de *x* en el primer valor de z^2, de donde obtiene, tras realizar las operaciones oportunas: $z^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4b^2}$. Tomando *2s=a+b+c,* operando y despejando llega a: $z = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-c)(s-a)(s-b)}$, y sustituyendo en la fórmula de la superficie del triángulo obtiene. (p.79):

$$superf.\,de\,triáng. = \frac{b \times z}{2} = \frac{b}{2} \times \frac{2}{b}\sqrt{s(s-c)(s-a)(s-b)} = \sqrt{s(s-c)(s-a)(s-b)}$$

Es decir, obtiene la fórmula de Herón, y de aquí deduce otra aplicación del álgebra:

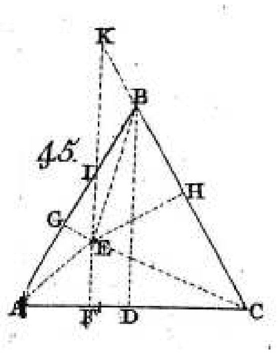
> Fundándonos en estas ecuaciones, podríamos deducir varias proposiciones geométricas y trigonométricas, demostradas ya; pero pasarémos á manifestar cómo un resultado algebráico nos da á conocer que la cuestion que se intentaba resolver como problema es teorema. (p. 79)

Y pone ejemplos de este hecho con los siguientes problemas:

126. Para esto, propongámonos resolver la siguiente cuestion: Determinar dentro de un triángulo equilátero un punto tal que bajando desde él perpendiculares á los tres lados, la suma de dichas tres perpendiculares sea igual con la altura del triángulo.

PG – PRA: En este problema mezcla el planteamiento geométrico con la resolución algebraica porque en las proporciones que obtiene mediante métodos geométricos escribe, directamente, el valor de la incógnita desconocida, y hace las operaciones correspondientes para simplificar la expresión, en vez de hacerlo de forma independiente.

Como siempre, supone el problema resuelto, y considera *E* el punto buscado, por tanto trazando por él las perpendiculares *EF, EG* y *EH* a los lados del triángulo se tendrá *BD=EF+EG+EH.* (fig. 45)



Llama *BD=a,* altura relativa al lado *AC, AD=DC=1/2AC=b,* mitad de la base, *AF=x* y *EF=z* que es una de las perpendiculares buscadas. Prolonga la perpendicular *EF* hasta que se encuentra con la prolongación del lado *BC* en un punto *K.* Trabaja a continuación en diferentes triángulos semejantes para obtener *EF, EG* y *EH* (que son las perpendiculares buscadas) en función de *a, b, x* y *z*.

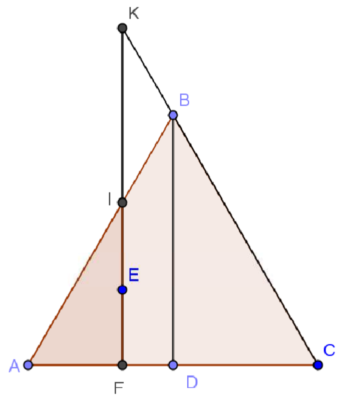


Figura 15: Problema 126

En primer lugar toma los triángulos *ADB* y *AFI*, que son semejantes pues por ser la *FI*, *BD*, perpendiculares ambas á *AC*, serán paralelas, y nos darán llamando *x* á la parte *AF*, $AD = b : DB = a :: AF = x : FI = \dfrac{ax}{b}$,” y quitando la *EF*, á que llamarémos *z*, será $EI = FI - EF = \dfrac{ax}{b} - z$.”(p. 80)

Seguidamente considera los triángulos *CDB* y *CFK* que son tambien semejantes y dan $CD = b : DB = a :: CF = AC - AF = 2b - x : FK = \dfrac{a(2b-x)}{b} = \dfrac{a \times 2b}{b} - \dfrac{ax}{b} = 2a - \dfrac{ax}{b}$,”y quitando FE=z, se tendrá $EK = FK - EF = 2a - \dfrac{ax}{b} - z$.” (p. 80)

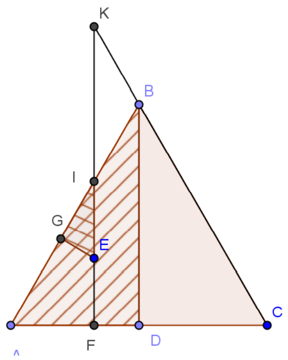


Figura 16: Problema 126

Además toma los triángulos *ADB, EGI* que son también semejantes porque además de ser rectángulos el primero en *D* y el segundo en *G*, tienen los ángulos en *B* y en *I* iguales por correspondientes entre las paralelas *BD,FI,* siendo la secante *AB,* y darán

$$AB = AC = 2b : AD = b :: IE = \frac{ax}{b} - z : EG = \frac{b \times \left(\frac{ax}{b} - z\right)}{2b} = \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}z.$$

Por último considera los triángulos *EKH* y *DBC* que son semejantes por ser rectángulos y ademas tener iguales por correspondientes los ángulos en *K* y en *B,* luego darán

$$BC = AC = 2b : CD = b :: EK = 2a - \frac{ax}{b} - z : EH = \frac{b\left(2a - \frac{ax}{b} - z\right)}{2b} = \frac{2a - \frac{ax}{b} - z}{2} = a - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}z$$

Por consiguiente substituyendo estos valores de las perpendiculares en la ecuacion *DB=EF+EG+EH,* se nos convertirá en

$$DB = z + \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}z + a - \frac{ax}{2b} - \frac{1}{2}z = z - \frac{2}{2}z + a = a \text{ . (p. 80)}$$

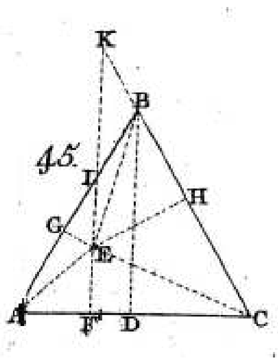
Como vemos, la conclusión a la que llega es que *DB=a*, es decir, no depende de las incógnitas, de lo que deduce que lo propuesto no es un problema, sino un teorema:

> 127. Si en esta ecuacion substituimos en vez de *DB* el valor *a* que le supusimos, se nos convertirá en *a=a* que es una ecuacion idéntica, en que está cifrado el axioma primitivo de que *una cantidad es igual con ella misma*. Así, esta ecuacion manifiesta que la cuestion propuesta no es problema sino teorema, ó que la condicion de que se dedujo la ecuacion, está comprendida en los datos de la cuestion, y nunca puede existir sin ella. (p.81)

Y pasa a enunciar y demostrar el teorema que ha deducido del problema:

128. Teor. Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo equilátero se tiran perpendiculares á los lados, la suma de estas tres perpendiculares es igual á la altura de dicho triángulo.

La demostración del teorema la hace por el método sintético, pero utilizando Geometría y Álgebra. Divide el triángulo dado en tres triángulos utilizando como vértices los del dado y el punto buscado. Utilizando que el área del triángulo total es la suma de las áreas de los tres triángulos formados obtiene el resultado buscado.



Dem: **PG:** Considera un punto cualquiera, *E,* del triángulo *ABC.* Trazando desde *E* las rectas *EA, EB* y *EC* quedará el triángulo *ABC* dividido en otros tres, *y será ABC=AEC+CEB+AEB.*

Considera a continuación las áreas de los cuatro triángulos, siendo: **PRA:** $\text{área } ABC = \frac{1}{2}AC{\cdot}BD$, $\text{área } AEC = \frac{1}{2}AC{\cdot}EF$, $\text{área } CEB = \frac{1}{2}BC{\cdot}EH$, $\text{área } AEB = \frac{1}{2}AB{\cdot}EG$, y como el área del triángulo *ABC* es igual a la suma de las áreas de los otros triángulos, tendremos:

$$\frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2}AC \times EF + \frac{1}{2}BC \times EH + \frac{1}{2}AB \times EG \text{ ,}$$

y como por ser equilátero el triángulo tendremos *AC=BC=AB*, será

$$\frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2}AC \times EF + \frac{1}{2}AC \times EH + \frac{1}{2}AC \times EG \text{ ;}$$

y suprimiéndole factor comun $\frac{1}{2}AC$, será por último *BD=EF+EH+EG.*

> Pero *BD* es la altura del triángulo, *EF+EH+EG* la suma de las perpendiculares tiradas á los lados desde un punto cualquiera, luego si desde un punto dentro de un triángulo, etc. L.Q.D.D. (p.81)

4. Para obtener fórmulas generales (PRI, PRAN, PRP, PRDI).

En este caso resuelve problemas relativos a la recta o el punto, tales como obtener diferentes ecuaciones de la recta, problemas de ángulos, paralelismo y perpendicularidad o la fórmula de la distancia entre dos puntos.

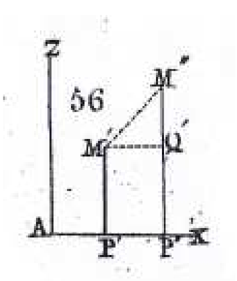
> 164. Hallar las condiciones necesarias para que una recta sea paralela á otra. (p.93)
>
> 166. Hallar el ángulo de dos rectas, cuyas ecuaciones son dadas (p.94),
>
> 169. Encontrar el punto de interseccion de dos rectas, cuyas ecuaciones se conocen (p.95)
>
> 170. Hallar la distancia de dos puntos cuyas coordenadas se conocen.

La forma de resolver estos problemas es muy similar a la utilizada en la actualidad, incluimos los problemas de los puntos 166 y 170 como ejemplos.

166. Hallar el ángulo de dos rectas, cuyas ecuaciones son dadas (p.94)

> Sean $z=ax+b$ la ecuacion de la 1ª recta, $Z=a'X+b'$ la de la 2ª. Supongamos que la primera recta forma con el ege de las abscisas un ángulo α cuya tangente trigonométrica es a y; y que la segunda recta forma con el mismo ege un ángulo α' cuya tangente es a'; con lo que el ángulo buscado será α'-α; pero por las fórmulas trigonométricas se tiene $tang.(\alpha' - \alpha) = \dfrac{tang.\alpha' - tang.\alpha}{1 + tang.\alpha' \times tang.\alpha}$; y llamando *m* á dicho ángulo será $tang.m = \dfrac{a' - a}{1 + aa'}$. (p.94)

170. Hallar la distancia de dos puntos cuyas coordenadas se conocen.



> Sean *M', M''* (fig.56) los puntos de que se trata: si se tira *M'Q'* paralela al ege de abscisa, y terminada en las coordenadas *M'P', M''P''*, el triángulo *M'M''Q'* rectángulo en *Q'* dará $M'M'' = \sqrt{M'Q'^2 + M''Q'^2}$.
>
> Sean ahora *x', z', z'', x''*, las coordenadas *AP', P'M', AP'', P''M''*, y tendrémos *M'Q'=P'P''=AP''-AP'= x''-x'*, y *M''Q'=P''M''-P''Q'= z''-z'*.
>
> Luego si se representa por *D* la distancia buscada se tendrá $D = \sqrt{(x''- x')^2 + (z''- z')^2}$.

4.1.4. Conclusiones

Como vemos, y ya indicamos al comienzo del análisis, en el *Tratado* se aprecian dos partes claramente diferenciadas tanto por los contenidos como por la metodología[15].

[15] Nos referimos, naturalmente, a la parte analizada.

En la primera de ellas el autor muestra cómo aplicar el Álgebra a la resolución de problemas geométricos de forma análoga a como se hace con los de Aritmética. Para ello explica cómo construir las expresiones algebraicas mediante regla y compás, lo que él llama aplicar la Geometría a las cuestiones del Álgebra. Pero hay que destacar que aunque Vallejo explica de forma teórica la construcción de varios tipos de expresiones algebraicas tan solo pone un ejemplo práctico de las mismas dentro de la resolución de un problema. Sin embargo muestra otra aplicación del Álgebra a la Geometría además de resolver problemas determinados, y es la de obtener y demostrar teoremas geométricos.

Tampoco hace hincapié en otros problemas como la homogeneidad de las ecuaciones mediante el empleo de la unidad, aunque la utiliza, pero sin explicar el por qué de su uso, como si lo diera por sabido. Hemos consultado otros volúmenes del *Tratado* intentando encontrar en alguno de ellos la explicación, sin éxito.

Otro de los problemas que surgen al operar con segmentos es el de las soluciones negativas. En este caso Vallejo la explicación que da de las mismas es la de un cambio en el enunciado del problema, que las convierta en positivas.

Para acabar los comentarios sobre esta primera parte señalar la importancia que le da el autor a los métodos de resolución de problemas, explicando claramente la diferencia entre el método analítico y el sintético –según el sentido clásico, como ya hemos señalado- y justificando la utilización de uno frente a otro.

En cuanto a la segunda, en la que se trabaja con sistemas de coordenadas y ecuaciones de la recta, debemos destacar el carácter básico de la obra. Vallejo no resuelve problemas concretos utilizando este método, sino que se limita a obtener formulas generales, y además solamente las más sencillas. Por ejemplo, calcula la distancia entre dos puntos, pero no entre punto y recta. Y en el caso de transformaciones de coordenadas, aunque introduce las coordenadas polares, no da cambios entre sistemas cartesianos y polares. Sin embargo, y mostrando el problema que aun se tenía con el empleo de los negativos, estudia las ecuaciones de cambio dependiendo del cuadrante en el que se trabaje, al igual que hace con las ecuaciones de la recta.

Todas consideraciones son importantes en tanto en cuanto el *Tratado* fue obra de uso y referencia en Colegios y Universidades españolas y de ultramar hasta mediados de siglo.

Por último señalar la importante influencia de los matemáticos franceses –como Bézout, d'Alembert o Lacroix- en la obra de Vallejo, lo cual es natural dada su formación. Esta influencia se pone de manifiesto en su exposición de los métodos de resolución de problemas, o en la interpretación de las soluciones negativas.

4.2. Geometría Analítica-Descriptiva de Mariano de Zorraquín (1819)

4.2.1. Autor

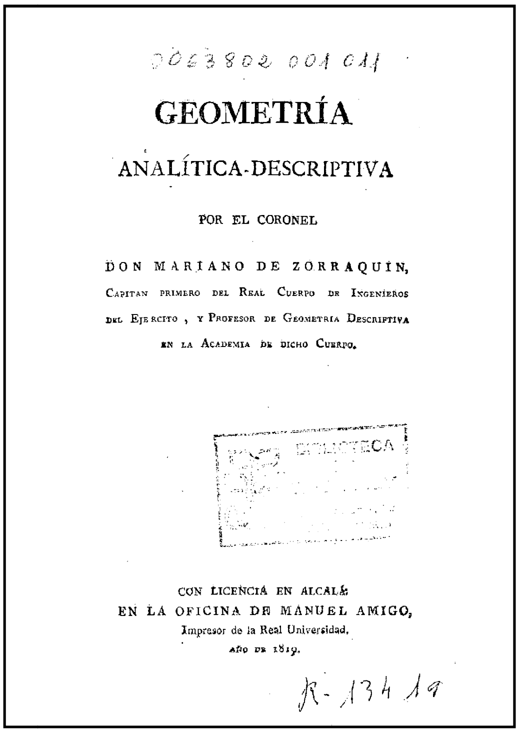
Como indica Escribano (2000), los datos existentes sobre Mariano Zorraquín son pocos y confusos, entre ellos la fecha de nacimiento, que se desconoce (CA1). Se sabe, sin embargo que fue un prestigioso militar, profesor de la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares y Diputado a las Cortes por Madrid.

Zorraquín estudió en la Academia de Ingenieros de Alcaláde Henares e ingresóen el Real Cuerpo de Ingenieros en 1805 (CA2). Participó como oficial de ingenieros en el segundo sitio de Zaragoza y fue ascendido a coronel en 1809 (Ausejo, n.d.c) (CA6).

Comprometido con la causa liberal fue condenado a prisión al restablecerse el absolutismo y deportado a Francia (Escribano, 2000; Ausejo, n.d.c). A su regreso fue destinado a la recién reabierta Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares como profesor, donde recibió el encargo de reformar el plan de estudios (Escribano, 2000) (CA3). En 1819 publicó su *Geometría analítica-descriptiva* (CA5), con el objeto de servir de texto en dicha academia, puesto que los textos de Vallejo, utilizados hasta entonces no abarcaban la totalidad del temario del nuevo plan de estudios (prólogo de la obra).

Ese mismo año es ascendido a brigadier y al iniciarse el Trienio Liberal fue elegido Diputado a Cortes por Madrid. El 19 de abril de 1823 es nombrado Ministro de la Guerra, pero no llega a tomar posesión pues fallece en la campaña de Cataluña contra los absolutistas, el 27 de abril de 1823 (CA1), a resultas de las heridas recibidas en el asalto a la plaza de Vich del día anterior. A su muerte era teniente coronel del Real Cuerpo y Mariscal de Campo del ejército (CA6) (Escribano, 2000; Ausejo, n.d.c).

4.2.2. Caracterización de la obra.



GEOMETRÍA

ANALÍTICA-DESCRIPTIVA

POR EL CORONEL

DON MARIANO DE ZORRAQUÍN,

CAPITAN PRIMERO DEL REAL CUERPO DE INGENIEROS DEL EJERCITO, Y PROFESOR DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA EN LA ACADEMIA DE DICHO CUERPO.

CON LICENCIA EN ALCALÁ EN LA OFICINA DE MANUEL AMIGO, Impresor de la Real Universidad. Año de 1819.

Figura 17: Carátula del libro. Geometría Analítica-descriptiva. M. Zorraquín

El libro analizado corresponde a la única edición de la *Geometría Analítica-Descriptiva* de Mariano de Zorraquín, impresa en Alcalá en 1819 en la *Oficina de Manuel Amigo. Impresor de la Real Universidad.* El ejemplar analizado se puede localizar en Google Books (http://books.google.es/) aunque el libro es reproducción digital de un ejemplar propiedad del CSIC y conservado en la biblioteca del Centro de Física “Miguel A. Catalán” (RO).

La obra consta de un solo tomo de 487 páginas dedicadas a la Geometría, de 24 páginas de observaciones, correcciones y erratas al final del tomo y de 23 láminas con dibujos que se encuentran también al final. El libro comienza con un prólogo y un informe de la Academia de Ingenieros en el que se describen los contenidos de la obra, los autores en los que se basa, las bondades de la misma y las ventajas de su utilización como texto en la Academia de Ingenieros, por lo que concluye recomendándola como tal (CEO1).

El índice (CEO2) se encuentra al comienzo del tomo. Reproducimos íntegramente los epígrafes de los capítulos I y II, que son los que hemos analizado, al menos en parte, ya que el punto IV del capítulo II está fuera de nuestro estudio. De los capítulos III, IV y V solo insertamos los títulos.

TABLA.

Idea general y objetos de la Geometría analítica.

SECCIÓN I.

Análisis determinada.

CAP. I. Construcciones y Problemas.
1. Ecuaciones de 1^er^ grado.
2. Ecuaciones de 2º grado.
3. Problemas.
4. Signos de las cantidades en la Geometría analítica.

SECCIÓN II

Análisis indeterminada.

Nociones generales: modo de determinar y de expresar algebraicamente la posición de un punto en un plano.

CAP.II. Ecuaciones de 1^er^ grado, entre dos variables.
1. De la linea recta en un plano.
2. Problemas.
3. Transformación de coordenadas en un plano.
4. Del punto y de la linea recta en el espacio. Geometría descriptiva.

CAP. III Ecuaciones de 1^er^ grado entre tres variables.
CAP. IV. Ecuaciones de 2º grado entre dos variables.
CAP. V. Ecuaciones de 2º grado entre tres variables.

Como decimos el libro comienza con un prólogo en el que cita a diversos autores (CEO4) como son Vallejo (p. VIII), Lacroix, Biot, Puissant, Hachette, Garnier, Boucharlat (p. IX) y Monge (pp. IX y XII); y en el informe de la Academia de Ingenieros se dice que el "autor expone y aclara (...) todas las ideas de M. Carnot", referidas a las soluciones negativas. (p. XV)

En el capítulo en el que trata el tema de los signos de las soluciones de una ecuación, habla de Carnot y de su *Geometría de posición.* No solo lo cita, sino que dice que expondrá su teoría (p. 26), como veremos más adelante.

Vuelve a citarlo al final del capítulo dedicado a las ecuaciones de la recta en el plano. Tras obtener las ecuaciones de cambio de coordenadas entre diferentes sistemas de referencia dice para finalizar: "(...) sobre esta materia véase la sección 6ª de la Geometría de posición de Carnot." (p.80)

Esto nos da idea de la importante influencia de la obra de Carnot sobre la que estamos analizando.

Cita también a Descartes en la introducción en la que explica cómo situar un punto y una recta en el plano (p.51).
En cuanto a los objetivos (CEO3) de la obra, también los explicita en el prólogo. Este comienza haciendo un breve repaso a la historia de la Academia de Ingenieros de Alcalá de Henares, sobre sus orígenes en 1803, y las dificultades por las que pasó, debido a la guerra de la Independencia, hasta que volvió a abrir sus puertas en 1814, fecha en que se proyectó un nuevo plan, siendo uno de los objetivos del libro dar respuesta a las necesidades del mismo:

> Entre las varias dificultades que debieron encontrarse en la ejecución del nuevo plan, la mayor consistió en la falta de textos impresos en nuestra lengua que llenasen completamente el objeto del reglamento (p.VIII).

Explica que se utilizaba la obra de Vallejo, pero que no era suficiente pues en la academia se da a los elementos "mas (sic) extensión que la que tienen en su obra", por lo que es necesario una ampliación de los mismos:

> En las que publico de Geometría analítica se hallan reunidas todas las materias que han formado las lecciones de la segunda mitad del primer año, que he aumentado y variado como me ha parecido mas oportuno y necesario: de este modo no nos veremos en la precisión de dar en manuscritos, como hasta ahora, las considerables adiciones y variaciones que han sido indispensables en esta parte (p. IX).

Otro de los objetivos que cita es el de reunir las Geometrías Analítica y Descriptiva:

> El reunir la Geometría descriptiva á la analítica, formando de las dos un solo cuerpo, es el otro objeto no menos importante que me ha decidido á este trabajo. (p. X)

Tras explicar en qué consisten una y otra expone las ventajas de cada una de ellas. De la Descriptiva dice:

> (...) para poder practicarla es menester representarse continuamente y combinar los cuerpos en el espacio por sola, la fuerza de la imaginación. El entendimiento adquiere facilidad en verlos interiormente, en compararlos, en conocer las propiedades que dimanan de su figura y posición relativa, y aún llega á prevenir los resultados que pretende obtener (...) (p.X).

Y de la Analítica:

> Pero (las operaciones mentales) se presentan con la mayor generalidad al entendimiento del que las ejecuta favorecido del análisis, con cuyo auxilio deduce fácilmente los resultados más interesantes de los principios al parecer menos fecundos, siendo preciso emplearla en aquellos casos en que las combinaciones se multiplican de tal modo que la imaginación mas viva y ejercitada no puede abrazarlas sino con dificultad. (...) (p. XI)

por todo ello considera que nada es "mas natural que el que según los deseos del ilustre Monge se enseñen á un mismo tiempo estas dos ciencias" (p. XII).
Además añade que la economía de tiempo también aconseja enseñarlas juntas pues hasta entonces se enseñaban en clases independientes lo que hacía que se repitiesen los mismos problemas en ambas de forma innecesaria.

Por otra parte la obra de Zorraquín será recomendada como texto para el estudio de la Geometría Analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde 1847 a 1867, como especificamos a continuación.

Aparece en el Plan de estudios de 8 de julio de 1847/ Reglamento de 19 de agosto de 1847, para el curso 1847/1848 (Orden de 8 /09/1847, Gaceta de Madrid de 11 de septiembre). En este plan aparece la Geometría analítica dentro del *Segundo curso de matemáticas elementales*, que se estudiaba en 5º, siendo, como en el plan anterior, "optativa para aquellos que quieran estudiar en las escuelas especiales".

También aparece en las listas para los cursos 1848/49 (Gaceta de Madrid de 15 /09/1848) y 1849/50 (Gaceta de Madrid de 25 /09/1849) como texto para la asignatura *Complemento del Álgebra y su aplicación á la geometría elemental y á las líneas y superficies de primero y segundo orden,* que formaba parte de la facultad de Filosofía dentro de la sección de Ciencias, pero que se encontraba dentro de las listas de textos para la segunda enseñanza pues se estudiaba en este nivel como asignatura voluntaria.

De nuevo aparece en las listas de libros para el curso 1850/1851 (G. de Madrid de 28 /09/1850), pero cambia la denominación de la asignatura, que pasa a llamarse *Álgebra superior y Geometría Analítica.* Y seguirá apareciendo en las listas de los cursos 1851/52 (G. de Madrid de 6 /09/1851), 1852/53 (G. de Madrid de 17 /09/1852), 1853/54 (G. de Madrid de 21 /09/1853), 1854/55 (G. de Madrid de 18 /10/1854), 1855/56 (G. de Madrid de 14 /10/1855) y 1856/57 (G. de Madrid de 18 /09/1856), para esa misma asignatura que a partir del plan de estudios de 1852 desaparece de la segunda enseñanza para estudiarse únicamente en la facultad de Filosofía.

A partir de 1857, en que se aprueba la Ley de Instrucción Pública 9 de septiembre de 1857 (Gaceta 10-septiembre-1857) y se crea la Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales, la obra de Zorraquín aparecerá en varias listas de libros para uso en esta facultad. El *programa general de estudios* de esta y otras facultades se aprobó por Real Orden de 25 de agosto de 1858 (Gaceta de Madrid de 14-09-1858), y en él aparece la asignatura de *Geometría Analítica.*

La obra de Zorraquín aparece en las listas de libros de los siguientes años: R.O. 25-9-1858; (Gaceta 1-10-1858), R.O. 15-10-1861; Gaceta (20-10-1861), R.O. 10-9-1862; (Gaceta 13-9-1862), R.O. 26-9-1863; (Gaceta 30-9-1862), R.O. 31-8-1864; (Gaceta 3-9-1864) (Para el trienio 1864/67). Señalar que en algunas de las listas aparece como Joaquín Zorraquín, pero no hemos localizado ningún matemático con ese nombre ni obra de Geometría Analítica con ese autor, así que suponemos que debe ser una errata y se trata de Mariano Zorraquín.

4.2.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.2.3.1. Análisis de la estructura conceptual.

El estudio comienza con una introducción en la que trata de las definiciones de Álgebra y Geometría, de sus aplicaciones y de la manera de relacionarlas (D). Ahí nos dice que las cuestiones geométricas se clasifican en dos tipos, determinadas e indeterminadas y que por tanto se debe dividir el estudio en dos secciones, comprendiendo la primera lo relativo al análisis determinada pues "este es el orden más natural y el mismo que han seguido en su descubrimiento" (p.4). Así pues tenemos dos secciones: Análisis Determinada y Análisis Indeterminada.

En la primera comienza explicando por qué las expresiones algebraicas de la Geometría deben ser homogéneas y de grado tres como máximo, y cómo se utiliza la unidad para conseguir la homogeneidad de las mismas. (U)

Seguidamente explica cómo se construyen las fórmulas de primer y segundo grado (E).

Después resuelve una serie de problemas geométricos en los que utiliza las diferentes construcciones estudiadas anteriormente (PRDT), y utiliza uno de ellos como introducción al estudio de los "signos de las cantidades en la Geometría Analítica", desarrollando en el siguiente punto toda una teoría al respecto (SN).

La sección II está dedicada a la *Análisis Indeterminada*. Comienza con una introducción en la que da la noción de otro método de resolución de problemas, distinto y más general que el explicado en la sección I. En ella desarrolla la idea de cómo situar un punto en un plano y cómo representar una línea usando el Álgebra, habla de los sistemas de referencia, y de los sistemas de coordenadas oblicuas, rectangulares y polares, dando las ecuaciones de cambio entre ellos (C).

Tras estas consideraciones generales analiza las ecuaciones de primer grado entre dos variables. Estudia la ecuación de una recta en un plano, dando diferentes tipos de ecuaciones (ER) y después resuelve lo que él llama unas cuestiones preliminares, que consisten en hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, el punto de corte de dos rectas, la distancia entre dos puntos, etc. (PRI, PRP, PRDI, PRAN).

Veámoslo con más detalle:

1. Definición de Geometría Analítica

Como hemos dicho comienza el tratado con una introducción en la que explica en qué consisten el Álgebra y la Geometría (D):

> (...) En la primera (el Álgebra) nos dirigimos á encontrar una ecuación ó expresión analítica que contenga cierto número de relaciones entre la cantidad desconocida y los datos del Problema. Una vez hallada, el calculador puede seguir maquinalmente el camino trazado para obtener los valores de la incógnita sin necesidad de esfuerzo mental, ni de atender al objeto primario que pierde de vista durante el trabajo mecánico de efectuar las Operaciones Aritméticas. En la Geometría al contrario, no se llega al resultado sino marchando de consecuencia en consecuencia que es preciso deducir por una serie no interrumpida de razonamientos de la combinación de varios axiomas ó principios admitidos. Este método que puede llamarse directo, y en el que de ningún modo se hace uso del lenguage algebraico es sin duda alguna el mas claro, pues que en efecto en la distancia que separa los primeros axiomas de las últimas consecuencias no se da paso sin que el entendimiento quede plenamente convencido de la verdad de lo que antecede. (...) Pero apenas abandonamos los elementos para remontarnos á otras mas difíciles los razonamientos se aumentan y complican hasta tal punto que para formarlos y seguirlos son indispensables esfuerzos extraordinarios de atención y de memoria, (...). (p.2)

Comenta que estos problemas se tienen de igual manera en las cuestiones numéricas y se resuelven con ayuda del Álgebra, y se plantea si es posible aplicar lo mismo en la Geometría. Para ello comienza haciendo la siguiente observación:

> Recordaremos á este fin que las magnitudes lineales en tanto tienen existencia en cuanto se las refiere á una unidad de medida; esta no es una consideración

> arbitraria, pues sin ella nada significaría el producto de dos líneas, el cuadrado de una &. (p.2)

Y teniendo en cuenta esto, es fácil convertir un problema geométrico en otro algebraico:

> Si pues siempre que entren en los cálculos, substituimos por ellas los números que expresan sus relaciones con la unidad las cuestiones geométricas podrán considerarse como numéricas, y resolverse por el Álgebra empleando sus caracteres generales para representar dichas magnitudes.(...) De lo dicho resulta que si después de averiguar las relaciones que existen entre las magnitudes dadas y las que se buscan las ciframos en una ecuación, resolviéndola llegaremos al resultado sin el trabajo que de otro modo sería indispensable. (p.3)

y da la definición de *Aplicación del Álgebra a la Geometría:*

> Esto es lo que se entiende por *Aplicación del Algebra á la Geometría*. Hermanadas de esta suerte sé prestan auxilios mutuos, aquella facilita y simplifica las investigaciones, da á las cuestiones y á sus resultados la generalidad que la caracteriza, y conservando á la segunda la claridad que perdería, queda allanado el camino para discutir aún las materias mas elevadas (p.3).

y añade que no solo debe servir el Álgebra para facilitar los problemas de la Geometría, sino que ésta también debe dar auxilio a la primera:

> Continuando la misma convención es evidente que en toda expresión analítica debemos ver una construcción geométrica pues que sus caracteres representarán cantidades geométricas (p. 3).

Y concluye:

> Dos son pues los objetos de la Geometría analítica; resolver las cuestiones geométricas por el análisis é interpretar geométricamente ó construir las fórmulas analíticas (p.4).

Es importante destacar el nombre utilizado por Zorraquín, Geometría Analítica, que engloba tanto la "Análisis determinada" como la "indeterminada", aunque en la primera no se haga uso de sistemas de coordenadas.

2. Análisis determinada

2.1. Ecuaciones homogéneas. Unidad

Tras la introducción comienza el capítulo primero que inicia explicando cómo se calcula el "grado de una fórmula", e indica que toda expresión analítica en Geometría no puede tener más de tres dimensiones y debe ser homogénea (U). Vemos que Zorraquín a pesar de utilizar el Álgebra para facilitar los razonamientos geométricos no pierde nunca de vista la interpretación geométrica:

> Toda expresión analítica, referida a la Geometría no puede pasar de tres dimensiones. Debe ademas ser homogénea ó nada significa, asi $a + bc + d^3$ seria la suma de una línea, una superficie y un volumen, cosa imposible (p.5).

Y explica cómo convertir una expresión heterogénea en homogénea, para darle significado geométrico, mediante el uso de "la unidad tomada por medida":

> Quando se obtenga por resultado de un Problema no absurdo una expresión de esta ú otra forma semejante, será fácil darla significación, haciéndola homogénea.
> Para lo cual observaremos que la falta de factores en los dos primeros términos debe provenir de haberse suprimido en ellos los que eran iguales á la unidad tomada por medida, y asi llamándola *r* seria $a + bc + d^3 = ar^2 + bcr + d^3$ suma de tres volúmenes (p. 5).

Y pone un ejemplo de la trigonometría:

> De esto tenemos una prueba en la Trigonometría en la que decimos que $\text{tang.} = \dfrac{sen}{\cos}, \sec = \dfrac{1}{\cos}$ & debiendo ser, $\text{tang.} = \dfrac{R \cdot sen}{\cos}, \sec = \dfrac{R^2}{\cos}$ & (p. 6).

En varios casos muestra cómo trabajar con ecuaciones que no son homogéneas, introduciendo de forma explícita la unidad en algunos de ellos, como cuando trabaja con radicales o cuando resuelve la ecuación de segundo grado (E), como veremos seguidamente.

2.2. Construcción de las fórmulas

Comienza explicando la construcción de los cocientes, y dentro de ellos el caso más sencillo, en que tanto el numerador como el denominador son monomios:

> 2. Las expresiones monomias de una dimensión son de esta forma $a, \dfrac{ab}{c}, \dfrac{abc}{de}$ & ; todas se construyen por 4^{as} proporcionales.
>
> En quanto á $x = \dfrac{ab}{c}$ no hay dificultad.
>
> Para $x = \dfrac{abc}{de}$, se buscará una línea $m = \dfrac{ab}{d}$ y otra $x = \dfrac{mc}{e}$. (p.6)

De forma análoga construye la expresión $x = \dfrac{abcd}{efg}$, y saca una conclusión general:

> De los ejemplos anteriores se deduce que siempre son necesarias tantas 4^{as} proporcionales como dimensiones tiene el denominador (p. 7).

Sigue con la construcción de fracciones en las que en el numerador hay un polinomio:

> 3. Las fracciones polynomias de la forma $x = \dfrac{abc + def - gbi = \ldots}{mn}$ en que el denominador es monomio, escritas asi $x = \dfrac{abc}{mn} + \dfrac{def}{mn} - \dfrac{gbi}{mn} = \ldots$ se construyen separadamente y se suman ó restan las líneas que resultan (p.7).

Y hace unas especificaciones para los casos $x=\frac{a^2-b^2}{c}$ -en que dice que es mejor ponerlo como $x=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$ y hallar una cuarta proporcional a *c, (a-b) y (a+b)*-, $x=\frac{ab+bc}{d}$ - que descompone como $x=\frac{b(a+c)}{d}$ -, y $x=\frac{a^2b+ab^2}{cd}=\frac{ab(a-b)}{cd}$ (p.7)

Seguidamente estudia el caso en que el denominador es un polinomio $x=\frac{abc}{de+fg}$ (p. 7), igualando el denominador a "un solo término del mismo número de dimensiones que él y en que no haya mas que un factor desconocido" (p.7), en este caso hace *de+fg= dy* e indica que se construye $x=\frac{abc}{dy}$ por el método anterior después de determinar $y=e+\frac{fg}{d}$.

Termina construyendo cocientes más complejos utilizando todo lo anterior: $x=\frac{abc+def}{gb+lm}$, $x=\frac{abcd+bq^3+m^2pq}{q^2y-klq+mcd}$ y $x=\frac{abc^2-a^2b^2}{abc+c^3}$.

Termina el epígrafe haciendo alusión a las ecuaciones no homogéneas:

> Las (fórmulas) que hemos presentado hasta ahora han sido homogéneas; en el caso contrario hubiera sido fácil introducir antes de todo los factores necesarios (p.9).

Seguidamente estudia las construcciones de las soluciones resultantes en una ecuación de segundo grado, que veremos más adelante, comenzando con las construcciones de diferentes tipos de radicales.

En primer lugar explica los tipos de radicales a que se puede reducir cualquier expresión radical:

> 6. Las fórmulas radicales se reducen á estas dos $\sqrt{ab},\sqrt{a^2\pm b^2}$, y se construyen la 1ª por una media proporcional entre *a* y *b*; la 2ª por el triángulo rectángulo; $\sqrt{a^2+b^2}$ es la hypotenusa, y $\sqrt{a^2-b^2}$ un cateto (p. 9).

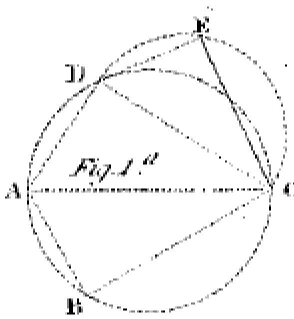
Y explica cómo reducir radicales más complejos a estos tres. Así nos dice que "para reducirlas á la 1ª forma, se igualará la cantidad precedida del radical á un producto ay en que y es incógnita y a determinada arbitrariamente; conocido el valor de y, se construye $\sqrt{ay}$" (p. 9), y pone como ejemplo $x=\sqrt{\frac{ab^2+cd^2}{b+c}}$, donde hace $\frac{ab^2+cd^2}{b+c}=ay$, "de donde $y=\frac{b^2}{b+c}+\frac{cd^2}{a(b+c)}$ "(p.9).

Y para transformar este mismo radical en la segunda forma:

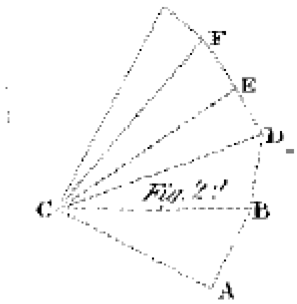
> 8. Para dar á esta misma expresión la 2ª forma puede suponerse $\frac{ab^2}{b+c}=m^2,\frac{cd^2}{b+c}=n^2$. Dos 4as proporcionales $l=\frac{ab}{b+c}, p=\frac{cd}{b+c}$ y dos medias

$m = \sqrt{lb}, n = \sqrt{pd}$ darán m^2 y n^2, que substituidas en la propuesta la reducen á $x = \sqrt{lb + pd} = \sqrt{m^2 + n^2}$ (p.10).

Pone como ejemplo el radical $x = \sqrt{ac + bd - ef - gb}$ del que dice que se puede construir haciendo $ac + bd - ef - gb = ay$; o bien $ac=y^2$, $bd=z^2$, $ef=t^2$, $gb=u^2$, quedando por tanto $x = \sqrt{y^2 + z^2 - t^2 - u^2}$ del que da la construcción:



(…) esta última expresión se construye formando con $AB = y$; BC = z, como catetos el triángulo rectángulo ABC sobre su hypotenusa $AC, b^2 = y^2 + z^2$ se describe el semicírculo ADC, se coloca $AD= t$, y $DC^2 = l^2 = b^2 - t^2$ convierte la primitiva en $x = \sqrt{l^2 - u^2}$ que se concluye como indica la figura (p. 10).



En el mismo punto pone otro ejemplo, el de la construcción de $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots}$, de la que dice que se construye disponiendo a y b en ángulo recto y levantando perpendicularmente sobre la hipotenusa, BC, el segmento $BD=c$, y así sucesivamente como se indica en la figura 2. (p. 10)

Para terminar hace la siguiente observación:

Observaremos de paso que si $a=b=c=d=...=1$ serán $BC = \sqrt{2}, CD = \sqrt{3}, CE = \sqrt{4}$, & y además que los lados del cuadrado y del triángulo equilátero inscriptos en el círculo cuyo radio es =1, son respectivamente $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. (p.10)

Por último añade algunos ejemplos en que "se logran construcciones más sencillas separándose de las reglas generales". (p. 11), como es el caso de $x = \sqrt{ac + bd}$ -que transforma en $x = \sqrt{a(c + y)}$ haciendo $bd=ay$ -, $x = \sqrt{ab + bc} = \sqrt{b(a + c)}$ -que se construye mediante medias proporcionales- y $x = \sqrt{a^2 - f^2 \times \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}}$, que transforma en $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ haciendo $y^2 = f^2 \times \frac{c^2 + d^2}{ab + cd}$, y $c^2 + d^2 = m^2, ab + cd = n^2, y = \frac{fm}{n}$, para calcular y.

Tras trabajar con ecuaciones homogéneas muestra cómo hacerlo con las que no lo son.

Considera dos casos, en el primero muestra ecuaciones que se pueden transformar en homogéneas sin el uso de la unidad, como por ejemplo los radicales $x = \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{1}{m}\sqrt{mn}$, "que se construye por una media proporcional entre m y n, y una 4ª a $m, \sqrt{mn}$ y la unidad" (p. 11); y $x=\sqrt{\frac{k^2n}{m}}$ que transforma en $x=\frac{k}{m}\sqrt{mn}$, para poder construirlo de la forma anterior.

En el segundo muestra ejemplos en los que introduce la unidad para convertir las expresiones dada en homogéneas. Pone tres ejemplos:

> 2°. $x=\sqrt{n}$ equivale á $x^2=n=rn$; luego x es media proporcional entre n, y la unidad r.
>
> $x=\sqrt{abc}$ es lo mismo que $rx^2=abc, x^2=\frac{abc}{r}$, $x=\sqrt{\frac{abc}{r}}$.
>
> Por ultimo $x=a^2+\sqrt{a^3-ab+c^2}=\frac{a^2}{r}+\sqrt{\frac{a^3}{r}-ab+c^2}$, se construye haciendo antes $\frac{a^2}{r}=m, \frac{a^3}{r}=z^2, ab=y^2$ para reducirla la forma $x=m+\sqrt{z^2-y^2+c^2}$. (p.12)

Termina las construcciones generales hablando de las fórmulas de dos o tres dimensiones, que desde el punto de vista geométrico representan áreas y volúmenes y como tal las construye:

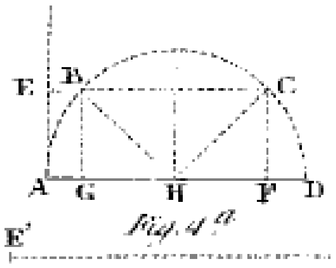
> 12. Las formulas de dos dimensiones están comprendidas en las que anteceden: para construirlas se las reduce á dos factores *m, n,* de los que uno representa la base y otro la altura del rectángulo, cuya superficie tiene por valor la expresión dada: por ej. $x=\sqrt{cd(a^2-b^2)}$, haciendo $a^2-b^2=m^2, cd=n^2$, será $x = mn$, en la que m y n son conocidas. Si hacemos la superficie $x=p^2$, resultará $\sqrt{mn}=p$ lado de un cuadrado igual en superficie al rectángulo anterior. Mas si se le quiere convertir en un paralelogramo ó triángulo, será preciso recurrir a alguna otra condición del Problema para que no sea indeterminado, puesto que con una misma base y altura puede haber una infinidad de dichas figuras iguales en valor, pero diferentes en su forma (pp.12-13).

De forma análoga explica que las de tres dimensiones deben reducirse a la forma $x=mnp$, que se puede reducir al cálculo del volumen de un cubo (p. 13).

Tras explicar las construcciones de los diferentes tipos de expresiones algebraicas, como hemos visto, pasa a explicar las de las soluciones de la ecuación de segundo grado. Comienza haciendo uso de la unidad para hacer homogénea la ecuación:

> 14. La ecuación mas general de segundo grado es $x^2 \pm px = \pm q$; haremos para la homogeneidad $q=ar=m^2$. (p.13)

Y construye las soluciones de las ecuaciones que surgen cambiando los signos de de p y q. En primer lugar lo hace para las soluciones de la ecuación $x^2-px=-m^2$. Tras construir la solución geométrica comprueba de manera algebraica que efectivamente los segmentos hallados son solución de la ecuación propuesta:

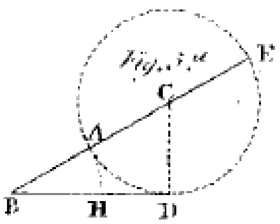


1º. $x^2 - px = -m^2$ ó $x(p-x) = m^2$; *m* es media proporcional entre *x* y *p-x;* luego describiendo sobre *AD=p* como diámetro un semicírculo y en su extremo *A* levantando la perpendicular *AE* = *m*, la *EC* paralela á *AD* dará los puntos *B, C* tal que las perpendiculares *BG, CF* serán las medias proporcionales buscadas, las raíces de la ecuación son *AG, AF*, porque en efecto

$$AF = AH + HF = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - m^2},$$

$AG = AH - GH = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - m^2}$, las dos son positivas, pues $\frac{1}{2}p > \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - m^2}$ (p. 14).

En el caso de $x^2 + px = -m^2$ dice que para resolverla basta con sustituir *x* por *-x*, obteniendo la ecuación resuelta anteriormente por lo que tendrá las mismas raíces que esta “pero con signos contrarios; a saber, negativos” (p.14). No da ninguna explicación, interpretación o comentario al respecto, es decir no da la interpretación geométrica de tales soluciones negativas.



En el tercer caso, $x^2 - px = m^2$ o $x(x-p) = m^2$, en que *m* es media proporcional entre *x* y *x-p*, da la siguiente construcción:

(...) se construye describiendo un semicírculo cuyo radio sea $DC = \frac{1}{2}p$ y tirando la tangente *DB=m;* la secante *BE* dará

$$x' = BE = CE + BC = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2},$$

$$x'' = -BA = EC - BC = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}$$ (p. 14).

De nuevo no da explicación ninguna sobre la construcción de la solución negativa.

En el cuarto caso, $x^2 + px = m^2$, dice que las soluciones son las mismas que las de la ecuación anterior cambiadas de signo, ya que, de nuevo, cambiando en la ecuación *x* por *-x* se obtiene la misma ecuación (p.14).

2.3. Soluciones negativas

Tras explicar las construcciones de las “fórmulas” como hemos visto pasa a estudiar la construcción e interpretación de las soluciones negativas de una ecuación. Desarrolla toda una teoría, que nosotros denominaremos teoría de los signos, en la que introduce una serie de conceptos, tales como *sistemas correlativos* o *cantidades en orden directo* *o inverso*, que no se usan actualmente, al menos en el sentido que se le da en la obra. Como hemos señalado anteriormente toda esta teoría no es original de Zorraquín, sino que es propia de Carnot, como el mismo Zorraquín indica:

> 16. Carnot en su interesante Geometría de posición se ha dedicado á fijar la idea que debe formarse de las expresiones llamadas impropiamente cantidades negativas que resultan como soluciones de los Problemas de Geometría. Para la mas fácil inteligencia expondremos su teoría, aplicándola á un ej. particular, sin que por eso deje de tener toda la generalidad necesaria (p. 26).

Introduce, por tanto, esta teoría con un problema, que incluimos aquí y no en la parte de fenomenología por esta razón.

La idea que desarrolla Zorraquín es la de plantear un problema con los datos que tenemos, resolverlo y a partir de ese obtener las soluciones de todos los problemas posibles que se pueden plantear con los mismos datos, que nos darían lo que él llama los *sistemas correlativos* al inicial. El ejemplo que él pone es con un triángulo. Plantea el problema inicialmente con un triángulo acutángulo, pero considera después la opción de que el triángulo sea obtusángulo obteniendo un sistema correlativo. En este nuevo sistema algunas cantidades aparecen con signo opuesto con respecto al anterior, son las que denomina *cantidades en orden inverso*. Las soluciones del nuevo problema las halla cambiando el signo de estas cantidades en la ecuación de partida, obteniendo la que nos da las soluciones del nuevo problema sin necesidad de tener que plantearlo desde cero como un problema distinto. Pero concluye al final que no será necesario resolver las ecuaciones de todos los sistemas correlativos, pues la de partida nos dará todas las soluciones posibles, sin más que cambiar de signo a las cantidades inversas en la solución, y no en la ecuación.

Veamos esto con detalle:

X. Propongámonos hallar el segmento *DC* formado por la perpendicular *AD* bajada sobre la base *BC* de un triángulo desde el ángulo opuesto (p. 26).

Para resolverlo considera el triángulo *ABC*, acutángulo, de la figura 16. Toma como incógnita el segmento *DC=x* y aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos *ABD*, *ADC* obtiene la ecuación $a^2+b^2-2ax=c^2$ ... (I), de la que saca el valor de *x*. Debemos tener en cuenta que al tomar *DC=x* como incógnita, queda *BD=a-x,* siendo el triángulo acutángulo como es. Pero si en vez de ser acutángulo fuera obtusángulo como en la figura 19, tendríamos *BD=a+x*. Zorraquín hace al respecto la siguiente reflexión:

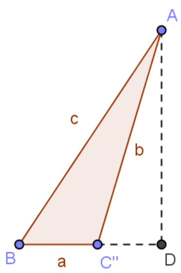


Figura 19: Problema X. Triángulo acutángulo

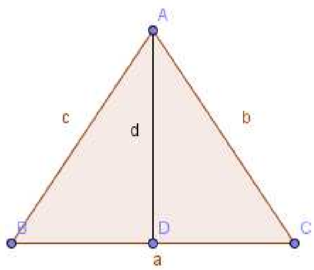
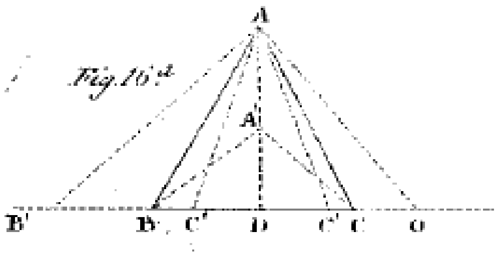


Figura 18: Problema X. Triángulo obtusángulo

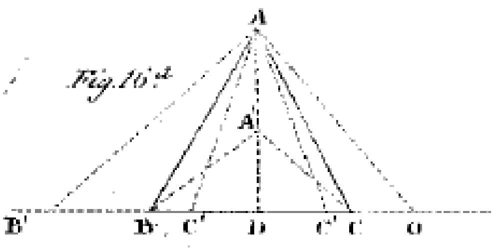
> Pero si el punto *C* pasa á *C''*, siendo *ABC''* el triángulo propuesto, no se podrá decir como en el caso anterior *BD=BC''-C''D,* sino = *BC''* +*C''D=a* + *x*, asi pues la fórmula (I) se convertirá en $a^2 + b^2 + 2ax = c^2$ .... (2).
> La diferencia entre las dos proviene solo de los signos que preceden á los segmentos *DC, DC''*, ó lo que es lo mismo de la diferente posición que en ambos casos tiene la base respecto de la perpendicular (p.26).

Basándose en esto da una serie de definiciones, la primera de ellas la de sistemas correlativos:



> 17. Esto supuesto, tómese como por *término de comparación* la figura ABC, que llamaremos sistema primitivo.
> Todas las demás *AB'C, ABC''....* que á ella se refieren y son como los diversos estados por donde esta pasa al variar de cualquier modo las partes que la componen, se llaman *sistemas correlativos* (p. 27).

Tras esto hace diferencias entre sistemas directamente e inversamente correlativos:



> Si dos de éstos son tales que les conviene exactamente el mismo razonamiento, ó una serie de razonamientos de todo punto semejantes, en términos que la ecuación *X=0* hallada para el uno sirve para el otro con solo substituir los valores correspondientes, pero sin otra modificación ni cambio de signos, se dice que son *directamente correlativos*; y cuando esta circunstancia no se verifica, que lo son indirectamente. (p.27)

Tras esto define cuándo ciertas cantidades están en orden directo o inverso, y cómo son sus diferencias.

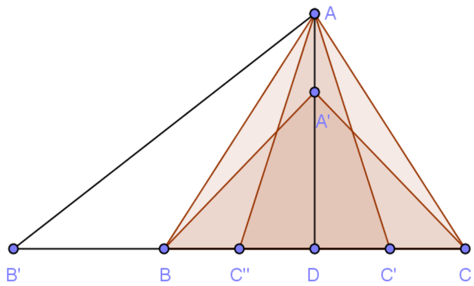


Figura 20: Reproducción fig.16ª

> Por último compararemos las dos cantidades *BC, BD* del sistema *ABC* con sus homologas *B'C', B'D* del *AB'C'*: observamos que en el I° *BC >BD*, y que en el 2º subsiste la misma relación, á saber *B'C* > *B'D*; en este caso diremos que dichas cantidades están en *orden directo*; mas si por el contrario la que era mayor en el sistema primitivo pasa á ser menor en el 2º estarán en *orden inverso*. La diferencia de dos cantidades *es directa ó inversa*, según estas estén en orden directo o inverso; asi *DC=BC-BD*, y *DC=B'C-B'D* son directas; *DC=BC-BD*, y *DC''=BD-BC''* son inversas (p.27).

Tras esto explica cómo transformar una ecuación válida en un sistema en otra válida en otro inversamente correlativo al primero. En primer lugar pone un ejemplo en el que explica que si para un sistema primitivo tenemos una cantidad BD=a+x, que pasa a uno correlativo como BD=a-x, las cantidades a y BD estarán en orden inverso, y su diferencia x=BD-a, x=a-BD, es una cantidad inversa. Por tanto si se tiene una ecuación X=0, válida para el primer sistema "substituyendo en X=0; a-x por a+x hallaremos otra fórmula Y=0 diferente de aquella, que solo servirá para el sistema correlativo" (p. 28).

Y de ello concluye una regla general:

> (...) y pues vemos que solo se diferencian en que la cantidad *x* entra encada una con signo contrario concluiremos por regla general:
> *Que dada una formula X=0 correspondiente á un sistema primitivo, para hacerla aplicable á otro que le sea indirectamente correlativo, ó bien para deducir de aquella la Y=0 que pertenece al 2º deben mudarse en la Iª los signos de las cantidades inversas* (p.28).

Y recíprocamente, si al comparar las ecuaciones de dos sistemas correlativos vemos que el signo de alguna cantidad ha cambiado, eso significa que es inversa:

> Recíprocamente si al hacer uso de *X=0*, para un sistema correlativo hallamos que algunas cantidades han mudado de signo, que llamaremos de correlación, y dan otra fórmula *Y=0*, será prueba de que son inversas (p.28).

Termina diciendo que en la práctica no se resolverán diferentes ecuaciones para los diferentes sistemas correlativos sino que se resuelve la obtenida con el que hemos utilizado para hacer el razonamiento "con tal que en los resultados de las aplicaciones se cambie el signo de las cantidades inversas" (p.28). Es decir, solo es necesario cambiar los signos de las soluciones, ya que si "se toma por incógnita sin mudarla el signo como debiera ser, es claro que con el mismo aparecerá en el resultado; el cálculo dará para ella el verdadero valor, pero con signo negativo, que por lo tanto deberá hacerse positivo" (p.29). Por tanto las soluciones negativas no son más que las soluciones positivas de un sistema inversamente correlativo al que se ha tomado para resolver el problema.

Da así la interpretación de las soluciones negativas, tanto en el caso en que aparezcan aisladas como si aparecen junto con soluciones positivas, y explica cómo construirlas ó cómo variar las condiciones del problema para que todas sean positivas. También da una interpretación de las soluciones negativas aparentemente no válidas y finaliza hablando de las soluciones complejas (PRDT). Lo vemos a continuación:

> 20. *De lo dicho se infiere que una solución negativa aislada prueba, ó contradicción en las condiciones del Problema que por esta razón no puede resolverse sin modificarlas; ó la existencia de una cantidad inversa que por conservar su signo en el cálculo ha sido causa de que las ecuaciones y los razonamientos que éstas expresan, se refieran á un sistema que tiene con el verdadero una correlación indirecta. Que en esté 2º caso para rectificar las ecuaciones y hallar la figura á que pertenece el Problema si admite solución, debe mudarse en ellas y en el resultado el signo de la incógnita, y dedicarse á conocer el nuevo sistema á que son aplicables éste y aquellas, pues solo á él y á las ecuaciones rectificadas puede pertenecer el valor que dé una verdadera solución.* (p.30)

Y explica cómo proceder en el caso de obtener una solución negativa aislada, que consiste en volver a la ecuación primitiva y examinarla para averiguar "la contradicción que encierran los datos y la modificación que exigen". (p. 31) Si no existe tal contradicción estamos en el caso en que se ha introducido una *cantidad inversa* y explica cómo proceder para averiguar si una magnitud lo es, para poder aplicar las transformaciones explicadas anteriormente.

> Con este objeto observemos que si en un sistema se tiene $a+x=b$ y en otro $a-x=b$, para el 1º será $x=b-a$ y para el 2º $x=a-b$ y puesto que siendo $b>a$ ha pasado á ser $b<a$, y además la variación se ha verificado por continuidad, habrá habido un caso en que $a=b$ y $x=0$ .Del mismo modo quando $x=\frac{1}{b-a}$ se convierte en $x=\frac{1}{a-b}$, resulta para x el valor intermedio $\frac{1}{0}=\infty$. Concluiremos pues que *una cantidad inversa no puede hacerse directa por el movimiento continuo de las partes del sistema á que pertenece sin pasar por 0 ó ∞.* (p.31)

Vemos aquí la idea que explicábamos anteriormente, Zorraquín no considera cada problema como único o aislado, sino como un conjunto de problemas que se pueden resolver a la vez y que no sólo están relacionados, sino que se puede pasar de unos a otros de forma continua a través de las cantidades directas e inversas. Esta continuidad obliga a que estas cantidades sean en un caso concreto cero o ∞. De nuevo esta idea proviene de Carnot, según Schubring (2005, p. 357):

> In 1801[16], Carnot even sees a relation between his approaches for the *analyse infinitesimal* and the *quantités directes et inverses*: they show "much analogy." In the former case, for an invariant system of quantities, one observes a second comparison system whose quantities transform into the quantities of the initial system through a continuous approximation to the limit. In the latter case, one likewise compares the quantities of two systems, and these are the absolute values in both systems that are equal to each other at the limit.

En lo explicado por Zorraquín en el párrafo anterior vemos reflejada esa idea de las cantidades que se hacen iguales en el límite.

Veremos que aplica este criterio para obtener la cantidad inversa en el problema XIII, recogido en la parte de fenomenología. Pero añade que el recíproco no es cierto ya que aunque x sea una cantidad inversa x^2 no lo es, a pesar de haber sido 0 o ∞ a la vez que x. Por tanto este método es insuficiente para averiguar cuando una cantidad es inversa, y por ello propone:

> Luego siendo insuficiente el carácter que acabamos de manifestar para distinguir las cantidades inversas, se hará, girar el sistema para conocer las que pueden llegar á ser nulas ó infinitas, y conoceremos las que entre estas son inversas examinando la forma de la figura, y las relaciones que existen entre sus partes. (p.31)

Termina diciendo que lo que acaba de explicar sirve también en el supuesto de que haya raíces positivas y negativas, en cuyo caso la interpretación es la siguiente:

> (...) el caso en que la incógnita tenga varios valores unos positivos, y otros negativos. Los I[os] podrán satisfacer realmente á la cuestión propuesta; los 2[os] ó indicarán lo que acabamos de manifestar ó pueden provenir de que las

[16] Año de publicación de su obra *Correlación de las figuras geométricas.*

> transformaciones algebraicas han introducido algunas raices insignificantes con las positivas, las solas que pueden dar una solución completa y directa. (p.30)

Pone como ejemplo el problema II (PRDT) (*Averiguar la relación que tienen los tres lados a, b, c, de un triángulo con el radio r del círculo circunscrito*) en el que el radio se obtiene de una ecuación de segundo grado de la que solo considera la solución positiva ya que "la raíz negativa nada significa, pues un círculo ni puede tener dos radios, ni uno negativo" (p.30). Se puede ver la solución detallada de este problema en el apartado de fenomenología.

Para aclarar todo lo expuesto con anterioridad plantea y resuelve los problemas XI, XII, XIII y XIV que se encuentran recogidos también en el apartado de fenomenología.

Continúa estudiando un nuevo tipo de problemas, que son aquellos en que lo que hay que determinar es "la distancia de un punto desconocido al origen", en los que las soluciones se encuentran sobre una recta. Explica en primer lugar cómo construir las soluciones negativas en este caso, valiéndose de nuevo de un problema: *Se pide determinar sobre la recta AB un punto C con ciertas condiciones.*

Comienza fijando un punto de referencia, "el origen":

> Supongamos que después de haber escogido un punto fijo *D* que llamaremos *origen,* y de haber tomado por incógnita la distancia del que se pide al origen contada hacia B, resulte una solución negativa, cuyo significado se busca. (p.42)

Tras esto explica cómo construirla y por qué así:

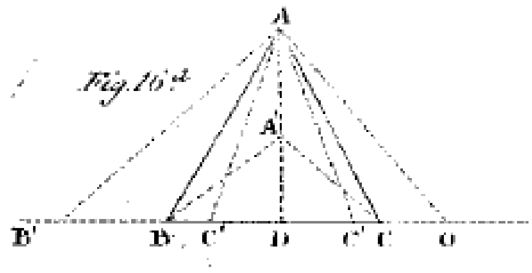
> No sabiéndose de antemano si *C* debe caer á la derecha ó á la izquierda de *D* como en *C'*, en este caso *DC'* será dada por una solución negativa, porque el sistema *DB* sobre que se ha establecido el razonamiento es indirectamente correlativo con el verdadero *DA*; en efecto en aquel es *DC=AC - DA*, y en este *DC'=DA-AC'*, y en la ecuación *X=0* habrá una cantidad inversa, que dará al resultado el signo negativo: luego obtendremos la solución efectiva tomando la cantidad absoluta hallada para la incógnita en sentido opuesto al de la hipótesis. Lo mismo sucede cuando hay raices negativas acompañadas de positivas; estas dan directamente las distancias y las otras al lado opuesto, (...) (p.42)

Y concluye de manera general:

> Luego por regla general, *siempre que el objeto de un Problema sea determinar la distancia de un punto desconocido al origen, debe suprimirse el signo de las soluciones negativas, y tomar las cantidades absolutas en sentido contrario al supuesto en la ecuación primitiva*. (p.42)

Tras resolver los problemas XV y XVI (PRDT) muestra cómo obtener todas las soluciones positivas, en ciertos problemas, mediante la variación del punto que se toma como origen:

> 27. En estos Problemas (...) es evidente que las raices negativas han provenido de la posición del origen, pues hallándose entre los puntos que dan las dos soluciones, el sistema que se escoja estará en correlación indirecta con el del otro lado; (...) (p.44)



Resuelve de nuevo los problemas XV (ver apartado de fenomenología) y X -que sirvió para introducir las cantidades directas e indirectas- cambiando el origen de manera que la nueva ecuación obtenida tiene todas sus soluciones positivas. En este caso toma como origen un punto *O* sobre *BC*, exterior a cualquier triángulo, *x=DO* y *CO=d;* obteniendo la ecuación $c^2-(a+d-x)^2=b^2-(x-d)^2$ ... (I') y como solución $x=d+\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ que siempre es positiva, sea como sea el triángulo considerado, e independientemente de que la altura caiga fuera o dentro del mismo. Y explica el por qué de la diferencia entre la nueva ecuación (I') y la obtenida con anterioridad $a^2+b^2-2ax=c^2$ ... (I), que no es más que la elección de la incógnita, que en un caso representa una cantidad inversa y en el otro no. (p.46)

> La diferencia entre la fórmula (I') y la (I) está en que en la (I') se ha tomado por incógnita una cantidad constante que por lo tanto no puede mudar de signo y en la (I) *x* representa una cantidad inversa, que aun cuándo existe también en la (I') pero va precedida de *d* cuyo signo será él del resultado; (p.46)

Como hemos dicho, también da una interpretación de las soluciones no válidas de un problema explicando que pueden ser útiles pues indican otro problema más general. Pone como ejemplo el problema IX, que sirvió para introducir la teoría sobre los signos de las soluciones de una ecuación, y que también se encuentra resuelto en el apartado de fenomenología.

Termina el tema, y con él la sección dedicada a la *Análisis Determinada,* con el problema XVII (ver fenomenología) (PRDT) en el que las soluciones son números complejos. (p. 48)

3. Análisis indeterminada

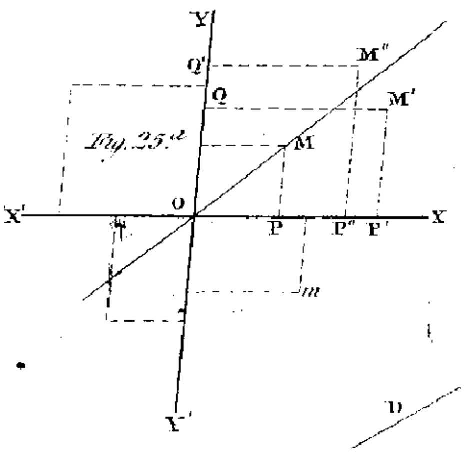
La sección dedicada a la *Análisis Indeterminada* comienza, como dijimos al comienzo, con una introducción en la que da la noción de otro método de resolución de problemas, distinto y más general que el explicado en la sección I.

> 34. Las cuestiones propuestas hasta ahora y cuantas se propongan relativas á la Geometría pueden resolverse da un modo mas general y favorable á las investigaciones. En efecto, entendiendo por espacio la extensión en que existen los cuerpos, indefinida, sin límites , y cuyas partes son todas semejantes entre sí, supongamos determinados en él algunos objetos fijos á que referiremos los demás. Si por los datos de una cuestión ó de otro cualquier modo es conocida la posición respecto de ellos de cada uno de los puntos del objeto que se busca, y se los coloca en el orden que corresponde, es claro que llegaremos á trazarle y describirle completamente, y que por esta descripción se obtendrá su figura y magnitud. Vemos pues que los Problemas de Geometría pueden por último reducirse á situar un punto en la posición que eligen ciertas condiciones. (p. 49)

En esta sección, como indicamos en la introducción, desarrolla los sistemas de coordenadas y las ecuaciones de la recta.

3.1. Sistemas de coordenadas

Comienza definiendo la posición de un punto mediante el uso de coordenadas cartesianas, pero en principio no hace distinción de si son rectangulares o no (C):



> Sean *XX', YY'* dos rectas prolongadas indefinidamente llamadas *ejes coordenados*, ó de *las coordenadas*: la 1ª el de las *abscisas*, y la 2ª el de las *ordenadas*, que se cortan en el origen O. Si se sabe que un punto *M* situado en su plano dista del eje *OX* la cantidad *MP* tomada paralelamente á *OY*, y de éste a *MQ* contada del mismo modo respecto del *OX*, no hay duda en que haciendo *OQ=MP* , *OP=MQ*, y tirando las paralelas *PM, QM* á las *OY, OX*, quedará determinada la posición de dicho punto, pues estará en su intersección. (p. 50)

Pero más adelante, cuando explica como sitúa un punto en el plano y da los signos de la abscisa y la ordenada en cada cuadrante dice: “El ángulo de los ejes es regularmente recto, y como tal lo consideraremos en lo sucesivo”, aunque dará las ecuaciones para hacer un cambio de ejes rectangulares a oblicuos, y viceversa. Esto nos indica que, a pesar de que los ejes más utilizados son los rectangulares, aún no se había perdido el uso de coordenadas oblicuas.

Continúa dando las coordenadas de un punto cualquiera, que él llama “ecuaciones del punto”, pues las da así, como $x=a, y=b$, y no como un par entre paréntesis como en la actualidad. También da las de un punto situado sobre cada uno de los ejes y la del origen de coordenadas (p. 52) en coordenadas rectangulares. Añade además la posición de un punto en coordenadas polares:

> 40. Para definirle puede también servir su distancia á otro *O* conocido de posición, que se llama *Polo*, y el ángulo que aquella forma con una recta dada en el plano de los ejes, como la *OX*; asi
>
> $$r = c,\ \varphi=A^{\circ} \ ....(2)$$
>
> determinan el punto *M*, designando por *r* la longitud *OM*, por *c* su valor, y por A° el número de grados del ángulo φ; á *r* se da el nombre de *radio vector*. (p.53)

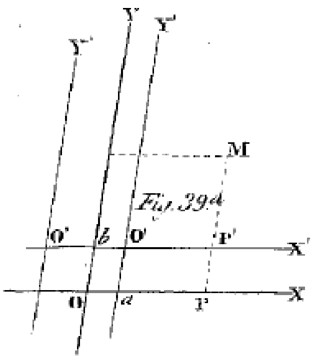
Tras haber estudiado las ecuaciones de la recta (ER), que veremos después, y haber resuelto una serie de problemas relacionados con la misma (ver fenomenología) estudia los cambios de coordenadas (p. 74).

Comienza justificando el uso de diferentes sistemas de referencia:

> 56. La ecuación de una linea suele presentarse bajo una forma tan complicada que su discusión es difícil, y aunque mas sencilla en otros casos no es sin embargo la mas á proposito para descubrir su naturaleza y propiedades, ni para combinarla con los demás cálculos. Proviniendo estos inconvenientes del modo con que están expresadas las relaciones de las coordenadas, á primera vista se conoce la posibilidad de encontrar otros sistemas de ejes que proporcionen expresarlas de otro modo mas sencillo. (p.74)

Tras esto explica teóricamente en qué consiste este cambio de ejes:

> Sea *y=f(x)* la ecuación de una linea referida á unos ejes *X, Y*; si queremos hallarla directamente respecto de otros *X', Y'* se obtendrá la *y'=f(x')*; las dos funciones representarán la misma linea, aunque bajo una forma diferente. Pero en lugar de seguir este método, que cuando menos seria demasiado largo, es preferible averiguar las relaciones entre las coordenadas primitivas *x*, *y*, y las nuevas *x', y'* con el objeto de obtener aquellas en funciones de las segundas y de substituir sus valores en *y=f(x)*, con lo que llegaremos á la *y'=f'(x')*. En vista de esto todo el artificio consiste en encontrar las *x=F(x', y'), y=F'(x', y')* que contengan la dependencia recíproca de *x, y, x', y'*. (p. 74)



El primer lugar estudia el caso en que solo se traslada el origen de coordenadas, obteniendo

$$x = x' + a, \dots. y = y' + b \text{ (p.75)},$$

Donde *(a, b)* son las coordenadas del nuevo origen en el sistema antiguo. Lo hace en general, sin considerar si los ejes son rectangulares u oblicuos, simplemente especifica que se "muda el origen haciendo los nuevos ejes paralelos a los primeros".

Continúa estudiando el caso general: *Pasar de un sistema de coordenadas a otro cualquiera,* obteniendo las siguientes fórmulas generales:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x' \operatorname{sen.}(y, x') + y' \operatorname{sen.}(y, y')}{\operatorname{sen.}(y, x)} \\ y &= b + \frac{x' \operatorname{sen.}(x, x') + y' \operatorname{sen.}(x, y')}{\operatorname{sen.}(y, x)} \end{aligned}\right\} \dots\dots(2)$$

Siendo *sen.(y,x')* el seno del ángulo que forman el *OY* del sistema antiguo con el *OX'* del nuevo, y así con el resto de los senos presentes en la fórmula. De ella deduce las fórmulas de cambio de coordenadas en los cuatro casos posibles:

> 1.° *Para pasar de un sistema oblicuo á otro también oblicuo sirven dichas fórmulas (2).*
>
> 2.° *Para pasar de un sistema rectangular á otro tambien rectangular haremos en ellas sen.(y , x)=1, sen. (y , x')= cos. (x, x'), sen. (y , y')=-sen. (x, x'), sen.(x, y')=cos.(x, x') (…)* (p.77)
>
> 3.º *Pasar de ejes rectangulares á oblicuos.*(...) (p. 77)
>
> 4.º *En fin la transformación de un sistema oblicuo en rectangular* (...) (p.78)

Además da las mismas fórmulas tomando *ang.(x,x´)=*α*, ang.(x,y´)=*α'*,ang.(y,x)=*β*.* Por ejemplo las fórmulas (2) quedan (p. 78):

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x' \operatorname{sen.}(\beta - \alpha) + y' \operatorname{sen.}(\beta - \alpha')}{\operatorname{sen.} \beta} \\ y &= b + \frac{x' \operatorname{sen.} \alpha + y' \operatorname{sen.} \alpha'}{\operatorname{sen} \beta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1'')$$

Por último estudia los cambios de un sistema cartesiano a coordenadas polares. Para ello parte de un sistema rectangular -si era oblicuo dice que se transforme primero- para obtener las ecuaciones del cambio, y remite al punto en el que introdujo las coordenadas polares obteniendo $x = p + r\cos.\varphi, y = q + rsen.\varphi$ de las que dice que "sustituyendo estos valores en la ecuación de una línea quedará referida a las coordenadas polares". (p. 79) Y de ellas obtiene "$r = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}, sen\varphi = \frac{y}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}}, \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}}$ para volver del sistema polar al de X, Y." (p. 80)

3.2. Ecuaciones de la recta

Como hemos señalado, antes de estudiar los cambios de unos sistemas de coordenadas a otros estudia la ecuación general de primer grado, a la que dedica un capítulo. Comienza dando las formas más generales de esta ecuación:

> 42. La ecuación mas general de esta clase es *Ay+ Bx+ C=0*; resuelta respecto de *y* será (...) *y =ax + b*. (p.54)

Y tras interpretar el significado de *a* y *b* concluye que "la ecuación de primer grado entre dos variables representa una línea recta". (p.55)

Seguidamente da la interpretación de la pendiente de la recta (que él no llama así en ningún momento) en caso de que el "sistema sea rectangular"- tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje *OX*- y en el caso en que sea oblicuo, en el que *a* es la razón de los senos de los ángulos de la recta con los ejes coordenados. (p. 55)

Además da las ecuaciones de los ejes, así como de las rectas paralelas a ellos. (p.56)

Tras calcular la ecuación de una recta dados dos puntos, da la ecuación punto-pendiente, (a la que él no da nombre), $y - y' = a(x - x')$, y la ecuación de una recta conocidos dos puntos *(x', y'), (x'', y'')* de la que da dos versiones: $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$ (p.57), $y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}x + \frac{y'x'' - y''x'}{x'' - x'}$ (p.58)

Estudia otras cuestiones relacionadas con la recta y el punto como son el punto de corte de dos rectas, el ángulo que forman, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad y la distancia entre dos puntos, que el autor plantea como problemas y que hemos recogido, por tanto en el apartado de fenomenología.

4.2.3.2. Sistemas de representación

En la obra de Zorraquín sólo encontramos tres tipos de representaciones: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico; y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente, las construcciones geométricas. No utiliza tablas, ni siquiera para la definición de las rectas, ya que las rectas con las que trabaja son genéricas, es decir no hay ejemplos de problemas con datos concretos.

Zorraquín define la Aplicación del álgebra a la Geometría (D), los sistemas directa e inversamente correlativos (SN), las cantidades en orden directo e inverso (SN), los ejes de coordenadas y los elementos que definen un punto en coordenadas polares (C).

Por otra parte, todas las explicaciones sobre las construcciones geométricas o sobre la interpretación de las soluciones negativas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E). Además, saca conclusiones generales de casi todos los problemas que resuelve para desarrollar la teoría sobre el signo de las cantidades negativas (PRDT, SN).

Sin embargo en esta obra no encontramos teoremas ni resultados generales, solamente encontramos los enunciados de los problemas. (PR)

Se hace uso del lenguaje simbólico continuamente, en ambas partes de la obra, como no puede ser de otra manera al utilizar lenguaje algebraico en la resolución de los problemas. En la primera parte nos encontramos que explica el uso del segmento unidad apoyándose en fórmulas (SN), la construcción de expresiones algebraicas de primer grado y de las soluciones de una ecuación de segundo grado, y el uso de ecuaciones en la resolución de los problemas. (E, PRDT).

En la segunda parte encontramos diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la tangente del ángulo que forman dos rectas, de la distancia entre dos puntos y las fórmulas de cambio de coordenadas, entre otras muchas. (ER, PRAN, PRDI, C)

Los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él. (CEO1)

Hay de dos tipos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas determinados resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución (PR).

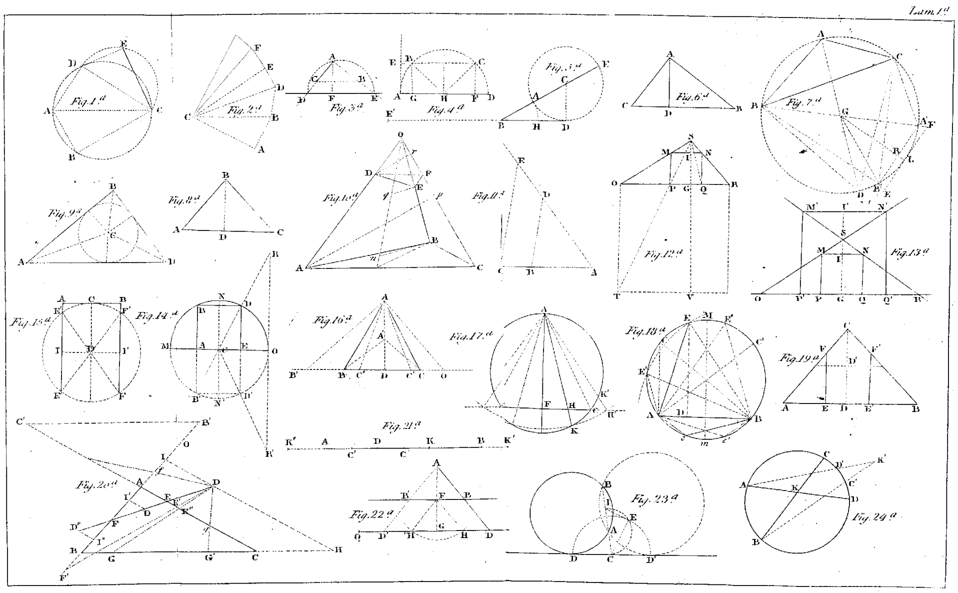


Figura 21: Lámina 1ª. Geometría Analítica-descriptiva. M. Zorraquín

El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, de diferentes tipos, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc.; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso, en sus razonamientos (SN, E, C, N, ER).

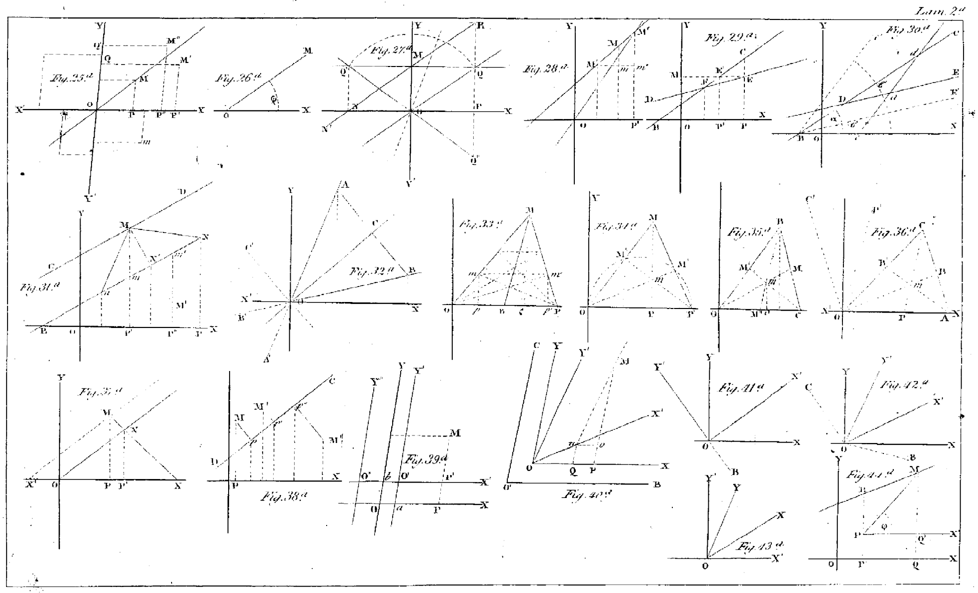


Figura 22: Lámina 2ª. Geometría Analítica-descriptiva. M. Zorraquín

4.2.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, y en particular geométrico, pero podemos distinguir cuatro tipos de problemas, dos en la parte titulada Análisis determinada y otros dos en la de Análisis Indeterminada que no se encuentran en un apartado definido tras la teoría, sino que están intercalados entre esta.

Los problemas resueltos en la primera parte tienen como objetivo servir de introducción para nuevos conceptos, como es el caso de los relacionados con la interpretación de las soluciones negativas (SN, PRDT); o bien mostrar ejemplos de lo explicado en puntos anteriores. De este tipo son los problemas en los que muestra cómo construir las fórmulas de primer y segundo grado, o la construcción e interpretación de soluciones negativas (SN, PRDT).

En la sección II, dedicada a la *Análisis Indeterminada*, encontramos otros dos tipos de problemas, los primeros, que él denomina cuestiones preliminares, son problemas teóricos en los que obtiene las fórmulas para calcular la distancia entre dos puntos, o el ángulo que forman dos rectas, etc. (PRI, PRP, PRDI, PRAN). Los segundos son problemas en los que muestra cómo utilizar el método de resolución de problemas expuesto en la sección. (PRDT).

Tenemos por tanto cuatro tipos de problemas atendiendo a su fenomenología, se incluye el enunciado de cada uno de ellos y se presenta el proceso de solución de los que consideramos más representativos:

1. Para mostrar la construcción de las expresiones algebraicas (PRDT)

Tras explicar el objeto de la aplicación del Álgebra a la Geometría y cómo construir geométricamente las fórmulas algebraicas resuelve los ocho problemas que enunciamos a continuación. En los cuatro primeros obtiene la solución algebraica, pero no la construye -en algunos casos porque no es posible, como en el problema III en que calcula el área de triángulo en función de sus lados - es decir en ellos muestra ejemplos de la aplicación del Álgebra a la Geometría, pero no de la Geometría al Álgebra. En ellos tras el planteamiento geométrico el desarrollo es completamente algebraico, por lo que solo incluimos la resolución de los dos primeros.

> *I. Propongamos hallar la magnitud de la perpendicular bajada desde el ángulo recto sobre la base de un triángulo rectángulo (p.14).*
>
> *II. Averiguar la relación que tienen los tres lados a, b, c, de un triángulo con el radio r del círculo circunscrito (p.16).*
>
> *III. Hallar la superficie del triángulo ABC conocidos los tres lados a, b, c (p.20).*
>
> *IV. Hallar el volumen del trozo de Pirámide que resulta de cortarla por un plano inclinado á la base (p.21).*

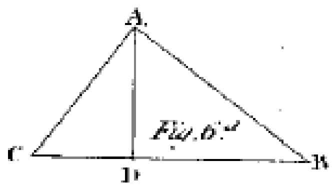
En los siguientes sí construye la solución.

> *V. Dividir una recta AC en dos partes que tengan entre sí la razón de n á m* (p.23).
>
> *VI. Inscribir un cuadrado en el triángulo SOR* (p.23).
>
> *VII. Construir un cuadrado que tenga sus cuatro ángulos sobre el semicírculo MNO, y sobre el diámetro MO.*
>
> *VIII. Dadas las paralelas AE, BF, y su distancia AB tirar una secante EF de modo que* $AC = \frac{1}{2}AB$ *sea media proporcional entre los segmentos AE, BF.*

De ellos solo incluimos la solución del problema V, por ser el primero en el que construye la solución geométricamente. Los problemas VI y VIII son también interesantes, el primero porque en él se muestra claramente esta aplicación del Álgebra a la Geometría, y el segundo porque en él aparecen soluciones indeterminadas, es decir es un problema con infinitas soluciones. Les hacemos mención, pero no incluimos su resolución por estar resueltos por otros autores e incluida esta en el análisis de la obra correspondiente, como explicaremos en cada caso.

I. Propongámonos hallar la magnitud de la perpendicular bajada desde el ángulo recto sobre la base de un triángulo rectángulo, cuyos tres lados son conocidos.

Mostramos la solución de este problema, que es muy sencillo porque con él muestra y explica la manera de aplicar el Álgebra a la Geometría:



Llamemos *a, b, c* los lados, y *x* la perpendicular; de los triángulos semejantes *ABC, ACD*, resulta *a:b::c:x* luego $x = \frac{bc}{a}$ es 4ª proporcional á los tres lados, propiedad conocida. Para tener su valor,

> substituiríamos en la formula los de *a, b* y *c*, expresados en números (…). (p. 15)

Vemos que solo calcula el valor de la incógnita, pero no la construye, puesto que el problema consiste en calcular "la magnitud" de la altura.

Comenta que la resolución del problema no ha presentado dificultad por la sencillez de la figura y por la del razonamiento para sacar la ecuación, pero dice que el método es general y lo expone:

> Se supone resuelta la cuestión, y después de representar por letras todas las partes del sistema, se examina que relaciones tienen entre sí, se averiguan las propiedades que de ellas resultan, y comparadas con las de otras figuras conocidas, se traducen al lenguaje algebraico; las ecuaciones en que estén cifradas, resueltas por las reglas generales del Álgebra conducirán á los valores de las incógnitas, que sino estuvieren expresados directamente en números, será preciso para determinarlos emplear alguna de las construcciones explicadas.(...)
> Tres son pues las cosas á que hay qué atender, plantear las ecuaciones, resolverlas, y construir los resultados. (p. 15)

Continúa diciendo que de las tres la primera es la más difícil porque "solo depende de la sagacidad del calculador, y de su destreza y tino adquiridos con la práctica el escoger aquellas combinaciones que con mas facilidad conducen al resultado y dan fórmulas mas generales y sencillas (sic)" (p. 16). Para mostrar esto resuelve el mismo problema utilizando los teoremas de la altura y Pitágoras.

II. Averiguar la relación que tienen los tres lados *a, b, c,* de un triángulo con el radió *r* del círculo circunscripto.

Este problema es un ejemplo de aplicación del Álgebra a la Geometría en que no es necesario construir la solución geométrica. Del resultado inicial obtiene tres aplicaciones, de las cuales mostraremos el desarrollo de la tercera, ya que las otras consisten simplemente en desarrollos algebraicos de la fórmula obtenida inicialmente.

Para resolverlo utiliza que en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia se cumple que el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos. Obsérvese el lenguaje geométrico utilizado, dice el "rectángulo de las diagonales", para expresar el producto de estas.

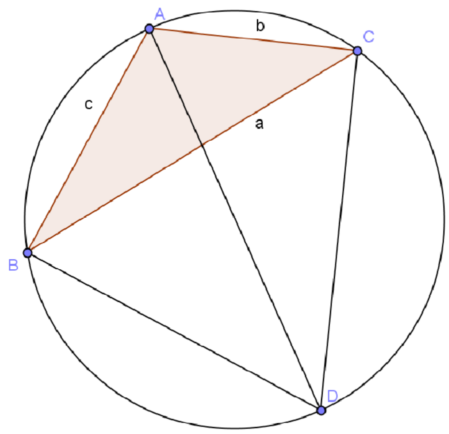


Figura 23: Reproducción fig. 7ª

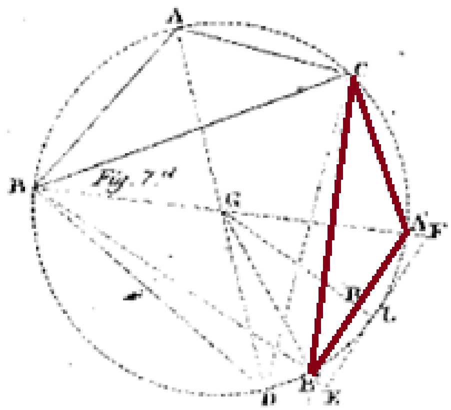
> Sea el triángulo el *ABC;* sabemos que en todo cuadrilátero inscripto el rectángulo de las diagonales es igual á la suma de los que se forman con los lados opuestos; asi tirando el diámetro *AD*, y las *BD, DC*, será
>
> $$2ra = b \times BD + c \times CD,$$
>
> los triángulos rectángulos *ACD, ABD* dan $BD = \sqrt{4r^2 - c^2}, CD = \sqrt{4r^2 - b^2}$ luego
>
> $2ra = b\sqrt{4r^2 - c^2} + c\sqrt{4r^2 - b^2}$ ...(I)

> ecuación por la que podemos determinar una de las cuatro cantidades *a, b, c, r* conociendo las otras tres, y de la qué vamos á hacer algunas aplicaciones (p. 17).

La primera aplicación que obtiene de este resultado es la de sacar r en función de los lados, y estudiar cuánto vale en los casos en que el triángulo es isósceles, equilátero o rectángulo. Obtiene $r = \frac{abc}{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}}$ (p.18). Si el triángulo es isósceles con b=c, queda $r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, de donde obtiene $ar = b\sqrt{4r^2-b^2}$, (p. 18) igualdad que utilizará posteriormente como veremos.

La segunda aplicación consiste en, dadas las cuerdas de dos arcos, obtener la de su suma o diferencia (p.18).

Como tercera aplicación resuelve el siguiente problema, en el que muestra una de las utilidades del Álgebra, que es la de obtener con un solo razonamiento todas las soluciones posibles de un problema.



3ª... Dado el lado de un polígono regular inscripto de número par de lados, hallar el correspondiente al de subduplo y duplo número.

Para obtener el lado del subduplo, es decir el lado *B'C* conocido *A'C*, considera el triángulo isósceles *A'B'C,* y utiliza el resultado obtenido en la primera aplicación que hemos visto antes, de donde resulta (p. 18) $B'C = a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2-b^2}$. Seguidamente obtiene el lado del polígono con doble de lados, para ello supone *B'C* conocido y saca *A'C*=*b*, despejándolo de la ecuación anterior, obteniendo: $b = \pm\sqrt{2r^2 \pm r\sqrt{4r^2-a^2}}$ . . . .(3). (p. 19), y da la interpretación de las diferentes soluciones:

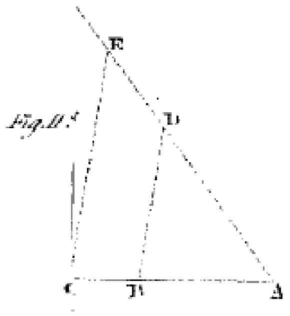
> (…) el signo superior sirve para el lado *BC*=*BB'*, como puede verse determinándole directamente; el inferior da A'C. Este resultado es una prueba de la fecundidad del Álgebra, porque en efecto de la generalidad de sus caracteres deben resultar á un mismo tiempo los lados de los triángulos *BB'C, A'B'C* que son isósceles, y tienen por base común la *B'C*. (p. 19)

Finaliza el problema utilizando el último resultado obtenido para realizar una aproximación del número π, calculando sucesivamente la longitud de los lados de los hexágonos inscrito y circunscrito, de los dodecágonos y de los dos polígonos de 96 lados, obteniendo una aproximación de 3'14....Señala que "Arquímedes llegó por estos medios a $C = \frac{22}{7}$ del diámetro y Adriano Mezio a $C = \frac{355}{113}$", y que posteriormente se dará una aproximación mejor utilizando logaritmos. (p.20)

V. Dividir una recta AC en dos partes que tengan entre sí la razón de *n* á *m* (p.23)

Como hemos dicho mostramos este problema, aunque es muy sencillo, por ser el primero en el que construye la solución geométricamente.

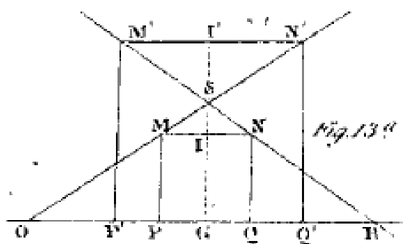
Comienza suponiendo resuelto el problema, como ha explicado, y aplicando semejanza de triángulos obtiene la solución algebraica:



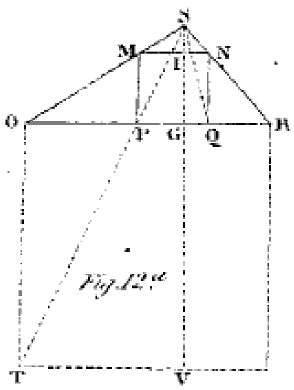
PRA: Supongamos resuelto el Problema; sean *AB, BC* las partes pedidas, *AC=a,* y *BC=x*: la condición propuesta estará cifrada en la ecuación $\frac{x}{a-x}=\frac{m}{n}$, y $\frac{am}{m+n}=x$. Si *m>n*, sera *x > a- x*; Se pudiera tambien haber tomado por incógnita el segmento mayor.

RG: La expresión $\frac{am}{m+n}=x$ se construye por una 4ª proporcional, tirando de cualquier modo la *AE*, y tomando desde las partes *AD, DE* en la razón de *n* á *m*, bien sean éstas dadas en lineas ó números; la *DB* paralela á *CE* dará el punto de división pedido (p.23).

VI. Inscribir un cuadrado en el triángulo SOR.

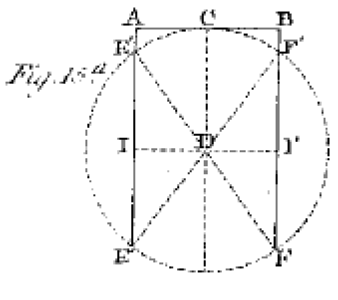


Este problema se encuentra resuelto en prácticamente todas las obras analizadas, en particular en el *Tratado* de Vallejo, quien resuelve el problema algebraicamente igual que Zorraquín, aunque la construcción geométrica es distinta.



Por ello no insertamos aquí dicha solución, pero sí señalaremos que este autor termina diciendo que el problema se puede enunciar de forma más general como "construir un cuadrado que tenga sus cuatro ángulos sobre tres rectas que se cortan de dos en dos". Problema que admite dos soluciones, el cuadrado que se acaba de hallar *PQNM* y el *P'Q'N'M'* de la figura 13ª (p.24).

VIII. Dadas las paralelas *AE', BF,* y su distancia *AB* tirar una secante *EF* de modo que $AC=\frac{1}{2}AB$ sea media proporcional entre los segmentos *AE, BF*.



En este caso muestra un ejemplo de problema con solución indeterminada, pero que construye. Este problema es resuelto exactamente igual por Alberto Lista, y su resolución se encuentra recogida en el análisis de la obra de este autor.

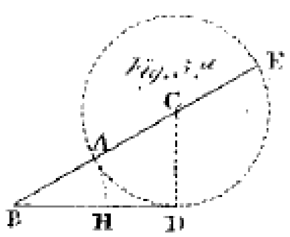
2. Para explicar cómo construir e interpretar las soluciones negativas.

En el capítulo en el que trata los signos de las soluciones de una ecuación propone y resuelve diez problemas en los que muestra diferentes aspectos de la teoría que ha explicado anteriormente:

> *IX. Dividir la recta DB en media y extrema razón.*
>
> *X. Propongámonos hallar el segmento DC formado por la perpendicular AD bajada sobre la base BC de un triángulo desde el ángulo opuesto.*
>
> *XI. Dada una cuerda "BC, y el diámetro F A qué es perpendicular á ella-, tirar desde el punto A otra cuerda, de modo que la parte HK interceptada entre la Iª y la circunferencia sea de una longitud dada. (p.32)*
>
> *XII. Conocida la cuerda AB hallar sobre la circunferencia un punto E cuyas distancias EB, EA, tengan entre sí la razón n.*
>
> *XIII. Dividir un triángulo ABC en dos partes que estén en la razón de m á n.*
>
> *XIV. Dado un polígono, construir otro que le sea semejante estando sus áreas en la razón de m á n.*
>
> *Se pide determinar sobre la recta AB un punto C con ciertas condiciones.*
>
> *XV. Dadas dos paralelas BB', DD' y un punto A, tirar por él una oblicua de modo que la parte BD comprendida entre aquellas sea de una longitud dada=c.*
>
> *XVI. Dados dos puntos A, B, y una recta DD', describir un círculo que pasando por aquellos sea tangente á esta.*
>
> *XVII. Dada una recta AB hallar en que punto de ella se verifica que el producto de sus distancias á los A, B es igual á una cantidad dada m^2.*

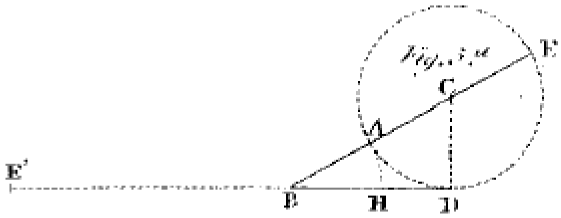
Incluimos la solución de los problemas IX, XI, XIII, XV y XVII. En el problema IX veremos una forma de interpretar las soluciones negativas. En los problemas XI y XII nos muestra cómo obtener las magnitudes que son inversas para, haciendo los cambios necesarios, obtener la ecuación alternativa cuyas soluciones son las que aparecen como negativas con el planteamiento inicial, tal y como ha mostrado en la teoría. En el problema XV hace un cambio en el punto que toma como origen para la construcción de las soluciones, de manera que la ecuación obtenida con el nuevo planteamiento tenga todas sus soluciones positivas, y por último en el problema XVII aparecen soluciones complejas.

IX. Dividir la recta DB en media y extrema razón.



Toma *DB=p* y *BH=x*. En su resolución aparece la ecuación de segundo grado $x^2 = p(p - x)$ de soluciones $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 + p^2\right)}$ que dice que se construyen igual que uno de los casos explicados en el apartado correspondiente

Explica que la solución positiva, *BH,* es la de la ecuación planteada, pero para interpretar la negativa añade que necesita la teoría que va a exponer, es decir, utiliza este problema para introducir la teoría que desarrolla acerca de las soluciones negativas de una ecuación (p.25). Tras haberla explicado (ver análisis de contenido), interpreta la solución negativa, en principio no válida, como indicador de que el problema forma parte de otro más general (SN).



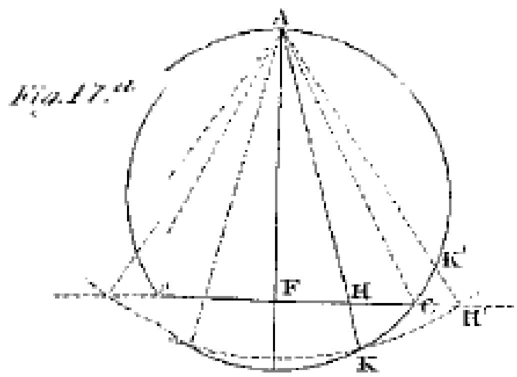
> En el Problema IX por ej.se tiene por 2ª raíz *x"=-BE*; mudando en la ecuación primitiva el signo de *x* será $x^2 = p(p+x)$, y *x= BE* media proporcional entre *BD*, y *BD + BE*; luego si añadimos á *DB* la *BE* como en *BE'* quedará la *DE'* dividida en media y extrema razón en *B*, problema indicado por la raiz negativa. (p.45)

Y amplía el problema:

> Supongamos que dada la *DE'* se pide situar sobre ella dos puntos *B,* y *H* tales que su distancia *BH* sea media proporcional entre las *BD, HD* de los puntos que se buscan al origen D; haciendo *BH=x*, *BD=y* resultará $x^2 = y(y-x)$ que anuncia una cuestión indeterminada, y dará las dos soluciones dichas, cuando hagamos *x=BH* ó*=BE', y=BD* ó *=DE'* cantidades conocidas. Tenemos pues en una sola fórmula la solución de varias cuestiones que consideradas de otro modo hubieran necesitado una fórmula particular cada una. (p.45)

XI. Dada una cuerda *BC,* y el diámetro *FA* qué es perpendicular á ella, tirar desde el punto *A* otra cuerda, de modo que la parte *HK* interceptada entre la Iª y la circunferencia sea de una longitud dada. (p.32)

Este problema, que también es resuelto por otros autores, aunque no de forma idéntica, muestra un ejemplo de cómo "girar" el sistema para buscar las magnitudes que se hacen inversas y así interpretar las soluciones negativas, tal como explica en la teoría sobre este tema. (SN)



Comienza, como siempre, suponiendo el problema resuelto y hace el planteamiento geométrico del que saca la ecuación a resolver. Utiliza una propiedad de las cuerdas que dice que si dos cuerdas se interceptan en el interior de una circunferencia, el producto de los segmentos determinados en una es igual al producto de los segmentos determinados en la otra. Considera, en este caso las cuerdas *AK* y *BC* que se cortan en *H,* y toma como incógnita *AH=z.*

PG: Sean *AH=z, BC*[17]*=a, HK=b, AF=c*. Sabemos que

[17] Obsérvese que el punto *B* no está en el dibujo.

$$AH \times HK = BH \times HC = (BF + FH)(BF - FH)$$

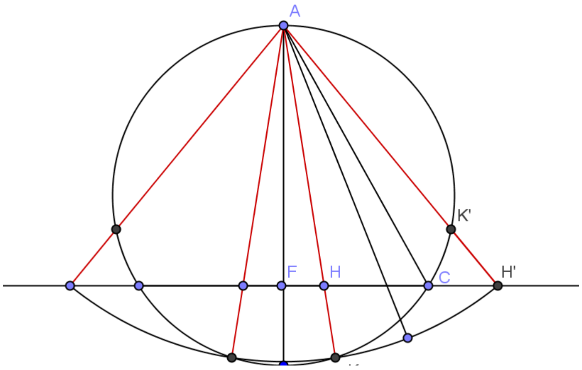


Figura 24: AH=z, BC=a, HK=b, AF=c

PRA: ó $bz = \frac{1}{4}a^2 - FH^2$; pero $FH^2 = z^2 - c^2$, luego

$$bz = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + c^2 \ldots. \quad \text{(I)}$$

$$z = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}.$$

RG: La Iª solución es positiva; se comprende y construye sin dificultad.

La 2ª es negativa y prescindiendo del signo se tiene $z = \frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}$ Como ya hemos dicho, para obtener la magnitud que se hace inversa "gira" el sistema observando qué diferencia se hace cero, tal como explica en la teoría:

> Para descubrir el nuevo sistema que puede darla, hagamos girar *AH* hacia *H';* los puntos *H, K* se van acercando uno á otro hasta el *C* en que coinciden y *HK=0*, lo que no sucede con *a, c, z*, es decir, que solo *b* puede ser inversa; (...) (p.32)

Y comprueba que en efecto lo es:

> (...) y nos convenceremos de que en efecto lo es, atendiendo á que en el sistema primitivo era *AK=z+ b*, y en el transformado debe ser *AK'=z-b*, Luego en la ecuación fundamental (I) cambiaremos el signo de *b*, ó el de *z* que es lo mismo, y es claro qua asi rectificada da con signo positivo el 2º valor de *z*. (p.32)

El autor no hace el cambio que dice, pero en efecto si cambiamos *b* por *-b* en la ecuación (I) obtenemos $-bz = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + c^2$, cuyas soluciones son $z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}$, la positiva es, en valor absoluto, igual a la negativa de la ecuación (I).

Obsérvese la belleza del razonamiento, que por otra parte nos da una solución geométrica que a priori no habríamos considerado al encontrarse el punto H, en que queda dividida la cuerda tal como se pide, fuera de la circunferencia.

Seguidamente da la interpretación geométrica de esta nueva solución.

> Este debe ser *AH'* =*AK*, porque según su expresión analítica excede al 1° que es *AH* en la cantidad b, y ademas las condiciones del Problema no precisan á tomarla dentro del círculo; por la misma razón será *K' H'* =*b*. (p.33)

Termina diciendo que si a la izquierda se hace la misma construcción se obtienen otras dos soluciones válidas, por lo que busca la ecuación que de las cuatro. Para ello hace *FH*=*y*, de donde $y^2 = z^2 - c^2$, y obtiene $y = \pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2\right)}\right)^2 - c^2}$, que contiene las cuatro soluciones. (p. 33)

XII. Conocida la cuerda *AB* hallar sobre la circunferencia un punto *E* cuyas distancias *EB, EA*, tengan entre sí la razón *n*.

En este problema muestra un ejemplo en que la solución negativa no es válida:

PG: Toma $BE = x, \frac{EA}{EB} = n, AB = b$, aplica el teorema del coseno en el triángulo AEB y obtiene

PRA: $b^2 = x^2(1 + n^2 - 2n\cos E)$(I) y de ahí $x = \frac{b}{\pm\sqrt{1+n^2-2n\cos E}}$ (2) (p. 33) e interpreta cada una de las soluciones llegando a la conclusión de que la negativa no es válida:

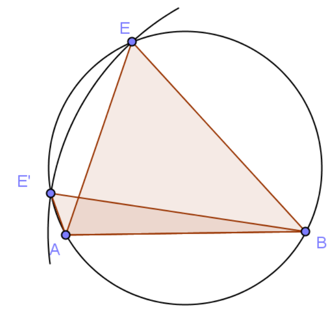


Figura 25 : Interpretación geométrica de la solución negativa.

> El valor positivo pertenece á *EB*. Para interpretar el negativo, si algo significa, con un radio *EB* desde el punto *B* descríbase el arco *EE'*, y el *E'* en que corte á la circunferencia deberá representarle por medio de *BE'*; pero esto es un absurdo pues que seria preciso que fuese $\frac{AE' < EA}{BE' = BE} = n$ por la condición del Problema. Ademas en el caso de que *x* pase por el centro como *BC* el arco descripto con este radio no vuelve á encontrar á la circunferencia; luego la raiz negativa es insignificante. (pp. 33-34)

Pero continúa diciendo que el problema tiene cuatro soluciones, dos en el “segmento mayor *AEB* y dos en el menor *AeB*” (p. 34), es decir en los dos arco en que divide a la circunferencia el segmento *AB*, y busca, como en el problema anterior, una ecuación que dé las cuatro soluciones. Considera en este caso el punto *e*, “pues que las condiciones no dicen si debe estar arriba o abaxo (sic)” (p. 34). Teniendo en cuenta que los ángulos *e* y *E* son suplementarios, de donde *cose* = - *cose*, obtiene $x = \frac{b}{\pm\sqrt{1+n^2+2n\cos E}} = Be$ ... (3), y señala que las soluciones válidas “están reunidas en” $x = \frac{b}{\sqrt{1+n^2 \pm 2n\cos E}}$ ... (4) (p. 34).

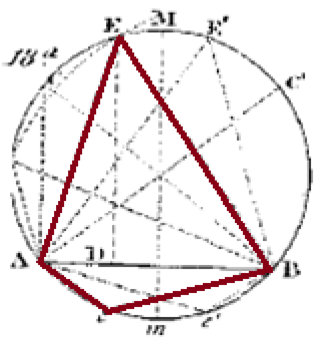


Figura 26: Reproducción de la fig. 18ª para los casos en que se toma E o e.

Ahí solo se tienen dos soluciones, las otras dos las obtiene tomando los puntos *E'* y *e'*, que se encuentran simétricos a *E* y *e* respecto al diámetro *Mm*, (p.34) e indica que estas no pueden salir de la fórmula (4), pues en ella se ha tomado $\frac{EA}{EB} = \frac{eA}{eB} = n$ y en este nuevo caso es $\frac{E"A}{E"B} = \frac{1}{n}$ que le lleva a $x = \frac{bn}{\sqrt{1+n^2 \pm 2n\cos E}}$ (5) (p.35).

A continuación resuelve el problema utilizando un resultado del problema II, pero tampoco obtiene una ecuación que dé todas las soluciones por lo que concluye:

> Este último Problema basta para probar, *que por el grado de la ecuación no se puede venir en conocimiento del número de soluciones de una cuestión; que depende de la elección de incógnita el que éste sea mayor ó menor qué aquel; qué aun cuando en algunos casos uno y otro sean iguales, no se encuentran todas las soluciones por los valores que resultan para la incógnita, pues entre ellos puede haber algunos insignificantes, y en fin que para conocerlas todas es preciso variar la figura, y compararla con todas sus indirectas sin alterar en los datos mas que la posición*.(p.36)

Como vemos Zorraquín utiliza el concepto de figuras indirectas para buscar todas las soluciones de una ecuación, sean positivas o negativas, ya que, como señala, el número de soluciones y el grado de la ecuación no tienen por qué coincidir, por lo que este no nos garantiza el haberlas encontrado todas. En este problema, por ejemplo, las únicas ecuaciones que se obtienen son de grado dos, pero existen cuatro soluciones.

Esta forma de obrar se ha perdido en nuestros días, se pueden buscar todas las soluciones posibles de un problema, pero no se utiliza el concepto de figuras indirectas para hacerlo.

XIII. Dividir un triángulo *ABC* en dos partes que estén en la razón de *m* á *n*. (p.36)

En este problema resuelve diversos casos que salen del enunciado principal, de los cuales solo analizaremos el caso 4º, en el que trata de una manera distinta a los problemas anteriores el modo de averiguar si las soluciones obtenidas son válidas. También podemos ver aquí cómo aplica el criterio que había explicado para determinar si una cantidad es inversa, viendo si al cambiar de posición en un momento determinado su valor es cero o ∞.

Los casos que estudia son:

Dividir un triángulo ABC en dos partes que estén en la razón de *m* á *n*.

1.- Por una perpendicular *FE* á la base *AB*.

2.- Por una recta tirada desde *C* á la base.

3.- Por una paralela á la base (que incluye el problema XIV)

4.- Por una línea *DF* tirada por el punto *D*.

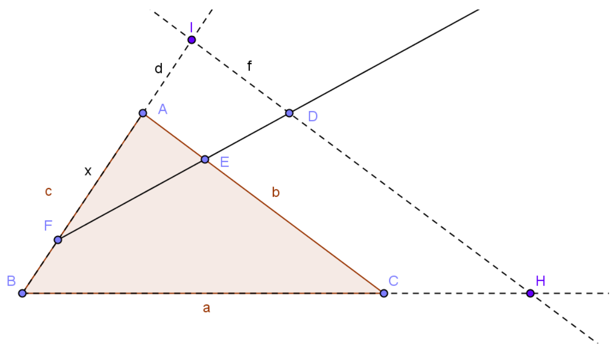
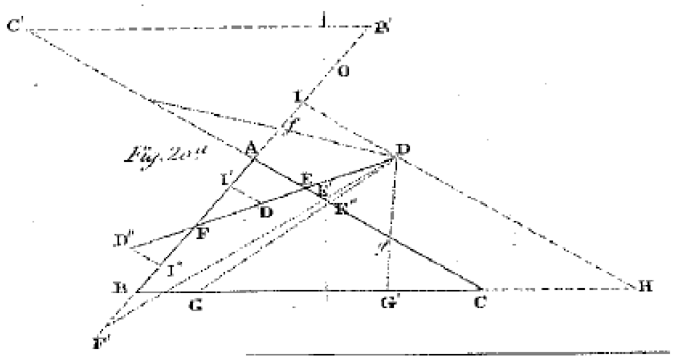


Figura 27: Reproducción figura 20ª. Problema XIII. Caso 4.

El caso 4º es aquel en que la división se realiza mediante “una línea DF tirada por el punto D” (p.38), como hemos dicho. No indica si el punto es interior o exterior al triángulo, pero en la figura, *D* es exterior.

Para resolverlo utiliza la relación que hay entre el área de un triángulo, dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos (en este caso sería $\acute{A}rea\ de\ AFE = m = \frac{x \cdot AE \cdot senA}{2}$, Figura 27); y la semejanza de triángulos.

PG: Toma *AC=b, AB=c, DI=f* sobre *IH*, paralela a *AC* por el punto dado, *AI=d* y *AF=x;* el área del triángulo *AFE=m*, y la del cuadrilátero *EFCB=n*. De los triángulos



AEF, *ABC* obtiene $\frac{m}{m+n} = \frac{xAE}{bc}$ utilizando la propiedad citada arriba, y de los semejantes *FAE* y *FDI*, $AE = \frac{fx}{x+d}$, y de esas dos $\frac{m}{m+n} = \frac{fx^2}{bc(x+d)}$ ó $bcm(x+d) = (m+n)fx^2$ ... (I) y

$$x = \frac{mbc}{2f(m+n)} \pm \sqrt{\frac{m^2b^2c^2}{4f^2(m+n)^2} + \frac{mbcd}{f(m+n)}} \text{ (p.38).}$$

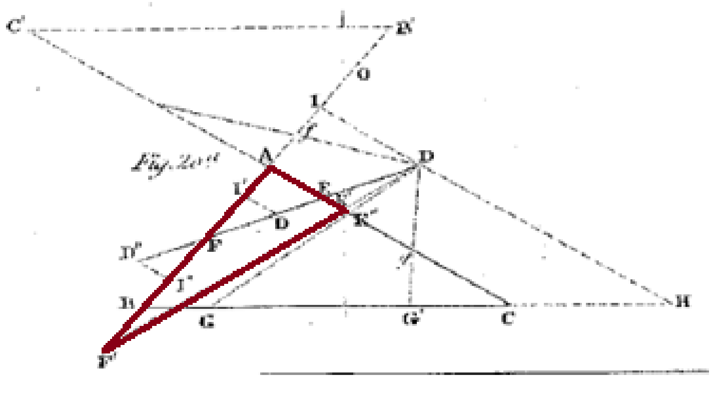


Figura 28:fig. 20ª en el caso de la solución positiva

Para ver si las soluciones son válidas toma valores concretos: *c=4, b=6, f=2, d=1*, y supone que las dos partes en que se divide el triángulo son iguales, es decir *m=n.* En estos supuestos obtiene *x'=6'87..., x''=-0,87=AF*, valores que no resuelven el problema (*x'* es mayor que el lado sobre el que se toma). Explica por qué el positivo no es válido y de dónde viene el error:

> Ninguno de los dos resuelve el Problema pues por el 1° que es *AF'* vemos que el triángulo *AE'F'* es igual á $\frac{ABC}{2}$ pero no que éste quede dividido en dos 2 partes iguales, como se pedía. El error está en el supuesto que contiene la ecuación (I) de

> que la parte *AEF* debe ser un triangulo siendo evidente que en muchas ocasiones será un cuadrilátero. (p.38)

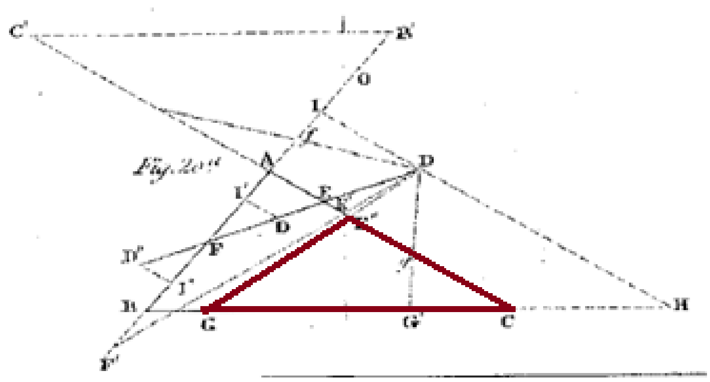


Figura 29:fig. 20ª, para x=GC

Añade que la interpretación de la solución negativa la dará más tarde y resuelve el problema tomando como incógnita *GC*, en vez de *AF*, siendo

$$x = \frac{mabc}{2(m+a)(bc+bd-fc)}$$

"la solución verdadera"[18](p. 40). Concluye de esto que este ejemplo muestra una vez más que la resolución del problema depende del acierto de la elección de las incógnitas.

Y hace aún una observación más, que él considera más importante:

> (…) y es que puede haber para la incógnita valores reales y positivos, deducidos de ecuaciones fundamentales en que se hallen traducidas exactamente condiciones sin contradicción entre sí, que sin embargo no den una verdadera solución, pues para que esto se verifique es indispensable que el valor que se quiere aplicar á la cuestión la satisfaga particular y directamente como está propuesta, lo que no sucede en la Iª raíz deducida de la ecuación primitiva. (p.40)

Añade que también se puede dar el caso de obtener dos soluciones positivas y que solo una de ellas sea válida, "proviniendo la otra de las transformaciones analíticas"(p.40).

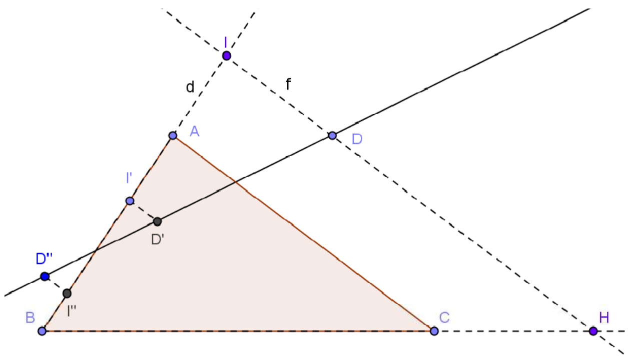


Figura 30: Reproducción fig. 20ª en el caso en que D sea interior al triángulo

Muestra un ejemplo más de cómo transformar la ecuación de partida, y aplica, como hemos dicho, el criterio para conocer si una cantidad es inversa. Analiza para ello un nuevo caso del problema, aquel en que el punto *D* esté dentro del triángulo (*D'* en la figura). Para poder utilizar la ecuación (I) "mueve" el sistema haciendo pasar *I* a *I'*, viendo que *AI* es una de las cantidades inversas:

> Tirada la *D'I'* paralela á *AC*, en el movimiento del sistema el punto *I* llegará á coincidir con *A*, y *AI* pasará por cero para volver á aparecer en *AI'* lo que da indicios de que puede ser inversa; (...) (p.41)

y comprueba que en efecto lo es pues *AI=IB-AB* y *AI'=AB-BI'*, y añade que las demás cantidades nunca llegan a ser 0 o ∞ -por lo que no pueden ser inversas- con lo que basta cambiar el signo de *d* para obtener la ecuación propia de este caso. Para *D* obtuvo

[18] No incluimos la resolución porque es análoga a la anterior, pero con distinta incógnita. Para comprobar que es válida toma unos valores concretos como en el caso anterior y esta vez la positiva sí vale.

$bcm(x+d)=(m+n)fx^2$ (I), para D', sin más que cambiar en ella el signo de d obtiene la ecuación correspondiente $bcm(x-d)=(m+n)fx^2$ (p. 41). Y hace lo mismo cambiando D a la posición de D'', concluyendo de todo ello una de las ventajas de la aplicación del Álgebra a la Geometría:

> Sin necesidad de considerar las cantidades inversas hubiéramos podido deducir las tres fórmulas anteriores, resolviendo cada cuestión en particular; pero por la generalidad del análisis logra evitar semejante trabajo el que poseyendo bien su lenguage sabe descubrir en una formula todas las aplicaciones de que es susceptible. (p.41)

Vemos, como señalábamos en la parte del análisis de contenido, que Zorraquín no considera los problemas como únicos, sino como un conjunto de problemas resolubles con una misma ecuación sin más que cambiar de signo en la misma la cantidad que es *inversa*, y es por ello por lo que defiende este tipo de Geometría, como acabamos de ver.

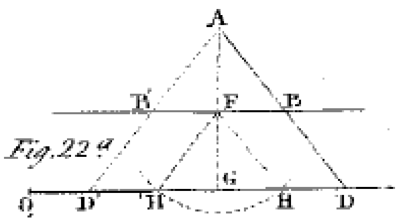
Seguidamente introduce unos nuevos problemas de los que dice que “por el papel que harán en lo sucesivo, merecen ser examinados en particular”. Estos son problemas en los que la solución negativa debe ser construida sobre una recta.

El primero de ellos es: ***Se pide determinar sobre la recta AB un punto C con ciertas condiciones***. Este problema, que él mismo no considera como tal puesto que no sigue la numeración de los demás, lo hemos desarrollado en el apartado del análisis de contenido ya que sirve para explicar la construcción de las soluciones negativas en el caso antes mencionado.

En los problemas XV y XVI muestra construcciones de este tipo. Desarrollamos el primero de ellos.

XV. Dadas dos paralelas *BB', DD'* y un punto *A*, tirar por él una oblicua de modo que la parte *BD* comprendida entre aquellas sea de una longitud dada=*c*.

Este problema lo resuelve de la misma forma Alberto Lista y hemos incluido su resolución de forma mucho más detallada en el análisis de su obra, pero lo incluimos aquí también ya que Zorraquín lo pone como ejemplo de problema en que un cambio del punto que se toma como origen hace que todas las soluciones sean positivas.



PG: Tirada la perpendicular *AG* y haciendo *AG=a*, *FG=b*, la incógnita *GD=x*, los triángulos *ADG*, *ABF* dan $AD=\frac{ac}{b}$; pero también es $AD=\sqrt{(a^2+x^2)}$, (...)

PRA: (...) luego $\frac{ac}{b}=\sqrt{(a^2+x^2)}$ y $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{(c^2-b^2)}$.

> **RG:** Los dos valores de *x* son iguales y de signos contrarios, por lo que habrá que colocarlos á derecha é izquierda de *G*: la construcción es la siguiente; desde *F* como centro y con un radio$=c$ se describirá el arco *HH'*; las *FH, FH'* son iguales á $\sqrt{(c^2 - b^2)}$, y las *AD, AD'* paralelas á las I^{as} dan las dos soluciones. (p. 43)

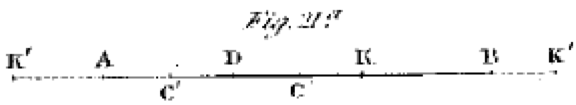
Como hemos dicho resuelve el problema haciendo un cambio del punto O:

> (…) traslademosle (el origen) para el XV sobre la recta *DD'* á otro punto, siendo $GO=d$ cantidad conocida; respecto de este nuevo origen se cuentan ahora las distancias, es decir que *DO=x', D'O=x''*. Repitiendo el cálculo será $\sqrt{(a^2+(x-d)^2)} = \frac{ac}{b}$ y $x = d \pm \frac{a}{b}\sqrt{(c^2 - b^2)}$, cuyas dos raíces son positivas, y dan las dos soluciones. (p. 44)

Termina la teoría sobre los signos de las soluciones de una ecuación con un problema en el que aparecen soluciones complejas, de las que también da la interpretación geométrica y las diferencia de las negativas:

XVII. Dada una recta *AB* hallar en que punto de ella se verifica que el producto de sus distancias á los *A, B* es igual á una cantidad dada m^2.

> **PG:** Sea *K* el punto pedido, *AB=a, AK= x, BK=a-x;*



> **PRA:** la condición es $x(a-x)=m^2$.... (I) y $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)}$: si $m > \frac{1}{2}a$, las raíces son imaginarias (…) (p. 47)

Una vez que ha obtenido las raíces imaginarias, las interpreta geométricamente y busca una nueva ecuación que las dé reales:

> **RG:** y el punto no puede estar entré A y B;
>
> **PG2:** (...) supongámosle en *K'*,
>
> **PRA2:** y será $x(x-a)=m^2$....(2) ; $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + m^2\right)}$; (p. 47)

En este caso ya las raíces salen reales y explica por qué antes habíamos obtenido que el problema no tenía solución en ciertos casos diciendo que "el absurdo de la (I) provenía de la contradicción entre la hipótesis del razonamiento y las condiciones del Problema" (p. 47). Obsérvese que esto es cierto si suponemos que utiliza el término recta *AB* en el sentido de segmento. Termina el problema, como siempre, explicando cómo se construyen las soluciones:

> **RG:** (...) los valores de *x* en la (2) se construyen como los de (3, n.14); el uno da el punto *K'* y el otro el *K''* tal que *AK''=-BK'*: mientras *x* represente las distancias del

punto á A los dos serán de signo contrario pues que deberán caer á uno y otro lado; (p.47)

Y por último explica la diferencia entre las soluciones negativas y las complejas:

Esté ej. hace evidente la diferencia qué hay entre las raíces negativas é imaginarias; para que éstas resuelvan la cuestión no basta mudar sencillamente el signo de la incógnita de + en -, es menester ademas reemplazarle por otro imaginario, ó mas bien, no es solo el signo de la incógnita el que hay que mudar, sino el de una potencia ó función suya mas ó menos complicada : así poniendo en el valor de x deducido de la (I) ó por mejor decir en esta misma -(a -x) por +(a- x) hemos hallado la (2) , y transformada de este modo hemos buscado su significación. (p.48)

3. Para obtener fórmulas generales (ER, PRD, PRAN)

Los problemas que enunciamos a continuación no están numerados como tales, sino que aparecen como epígrafes de la teoría, aunque como veremos sí se enuncian como problemas, a pesar de ser resultados generales. La forma de resolverlos es muy similar a la actual por lo que sólo incluimos uno de ellos como ejemplo.

49. Hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados $(x',y'),(x'',y'')$. (p. 57)

50. Hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas dadas por sus ecuaciones y = ax+b, y = a'x + b'. (p.58)

51. Hallar la distancia entre dos puntos dados $(x',y'),(x'',y'')$. (p. 59)

52. Hallar el ángulo de dos rectas dadas por sus ecuaciones y=ax + b,

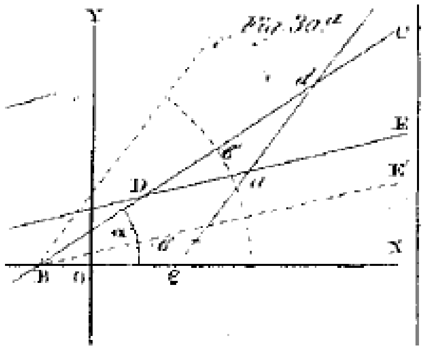
$y = ax + b'$. (p. 59)

53. Por un punto dado (x', y') tirar una recta que haga con otra un ángulo pedido y hallar la distancia entre aquel y el de intersección. (p. 61)

53. Por un punto dado *(x', y')* tirar una recta que haga con otra un ángulo pedido y hallar la distancia entre aquel y el de intersección. (p.61)

Comienza calculando la recta pedida:

La ecuación de la recta dada es *y=ax+b;* representaremos la otra por *y=a'x+b'*, ó porque debe pasar por *(x', y'), y'=a'x'+b';* restando se tiene $y - y' = a'(x - x')$.



Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los puntos anteriores obtiene la pendiente de la recta buscada en función de la de la recta dada y de la tangente del ángulo que deben formar ambas rectas:

Llamando m la tangente del ángulo que deben formar, haremos $m=\pm\frac{a-a'}{1+aa'}$ [19], que da $a'=\frac{a\mp m}{1\pm am}$; los signos se combinan tomando el 1° del numerador con el 1° del denominador, y el 2º con el 2º (p. 61)

y sustituyendo en la anterior obtiene la ecuación de la recta pedida: $y-y'=\frac{a\mp m}{1\pm am}(x-x')$.

Explica que hay dos soluciones dependiendo de los signos que se tomen, la recta *DE* y la *de*. (fig. 30) (La recta dada es la *BC* de la figura).

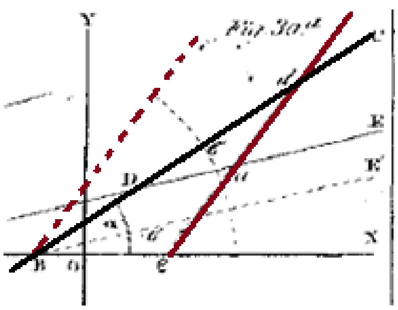


Figura 31: Reproducción de la fig.30ª

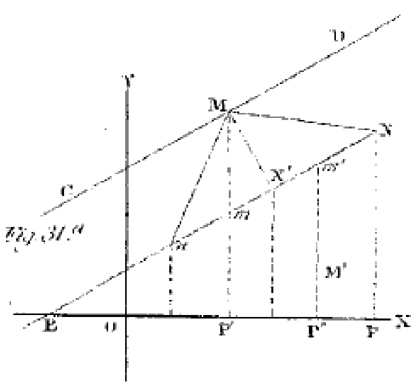
(…) para esta (*de*) se tiene $a'=\frac{a+m}{1-am}$, tangente de la suma de dos ángulos; asi es en efecto, porque *deX=e'BX=CBX+e'BC;* este último tiene por tangente *m.* (p. 61)

Utilizando esto obtiene las condiciones de paralelismo y perpendicularidad:

Si *1-am=0*, la suma de estos ángulos valdrá[20] 100º y la *de* será perpendicular a *OX.* Si se quiere que sea perpendicular á la otra pondremos $a'=-\frac{1}{a}$; con lo que $y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$... (16) (p. 62).

Por último haciendo *a'=a*, la ecuación tomará la forma
y-y' = a (x-x'). . . .(17)

cuando haya de ser paralela á la dada. (p.62)



Seguidamente resuelve la segunda parte del problema, relativa a la distancia entre el punto dado y el de intersección de las rectas. Calcula en primer lugar el caso general obteniendo que la distancia entre el punto dado (*M (x', y')*) y el de intersección de las dos rectas (*N* o *n*) es $D=\frac{y'-ax'-b}{m}\sqrt{\left(\frac{1+m^2}{1+a^2}\right)}$, donde *y=ax+b* es la recta dada, y *m* la tangente del ángulo que forman las rectas (p.62). Utiliza para ello la fórmula obtenida en el problema del punto 51.

Tras esto estudia el caso en que las rectas son perpendiculares calculando la distancia entre el punto dado y el de intersección de las dos rectas, o sea la distancia del punto al

[19] El ángulo que forman las dos rectas es igual al que forma la dada (*BC*)con el eje *OX* menos el que forma la que se busca (*DC* paralela a *BE'*) con el mismo eje, por tanto la tangente del ángulo que forman viene dada por la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos.

[20] Obsérvese que utiliza el sistema centesimal.

pie de la perpendicular, que es en realidad la distancia entre un punto y una recta, aunque no lo señala así en ningún momento. La ecuación obtenida es: $D=\frac{y'-ax'-b}{\pm\sqrt{(1+a^2)}}$ (p.63), en la que podemos observar que en vez de tomar valor absoluto en el numerador, compensa el signo de este con el del denominador, y señala: “Ponemos doble signo al denominador para abrazar las dos posiciones que puede tener el punto dado en M, ó M"”. (p.63)

Termina diciendo que para calcular la distancia de la recta al origen basta con hacer $x'=y'=0$, y en caso de que las rectas sean paralelas “se halla D=∞ como debe ser” (p.64).

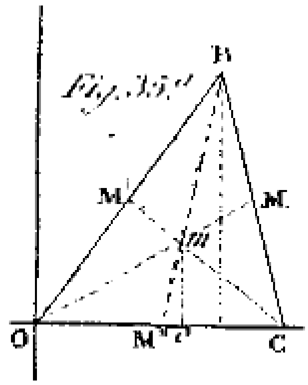
4. Para ejemplificar cómo resolver problemas mediante el uso de sistemas de coordenadas (PRAN, PRP, PRI)

Recogemos en este epígrafe nueve problemas en los que aplica los resultados obtenidos en los puntos anteriores. La forma de resolver estos problemas es muy similar a la actual, presentamos la resolución del problema IV como muestra de ello.

> *I. Dividir en dos partes iguales el ángulo de dos rectas OA, OB conocidas.* (p. 64)
>
> *II. Hallar las intersecciones con la MB tirada desde el vértice M de un triángulo al medio B de su base OP, de las rectas Om', Pm que salen de los ángulos P,O á los extremos m, m' de una paralela m m' á dicha base.*(p.65)
>
> *III. Hallar las intersecciones de las rectas que desde los tres vértices de un triángulo se tiren perpendicularmente á los lados opuestos.*(p.67)
>
> *IV. Hallar el punto de intersección de las rectas OM, CM', BM" tiradas desde los vértices de un triángulo al medio de los lados opuestos.*(p.67)
>
> *V. Hallar el lugar de las tres intersecciones determinadas en los dos Problemas anteriores.* (p.68)
>
> *VI. Hallar las intersecciones recíprocas de las rectas que dividen en partes iguales los ángulos de un triángulo ACO.* (p.68).
>
> *VII. Hallar la superficie de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices.*
>
> *VIII. Desde un punto dado M tirar una recta que corte el espacio angular NOX de modo que el triángulo NOX sea igual á una superficie dada s^2.* (p.71)
>
> *IX. Dados varios puntos M, M', M" ... en un plano por sus coordenadas rectangulares se pide hacer pasar entre ellos una recta DC de modo que la suma de las perpendiculares Mp, M'p' ... bajadas sobre ella desde los puntos situados de un lado sea igual á la suma de las M"p"... tiradas por el otro.*(p.73)

IV. Hallar el punto de intersección de las rectas *OM, CM', BM"* tiradas desde los vértices de un triángulo al medio de los lados opuestos (p.67)

Obsérvese que lo que hay que calcular es el baricentro, punto de corte de las medianas de un triángulo. Considera como origen de coordenadas uno de los vértices del triángulo, calcula las ecuaciones de las medianas y las corta, tal como haríamos actualmente.



Sean *x', y'* las coordenadas de *B*; las de *M* son $\frac{b+x'}{2},\frac{y'}{2}$ y las de *M'*, $\frac{x'}{2},\frac{y'}{2}$; la ecuación de *OM* sera

$$y=\frac{y'}{b+x'}x \text{ ... } (a),$$

la de *CM'* $\quad y=\frac{y'}{2b-x'}(x-b) \text{ ...}(b),$

para la *BM"* que pasa por medio de *OC* es

$$y=\frac{2y'}{2x'-b}\left(x-\frac{b}{2}\right) \text{.... } (c)$$

Combinando las (*b* y *c*) con la (*a*) se halla el mismo valor de $x=\frac{b+x'}{3}=Oo$ que introducido en la (*a*) da $y=\frac{y'}{3}=mo$. Asi pues la intersección *m* se verifica á los $\frac{2}{3}$ de cada lado contados desde los vértices. (p. 68)

4.2.4. Conclusiones:

Como hemos visto Zorraquín nos presenta dos maneras diferentes de aplicar el Álgebra a la Geometría, o lo que es lo mismo dos tipos de Geometría Analítica, como él mismo denomina. La expuesta en segundo lugar, en la que utiliza sistemas de coordenadas, es similar en conceptos y metodología a la que se desarrolla actualmente, al menos en su nivel elemental.

La primera sin embargo utiliza conceptos y una metodología perdida en nuestros tiempos, con un gran componente geométrico y mezclando los métodos analíticos con los de la Geometría Descriptiva. Esta forma de resolver los problemas de Geometría, próxima a la desarrollada por Descartes, también la vemos en otros autores. Pero Zorraquín la desarrolla, especialmente la parte dedicada a las soluciones negativas, con rigor, definiendo todos los conceptos de manera formal, hecho que no se da en otras obras. Como hemos visto esta parte está basada en la *Geometría de la posición* de Carnot. También es importante la cantidad de problemas que resuelve como ejemplo de las diferentes partes de la teoría que va desarrollando.

La idea de que las soluciones negativas que aparecen al resolver un problema son las de otro en el que varían las condiciones que se han supuesto en el planteamiento inicial aparece también en otros autores, por ejemplo Vallejo, como hemos visto. La idea es la misma en Zorraquín, pero este autor formaliza el concepto, y no propone cambiar el enunciado del problema, como otros, sino cambiar el signo de la solución para obtener directamente la ecuación que resuelve otro posible planteamiento del problema o de uno más general que no se consideró a priori. Esta concepción de las cantidades negativas, como hemos visto y el mismo autor señala es propia de Carnot, que tuvo gran influencia en la obra de Zorraquín.

De ahí la importancia de esta obra, junto con la de ser la primera que unificó las Geometrías Analítica y Descriptiva, punto que se hace efectivo en el estudio de la Geometría del espacio por lo que no queda patente en nuestro trabajo. Es muy razonable, por tanto, que se utilizara como texto en los estudios de Geometría Analítica, tanto en secundaria como en la Universidad, durante gran parte del siglo XIX.

4.3. Elementos de Matemáticas puras y mistas (sic) de Alberto Lista (1825)

4.3.1. Autor

Rodríguez de Lista y Aragón, Alberto, nació en Sevilla el 15 de octubre de 1775 (CA1). Pese a que el primer apellido del escritor es Rodriguez, Lista nunca lo utilizaría en sus escritos ("Alberto Lista", n.d.). Sus padres poseían una fábrica de telares de seda en Sevilla, técnica que aprendió en su adolescencia (CA6). En la Universidad de Sevilla estudió filosofía, teología y cánones, graduándose de bachiller en las dos primeras facultades (Pérez, 1848). Su primera formación científica la recibió en Sevilla en el Seminario Hispalense y en el Colegio de San Hermenegildo, regentado por la Sociedad Económica de Amigos del País. Profundizó en sus conocimientos matemáticos en la Escuela de Matemáticas de esta sociedad entre 1788 y 1790 (Ausejo, n.d.a), donde fue nombrado profesor de matemáticas a los quince años (Pérez, 1848), comenzando así su exitosa carrera como profesor. En 1796 ocupó la cátedra de Matemáticas en el Colegio de Náutica de San Telmo (Sevilla), en 1803 obtuvo por oposición la cátedra de Filosofía en el colegio de San Isidoro; en 1806 ocupó la cátedra de Humanidades en la Sociedad Económica de Amigos del País y en 1807 fue nombrado catedrático de Retórica y Poética en la Universidad de Sevilla, desempeñando algunas de esas cátedras simultáneamente (Pérez, 1848) (CA3).

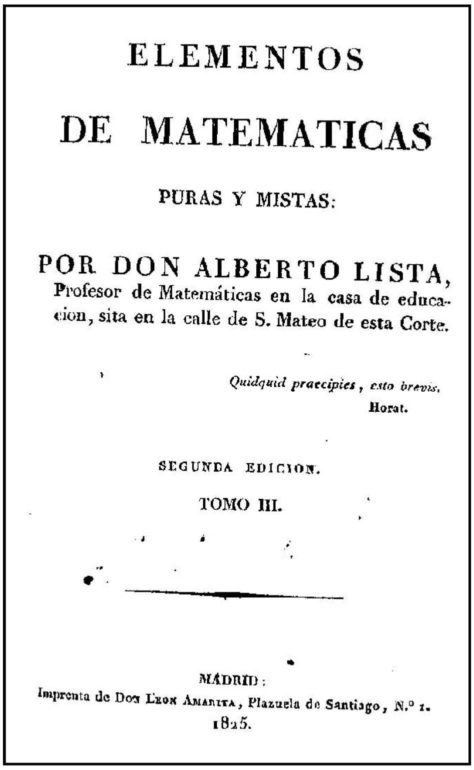
En 1803 se hizo sacerdote. En esta misma fecha comienza su colaboración como poeta y escritor en periódicos y revistas, que mantuvo hasta el comienzo de la Guerra de la Independencia. Desde comienzos de la contienda y hasta 1810 colabora en periódicos de carácter político afectos al Gobierno patriota. Pero en 1810 los franceses entran en Sevilla y Lista se pone a su servicio. Su nueva adscripción le permite acceder a nuevos cargos -como ser nombrado catedrático de Humanidades, encargado por la prefectura de cuestiones literarias, redactor de la Gaceta de Sevilla, colaborador de Soult-y asumir tareas como la de traducir a Moliére (Ausejo, n.d.a). Cuando la guerra concluye Lista debe exiliarse en Francia (CA6).

Regresó en 1817 instalándose en Pamplona, desde donde se trasladó a Bilbao en 1819 donde obtiene por oposición la cátedra de Matemáticas del Consulado de dicha ciudad (CA3). Allí publica *Tratado elemental de Aritmética, Tratado elemental de Algebra, Tratado elemental de Geometría* (1819) (Ausejo, n.d.a) (CA5).

En 1820, tras el triunfo de la revolución liberal, se desplazó a Madrid y, aunque se le excluye de la clase de Humanidades de los Estudios de San Isidro por su condición de afrancesado, se asocia con Juan Manuel Calleja para fundar una Casa de Educación para la que escribió unos *Elementos de Matemáticas Puras para el uso de la Casa de Educación, sita en la calle de San Mateo de esta Corte, continuación de los de aritmética, álgebra y geometría, escritos para el uso de la escuela de matemáticas del ilustre consulado de Bilbao* (1822) (Ausejo, n.d.a) (CA5). El Colegio fue clausurado a raíz de la restauración del régimen absolutista y Alberto Lista se ve obligado a emigrar de nuevo a Francia. Colabora en la *Gaceta de Bayona* y comienza a pasar la frontera colaborando en la *Estafeta de San Sebastián* (CA6).

En 1833 vuelve a la Corte como director de la *Gaceta de Madrid* y dirige *La Estrella*, periódico que defiende la causa isabelina. En esta etapa madrileña, de gran actividad política, social y cultural, participa en la Comisión redactora del Plan de estudios de la Universidad de Madrid y es nombrado catedrático de la Universidad Central (1836), cargo que pierde en 1838, trasladándose a Cádiz, donde durante cinco años es profesor del Colegio de San Felipe Neri y sigue publicando artículos y libros de crítica literaria (CA3). En 1843 se incorpora al claustro de la Universidad de Sevilla, en 1846 es canónigo de la catedral y en 1847 ingresa en la Academia de la Historia (CA3) (Ausejo, n.d.a). Fallece en Sevilla el 5 de octubre de 1848 (CA1) (Pérez, 1848).

4.3.2. Caracterización de la obra.



ELEMENTOS
DE MATEMATICAS
PURAS Y MISTAS:
POR DON ALBERTO LISTA,
Profesor de Matemáticas en la casa de educacion, sita en la calle de S. Mateo de esta Corte.

Quidquid praecipies, esto brevis.
Horat.

SEGUNDA EDICION.
TOMO III.

MADRID:
Imprenta de Don Leon Amarita, Plazuela de Santiago, N.º 1.
1825.

Figura 32: Carátula del libro. Elementos de Matemáticas puras y mistas. A. Lista

El libro analizado corresponde al Tomo 3 de la segunda edición de los *Elementos de Matemáticas Puras y Mistas* (sic) impresa en Madrid, en 1825 en la imprenta de Don León Amarita. (Figura 32). No ha sido posible localizar la primera edición de este tomo, que data de 1822 ((Ausejo, n.d.a).

El ejemplar utilizado se encuentra en la biblioteca de la Universidad de Salamanca, con referencia BG/13079y también se puede localizar en la Biblioteca Digital Hispánica (http://www.bne.es/es/Catalogos/BibliotecaDigitalHispanica/Inicio/) (RO).

El volumen consta de 202 páginas, de las cuales dedica 16 a la aplicación del Álgebra a la Geometría; y de 3 láminas con dibujos al final del tomo (CEO1).

El índice se encuentra al final del libro, tras finalizar los contenidos y antes de la página de erratas y de las láminas. En él solo inserta los títulos de las partes en que está dividida la obra, que son cuatro, y los "artículos" en que se divide cada una de las partes (CEO2).

ÍNDICE

De ellas sólo hemos analizado la parte de Aplicación del Álgebra a la Geometría, por esta razón solo incluimos los títulos de los capítulos en que está dividida esta parte.

Lista no cita a ningún autor a lo largo del texto analizado, así que no podemos saber qué obras o matemáticos influenciaron esta obra, pero teniendo en cuenta su biografía es muy posible que esté influido por los matemáticos franceses de la época (CEO4).

En cuanto a los objetivos de la obra y el nivel a que está destinada podemos decir que en el prólogo da a entender que está destinada a la enseñanza elemental (CEO3) pues dice:

> Hemos añadido también un gran número de problemas y proposiciones, que aunque no pertenezcan á la enseñanza elemental, serán muy á propósito para ejercitar á los alumnos en la investigación de las resoluciones, ya analíticas, ya gráficas.

Por otra parte este texto no aparece en ninguna lista de libros oficial pero según explica Vea (1995), con el título de *Elementos de matemáticas* -que es como se denominan las asignaturas de matemáticas en los primeros planes de estudios de segunda enseñanza- se publicaron multitud de libros de texto para este nivel educativo a lo largo del siglo XIX.
Por otra parte hasta el plan de estudios de 17 de septiembre de 1845, conocido como Plan Pidal, no se establecen oficialmente listas de texto, dejando libertad a los profesores para la elección de los mismos.
Por todo ello, y por la importancia del autor en su época, podemos suponer que este texto fue uno de los utilizados en la segunda enseñanza (CEO4).

4.3.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.3.3.1. Análisis de la estructura conceptual.

Como hemos dicho en el apartado relativo al índice (CEO2) la parte de la obra analizada, Aplicación del Álgebra á la Geometría, está dividida en tres capítulos titulados *Construcción de las fórmulas*, *Teoría de los signos en la análisis geométrica* y *Problemas geométricos de 1º y 2º grado*, respectivamente.

En el capítulo I da la definición de Aplicación del Álgebra a la Geometría, explica cómo obtener la solución analítica de un problema geométrico y analiza qué tipos de problemas se pueden resolver con este método (D). También define dimensión de una ecuación, ecuaciones homogéneas y heterogéneas y explica cómo convertir las segundas en las primeras (U). Pero gran parte del capítulo la dedica a la construcción geométrica de las expresiones algebraicas de hasta grado tres (E).

El capítulo II trata íntegramente de la interpretación de los signos en la Geometría Analítica (SN) y en el III se resuelven diez problemas que ejemplifican la teoría (PRDT). Veamos todo esto con más detalle.

1. Definiciones

Comienza el capítulo I dando la definición de aplicación del Álgebra a la Geometría, las partes de que “consta la solución analítica de un problema geométrico” y las ventajas del método que va a utilizar.

> I. Llámase *aplicación del álgebra á la geometría* la solución de los problemas geométricos por medio de ecuaciones algebraicas.
>
> 2. La solución analítica de un problema geométrico consta de cuatro partes: Iª, representar por letras los datos y las incógnitas: 2ª, poner el problema en ecuación, ya por las propiedades de la figura geométrica, ya por las condiciones del problema: 3º, despejar las incógnitas: 4ª construir las fórmulas, es decir, hacer las operaciones geométricas que indica el valor de la incógnita.
>
> 3. La ventaja de la solucion analítica es la seguridad que tiene el calculador de resolver el problema por medio de las ecuaciones, cuando seria contingente atinar con la solucion valiéndose de consideraciones puramente geométricas. Ademas la fórmula nos puede servir para hallar en números el valor de la incógnita, cuando los datos se dan en números. (p.121)

Es decir, una vez obtenida la solución por métodos algebraicos, la construye geométricamente, e indica los tipos de ecuaciones que podemos encontrarnos teniendo en cuenta que los problemas que queremos resolver son de la geometría elemental:

> 4. Las construcciones de la geometría elemental se hacen por medio de la línea recta y del círculo; y como las propiedades de estas dos líneas, demostradas en la geometría, solo producen ecuaciones de primero y segundo grado, se infiere que en la aplicación del álgebra á la geometría elemental solo se pueden construir fórmulas de primero y segundo grado. (p. 121)

Es por ello que mostrará cómo construir un polinomio, un valor fraccionario y un radical (E).

2. Construcción de expresiones algebraicas

Comienza con la construcción de los cocientes. Explica los diferentes casos posibles:

> 9. Construir un valor fraccionario.
> Hay varios casos. 1º, siendo los dos términos monomios. La fórmula más sencilla para este caso es $x=\frac{ab}{c}$; de donde *c:a::b:x*. Búsquese una cuarta proporcional á *c, a* y *b*, y dicha cuarta proporcional será el valor de *x*.(p.122)

Continúa con los casos $x=\frac{abc}{de}$ y $x=\frac{abdc}{efg}$ que reduce al caso anterior. Si $x=\frac{abdc}{efg}$, por ejemplo, hace $\frac{ab}{e}=k$, $\frac{cd}{f}=l$, con lo que se obtiene $x=\frac{kl}{g}$ y "se reduce el problema á buscar tres cuartas proporcionales". (p.123)

Y tras esto estudia varios casos en que el numerador o el denominador son polinomios. "Si el numerador es un polinomio, como $x=\frac{abc+def-ghi}{lm}$", se descompone en fracciones, y es $x=\frac{abc}{lm}+\frac{def}{lm}-\frac{ghi}{lm}$. "Se construye cada fracción aparte, y despues se suman ó restan las líneas que resulten". (p. 123)

Si $x=\frac{a^2-c^2}{b}$, descompone el numerador en factores: $x=\frac{(a-c)(a+c)}{b}$, y la construcción de x se reduce a la de una cuarta proporcional a *(a-c), (a+c)* y *b*.

En el caso en que lo sea el denominador:

> 12. Si el denominador es polinomio, se iguala á un monomio, cuyos factores sean todos conocidos menos uno. Por ejemplo, si $x=\frac{abc+def}{ab+cd}$, hago $ab+cd=ak$, de donde $k=b+\frac{cd}{a}$, que se sabe construir: el valor de x será $\frac{abc+def}{ak}=\frac{bc}{k}+\frac{def}{ak}$, que se sabe construir conocida la *k*. (p.123)

También explica cómo construir $x=\frac{abc^2+q^3h-m^3p}{q^2i-klq+cmd}$ y $x=\frac{abc^2-a^2b^2}{abc+c^3}$ reduciéndolos a los casos anteriores, por tanto se construyen mediante cuartas proporcionales. Es decir, Lista nos muestra que la construcción de una fracción se reduce a la de una cuarta proporcional entre tres valores, que pueden ser conocidos a priori, o que mediante cambios apropiados se pueden ir construyendo hasta la obtención de la variable que se desea calcular.

Tras esto estudia cómo se construyen los radicales de índice dos. Estas construcciones se reducen a tres casos: la construcción de una media proporcional entre tres factores, la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los dos catetos, o la de un cateto de un triángulo rectángulo del que se conocen el otro cateto y la hipotenusa.

> 13. Construir un radical.
>
> 1º. $x=\sqrt{ab}$ es una media proporcional entre *a* y *b*.
>
> 2º. $x=\sqrt{a^2+b^2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son *a* y *b*.
>
> 3º. $x=\sqrt{a^2-b^2}$ es un lado de de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es *a* y el otro lado *b*.

Y continúa explicando cómo se construyen radicales con radicandos más complejos.

> En las fórmulas complicadas se igualará la cantidad que está debajo del radical, al producto de dos factores, uno conocido y el otro desconocido, y se buscará una media proporcional entre ambos. (p. 124)

Muestra lo que acaba de explicar dando la construcción de $x=\sqrt{\dfrac{ab^2+cd^2}{b+c}}$, $x=\sqrt{ac-fg+mq+rd}$, $x=\sqrt{\left(a^2-f^2\dfrac{c^2+d^2}{ab+cd}\right)}$, $x=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2+d^2+...\right)}$ y $\sqrt{n}$. En el primer caso, $x=\sqrt{\dfrac{ab^2+cd^2}{b+c}}$, hace $\dfrac{ab^2+cd^2}{b+c}=ak$, de donde $k=\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{cd^2}{a(b+c)}$. "El valor de k se determina buscando una tercera y dos cuartas proporcionales. La media proporcional entre k y a es el valor de x".

Y en el último reduce el radicando a la construcción de las hipotenusas de diferentes triángulos rectángulos:

> 15. Ultimamente si $x=\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2+d^2+...\right)}$ hago $a^2+b^2=z^2$ (z es una hipotenusa): hago $z^2+c^2=y^2$ (y es otra hipotenusa), y resulta $x=\sqrt{\left(y^2+d^2+...\right)}$.
> En quedando debajo del radical dos cuadrados, *x* será una hipotenusa. (p. 124)

Los otros casos los resuelve de forma similar. En el caso particular de que el radicando sea un número natural la solución será una media proporcional entre el número dado y el 1:

> 16. $\sqrt{n}$ se puede construir buscando una media proporcional entre 1 y n; la expresión $\sqrt{2}$, ó buscando una media proporcional entre 1 y 2 ó la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados valgan 1 cada uno. (p. 124)

Obsérvese que en todos los casos indica qué construcciones han de hacerse, pero no cómo, es decir no lleva a cabo ninguna construcción de una tercera o cuarta proporcional o de un lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos. Estas construcciones las veremos en los problemas (PRDT) recogidos en el apartado de fenomenología.

En los puntos anteriores ha explicado cómo se construye "una distancia", es decir expresiones algebraicas de grado uno. Seguidamente trata los casos en que la expresión algebraica es de grado dos o tres. Como siempre, hace la interpretación geométrica de tales casos (que son un área y un volumen respectivamente), indica cómo se construyen y pone un ejemplo.

> 17. Toda espresion de dos dimensiones representa un área. Iguálese al cuadrado x^2, constrúyase la *x*, y el cuadrado construido sobre esta línea será =al área espresada por la fórmula.

> Ejemplo. La espresion $\frac{cd^2 + a^2c}{m+n}$, que representa un área, iguálese á x^2, y será $x = \sqrt{\frac{cd^2 + a^2c}{m+n}}$. Construye este valor de *x* y el cuadrado formado sobre él será= $\frac{cd^2 + a^2c}{m+n}$.
>
> 18. Ultimamente, si la espresion es el producto de tres factores, representará un volúmen, como $\frac{a^3b + cd^3}{m-n}$. Hallado el valor de *x*, ax^2 ó la espresion propuesta, representará un paralelepípedo, cuya altura es *a*, y cuya base es un cuadrado que tenga por lado á *x*. (p. 125)

Termina con una última apreciación:

> 19. Si *x* representa la razon de dos distancias, el quebrado que esprese su valor ha de tener tantas dimensiones en el numerador como en el denominado. (p. 125)

3. Ecuaciones homogéneas. Unidad

Antes de estas construcciones Lista nos dice que "las letras del cálculo representan distancias" (p.121), por lo que las ecuaciones deben ser homogéneas, y por tanto explica cómo convertir una ecuación heterogénea en homogénea utilizando el segmento unidad (U).

> 5. Si suponemos que todas las letras del cálculo representan distancias, la ecuacion debe ser homogénea, es decir, todos sus términos deben constar del mismo número de dimensiones ó factores literales; pues si la ecuacion fuera por ejemplo, $a=bx-c^3$, querria decir que una recta es igual á un rectángulo menos un cubo. (p.122)
>
> 6. Llámense ecuaciones heterogéneas aquellas cuyos términos no contienen igual número de factores literales, por haberse hecho alguno de ellos igual á la unidad. Para hacer homogénea una ecuacion heterogénea se hace =1 una letra, por ejemplo *r*, y se multiplican por sus potencias los términos que tengan menos dimensiones. Ejemplo. Si la ecuacion heterogénea es $a=bx-c^2m$hecha homogénea será $ar^2=brx-c^2m$. (p.122)

Utiliza el segmento unidad de forma implícita ya que en ninguno de los ejemplos propuestos en el último capítulo hace una transformación explícita de ecuación heterogénea a homogénea. Lo que sí hace es plantear siempre los problemas en términos de ecuaciones homogéneas, como veremos en los problemas analizados posteriormente y recogidos en la parte de fenomenología.

Además, como las soluciones algebraicas deben venir dadas por expresiones homogéneas, deduce cómo deben ser estas:

> 7. De aquí se infiere: 1º, que si *x* representa una distancia, y su valor algebraico es un polinomio, no puede ser otra cosa que la suma ó diferencia de varias líneas representadas por los términos del polinomio:2º, si el valor de *x* es fraccionario, debe tener en su numerador un factor mas que en su denominador, para que despejando de quebrados, resulte la ecuacion homogénea: 3º, si el valor de *x* es un radical de segundo grado, la cantidad que esté debajo debe tener dos factores, para que elevando al cuadrado ambos miembros, resulte la ecuación homogénea. (p. 122)

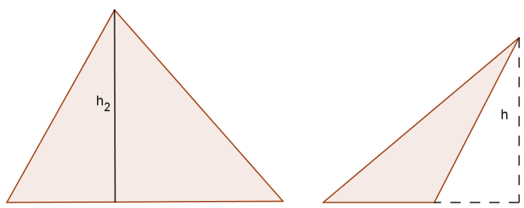
4. Soluciones negativas

Otro de los problemas que resultan de suponer que las letras representan distancias es el de las soluciones negativas, a las que dedica el segundo capítulo íntegramente. Para explicar la construcción e interpretación de las soluciones negativas introduce el concepto de figuras directas e indirectas (SN), que aplica de forma muy clara en varios de los problemas que resuelve en el último capítulo (PRDT).

> 20. Cuando dos figuras no se diferencian sino en el tamaño de sus partes, y estas estan colocadas ambas en un mismos sentido, se dice que las figuras estan en correlacion directa. La ecuacion que ligue entre sí las partes de dichas figuras, debe ser la misma para ambas; pues son casos particulares de una misma cuestion. (p. 125)

Parece que está hablando de figuras semejantes pero después pone un ejemplo en el que vemos que eso no es así.

> 21. Cuando dos figuras estan entre sí combinadas de tal manera, que una parte es en la una la suma de dos líneas, y en la otra es la diferencia de las mismas líneas, se dice que las figuras están en *correlacion indirecta*; y las ecuaciones, que las representen, deben diferenciarse en el signo de la línea, que es sumando en la una y substraendo en la otra. Las líneas que se añaden en una figura, y se restan en la otra, y que por consiguiente varian de signo en la ecuacion, se llaman *indirectas*. Para abreviar la frase, se suelen llamar las figuras directas ó indirectas segun su correlacion.
>
> Ejemplo. Comparando entre sí dos triángulos, cuyas alturas caigan una dentro y otra fuera, son indirectos, porque la distancia de un vértice A á la perpendicular en el uno es =á la base menos el otro segmento; y en el otro la distancia del vértice correspondiente á la perpendicular es igual á la base mas el otro segmento. Este segmento, que es subtraendo en la primera figura, y sumando en la segunda, es la cantidad indirecta. (p.126)



Nota: En el libro no hay figuras, las hemos insertado para una mejor comprensión del concepto.

Figura 33: Figuras indirectas

> 22. Una misma ecuacion puede servir para dos figuras indirectas, variando el signo, en la ecuacion hallada para la primera figura, á las cantidades que se hacen indirectas en la segunda. (p. 126)
>
> 23. Cuando de la resolucion de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita *x*, se muda el signo de esta en la ecuacion, y se tendrá la condicion á que satisface dicho valor negativo. Entonces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de *x*, hecho positivo, lo satisfaga. (Al.21.3º)[21] (p.126)

[21] Es una referencia que él inserta. Suponemos que Al. se refiere a álgebra.

Esto queda claramente explicado con el problema 3, que hemos recogido en el apartado de fenomenología con todo detalle.

Después trata del caso en que la solución deba construirse sobre una recta y a partir de un punto fijo en la misma:

109.

> 24. Si la x representa una parte, que se debe tomar sobre una recta desde un punto fijo, el valor negativo satisface al problema, tomándolo desde dicho punto fijo hácia la parte opuesta á aquella en que se hubiera tomado, si la x hubiera sido positiva (Fig. 109). Porque sea A el punto fijo, y sea la incógnita x la distancia de A á B, quedando este punto B determinado por una condicion establecida, sobre la cual se funda la ecuacion (2). Sea C otro punto cualquiera fijo tomado en la línea. Cuando este punto B está á la derecha de A, es $CB=CA+AB$: cuando está á la izquierda es $CB'=CA\text{-}AB'$: luego AB es cantidad indirecta, y su signo debe mudar de un caso para otro: luego el valor negativo de x debe interpretarse tomándolo á la izquierda del punto A.
> La análisis da negativo este valor, por la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion; pues en dicha figura hemos puesto el punto buscado B á la derecha de A, debiendo estar á la izquierda, segun lo ha hecho conocer el cálculo, dando negativo el valor de x. (p. 127)

Muestra un ejemplo de esto en el problema 2, que también se encuentra resuelto en el apartado de fenomenología.

Por último, al igual que vimos en la obra de Zorraquín, considera cómo varía una cantidad que pasa de directa a indirecta de forma continua.

> 25. *Toda cantidad variable, que de directa se hace indirecta, se hace igual á cero ó igual al infinito en el valor intermedio.*
>
> Dem. Si la cantidad x se hace indirecta, será sumando antes y subtrayendo despues; de modo que habrá dos cantidades a y b tales que $a=b+x$, cuando x es directa, y $a=b\text{-}x$, cuando es indirecta. En el primer caso $x=a\text{-}b$, en el 2º $x=b\text{-}a$: luego en el primer caso a era mayor que b, y en el 2º menor; luego en el intermedio ha habido un caso en que $a=b$, y $x=0$.
>
> Puede suceder que el valor de x se determine por una fórmula de esta especie $x=\dfrac{A}{a-b}$, y entonces en el caso intermedio en que $a=b$, será $x=\infty$: luego etc. (p. 127)

Vemos, por tanto que el tratamiento de las soluciones negativas que hace Lista está influenciado por la obra de Carnot, al igual que en el caso de Zorraquín, aunque en el caso de Lista el autor no lo cite en ningún momento.

El tratamiento dado a la Geometría Analítica por Alberto Lista acaba ahí. No obtiene ecuaciones de la recta, ni hace mención, ni implícita ni explícita al concepto de lugar geométrico de una ecuación, y por tanto no introduce sistemas de coordenadas ni conceptos tales como distancias o ángulos entre elementos del plano.

4.3.3.2. Sistemas de representación

En la obra de Lista sólo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico, que aparece en forma de expresiones algebraicas; y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente las construcciones geométricas.

Como decimos el lenguaje natural lo utiliza en definiciones, enunciados y resultados.
Lista define la Aplicación del Álgebra a la Geometría (D), ecuaciones homogéneas y heterogéneas (U) y figuras directas e indirectas (SN).
Los problemas están enunciados de forma literal (PRD), y todas las explicaciones de las construcciones geométricas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E).
También de forma literal explica cómo interpretar y construir las cantidades negativas (SN), o cómo utilizar la unidad para conseguir que una ecuación sea homogénea (U).
Señalar que utiliza el término recta para nombrar tanto a las rectas como a los segmentos, y el término círculo para nombrar a las circunferencias.

El lenguaje simbólico aparece a lo largo de todo el texto, especialmente en los capítulos II y III. En ellos utiliza continuamente lenguaje simbólico en forma de ecuaciones algebraicas o proporciones entre segmentos al explicar cómo se construyen geométricamente las diferentes expresiones algebraicas que nos podemos encontrar, o al resolver los problemas (E, PRD).

En cuanto a los gráficos (GR), que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, como ya hemos señalado (CEO1). El libro tiene tres láminas, pero los dibujos utilizados en la parte analizada aparecen en la tercera, que es la que insertamos a continuación.

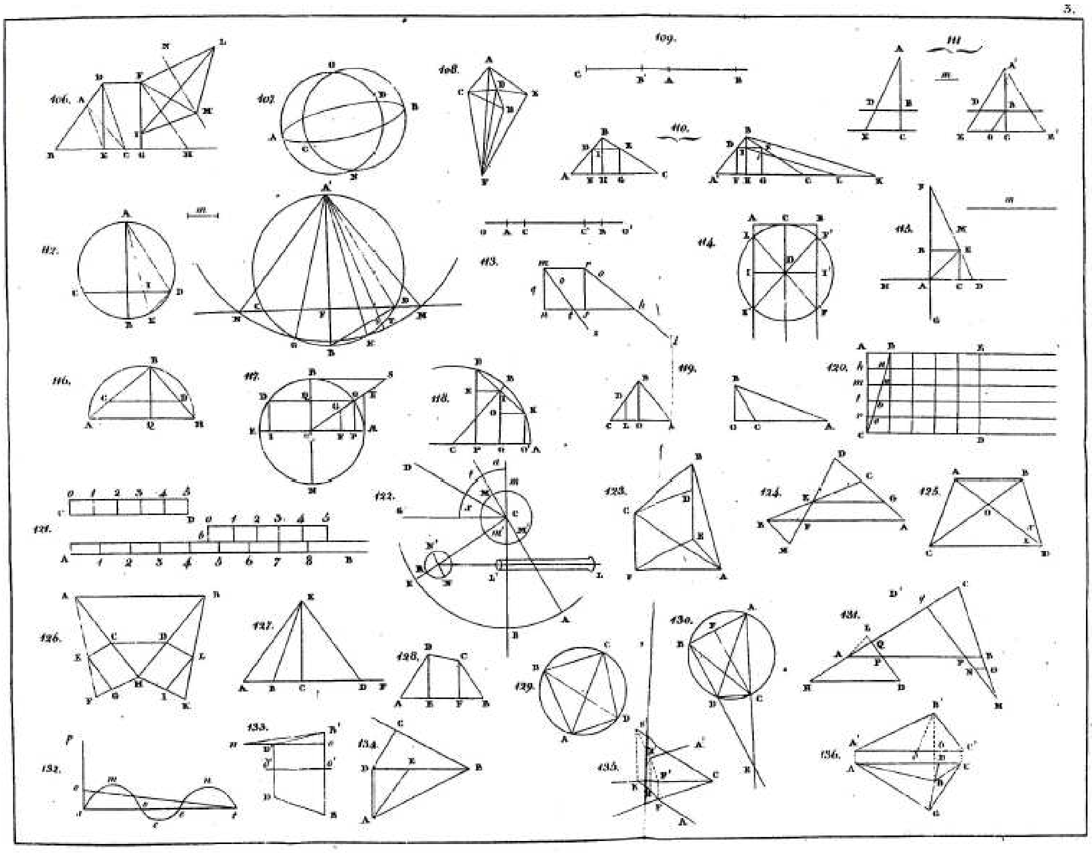


Figura 34: Lámina 3ª. Elementos de Matemáticas puras y mistas. A. Lista

4.3.3.3. Fenomenología

Todos los problemas resueltos por Alberto Lista son problemas geométricos de solución determinada (PRDT), es decir se pretende obtener una solución concreta a ese problema, excepto en el problema V. Con ellos se ejemplifica la teoría explicada en los capítulos anteriores aunque en algunos casos se muestran maneras alternativas de hacer la construcción geométrica de forma "más elegante" utilizando propiedades geométricas conocidas.

Así la construcción de cocientes se utiliza en los problemas 1, 6 y 7; la de un radical en 2, 3 y 4 y en estos mismos problemas aparecen soluciones negativas que se interpretan y construyen de forma exhaustiva.

Por otra parte en los problemas 4 y 10 vemos como el enunciado del problema se expresa en forma de ecuación homogénea, de una manera que no haríamos en la actualidad.

En los problemas 5 y 10, sin embargo, indica la construcción geométrica de la solución por los métodos generales que ha mostrado anteriormente, pero también de una forma más elegante utilizando propiedades geométricas de las figuras con las que está trabajando.

En el problema 8 vemos un ejemplo del planteamiento de un problema en términos de ecuaciones homogéneas.

Por último en el problema 9 muestra un ejemplo de un problema en el espacio que es reducible a otro en el plano, y que por tanto se sabe resolver.

En cualquier caso todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático y en particular geométrico.

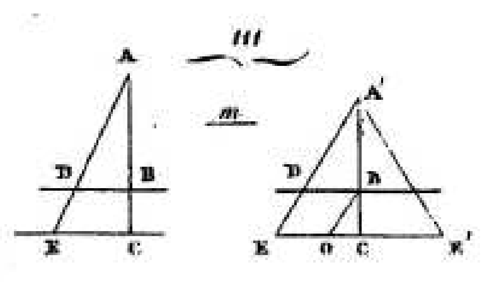
> Iº. Inscribir un cuadrado en un triángulo dado. (p. 127)
>
> II. Dadas dos rectas paralelas y un punto, tirar por él una recta tal que su parte interceptada entre las paralelas sea igual á una recta[22]. (p.128)
>
> III. Dado un diámetro y una cuerda perpendicular á él, tirar desde el estremo del diámetro otra cuerda tal, que su parte comprendida entre la primera cuerda y su arco sea igual á una recta dada (m). (p.129)
>
> IV. Señalar en una recta un punto tal, que sus distancias a dos puntos dados formen una rectángulo igual a un cuadrado dado q^2. (p. 130)
>
> V. Dadas dos paralelas y su perpendicular, tirar una secante tal, que la mitad de la perpendicular sea media proporcional entre las partes de las paralelas comprendidas entre la perpendicular y la secante. (p. 131)
>
> VI Inscribir en un triángulo una recta dada paralelamente á un lado. (p. 132)
>
> VII. Inscribir entre los lados de un ángulo recto una recta dada, que pase por un punto dado equidistante de los dos lados del triángulo.(p.132)
>
> VIII. Hallar dos rectas, dada la suma de sus cuadrados y el área del rectángulo que forman. (p. 134)
>
> IX. Hallar el sector esférico, cuyo cono es equivalente en volumen al segmento. (p.135)
>
> X. Dado un círculo tirar en él una cuerda, cuyos segmentos esten en la razón dada de *m:n*. (p.135)

Incluimos la solución de todos los problemas, excepto las de los números 1 -que es resuelto exactamente igual por Vallejo, y número 8, que se encuentra resuelto en el análisis de la obra de Gómez Santa María.

PROBLEMAS RESUELTOS

El proceso que sigue para resolver un problema es siempre el mismo: lo supone resuelto y a partir de ahí desarrolla los cuatro pasos que ha explicado en el primer artículo.

Problema 2: Dadas dos rectas paralelas y un punto, tirar por él una recta tal que su parte interceptada entre las paralelas sea igual á una recta *m*. (Quiere decir segmento) (p.128)



En este problema veremos un ejemplo de construcción de una solución negativa y de un radical.

Los datos son las rectas *DB* y *EC* y el punto *A*. Considera el problema resuelto y aplica

[22] Quiere decir segmento.

el teorema de Tales (aunque él no lo nombra) en la figura considerada (Fig. 111), obteniendo una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $x=CE$. Dicha ecuación tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa, y como hemos señalado construye ambas:

Como decimos supone el problema resuelto siendo *AE* la recta pedida con lo que *DE=m*, y toma *AC=a, BC=b*, y *CE=x*, incógnita del problema.

PG: Aplicando el teorema de Tales en la figura se obtiene la proporción $\frac{AC}{CB}=\frac{AE}{DE}$,…

PRA: …de la que se obtiene $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{m}$ sustituyendo cada segmento por su longitud y teniendo en cuenta que $AE=\sqrt{(a^2+x^2)}$, por ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y x. Resolviendo la ecuación, resulta $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{(m^2-b^2)}$.

RG: Para obtener la solución se debe construir primeramente el radical $\sqrt{(m^2-b^2)}$ que "es el cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es *m*, y el otro cateto es *b*"; y una vez hallado este radical se construirá *x* teniendo en cuenta que *x* "es la cuarta proporcional á *b*, *a* y al radical". (p.128)

Explica cómo se ha de construir la solución negativa basándose en lo visto en el capítulo II (SN):

> El valor negativo de *x* se interpreta (24), tomando hácia la parte contraria *CE'=CE*, y tirando la *A'E'*, esta recta dará otra solucion del problema. (p. 129)

En el dibujo en el que construye la solución llama *A'* al punto dado, en vez de *A.* Esto lo hace en todos los problemas, para diferenciar los dibujos que sirven para plantear el problema de los que son la solución del mismo.

Veamos cómo construye las soluciones: en primer lugar, como hemos dicho, construye el radical, para ello toma una circunferencia de centro *B* y radio *m,* y el segmento *CO* así obtenido es el radical buscado, como se observa en la figura 5.

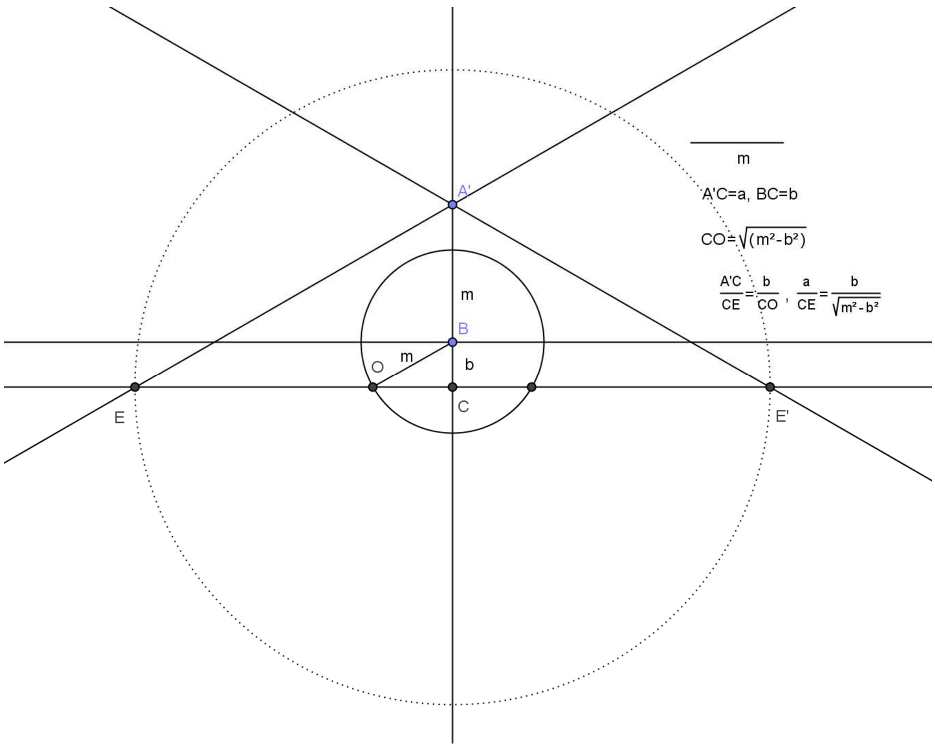
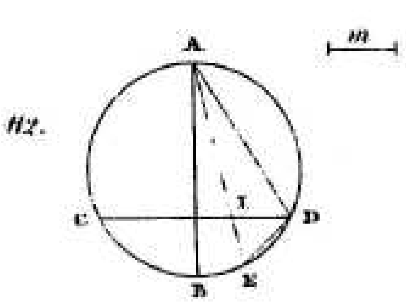


Figura 35: Problema 2. Construcción de las soluciones

Una vez construido el radical se hace lo mismo con x tomando la paralela al segmento OB que pasa por A', con lo que se obtienen dos triángulos semejantes y de ellos la proporción $\frac{a}{CE} = \frac{b}{\sqrt{(m^2 - b^2)}}$, de donde se tiene que CE es el segmento buscado, y por tanto la recta $A'E$ una solución del problema. Otra solución se obtiene tomando, como ha indicado, tomando el valor CE' en sentido contrario al CE, con lo que la recta $A'E'$ también es solución.

Problema 3: Dado un diámetro y una cuerda perpendicular á él, tirar desde el estremo del diámetro otra cuerda tal, que su parte comprendida entre la primera cuerda y su arco sea igual á una recta dada (*m*).



En este problema veremos otro ejemplo de construcción e interpretación de una solución negativa y de un radical.

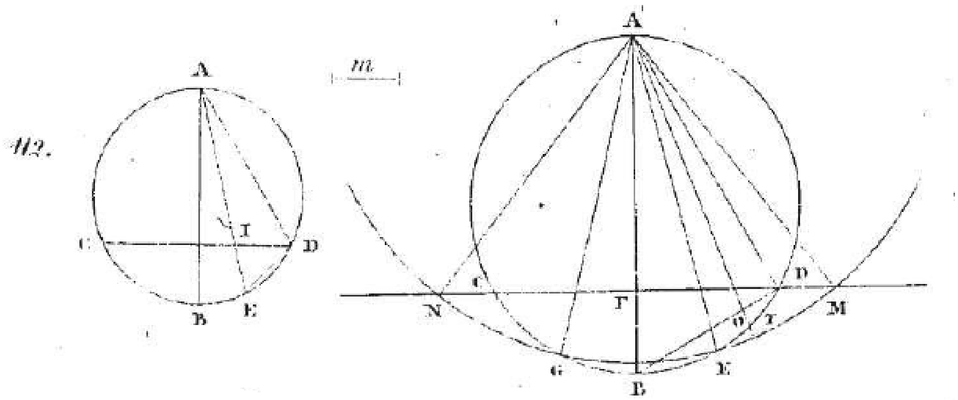
Para su resolución supone el problema resuelto siendo AE (fig. 112)la recta pedida, por lo que el segmento $IE=m$ por hipótesis. Tomado como incógnitas $AE=x$, $AI=u$ y aplicando semejanza de triángulos obtiene un sistema de dos ecuaciones, una de ellas de segundo grado, con dos soluciones, una de ellas negativa tanto para x como para u. Como ya hemos dicho construye e interpreta tanto las soluciones positivas como las negativas. Veámoslo con detalle:

PG: Los datos son el diámetro *AB* y la cuerda *CD*, y supone el problema resuelto siendo *AE* la cuerda pedida, por lo que *IE=m*.

Toma *AD=a, AE=x, AI=u*, de donde se tiene *x-u=m.*

Demuestra que los triángulos *ADE* y *AID* son semejantes obteniendo de ellos la proporción $\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AI}$.

PRA:O $\frac{x}{a}=\frac{a}{u}$; de donde $xu=a^2$.Con esta ecuación y la anterior forma el sistema $\begin{cases} xu=a^2 \\ x-u=m \end{cases}$ que tiene como soluciones: $u=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+a^2\right)}$,y $x=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+a^2\right)}$. Los valores superiores de *x* y *u* son positivos, los dos inferiores negativos[23]. (p. 129)



RG: Primero construye el valor positivo de la *x* (Figura 36):

> Construyamos primero el valor positivo de *x*. Sea *A'B* el diámetro, *CD* la cuerda: tiro *A'D* y *DB*, que forman ángulo recto. Tomo $DO=\frac{1}{2}m$: tiro la hipotenusa *A'O,* que será igual $\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+a^2\right)}$.
>
> Prolóngola, hasta que la prolongacion $TO=\frac{1}{2}m$. Será *A'T* el valor de *x*. Hago centro en *A'* con él, y describo un círculo. Si este corta al dado en dos puntos, *E* y *G*, tirando las *A'E, A'G*, estas darán dos soluciones del problema. Se ve, pues, que un solo valor de la incógnita puede dar mas de una solucion. (p. 130)

[23] Nos referimos a valores superiores/inferiores a aquellos que se obtienen tomando el signo superior/inferior del ± que aparece en la fórmula.

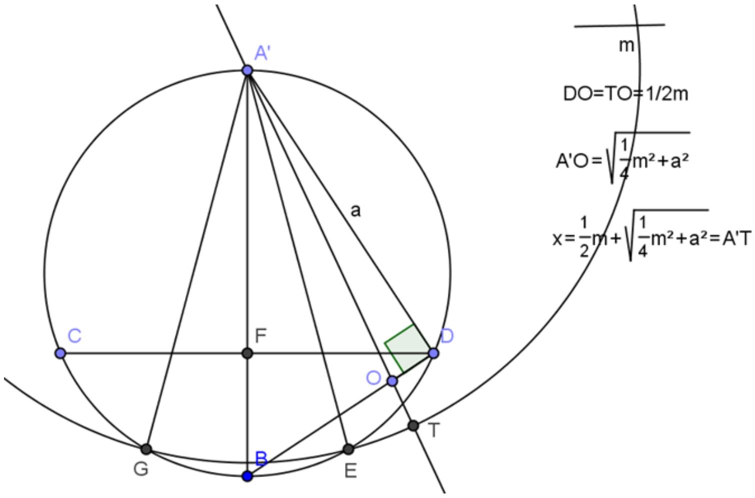


Figura 36: Construcción del valor positivo de x

Por último interpreta los valores negativos de *x*, aplicando paso a paso lo expresado en el punto 23:

> Vamos a interpretar los valores negativos de *x* y de *u*. Haciendo ambas incógnitas negativas en las ecuaciones del problema, $xu=a^2$ no se altera; pero x-u=m, se reduce á u-x =m lo que prueba 1º que la *m* es la línea que se hace indirecta; pues era x =u+m, y ahora es =u-m. (p. 130)

Es decir, cambia de signo los valores de *x* y *u* para hacerlos positivos y poderlos construir, y observa los cambios que esto produce en las ecuaciones originales, viendo que líneas pasan de ser directas a indirectas, en este caso *m*, que habrá que "restar" a *u* en vez de sumarla, es decir que habrá que construirla en sentido contrario al que se tomó en el caso de las soluciones positivas.

La forma de trabajar no es igual a la de Zorraquín, aunque ambos consideran el concepto de figuras indirectas. Zorraquín "giraba el sistema" para averiguar qué cantidades eran indirectas y cambiarlas después de signo en la ecuación obtenida inicialmente para obtener una nueva. Lista hace lo contrario, cambia de signo las soluciones negativas para ver cómo afecta ese cambio a las condiciones iniciales y así obtener la cantidad que es indirecta.

Además de esta conclusión saca una segunda, consecuencia de la primera:

> 2º Que ahora es $u>x$, y por tanto que la cuerda pedida debe cortar al círculo antes que á la cuerda *CD*. (p.130)

Tengamos en cuenta que *u* es la distancia entre el extremo del diámetro y el punto de corte de la cuerda solución con la cuerda dada, mientras que *x* es la distancia entre el mismo extremo del diámetro y el punto de corte de la cuerda solución y la circunferencia, por lo que ahora el segmento comprendido entre la cuerda y la circunferencia será exterior a esta y no interior, de ahí la obtención de la solución negativa, aparentemente absurda: en el dibujo que nos sirvió para realizar el planteamiento del problema habíamos supuesto que este segmento era interior. Vemos aquí un ejemplo de la explicación que da en el capítulo II de la existencia de soluciones negativas, que él justificaba diciendo que se han obtenido por "la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion"(p. 127).

Tras los razonamientos anteriores pasa a construir la solución negativa (**Figura 37**):

> Observando que el valor negativo de *u* es igual al positivo de *x*, se ve que prolongando la cuerda *CD* y el arco *EG* hasta que se encuentren en *M* y *N*, y tirando la *A'M*, *A'N*, estas serán iguales al valor negativo de *u*, y darán otras dos soluciones del problema:(…) (p.130)

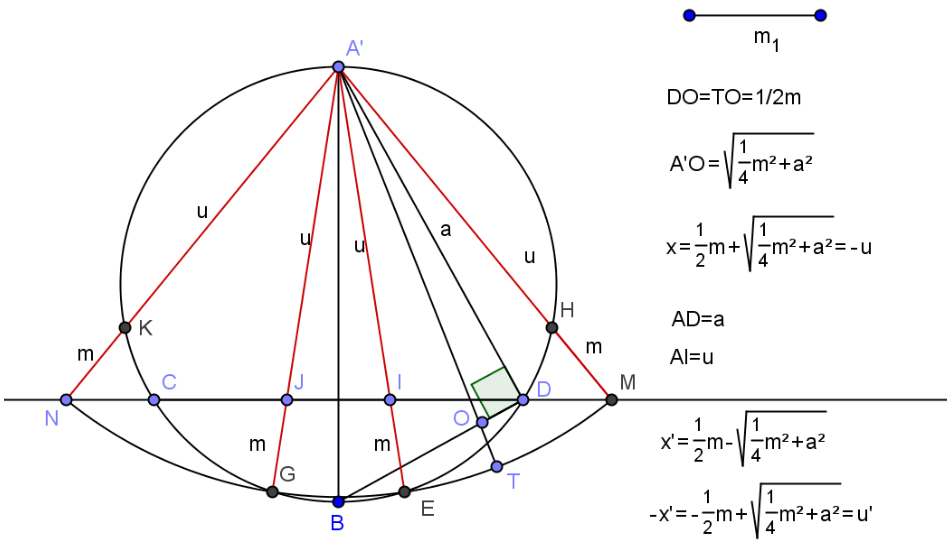


Figura 37: Construcción de todas las soluciones

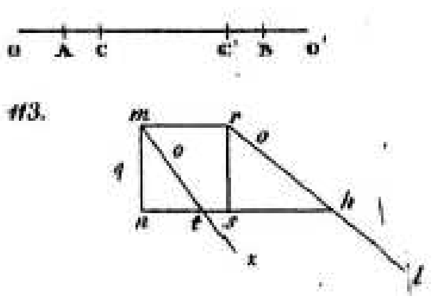
Vemos que Lista construye las cuatro soluciones que tiene el problema partiendo de una de ellas, el valor positivo de una de las incógnitas, sin más que interpretar los cambios de signo que aparecen en las demás.

Problema 4. Señalar en una recta un punto tal, que sus distancias a dos puntos dados formen una rectángulo igual a un cuadrado dado q^2.

Actualmente propondríamos el problema diciendo que el producto de las distancias es igual a una constante. Al verlo desde la Geometría, el producto de las distancias es igual al área de un rectángulo, y al ser un área no se puede igualar a cualquier constante, sino que debemos igualarla a otro área, y lo más fácil es que sea el área de un cuadrado.

En este problema veremos de nuevo la construcción de una solución negativa, pero sobre todo tiene su interés en que una vez planteado y resuelto al no obtener algebraicamente todas las soluciones que se obtienen geométricamente lo replantea para obtener las soluciones que faltan.

Como siempre supone el problema resuelto y razona qué condiciones debe cumplir la



solución obteniendo así la ecuación que nos da la solución algebraica. En este caso llama *AB*al segmento dado y *C* al punto buscado, interior a dicho segmento. Imponiendo las condiciones que se piden en el enunciado plantea y resuelve una ecuación de segundo grado, y discute las diferentes soluciones de la misma dependiendo de los valores relativos de *q*, dado en el enunciado, y la mitad de la longitud del segmento *AB*. Construye las soluciones obtenidas, pero no sobre el segmento inicial, sino sobre el cuadrado de lado *q*, transportando después el segmento solución sobre *AB*. Una vez hecho esto completa el problema suponiendo que el punto dado está fuera del segmento.

> **PG:** Sea la recta *ACB, A* y *B* los puntos dados. Supongo que el punto está señalado y sea *C*.
>
> **PRA:** Sea *AB=a, AC=x, CB=a-x*, y $ax-x^2=q^2$.
>
> Resolviendo esta ecuacion, será $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-q^2}$.
>
> Si q es mayor que $\frac{1}{2}a$, el radical es imaginario, y no se puede resolver el problema tomando el punto entre *A* y *B*.

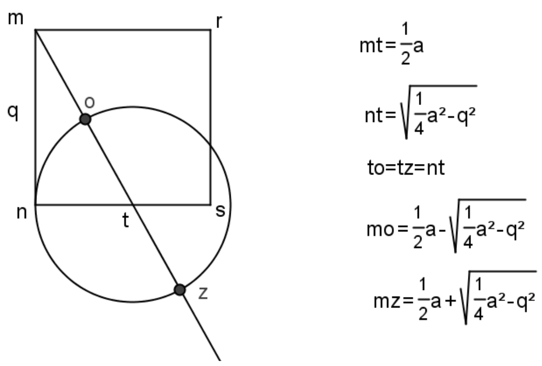


Figura 38: Construcción de las soluciones interiores

> Si $q=\frac{1}{2}a,\ x=\frac{1}{2}a$, el punto está en la mitad de la recta, el rectángulo pedido es el mismo cuadrado dado y el problema tiene una solución entre *A* y *B*.
>
> **RG:** Si q es menor que $\frac{1}{2}a$, $\sqrt{\frac{1}{4}a^2-q^2}$ es un cateto, cuya hipotenusa es $\frac{1}{2}a$ y el otro cateto es *q*. Hago, pues, centro en *m* con un radio igual $\frac{1}{2}a$, y describo un arco, que cortará á *ns* en *t*: el radical será *nt.* Tomo sobre *mt* á uno y otro lado del punto *t*, *to=tz=nt*, y los valores de *x* serán *mo* y *mz*.

Hasta aquí ha construido las soluciones de *x*, pero no sobre la recta dada, para hacerlo vuelve de nuevo al Álgebra y la conclusión que saca la utiliza para construirlas en su sitio:

> (…) Su suma (de las soluciones de *x*) es *a*, coeficiente del 2º término de la ecuacion, mudado el signo (Al. 43).
>
> Tomo, pues, *AC* y *BC'*, iguales cada uno á *mo*, y los puntos *C* y *C'* darán las dos soluciones interiores, que el problema tiene en este caso. (p. 131)

Recordemos que *AB=a*, por tanto tomando $AC = mo = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, tiene que ser $CB = mz = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ por sumar *a*. Lo mismo ocurre con *C'B=mo* y *AC'*.

Pero no da por resuelto aquí el problema, sino que, al no haber obtenido las soluciones en que el punto *C* es exterior al segmento, lo plantea de nuevo bajo esta suposición:

> Pero la hipótesis de estar el punto *C* entre *A* y *B* limita la ecuacion $ax - x^2 = q^2$ á no dar mas que las soluciones interiores.
>
> **PG:** Supongamos el punto en *O*, fuera de *A* y ,…
>
> 
>
> **PRA: …** y sea *AO=x*, será *BO=a+x*, y la ecuacion $ax + x^2 = q^2$ dará las soluciones esteriores. De ella resulta $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + q^2}$.

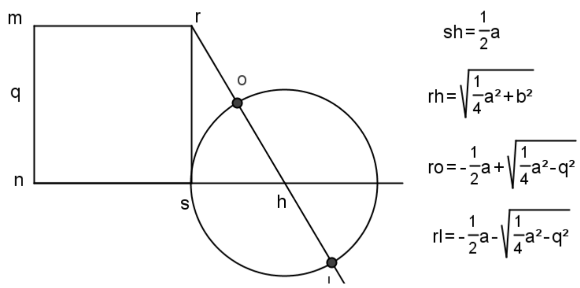


Figura 39: Construcción de las soluciones exteriores

> **RG:** Prolongo, pues, la *ns* y tomo $sh = \frac{1}{2}a$, y tirando la *rh*, esta será = $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + q^2}$. Quitándole *ho=hs* será *ro* el valor positivo de *x*. Añadiéndole *hl=hs*, será *rl* el valor negativo de x.

Para representar estos valores en la recta que da el problema hace uso de las propiedades del Álgebra de nuevo:

> Ambos son reales en todos los casos: el 1º se toma desde *A* hasta *O*: el 2º hácia la parte contraria, y llega hasta *O'*, siendo *BO'=AO*; porque $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + q^2} - a = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + q^2}$.

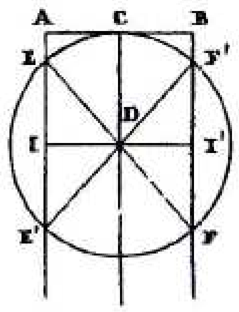
Termina el problema con las siguientes conclusiones:

> El problema tiene dos soluciones fuera de los puntos *A* y *B*, y dos dentro, ó dos fuera y una dentro, ó solamente dos fuera. (p.131)

Problema 5. Dadas dos paralelas y su perpendicular, tirar una secante tal, que la mitad de la perpendicular sea media proporcional entre las partes de las paralelas comprendidas entre la perpendicular y la secante (Fig. 114)

Este problema es diferente a los expuestos hasta el momento porque el planteamiento geométrico es mínimo, prima el planteamiento algebraico. Además la ecuación que obtiene tiene infinitas soluciones, aún así a partir de ella se obtiene una construcción geométrica para cada caso particular mediante una tercera proporcional. A pesar de esto el autor replantea el problema en términos mucho más geométricos para dar una solución "mas elegante",aunque mucho más compleja. En principio considera dos incógnitas *AE=x* y *BF=y* (fig. 114), pero para la segunda construcción introduce una tercera *CD=r* y obtiene las dos primeras en función de esta, y son estas soluciones las que construye:

114.



PG: Sean *AE, BF* las paralelas, *AB* la perpendicular, *EF* la secante pedida. …

PRA: … Sea $\frac{1}{2}AB = a$, *AE=x, BF=y*: la ecuacion será $xy = a^2$, y el problema es indeterminado. Dando diferentes valores á *y*, se hallarán los correspondientes de *x*, por la fórmula $x = \frac{a^2}{y}$. (p. 131)

Con esto el problema estaría resuelto y podríamos construir la solución para cada valor de *y*, siendo *x* la tercera proporcional entre *a* e *y*, como ya hemos dicho. Pero esta solución no le debe parecer satisfactoria porque propone otra:

> Pero si se quiere hacer la construccion de una manera mas elegante, introduzcamos una nueva incógnita auxiliar.
>
> **PG:** Para esto levántese en *C*, mitad de *AB*, la perpendicular *CD*, que encuentre á a la secante *EF* en *D*, (…)
>
> **PRA:** (…) y hago *CD=r*, y se trata de hallar los valores de *x* é *y*, espresados en *r*.
>
> Siendo *CD* paralela media entre *AE* y *BF*, será $x + y = 2r$ [24]. Esta ecuacion y la fundamental $xy = a^2$ dan $x = r \pm \sqrt{r^2 - a^2}$, $y = r \mp \sqrt{r^2 - a^2}$.
>
> **RG:** Haciendo centro en *D* con el radio *DC=r*, describo un círculo, y tiro *II'* paralela á *AB*. *EE'* y *FF'* son iguales por cuerdas equidistantes del centro; y cada mitad de estas cuerdas, como $EI = \sqrt{r^2 - a^2}$. Luego los dos valores de *x* son *AE'*, *AE*, y los correspondientes de *y* son *BF'* y *BF*.

Como en el problema anterior obtiene conclusiones sobre las soluciones del problema:

[24] La paralela media de un trapecio es la semisuma de sus bases.

> Luego cada punto de la *CD* da dos secantes, escepto aquellos en que *r<a*, en los cuales será imposible la solucion, y aquel en que *r=a*, para el cual no habrá mas que una solucion, y la secante será el diámetro paralelo á *AB.* (p. 132)

Problema 6: Inscribir en un triángulo una recta dada paralelamente á un lado.

Este problema es muy sencillo, lo incluimos como ejemplo de construcción de una cuarta proporcional.

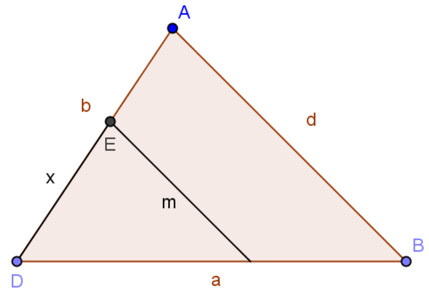
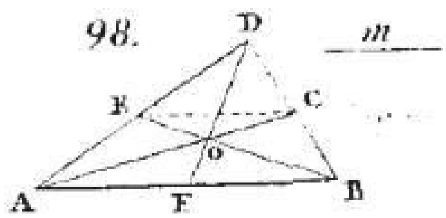


Figura 40: Problema 6



> **PG:** Sea *ADB* el triángulo dado, en el cual se quiere inscribir una paralela á *AB*, que sea =*m*.
>
> **PRA:** Sea *AD=b, AB=d*, y *DE=x.*
>
> Será $\frac{d}{m}=\frac{b}{x}$, $x=\frac{bm}{d}$, que es una cuarta proporcional.
>
> **RG:** Hallada y tomada desde *D* sobre *DA*, marcará el punto *E*, por el cual tirando *EC* paralela á *AB*, será =*m*. (p. 132)

Problema 7. Inscribir entre los lados de un ángulo recto una recta dada, que pase por un punto dado equidistante de los dos lados del triángulo.

El siguiente problema es muy complejo sobre todo en la resolución geométrica de la cual sólo da las pautas.
Como siempre supone el problema resuelto, siendo *FD* la "recta dada, *E* el punto dado (fig. 11), *K* el punto medio de *FD* y *EK=x* la incógnita. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo *ECD* y semejanza de triángulos a ese mismo y al triángulo *FAD* obtiene una ecuación bicuadrada de la que obtiene las cuatro soluciones, indicando su construcción, como ya hemos dicho, pero sin llegar a hacerla.

> **PG:** Sea *A* el ángulo recto, *E* el punto dado, de modo que *EB=EC=a*; sea *m* la recta que se ha de inscribir, y supongamos que esté inscripta en la posición *FD.* Sea *K* el punto medio de la recta; llamo *l* á la mitad de la recta, y tomo por incógnita la distancia *EK* del punto á la mitad de la recta.

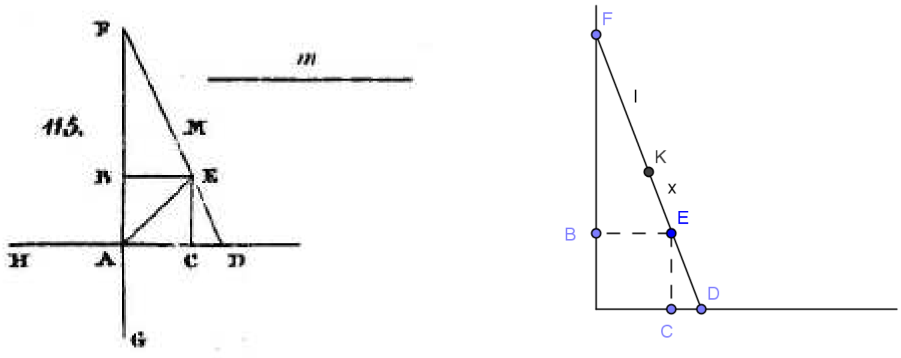


Figura 41: Problema 7

> **PRA:** Sea *EK=x*, será *EF=l+x, ED=l-x,* $CD=\sqrt{(l-x)^2-a^2}$, y en los triángulos semejantes *FBE, ECD*, tendré $\frac{FE}{BE}=\frac{ED}{CD}$, ó $\frac{l+x}{a}=\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2-a^2}}$, de donde hechas todas las reducciones sale $x^4-\left(2l^2+2a^2\right)x^2+l^4-2a^2l^2=0$, ecuacion del 4º grado; pero que se puede reducir al 2º, haciendo $x^2=y$. (p. 133)

Hace el cambio de variable, resuelve la ecuación en *y*, y después saca las soluciones de *x* obteniendo cuatro valores, dos positivos y dos negativos:

"(…) Los positivos son $x=\sqrt{\left(l^2+a^2+a\sqrt{\left(a^2+4l^2\right)}\right)}$ y $x=\sqrt{\left(l^2+a^2-a\sqrt{\left(a^2+4l^2\right)}\right)}$ ". (p.133)

Después pasa a describir la construcción geométrica, pero no la hace:

> **RG:** El primero es siempre real y mayor que *l*. Se construye haciendo $\sqrt{\left(a^2+4l^2\right)}=t$, hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son *a* y *2l*: haciendo $l^2=au$, siendo $u=\frac{l^2}{a}$, tercera proporcional á *a* y *l*; $x=\sqrt{a\left(u+a+t\right)}$, y se busca una media proporcional entre *a* y *u+a+t*. teniendo ya la *EK*, añádole *KF=l*, y resultará *EF* mayor que *m*.

Nota: Recordemos que en este caso *x>l*. Por tanto, si *EF>m*, el punto *E* estará en el cuarto cuadrante.

> Haciendo centro en *E* con el radio *EF* describo un arco que cortará la *AF* en dos puntos, uno sobre *A* y otro debajo de *A*. El primero no resolverá el problema; pues desde *E* hasta él habrá una distancia mayor que *m*. Supongamos que el 2º sea *G*: Tirando la *EG*, quedará inscripta en el ángulo *DAG* una hipotenusa *m*.

> El 2º valor positivo $x=\sqrt{\left(l^2+a^2-a\sqrt{\left(a^2+4l^2\right)}\right)}$ es imaginario, y no da solucion, cuando $l<\sqrt{2a^2}$ ó l < AE. Es nulo, cuando *l=AE;* y en este caso la recta está en el ángulo *FAD*, y bisecada en *E*. Es real y menor que *l* siempre que *l> AE*;

> porque en este caso $a^2 - a\sqrt{(a^2+4l^2)}$ es cantidad negativa; pues $\sqrt{(a^2+4l^2)} > 3a$. Se construye por una media proporcional, pues $x = \sqrt{a\,(u+a-t)}$. Teniendo *EK*, añádole *l*, y tengo la *EF:* haciendo centro en *E* con el radio *EK,* describo un arco que cortará la *FA* en dos puntos, el uno sobre *A*, que será la segunda solucion del problema y el otro debajo de *A,* que no dará solucion; pues suponiendo que sea *G*, y tirando la *EG* su parte comprendida en el ángulo *DAG* ha de ser menor que *m*. (p. 134)

Seguidamente pasa a analizar las soluciones negativas:

> Los valores negativos son $x = -\sqrt{\left(l^2+a^2+a\sqrt{(a^2+4l^2)}\right)}$ y $x = -\sqrt{\left(l^2+a^2-a\sqrt{(a^2+4l^2)}\right)}$. Se construyen como los positivos, y son iguales á ellos, y se interpretan colocando el punto *E* entre *F* y *K.* (p. 134)

Continúa analizando las posibles soluciones y describiendo su construcción que, como él mismo ha indicado, es análoga a la de los valores positivos, la única diferencia es que una de las soluciones se encuentra en el ángulo *FAH,* en vez de en el *DAG.*

Termina, como en otros casos concluyendo las posibles soluciones del problema:

> El problema tiene ó cuatro soluciones, dos en el ángulo donde está el punto *E*, y una en cada ángulo colateral, ó tres soluciones una en cada uno de estos tres ángulos, ó dos soluciones una en cada ángulo colateral. (p. 134)

Problema 9. Hallar el sector esférico, cuyo cono es equivalente en volúmen al segmento.

Este problema tiene de particular que en él Lista transforma un problema en el espacio en un problema en el plano. Además primero hace el planteamiento algebraico, a diferencia de otros problemas, del que obtiene la "traducción" del problema a otro más sencillo.

> **PA:** Sea *r* el radio de la esfera, *x* la altura del casquete. El volumen del segtor[25]= $\frac{2}{3}pR^2x$, el del segmento $\frac{1}{3}px^2(3r-x)$, y como el segmento ha de ser la mitad del segtor, será $\frac{1}{3}px^2(3r-x) = \frac{1}{3}pr^2x$, ó $x(3r-x) = r^2$, lo que equivale á resolver este problema.
>
> **PG:** Dividir la recta *3r* en dos partes tales, que el tercio de la recta sea media proporcional entre ellas.
>
> **RA:** La fórmula es $x = \frac{3}{2}r \pm \sqrt{\frac{5}{4}r^2}$.

[25] En el libro aparece así, con *R* en vez de *r*

RG: El primer valor es mayor que *r*, y no sirve para nada en el problema del segtor. El segundo se construye por una hipotenusa; pues $\sqrt{\frac{5}{4}r^2} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}r^2}$. (p. 135)

Problema 10. Dado un círculo tirar en él una cuerda, cuyos segmentos esten en la razón dada de m:n. (p.135)

El enunciado es algo confuso, entendemos que en realidad consiste en dividir un segmento según una razón dada, pero en este caso el segmento es la cuerda de una circunferencia.

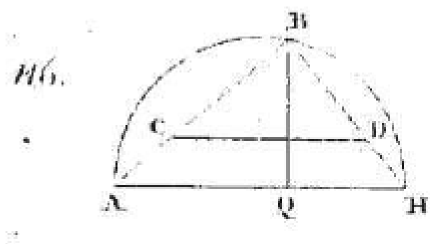
En este problema plantea y resuelve una ecuación de segundo grado, pero no construye la solución obtenida (solo considera la positiva), sino que utilizando propiedades geométricas lleva a cabo otra construcción "más elegante". Una vez obtenida esta solución por medio geométricos comprueba algebraicamente que coincide con la hallada con anterioridad.

PA: Sea *x* un segmento: el otro será $\frac{mx}{n}$, y su producto $\frac{mx^2}{n}$.

PG: Llamando *r* el radio y *b* la distancia del punto dado[26] al centro, los segmentos del diámetro que pasa por el punto dado son *r-b, r+b*, y su producto $r^2 - b^2 = \frac{mx^2}{n}$ (G. 138). Hago $r^2 - b^2 = q^2$; *q* será la perpendicular al diámetro en el punto dado; pues será media proporcional entre sus segmentos *r+b* y *r-b*.

RA: La ecuacion es, pues, $\frac{mx^2}{n} = q^2$; de donde $x = \sqrt{\frac{nq^2}{m}}$,

RG: que se construye buscando una media proporcional entre *q* y $\frac{nq}{m}$.



Pero es mas elegante la construcción siguiente. Sobre una recta *AH* tomo dos partes *AQ* y *QH*, que esten en la razón de *m: n*. Sobre *AH*, como diámetro, describo un semicírculo. Levanto en *q* la *QB* perpendicular al diámetro; tiro las cuerdas *BA,BH;* tomo sobre *BA* una parte igual á la recta *q*; tiro *CD* paralela á *AH*, y *BD* será el valor de *x*.

Una vez hecha esta construcción geométrica comprueba, de nuevo por métodos algebraicos que es correcta:

[26] En el enunciado no explicita ningún punto, entendemos que es el que divide a la cuerda según la razón dada.

PA: Dem. Los cuadrados de las cuerdas tiradas á los estremos del diámetro son como los segmentos de éste (G. 137); luego $\frac{BA^2}{BH^2}=\frac{m}{n}$; pero $\frac{BA}{BH}=\frac{q}{BD}$: luego $\frac{BA^2}{BH^2}=\frac{q^2}{BD^2}$, y por tanto $\frac{m}{n}=\frac{q^2}{BD^2}$, de donde $BD=\sqrt{\frac{nq^2}{m}}=x$. (p.136)

4.3.4. Conclusiones

De esta obra hemos de destacar en primer lugar, que es la única de las analizadas en la que no aparece referencia alguna al uso de sistemas de coordenadas en la Aplicación del Álgebra a la Geometría, se limita al *Análisis determinada,* como lo denominan otros autores.

Por otra parte, destaca también la claridad en la exposición de los contenidos, especialmente en lo que se refiere a las soluciones negativas de un problema. En este sentido utiliza el concepto de figuras directas e indirectas, como Zorraquín, y por tanto su obra se halla influenciada por la de Carnot, aunque no lo cite en ningún momento. Como él, también considera la variación continua de los valores de la incógnita para pasar de positivo a negativo a través de cero o infinito, aunque el uso que hace de estos conceptos para construir e interpretar las soluciones negativas no es exactamente igual.

Podemos definir la obra de Lista como básica, didáctica y conceptualmente en la línea de Zorraquín, más que en la de Vallejo.

4.4. Curso completo de matemáticas Puras. Tomo III. Álgebra Sulime y Geometría Analítica de José de Odriozola. (1829)

4.4.1. Autor

José Odriozola fue un matemático, militar y artista español nacido en Cestona (Guipúzcoa) (1785-1864) (CA1). Sus primeros estudios los realizó en la Real Academia de San Fernando (Cádiz), donde presentó cuadros en exposiciones y concursos organizados por la Academia, logrando el segundo premio en el de 1805; y de la que sería nombrado académico de mérito en 1814. En su estancia en San Fernando adquirió conocimientos matemáticos, ya que el centro cuidaba mucho estas enseñanzas (CA2) (Enciclopedia Espasa-Calpe, 1929; "Odriozola", n.d.).

En 1808 se incorporó como cadete a los voluntarios de Borbón, en Galicia, comenzando así su carrera militar, llegando a ser coronel de Infantería y teniente coronel de Artillería (Maz, 2005) (CA3). En 1810 consiguió su primer cargo docente, como profesor de batallón de cadetes, en Andalucía. Tras esto ocupó los cargos de profesor ayudante en los colegios de Artillería de Sevilla (1813), Segovia (1814), Badajoz (1823) y Alcalá de Henares (1830) (CA3). Entre 1823, año en que cerró el Colegio de Badajoz, y 1830 en que se incorporó al de Alcalá, Odriozola preparó algunos de sus tratados técnicos y científicos destinados a centros superiores de formación militar. Entre ellos se encuentra *Curso Completo de Matemáticas Puras* que escribió entre 1827 y 1829, como encargo de la Junta Superior Facultativa del Real Cuerpo de Artillería ("Odriozola", n.d.) (CA5), aunque posteriormente se utilizaría en la educación secundaria, como veremos en el análisis que hemos realizado.

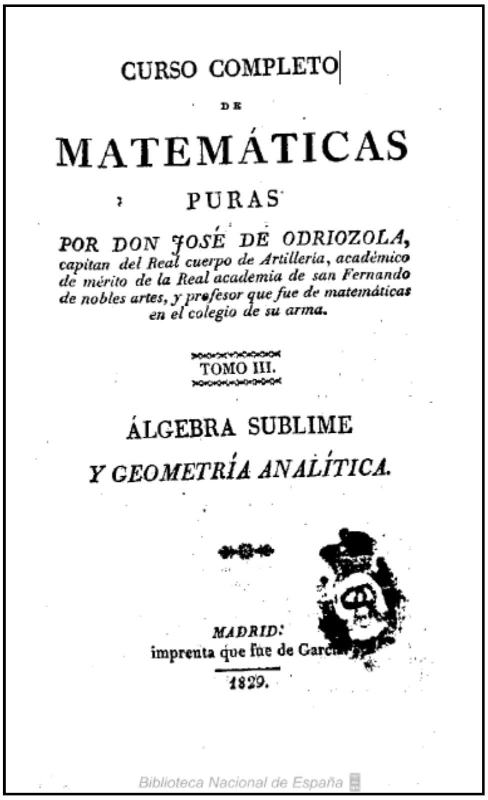
Durante 1834-35 realizó un viaje por Europa, donde se familiarizó con las industrias y técnicas militares más avanzadas, primero en Francia y Alemania y después en Inglaterra. En este viaje Odriozola adquirió una predilección por el saber técnico frente al científico, como base del desarrollo del país (CA6). Durante la década siguiente intentó poner en práctica estas ideas, sobre todo en el Seminario de Bergara, del que fue nombrado director en 1845 (“Odriozola”, n.d.) (CA3). En 1840 escribió unas Normas para el fomento de la enseñanza primaria y secundaria en las que defendía las asignaturas científicas con una clara orientación práctica y experimental. Vea opina que este autor fue:

> (…) uno de los pocos matemáticos españoles de la primera mitad del XIX con iniciativa propia para mejorar la situación académica de las matemáticas, tanto en la enseñanza militar como en su posterior repercusión en la enseñanza tanto elemental como de ampliación (pp. 178-179).

Otro de los signos que muestran el interés de Odriozola por el desarrollo de la ciencia fue su participación en la fundación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en 1847 (CA3).

Este autor publicó numerosos tratados científicos entre los que citaremos (CA5): *Curso Completo de Matemáticas Puras* (1827-1829); *Tratado elemental de Mecánica* (1832); *Mecánica Aplicada a las máquinas operando, o Tratado teórico y experimental sobre el trabajo de las fuerzas* (1839); *Mecánica racional e industrial* (1863).

4.4.2. Características de la obra.



CURSO COMPLETO
DE
MATEMÁTICAS
PURAS
POR DON JOSÉ DE ODRIOZOLA,
capitan del Real cuerpo de Artillería, académico de mérito de la Real academia de san Fernando de nobles artes, y profesor que fue de matemáticas en el colegio de su arma.
TOMO III.
ÁLGEBRA SUBLIME
Y GEOMETRÍA ANALÍTICA.
MADRID:
imprenta que fue de Garc
1829.

Figura 42: Carátula del libro. Curso completo de Matemáticas puras. J. Odriozola

El libro analizado corresponde a la primera edición del *Curso Completo De Matemáticas Puras*. *Tomo III*: *Álgebra Sulime y Geometría Analítica* de José de Odriozola, impresa en Madrid en la *Imprenta que fue* de García, en 1829, aunque hay que señalar que los tomos I y II de esta obra datan de 1827.El ejemplar analizado se puede localizar en la B.P. Zamora (ZA 8834) y en la Biblioteca Digital Hispánica (http://www.bne.es/es/Catalogos/BibliotecaDigitalHispanica/Inicio/) (RO).

El libro consta de 337 páginas de las cuales dedica 158 a la Geometría Analítica. Además, al final del mismo se encuentran el índice, dos páginas de correcciones y seis láminas con dibujos. El tomo contiene el Tratado IV: Álgebra Sublime y el Tratado V: Geometría Analítica (CEO1).

El índice (CEO2) se encuentra al final del tomo, antes de las láminas con los dibujos. Reproducimos la parte del mismo dedicada a la Geometría Analítica, y de ella solo incluimos íntegramente los capítulos que vamos a estudiar, aunque sea en parte como ocurre con el segundo capítulo del que solo analizaremos los dos primeros puntos.

En el tomo I, publicado en 1827, se incluye, al principio del mismo, una carta a D. Miguel de Ibarrola, Secretario del Estado y del despacho Universal de la Guerra, en la que le presenta el libro y expresa sus intenciones con respecto a él (CEO3):

> Habiéndome ocupado mucho tiempo en la composicion de un curso completo de Matemáticas puras, cual en mi concepto pudiese convenir para la enseñanza de las clases públicas de primer orden, tengo el honor de presentar á V. E. el resultado de mis trabajos que es la obra adjunta en cuatro volúmenes (...)

Y más adelante añade:

> En las ciencias esactas de que tratan estos libros se halla la guía segura de la táctica militar, la regla de la delineación en toda su generalidad, el lenguaje de la economía, el alma de la fisica, y por consiguiente la base fundamental de las carreras facultativas de las armas. He procurado esplicar las materias con la estension propia de su estado actual en Europa, (...)

Es decir, el libro iba encaminado fundamentalmente a las escuelas militares, aunque posteriormente se recomendó como texto para la segunda enseñanza.

Tras esta carta se encuentra el prólogo, también en el tomo I, y en él especifica el nivel al que va destinado:

> He tenido presente ademas que un curso completo de Matemáticas no es obra para escuelas de primera enseñanza, en donde por necesidad hay que dar las reglas de Aritmética por sí sola mas ó menos fundadas. Por otra parte, según el actual método de educacion, debemos suponer al que trata de estudiar Matemáticas algo versado en los rudimentos que se enseñan en dichas escuelas; y en caso de que quisiese recordarlos como estudio preliminar, los hallará al fin de este prólogo. (p.VI, tomo I)

Y más adelante señala:

> Esta obra consta de cuatro tomos, en los cuales presentamos los tratados que en el dia forman el total de las Matemáticas puras por el orden mismo con que se han de estudiar (...).Este orden sucesivo de materias hace que la obra pueda servir de testo en todos los establecimientos donde se enseñan Matemáticas, ya para los que solo necesitan ciertos conocimientos elementales de ellas, ya también para los que hayan de abanzar mas en la carrera de la ciencia. (p. VII, tomo I)

Por otra parte podemos encontrar la obra en las listas de libros para el curso 1846/47 recogidas en la Gaceta de Madrid de 8 de septiembre de 1846. (CEO5)

En cuanto a los autores que influyeron en Odriozola a la hora de elaborar la obra encontramos citado a Laplace en el prólogo y a Descartes en la lección preliminar cuando explica la importancia de aplicar el Álgebra para la resolución de los problemas geométricos. (p.179) (CEO4)

4.4.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.4.3.1. Análisis de la estructura conceptual.

Odriozola empieza el estudio con una lección preliminar en la que explica la importancia de la aplicación del Álgebra a los problemas geométricos -pero sin menospreciar las demostraciones propias de la Geometría Elemental- y los pasos necesarios para llevar a cabo esta ayuda mutua. (D)

Tras esta lección introductoria lleva a cabo el estudio de la geometría plana que divide en tres capítulos de los cuales nosotros solo hemos estudiado el primero, dedicado a las ecuaciones determinadas de la Geometría, y las dos primeras lecciones del segundo, que dedica al estudio de la recta (CEO2). Vemos, por tanto dos partes claramente diferenciadas por metodología y contenido, pero también en la estructura de la obra.

Comienza estudiando la construcción geométrica de las expresiones algebraicas (E) y tras esto propone una serie de problemas en los que muestra ejemplos de aplicación de la teoría explicada (PRD). Como otros autores de esta época, Odriozola insiste en la homogeneidad de las ecuaciones, utilizando de forma explícita la unidad para conseguirla (U). También insiste en la explicación de la construcción de las soluciones negativas de una ecuación (SN), pero tanto en el caso de la homogeneidad, como el de las soluciones negativas no dedica una sección aparte para explicarlo, sino que aparece mezclado en el texto con otras cuestiones, tanto en la teoría como en los problemas.

En el capítulo II estudia las ecuaciones de la recta. Comienza hablando de los sistemas de referencia (C), utilizando lo que él llama sistemas de coordenadas rectas, que pueden ser oblicuos y rectangulares, y las coordenadas polares; así como los cambios entre ellos.

Tras esto estudia la ecuación de primer grado en dos variables, construyéndola e interpretando el significado de las constantes que en ella aparecen llegando a la conclusión de que representa a una recta (ER). Da diferentes expresiones de la misma dependiendo de los datos de que se disponga (ER) y explica cómo representarla obteniendo dos puntos de la misma de su ecuación, de lo que pone tres ejercicios a modo de ejemplo (PREJ).

Además estudia el ángulo que forman dos rectas (PRAN), obteniendo la condición de paralelismo y perpendicularidad (PRP) y la distancia entre dos puntos (PRD).

Por último propone cinco problemas en los que obtiene de nuevo resultados generales. Así, obtiene el punto de corte de dos rectas dadas, la recta perpendicular a una dada que pasa por un punto, la distancia de un punto a una recta o la ecuación de la bisectriz de un ángulo (PRI, PRP, PRD, PRAN). Veamos todo esto con detalle:

1. Definición

Como hemos dicho la obra empieza con una lección introductoria, en la que Odriozola comienza hablando sobre el Álgebra (D), y los asuntos que trata:

> Toda espresion de Álgebra ó de Aritmética manifiesta conceptos acerca de cantidades, sea cualquiera la especie á que se concreten; de suerte que cada ecuacion de las que se ha dado a conocer en el cálculo general, se puede referir á la especie que convenga al calculador, salvo siempre la homogeneidad, y por consiguiente á las particulares de la estension (p. 179).

Y continúa explicando la importancia de aplicar el Álgebra a la Geometría:

> Por mucho tiempo se abstuvieron los geómetras de emplear el Álgebra en las cuestiones indeterminadas de Geometría, sin embargo de ser un ramo estenso y más fecundo en frutos, que el de las determinadas; hasta que Descartes introdujo esta novedad que en los últimos tiempos ha ocupado talentos sublimes. A los modernos debemos innumerables verdades recientemente descubiertas; con que se han enriquecido los tesoros de la Geometría, creando nuevas ciencias, y metodizando las fisicas, de manera que hay en nuestros dias cuerpos muy estensos

> de doctrinas evidentes que por la análisis indeterminada se han formado en dichos ramos (p. 179).

Pero no menosprecia las demostraciones propias de la Geometría elemental pues:

> en ellas la evidencia se hace sensible con objetos; y asi él método antiguo de los creadores se conserva para esplicar las verdades fundamentales, en que se apoya el cálculo para deducir otras nuevas, pero interponiendo desde los principios el auxilio del Algebra cuando fuere oportuno á beneficio de la claridad. (p.180)

Tras esto pasa a explicar las aplicaciones del Álgebra a la Geometría y viceversa:

> 2. Desde ahora vamos á tratar de las reciprocas aplicaciones de una ciencia á la otra; y por el resultado se formará el juicio de que mas necesita del Algebra la Geometría, que de ésta la primera.
> Nuestro actual asunto se divide en dos como la Geómetra elemental; el primero es Algebra en la Geometría plana; y el segundo, Álgebra en la Geometría del espacio, desempeñando en ambas partes lo que exigen las aplicaciones recíprocas que hemos indicado, y estan resumidas en dos proposiciones generales: 1.ª cifrar en lenguaje de cálculo las cuestiones y resolverlas: 2.ª construir espresiones del cálculo, ó traducirlas á lenguaje de figuras geométricas.
> Para las construcciones se traza la escala (Geom. elem. 38), en ella se toman las unidades que contienen las cantidades conocidas, y la figura descrita oportunamente con éstas ha de manifestar las incógnitas, como se hizo ya en la Geometría elemental cuando se hallaron cuartas y medias proporcionales á rectas dadas. Esta parte fue la que primero llamó la atención de los geómetras en la infancia del Algebra, y en efecto resolvieron algunas cuestiones de la cantidad general por medio de construcciones (p. 180).

Añade que también en la Trigonometría se encontraron ejemplos “del modo con que se cifran problemas de la estension en lenguaje del Álgebra”, y termina recordando la regla general para pasar del lenguaje geométrico al algebraico “que consiste en suponerlas resueltas, y nombrando con cifras propias las cantidades, escribir la oracion para despues resolver segun los principios del cálculo” (p.181).

2. “Ecuaciones determinadas en la Geometría”

Como hemos señalado, tras la lección introductoria pasa a estudiar la Geometría Analítica Plana dedicando la lección primera del capítulo I, a la “construcción de las ecuaciones determinadas”, (E) que es como se titula dicha lección.

Comienza explicando qué se va a desarrollar en ese punto:

> El asunto de esta leccion es traducir á lenguaje de figuras las mismas espresiones algébricas, que en la Geometría elemental se hallaron al traducir á lenguaje del cálculo las relaciones que tienen entre sí las líneas, las superficies y los volúmenes. (p. 182)

Y continúa haciendo un resumen de lo visto en Geometría elemental:

> 1.° Las líneas están espresadas en términos de una sola dimensión , tales como

$x=a\pm b$, $x=nb$, siendo n número abstracto, $x=\frac{ab}{c}$, $x=\sqrt{(a^2\pm b^2)}$ $x=\sqrt{(ab)}$:

2.° Las superficies están espresadas en productos de dos medidas, como $x=ab, x=a^2$, siendo x superficie, y los productos espresiones abreviadas de $\frac{x}{x'}=\frac{ab}{a'b'}, \frac{x}{x'}=\frac{a^2}{a'^2}$ con las unidades *x', a', b'*, de medida respectivas, de *x, a, b.*

3.° Las espresiones de tres medidas dicen valores de los volúmenes, como $x=abc, x=a^3$, abreviadas de $\frac{x}{x'}=\frac{abc}{a'b'c'}, \frac{x}{x'}=\frac{a^3}{a'^3}$. (...) (p. 183)

Y tras esto explica la necesidad de que las expresiones sean homogéneas (U):

> De modo que siendo precisa la homogeneidad en las comparaciones, y por ello solamente comparables líneas entre si, superficies igualmente, así como los volúmenes; toda espresion de cantidades geométricas habrá de tener en los términos de ambos miembros igual número de factores lineales, fuera de los coeficientes abstractos, porque así vienen las espresiones halladas librándolas de forma fraccionaria (pp. 182-183).

Sigue explicando ejemplos que se encuentran en la Trigonometría y que aparentemente contradicen lo dicho:

> Por otra parte, en la Trigonometría, á fin de simplificar el cálculo, se suprime con frecuencia el radio por suponerle unidad de medida; y de aquí procede haber entonces en las ecuaciones mezclados términos de una dimensión con otros de dos y aun de tres; pero haciendo mención del radio r, se veria que entra en ellos con la potencia necesaria, para que todos fuesen de igual número de dimensiones. (p.183)

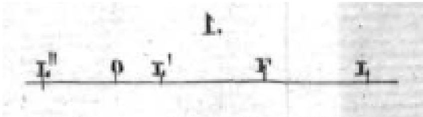
Y explica que de forma análoga se debe utilizar la unidad en la Geometría para obtener expresiones homogéneas, lo cual es necesario para que dichas expresiones puedan ser traducidas a formas geométricas:

> Es pues necesaria cualidad de las notas algébricas para ser traducidas en figura de Geometría, el que sus términos de ambos miembros se completen hasta tener igual número de dimensiones cada uno, introduciendo en aquellos á quienes falten, la unidad lineal elevada á la potencia necesaria, para que la suma de esponentes de cada término sea el mismo: y una espresion así completada se llama *homogénea* (p. 183).

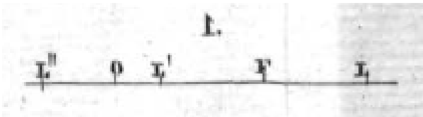
Como veremos hace uso explícito de la unidad cuando convierte la ecuación $x^2\pm px=q$ en homogénea, cuando construye la expresión $x=\sqrt{m}$, y al trabajar con expresiones trigonométricas. (E)

Una vez que ha dejado claro que para poder traducir las expresiones algebraicas a figuras geométricas las primeras deben ser homogéneas, y cómo se debe utilizar la unidad de medida para conseguir esto, pasa a explicar la construcción de las diferentes expresiones algebraicas que se pueden encontrar en la resolución de los problemas geométricos. En primer lugar explica cómo sumar o restar dos segmentos:

> 4. Para construir $x = a \pm b$, se tira una recta arbitraria y en ella se adopta, cuando no fuese dado, un punto O por origen de líneas: tomando después en la escala de partes iguales, que debe construirse de antemano, el valor de *a,* se traslada á la recta indefinida fijando en O la punta del compás: supuesto *a=OF*, se traslada también á continuación *FL=b* si es *b* positiva, y resulta *OL'=a+b.* Mas cuando fuere *b* negativa, se descontará *FL'= b* desde F retrocediendo ácia el origen, y quedará *OL'=a-b.*(p. 184)

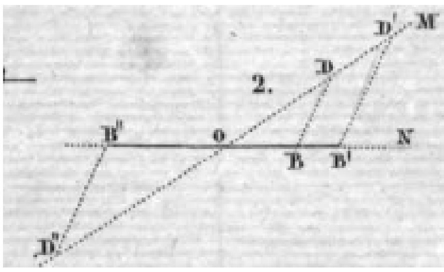


También explica el caso en que *b>a*, y por tanto *a-b<0*(SN).



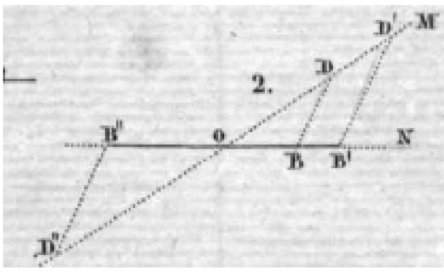
> Puede suceder que sea *b>a*, de modo que, al retroceder desde *F* ácia el origen, resulte *b=FL'';* en este caso x habrá pasado á ser menor que cero en la cantidad *OL''*, y será *OL''=-x=*a - *b.* Por esto, siempre que se haya de construir una línea espresada con signo negativo, es necesario trazarla desde el origen ácia la parte opuesta de la que ocuparía si fuese positivo el signo. (p. 184)

Continúa con la construcción de los cocientes, comenzando por el caso más sencillo, $x = \pm \frac{ab}{e}$ (E).



> 5. $x = \pm \frac{ab}{e}$ es teorema de líneas proporcionales con la incógnita *x*. Trazadas las rectas *OM, ON* formando cualquiera ángulo, tómense en *OM* las partes *OD = e*, *OD' = b*, y en *ON* la parte *OB=a.* Diríjanse *DB*, *D'B'* paralelas, y resultará *OB' = x* (Geom. elem. 38, III.°). (p. 184)

Como antes, también estudia el caso en que una de las cantidades es negativa (SN).



> (...) Si fuese negativa una de las cantidades *a, b, e,* lo será también *x;* y tomando las dos positivas ácia una parte del origen, y la negativa ácia el otro, en las líneas correspondientes, resultará á cada lado un triángulo, ambos semejantes, y el lado de uno de ellos será -*x*, como *OB''* cuando *OD''* fuere igual á la negativa de las dadas (p. 184).

Seguidamente estudia otros casos de cocientes (E), que transforma en el caso anterior.

En primer lugar considera $x = \frac{abc}{de}$, que transforma haciendo $\frac{ab}{d} = k$, de donde $x = \frac{kc}{e}$; y después $x = \frac{ab^2d}{efg}$, que simplifica haciendo $\frac{ab}{e} = m, \frac{bd}{f} = n$, con lo que resulta

$x=\frac{mn}{g}$, todos ellos cocientes que se construyen sucesivamente por el método explicado en el punto anterior.

También explica cómo construir $x=\frac{ab\pm cd}{f}$. Para ello toma $x=\frac{ab}{f}\pm\frac{cd}{f}$, construye cada uno de los cocientes y suma las líneas obtenidas.

Y especialmente interesante es el caso en que el denominador es un polinomio, $x=\frac{ab}{e\pm f}$. En esta ocasión hace $k=e\pm f$, que construye como ha explicado antes y con lo que obtiene $x=\pm\frac{ab}{k}$ que también se sabe construir, y considera el caso de que el denominador sea negativo y el numerador positivo, con lo que x también será negativo (SN). Lo interesante de esta construcción es la reflexión que hace sobre cómo puede pasar un valor de positivo a negativo:

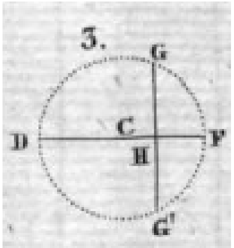
> Hasta aquí hemos considerado las líneas negativas, como si hubiesen llegado á tener este signo pasando por el valor cero desde positivas: así puede considerarse también *k*, pero no *x;* porque en el caso de *k=0*, sería $x=\frac{ab}{0}=\infty$ de modo que ha llegado *x* de positiva á negativa pasando por el infinito. Conocemos ya dos modos diferentes de haber cambio de signo en la espresion de una línea, conformes á los que reconocimos en casos de ocurrir este accidente en la cantidad general (Algebra elemental 131) (p. 185).

Esta reflexión también la hacen Zorraquín y Lista. Vemos que consideran las cantidades como continuas, como expresiones algebraicas que son, de hecho Odriozola nos remite al Álgebra, pudiendo tomar cualquier valor. La diferencia entre Zorraquín y Odriozola es que mientras que el primero utiliza esta propiedad como una característica de las cantidades que cambian de signo, para saber en un problema qué cantidades pueden pasar de positivas a negativas y dar nuevas interpretaciones del mismo, Odriozola simplemente hace la reflexión cuando aparece el caso, pero no lo utiliza para resolver ningún problema.
Tras esto estudia la construcción de fracciones en las que el numerador y el denominador son polinomios, tales como $x=\frac{ab+cd}{e+f}, x=\frac{abc+def}{gh+jl}, x=\frac{abcd+...}{fgh+jkl+...}$.

En todas ellas opera de forma análoga a los puntos anteriores: define nuevas cantidades en función de las dadas, que se saben construir y que simplifican la fracción a casos anteriores. En el caso más sencillo, por ejemplo, toma $k=e+f$, y por tanto debe construir $x=\frac{ab+cd}{k}$, explicado en el punto 7, en vez de la primitiva $x=\frac{ab+cd}{e+f}$

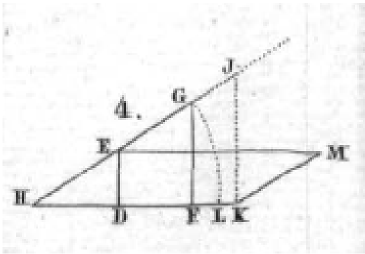
Seguidamente trata la construcción de expresiones radicales:

> 10. Para construir la línea del valor que espresa $x=\pm\sqrt{(ab)}$ en que *x* es media proporcional entre *a* y *b*, tómese la recta *DF=a+b* (fig. 3), y descríbase un círculo



cuyo diámetro sea *DF* y elevando la recta *HG* perpendicular en el punto *H* de adición, la parte *HG* ó *HG'* comprendida entre *H* y la circunferencia, será la línea *x*.

11. Si se ofrece hallar el valor de la línea *x* por la ecuación $x=\sqrt{\left(a^2 \pm b^2\right)}$ ó $x^2=a^2 \pm b^2$ sabemos que construyendo un triángulo rectángulo cuyo catetos sean *a* y *b*, la hipotenusa será *x* en caso de b^2 positivo; pero si este fuese negativo, *a* será hipotenusa, *b* un cateto y *x* el otro. En el primer caso, construyendo con lados indefinidos el ángulo recto y fijando la punta del compás en el vértice *F*, se marcan los estremos de los catetos para trazar la hipotenusa *GH=x*. En el segundo caso, marcando el estremo *H* del cateto *FH* conocido desde *H* con el radio *a* se trazará un arco, *y* éste cortará en *G* el otro cateto *FG=x*.



12. Todas las espresiones radicales de índice 2 primeramente se reducen para su construcción á una ú otra de las formulas $\sqrt{(ab)};\sqrt{\left(a^2 \pm b^2\right)}$; según practicaremos en los ejemplos que vienen á continuación. (...) (p. 187)

Y explica cómo reducir las expresiones $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots};x=\sqrt{ab+cd-fg+\ldots};x=\sqrt{\dfrac{\left(ab-cd+d^2\right)f^2}{hk+lm}}$ definiendo nuevas cantidades en función de las dadas, cantidades que se saben construir y que convierten las expresiones en construcciones conocidas, de modo análogo a como hizo con los cocientes.

En la primera, por ejemplo, hace $v^2=a^2+b^2$, construye *v*, y después $x=\sqrt{v^2+c^2}$.(p. 187)

Como ya hemos dicho, también estudia la ecuación $x^2 \pm px=q$, cuyas soluciones contienen expresiones radicales. Hace uso explícito de la unidad para convertir la ecuación en homogénea y después halla sus soluciones, cuya construcción se reduce a los casos anteriores:

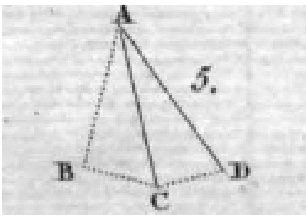
4.º La espresion $x^2 \pm px=q$ exige completarse multiplicando el segundo miembro por *r=1* , con lo que viene á ser $x^2 \pm px=rq$ y haciendo $rq=m^2$ la incógnita despejada es $x=\pm\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(m^2+\frac{1}{4}p^2\right)}$ fácil de construir por adición de las líneas $\pm\frac{1}{2}p$ y $\pm\sqrt{\left(m^2+\frac{1}{4}p^2\right)}$ (p.187)

También da otra construcción de las raíces de esta misma ecuación sin necesidad de despejarlas, haciendo uso de los teoremas de la Geometría:

13. Los teoremas de Geometría elemental (...) también son aplicables á la construcción de raices en las ecuaciones de segundo grado, sin que sea necesario

> despejar la incógnita; pues, $x^2 \pm px = m^2$ equivale á $x(x \pm p) = \pm m^2$ la cual en todos los casos que envuelve se puede construir por las líneas proporcionales del círculo. (p. 188)

Obsérvese la visión geométrica que tiene, que le permite ver en una ecuación una propiedad de la circunferencia. Por ejemplo $x(x-p) = m^2$ podemos traducirlo a la propiedad de la circunferencia que dice que si una cuerda (en este caso *m*) y un diámetro (*x*), tienen un punto común sobre la circunferencia, la cuerda es media proporcional entre el diámetro y su proyección sobre este (*x-p*).
Tras esto trata la expresión $x = \sqrt{m}$, que convierte en homogénea utilizando la unidad, *r=1,* (U), con lo que se transforma en $x = \sqrt{rm}$, "que se construye como se ha dicho anteriormente"(p. 188). Pero además da formas particulares para construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.

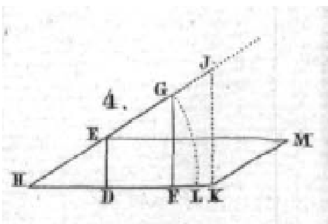
> Si es *m=2* descríbase un círculo con el radio *r=1* y el lado del cuadrado inscrito vale $\sqrt{2}$ (G. el. 101, II.°).
>
> 
>
>
> Si es *m*=3; el lado del triángulo equilátero inscrito en el mismo círculo del radio r = 1 vale $\sqrt{3}$ cómo se sabe (Geom. 101, Iº).
>
> Cuando sea *m*=5con los catetos *AB=2, BC=1* se construye el triángulo rectángulo *ABC,* en que es $AC = \sqrt{(4+1)} = \sqrt{5}$. (p. 188)

De forma análoga construye $\sqrt{6}$ utilizando como catetos $AC = \sqrt{5}$ y *BC=1,* y añade que "por el mismo orden se pueden construir sucesivamente las raíces cuadradas de todos los números enteros". (p. 188)

También hace referencia a las ecuaciones de grado superior al segundo:

> 15. Dada una ecuación de grado superior al segundo, comprendida en la general
>
> $$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \&c.,$$
>
> y hallados analíticamente sus factores simples y los binarios, la construcción de sus raices de primero y segundo grado se reduce á practicar lo prevenido en los casos anteriores. (p. 188)

y la construcción de las "expresiones circulares":

> 
>
>
> 16. En las espresiones circulares $x = \frac{sen a}{b}, v = \frac{\cos a}{d}$ hay que suplir el radio *r=1*; y de este modo pasan á ser $x = \frac{r \cdot sen a}{b}, v = \frac{r \cdot \cos a}{d}$ en que *x* y *v* son cuartas proporcionales á tres rectas dadas. Para construirlas se traza con un radio *HG* arbitrario el arco; se toma el valor *GL* del ángulo *a* cuya línea trigonométrica es conocida, para tener

$$GF=sena, HF=cosa.$$

> Sabiendo ya los valores de tres dimensiones de cada ecuacion, fácil es construir *x y v* por el método (5) de cuartas proporcionales. (p. 189)

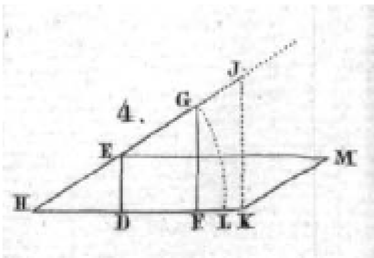
Vemos aquí de nuevo, como ya habíamos dicho, el uso explícito de la unidad.
Tras esto se ocupa de la construcción de un área y un volumen:

> 17. (...) Para traducir á lenguage de Geometría la espresion $x=ab$, desde luego se advierte que x representa una área, por constar de dos dimensiones el segundo miembro: y sabemos por los elementos que tanto el rectángulo construido con los lados *a y b,* como el paralelogramo de ángulos arbitrarios que tenga por base una de estas dimensiones y por altura la otra, como también el triángulo que tenga por base la una y por altura el duplo de la otra, constan de un mismo número de unidades cuadradas espresado en el producto *ab.* De suerte que, construyendo así cualquiera de dichas figuras, queda resuelto el problema. (p. 189)

A continuación pone, de nuevo, un ejemplo de una expresión trigonométrica, que aparentemente es de dimensión tres, pues tiene tres factores, pero que resulta ser de dos al hacer uso de la unidad (U), que en este caso es el radio.

> Si la espresion que se ofrece construir fuese $x=a\cdot b\cdot senu$ á primera vista se nota que pertenece á las de dos dimensiones, porque falta en el denominador el radio $r=1$á quien se refieren todas las líneas trigonométricas. Completándola y haciendo
>
> $p=\dfrac{asenu}{r}$ hay que construir finalmente $x=pb$.(p. 189)

Y explica su construcción:



> Supuestos *HG=r, GF=senu, HE=a, HK=b,* será *ED=p*; y el paralelogramo *HM* tendrá el área $x=a\cdot b\cdot senu$. (p. 190)

Después estudia los casos particulares en que *senu=1,* en que la expresión se convierte en *x=a*, *área del rectángulo cuyos lados son a, b;* y $x=\dfrac{a^2bc+bdfg-d^3h}{cd+eh}$, que simplifica haciendo $a^2bc=g^3t, bdfg=g^3z, d^3h=g^3u, cd+eh=gv$, que la convierte en $x=\dfrac{g^3t+g^3z+g^3u}{gv}=g\dfrac{gt+gz+gu}{v}=gw$, haciendo $\dfrac{gt+gz+gu}{v}=w$. "Luego, *x* es un rectángulo que tiene por base y altura las líneas *g, w*". (p. 190)

Y por último se ocupa de la construcción de volúmenes, como ya hemos dicho:

Propone la expresión $x=\dfrac{bd^2h^3+mnp^4}{dc^2+bdf}$ que transforma, de manera similar al anterior, en $x=r^2w$, que "expresa el volumen de un paralepípedo, que tenga por base el cuadrado r2 y por altura la línea w", y del que dice que "la construcción es fácil por las reglas de la Geometría en el espacio",(p. 191) y explica cómo construir la expresión *x=abc:*

> Si se hubiera de construir la figura cuyo volumen espresa *x* en *x=abc*, es arbitraria la combinación de dimensiones para la base, y la figura paralelógrama de ésta, é igualmente la inclinación del paralelepípedo respecto de la base. Es preferible sin embargo la figura rectangular por ser mas determinada, y también porque *x=abc* se puede considerar como caso particular de *x = abc· senu,* cuando el seno es igual al radio, y aquí *sen u = 1.* (p. 191)

Y termina explicando la construcción del caso general:

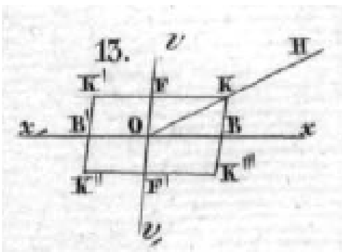
> Si la ecuación que se ha de construir fuere la mas general *x=abc· senu* se halla primeramente la línea *p=a·senu*; y resulta el paralelogramo *pb* ó *pc* para la base, que será cualquiera de las caras del paralelepípedo, quedando para la altura de éste la otra dimensión de *pbc.*

3. "Ecuaciones indeterminadas en la Geometría"

Por otra parte, y como ya hemos señalado, Odriozola también estudia la aplicación del Álgebra a la Geometría mediante el uso de sistemas de coordenadas, dedicando el capítulo II al estudio de las ecuaciones de primer y segundo grado, como se muestra en el índice (CEO2). De este capítulo nosotros analizaremos únicamente lo relativo a las ecuaciones de primer grado.

3.1. Sistemas de coordenadas

Comienza justificando la necesidad y el objeto de los sistemas de referencia que no ha utilizado en el capítulo anterior:



> 21. En los problemas de una sola incógnita el objeto es, como se ha visto, determinar un punto K de una recta fija *OH*, y basta para ello saber dirigir otra recta *BK* á quien pertenezca también el punto *K;* pues la intersección cumple sola con dichas condiciones. Pero si el punto *K* estuviese aislado en el plano fuera de toda recta de posición conocida, es preciso entonces para situarle saber cómo se dirigirán dos rectas en que se halle simultáneamente, lo cual exige dos ecuaciones finales.
> Con este motivo, y para facilitar medios de investigación, se establecen sistemas de líneas fijas á quienes puedan referirse todas las otras del plano, en cuanto á la posición que tienen respecto de aquellas. (p. 198)

Explica cómo dar la posición de un punto:

> Dirigiendo desde un punto *O*, arbitrariamente elegido, las rectas *Ox*, *Ov* de modo que formen cualquiera ángulo, y convenidos en que todo punto *K* del plano ha de ser intersección de rectas *BK, FK,* respectivamente paralelas á *Ov, Ox*; sólo habrá que hallarlas distancias *OB = FK=x, OF=BK=v,* sin que sea necesario complicar las espresiones con datos acerca de la respectiva dirección de las lineas *FK, BK.*(p. 198)

y continúa dando la definición de ejes coordenados y sus nombres:

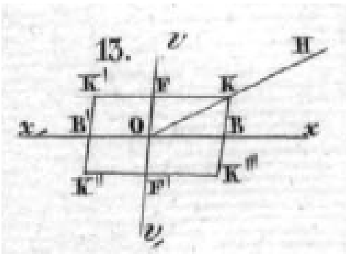
> Las rectas *Ox*, *Ov* fijas se llaman *ejes coordenados,* el uno de las *x*, el otro de las *v;* las partes *OB*, *OF* se dicen *abscisa y ordenada,* y ambas *coordenadas* del punto *K.* Comunmente se dice que *Ox* es el *eje de abcisas*, y *Ov* de *ordenadas*: el punto *O* es *origen de coordenadas.*(p. 199)

Obsérvese que aunque los ejes reciben los mismos nombres que en la actualidad, el de ordenadas es representado por *Ov*, y no *Oy* como es habitual hoy en día.

Tras esto explica el signo que toman las coordenadas de los puntos dependiendo de su posición respecto a los ejes y concluye:

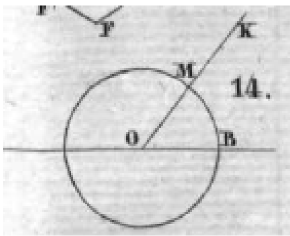
> De suerte que, si viene doble solución para una de las coordenadas *x, v,* hay dos puntos determinados; y si viene doble solución para las dos, hay determinados cuatro puntos. (p. 199).

y estudia los casos particulares en que una de las coordenadas es cero:



> Si resultasen las ecuaciones finales $\pm x = OB$, $\pm v=0$, el punto determinado *es B* ó *B'* en el eje de abscisas. Si las ecuaciones fuesen $\pm x=0$, $\pm v=OF$, el punto determinado es *F*, ó *F'* en el eje de ordenadas; éste es él caso de los problemas con una sola incógnita *v.*

Obsérvese que el signo lo lleva la variable, *x* o *v* y no el segmento, y en la figura 13 vemos que en los ejes también aparecen *x, -x, v, -v*. También define las coordenadas polares:

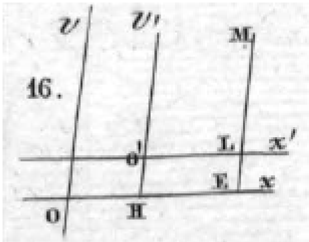


> El *sistema polar* consiste en medir los grados de un arco de círculo *BM,* contado desde un punto *B* fijo de la circunferencia, y al mismo tiempo la longitud de la recta *OK* llamada *radio vector;* de modo que siendo la circunferencia línea de las *u*, y línea de las *t* la recta indefinida *OM* que girando sobre su estremo *O* llamado *polo* es capaz de todas inclinaciones respecto de la fija *OB,* el punto *K* estará determinado cuando sean conocidos el arco *BM* en grados y la longitud *OK,* por las ecuaciones $u = a$, $t = b$. (p. 199)

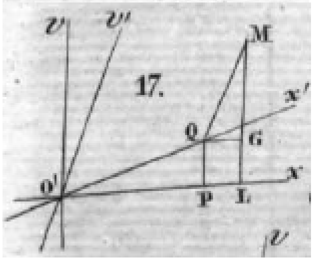
Y explica cómo pasar de unos sistemas de referencia a otros. Comienza explicando el porqué de este cambio y los tipos de cambios posibles, indicando tres, entre sistemas de coordenadas rectangulares u oblicuas, más tarde considera el paso de rectangulares a polares.

> 27 Alguna vez precisa el simplificar las ecuaciones para su mejor discusión, y con este objeto sustituir en lugar de las coordenadas *x, v* otras mayores ó menores, paralelas ó no á las primitivas*;* esto es, hay que *variar el sistema* coordenado. En el de ejes se hacen tres novedades principalmente, 1.ª Trasladar el oríjen *O* á otro punto, quedando las nuevas coordenadas *O'x', O'v'* paralelas á las primitivas. 2.ª Sobre el oríjen *O'* variar el ángulo de las coordenadas primitivas *O'x* y *O'v.* 3.ª Hacer á un tiempo las dos novedades, que es la mayor transformación posible. (p. 201)

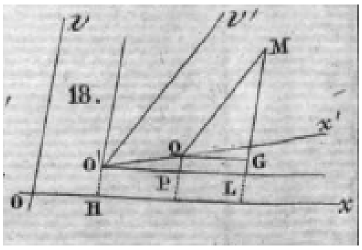
Y estudia cada uno de ellos:



CASO I.º Trasladar el oríjen O de coordenadas rectas á O', quedando paralelas á las primitivas las nuevas.



II.º Variar el ángulo de coordenadas rectas sobre el primer oríjen.



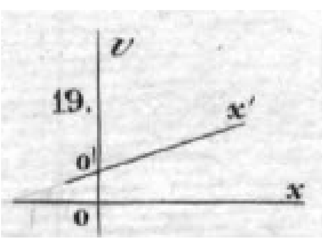
III.º Trasladar el orijen de coordenadas rectas y variar el ángulo juntamente.

Obteniendo las ecuaciones de cambio en cada caso. En el tercero, por ejemplo, da como ecuaciones de cambio:

$$x = dx' + gv' + \alpha \quad , \quad v = hx' + jv' + \beta \quad \ldots\ldots (4).$$

donde *x, v* son las coordenadas en el sistema antiguo, *x', v'* las coordenadas en el nuevo y *d, g, h, j* las definidas mediante las siguientes fórmulas que relacionan los ángulos de los ejes (p. 202):

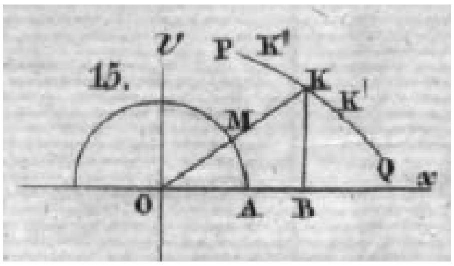
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{O'P}{O'Q} = \dfrac{sen\ x'v}{sen\ x\ v} = d \quad , \quad \dfrac{QG}{QM} = \dfrac{sen\ v'v}{sen\ x\ v} = g \\[2ex] \dfrac{PQ}{O'Q} = \dfrac{sen\ x'x}{sen\ x\ v} = h \quad , \quad \dfrac{GM}{QM} = \dfrac{sen\ x\ v'}{sen\ x\ v} = j \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$



De estas ecuaciones, dice, se obtienen las anteriores y otros casos particulares y pone como ejemplo el caso en que los ejes antiguos son perpendiculares, mientras que los nuevos son oblicuos y tienen por origen de coordenadas un punto situado sobre el eje de ordenadas antiguo, deduciendo de (4) las ecuaciones correspondientes. (p. 203)

Como hemos comentado, también estudia el cambio de coordenadas polares a un sistema de "líneas rectas":

29. Muchas veces hay que trasformar el sistema de coordenadas polares en el de lineas rectas, ó inversamente, con el fin de traducir la ecuación de un sistema á ecuación del otro, sustituyendo por *u, t* sus espresiones afectadas de *x, v*, ó sustituyendo por *x, v* espresiones afectadas de *u, t.*(p. 203)



Considera que el sistema es rectangular y el origen de coordenadas de uno es el polo del otro, en cuyo caso las ecuaciones de cambio son (p. 203):

$$x = t \cdot \cos u \;,\; v = t \cdot \operatorname{sen} u \;,\; x^2 + v^2 = t^2 \quad \ldots\ldots (5).$$

Donde *x, v* son las coordenadas en el sistema rectangular y *t, u* las polares. Para el caso general hace las siguientes apreciaciones:

Para las aplicaciones de estas fórmulas téngase entendido lo que para deducirlas hemos dado por supuesto. 1.º Cuando los ejes fueren oblicuos, hay que trasformarlos en perpendiculares de antemano por la fórmula ((3))' 2.º El eje de las *x* del sistema de coordenadas rectas es oríjen de los ángulos del polar. 3.° El oríjen de los ejes del sistema de rectas ha de ser polo del otro sistema. (p. 203)

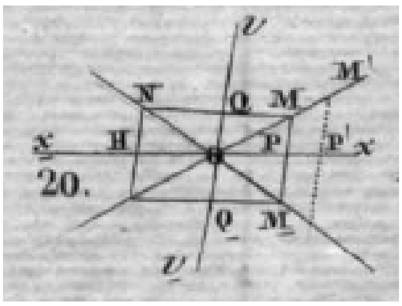
3.2. Ecuaciones de la recta

Tras estudiar los sistemas de coordenadas, estudia la ecuación de la recta a la que dedica la lección II titulada *Análisis geométrica de la ecuacion (sic) de primer grado con dos variables.*

Comienza dando las ecuaciones general y explícita, aunque él no las denomina así:

30. La ecuación de primer grado con las variables *x, v*es $Av+Bx+C=0$; *y* despojando de coeficiente á su primer término, recibe la forma $v=\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}$, en que son positivos ó negativos *A, B, C.* Si es *C*=0 queda la ecuación reducida á, $v=\frac{B}{A}x$. Suponiendo $\frac{B}{A}=a, \frac{C}{A}=b$, serán las ecuaciones de ambos casos $v=ax+b; \quad v=ax$ (p. 204).

Tras esto, deduce que la ecuación *v=ax* representa una recta y de ahí obtiene el significado de *a:*



Construida la recta *OM,* ybajadas desde sus puntos las *MP, M'P',...* paralelas al eje de las *v,* satisfacen todos á la ecuación; porque, siendo *x* cualquiera abscisa *OP*, y *v* su correspondiente ordenada *PM,* siempre se verifica $\frac{v}{x}=\frac{B}{A}$. De modo que *v=ax* es la relación general de abscisa y ordenada, pertenecientes á cualquiera punto de la recta *O M* que pasa por el oríjen.

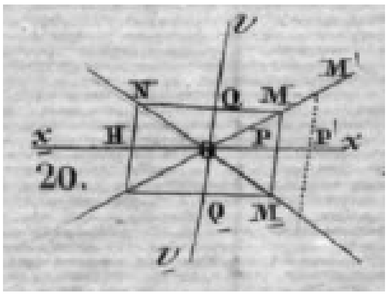
y concreta más, buscando la relación entre el coeficiente y los ángulos que forma la recta con los ejes, que considera oblicuos en un principio:

> Para mejor concebir la significación del coeficiente *a,* obsérvese que el triángulo *OMP* da $a = \dfrac{B}{A} = \dfrac{senMOx}{senMOv}$:

aunque después considera el caso de ejes perpendiculares ya que en estos se simplifica la expresión de *a:*

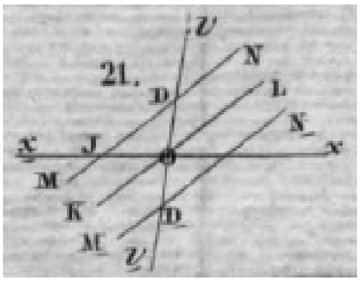
> y como en el sistema perpendicular es *senMOv=cosMOx*, y de resultas *a=tangMOx;* por esta simplicidad, siempre que fuere arbitrario el sistema de los ejes, conviene para las construcciones elegir el perpendicular (p. 204).

Y termina estudiando el caso en *a* es negativo:



> Si *a* es negativa, proviene del signo de uno de los senos, ó lo que es lo mismo de sus proporcionales *B y A.* Suponiendo negativa B, si se baja la ordenada $P\underline{M} = -B$, y se dirige la recta $O\underline{M}$, todos los puntos de ésta satisfacen á la ecuación $v = -ax = \dfrac{-B}{A}x$; pues, verifícase la proporcionalidad entre las ordenadas *v* negativas y las abscisas *x* positivas.
>
> Siendo *a* negativa por *A*, la ecuación $v = -ax = \dfrac{B}{-A}x$ exige que se tome *OH=-A;* y levantada *HN=B* ,será*ON* la línea, y prolongación de $O\underline{M}$. La recta $N\underline{M}$ será pues á quien corresponda la ecuación *v=-a x,* en que *-a* espresa la razón entre los senos de los ángulos que forma con los ejes (p. 205).

Obsérvese que identifica la constante con su valor absoluto, pues si es negativa escribe *–a*.

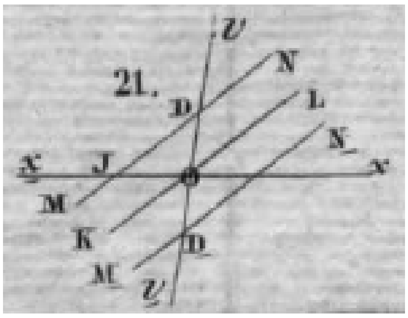


> Seguidamente estudia la construcción de la ecuación general *v=ax+b*, para ello hace el cambio de variable *v-b=v'*, que la reduce a *v'=ax*, caso anterior. Llega a la conclusión de que la recta buscada es la paralela a *v=ax* que corta al eje de ordenadas en el punto *OD=b.* De nuevo hace la distinción entre constantes positivas y negativas estudiando también el caso *v=ax-b*, y posteriormente cuando *a* es negativa, como en el punto anterior (pp. 205, 206).

Tras este análisis llega a las siguientes conclusiones generales:

> 33. Por la análisis geométrica que acabamos de hacer se deben establecer los siguientes principios.
>
> I.° *Toda ecuación de primer grado con dos variables espresa la naturaleza de una linea recta,* y *cada ecuación no pertenece mas que á una sola,* porque dos puntos nunca pueden ser comunes á dos distintas.
>
> 2.°*La ecuación general de primer grado v= ax+b…* (6) *es de una recta,* que *sin pasar por el oríjen, corta al eje de las v en el punto D ó D' á la distancia OD=±b.*

La ecuación $v = ax$....(7) *sin el término constante, es de una recta que pasa por el oríjen. En una y otra la inclinación de la recta está espresada por* $a = \frac{senLOx}{senLOv}$...(8), *razón entre los senos de los ángulos que forma con los ejes coordenados. En el sistema perpendicular esa = tang LO x* ... (9).



3°.Si en la ecuación *v=ax* de la recta que pasa por el orijen es *a= 0*, por sen*LOx=0*, la recta coincide con el eje de abscisas, *y la ecuación v=0* ..... (10) *que resulta es de dicho eje de abscisas.*

Si es *a*=∞ por *senLOv=0,* la recta coincide con el eje de las *v,* y resulta *la ecuación del eje de ordenadas.*
4.° Si en la ecuación *v=ax+b* de la recta que pasa fuera del orijen es *a=0* por *senLOx=0* , resulta la trasformada *v'=0* ecuación del eje de abscisas , y la propuesta viene á ser $v = \pm b$ .... (12),*ecuación de la recta MN ó* $\underline{M}\,\underline{N}$ *paralela al eje de abscisas, y que corta al de ordenadas á la distancia b positiva ó negativa.* Si es *a*=∞ sustituyendo en la transformada *v=ax,* resulta *x = o* ecuación del eje de ordenadas como ya se sabe (3.°), y de consiguiente la línea de la ecuación propuesta *v=ax+b* es una paralela á dicho eje. A fin de averiguar el carácter de su ecuación, sustitúyase por *A* el valor que en este caso le pertenece (31) y ((8)), á causa de *senLOv=0,* $A = B\frac{senLOv}{senLOx} = 0$ en *Av+Bx+C=0,*y por la variedad que admite de signos resulta $x = \pm\frac{C}{B}$ .De suerte que, suponiendo la constante $\frac{C}{B} = c$, será $x = \pm c$ ....(13) *la ecuación de la recta* $M\underline{M}$ *ó* $N\underline{N}$ *paralela al eje de ordenadas, y que corta al de abscisas á la distancia* ± c (p. 207).

Es decir deduce, además de las ecuaciones de los ejes, las de las rectas paralelas a ellos.

En el punto siguiente explica cómo representar la gráfica de estas ecuaciones, sabido ya que corresponden a una recta. Explica que el método general es el de calcular los puntos de corte con los ejes y representar la recta mediante esos dos puntos. En el caso en que la recta pase por el origen dice que se "hace *x=1* en la ecuación *v=ax,* y sale *v=a*"(p. 208), pero no da la posibilidad de dar otros valores a la abscisa para calcular otros puntos.

Tras esto propone y resuelve tres ejercicios que hemos recogido en la parte de fenomenología.

También obtiene la ecuación punto-pendiente, aunque él no la llama así:

Si la recta ha de pasar por un punto *M(*α , β*),* la ecuación general *v= ax+b*quedará satisfecha sustituyendo los valores α por *x,* y β por *v,* de que resulta

$$\beta = a\alpha + b \text{ y de aquí } b = \beta - a\alpha :$$

Eliminando *b* entre ésta y la general, se halla para espresar la posición de la recta que pasa por un punto *M(*$\alpha\beta$*),*

$$v-\beta=a\left(x-\alpha\right) \text{....(14) (p. 210)}$$

y la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, *M*(α, β) y *N*(α', β'), obteniendo en este caso las ecuaciones $v=\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}x+\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha-\alpha'}$ y $v-\beta=\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}(x-\alpha)$ (p. 210)
También estudia el caso particular de que uno de los dos puntos sea el origen de coordenadas, obteniendo $v=\frac{\beta}{\alpha}x$. (p. 211); y concluye recalcando el apoyo del Álgebra a la Geometría:

> El cálculo nos manifiesta pues aquí los dos principios siguientes que sabemos desde la Geometría elemental: I.° que dos puntos determinan la posición de una recta; 2.° que siempre se puede hacer pasar una recta por uno ó dos puntos dados.

Estudia otras cuestiones relacionadas con la recta y el punto como son el punto de corte de dos rectas, el ángulo que forman, le ecuación de la bisectriz de dicho ángulo, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad y la distancia entre dos puntos, y de un punto a una recta, que hemos recogido en el apartado de fenomenología como en el caso de otros autores.

4.4.3.2. Sistemas de representación

En esta obra solo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico, que aparece en forma de expresiones algebraicas; y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente las construcciones geométricas. No utiliza tablas, ni siquiera en los ejercicios en los que representa una recta conocida su ecuación. En este caso no hace una tabla para recoger los puntos que halla, sino que da su abscisa y su ordenada de forma independiente para cada uno de ellos.

Odriozola define expresiones homogéneas (U), ejes de coordenadas y los elementos que definen un punto en coordenadas polares (C).

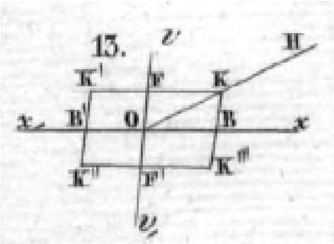
Las explicaciones de las construcciones geométricas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E). Suele terminar los puntos, o un conjunto de puntos, de estudio con conclusiones generales a modo de resumen (E, PRAN). También obtiene resultados generales en los problemas planteados en el capítulo II (PRD, PRAN).

En esta obra no encontramos teoremas, pero algunas de las conclusiones o resultados generales de las que hablábamos anteriormente los da en forma de enunciado. (E)

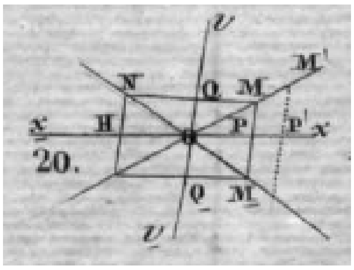
Se hace uso del lenguaje simbólico continuamente, en ambas partes de la obra, hecho evidente al tratar la misma de traducir los problemas geométricos al lenguaje algebraico. En la primera parte nos encontramos la construcción de las fórmulas y el uso de ecuaciones en la resolución de los problemas (E, PRDT).

En la segunda parte encontramos diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la tangente del ángulo que forman dos rectas, de la distancia entre dos puntos y las fórmulas de cambio de coordenadas, entre otras muchas(ER, PRAN, PRDI, C).

También hay que reseñar las diferencias de notación de este autor con respecto a la actual, pero también a la utilizada por otros autores de la época. Mostramos algunos ejemplos representativos, que podemos ver en la parte del análisis de contenido y de fenomenología:



- Denota al eje de ordenadas con *Ov* y no con *Oy* (C).
- Los ejes de coordenadas los escribe $x, \underline{x}, v, \underline{v}$, figura 13 (C) .
- Cuando indica los ángulos que forman los ejes de coordenadas escribe el signo de estos debajo de la letra que lo denota, como explica en el punto 22 (p.199), en el que explica algunas convenciones de notación que utilizará (C):



32. En adelante, para simplificar el lenguaje usaremos ciertas espresiones abreviadas: se enunciarán á veces los cuatro ángulos que forman los ejes, suprimiendo la letra *O* del origen, como ángulo$x$ v, ángulo $\underline{x}$ v, ángulo $\underline{x}$ $\underline{v}$, ángulo x $\underline{v}$. (p. 199)

- Para denotar un punto con una de sus coordenadas negativas escribe el signo debajo de la letra que lo designa, de forma similar a como hace con los ejes (C):

(...) Suponiendo negativa *B*, si se baja la ordenada $P\underline{M} = -B$, y se dirige la recta $O\underline{M}$, todos los puntos de ésta satisfacen á la ecuación $v = -ax = \frac{-B}{A}x$; (...) (p. 205)

- Utiliza una notación peculiar cuando trabaja con varias rectas (ER), notación que explica al comienzo del punto 37 (p. 211):

37- También se determinan las constantes de la ecuación ((6)) por otro sistema de condiciones. Mas, antes de principiar la teoría debemos advertir, que muchas veces en adelante versa el cálculo sobre las circunstancias de dos ómas líneas que se refieren á un mismo sistema de coordenadas, y para distinguir sus ecuaciones marcaremos con el acento — las letras de una de ellas, y con el acento ⌣ las de otra cuando haya tres ecuaciones. Asimismo téngase entendido que, mientras no se diga lo contrario, se usará el sistema de coordenadas perpendiculares. (p. 211)

Por otra parte señalar que los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él (CEO1). Como en otros autores encontramos dos tipos de gráficos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas determinados resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución (PR).El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, de diferentes tipos, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso, en sus razonamientos (SN, E, C, N, ER).

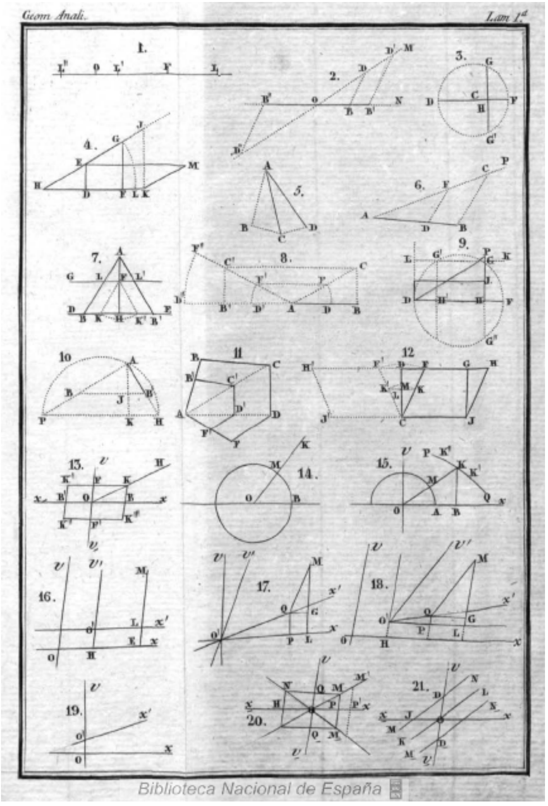


Figura 44: Lámina 1ª. Curso completo de Matemáticas puras. J. Odriozola

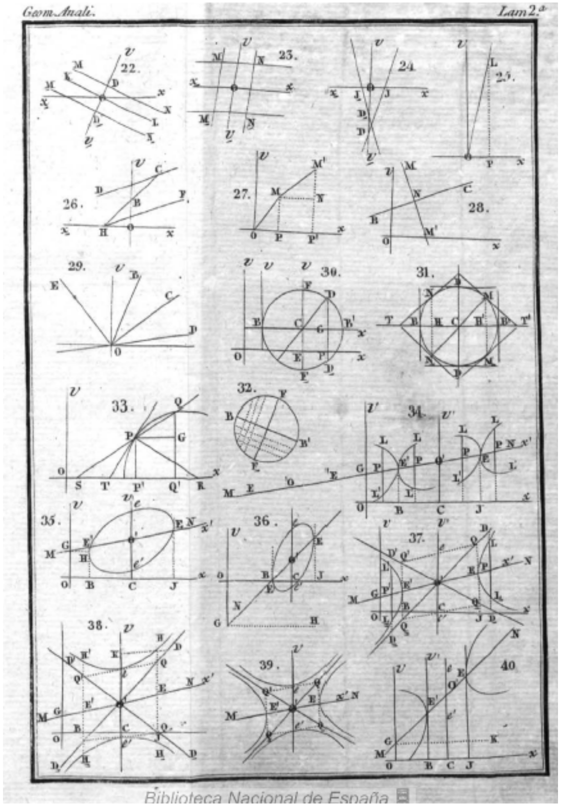


Figura 43: Lámina 2ª. Curso completo de Matemáticas puras. J. Odriozola

4.4.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático y en particular geométrico, pero podemos distinguir cuatro tipos de problemas.

Los primeros, que resuelve en la lección II del capítulo primero, son problemas en los que muestra cómo construir las fórmulas de primer y segundo grado y las soluciones negativas (SN, PRDT).

En la lección II del capítulo segundo tras explicar cómo representar una recta dada su ecuación, propone construir tres rectas "para allanar los obstáculos que la práctica suele ofrecer" (p.208), lo que podríamos denominar más bien ejercicio que problema (PREJ).

En esta misma lección podemos encontrar otros problemas en los que utiliza la teoría sobre rectas que ha desarrollado en puntos anteriores de esa lección, y que dan resultados generales. Estos problemas, podemos, asimismo, clasificarlos en dos tipos: Por una parte se tienen una serie de resultados teóricos, todos ellos conducentes a fórmulas generales, como pude ser calcular la distancia entre dos puntos; y por otra parte cinco problemas propiamente dichos, en los que el autor utiliza las fórmulas calculadas de forma teórica, como por ejemplo calcular la distancia de un punto a una recta (PRAN, PRD, PRP).

Tenemos por tanto cuatro tipos de problemas atendiendo a su fenomenología. Enunciamos todos ellos pero solo mostraremos la resolución de los que hemos considerado más significativos:

1. Para mostrar la construcción de expresiones algebraicas (PRDT)

Dedica la lección II, que titula *Ensayo sobre el modo de cifrar en ecuaciones las cuestiones geométricas determinadas,* a resolver seis problemas "con el objeto de manifestar la diferencia de métodos en la resolución de problemas determinados acerca de la estension, ya gráficamente ó por medios de pura Geometría, ya planteando y resolviendo como los generales de la cantidad para construir al fin la solución (...)"(p. 192).

I.º Dividir la recta AB en dos partes que tengan la relación dada $\frac{m}{n}$.

II.º Desde un punto A dado en la recta HA perpendicular á GF, dirigir á dos paralelas DE y GF una oblicua AB, de tal modo que su parte LB comprendida entre las paralelas tenga una longitud c determinada.

III ° Cortar la recta AB en media y estrema razon, es decir, en dos partes de manera que la mayor sea media proporcional entre la menor y el todo

1V.°Dada la recta DF, dividirla en dos partes con las cuales ha de formarse rectángulo igual aún cuadrado conocido m^2.

V.° Dado un polígono ABCDF... , construir otro semejante cuya área esté con la primera en la razon de números $\frac{n}{m}$.

VI° Construir un paralelógramo de igual área que un rectángulo dado CG.

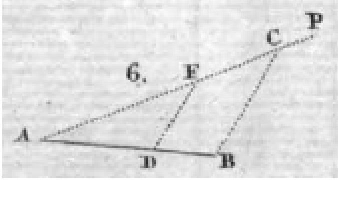
Hay que señalar que Odriozola hace en primer lugar la construcción geométrica basándose en los principios de la Geometría elemental, tras ella resuelve el problema de forma algebraica y por último construye la solución algebraica utilizando los métodos explicados en el capítulo anterior.

Incluimos las soluciones de los problemas I, III, IV y V. Los tres primeros problemas están resueltos también por otros autores, al igual que el II, que lo resuelve exactamente igual que Alberto Lista, por lo que no lo repetiremos aquí. Sin embargo la solución que propone Odriozola para los problemas I, III y IV es distinta a la de otros autores. También incluimos la solución del problema V por ser novedoso, no encontrándose en otras obras. La solución del VI es análoga a la del V por lo que la hemos excluido.

I.º Dividir la recta AB en dos partes que tengan la relación dada $\frac{m}{n}$.

En el primer problema muestra un ejemplo de construcción de un cociente.

Como hemos dicho, primero lo resuelve por medios puramente geométricos:



En el artículo (38) de Geometría elemental se halló la solución gráfica, que consiste en formar un ángulo *PAB* con la recta *AB, y* otra *AP* de cualquiera inclinación; tomar en ésta las partes *AF=m, FC=n*; trazar *CB* y su paralela *FD*, por lo cual será cortada *AB* como dice la relación $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$ (p. 192).

Tras esto resuelve el problema de forma algebraica:

> **PRA:** Para resolverle analíticamente, nombramos a la recta *AB*, x la parte *AD* desconocida; y será la parte restante *DB*=*a*-*x*. La espresion del problema es $\frac{x}{a-x}=\frac{m}{n}$ y despejando *x*, viene la solución analítica $x=\frac{am}{m+n}$.

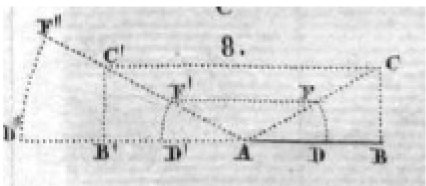
Y construye geométricamente la solución:

> **RG:** Construyendo esta ecuación como ya se sabe (8), dará el mismo resultado que se hallo del otro modo: esto es, tomando en cualquiera recta *AP* las partes *AF=m,* y *AC=m+n,* se dirigen *CB y* su paralela *FD*; y resultará ser *D* el punto en que se divida la recta propuesta. (p. 192)

III.º Cortar la recta AB en media y estrema razón, es decir, en dos partes de manera que la mayor sea media proporcional entre la menor y el todo.

En este problema encontramos la construcción de un radical y de una solución negativa. También se encuentra resuelto en la obra de Zorraquín, en cuyo análisis está incluida la solución que es distinta de la de Odriozola. Mientras que Zorraquín lo utiliza para introducir las soluciones negativas, deduciendo que en algunos casos indican un problema más general que el propuesto, Odriozola elimina esta posibilidad imponiendo que el punto buscado se encuentre entre A y B, desechando la solución negativa, como veremos.

Como en los demás problemas hace mención a la solución geométrica, pero en este caso no la incluye, porque señala que ya se halló en la parte de Geometría. Tras esto halla la solución por métodos algebraicos:



> **PRA:** Para resolver analíticamente la cuestión, sea *AB=a,AD=x*, de que resulta *DB=a-x*, y el problema cifrado en $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$. Prepárese por las reglas del Algebra esta ecuación para resolverla, y despejando x se hallará $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}$ (p. 193)

Y como siempre construye la solución:

> **RG:** Habiéndola de construir, elévese la perpendicular $BC=\frac{1}{2}a$ y será $AC=\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}$. Tomando en la recta *AC* la parte *CF=CB* , y en la recta *AB* la parte *AD=AF,* se tiene $AD=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)}$ (p. 194).

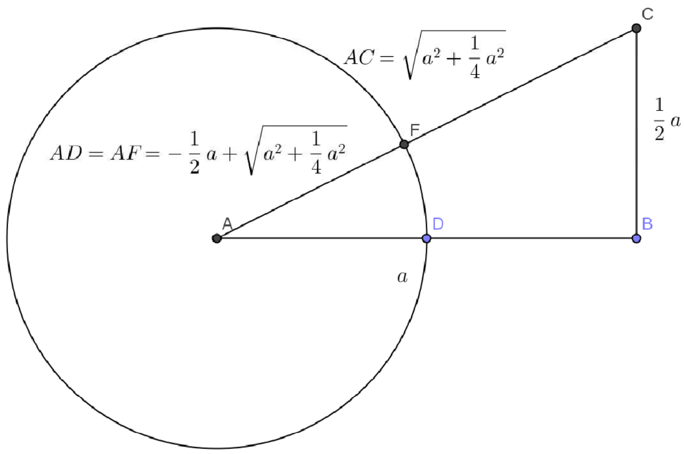


Figura 45: Construcción de $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{4}a^2\right)}$ **sobre AB**

Y después construye la negativa, aunque en este caso la desecha:

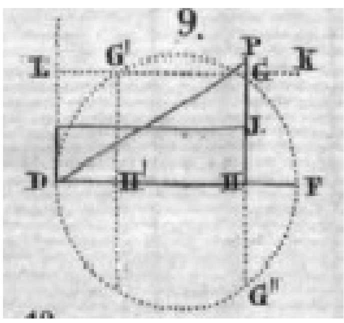
> Para construir la otra raiz hállese $AC' = -\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{4}a^2\right)}$, y por análogas operaciones ácia esta parte, será *AF"=AD"* del valor $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{4}a^2\right)}$; sin embargo de que esta raiz no hace al caso, pues el problema exige que el punto de división se halle entre *A* y *B*(sic)(p. 194).

Obsérvese que Odriozola no comprueba, como otros autores, que la solución construida es la correcta, es decir es la cuarta proporcional buscada. Sabe que es la solución del problema porque lo ha resuelto antes geométricamente, pero no comprueba que, en efecto, coincide con la solución algebraica.

IV.° Dada la recta DF, dividirla en dos partes con las cuales ha de formarse rectángulo igual á un cuadrado conocido m².

En este problema lleva a cabo la construcción de un área. Obsérvese que toma como área m^2, y no una cantidad *m*, para conseguir así que la ecuación obtenida sea homogénea, sin necesidad de utilizar la unidad.

Este problema también se encuentra resuelto por Alberto Lista, pero la construcción de la solución es distinta, por esa razón también incluimos esta.



Como en casos anteriores primero hace la construcción por medios puramente geométricos:

> Después de construir el semicírculo sobre el diámetro *DF*, y elevar en *D* la perpendicular definida, tómese en ella *DL=m;* la recta *LG* paralela al diámetro corta la circunferencia en dos puntos G,G', y las perpendiculares *GH, G'H'* cortarán al diámetro en los puntos *H, H'* según está pedido; y bastaba uno de ellos para la solución. (p. 194)

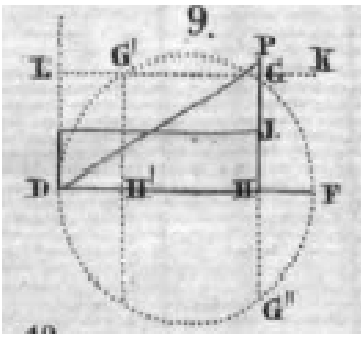
Y después con ayuda del Álgebra:

> **PRA:** Tratándose de resolver el problema propuesto IV.º analíticamente, sean *DF=a, DH=x,* y por ello *HF=a-x;* la cuestión cifrada en este lenguaje será $x(a-x)\ =\ m^2$ de donde $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-m^2\right)}$. (p.194)

En este caso no desarrolla la construcción de la solución, pero sí da su interpretación geométrica:

> **RG:** Constrúyase *x* según manifiesta la espresion, y se tiene el lado del rectángulo en que será el otro *a-x,* con la misma área que un cuadrado m^2; ó una dimensión del paralelógramo de la misma área que tenga por base y altura las líneas *x, a-x*; y aun si se quiere, de un triángulo equivalente que tenga por base y altura las respectivas lineas*x* y*2(a-x).* Con facilidad se nota en la solución que el problema es imposible cuando los datos incurran en el caso $m>\frac{1}{2}a$.(p. 195)

Tras esto plantea el problema inverso y lo resuelve:



> Inversamente; si, dado un paralelógramo de las dimensiones *x* y *a-x,* se quiere un cuadrado de igual área, está cifrada la cuestión en la misma fórmula pero entonces es *m* la incógnita, *a* la suma de las dos dimensiones del paralelógramo dado, y *x* una de ellas por supuesto conocida.
> La solución viene á ser $m=\pm\sqrt{x(a-x)}$ que se construye formando el círculo con el diámetro *a,* y elevando una perpendicular desde el punto en que se unen sus partes *x* y *a-x*. En este caso *HG, HG"* iguales de signos contrarios satisfacen, y el problema no es posible cuando x > a. (p. 195)

Obsérvese que la construcción geométrica de la solución algebraica tiene muchas similitudes a la construcción de la solución obtenida únicamente por métodos geométricos.

Tras esto obtiene la siguiente conclusión, que apoya el empleo del Álgebra en la resolución de los problemas geométricos:

> En vista de la reciprocidad de los dos problemas cifrados en una misma ecuación, se recuerda lo observado en los principios del Algebra acerca de que una fórmula espresa diversos problemas, según se trate como incógnita una ú otra de las cantidades que entran en ella. (p. 195)

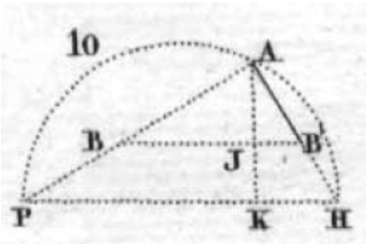
V.°Dado un polígono ABCDF... , construir otro semejante cuya área esté con la primera en la razon de números $\frac{n}{m}$.

En primer lugar construye como en los otros casos la solución mediante métodos de la Geometría elemental.

Comienza deduciendo las condiciones que tienen que cumplir los lados homólogos de ambos polígonos.

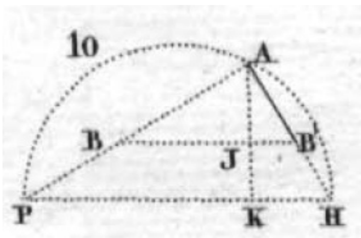
> Hay que hallar un lado *AB'* homólogo de *AB:* y para ello, las dos condiciones de ser las áreas como los cuadrados de lados homólogos por su naturaleza, y como las líneas ó números *n, m* por el dato, producen la relación $\frac{AB'^2}{AB^2} = \frac{n}{m}$. (p. 195)

Antes de construir la solución recuerda una propiedad de los lados de un triángulo rectángulo:



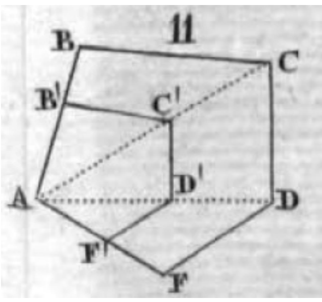
> Debiendo primero resolver el problema gráficamente; recuérdese que la perpendicular *AJ* bajada desde el vértice del ángulo recto á la hipotenusa *BB'*, divide á ésta en dos partes *BJ,]B'* cuya razón es (Geom. elem. 83)
>
> $$\frac{\boldsymbol{AB'^2}}{\boldsymbol{AB^2}} = \frac{\boldsymbol{JB'}}{\boldsymbol{JB}}$$
>
> Por otra parte, prolongados los catetos y la perpendicular, los segmentos de todas las paralelas á *BB'* están en la razón $\frac{\boldsymbol{JB'}}{\boldsymbol{JB}}$. (p. 196)

Y utiliza este resultado para construir el lado buscado *AB'*, pero lo hace fuera del polígono y luego lo traslada a él:



> Tírese pues una recta indefinida *y* tomando en ella las partes *PK=m, KH=n,* constrúyase sobre el diámetro *PH* el semicírculo, y levántese en *K* perpendicular. Fórmese el triángulo rectángulo *PAH;* y después de trasladar al cateto A*P* el lado *AB* del polígono dado, diríjase *BB'* paralela á *PH,* y será *AB'* el lado que se busca homólogo de *AB.*(p. 196)

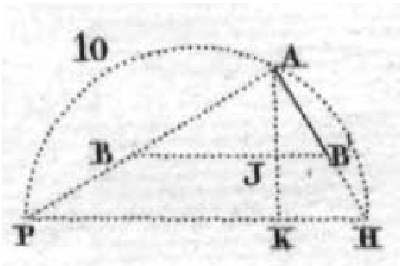
Por último construye el polígono pedido:



> Para construir el nuevo polígono conforme á lo espuesto (Geom. elem. 105), se hallan los demás lados por cuartas proporcionales; ó bien sobre el mismo polígono empezando desde *B'*, se trazan *B'C, C'D'* …paralelas á los respectivos lados de *ABC*…que serán cortadas debidamente por las diagonales *AC, AD,* ....(p. 196)

Por último obtiene la solución utilizando el Álgebra:

PRA: La análisis manifiesta el resultado del mismo problema con mucha presteza; pues con las notas *AB*=$q$yde su homólogo desconocido *AB'*= x, el problema es $\frac{x^2}{q^2} = \frac{n}{m}$, y la solución $x = \frac{q}{m}\sqrt{mn}$.



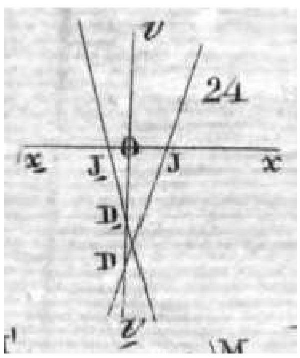
RG: Se construye elevando primeramente la perpendicular$KA=\sqrt{mn}$en el circulo cuyo diámetro es $PK+KH=m+n$, para después hallar una cuarta proporcional x á las rectas q, $\sqrt{mn}$, m. (p. 196)

Por último hace el comentario de que esto se puede generalizar al caso de los círculos y otras figuras semejantes.

> Lo dicho para los polígonos tiene lugar también cuando sean círculos y cualesquiera figuras semejantes. (p. 196)

2. Ejercicios. (PREJ)

Los primeros problemas que plantea el autor en la parte dedicada a las ecuaciones indeterminadas son en realidad ejercicios, consistentes en representar una serie de rectas dadas sus ecuaciones:



> (…) constrúyanse las siguientes ecuaciones numéricas para allanar los obstáculos que la práctica suele ofrecer, aunque se posea la teoría.
>
> I.ª $3v-9x+5=0$ da $v=3x-\frac{5}{3}$ haciendo $x=0$, $v=0$ sucesivamente, vienen $v=-\frac{5}{3}, x=\frac{5}{9}$ luego, la línea corta á el eje de las v negativas y á el de las x positivas. Tomando pues $OD=-\frac{5}{3}, OJ=\frac{5}{9}$, será DJ la recta que dice la ecuación. (p.208)

Además de estas rectas construye, de forma análoga las rectas $4v+12x+3=0$ y $\frac{15}{4}-2v+10x-3-\frac{3}{4}$=0, esta última reduciéndola en primer lugar a $v=5x$. (p. 209)

3. Para obtener fórmulas generales (ER, PRD, PRAN, PRI)

Con este objeto calcula la tangente del ángulo que forman dos rectas en función de sus pendientes, y con este resultado obtiene las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas. Utilizando esto obtiene la ecuación de una recta que forma un ángulo dado con otra conocida, cuyo cálculo veremos a continuación. Todo ello lo plantea como resultados teóricos, no como problemas. También obtiene de esta manera la distancia entre dos puntos.
Como hemos dicho calcula la tangente del ángulo que forman dos rectas en función de sus pendientes $a, \bar{a}$, siendo esta (p. 212):

$$tang\, A=\frac{a-\bar{a}}{1+a\bar{a}} \quad \ldots\ldots (18).$$

De la que deduce las condiciones de paralelismo y perpendicularidad obteniendo la "condición de ser entre sí paralelas está cifrada en $a = \overline{a}$ ... (19) y la condición de ser perpendiculares, en $1 + a\overline{a} = 0$ ... (20)" (p. 212).

Utilizando todo esto resuelve la cuestión de determinar la dirección de una recta conocida otra y el ángulo que forman ambas:

> Supongamos que se quiera determinar la dirección de una línea, dada otra y el ángulo que formadas dos entre sí; claro es que se pide conocer *a*, dados $\overline{a}$ y *A;* que sustituyendo por *a* el valor que resulte en la ecuación de la recta á que corresponde, queda aun indeterminada *b* en ella; por lo cual satisface á la cuestión cualquiera de las líneas que formen con el eje de abscisas un mismo ángulo *a*. Cuando se quiera fijar completamente la posición de la que se busca, es necesario otro dato mas, como por ejemplo un punto (α, β) por donde ha de pasar (p. 212).

y lo resuelve :

> Sea la recta dada $\overline{v} = \overline{ax} + \overline{b}$
>
> y la desconocida $v = ax + b$:
>
> si ha de ser esta paralela, perpendicular ó de inclinación dada por la tangente trigonométrica *tang A=m,* las relaciones ((18)) ((19)) y ((20)) dan el valor correspondiente de *a* (...). En cada uno de los tres hay número indefinido de rectas, por la indeterminada *b*, espresadas como corresponde,

recogiendo las diferentes posibilidades en la siguiente tabla (p. 213):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{las paralelas, en} \ldots\ldots\ldots & v = \overline{a}x + b; \\ \text{las perpendiculares, en} & v = -\dfrac{1}{\overline{a}}x + b; \\ \text{las que forman el ángulo dado por su tangente } m\text{, en} \ldots & v = \dfrac{\overline{a} + m}{1 - \overline{a}m}x + b \end{array}\right\} (21).$$

Considera además el caso de que la recta pase por un punto (α, β) resumiendo las diferentes posibilidades en la tabla (p. 213):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{la paralela, en} \ldots\ldots & v - \beta = \overline{a}(x - \alpha); \\ \text{la perpendicular, en} & v - \beta = -\dfrac{1}{\overline{a}}(x - \alpha); \\ \text{la del ángulo dado por la tangente } m\text{, en} & v - \beta = \dfrac{\overline{a} + m}{1 - \overline{a}m}(x - \alpha) \end{array}\right\} (22).$$

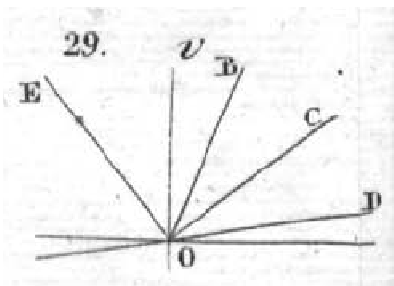
4. **Para ejemplificar cómo resolver problemas mediante el uso de sistemas de coordenadas (PRAN, PRD, PRI, PRP)**

Tras obtener los resultados teóricos que hemos expuesto en el punto anterior plantea y resuelve los cinco problemas que enunciamos a continuación:

> *I.ºHallar el punto en que se cortan dos rectas, dadas por sus ecuaciones* $v = ax + b$, $\bar{v} = \overline{ax} + \bar{b}$. *(p. 214)*
>
> *II.º Desde un punto* $M(\alpha, \beta)$ *dirigir una perpendicular á la recta BC, dada por su ecuación* $\bar{v} = \overline{ax} + \bar{b}$.
>
> *III.º ¿Cuál será el punto N en que se corten las dos rectas perpendiculares entre sí* $\bar{v} = \overline{ax} + \bar{b}$, $v - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$ *? (p. 215)*
>
> *IV.º Hallar la distancia mas corta Δ entre el punto* $M(\alpha, \beta)$ *y la recta BC dada por su ecuacion* $v = ax + b$*. (p. 216)*
>
> *V.º Dividir en dos partes iguales el ángulo BOD formado por las rectas OB, OD, dadas por sus ecuaciones respectivas* $v = ax, \breve{v} = \breve{a}\breve{x}$.

La forma de resolver estos problemas es muy similar a la vista en el punto anterior y a la actual por lo que solo incluimos el quinto a modo de ejemplo:

V.º Dividir en dos partes iguales el ángulo BOD formado por las rectas OB, OD, dadas por sus ecuaciones respectivas $v = ax, \breve{v} = \breve{a}\breve{x}$ **.**



Para resolverlo utiliza que las tangentes de los ángulos *BOC, COD* (fig. 29) que valen $\frac{a - \breve{a}}{1 + a\breve{a}}, \frac{\breve{a} - \bar{a}}{1 + \breve{a}\bar{a}}$ respectivamente, deben ser iguales. De esa ecuación obtiene otra de segundo grado (p. 216)

$$\breve{a}^2 - 2\left(\frac{a\bar{a} - 1}{a + \bar{a}}\right)\breve{a} - 1 = 0.$$

Que no resuelve, sino que simplemente deja planteada la solución final del problema:

> Hallando el valor de $\breve{a}$ con doble signo, y sustituido en la ecuacion $\breve{v} = \breve{a}\breve{x}$, se podrán construir las rectas *OC, OE* que correspondan á ella. (p. 216)

Lo que sí hace es deducir que las dos rectas que se obtienen son perpendiculares:

> Con objeto de averiguar una circunstancia notable de esta cuestion, supongamos *p* y *q* los dos valores de $\breve{a}$; como el último término de la ecuación de segundo grado es producto de sus raices, y en el caso actual *pq=-1*, resulta $q = -\frac{1}{p}$ de modo que las rectas *OC, OE* de las ecuaciones $\breve{v} = p\breve{x}, \breve{v} = -\frac{1}{p}\breve{x}$ son perpendiculares entre sí. (p.217)

4.4.4. Conclusiones

Tenemos una obra dividida en dos partes claramente diferenciadas, como hemos visto, en metodología y contenidos, hecho que también se da en otros autores de este siglo. Pero este texto tiene una serie de características que lo diferencian de los demás.

En primer lugar llama la atención la notación utilizada, diferente en muchos aspectos a la utilizada en la actualidad, pero también a la utilizada por otros autores contemporáneos de Odriozola.

Por otra parte el uso del segmento unidad de forma explícita, no solo de forma teórica sino en algunos casos particulares como hemos visto.

Un elemento importante en el estudio de las cantidades negativas es que este autor estudia cómo se pasa de una cantidad positiva a negativa, y viceversa, llegando a la conclusión de que esto puede ocurrir a través de cero o infinito. Esto solo lo hacen de forma análoga Alberto Lista y Zorraquín, aunque estos estudian las magnitudes negativas de manera más formal y exhaustiva que Odriozola, especialmente Zorraquín.

También señalar la forma en la que resuelve los problemas, única en este autor, mostrando en primer lugar la solución obtenida utilizando únicamente la Geometría elemental y después la obtenida con ayuda del Álgebra. Esta manera de enfocar la solución de un problema permite dos cosas, por una parte comparar cuál de los dos métodos da una solución más sencilla y por otra se puede observar que, generalmente, la construcción geométrica de la solución algebraica es muy similar a la hecha de forma puramente geométrica, es decir en este caso la Geometría va en auxilio del Álgebra, y además podemos deducir por qué razón el autor lleva a cabo esa construcción y no otra, cosa que no ocurre en otros autores.

Por último señalar que esta obra, aunque según lo expuesto por el mismo autor en el prólogo iba destinada fundamentalmente a las escuelas militares, también se utilizó como texto en los centros de enseñanza como acredita su aparición en las listas de libros de texto oficiales.

4.5. Compendio de Matemáticas Puras y Mistas de José Mariano Vallejo (1840)

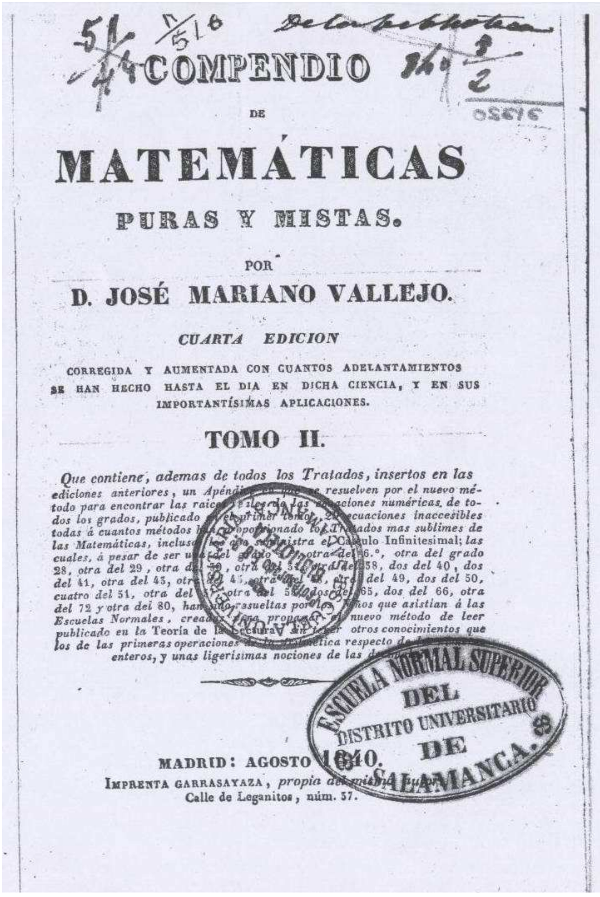
4.5.1. Autor

La biografía de Vallejo se puede consultar en el análisis que hemos realizado de su *Tratado*.

4.5.2. Caracterización de la obra

La obra analizada corresponde al Tomo II de la cuarta edición del *Compendio de Matemáticas Puras y Mistas* (sic) de José Mariano Vallejo, impresa en Madrid en 1840 en la Imprenta Garrasayaza. La primera edición de este libro data de 1819, y fue realizada en Valencia por la Imprenta de Estévan.
El ejemplar utilizado se encuentra en la Biblioteca de la Facultad de las Ciencias de la Educación de la Universidad de Salamanca con referencia CE/BI/1330 (RO).

El tomo analizado consta de 452 páginas y 4 láminas desplegables, con los dibujos y láminas, al final del tomo. Dedica las 50 primeras páginas a la aplicación del Álgebra a la Geometría en la que incluye las secciones cónicas y el estudio de las funciones (CEO1).


COMPENDIO

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y MISTAS.

POR

D. JOSÉ MARIANO VALLEJO.

CUARTA EDICION

CORREGIDA Y AUMENTADA CON CUANTOS ADELANTAMIENTOS SE HAN HECHO HASTA EL DIA EN DICHA CIENCIA, Y EN SUS IMPORTANTÍSIMAS APLICACIONES.

TOMO II.

Que contiene, ademas de todos los Tratados, insertos en las ediciones anteriores, un Apéndi[illegible] resuelven por el nuevo método para encontrar las raic[illegible] numéricas, de todos los grados, publicado [illegible] ecuaciones inaccesibles todas á cuantos métodos [illegible] Tratados mas sublimes de las Matemáticas, inclus[illegible] el Cálculo Infinitesimal; las cuales, á pesar de ser [illegible] otra del 6.°, otra del grado 28, otra del 29, otra d[illegible], otra del 3[illegible] 38, dos del 40, dos del 41, otra del 43, otr[illegible] 4[illegible], otra del [illegible], otra del 49, dos del 50, cuatro del 51, otra del [illegible] otra del 5[illegible] dos del 65, dos del 66, otra del 72 y otra del 80, han [illegible] resueltas por los [illegible]ños que asistian á las Escuelas Normales, cread[illegible] nuevo método de leer publicado en la Teoría de la Lectura [illegible] otros conocimientos que los de las primeras operaciones [illegible] respecto [illegible] enteros, y unas ligerísimas nociones de las [illegible]

MADRID: AGOSTO 1840.

IMPRENTA GARRASAYAZA, propia [illegible]

Calle de Leganitos, núm. 57.

Figura 46: Carátula del libro. Compendio de Matemáticas puras y mistas. J.M. Vallejo

El índice completo del tomo, consta de cuatro páginas, de las cuales solo incluimos los puntos incluidos en el epígrafe de Aplicación del Álgebra a la Geometría. De ellos solo estudiaremos los dos primeros puntos: Aplicación del Álgebra a la Geometría y la Determinación de los puntos y las rectas sobre un plano (CEO2).

Hay que decir que aunque en el índice los contenidos se presentan como mostramos a continuación, en el texto solo desarrolla bajo el epígrafe de Aplicación del Álgebra a la Geometría hasta el estudio de la recta en el espacio. Las secciones cónicas, funciones, etc. aparecen englobados en epígrafes propios: SECCIONES CÓNICAS, DE LAS FUNCIONES, DE LAS SERIES, DE LOS LÍMITES Y DE LAS DIFERENCIAS.

APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA
Determinacion de los puntos y rectas sobre un plano.
De los puntos y de la linea recta considerados en el espacio.
De las secciones cónicas
Del círculo
De la elipse
De la parábola
De la hipérbola.
De las funciones.
Idea general de las series y de los números figurados.
Del método de los límites.
Del cálculo de las diferencias.

Además de estos contenidos incluye los siguientes epígrafes:

DEL CÁLCULO DIFERENCIAL, DEL CÁLCULO INTEGRAL, MECÁNICA, ESTÁTICA, DINÁMICA, HIDROSTÁTICA, HIDRODINÁMICA, MECÁNICA INDUSTRIAL, AFINITOLOGÍA, CRISTALOGRAFÍA, CAPILAROLOGÍA, PIROLOGÍA, ELECTROLOGÍA, MAGNETOLOGÍA, NEUMATOLOGÍA, GASOLOGÍA, HIGROMETRÍA, ANEMOLOGÍA, ACÚSTICA, ÓPTICA, METEOROLOGÍA, ASTRONOMÍA, ARTE CONJETURAL Ó TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES.

Los objetivos del autor (CEO3) al realizar este libro quedan patentes en el prólogo del Tomo I, donde dice:

> Al publicar la primera edicion de esta obra en 1819, hice ver en el prólogo que su contenido interesaba á toda clase de personas, cualquiera que fuese su carrera y circunstancias, por presentarse en ella todos los principios de las Matemáticas y de sus importantísimas aplicaciones, con la mayor concisión, claridad y exactitud, y aun al alcance de las personas que no tratan de hacer carrera por este ramo de los conocimientos humanos.

En otro lugar del mismo dice:

> Las tres ediciones citadas [1819,1826 Madrid, 1826 París] fueron muy numerosas; y sin ninguna recomendacion por parte del Gobierno, han tenido tal acogida, que la última edicion, hecha en Madrid, estaba ya para concluirse, cuando se mandó adoptar por texto en las Universidades, Colegios, Seminarios &c; lo cual me ha estimulado aun mas, para tratar de mejorar esta, añadiendo lo mas esencial, para que se presente la Ciencia en el estado de adelantamiento que hoy tiene, insertando cuanto he contemplado útil, (...)

Esto nos lleva a pensar que esta obra fue ampliamente utilizada en diferentes niveles de estudios en los primeros años del siglo XIX, aunque en las listas oficiales para la enseñanza secundaria, que empiezan a publicarse a partir del curso 1846/47 no aparece esta obra, sino el *Tratado* del mismo autor (CEO5).

En el mismo prólogo hace referencia a su estancia en Francia, Inglaterra y Holanda (CEO4):

> (...) en vista de lo que por mí mismo he presenciado en Francia, Inglaterra y Holanda, y ha resultado de mis conferencias con los sabios mas eminentes de estas ilustradas naciones (...)

Y nombra a Lacroix en la página 18 en una nota en la que expone cómo explica la Geometría en sus clases, en ella añade:

> Cuando estuve en París, me resultó la mayor satisfaccion en ver, que el sabio y eminente Profesor Mr. S. F. Lacroix usaba medios análogos para el mismo objeto.

4.5.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.5.3.1. Análisis de la estructura conceptual

La característica principal de esta obra es su simplicidad. Haciendo honor al nombre de *Compendio*, Vallejo resume en esta obra los principales elementos de la Aplicación de Álgebra a la Geometría.

En ella presenta solo dos maneras de aplicar el Álgebra a la Geometría, a diferencia del *Tratado* en que nos presentaba tres.

En primer lugar explica en qué consiste la Aplicación del Álgebra a la Geometría, y seguidamente cómo se construyen las expresiones algebraicas de primer y segundo grado, de lo que resuelve un único problema como ejemplo.

En relación con el segundo tipo de aplicación explica cómo determinar la posición de un punto en un plano, definiendo para ello los sistemas de coordenadas cartesianas, da la ecuación de una recta y resuelve un pequeño número de problemas teóricos relacionados con la misma.

1. Definición de Aplicación del Álgebra a la Geometría

Comienza el tema explicando las características que definen al Álgebra y a la Geometría:

> I. La definición del álgebra y el conocimiento que hemos dado de ella, manifiestan que su carácter esencial es la *generalidad*; y el de la Geometría, que presenta á los sentidos los objetos de las idéas en que se ocupa, es *la claridad.* Así, cuando para generalizar alguna verdad geométrica se hace uso del álgebra, se dice que *se aplica el álgebra a la Geometría*; y cuando para hacer sensible algun resultado algebráico se hace uso de la Geometría, se *aplica la Geometría al álgebra*. Por lo cual, bajo el nombre de aplicacion del álgebra á la Geometría se entiende *el uso que se hace de estas dos ciencias, ya sea para resolver alguna cuestion perteneciente á una de ella, ya para resolver otra cualquiera.* (p.1)

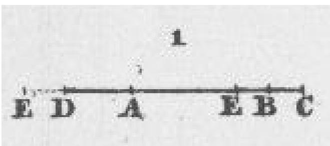
Tras esto explica en qué consiste la Aplicación del Álgebra a la Geometría:

> 2. La aplicacion del álgebra a la Geometría tiene dos partes, á saber: *manifestar cómo se pueden construir por Geometría los resultados de la Análisis;* y *cómo se pueden traducir analíticamente las cuestiones de Geometría.* (p.1)

2. Construcción de expresiones algebraicas

Después de dar las aplicaciones del Álgebra a la Geometría explica cómo construir las ecuaciones de primer y segundo grado (E), ccomenzando por la ecuación $x = a + b - c$:

> 3. Sea la ecuación propuesta $x{=}a{+}b{—}c$:
> construir esta ecuación, ú otra cualquiera, es hallar una línea que esprese el valor de *x*. Para esto, se tirará una línea indefinida DC (fig. I); desde uno cualquiera A de sus puntos, se tomará hácia la derecha una parte AB igual con la cantidad *a;* desde B también hácia la derecha, se tomará otra parte BC=*b*; y desde C hácia la izquierda se tomará CE=*e,* y será AE=AB+BC-CE; y sustituyendo sus valores *a, b, c,* será AE=*a*+*b*-*c* pero ántes teníamos *x*=*a*+*b*-*c,* luego AE=*x*; luego se ha encontrado una línea que espresa el valor de *x*.(p.2)



Tras esto explica cómo construir las cantidades negativas (SN). Vallejo no dedica un capítulo, ni siquiera un punto en particular al estudio de los segmentos negativos, simplemente inserta explicaciones a lo largo del texto cuando las necesita.
Así en la construcción de la ecuación $x{=}a{+}b{-}c$ explica:

> Es indiferente el tomar estas partes (*a, b, c)* hácia la derecha *ó* hácia la izquierda del punto que se elige, que se llama *punto de origen;* pero lo esencial es, que si las cantidades positivas se toman de izquierda á derecha, las negativas se deben tomar de derecha á izquierda, ó al contrario; y si las primeras se toman de abajo arriba, las segundas se tomarán de arriba abajo. (p.2)

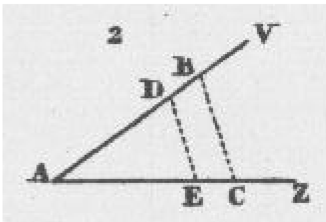
y concluye:

> *Esc.* Si se tuviese $c=a+b$, el valor de x sería cero, y la construcción se reduciría solo al punto A; pero si fuese $c>a+b$, el valor de x sería negativo, y la construcción daría para x la línea AE' negativa, ó
>
> $$x=a+b-c=AB+BC-CE'=-AE'.\text{(p.2)}$$

Tras esto explica cómo construir diferentes tipos de cocientes.

Empieza con el caso más sencillo, $x=\frac{ab}{c}$:

> 4. Sea ahora $x=\frac{ab}{c}$; para construirla, tirarémos (I.324) á arbitrio dos rectas *AV*, *AZ* (fig. 2) que formen un ángulo cualquiera *VAZ*; en uno de sus lados se tomará una parte $AE=c$; en el mismo lado se tomará otra parte $AC=a;$ en el otro lado se tomará una parte $AD=b$ se unirá el estremo *E* de la primera con el estremo *D* de la tercera por medio de una recta *ED;* por el estremo *C* de la segunda, se tirará la *CB* paralela á *DE,* y la parte *AB* que corte en el otro lado será el valor de *x*.



Y termina comprobando mediante las propiedades de la Geometría elemental que, en efecto, el segmento así construido es el que se pedía:

En efecto, los triángulos *AED, ACB* son semejantes (I. 328), y dan $AE:AC::AD:AB\ =\ \frac{ACxAD}{AE}=x$, que era lo que se pedía. (p.2)

Después considera el cociente $x=\frac{a^2}{c}$, que reduce a la construcción de una tercera proporcional a c y a haciendo $x=\frac{aa}{c}$. (p.2)

Y tras esto estudia los cocientes $x=\frac{ab+db}{c+d}; x=\frac{a^2-b^2}{c}$ que reduce a la construcción de cuartas proporcionales a tres segmentos haciendo $x=\frac{ab+db}{c+d}=\frac{(a+d)b}{c+d}; x=\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$. (p. 3)

De lo que concluye:

> 7. Toda ecuación en que la incógnita esté representada por un quebrado, se puede construir con el auxilio de las cuartas y terceras proporcionales. Para esto, se

descompondrá el numerador y denominador en tantos factores como dimensiones tengan, y se pondrá por factor una letra igual con la unidad tantas veces como se necesite en uno de los términos, para que resulte el número de dimensiones del numerador una unidad mas que el del denominador. (p.3)

Esta es la primera vez que Vallejo menciona a la unidad, de la que hace uso explícito en varias ocasiones como veremos, aunque no explica por qué es necesario que las ecuaciones homogéneas.

También construye $x = \frac{abc}{de}$:

8. Si la ecuación por construir fuese $x = \frac{abc}{de}$, la resolveríamos en factores de este modo $x = \frac{ab}{d} x \frac{c}{e}$ donde se ve, que, hallando primero una cuarta proporcional á las cantidades *d, a, b,* y llamándola *m*, sería $m = \frac{ab}{d}$ lo que daría $x = \frac{m \times c}{e}$; y hallando ahora una cuarta proporcional *á e, m* y *c,* se tendría el valor de *x.*

Y $x = \frac{b^4}{a}$ donde es necesaria la utilización de la unidad:

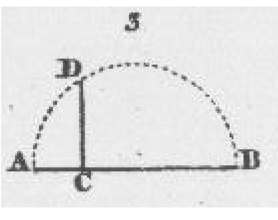
9. Sea la ecuación que se quiere construir $x = \frac{b^4}{a}$; como al denominador le faltan dos dimensiones para tener una menos que el numerador, espresarémos la unidad por una letra cualquiera tal como *c*; y como toda potencia de la unidad es igual con ella misma, multiplicando el denominador por c^2, que es lo que se necesita para que en él haya una dimensión menos que en el numerador, se tendrá $x = \frac{b^4}{c^2 \times a} = \frac{b^2}{c} \times \frac{b}{c} \times \frac{b}{a}$; y estaría reducido a encontrar primero una tercera proporcional á*c* y *b*, que llamándola *m*, daría $x = m \times \frac{b}{c} \times \frac{b}{a}$.

Hallando ahora una cuarta proporcional á *c, m* y *b*, y llamándola *n*, será $x = n \times \frac{b}{a}$.

Y hallando por último una cuarta proporcional á *a, n* y *b*, se tendrá una línea que espresará el valor de *x.* (p.4)

De forma análoga construye el cociente $x = \frac{a}{b^2 d^2}$, utilizando también la unidad de forma explícita (p. 4)

Tras esto pasa a explicar las construcciones en que aparecen radicales:



En primer lugar construye $x = \sqrt{ab}$:

11. Sea $x = \sqrt{ab}$; tírese una línea indefinida *AB* (fig. 3); tómese en ella una parte *AC=a*; á continuación de ella tómese otra *CB=b;* trácese sobre *AB* como diámetro una semicircunferencia *ADB*, y en el punto *C* levántese la

> perpendicular *CD*; lo que (I.333) dará *AC:DC::DC:CB;* de donde $DC^2 = AC \times CB = ab$, y $DC = \sqrt{ab} = x$, que era lo que se pedía. (p. 4)

Tras esto considera el caso $x = \sqrt{abc}$, que transforma en homogénea haciendo uso de la unidad representada en este caso por la letra *d* (U):

> 12.- Si fuese la ecuación $x = \sqrt{abc}$, en que debajo del radical hay tres dimensiones, se pondría por denominador á la cantidad, que hay debajo del radical, una letra *d* igual con la unidad, y sería $x = \sqrt{\frac{abc}{d}} = \sqrt{\frac{ab}{d} \times c}$; (...)

Nos dice que esta expresión se construye hallando primero una carta proporcional a *d, a* y *b*, a la que llama *m*, obteniendo $x = \sqrt{mc}$, que queda construida hallando la media proporcional entre *m* y *c*. (p. 4)

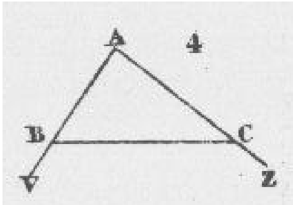
También construye la ecuación $x = \sqrt{a}$ reduciendo el problema al caso $x = \sqrt{ab}$ de nuevo, en este caso mediante el uso de la unidad (U), que aquí representa por *b*, quedando la ecuación anterior como $x = \sqrt{ab}$. (p.5)

Hasta ahora todos los radicales construidos eran monomios, en los siguientes puntos estudia el caso en que debajo del radical haya un polinomio. En primer lugar lo hace con un caso general y posteriormente con los radicales $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ y $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Propone dos métodos de resolución aunque en el caso general solo utiliza uno de ellos:

> 14. Cuando la cantidad, que está debajo del radical, es un polinomio, se puede construir por dos métodos: ó por una media proporcional, ó con el auxilio del triángulo rectángulo.
>
> Así, si se quiere construir $x = \sqrt{a^2 + 2bc - \frac{mnd}{p}}$, se hará $2bc = ak, \frac{mnd}{p} = ah$; de donde $k = \frac{2bc}{a} = \frac{2b \times c}{a}$, que se construirá hallando una cuarta proporcional á *a*, al duplo de la línea *b*, y á *c;* y $h = \frac{mnd}{ap} = \frac{mn}{a} \times \frac{d}{p}$; que se construirá por lo dicho antes (8). Sustituyendo en vez de *2bc* y $\frac{mnd}{p}$ sus valores en la propuesta, se convertirá en $x = \sqrt{a^2 + ak - ah} = \sqrt{a(a + k - h)}$, lo que reduce la operacion a hallar una media proporcional ente *a* y *a+k-h.* (p. 5)

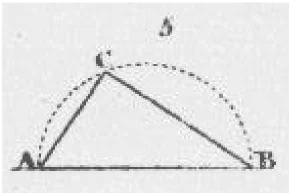
Para construir $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ utiliza el método anterior haciendo $b^2 = am$ que transforma el radical dado en $x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + am} = \sqrt{a(a+m)}$, pero también propone su construcción mediante la utilización de un triángulo rectángulo:

> 15. (...) Si se quiere construir por el triángulo rectángulo, se formará un ángulo recto *VAZ* (fig. 4); en uno de los lados *AV* se tomará una parte *AB=a;* y en el otro *AZ*, otra parte *AC=b*; por los estremos *B* y *C* de estas líneas se tirará la *BC*, que será



igual con *x*. En efecto, por ser rectángulo el triángulo *ABC*, dará $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + b^2$, y $BC = \sqrt{a^2 + b^2} = x$ (p. 5).

Construye $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ haciendo uso, de nuevo de los triángulos rectángulos, pero da dos construcciones del mismo:



> 16. Para construir la ecuacion $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ en el supuesto de ser $a^2 > b^2$, sobre la línea *AB=a* (fig. 5) como diámentro, se trazará la semicircunferencia *ACB;* desde uno de sus estremos *B* se colocará por cuerda *BC=b;* y tirando desde el otro estremo *A* al punto *C* la *CA*, ésta será el valor de *x*; porque el triángulo *ABC* rectángulo en *C*, da $AC^2 = AB^2 - BC^2 = a^2 - b^2$, de donde $AC = \sqrt{a^2 - b^2} = x$, que era lo que se pedía. (pp.5-6)

Hace la apreciación de que se ha considerado *a>b* porque en caso contrario el radical *sería imaginario y no se podría construir* (p. 6), y tras ella da otra construcción del triángulo rectángulo buscado, en este caso similar a la utilizada en el punto 15. (p. 6)

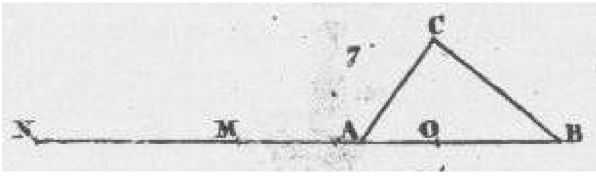
Seguidamente explica la construcción de $x = \sqrt{ab + c^2 + ef - gh}$, que reduce a uno de los casos anteriores. En primer lugar considera los segmentos $ab = m^2, ef = n^2, gh = p^2$, que dan $m = \sqrt{ab}, n = \sqrt{ef}, p = \sqrt{gh}$, que se saben construir y que dejan $x = \sqrt{m^2 + c^2 + n^2 - p^2}$. Este radical lo construye utilizando lo explicado con anterioridad, haciendo en primer lugar $q^2 = m^2 + n^2$, que reduce *x* a $x = \sqrt{q^2 + n^2 - p^2}$, después $r^2 = q^2 + n^2$, y por último $x = \sqrt{r^2 - p^2}$ (p.6).

Por último, resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + px = q$, y construye sus soluciones $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$; $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$.

En primer lugar, como las ecuaciones no son homogéneas las transforma utilizando la unidad (U):

> 18. (…) Para hallar estos valores de *x,* se construirá primero el radical; pero como *q* no tiene mas de una dimensión, se multiplicará por la unidad espresada v. g. por *a*, y el radical se convertirá en $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + aq}$ (...) (p. 7)

Obsérvese que generalmente en otras obras la ecuación de segundo grado se plantea homogénea, como $x^2 + px = q^2$ (o se convierte en homogénea antes de resolverla, como hace Odriozola) por lo que las soluciones también lo son y no es necesario transformarlas en homogéneas como hace aquí Vallejo. Para construir las soluciones primero construye el radical:



(...) haciendo $aq = m^2$, que da $m = \sqrt{aq}$; el radical será $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2}$;por consiguiente formando un triángulo rectángulo ABC (fig. 7) en que uno de los catetos *CA* sea igual con $\frac{1}{2}p$; y el otro CB=*m*, se tendrá

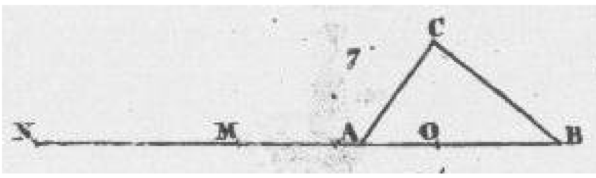
$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + m^2} = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2} \ ;$$

y seguidamente construye las soluciones de la ecuación. Primero la positiva:

(...) ahora, tomando desde *B* hácia la izquierda una parte $BO = CA = \frac{1}{2}p$, será

$AO = AB - BO = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2} - \frac{1}{2}p$, que es el primer valor de *x*.

Y después la negativa:



Para construir el segundo, se tomará desde *A* hácia la izquierda una parte $AM = \frac{1}{2}p$, y desde *M* también hacia la izquierda, otra parte $MN = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} = AB$ y se tendrá

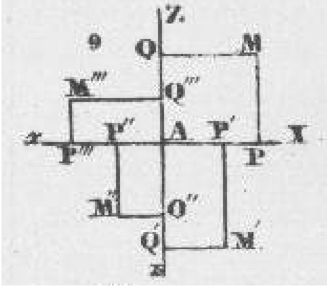
$$AN = -AM - MN = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + m^2} \ .$$

Esc. Si *q* fuese negativa, se construiría el radical por lo dicho (16). (p. 7)

Tras estas construcciones teóricas resuelve únicamente un problema para ejemplificar la teoría, problema recogido en la parte de fenomenología.

Con eso da por finalizada esta parte y comienza la dedicada al estudio de la recta.

3. Ecuaciones de la recta



En primer lugar determina la posición de un punto en el plano (C), y para ello define los ejes de coordenadas, que aunque dice que pueden formar cualquier ángulo, se considerarán perpendiculares por comodidad:

21. Para fijar la posición de un punto *M* (fig. 9) sobre un plano, lo primero que se hace es tirar dos rectas indefinidas, *Xx, Zz,* que formen un ángulo cualquiera, que para mayor sencillez le supondremos constantemente

recto. (p. 9)

Tras esto explica cómo determinar un punto en un plano mediante las distancias a las rectas anteriores, y posteriormente define coordenadas de un punto y ejes de coordenadas:

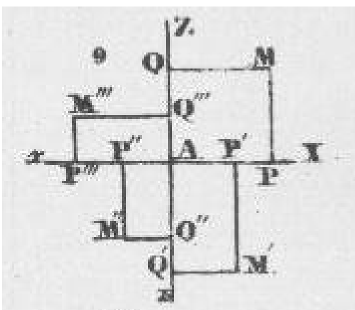
> 22 Esto supuesto, las líneas *MQ, M'Q',* etc., de sus iguales *AP, AP'*, etc., se llaman *abscisas;* y la línea*Xx* en que se cuentan, se llama *eje de las abscisas.* Las líneas *MP, M'P',* etc. ó sus iguales *AQ, AQ'*, etc., se llaman *ordenadas; y* la línea *Zz* en que se cuentan, se llama *eje de las ordenadas.*
>
> Las abscisas y ordenadas juntas se llaman *coordenadas;* y entonces *Xx*, *Zz*, se llaman *ejes de las coordenadas;* el punto A desde donde se cuentan las coordenadas, se llama el *punto de origen.* Resultando de todo esto, que en general, *abscisa de un punto es la distancia de dicho punto al eje de las ordenadas, contada en una línea paralela al eje de las abscisas; y ordenada* de un punto, en general, es *la distancia de dicho punto al eje de las* abscisas, *contada en una línea paralela al eje de las ordenadas.* (p. 9)

En el punto siguiente explica los signos que tienen las coordenadas de un punto dependiendo de del *ángulo* en que se halle, y después calcula las coordenadas de los puntos que se encuentran sobre los ejes de coordenadas, y del origen de las mismas, concluyendo de todo lo anterior *que suponiendo á las variables x y z todos los valores positivos y negativos posibles, desde cero hasta el infinito, se puede fijar la posición de todos los puntos del plano en que se hallan los ejes.* (p.10)

No define las coordenadas polares, y como en la práctica solo utiliza ejes rectangulares no da ecuaciones de cambio de un sistema de ejes a otro.

Tras explicar cómo determinar un punto en un plano plantea el problema contrario, es decir, dadas las coordenadas de un punto situarlo en el plano, y en la resolución del mismo obtiene las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes. (ER) Vallejo plantea esta cuestión como un problema, pero dada la importancia del resultado teórico incluimos aquí su desarrollo, al igual que la obtención de la ecuación de una recta, y no en el apartado de fenomenología, en el que únicamente haremos mención de los enunciados.

> 25 Todo lo dicho hasta aquí equivale á la solución general de este problema: *dado un punto en un plano, hallar las ecuaciones que le determinan.* Tratemos ahora de resolver el inverso, á saber: *dadas las ecuaciones x=a, z=b, hallar el punto M (fig. 9) que determinan*.

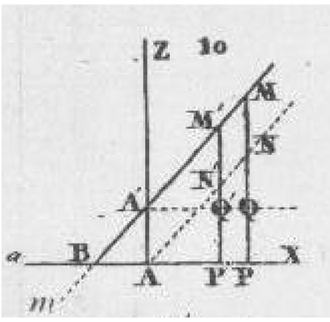


> Para esto, considerando la primera como si existiese sola, conviene á todos los puntos cuya abscisa es igual con *a*. Pero si suponemos *AP=a*, todos los puntos de la línea *PM* prolongada indefinidamente satisfarán á esta condición; luego *la ecuación x=a pertenece á una recta PM paralela al eje de las ordenadas.*
>
> Del mismo modo, *la ecuación z=b conviene á todos los puntos de una línea QM paralela al eje de las abscisas.* (p. 10)

Seguidamente y basándose en lo anterior obtiene también las ecuaciones de los ejes de coordenadas y después generaliza todo esto y explica cómo obtener la ecuación de una línea:

> 27 Generalizando este resultado se ve, que si todos los puntos de una línea, recta ó curva, son tales que existe la misma relación entre las coordenadas de cada uno de ellos, la ecuación entre *x* y *z*, que esprese esta relación, debe caracterizar á esta línea, y por lo mismo se llama *ecuación de dicha linea*. Recíprocamente, siendo dada la ecuación, se deduce de ella la naturaleza de la línea; porque si se quieren encontrar aquellos puntos que corresponden á una abscisa determinada, bastará sustituir por *x* este valor en la ecuación; esta no contendrá ya mas incógnita que la *z*, y dará los valores correspondientes de las ordenadas, las cuales se colocarán con relación al eje de las abscisas, conforme al signo de que estén afectas. Igualmente, siendo dada *z*, la ecuación manifestará los valores correspondientes de *x*. (p.12)

Con estos conceptos generales pasa a calcular la ecuación explícita de una recta, que él no nombra de ninguna forma, punto que plantea como un problema, pero cuyo desarrollo recogemos en esta apartado como ya hemos explicado anteriormente.



28 Con estos conocimientos pasemos á resolver algunos problemas; y sea el primero.

Dada una recta BM (fig.10); hallar su ecuacion.

Res. y Dem. Tírense primero los ejes rectangulares *AX, AZ;* después se medirá la distancia; *AA',* que se conoce, por ser dada la recta y los ejes, y se hará *AA'=b*; por la misma razón es conocido el ángulo *MBA* que forma dicha recta con el eje de las abscisas, y cuya tangente trigonométrica representaremos por *a*; tírense las coordenadas *AP, PM*, de un punto cualquiera *M,* y por el punto *A'* la *A'Q* paralela al eje de las abscisas; con lo cual será el ángulo *MBA=MA'Q*, y *A'Q=AP=x,*

$$MQ=MP-PQ=MP-AA'=z-b;$$

ahora, el triángulo rectángulo *MA'Q* dará

$$R:tang.MA'Q::A'Q:QM,\ ó 1:a::x:z-b;$$

de donde sale $z=ax+b$ para la ecuación pedida.

En efecto, esta misma relación se verificará entré todos los puntos de la recta BM; pues tirando las coordenadas *AP', P'M'* que representaremos por *x', z'*, el triángulo *A'Q'M'* dará *1:a::x':z'-b,* de donde sale *z'=ax'+b*, que es la misma de ántes. (p. 12)

En los puntos siguientes demuestra que la ecuación es válida también para los puntos de la recta que se encuentran por debajo del eje *X*, y estudia el significado geométrico del término *b*.

También explica cómo representar una recta conocida su ecuación, y lo hace, como Odriozola, calculando los puntos de corte con los ejes, pero añade que podría hacerse con otras dos condiciones cualesquiera:

> 33 Recíprocamente, si dada la ecuación $z=ax+b$, se quiere trazar la recta que representa, se principiará por tirar los ejes *AX, AZ*; después se hará $x=0$, y se tendrá $z=b$, que determina el punto A'; en seguida se hará $z=0$; y se tendrá $x=-\frac{b}{a}$; que determina el punto *B*; y tirando una recta por estos dos puntos, será la línea pedida. También se puede determinar dicha línea por cualesquiera otras dos condiciones (p.13).

Después plantea, también como un problema, la obtención de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, que sí está recogida en el apartado de fenomenología, y como vemos en el proceso obtiene también la ecuación punto-pendiente, aunque él no las nombra en ningún caso.

4.5.3.2. Sistemas de representación

En esta obra de Vallejo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente las construcciones geométricas. No utiliza tablas, ni siquiera cuando trabaja con las rectas, ya que las rectas con las que trabaja son genéricas, es decir no hay ejemplos de problemas con datos concretos, y cuando explica cómo representar una a partir de su ecuación simplemente da las pautas de cómo hacerlo, calculando los puntos de corte con los ejes, pero no pone ejemplos concretos y mucho menos calcula una tabla de valores.

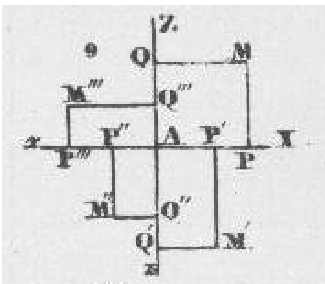
Utiliza el lenguaje natural en definiciones, enunciados y resultados.

Define aplicación del Álgebra a la Geometría (N) (p.1), y también encontramos la definición de abscisa y de ordenada (C) (p. 9)

Desarrolla de forma literal las construcciones de las fórmulas (E), las soluciones de los problemas (PR) o cuando explica cómo obtener las ecuaciones de las rectas (ER), aunque en algunos casos utilice además el leguaje simbólico o se apoye en gráficos.

En esta obra no aparecen enunciados teoremas o resultados generales, solamente los problemas (PR).

También tenemos un ejemplo en el punto 25, en el que tras calcular las coordenadas de un punto en un plano lo enuncia como un problema, como hemos visto (C).



> 25. Todo lo dicho hasta aquí equivale á la solución general de este problema: *dado un punto en un plano, hallar las ecuaciones que le determinan.*(p. 10)

El lenguaje simbólico aparece a lo largo de todo el texto.

En la primera parte aparecen expresiones algebraicas, entre ellas las fracciones algebraicas o expresiones irracionales; y expresiones simbólicas en desuso hoy en día, para denotar la proporción entre cuatro segmentos. (E, PRDT)

> (...) los triángulos BAC, BDE, semejantes, darán AB:AC::BD.DE,ó
> $c:b::c\text{-}x:n$, que da $cn=bc\text{-}bx$, y despejando$x$, se tendrá

$$x = \frac{bc - nc}{b} = \frac{c(b-n)}{b} \text{ (p. 8)}$$

En la segunda parte utiliza también expresiones algebraicas para escribir las ecuaciones de la recta, o la distancia entre dos puntos (ER, PRD).
Obsérvese que utiliza una notación distinta a la actual para los ejes de coordenadas ya que llama al eje de abscisas *Xx*, y al de ordenadas *Zz*. (C)

Como ya hemos dicho los gráficos (CEO1), que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él. Los utiliza tanto en la primera parte en la construcción de las fórmulas, como en la resolución de problemas, como cuando trata de las ecuaciones de la recta y los problemas relacionados con ella,(GR, E, PR, ER), nos encontramos, por tanto con dos tipos de gráficos, aunque en este caso se encuentran todos ellos en la misma lámina.

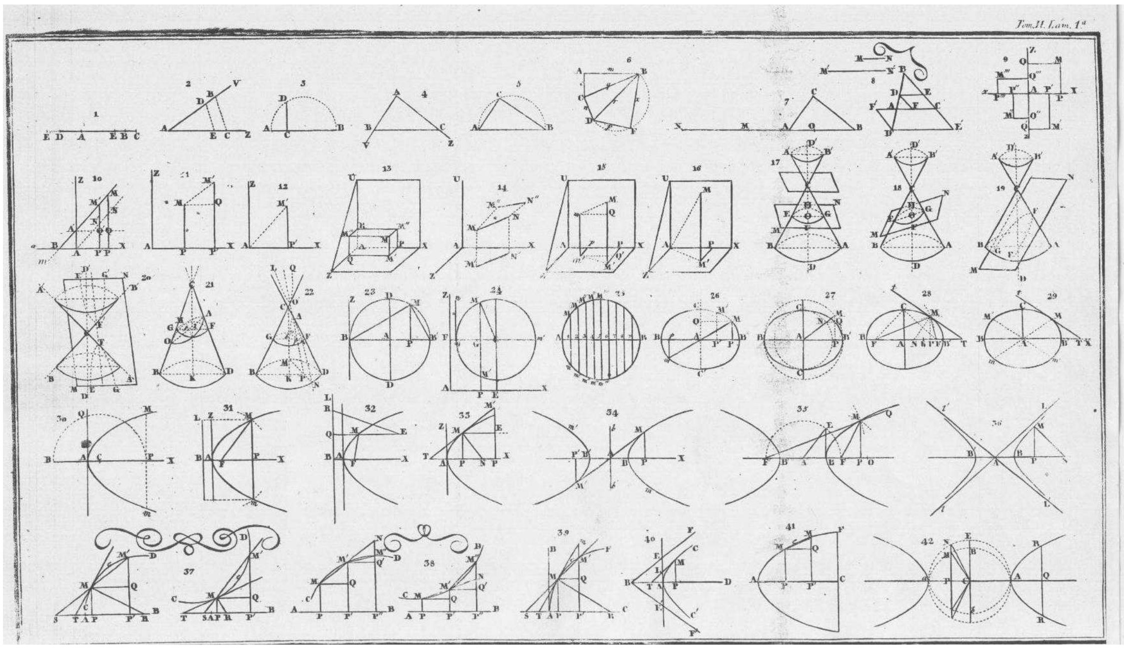


Figura 47: Lámina I. Compendio de Matemáticas puras y mistas. J.M. Vallejo

4.5.3.3. Fenomenología

Como hemos visto en esta obra Vallejo nos presenta solo dos maneras de aplicar el Álgebra a la Geometría.
El autor solo propone y resuelve un problema como ejemplo de lo explicado en la primera parte, y sin embargo en la segunda plantea algunos resultados teóricos como la determinación de un punto en un plano o la obtención de la ecuación de una recta a través de su gráfica como problemas.

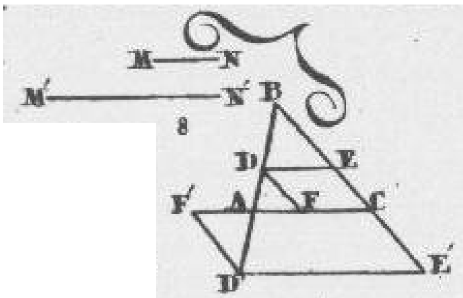
Por tanto nos encontramos solo dos tipos de problemas en esta obra atendiendo a su fenomenología, aunque ambos están dentro de un contexto matemático y en particular geométrico:

1. Para mostrar la construcción geométrica de expresiones algebraicas y de segmentos negativos (PRDT)

Como hemos dicho sólo resuelve un problema de este tipo. En él vemos la aplicación de la construcción de una cuarta proporcional y de una solución negativa. Este problema también podemos encontrarlo en la obra de Lacroix.

19. Dado un triángulo ABC (fig. 8), tirar paralelamente á uno de sus lados, tal como AC, una línea DE que sea igual á una recta dada MN.

Como es usual en estos problemas lo supone resuelto, mediante razonamientos geométricos, en este caso semejanza de triángulos, obtiene la ecuación algebraica correspondiente, que resuelve y después construye geométricamente la solución algebraica obtenida.



Res. y Dem.
PG: Como el triángulo es dado, quiere decir que son conocidos sus lados y todos sus datos; por lo cual, haciendo *AB=c, AC=b,* y la recta dada *MN=n*, todo estará en determinar en el lado *AB* el punto *D* por donde se ha de tirar la paralela que se pide. Luego tomando por incógnita la parte *AD,* que espresarémos por *x.* será *BD=c-x;* y los triángulos *BAC, BDE*, semejantes (I. §328), darán *AB:AC::BD.DE*, (...)
PRA: ó *c:b::c-x:n,* que da c*n=bc-bx,* y despejando *x*, se tendrá
$$x=\frac{bc-nc}{b}=\frac{c(b-n)}{b};$$
cuyo valor manifiesta que la distancia *AD* debe ser una cuarta proporcional á *b*, *c y b-n.*
RG: Este valor se podría construir (4) en un paraje cualquiera, y colocándole después desde *A* hácia *B*, se tendría determinado el punto *D* que se busca*;* pero en esta clase de cuestiones es mas elegante el hacer la construcción en la misma figura que se da. Para esto, de la recta *AC=b*, se quitará una parte *CF=n*, y tirando por *F* una paralela al lado *BC*, esta determinará en el lado *AB* el punto pedido, de manera que *AD* será el valor de *x.* (p. 8)

Y comprueba mediante las propiedades de la Geometría elemental que, efectivamente, esa es la solución buscada:

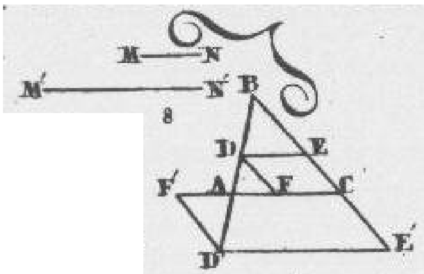
En efecto, la semejanza de los triángulos *ABC, AFD* da *AC:AB::AF:AD,*

$$\text{ó}\, b:c::b-n:x=\frac{c(b-n)}{b}.\ \text{(p. 8)}$$

Estudia el caso en que *MN* fuese mayor que *AC* (fig. 8)*:*

Si la línea *MN* fuese mayor que *AC,* no se podría tirar en lo interior del triángulo *ABC*, sinó que sería necesario prolongar los lados *AB, BC,* y el problema debería decir *por la prolongación de uno de sus lados, etc.* en vez de *por uno de sus lados, etc.* En este caso el punto que se pide sería el *D'*, el cual estaría por la parte inferior del punto *A*, como lo da á conocer el cálculo *y* la construcción.

En efecto, si se tiene *M'N'>AC*, resultará *n>b*; entónces el factor *b-n*, que será negativo, hará que lo sea el valor de *x*, *y* por consiguiente que se debe tomar (3) desde *A* hácia abajo; y como, haciendo la construcción en la misma figura, la línea *b-n* será (3 esc.) la *AF'* negativa, la recta *F'D'* tirada por el punto *F'* paralelamente á *BC* no podrá encontrar á *BA*, sinó á su prolongación en un punto tal como *D'* (p.8).



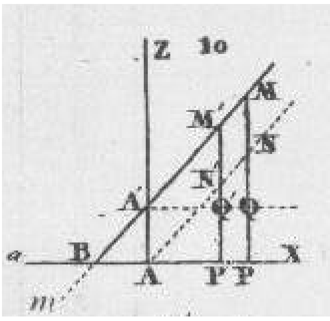
2. Para obtener fórmulas generales (ER, PRD, PRAN)

En este caso plantea y resuelve cuatro problemas, aunque dos de ellos, como ya hemos señalado son resultados teóricos generales que hemos recogido en el apartado de análisis de contenido, aunque aquí incluimos sus enunciados.

En primer lugar la determinación de un punto en un plano.

> 25 Todo lo dicho hasta aquí equivale á la solución general de este problema: *dado un punto en un plano, hallar las ecuaciones que le determinan.* Tratemos ahora de resolver el inverso, á saber: *dadas las ecuaciones x=a, z=b, hallar el punto M (fig. 9) que determinan.*

Y tras obtener las ecuaciones de los ejes y de las restas paralelas a ellos obtiene la ecuación de una recta y la distancia entre dos puntos, que plantea como problemas de aplicación de todo esto:



> 28. Con estos conocimientos pasemos á resolver algunos problemas; y sea el primero.
>
> *Dada una recta BM (fig.10); hallar su ecuacion.*
>
> 34. Prob. 2º. *Hallar la ecuación de una recta, que pase por dos puntos M, M' (fig. 11), cuyas coordenadas se conocen.*
>
> 35. Prob. *Hallar la distancia de dos puntos M, M'' (fig.11), cuyas coordenadas se conocen.*

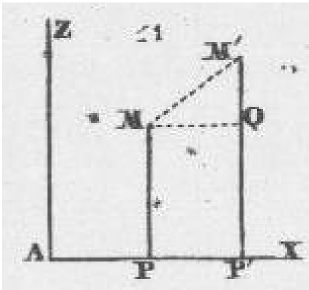
Incluimos la solución de estos dos últimos. En el primero además de obtener la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados, obtiene la punto-pendiente, aunque él no la nombra así.

En el segundo utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos, en ejes perpendiculares. Veremos que en ambos casos el método de resolución es bastante similar al utilizado actualmente.

Prob. 2º. Hallar la ecuación de una recta, que pase por dos puntos *M, M'* (fig. 11), cuyas coordenadas se conocen.

Incluimos íntegramente la solución propuesta por Vallejo, sin insertar comentarios, por su sencillez y claridad.

Res. y Dem. Bájense desde dichos puntos perpendiculares al eje de las abscisas, con lo que se tendrán las coordenadas de cada uno de estos puntos; llamándolas x', z', x'', z'' y teniendo presente que la ecuación de la recta en general es $z=ax+b$, esta deberá quedar satisfecha sustituyendo en ella en vez de las coordenadas generales, las particulares de estos puntos; por lo cual se tendrá



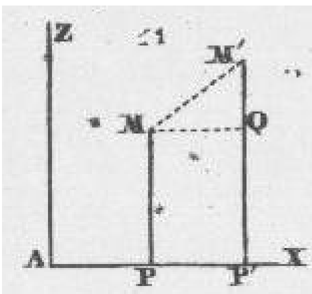
$z'=ax'+b$ (A) para el punto *M*,

$z''=ax''+b$ (B) para el *M'*.

Despejando en estas dos ecuaciones las indeterminadas *a* y *b*, y sustituyendo sus valores en la ecuación $z=ax+b$ (C), se tendrá la de la recta sujeta á las condiciones del problema. Este despejo se hace con mucha sencillez, restando la ecuación (B) de la (A), lo que dará $z'-z''=a(x'-x'')$ y $a=\frac{z'-z''}{x'-x''}$ (D); restando la (A) de la (C), se tendrá $z-z'=a(x-x')$ (E); y sustituyendo en esta el valor (D) de a, se tendrá $z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x')$ que es la ecuación de la recta buscada. (p.14)

Prob. Hallar la distancia de dos puntos *M, M''* (fig.11), cuyas coordenadas se conocen.

Como en el problema anterior incluimos íntegramente la solución tal como se encuentra en el libro.



Res. y Dem. Sean x', z' las coordenadas del primero, y x'', z'', las del segundo; concíbase la *MQ* paralela al eje de las abscisas, y llamemos *D* la distancia *MM'* que se pide; hecho esto, el triángulo *MQM'*, rectángulo en *Q*, dará

$$MM' = \sqrt{MQ^2 + M'Q^2} \ ;$$

pero $MQ=PP'=AP'-AP=x''-x'$ y

$M'Q=P'M'-P'Q=P'M'-PM=z''-z'$; luego, sustituyendo estos valores, se tendrá $D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2}$, que es lo que se pedía.

Esc. Si el punto *M* estuviese en el origen, sus coordenadas x', z', serían nulas, y la distancia del punto de origen A (fig. 12) á un punto cualquiera *M'* del plano, vendrá espresada por $D=\sqrt{x''^2+z''^2}$; lo que también se confirma por el triángulo *AP'M'*, rectángulo en *P'*, queda $AM'=\sqrt{AP'^2+P'M'^2}$. (p.14)

4.5.4. Conclusiones

Como vemos esta obra, muy amplia en cuanto a las materias que abarca, que van de las Matemáticas a la Astronomía pasando por la Hidrostática o la Óptica es sin embargo muy básica en cuanto a los contenidos de Geometría que nos ocupan. Tanto en desarrollo teórico como en los problemas que plantea y resuelve. En la teoría se ciñe a explicar los conceptos básicos y estrictamente necesarios, dando como única interpretación de los segmentos negativos el que deben construirse en sentido contrario a los positivos. Sí es reseñable el uso que hace de la unidad, de forma explícita en la resolución de la ecuación de segundo grado, aunque no explica por qué las ecuaciones deben ser homogéneas. Hemos revisado el primer tomo por si hubiera un tema inicial en que explicara estas cuestiones pero no lo hace.

En cuanto a la parte de las ecuaciones de la recta no trata problemas de paralelismo y perpendicularidad, ni de ángulos. No utiliza coordenadas polares y en la práctica tampoco oblicuas, limitándose a las coordenadas cartesianas rectangulares en las pocas cuestiones que trata.

4.6. Tratado Elemental de Trigonometría Rectilínea y Esférica, y de la Aplicación del Álgebra a la Geometría de S.F. Lacroix (1846)

4.6.1. Autor

Sylvestre François Lacroix (1765,1843) nació en París en el seno de una familia humilde, a pesar de lo cual recibió una buena formación académica. Desde joven mostró un talento especial para las matemáticas lo que le valió para ser recomendado por Monge, que había sido profesor suyo, a la *École Gardes* de Marina para ocupar una plaza como profesor de matemáticas en 1782, a la edad de 17 años. Además de en este centro Lacroix trabajó durante los últimos años del Antiguo Régimen en otros, principalmente en escuelas militares.

Después de la Revolución fue profesor en la *École Polytechnique*, donde ocupó la cátedra de Análisis desde 1799 hasta 1808, siendo después profesor en la Sorbona y el Collège de France.

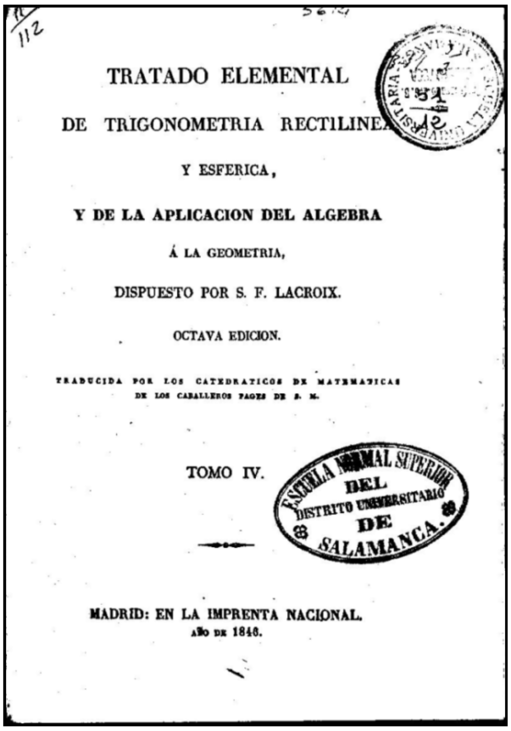
Pero la importancia de Lacroix estriba en su labor a favor del establecimiento de un sistema general de formación y particularmente para la incorporación de las matemáticas como parte imprescindible de la formación general. La elaboración de buenos libros de texto fue considerada de principal importancia para la reforma del sistema educativo a partir de la Revolución y ahí es donde Lacroix juega un papel importante, pues sus libros de texto tuvieron gran impacto en la época al contribuir de forma decisiva a difundir los contenidos matemáticos entre los alumnos.

Debemos pues considerar a Lacroix como un escritor de libros de texto de Matemáticas. Sus libros se utilizaron durante aproximadamente cincuenta años, desde 1795 a 1845. La mayoría fueron publicados en sucesivas ediciones, y utilizados no solo en los centros educativos franceses, sino prácticamente en todos los países europeos. Así en España se utilizaron sus libros en las escuelas navales y militares, y en algunos centros universitarios. Escribió libros para casi todas las ramas de las matemáticas y para casi todos los niveles educativos desde la secundaria hasta las escuelas técnicas. Como observa Schubring (1987), se puede considerar a Lacroix como un autor cuya obra contribuyó de forma decisiva a la constitución de la matemática escolar en Francia, así como en otros países europeos, como atestiguan las numerosas reimpresiones de sus obras en otros idiomas.

Publicó su primer libro de texto en 1795: *Traité de géométrie descriptive* basado en su experiencia como ayudante de las conferencias de Monge en la *Ecole Normale* en

1795. Desde que empezó a enseñar matemáticas en una *Ecole Centrale* de París, se dedicó a escribir libros de texto, primero para su propio uso y luego para un público más amplio. En 1797 publicó *Traité élémentaire d'arithmétique* y el primer volumen de su importante obra *Traité de calcul différentiel et integral.* Debido a la urgente necesidad de dotar de libros de texto a las escuelas, Lacroix publicó en los cuatro años siguientes la mayor parte de su obra. Sus esfuerzos fueron coronados por un éxito singular: la comisión, que en 1803 tenía que elegir los libros de texto de los Lycées, adoptaron exclusivamente los libros de Lacroix para las matemáticas e incluso en los años posteriores sus libros figuraron siempre en lugar preeminente ("Sylvestre F. Lacroix", n.d).

4.6.2. Caracterización de la obra


112

TRATADO ELEMENTAL

DE TRIGONOMETRIA RECTILINEA

Y ESFERICA,

Y DE LA APLICACION DEL ALGEBRA

Á LA GEOMETRIA,

DISPUESTO POR S. F. LACROIX.

OCTAVA EDICION.

TRADUCIDA POR LOS CATEDRATICOS DE MATEMATICAS
DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

TOMO IV.

MADRID: EN LA IMPRENTA NACIONAL.
AÑO DE 1846.

Figura 48: Carátula del libro. Tratado elemental. Lacroix

El libro analizado corresponde a la octava edición del *Tratado Elemental De Trigonometría Rectilínea y Esférica, y de la Aplicación Del Álgebra a la Geometría* de S.F. Lacroix, impresa en la Imprenta Nacional, Madrid, en 1846. La primera edición es de 1798, en francés (Escribano, 2000, p. 298) y la primera edición en español es la sexta de la obra y data de 1820 (Navarro, M; Puig, L. 2012. p. 76). El ejemplar estudiado se encuentra en la Universidad de Salamanca, C.C. Educación /BI/1329.

El tomo que estamos analizando, que forma parte del *Tratado Elemental,* es el tomo IV, titulado: *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y Esférica, y de la Aplicación del Álgebra a la Geometría.* Consta de 323 páginas, de las cuales dedica 208 a la aplicación del Álgebra a la Geometría; y de 5 láminas con dibujos al final del tomo (CEO1). Se divide en tres capítulos y un apéndice:

Capítulo I: De la Trigonometría Rectilínea.
Capítulo II: De la Trigonometría Esférica.
Capítulo III: De la aplicación del Álgebra a la Geometría.

Apéndice: Que contiene los primeros principios de la aplicación del Álgebra a las superficies curvas y a las curvas de doble curvatura.

Nosotros analizaremos parte del capítulo III. El índice (p. 307) (CEO2) es muy

312

CAPITULO III.

DE LA APLICACION DEL ALGEBRA A LA GEOMETRIA.

313

detallado, incluye el título de todos los puntos que trata. Sólo el del capítulo III comprende 10 páginas, por lo que incluimos únicamente las dos primeras a modo de muestra:

Como autores en los que Lacroix se basa a la hora de elaborar su obra (CEO4) tenemos a Bezout (p. 128), a Newton, Carnot y Tomas Simpson (p. 130) y a Descartes (p. 132). También cita los *Elementos de Geometría* de Legendre (p. 152) y una memoria sobre las pirámides de Lagrange (p. 166)

En cuanto a los objetivos que perseguía el autor al escribirla (CEO3) debemos decir que la misma no tiene prólogo en la que se encuentren reflejados, pero sí incluye una advertencia de los traductores en la que aclaran que se han limitado simplemente a traducir, terminando la labor comenzada por José Rebollo, aunque su idea inicial fue completar la obra con "los adelantamientos hechos últimamente". Si no lo hicieron fue por falta de tiempo y porque "habría por fin producido un nuevo curso de Matemáticas distinto del de Mr. Lacroix". En ella alaban la obra y la figura de Lacroix, y se nos da una idea de por qué se tradujo y se utilizó este texto en España durante tanto tiempo; tengamos en cuenta que la edición que estamos analizando, que es del año 1846, era ya la octava.

> De este modo evitaremos tambien la crítica á la que nos habriamos expuesto, si hubiésemos alterado una obra que justamente corre en toda Europa con la mas

> distinguida aceptacion, y cuyo autor tiene la gloria de haber contribuido muy eficazmente á los progresos que han hecho las matemáticas en los últimos tiempos, por haber sido el primero que escribio unos Elementos correspondientes al estado que tenía la ciencia despues de las tareas de Euler, Lagrange, Monge, y otros geómetras célebres del siglo pasado (Advertencia de los traductores).

Esta obra aparece como texto en las listas de libros para la facultad de Filosofía, a cuyo currículo pertenecía el estudio de la aplicación del Álgebra a la Geometría, publicadas para los cursos 1846/47 (Gaceta de Madrid de 8 de septiembre de 1846) y 1847/48 (Orden de 8 de septiembre de 1847, Gaceta de Madrid de 11 de septiembre) (CEO5), pero venía utilizándose en las Facultades de Filosofía desde principios de siglo (Vea, 1991).

4.6.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.6.3.1. Análisis de la estructura conceptual

En esta obra se observan, al igual que en las de otros autores, dos partes diferenciadas, pero en este caso lo son simplemente por la forma de aplicar el Álgebra a la Geometría y no por los tipos de problemas que resuelve porque, de hecho, resuelve algunos utilizando los dos métodos de resolución explicados (PR); no podremos hablar por tanto, en este caso, de problemas determinados e indeterminados, como en otras obras.

Lacroix explica tres aplicaciones del Álgebra a la Geometría (D), la primera de ella como método para obtener resultados o teoremas geométricos expresando las propiedades geométricas mediante ecuaciones y desarrollando estas, la segunda como herramienta para la resolución de problemas geométricos y la tercera para determinar una curva.

En el caso de la resolución de problemas nos dice que el Álgebra se puede aplicar a la Geometría de la misma manera que a la Aritmética, salvo que en el caso de la primera "algunas veces se buscan líneas", para lo cual hay que saber traducir las operaciones algebraicas a las operaciones geométricas, y es por ello que explica cómo construir las primeras (E). Como hemos visto en otras obras estas operaciones plantean dos problemas, el primero de ellos es que las ecuaciones sean homogéneas, problema que resuelve introduciendo el concepto de segmento unidad, y el segundo es el de la aparición de soluciones negativas en una ecuación, que representarían a segmentos negativos.

En el caso de la unidad Lacroix explica en qué consiste, y pone ejemplos de cómo utilizarla (U), aunque en los problemas posteriores nunca aparece explícitamente. Por otra parte el tema de las soluciones negativas lo trata con bastante profundidad, hablando de su interpretación y construcción en diferentes casos (SN). De todo lo explicado pone ejemplos mediante problemas.

Tras mostrar este modo de resolver problemas de Geometría con ayuda del Álgebra, Lacroix habla de la "idea fundamental del análisis de Descartes, por la cual se representa a las curvas por medio de ecuaciones con dos indeterminadas", introduciendo con esta idea una nueva manera de interpretar geométricamente una ecuación algebraica, mediante el lugar geométrico que representa.

En esta sección el autor da varios tipos de ecuaciones de la recta (ER), la definición de coordenadas (C), la de lugar geométrico -que muchos autores no dan, ni siquiera de forma intuitiva- y resuelve diferentes problemas relativos a las ecuaciones de la recta y del círculo, distancias y ángulo entre dos rectas. También resuelve, utilizando las ecuaciones de la recta varios problemas geométricos, algunos de los cuales los ha resuelto en la parte anterior como ya hemos señalado (PR).

Veamos todo esto con detalle:

1. Definición

Comienza explicando en qué consiste la aplicación del Álgebra a la Geometría (D):

> El objeto de la aplicación del álgebra á la geometría es que haciendo uso de las operaciones algebraicas, se pueden combinar muchos teoremas de geometría, y deducir de estas combinaciones consecuencias importantes. Este es el camino que hemos seguido en los dos capítulos anteriores, y por él hemos llegado á sacar las principales fórmulas de las trigonometrías rectilínea y esférica. Un teorema, que establece una relacion entre muchas líneas de una magnitud definida, puede expresarse siempre por una ecuacion; y todas las transformaciones que se hacen en tal ecuacion, cuando se las traduce al lenguaje comun, dan enunciados que son consecuencias del teorema de que se ha partido;(…) (p.99)

Es decir mediante el paso al Álgebra se pueden simplificar los teoremas de la Geometría, y además deducir de las transformaciones realizadas en las ecuaciones nuevos teoremas. Todo esto, como él mismo apunta, lo ha llevado a cabo en los capítulos anteriores dedicados a las Trigonometrías lineal y esférica, aún así resolverá dos problemas para ejemplificarlo, como veremos. Pero en este tercer capítulo debe tratar también otro tipo de aplicación del Álgebra a la Geometría, y así lo aclara a continuación:

> Este ramo de las matemáticas (la de la aplicación del álgebra a la geometría), considerado en general, no se limita á la investigación de las propiedades de la extensión por medio de las operaciones algebráicas, sino lo que es mas, cómo se puede representar por estas propiedades lo que significa una expresión algebráica cualquiera, reducir las construcciones de las figuras á las operaciones del cálculo, y pasar de estas á las primeras: todo esto lo manifestarán las diversas cuestiones tratadas en este capítulo (p.99).

Es decir se dará la interpretación geométrica de una ecuación algebraica para que a la hora de resolver un problema geométrico se pase este a lenguaje algebraico y una vez hechas las operaciones pasar de nuevo a la construcción geométrica de la solución algebraica obtenida.

2. Para obtener resultados de Geometría

Tras esto indica cómo se debe obrar para resolver un problema geométrico mediante el uso del Álgebra:

> La escritura algebráica, tan útil para expresar las condiciones de los problemas relativos á los números, no es menos cómoda para los que pertenecen á la geometría. Estos últimos pueden ponerse en ecuacion como los primeros luego que se haya logrado hallar en su enunciado la relacion de las incógnitas y de los datos, pero es menester para lograrlo acudir á algunas propiedades de la especie de magnitud que se considera (p.99).

Y resuelve, como hemos dicho, dos problemas: el de calcular el área de un triángulo en función de sus lados y el volumen de un tronco de pirámide. La resolución del segundo se encuentra recogida en la parte de fenomenología.

3. Para resolver problemas geométricos

En los casos anteriores no era necesario construir las soluciones algebraicas geométricamente, por su naturaleza, pero señala:

> 66. En las cuestiones anteriores nos habíamos propuesto buscar un resultado numérico; algunas veces se buscan líneas (p.104).

Y resuelve, de nuevo, dos problemas para ejemplificar lo expuesto. En primer lugar el de inscribir un cuadrado en un triángulo, en el que aparece una ecuación de primer grado, y después el de dividir un segmento en media y extrema razón, que nos lleva a una ecuación de segundo grado. Ambos problemas se pueden ver resueltos en la parte de fenomenología.

3.1. Construcción de las expresiones algebraicas

Tras su resolución nos dice que esos ejemplos muestran cómo a través del Álgebra se pueden resolver los problemas "determinados" de la Geometría al igual que se resuelven los numéricos. Explica cuál es el proceso, y concluye que es necesario explicar las construcciones generales de las diferentes expresiones algebraicas que nos dan las soluciones de una ecuación, lo que él llama "construcción de los valores de la incógnita".

> Los ejemplos anteriores son suficientes para manifestar que la resolucion algebraica de los problemas determinados de geometría presenta circunstancias análogas á la de los problemas relativos á los números. Es menester pues empezar por poner la cuestion en ecuacion, sacar despues la expresión del valor de la incógnita; pero en lugar de emplear el cálculo aritmético para evaluar esta expresión, es necesario efectuar sobre las líneas conocidas operaciones gráficas, correspondientes á las que estan indicadas por los signos algébricos. (…) Estas determinaciones son lo que se llama la *construccion* de los valores de la incógnita: vamos pues á exponer los principios que son comunes á todas las cuestiones de estos dos grados (p.108).

Explica cómo construir cocientes, expresiones radicales, y como aplicación de esto las soluciones de la ecuación de segundo grado, terminando con la construcción de expresiones de grado mayor a dos.

Comienza explicando la construcción de los cocientes. Primeramente indica cómo deben ser éstos para que la expresión sea homogénea y después prueba que todo cociente se puede construir mediante cuartas proporcionales a las líneas dadas:

> 68. Hay que notar en general, (…) que cuando solo entran líneas en el enunciado de una cuestion, y que la cantidad buscada sea ella una misma línea, su excepcion encierra siempre un factor de mas en el numerador que en el denominador; y cada una de estas cantidades está compuesta de términos homogéneos entre sí. (…)
>
> De aquí se infiere que cuando la expresión de una línea cualquiera no contiene radicales, se puede, con solo representar todas las cantidades que ella encierre por líneas, obtener la longitud de la primera sin recurrir á los números, buscando

> únicamente con la regla y el compás cuartas proporcionales á las líneas dadas. Para probarlo bastará el ejemplo siguiente:
>
> Sea $t=\dfrac{abc+d^3-e^2f}{gh+n^2}$ (…) (p. 109)

En primer lugar hace la observación de que como en el numerador de esa expresión todos los términos son de grado tres y en el denominador de grado dos, la misma representa una línea. Simplifica la expresión haciendo *abc=kd*^{2}*, e*^{2}*f=k'd*^{2}*, gh= k''d, n*^{2}*=k'''d*, de donde obtiene $t=\dfrac{d^2(k+d-k')}{d(k''+k''')}=\dfrac{d(k+d-k')}{k''+k'''}$ y deduce que *t* se obtiene buscando una cuarta proporcional a *k''+k''', k+d-k'* y *d*, cuando "las líneas incógnitas, representadas por *k, k´,k´´*y *k´´´* "estén determinadas (p. 109).

Para obtener estas líneas considera las expresiones donde las tomó, de las que obtiene:

$k=\dfrac{abc}{d^2}=\dfrac{ab}{d}\times\dfrac{c}{d}$, $k'=\dfrac{e^2f}{d^2}=\dfrac{ef}{d}\times\dfrac{e}{d}$, $k''=\dfrac{gh}{d}$, $k'''=\dfrac{n^2}{d}$. Para construir cada valor considera una serie de proporciones. Por ejemplo para la construcción de *k* considera que $d:a::b:\dfrac{ab}{d}$, construyendo la cuarta proporcional a *d, a* y *b*, se obtiene $\dfrac{ab}{d}$, y con ese valor y la proporción $d:c::\dfrac{ab}{d}:\dfrac{abc}{d^2}=k$, se obtiene el valor de *k* sin más que construir la cuarta proporcional a d,c y $\dfrac{ab}{d}$. De forma análoga construye *k', k''* y *k'''* y con ellas *t* (p.109). Termina el ejemplo diciendo:

> Fácilmente se percibe que el espíritu del método de que acabamos de hacer uso para construir una expresión algebraica, consiste en transformar el numerador y el denominador de la expresión propuesta en productos de un cierto número de factores simples ó de primer grado, lo cual siempre es posible haciendo uso de los medios que acabamos de emplear (p. 110).

Señala seguidamente que esta transformación también se puede hacer de forma inmediata, sin introducir cantidades indeterminadas, y pone como ejemplo $t=\dfrac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=\dfrac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}}$ cuyo valor se obtiene por las proporciones

$$\sqrt{a^2+b^2}:a+b::c:\frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sqrt{a^2+b^2}:a-b::\frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}}:\frac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Donde el radical empleado en el cálculo "se construye fácilmente por expresar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son a y b"(p. 111).

Seguidamente explica la manera de construir un radical:

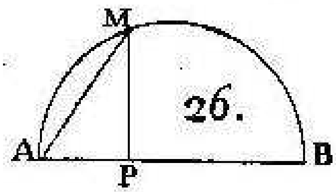
> 69. El triángulo rectángulo y el círculo nos dan medios para construir la raiz cuadrada de una cantidad cualquiera expresada en líneas. El uso del primero es

> evidente cuando la que está comprendida bajo el radical es la suma ó la diferencia de dos cuadrados. En efecto, se tendrá en tal caso $\sqrt{a^2+b^2}$ y $\sqrt{a^2-b^2}$; la primera de estas dos expresiones puede mirarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son a y b, y la segunda como uno de los lados adyacentes al ángulo recto en un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa seria a y el tercer lado b (p. 111).

Continúa explicando cómo construir la expresión $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ que generaliza las anteriores. Para ello construye primeramente $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$, de donde se tiene $\sqrt{\alpha^2+c^2+d^2}$, que se simplifica a su vez construyendo el radical $\beta=\sqrt{\alpha^2+c^2}$, el cual deja la expresión inicial reducida a $\sqrt{\beta^2+d^2}$, que se construye, al igual que las anteriores, como hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se conocen los catetos.

En el punto siguiente explica cómo construir raíces cuadradas empleando la circunferencia. Para ello utiliza propiedades conocidas de esta para obtener medias proporcionales:

> 70. Pasemos ahora al empleo del círculo en la extraccion de las raices cuadradas. Se sabe que la perpendicular elevada sobre un diámetro es media proporcional entre los dos segmentos de este diámetro (*Geom.* 130); se obtendrá pues $\sqrt{ab}$ haciendo, fig. 26, *AP=a, BP=b*, y describiendo un círculo sobre la suma *AB* de estas dos líneas, tomadas por diámetro: la perpendicular *PM* elevada sobre el punto *P*, siendo la media proporcional entre *AP* y *BP*, será igual á $\sqrt{ab}$.



> Tambien puede hallarse una media proporcional entre dos líneas cualesquiera a y b, tomando la mayor de las dos por el diámetro del círculo, y llevando la otra desde *A* á *P;* levantando despues la perpendicular *PM,* y tirando la cuerda *AM,* ella será la media proporcional pedida (*Geom. 131)*[27](p.112).

Señala que con esos métodos se construyen todos los radicales de segundo grado y pone como ejemplo el radical $\sqrt{a^2+bc-\frac{def}{g}}$. Para resolverlo hace $bc=ak, \frac{def}{g}=ak'$, con lo que la expresión propuesta equivale a $\sqrt{a^2+ak-ak'}=\sqrt{(a+k+k')a}$, que se resuelve tomando una media proporcional a $a+k+k'$ y a, donde las cantidades k y k' se determinan mediante cuartas proporcionales (p. 113).

27
130. *Corolario.* La perpendicular levantada sobre un diámetro, y terminada en la circunferencia, es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro. . . . . id.
131. *Observaciones.* Demostracion de la proposicion anterior, deducida del triángulo rectángulo.
La cuerda tirada por la extremidad del diámetro, es media proporcional entre el diámetro y el segmento formado por la perpendicular bajada de la otra extremidad de esta cuerda.

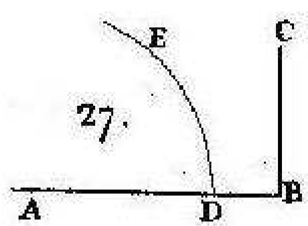
Se encuentra en la pg.XXI

También da un método para el cálculo gráfico de la raíz cuadrada de un número:

> Observaremos de lo que antecede cómo puede extraerse por una operación gráfica la raiz cuadrada de un número cualquiera, con solo tomar una media proporcional entre dos líneas, de las cuales una representaria la unidad, y la otra tendria con esta la razon señalada por el número propuesto. Por ejemplo, $\sqrt{\frac{7}{5}}$ se obtendria tomando una media proporcional entre dos lineas, de las cuales una seria los $\frac{7}{5}$ de la otra, puesto que $\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{I \times \frac{7}{5}}$ (p. 114).

Como hemos dicho, tras la construcción de los cocientes y las expresiones radicales, explica cómo construir las soluciones de la ecuación de segundo grado:

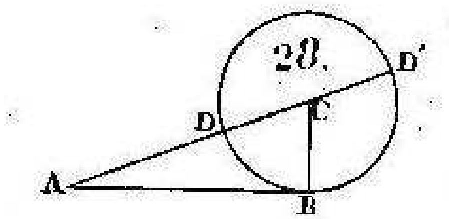
> 72. Es cosa muy fácil por lo dicho construir la expresion de las raices de la ecuacion de segundo grado $x^2 - ax = b^2$, que puede representar todas las de este grado. En efecto, sacando el valor de *x*, se tendrá $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: solo se trata de construir el radical $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ (69), y de tomar después la suma y la diferencia del resultado, y de la línea $\frac{1}{2}a$ para obtener el valor absoluto de cada una de las raices de la propuesta.
>
> Si esta ecuacion fuese de la forma $x^2 - ax = -b^2$, se sacaria $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$: su construccion en este caso no diferiria del anterior, sino en que el radical estaria expresado por uno de los catetos de un triángulo rectángulo, en vez de estarlo por la hipotenusa, y que este triángulo no existriria si se tuviese $\frac{1}{2}a < b$, porque entonces, habiendo tomado sobre uno de los lados de un ángulo recto *ABC,* fig. 27, una magnitud *AB=b,* el círculo *DE,* descrito desde el punto *A* como centro, con un radio que sería menor que *AB,* no alcanzaría á cortar el otro lado *BC.* Esta circunstancia está muy acorde con la teoría de las ecuaciones de segundo grado, que da las raices imaginarias para el caso que se trata (p. 114).



Obsérvese que habla de valor absoluto, cosa que no hacen otros autores.

En este apartado ha obtenido las soluciones geométricas de la ecuación de segundo grado a través de la solución algebraica, es decir primero la ha resuelto mediante el Álgebra para obtener después la solución geométrica al representar las soluciones halladas, pero seguidamente hace la observación de que no es necesaria la solución algebraica para obtener la geométrica.

73. No es necesario resolver las ecuaciones del segundo grado para hallar gráficamente las raices; se las obtiene inmediatamente por las propiedades de las líneas que se cortan en el círculo.



La ecuacion $x^2+ax=b^2$, puesta bajo la forma $x(x+a)=b^2$, se refiere á la propiedad de las secantes y tangentes que parten desde un mismo punto (*Geom. 128)*; porque si se describe, fig. 28, sobre un radio $BC=\frac{1}{2}a$ un círculo, que se tire una tangente *AB*, cuya longitud sea *b*, y que por los puntos *A* y *C* se tire una secante *AC,* llamando *x* la línea *AD,* se tendrá

$$AD'=AD+DD'=AD+2BC=x+a,$$

y la propiedad citada anteriormente dará $AD\times AD'=\overline{AB}^2$; por lo mismo resultará $x(x+a)=b^2$ que es la ecuacion propuesta (p. 115).

Obsérvese la visión geométrica de las fórmulas algebraicas, propia de los matemáticos de esta época, ya que es capaz de ver en una ecuación de segundo grado una propiedad de los círculos, que le servirá para resolver geométricamente dicha ecuación.

Por último explica cómo se han de construir fórmulas de grado mayor, conducentes al cálculo de un área o de un volumen:

> El corto número de cuestiones resueltas anteriormente basta para manifestar cómo el álgebra se puede aplicar á la resolución de los problemas. (...)
>
> Las diversas expresiones construidas en lo que antecede solo se refieren á las líneas, porque los problemas que nos han conducido á ellas solo han tenido por objeto la determinacion de líneas, y esto es lo que acontece comúnmente, á causa de que la determinacion de las figuras se reduce siempre á la de sus dimensiones. Sin embargo, puede presentarse algun caso en que se busque una *área*ó un *volúmen*; en el primer caso la expresion á la cual se debe llegar, si es homogénea, ha de tener en cada término de su numerador dos factores mas que el denominador, y en el segundo caso debe tener tres (p.130).

Para mostrar esto pone la expresión $\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+ad}$ como ejemplo de un área, y $\frac{a^7+b^5c^2-d^7}{a^4+b^4}$ como ejemplo de volumen. Indica que para construir estas fórmulas "se prepara la primera fórmula por el artificio analítico del núm. 68, de modo que se reduzca a un producto de dos factores, y la segunda de modo que represente un producto de tres factores" (p.131).

Así, tomando $ab^2c=m^3k, a^3d=m^3k', d^4=m^3k'', c^2=mk''', ad=mk^{iv}$, siendo *m* una cantidad indeterminada y las cantidades k^n determinadas "por las líneas proporcionales" transforma la primera fórmula en: $\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+ad}=m\times\frac{m(k-k'+k'')}{k'''+k^{iv}}$, "resultado que puede mirarse como el área de un rectángulo, cuya base sería m, y la altura sería la línea representada por la fórmula $\frac{m(k-k'+k'')}{k'''+k^{\text{IV}}}$" (p.131). Y termina haciendo una simplificación más tomando *m*=*a*, cambio que justifica "a causa de estar a nuestro arbitrio el tomar la línea *m*".

Con la segunda fórmula procede de forma análoga transformándola en una expresión que interpreta como el volumen de un determinado paralelepípedo rectángulo.

3.2. Ecuaciones homogéneas. Unidad

Con estas construcciones termina Lacroix la explicación de este tipo de aplicación del Álgebra a la Geometría, en la que se busca la determinación de algunas magnitudes, pero debemos señalar que en ellas se hace referencia a las cantidades homogéneas y a la unidad (U). Pone un ejemplo de cómo utilizarla para convertir expresiones heterogéneas en homogéneas, aunque en la práctica no la utiliza en ningún caso en concreto a la hora de resolver un problema o transformar una ecuación.

> 71. La cantidad que se propone construir podrá muy bien no ser homogénea; pero esto no resultará sino cuando se hayan hecho algunas líneas iguales á la unidad ó que se haya representado un número por una letra, ó una línea por un número; y los métodos indicados anteriormente no se hallarán en defecto por esta circunstancia, siempre que se haga aparecer en todos los términos en que debía hallarse, y con los exponentes convenientes, la línea tomada por unidad.
>
> Si por ejemplo se tuviese $\sqrt{a+\frac{bc}{d^3}}$, y que se supiese por el enunciado de la cuestion que habia conducido á esta expresion, que ella debia pertenecer á una línea, se veria que cada uno de los términos comprendidos bajo el radical deberia ser de segundo grado, y que por lo mismo si designamos la unidad por *n*, será necesario escribir *an* en lugar de *a*, y $\frac{bcn^3}{d^3}$ en lugar de $\frac{bc}{d^3}$, lo cual no cambia el valor absoluto de estas cantidades, puesto que $n = I = n^3$, y en general $n^m = I$, cualquiera que sea *m*. De este modo se tendria $\sqrt{an+\frac{bcn^3}{d^3}} = \sqrt{n\left(a+\frac{bcn^2}{d^3}\right)}$ la cual se construirá fácilmente (p.113).

Se ve un ejemplo de ecuaciones homogéneas el problema resuelto en el punto 72, que recogemos en el apartado de fenomenología:

> *Siendo dada la suma ó la diferencia de dos lados contiguos de un rectángulo y su área, construir este rectángulo.*

Y un ejemplo más de la importancia que se le da a la homogeneidad de las fórmulas lo hemos visto cuando explica cómo se han de construir fórmulas de mayor grado, conducentes al cálculo de un área o de un volumen, además hace una aclaración sobre la fórmula que obtiene para calcular el volumen de un tronco de cono (ver fenomenología), que podría parecer heterogénea:

> En la (fórmula) final del núm. 65 ($\frac{1}{3}hS = \frac{1}{3}\frac{mga^3}{a-b}, \frac{1}{3}(h-g)s = \frac{1}{3}\frac{mgb^3}{a-b}$) la letra m no debe contarse, porque ella expresa una relación, y no una línea (p. 130).

En efecto, $m = \frac{S}{a^2}$, por definición, siendo S la superficie de la base mayor del tronco de cono, y a el radio de la misma por lo que es adimensional, mientras que las demás letras representan las medidas de diferentes elementos del cono.

3.3. Soluciones negativas

Por otra parte, y como hemos señalado anteriormente, otro de los problemas fundamentales que surgen a la hora de operar con segmentos es el de construir e interpretar las soluciones negativas. Lacroix hace referencia a las cantidades negativas en varias ocasiones a lo largo del texto (SN).

En primer lugar cuando construye las soluciones de la ecuación de segundo grado, pero en este caso dice que la construcción es la misma que en el caso de las positivas, ya que habla de *magnitud*:

> Las raices de la ecuacion $x^2 + ax = -b^2$ no difieren de las de la ecuacion $x^2 - ax = -b^2$, sino en que ellas se hallan afectadas del signo -; pero su magnitud se obtendrá siempre por la construccion que se acaba de exponer (p.117).

Como vemos Lacroix no hace diferenciación entre raíces positivas y negativas a la hora de construirlas, mientras tengan el mismo valor absoluto. En el siguiente apartado las estudia dando su interpretación, dado que ya ha dejado claro que la construcción es la misma.

> 74. En la aplicación del álgebra á la geometría el signo – se interpreta en general como se hace respecto á los números, invirtiendo de cierto modo el enunciado de la cuestion, ó tomando en ellas las líneas que son afectadas de tal signo en un sentido contrario á aquel en que se las habia supuesto desde luego (p.117).

Aquí aclara que deben tomarse en sentido contrario a las positivas, aunque la construcción sea la misma.

Continúa haciendo un estudio más exhaustivo de los negativos, dando una explicación de por qué aparecen en un problema: el enunciado del que se parte es erróneo; y dando las pautas para convertir las raíces negativas y positivas, y con ello las *falsas* en válidas.

> Antes de pasar adelante debemos recordar que las cantidades negativas tienen su orígen de aquellas sustracciones que no pueden efectuarse en el orden en que ellas se hallan indicadas, porque la cantidad que se ha de restar es mayor que la de quien se ha de restar. Por esta circunstancia se reconoce que hay un error en el enunciado de aquella cuestion, ó á lo menos en su aplicación al caso particular que se tiene en consideración, y quitando este error, esto es, modificando el enunciado de la cuestion, de suerte que se haga posible la sustraccion que antes no podia ejecutarse, se deberá tener un resultado positivo (…); (p. 117)

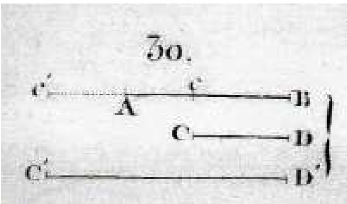
Aunque aclara que en algunos casos, en particular cuando las soluciones se construyen sobre una recta, no es necesario hacer esta corrección pues el signo de la raíz nos indica la inversión de que es susceptible el enunciado:

> (…) mas para ciertas cuestiones, aquellas por ejemplo, que conducen á ecuaciones del primer grado, no hay necesidad de tomarse este trabajo. El mismo signo del resultado indica la inversion de que es susceptible el enunciado; y los valores negativos empleados del modo que expresan las reglas establecidas para efectuar las operaciones sobre las cantidades afectadas del signo -, satisfacen tambien á las cuestiones como los que son positivos; esta es la razon por la que se ha cambiado la denominación de *raices falsas*, que en otro tiempo daban los analistas á las raices negativas de las ecuaciones (p.118).

Esta interpretación de los números negativos como indicadores de un error en el enunciado o de algún elemento susceptible de cambio es original de D'Alembert y se encuentra también en la obra de Bezout y de Carnot, como ya hemos señalado en el análisis del *Tratado de Vallejo*, quienes tuvieron una importante influencia en la obra de Lacroix (Schubring, 2005).

Vemos un ejemplo de lo que acaba de exponer en la siguiente construcción:

> Es tambien por la sustraccion por quien debe explicarse, sobre las figuras geométricas, los valores negativos que el álgebra da á ciertas líneas; para sustraer una línea de otra basta llevar la primera sobre la segunda, partiendo desde uno de los extremos de la última; pero sobre esta operación gráfica hay que hacer algunas observaciones nacidas del modo con que las líneas se describen.



> Sea pues *CD,* fig 30, la línea que debe sustraerse de *AB:* como la primera es menor que la segunda, llevando en esta la C*D* desde *B* hasta *c*, su diferencia *Ac* estará colocada á la derecha del punto *A;* pero si se tuviese que restar *C'D'* mayor que *AB,* y esta se llevase siempre sobre *AB*, partiendo desde le mismo extremo *B*, la diferencia de las dos rectas propuestas seria anotada en *Ac'* sobre la prolongacion de *AB,* y estaria colocada á la izquierda del punto *A*, esto es, de un lado opuesto al resultado *Ac* de la primera operación; es pues á esta mudanza de situación á quien corresponde el signo -(p.118).

Vemos aquí que la solución negativa nos indica que hemos quitado a un segmento otro mayor, en el problema no habría pues que hacer un cambio de enunciado, sino simplemente tener en cuenta esta consideración. Continúa desarrollando esta idea, señalando que aunque parezca que lo adecuado es quitar siempre al segmento mayor el menor, si se interpretan las líneas como la manera de indicar distancias a un cierto punto, se debe construir la que se quita en sentido contrario al segmento dado desde el extremo contrario al que se toma como referencia:

> A primera vista parecia que se debia efectuar la sustraccion indicada sobre las lineas *C'D'* y *AB,* llevando la menor sobre la mayor, porque esto es lo que se hace con los números cuando se quita el menor del mayor; pero es menester observar, respecto á las lineas, que ellas son en general empleadas en señalar distancias á un cierto punto, al cual se refieren otros, y que se mira como fijo; ellas toman pues su incremento por el extremo opuesto á este punto, y en tal caso la sustraccion que por su naturaleza es inversa de la adicion, de la cual resultan en general los incrementos, debe ejecutarse tambien en sentido inverso de aquel, y por consiguiente yendo hácia el lado en que las líneas disminuyen. De aquí proviene que si el punto *A* sobre la recta *AB* es el punto fijo de que hablamos, la sustraccion de *CD* ó de *C'D'* debe ejecutarse tambien desde el punto *B*. La continuidad de las

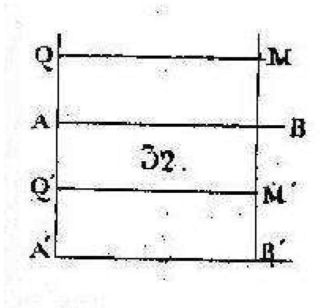
> líneas, y la posibilidad de prolongarlas indefinidamente en los dos sentidos, da el medio de practicar, como acaba de verse, la sustraccion del mismo modo, aunque la cantidad que haya de sustraerse sea la mayor de las dos (p.118).

Obsérvese que de nuevo no sólo explica cómo deben hacerse las construcciones, sino por qué han de hacerse como se hacen.

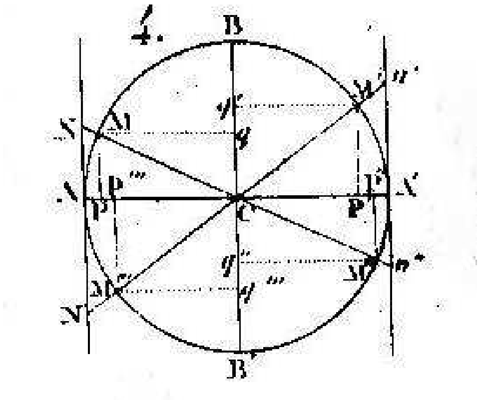
Vuelve sobre el mismo tema más adelante y hace la apreciación de que en el caso en que se trate de distancias desde un punto fijo, construidas sobre una línea, las negativas se deben construirse en sentido contrario a como se hace con las positivas:

> 76. En general siempre que se trate de distancias referidas á un punto fijo; y contadas sobre una línea ó sobre líneas paralelas, aquellas que son afectadas del signo – deben tomarse en sentido opuesto á aquellas que están afectadas del signo + (p. 120).

Seguidamente demuestra que esto debe ser así:



> En efecto, si se considera la situación respectiva de dos puntos cuyas distancias á una recta cualquiera esten expresadas por $a+b$ y a-c, es evidente que la distancia mutua de estos puntos es $b+c$, puesto que $a+b$-(a-c), y para colocarlos de este modo respecto á una recta cualquiera *A'B'*, fig 32, es menester tirar desde luego, sea de un lado, sea del otro de esta línea á una distancia *AA'*=a una paralela á *AB*, tirar despues dos líneas paralelas á esta, la una QM fuera de las primeras y á una distancia *AQ*=b, la otra *Q'M'* dentro y á una distancia *AQ'*=c. Por este medio todos los puntos tales como *M* y *M'*, colocados en los encuentros de las ultimas paralelas, y de una perpendicular á la línea *A'B'*, tendrán entre sí la distancia exigida, y se hallarán en una situación opuesta respecto á la paralela intermedia *AB*, de la cual sus respectivas separaciones son señaladas por $+b$ y $-c$. Es fácil ver que estarian las dos del mismo lado de *AB*, si sus distancias á la línea *A'B'* fuesen expresadas por $a+b$ y $a+c$, puesto que entonces su distancia mutua sería b-c (p. 121).



Aplica esto a la trigonometría, explicando los signos del seno el coseno y la tangente por sus posiciones relativas respecto a los diámetros de una circunferencia:

> Asi es como los senos que son las distancias de los extremos de los arcos al diámetro *AA'*, fig. 4, y los cosenos, que son las distancias al diámetro *BB'*, cambian de signo de un lado al otro de estos diámetros. La tangente sigue la misma ley respecto al diámetro *AA'*, y por la misma razon (p. 121).

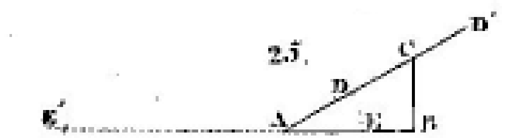
En el siguiente punto trata sobre el signo de la secante y sobre la construcción de las raíces de la ecuación de segundo grado $a^2 - ax = x^2$ que, aparentemente, contradicen lo dicho hasta el momento, aunque él da explicaciones que muestran que no es así:

77. Estas consideraciones no se aplican del mismo modo á la *secante*, porque su direccion cambia á cada momento; sin embargo ella tiene un signo propio á sus diversas situaciones, y que se deduce de su expresión analítica $\sec.a = \frac{R^2}{\cos.a}$; pero en general solo á las líneas que conservan la misma direccion es á quienes corresponde siempre la mudanza de signo, (...) (pg. 121)

A pesar de hacer esta apreciación añade una nota al pie en la que explica el cambio de signo como un cambio de posición, pero no respecto al diámetro como en el caso del seno y del coseno, si no respecto a la tangente:

Puede darse una explicacion bastante natural de las variaciones de signo de la secante, observando que esta línea toma realmente una situación opuesta cuando ella encuentra á la tangente por un lado opuesto á aquel por donde la tocaba antes. En efecto, en los arcos *BA'* y *A'B'*, para los cuales la expresion analítica de la secante es negativa, no es el radio *CM* el que toca á la tangente *NN'*, mas sí el radio opuesto (pg. 121).

Obsérvese que está tomado como sentido positivo *AO,* a la izquierda del centro de la circunferencia, al contrario de cómo se hace actualmente.



Por último trata el problema de los segmentos negativos en relación con la construcción de las raíces de la ecuación de segundo grado $a^2 - ax = x^2$. En este caso señala que aunque al hacer su construcción como se indica en la figura 25 no tienen sentidos contrarios, ya que están representadas por la líneas *AD* y *AD'*, sí hay que seguir la regla de representación dada en el punto 76 cuando sean soluciones de un problema en las que aparezcan como distancias a un punto fijo medidas sobre una misma recta:

Las recta *AD* y *AD'*, fig 25, que representan las raices de la ecuacion de segundo grado $a^2 - ax = x^2$ (67), aunque pertenecen á valores de signos diferentes, no son opuestos; pero si se tratase de aplicarles á la solucion de un problema, en el cual ellas fuesen consideradas como distancias á un punto fijo, medidas sobre una línea de direccion constante, sería necesario llevarlas de uno y otro lado de este punto, según la regla del número 76 (pg. 121).

Y pone un ejemplo que muestra lo anterior, cambiando el enunciado del problema del punto 67:

Se sabe que dividir una línea en media y extrema razon es dividirla de modo que uno de los segmentos sea medio proporcional entre toda la línea y el otro segmento.

a este otro:

Hallar sobre la recta AB=a un punto E, tal que su distancia AE al punto A sea media proporcional entre su distancia al otro extremo B y la línea entera.

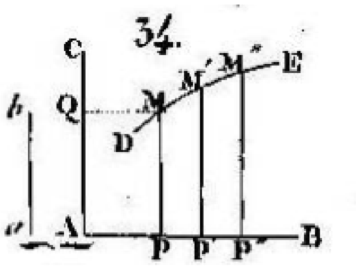
En el primer caso obtenía dos soluciones para la incógnita: *AD* y *AD'* (fig. 25), soluciones de dos ecuaciones diferentes, en el segundo caso llega a la conclusión de que las dos soluciones provienen de la misma, simplemente cambiando el signo de la incógnita. Se puede ver la resolución detallada del problema en la parte de fenomenología.

4. Para determinar una curva

Para terminar analizaremos la tercera aplicación del Álgebra a la Geometría que da Lacroix, basada en el concepto de lugar geométrico. Comienza esta parte explicando este nuevo enfoque (D):

> 81. No solo sirve el Algebra para hallar la magnitud de las líneas y de las partes de la extension, comparadas las unas á las otras, sino que da tambien el medio de determinar las figuras que forman estas líneas, y en general las formas del espacio. Notando Descartes, el primero, que estas figuras y estas formas establecen relacion de magnitud entre las líneas, llegó á aplicar el algebra á la teoría de la líneas en general; y por este descubrimiento cambiaron de aspecto las Matemáticas (p.132).

Es decir, que las curvas se pueden expresar mediante ecuaciones algebraicas, concepto fundamental de la Geometría Analítica. Es más, Lacroix habla explícitamente de lugar geométrico y explica qué es (LG):



> 86. La ecuacion que expresa las relaciones entre las *AP* y las *PM*[28] para una línea dada, se llama la *ecuacion de esta linea*, y esta se llama el *lugar geométrico* de la ecuacion que la pertenece (p. 138).

Y añade:

> Es claro que toda cuestion geométrica indeterminada que contenga dos incógnitas, conduce á un lugar geométrico (p. 139).

Y desarrolla esta idea poniendo un ejemplo. En él se plantea calcular todos los triángulos rectángulos que puedan construirse sobre una hipotenusa *a,* como la ecuación que cumplen será $x^2 + y^2 = a^2$, deduce que "el cuarto de círculo (de radio *a*) sería el lugar geométrico de todos los vértices de uno de los ángulos agudos de estos triángulos" (p. 139), y añade:

> Por lo mismo se obtiene siempre la ecuacion de una curva, expresando analíticamente, ó una cualquiera de sus propiedades, como hemos hecho para la línea recta, ó las circunstancias de su trazo ó descripcion, como se ha hecho respecto al círculo. Recíprocamente una ecuacion cualquier, considerada en sí misma, da origen á una curva, cuyas propiedades hace conocer (p.139).

Y aquí hace una consideración muy importante:

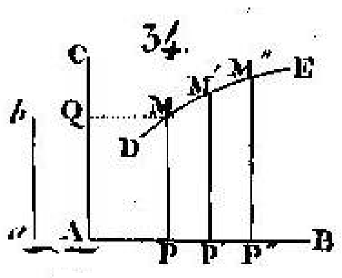
> Como este último punto de vista es el más general y el más fecundo, nos valdremos de él, y por lo mismo deduciremos las líneas por la consideracion de las ecuaciones (p.139).

Pero antes de tratar el concepto de lugar geométrico pone algunos ejemplos de esa nueva aplicación del Álgebra que acaba de explicar.

---

[28] AP y PM son la abscisa y la ordenada, respectivamente, de un punto m de la línea.

Pone un primer ejemplo de una curva en general, en el que explica, simplemente cómo obtener las coordenadas de un punto, aunque no las nombra, y de la relación que existe entre ellas y la ecuación de la curva:



Por ejemplo, si se concibe que desde todos los puntos de una linea cualquiera *DE,* fig. 34, se hayan bajado perpendiculares *PM, P'M', P''M''*&c. sobre una línea recta *AB,* dada de posicion, y que partiendo desde un punto *A*, tomado á arbitrio sobre esta línea, se hayan medido las distancias *AP, AP',AP'' &c*; cada una de estas distancias, y la perpendicular que la corresponde, estarán ligadas entre sí, de modo que la una se concluirá precisamente de la otra. En efecto, cuando esté fijada la magnitud de *AP,* el encuentro de la curva *DE* con la perpendicular, levantada por el punto *P* sobre la línea *AB,* dará la magnitud de *PM;* y cuando se tenga esta magnitud, que supondremos representada por *ab*, se obtendrá *AP* con solo tomar sobre *AC,* perpendicular á *AB,* una parte *AQ=ab*, y tirar por *Q* la recta *QM* paralela á *AB*, la cual encontrará á la línea *DE* en un punto *M,* para cuyo punto deberá tenerse *PM=ab.*

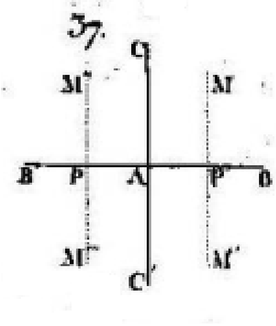
Nada obsta imaginar que las líneas *AP, PM* esten referidas á una línea comun tomada por unidad, y que bajo este aspecto ellas de hallen representadas por números ó letras. Si la relacion que hay entre *AP* y *PM* entre *AP*' y *P'M' &c*. puede ser expresada por una ecuacion algebraica, esta ecuacion caracterizará la línea *DE*, y podrá servir para conocer sucesivamente todos sus puntos; (...) (p.132)

Como ejemplo de esto obtiene las ecuaciones de la recta y el círculo, como veremos a continuación, y concluye hablando de las coordenadas de un punto:

85. Este modo de representar el *curso* de las líneas (...) tiene por objeto determinar la posicion de un punto cualquiera por medio de dos rectas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí. El punto *M,* fig. 34, está determinado cuando se tienen las distancias *AP* y *AQ* (...).

Las líneas *AP* y *AQ,* ó sus iguales *PM* y *QM,* se llaman *coordenadas*. Comúnmente se emplea la palabra *abscisa* para designar a la coordenada que se supone conocida, y á la otra se la da el nombre de *ordenada*.(...) Las líneas *AB* y *AC,* que determinan la dirección de las coordenadas, se llaman los ejes de las *coordenadas.* (p.137)

Tras obtener las ecuaciones de los ejes de coordenadas habla de los signos que tienen las coordenadas de cada punto dependiendo del cuadrante en el que se encuentren. Explica que si solo se dan los valores absolutos de la abscisa y la ordenada el punto queda indeterminado

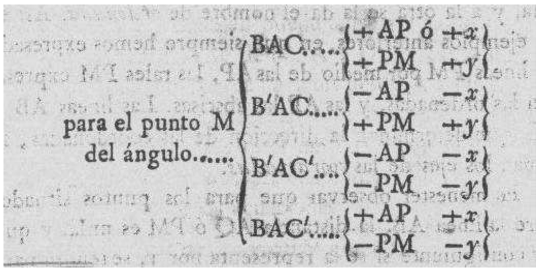


(…) pues en tal caso no se conoce mas que la distancia de este punto á las rectas indefinidas *BB'* y *CC'*, fig. 37; y conservando estas mismas distancias, el tal punto podrá hallarse indefinidamente en uno de los cuatro ángulos rectos *BAC, B'AC, B'AC', BAC'(...)* (p.138).

Pero aclara que el signo de sus coordenadas indica el cuadrante en el que se halla.

> En efecto, habiendo convenido en dar el signo + á las partes de la línea *A*, yendo desde *C* hácia *B*, el signo - será el que es necesario asignar á las partes de *AB'* que estan desde *A* hácia *B'* (sic) (p. 138).

De igual modo explica el signo del resto de los cuadrantes e inserta el siguiente cuadro a modo de resumen:

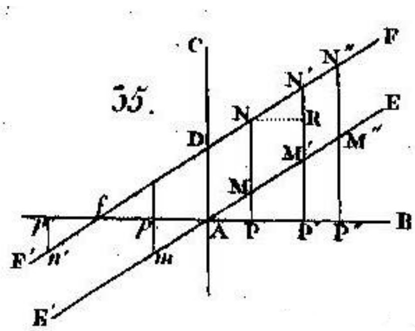


para el punto M del ángulo.....	BAC.....	+AP ó +x	+PM +y
	B'AC.....	−AP −x	+PM +y
	B'AC'.....	−AP −x	−PM −y
	BAC'.....	+AP +x	−PM −y

Tras esto especifica que los ejes de coordenadas no tienen por qué ser perpendiculares, pero no habla de sistemas de coordenadas oblicuas, ni de coordenadas polares, aunque indica otros modos de determinar un punto en el plano:

> La eleccion de las líneas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, no es la única que puede hacerse para determinar sobre un plano la posicion de un sistema de puntos: toda combinacion de líneas capaz de fijar la posicion de un punto, como, por ejemplo, la distancia de él á dos puntos dados, sería propia para este uso; pero comunmente las coordenadas perpendiculares son las que en su empleo presentan mas facilidad. (p.138)

Como hemos dicho anteriormente, como ejemplo de esta nueva aplicación del Álgebra a la Geometría obtiene las ecuaciones de la recta y el círculo (ER). Nosotros estudiaremos solo las primeras pues las ecuaciones cuadráticas están fuera de nuestro estudio.
Estudia la ecuación de la recta en dos direcciones. En primer lugar a partir de la gráfica y mediante razonamientos geométricos, obtiene dicha ecuación; y después partiendo de esta, indica que su lugar geométrico es una recta.



En el primer caso considera la recta *AE*, fig. 35 y señala que los triángulos *APM, AP'M', AP''M''*, etc., formados al trazar las perpendiculares a la recta *AB* por cada uno de sus puntos *(PM, P'M'. P''M''...);* son triángulos semejantes, de donde se obtienen las proporciones:

$\frac{PM}{AP}=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{P''M''}{AP''}=\ldots$ Llama a a la relación constante entre las distancias *AP* y las perpendiculares *PM, P'M'…* obteniendo $PM=a\times AP, P'M'=a\times AP', P''M''=a\times AP'',\ldots$ y concluye:

> Todas estas ecuaciones, que parecen particulares á cada punto de la recta *AE*, pueden ser comprendidas en una sola con solo designar en esta la distancia del pie de la perpendicular al punto *A*, cualquiera que ella sea, por *x*, y la perpendicular que la corresponda por *y*, porque en tal caso se tendría $y = ax$ (p.134).

Es decir, obtiene la ecuación explícita de la recta, aunque Lacroix no le pone nombre, y lo hace mediante razonamientos puramente geométricos, utilizando semejanza de triángulos. Tras esto explica que de las dos incógnitas de la ecuación solo se puede conocer una, la cual se obtiene tras haber fijado la otra.

Continúa explicando que la recta es infinita, y que por tanto debe prolongarse "debajo de la línea *AB*", siendo su ecuación la misma que en el caso anterior, con la diferencia de que ahora los valores de *x* e *y* son negativos:

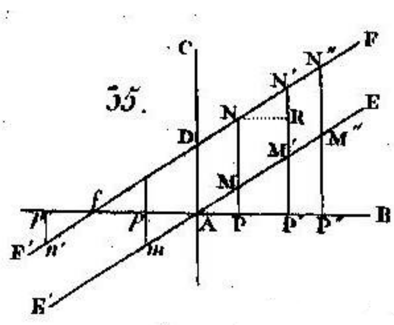
> La línea *AE* no se termina en el punto *A*; para abrazar toda la extension de dicha línea se la debe concebir prolongada hácia *AE* debajo de la línea *AB,* y á la izquierda de la línea *AC.* Esta última parte está tambien comprendida en la ecuacion $y = ax$; porque se puede dar á *x* en esta ecuacion valores negativos, y expresando estos valores las distancias á la línea *AC,* deben ser tomados del lado opuesto á aquel en que se han llevado los valores positivos (76): ellos darán pues puntos tales como *p*, colocados al otro lado del punto *A.* Pero los valores correspondientes de *y* son tambien negativos, y por lo mismo deben tomarse del lado opuesto á aquel en que se han llevado los valores positivos, esto es, debajo de *AB,* como *pm*, ademas es claro que si se tomase *Ap* igual á *AP pm* seria igual á *PM;* (...) (p.134)

Estas consideraciones no se plantean hoy en día, se considera de forma natural que una recta es infinita, que la ecuación la verifican todos sus puntos -por eso es la ecuación que la define- y que las variables pueden tomar valores positivos y negativos. El hacerla viene de su interpretación de las cantidades negativas, que indican, como ya hemos señalado un cierto tipo de cambio, en este caso de posición respecto de los ejes.

Como hemos dicho, tras explicar qué es el lugar geométrico correspondiente a una ecuación volverá a estudiarla, esta vez desde el Álgebra, así nos dice:

> 87. De todas las ecuaciones en dos indeterminadas la mas simple es la de primer grado; ella pertenece á la línea recta, la más simple de todas las líneas. Esta ecuacion puede representarse por *Cy =Ax+B* (...) (p.139).

Podemos decir que en este caso da la ecuación general de la recta, aunque no la nombra. De ella, dividiendo entre *C* obtiene $y = ax + b$, haciendo $\frac{A}{C} = a, \frac{B}{C} = b$, es decir de nuevo la ecuación explícita, y de ella sacará la propiedad que caracteriza a la recta -lugar geométrico correspondiente a esta ecuación-, tal como explica cuando habla de estos, como hemos visto. Comienza estudiando la ecuación $\frac{y}{x} = a$:



> Supongamos que *b* sea nula, se tendrá $y = ax$, ó $\frac{y}{x} = a$; esto es, que en toda la extension de la recta, la razón de *PM* á *AP*, fig. 35, será constante. Esta propiedad, que no es otra cosa que la expresion de la semejanza de los triángulos *APM, AP'M'* & c., sobre la línea *AB*, no puede pertenecer sino á la línea recta *AE*, tirada por el punto *A* del orígen de las coordenadas (p. 140).

Tras esto estudia la relación $\frac{y}{x}$, o lo que es lo mismo el valor de *a,* del que concluye, basándose en el triángulo rectángulo *APM* de la figura, que "expresa la tangente" del ángulo que forma la recta *AE* con el eje de abscisas.

Y de nuevo retoma la ecuación $y = ax + b$, y obtiene su lugar geométrico:

> (...) la línea *DF* paralela á *AE,* ella será el lugar de la ecuacion $y = ax + b$
>
> (*AD*=*b*), puesto que se tendrá
>
> $$PN=PM+MN=PM+AD$$
>
> $$P'N'=P'M'+M'N'=P'M'+AD \ \&c.;$$
>
> es preciso notar que el coeficiente a quedará el mismo para todas las rectas paralelas á *AE* (p. 140).

Al igual que en el caso anterior explica que la recta es infinita, y el caso en que los valores de x o y son negativos, utilizando para ello los criterios de construcción que explicó cuando trató el tema de los segmentos negativos (SN).

> Cuando permaneciendo negativo el valor de *x*, este sea mayor que $\frac{b}{a}$, el mismo valor de *y* será negativo; y como pasado el punto *f*, la línea *DF* (ver fig. 35) se halla por la parte inferior de la línea *AB,* resulta que la ordenada *p'n'* caerá de un lado opuesto á aquel en que ella está situada desde luego; y por consiguiente los valores negativos de *y* deben llevarse de un lado de la línea *AB*, opuesto á aquel que se ha adoptado para los valores positivos.

Y concluye diciendo que esto es general para todo tipo de curvas, y que además es una cuestión importante a tener en cuenta:

> Estas observaciones, que confirman lo que se ha dicho en el num. 76, no son particulares á la línea recta. Ellas son muy interesantes, porque las diversas formas que toman las líneas curvas depende en gran parte del uso de las cantidades negativas en las figuras (p. 142).

También obtiene la ecuación de la circunferencia y explica que, a pesar de obtener puntos disjuntos de las ecuaciones obtenidas, estas representan a la curva continua:

> 84. Aunque de las ecuaciones $y = ax,\ y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; solo se saquen valores pertenecientes á puntos siempre separados; sin embargo, la continuidad que resulta de la descripcion de la línea recta y del círculo, representadas estas líneas respectivamente por aquellas ecuaciones, no puede ser alterada, porque se puede siempre determinar, por medio de tales ecuaciones, dos puntos tan inmediatos uno á otro como se quiera, á causa de que basta tomar para *x* dos valores consecutivos casi iguales, y que nada es capaz de limitar la pequeñez de la diferencia que se puede poner entre ambos valores de *x* (p.136).

Tras obtener la recta como lugar geométrico de una ecuación de primer grado explica diferentes formas de obtener esta. Como la ecuación es $y = ax + b$, que "solo contiene dos constantes" nos dice que solo se necesitan dos condiciones para determinarla, que serán o bien "la de sujetar á la recta á pasar por dos puntos dados, ó bien á ser paralela ó perpendicular á otra recta dada, y pasar ademas por un punto dado" (p. 142).

El primer caso lo resuelve tomando dos puntos (α,β) y (α',β'), los sustituye en la ecuación de la recta y de las ecuaciones obtenidas despeja *a* y *b*, obteniendo: $y-\beta=\dfrac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$ $a=\dfrac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}$, $b=\dfrac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}$, por lo que $y=\dfrac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\dfrac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}$ [29]"será la ecuación de la recta buscada" (p. 142).

De esta ecuación obtiene la ecuación punto-pendiente (que él no nombra), restando a la ecuación $y=ax+b$ la obtenida al sustituir en ella el punto (α,β), es decir: $\beta=a\alpha+b$. De ello obtiene $y-\beta=a(x-\alpha)$ (p. 143), que será la ecuación de "una recta sujeta á pasar por un punto dado, (...), y que forma con el eje de las x un ángulo cualquiera". De esta obtiene $y-\beta=\left(\dfrac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)(x-\alpha)$ (p. 143) sin más que sustituir el valor de *a* obtenido anteriormente, obteniendo así otra expresión de la ecuación de la recta que pasa por (α,β) y (α',β').

Estudia otras cuestiones relacionadas con la recta y el punto como son el punto de corte de dos rectas, el ángulo que forman, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad y la distancia entre dos puntos. Lacroix no los enuncia como problemas, pero sí lo hacen la mayoría de los autores estudiados, por tanto los hemos en el apartado de fenomenología, como en otros casos.

4.6.3.2. Sistemas de representación

En la obra de Lacroix sólo encontramos tres tipos: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico, como no podía ser de otra manera al utilizar el Álgebra; y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente las construcciones geométricas.

Utiliza el lenguaje natural en definiciones, enunciados y resultados.

Lacroix define la Aplicación del Álgebra a la Geometría, *lugar geométrico* de una ecuación (D) y *abscisa, ordenada* y *ejes de coordenadas*.

Todas las explicaciones de las construcciones geométricas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E).

También de forma literal explica cómo interpretar y construir las cantidades negativas (SN), o cómo utilizar la unidad para conseguir que una ecuación sea homogénea (U).

En algunos problemas obtiene resultados generales en forma de fórmula algebraica la cual interpreta de forma literal. Un ejemplo de esto lo vemos en el problema en que obtiene el área de un triángulo en función de los lados (PRD).

También los problemas están enunciados de forma literal así como algunos resultados generales que deduce de estos mismos problemas (PR).

[29] En el libro hay una errata en esta ecuación.

El lenguaje simbólico se encuentra a lo largo de todo el texto. En la primera parte aparecen expresiones algebraicas, entre ellas las fracciones algebraicas o expresiones irracionales y expresiones simbólicas en desuso hoy en día, para denotar la proporción entre cuatro segmentos (E, PRD).

> Haciendo pues *AD=x*, se tendrá *BD=a-x*, y los triángulos semejantes *BAC* y *BDE* darán
>
> *AB:AC::BD:DE,*
>
> ó *a:b::a-x:c,*
>
> luego $ab - bx = ac$,
>
> $$x = \frac{ab - ac}{b} = \frac{a(b-c)}{b} \text{ (p.119)}$$

En la segunda parte utiliza también expresiones algebraicas para escribir las ecuaciones de la recta, el punto de corte de dos rectas, la tangente del ángulo que forman, la proyección ortogonal de un punto y la distancia entre dos puntos (ER, PR).

Además en los problemas suele dar la solución mediante una ecuación algebraica, que en algunos casos representa, en otros da además de forma literal, y en otros simplemente da en forma algebraica, como en el caso del teorema del coseno -que él no nombra-, en el que da todas las fórmulas posibles en función de los lados y ángulo conocidos. (PRD)

En cuanto a los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, tanto para obtener los resultados teóricos como para resolver los problemas propuestos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él (CEO1).

Como en otros autores los hay de dos tipos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución, en los casos pertinentes (PR).

El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc.; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso, en sus razonamientos (SN, E, C, N, ER).

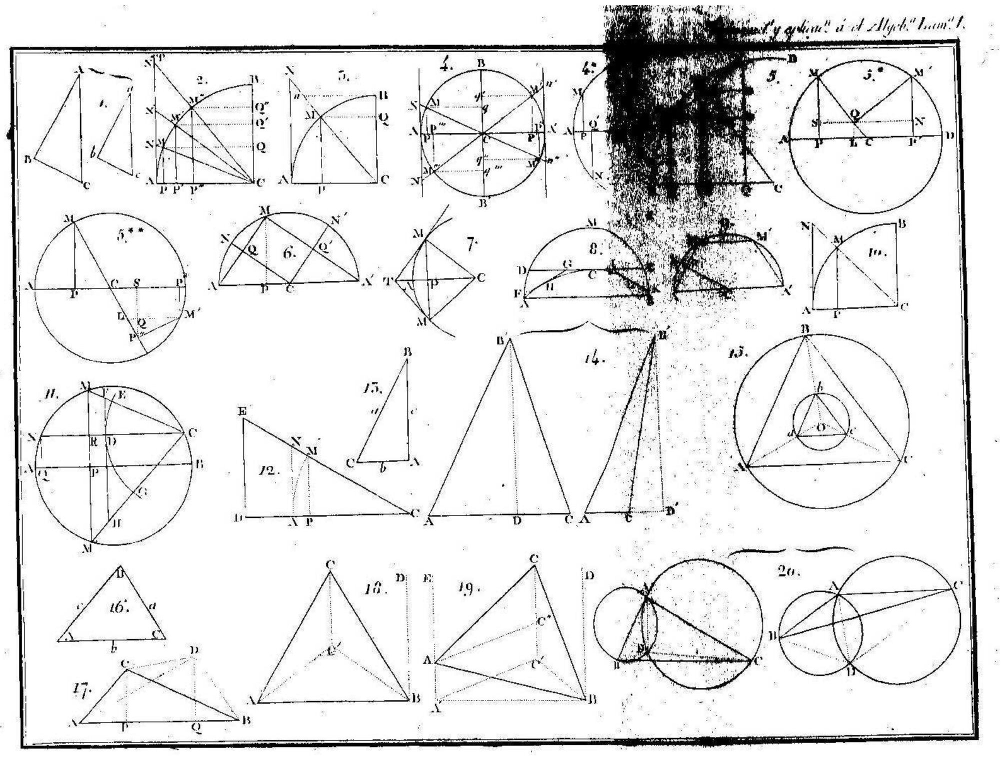


Figura 49: Lámina I. Tratado elemental. Lacroix

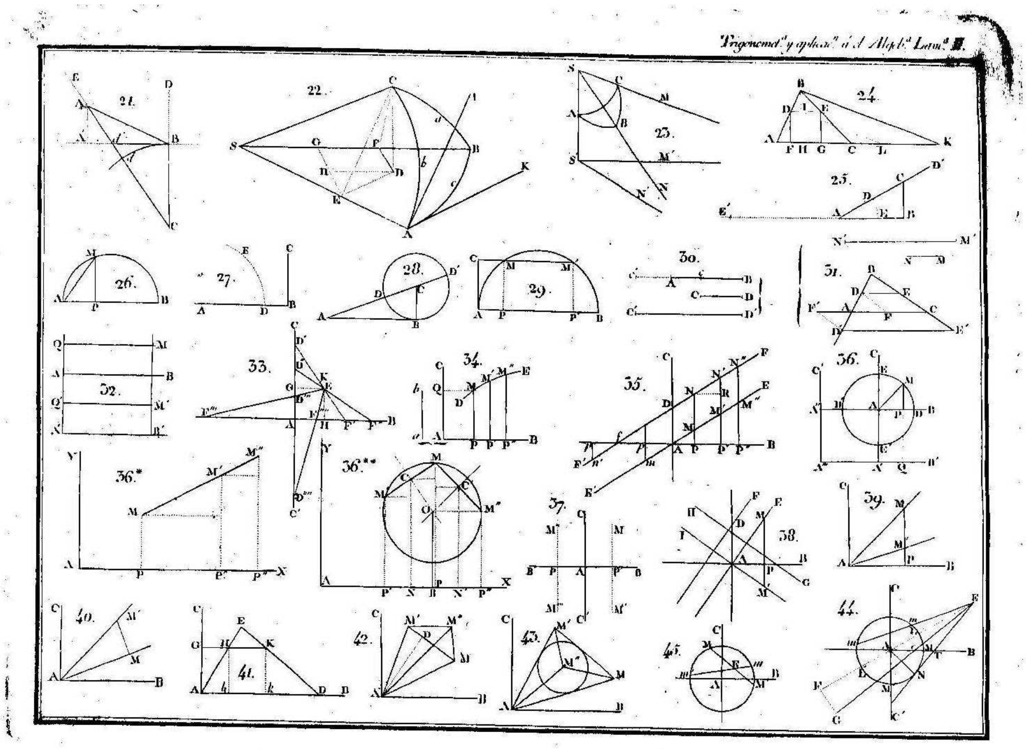


Figura 50: Lámina II. Tratado elemental. Lacroix

4.6.3.3. Fenomenología

Como hemos visto Lacroix comienza explicando tres maneras de combinar el Álgebra y la Geometría con el fin de resolver problemas geométricos. Nos dice que un teorema se puede expresar mediante una ecuación algebraica; que las expresiones algebraicas se pueden interpretar y construir geométricamente; y que mediante una ecuación se puede representar un lugar geométrico (D). Los problemas que propone y resuelve van encaminados, todos ellos, a mostrar una o varias de estas tres situaciones, así como otros aspectos de la teoría como la construcción de expresiones algebraicas y la construcción e interpretación de segmentos negativos y de ecuaciones homogéneas (PR).

Por ejemplo, los problemas resueltos en los puntos 64, 65 y 99, ilustran cómo expresar un teorema mediante una ecuación. En los puntos 66, 67, 72 y 75, entre otros, se muestran ejemplos de construcciones geométricas de las fórmulas algebraicas y de segmentos negativos; y a partir del punto 96 los problemas propuestos muestran formas de trabajar con las ecuaciones de la recta. Algunos de ellos, como el del punto 78, muestran diversas formas de resolución que ilustran diferentes aspectos de la teoría (PR).

En cualquier caso todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático.

Encontramos por tanto cuatro tipos de problemas atendiendo a su fenomenología:

1. **Para obtener resultados teóricos de Geometría mediante el uso del Álgebra (PRDT)**

En este apartado incluimos dos problemas:

> Conociendo los tres lados de un triángulo, hallar la expresión de su área ó superficie (p. 100).

En el punto 65 (p. 103) busca la fórmula para calcular *el volumen de un tronco de cono/pirámide conocidos su altura y los radios/lados de las bases*. Se apoya en un resultado geométrico mostrado en sus *Elementos de Geometría:*

> El método indicado en los *Elementos de Geometría*, núms. 234 y 235, para hallar la altura entera de una pirámide ó de un cono truncados por un plano paralelo á la base cuando se reduce á fórmula, conduce á una expresión notable del volúmen de tal cuerpo (p. 103).

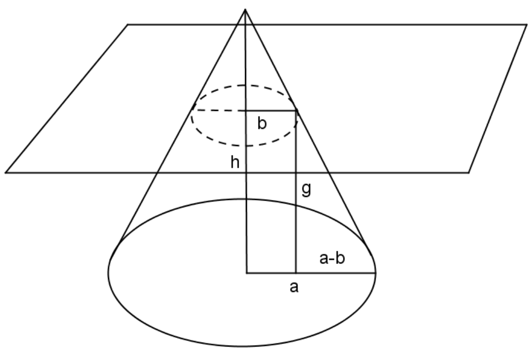
Dentro del desarrollo algebraico de estos problemas llega, en varias ocasiones a conclusiones puramente geométricas a través de las ecuaciones que va obteniendo, como veremos a continuación.

Por otra parte, estos problemas son ejemplo también de aquellos en que el resultado que se busca es un número y no una línea -según expresa el mismo Lacroix- , es por ello que no construye las soluciones geométricas, no es posible.

El primer problema es resuelto de forma muy similar por Vallejo en su *Tratado*, en cuyo análisis hemos incluido la solución, por lo que solo insertamos la del segundo:

Obtener la expresión del volumen de un tronco de cono/pirámide conocidos su altura y los radios/lados de las bases.

PG: Designa por a y b los lados homólogos de las bases de un tronco de pirámide o los radios de las de un tronco de cono, por g a la altura de dicho tronco y por h a la altura de la pirámide o el cono entero.



PRA:

De la proporción *a-b:a::g:h* obtiene $h = \dfrac{ag}{a-b}$, y de esta $h-g = \dfrac{ag}{a-b} - g = \dfrac{bg}{a-b}$. (p. 103)

Al ser las bases semejantes "serán entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas; de suerte que llamando S a la base inferior y s a la superior (obsérvese que identifica la base con su área), se tendrá $S{:}s{::}a^2{:}b^2$, ó $S{:}\ a^2{::}s{:}b^2$" (p. 103).

Llama m al cociente entre S y a^2 obteniendo $S = a^2 m,\ s = b^2 m$;

> y los volúmenes del cuerpo entero y del quitado serán expresados respectivamente por $\frac{1}{3}hS = \frac{1}{3}\frac{mga^3}{a-b}, \frac{1}{3}(h-g)s = \frac{1}{3}\frac{mgb^3}{a-b}$
>
> (…) restando la segunda expresión de la primera, se tendrá para el volúmen del tronco la siguiente
>
> $$\frac{1}{3}\frac{mg(a^3-b^3)}{a-b} = \frac{1}{3}mg(a^2+ab+b^2) = \frac{1}{3}g(ma^2+mab+mb^2) \text{ (p. 104)}$$

A continuación observa que am^2 y mb^2 son las bases inferior y superior del tronco, así si se toma $ab=c^2$, $c=\sqrt{ab}$ expresará una media proporcional entre las líneas a y b y por tanto $mab=mc^2$ expresará el área de un polígono semejante á las bases del tronco de cono, construido sobre el lado c, o de un círculo de radio c.

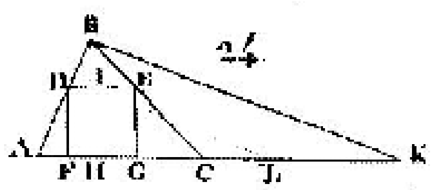
> Del resultado anterior se infiere que el volúmen de un tronco de pirámide á de un cono es igual al tercio de su altura, multiplicado por la suma de las áreas de sus dos bases, y de una figura semejante construida sobre un lado ó sobre un radio medio proporcional entre los de estas bases (p. 104).

Concluye observando que, como $mab = \sqrt{ma^2 \cdot mb^2}$, el área de esta figura es media proporcional entre las de las dos bases.

Además añade que si se construyen tres pirámides ó conos de la misma altura que el tronco propuesto sobre cada uno de estas tres bases la suma de los volúmenes de las tres figuras será igual a la del tronco de cono (p. 104).

Como ya hemos señalado, dentro del desarrollo algebraico del problema llega, en varias ocasiones a conclusiones puramente geométricas a través de las ecuaciones que va obteniendo, como en este último caso, o al enunciar el resultado que ha obtenido, en el que indica que *mab* es el área de una figura semejante a las bases, en vez de dar la fórmula sin más.

2. Para mostrar la construcción geométrica de expresiones algebraicas y de segmentos negativos (PRDT).

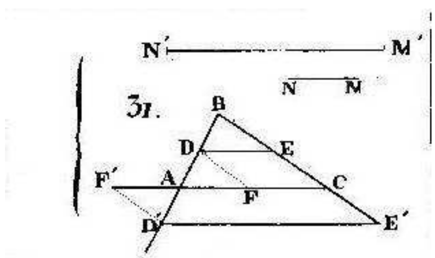


Con este fin Lacroix platea y resuelve los problemas que a continuación enunciamos:

66. Por ejemplo, tratemos de inscribir un cuadrado *DEFG* en un triángulo *ABC*, fig. 24 (p. 104).

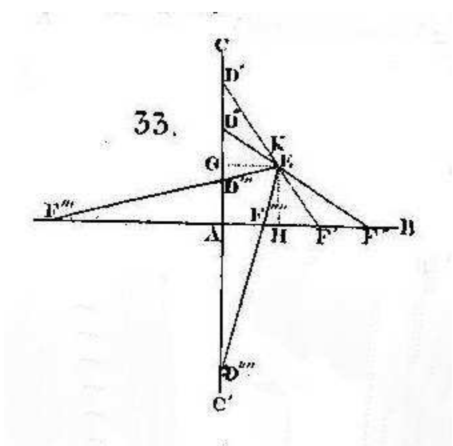
67. (…) Se sabe que dividir una línea en media y extrema razón es dividirla de modo que uno de los segmentos sea medio proporcional entre toda la línea y el otro segmento (p. 106).

72. (…) Siendo dada la suma ó la diferencia de dos lados contiguos de un rectángulo y su área, construir este rectángulo (p. 115).



75. En un triángulo dado *ABC*, fig. 31, tirar paralelamente al lado *AC* una línea *DE* que sea igual á la línea dada *MN* (p. 119).

77. (…) Hallar sobre la recta *AB=a* un punto *E*, tal que su distancia *AE* al punto *A* sea media proporcional entre su distancia al otro extremo *B* y la línea entera (p. 122).



78. Por un punto *E*, fig. 33, colocado como se quiera respecto de dos rectas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, tirar una recta de modo que la parte *D'F'* de esta recta, interceptada entre las dos rectas propuestas, sea de una magnitud dada *m* (pg. 122).

La solución propuesta por Lacroix para el primer problema es exactamente igual que la dada por Alberto Lista en su obra. Como dicha solución está incluida en el análisis de aquella no lo hacemos aquí, pero este problema está resuelto por Lacroix también utilizando ecuaciones de la recta, solución que incluimos en el apartado correspondiente. Análogamente la solución del problema 75. Sí incluimos las soluciones de los problemas propuestos en los puntos siguientes.

En el punto 67 muestra un ejemplo de problema que conduce a una ecuación de segundo grado. En el 72 explica la construcción de las soluciones de esta ecuación y el problema que incluye en este punto representa un ejemplo de aplicación de esta construcción.

En los puntos 76 y 77 trata, de nuevo el tema de los signos negativos (SN) y tras las diferentes explicaciones pone un ejemplo que muestra lo visto, enunciando el problema del punto 67 de una nueva forma.

Para terminar, en el punto 78, presenta un problema complejo en su resolución. Indica que el problema propuesto “es muy propio para manifestar cómo deben interpretarse las diversas soluciones que ofrece una misma ecuación”, y además en la resolución geométrica podemos ver que construye un radical mediante el teorema de Pitágoras.

67. Se sabe que dividir una línea en media y extrema razon es dividirla de modo que uno de los segmentos sea medio proporcional entre toda la línea y el otro segmento

PRA:

> para resolver algebráicamente este problema se designará la línea entera por a, el segmento incógnito por x, el otro segmento será a-x, y se tendrá
>
> $$a:x::x:a-x,$$
>
> de donde se concluirá
>
> $$a^2 - ax = x^2;$$
>
> Resolviendo esta ecuacion se sacará
>
> $$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} \text{ (p. 106)}$$

RG: Para representar la solución lo hace primeramente con el radical, mediante un triángulo rectángulo:

> (…) el radical $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$ es la hipotenusa AC, fig. 25, del triángulo rectángulo construido sobre los lados $AB=a$, $BC=1/2a$. (p. 107)

A continuación construye los valores de *x*:

> No se trata para obtener los valores de *x*, sino de combinar por sustraccion y por adicion la línea *AC* con la línea *BC=1/2a*, lo que se efectuará llevando *BC* desde *C* á *D* sobre *AC*, y desde *C* á *D'* sobre su prolongacion, por que se tendrá
>
> $AD = AC - DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, de donde sale *x=AD*[30],
>
> $AD' = AC + DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$, de donde sale *x=-AD'*,

A continuación explica las dos soluciones halladas. Dice de la primera que es la solución al problema 132 propuesto en los *Elementos de Geometría:*[31]

De la segunda explica que es la solución de la ecuación propuesta puesta en la forma

$a^2 = ax + x^2$ de la que se obtiene la proporción *x+a:a::a:x,* que equivale a *AD':AB::AB:AD* al ser *AD'=AD+2BC=AD+AB* (recordemos que *AB=a, BC=1/2a*) , de lo que se deduce que la línea *AD'* está también dividida en media y extrema razón en el punto *D*, y que el segmento mayor *DD'* es igual a la línea dada *AB* (p. 107).

Del signo menos que afecta a esta segunda solución señala que más adelante, en el epígrafe 77, en el que se verá un enunciado "al cual corresponden al mismo tiempo los dos valores de x", se explicará su significado. En este punto nos dice:

> En efecto el problema del núm. 67 puede enunciarse así:
>
> *Hallar sobre la recta AB=a un punto E, tal que su distancia AE al punto A sea media proporcional entre su distancia al otro extremo B y la línea entera.*

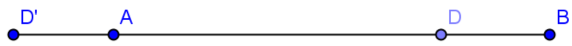
Como hemos señalado en el apartado del análisis de contenido, llega a la conclusión de que las dos soluciones provienen de la misma ecuación y no de dos distintas como en el caso anterior, y para ello solo es necesario cambiar el signo de la incógnita:

> Como los dos valores de la incógnita son en tal caso *AD* y *AD'*, el último que se halla afectado del signo – debe llevarse hácia*AE'*, mas allá del punto *A*, respecto al punto *B*. Esta conclusión es fácil de verificar, porque el valor de *AD'*, correspondiendo *a-x* en la ecuacion $a^2 - ax = x^2$, verifica la ecuación $a^2 + ax = x^2$ que resulta de mudar +x en –x; y esta última ecuacion da la proporcion
>
> *a+x:x::x:a,*
>
> que equivale á *AB+AE* ó *BE':AE'::AE':AB* (pg.122).

---

[30] En el libro hay una errata, pone *x=-AD*, cuando en realidad es *x=AD*.

[31] 132. Problema. Dividir una línea en media y extrema razón; es decir, de modo que la parte mayor sea media proporcional entre la línea entera y la otra parte.(p.114 de *Elementos de Geometría)*



Como vemos hace lo que explican Alberto Lista y Mariano Zorraquín a la hora de interpretar las soluciones negativas: se cambia $+x$ por $-x$, se observan los cambios que se producen en la ecuación inicial con este cambio de signo, para saber qué cantidades cambian de directas a indirectas (según terminología de Alberto Lista, no de Lacroix), y estas son las que se han de construir en sentido contrario. Lacroix hace esto, pero no lo explica, simplemente pone el ejemplo para ver cómo se representan dos soluciones de distinto signo cuando indican distancias desde un mismo punto fijo.

72. Siendo dada la suma ó la diferencia de dos lados contiguos de un rectángulo y su área, construir este rectángulo.

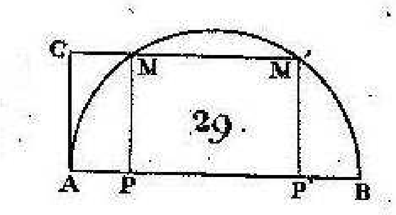
Como ya hemos dicho, en este problema construye las soluciones de una ecuación de segundo grado.

> En efecto, sean b^2 la superficie del rectángulo pedido, a la suma ó la diferencia de sus lados contiguos, y x uno de ellos; el otro será expresado por a-x en el primer caso, y por a+x en el segundo; la superficie será $(a-x)x$ para el primer caso, y $(a+x)x$ para el segundo; de suerte que se tendrán las dos ecuaciones $ax-x^2=b^2, ax+x^2=b^2$; las cuales resolviéndolas, darán los valores de x construibles por el método anterior[32] (p.114).

Obsérvese que toma b^2como valor de la superficie del rectángulo, en vez de b como haríamos actualmente, consiguiendo así una ecuación homogénea.

A continuación pasa a estudiar otras variaciones de la misma ecuación y sus posibles soluciones, llegando a la conclusión de que si x^2 es positiva en el primer miembro y b^2 lo es en el segundo, la ecuación tiene siempre soluciones reales.

> Si se tuviese $x^2-ax=b^2$, sería necesario hacer $x=AD'$; en cuyo caso se tendría $AD=x-a$, y $x(x-a)=b^2$.
>
> No hallándose sujeta la construccion presente á ninguna excepcion, manifiesta que mientras que b^2 sea positivo en el segundo miembro, al mismo tiempo que x^2 lo es en el primero, las raices de la ecuacion propuesta serán siempre reales.(p.116)



Continúa estudiando el caso en que b^2negativo.

> La ecuacion $x^2-ax=-b^2$ se muda en $ax-x^2=b^2$, y puede en tal caso escribirse asi $x(a-x)=b^2$.
>
> Bajo esta última forma se refiere á la propiedad de las cuerdas que se cortan en el círculo; porque si se

[32] El método lo explica en el mismo punto 72, en nuestro caso está recogido en el apartado de análisis de contenido.

describe sobre un diámetro *AB=a*, fig. 29, un círculo, que se levante en el punto *A* una perpendicular *AC=b,* y luego se tire *CM* paralela á *AB,* y que por los puntos *M* y *M'*, en que *CM* encuentra al círculo, se baje sobre *AB* las perpendiculares *PM* y *P'M'*, se tendrá

$$AP \times BP = AP(AB - AP) = \overline{PM}^2$$ [33]

$$AP(a - AP) = b^2,$$

por lo mismo será

$$AP' \times BP' = AP'(AB - AP') = \overline{P'M'}^2$$ [34]

$$AP'(a - AP') = b^2$$

De la cual se deduce que tomando sucesivamente para *x* las rectas *AP* y *A'P'*, obtenidas por los métodos anteriores, estas serán los valores de la incógnita *x*.(p. 116)

Obsérvese que la manera de trabajar de Lacroix consiste en dar una interpretación geométrica de la ecuación, y de ella, a través de las propiedades conocidas en Geometría obtener la solución de la misma, que construye utilizando estas propiedades; y no al contrario, dada una ecuación obtener la solución a través de una construcción geométrica cuya elección no se justifica, que es como obran otros autores en los que no se sabe por qué utilizan cierta construcción para la resolución del problema y no otra.

Continúa dando la interpretación de las soluciones de esta ecuación y la de la variante que queda:

Es claro que cuando *AC* exceda al radio del círculo ó á $\frac{1}{2}a$, la recta *CM* no encontrará al círculo, y por consiguiente no dará ninguna determinación; pero entonces las raices de la ecuacion propuesta serán imaginarias.

Las raices de la ecuacion $x^2 + ax = -b^2$ no difieren de las de la ecuacion $x^2 - ax = -b^2$, sino en que ellas se hallan afectadas del signo -; pero su magnitud se obtendrá siempre por la construccion que se acaba de exponer (p.117).

78. Por un punto *E*, fig. 33, colocado como se quiera respecto de dos rectas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, tirar una recta de modo que la parte *D'F'* de esta recta, interceptada entre las dos rectas propuestas, sea de una magnitud dada *m* (pg. 122).

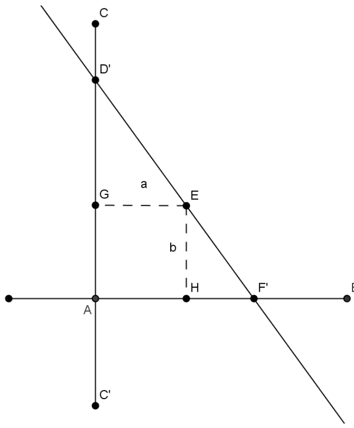
Como ya hemos señalado, en el punto 78 resuelve un problema de forma bastante compleja. La mostramos pues él mismo indica que *es muy propio para manifestar cómo deben interpretarse las diversas soluciones que ofrece una misma ecuación*, y además en la resolución geométrica podemos ver que construye un radical mediante el teorema de Pitágoras. Tras esta resolución da una nueva, que atribuye a Newton, en el punto 79, y una más, infinitamente más simple, utilizando la ecuación de la recta en el punto 98. Mostramos todas las resoluciones que él presenta, aunque esta última la incluimos en el

---

[33] En el libro hay una errata, pone $AP \times BP' = AP(AB - AP) = \overline{PM}^2$

[34] En el libro hay una errata, pone $AP' \times BP = AP(AB - AP') = \overline{PM}^2$

punto 4, dentro de los problemas que resuelve para mostrar las aplicaciones de los sistemas de coordenadas.



PG: Comienza diciendo que al ser *E* un punto conocido de la recta, basta con obtener otro para que esta quede determinada. Como siempre, supone el problema resuelto y toma *D'* como punto de corte de la recta buscada con el eje *AC*. Como el punto *E* es dado "se supondrán conocidas las líneas GE y HE, tiradas desde este punto paralelamente á las líneas *AB* y *AC*"; y hace *GE=a, HE=b, AD'=y.*

Seguidamente considera los triángulos semejantes *EGD'* y *F'AD'* de los que obtiene la proporción *GD':GE::AD':AF'*,

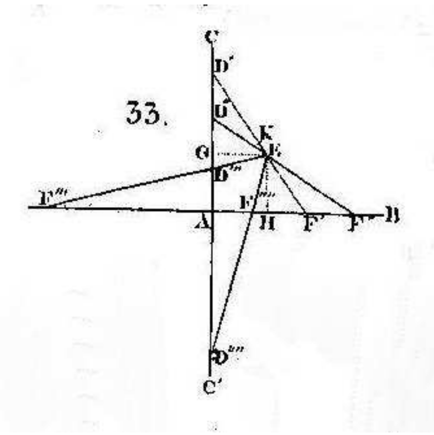
> (…) pero *GD'=AD'-AG=AD'-HE=y-b*, luego $y-b:a::y:AF'=\dfrac{ay}{y-b}$ (pg.123).

Por otra parte considera que el triángulo *F'AD'* es rectángulo en *A* por lo que se tiene $\overline{AD'^2}+\overline{AF'^2}=\overline{D'F'^2}$, y sustituyendo *AD', AF'* y *D'F'* por sus valores se obtiene la ecuación:

PRA: $y^2+\dfrac{a^2y^2}{(y-b)^2}=m^2$ (pg. 123) (Recuérdese que *D'F'=m* por hipótesis), y de ella:

$$y^4-2by^3+\left(b^2+a^2-m^2\right)y^2+2bm^2y-b^2m^2=0\ldots(1)\ \text{(pg. 123).}$$

A continuación, dado que la ecuación de cuarto grado indica que hay cuatro soluciones posibles, comprueba que la Geometría no contradice esto y que también geométricamente se obtienen cuatro:



> Esta ecuación es de cuarto grado, á causa (obsérvese que dice a causa, no por tanto, es decir está antes la Geometría que el Álgebra) de que la cuestion propuesta tiene en general cuatro soluciones. En efecto se ve por solo la inspeccion de la figura que pueden llenarse de cuatro modos diferentes las condiciones del problema propuesto, á saber:
>
> Por las dos líneas *D'F'* y *D''F''* tiradas en el ángulo recto *BAC,* en que se halla colocado el punto *E.*
>
> Ademas por las dos líneas *D'''F'''* y $D^{IV}F^{IV}$ tiradas en los ángulos *CAB'* y *BAC'*, adyacentes al ángulo *BAC* (p. 123).

Además analiza geométricamente la viabilidad de las soluciones, antes de hacerlo algebraicamente:

> No es difícil ver que las soluciones del ángulo *BAC* pueden ser imposibles, cuando la magnitud *m* sea menor que cierto límite que depende de la posición del punto *E*, respecto á las rectas *AB* y *AC*; pero que las otras dos soluciones serán siempre reales, á causa de que las líneas *F'''D'''* y $F^{IV}D^{IV}$ pueden pasar por el punto *A*, lo cual las haria nulas, y tambien pueden ser paralelas, la una á *AB*, la otra á *AC*, y por lo mismo ser infinitas; por consiguiente *F'''D'''*, $F^{IV}D^{IV}$ pueden tener todos los valores desde cero hasta el infinito (p.123).

Para simplificar la ecuación impone que *E* sea equidistante a los dos ejes:

> No es menos evidente que la cuestion se simplificaria sin perder ninguna de sus soluciones, si se tomase el punto *E* á igual distancia de las rectas *AC* y *AB*, porque bastaria conocer en tal caso una de las del ángulo *BAC* y otra de las otras dos, para obtener todas cuatro (p.124).

Explica que si se supiese *tirar D'F'* se sabría también *D''F''* tomando *AF''=AD'*, ya que *E* estaría *semejantemente colocado*, y de igual modo $D^{IV}F^{IV}$ a partir de *D'''F'''*. Por todo ello considera *GE=HE*, o lo que es lo mismo *a=b*, con lo que la ecuación propuesta queda:

$$y^4 - 2ay^3 + 2a^2y^2 - m^2\left(y^2 - 2ay + a^2\right) = 0 \ldots (2) \text{ (p.124)}$$

Para simplificar esta ecuación hace uso de la trigonometría:

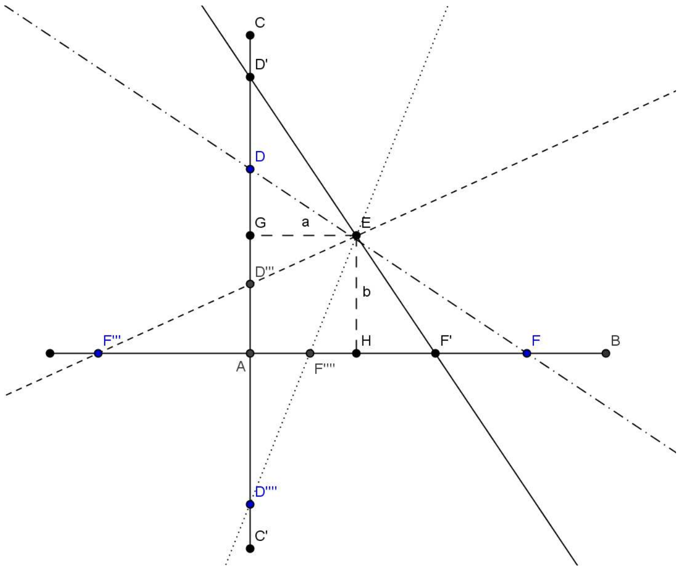


Figura 51: Soluciones problema 78

Teniendo en cuenta que los triángulos *D'AF'* y *D''AF''*, *D'''AF'''* y $D^{IV}AF^{IV}$ son iguales y que por tanto los ángulos *D'F'A* y *D''F''A*, *D'''F'''A* y $D^{IV}F^{IV}$ son complementarios respectivamente, conocidos los ángulos *D'F'A*, *D'''F'''A*, se tendrán los otros dos *y todas las soluciones de la cuestion serán conocidas.* (pg. 124)

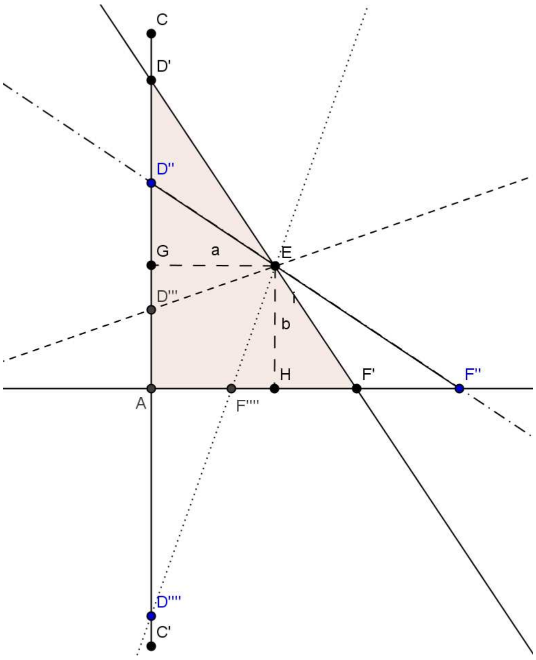


Figura 52: Triángulo D'AF'

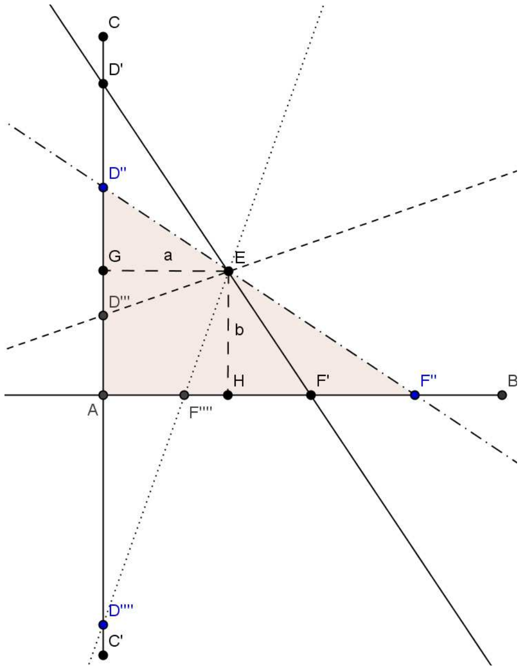


Figura 53: Triángulo D''AF''

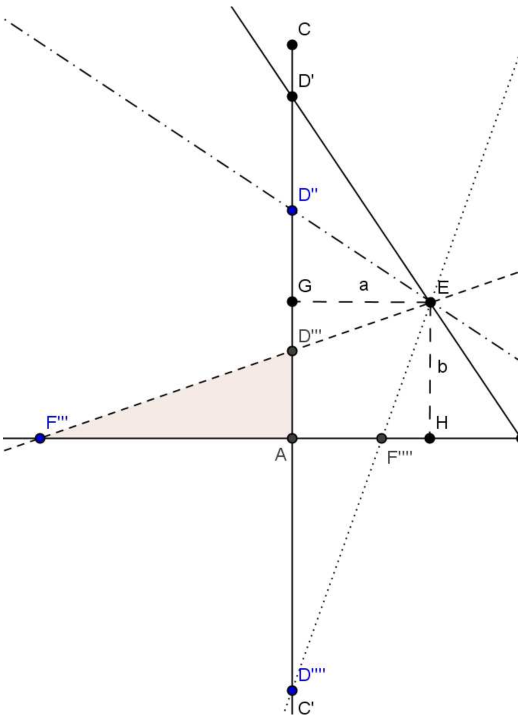


Figura 54: Triángulo D'''AF'''

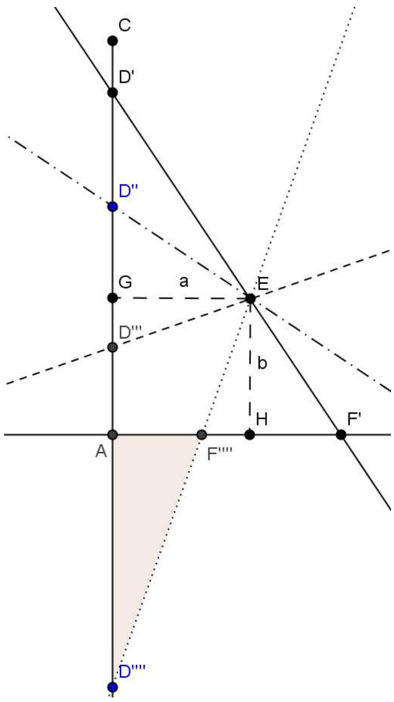
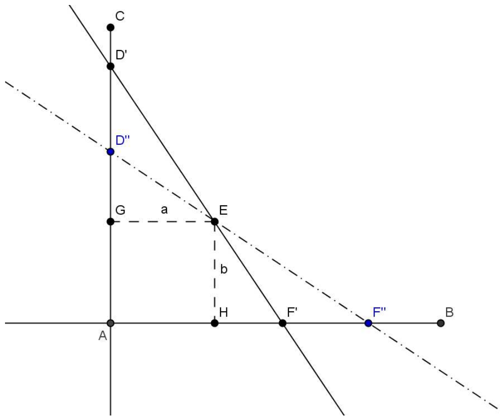


Figura 55: Triángulo $D^{IV}AF^{IV}$

Por tanto sólo es necesario calcular directamente dos soluciones, y para ello propone hallar uno de los ángulos que forma el segmento *D'F'* (o el *D''F''*) con uno de los ejes, y lo hace con *AB*.



Para calcular este ángulo toma como incógnita su tangente, y considerando el triángulo *D'EG* obtiene:

$$\tan g.D'F'A = \tan g.D'EG = \frac{D'G}{GE} = \frac{y-b}{a} = \frac{y-a}{a}$$ (p.125).

Si se hace $\frac{y-a}{a} = z$, se sacará $y = az + a$, y sustituyendo este valor en la ecuación (2), resultará, hechas las reducciones (...)

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \frac{m^2}{a^2} z^2 \quad ...(3)\ (p.125)$$

En una nota al pie señala que es una ecuación recíproca, cuya reducción a una de segundo grado se ha explicado en el *Complemento del Algebra*.

Para llevar a cabo esta reducción multiplica toda ella por z^2, lo que hace que el primer miembro se transforme en un cuadrado perfecto y la ecuación se pueda poner como $\left(z^2 + z + 1\right)^2 = \frac{m^2}{a^2} z^2 + z^2$ o $z^2 + \frac{a \pm \sqrt{m^2 + a^2}}{a} z + 1 = 0$ (p.125), "haciendo para abreviar" $\sqrt{m^2 + a^2} = n$, se tiene $z^2 + \frac{a-n}{a} z + 1 = 0, z^2 + \frac{a+n}{a} z + 1 = 0$.

Lacroix hace la observación de que al ser el producto de las raíces igual a 1, en cada una de las ecuaciones; y ser z la tangente de un ángulo, se tiene que los ángulos correspondientes a las dos raíces de cada una de las ecuaciones, son complementarios.

Obtiene las soluciones de las dos ecuaciones:

$z = -\frac{a-n}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} ; z = -\frac{a+n}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(a+n)^2 - 4a^2}$, las estudia y llega a la conclusión de que ambas serán reales solo en el caso en que $n \geq 3a$.

Para *n=3a* obtiene que las dos primeras son iguales y las otras dos son $-2 \pm \sqrt{3}$. "De aqui (sic) se infiere que las dos líneas D'F' y D''F'' se confunden, haciendo con AB un ángulo de 45º" (p.127).

Para el caso general obtiene

$z' = -\dfrac{a-n-p}{2a}, z'' = -\dfrac{a-n+p}{2a}, z''' = -\dfrac{a+n-q}{2a}, z^{\prime v} = -\dfrac{a+n+q}{2a}$ (p.127), y con ellos "se hallarán los valores de y por medio de la ecuación y=az+a".

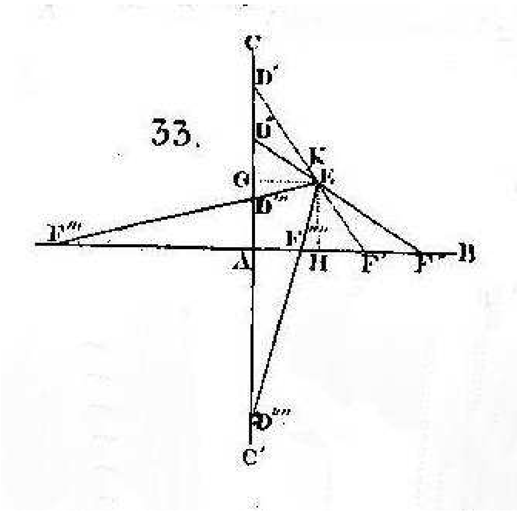
Estos valores serán respectivamente[35]

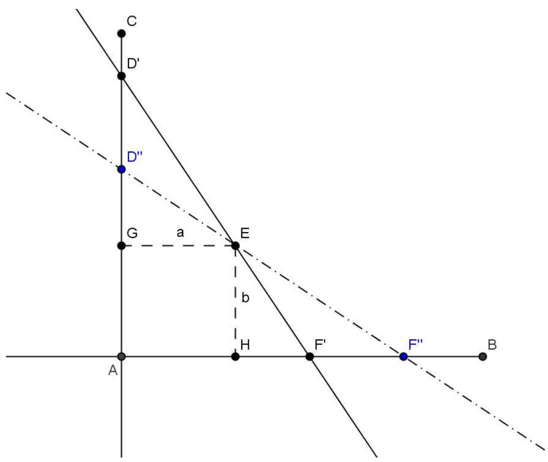
$$AD' = -\frac{a-n-p}{2a} + a = \frac{a+n+p}{2},$$
$$AD'' = -\frac{a-n+p}{2a} + a = \frac{a+n-p}{2},$$
$$AD''' = -\frac{a+n-q}{2a} + a = \frac{a-n+q}{2}$$
$$AD^{\prime v} = -\frac{a+n+q}{2a} + a = \frac{a-n-q}{2}$$

Tras hallar la solución algebraica, la construye geométricamente (al menos plantea cómo debe hacerse), como siempre hace cuando emplea esta forma de resolver los problemas:

> **RG:** Ellos se construyen con facilidad; pues la cantidad *n* es la hipotenusa de un triángulo rectángulo[36], cuyos lados son *a* y *m*; las lineas *p* y *q* se obtienen tambien por los triángulos rectángulos (69), ó por las medias proporcionales (70); y cuando se tenga las longitudes de las cuatro rectas anteriores, los puntos *D', D'', D''', D$^{\prime v}$* serán dados (p.128).

Como hemos dicho, tras esta solución plantea en el punto siguiente una más corta, en la que sigue utilizando este modo de trabajar en el que se mezclan la Geometría Analítica y la Sintética.





PG: En este caso toma como incógnita
la distancia *EK*, siendo *E* el punto dado y *K* el punto medio del segmento que se busca *D'F'*.

Supone $F'K = D'K = \dfrac{m}{2} = l$, con lo que se tiene

[35] Hay un error en el libro en la fórmula de AD'^{v}

[36] Recordemos que $\sqrt{m^2 + a^2} = n$

$$D'E = D'K + EK = l + x, F'E = F'K - EK = l - x \text{ y}$$

$$F'H = \sqrt{EF'^2 - EH^2} = \sqrt{(l-x)^2 - a^2} \text{ (p.128)}$$

De los triángulos semejantes *D'GE, EHF'* obtiene la proporción *D'E:EG::EF':F'H*, y de ella

$$l + x : a :: l - x : \sqrt{(l-x)^2 - a^2} \textbf{ (PRA)}$$

Desarrollando obtiene la ecuación

$x^4 - (2l^2 + 2a^2)x^2 + l^4 - 2a^2l^2 = 0$ (p.128), que tiene como soluciones $x = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4l^2}}$; "expresiones fáciles de construir, según lo que se ha visto en los números 69 y 70" (p.128). **(RG)**

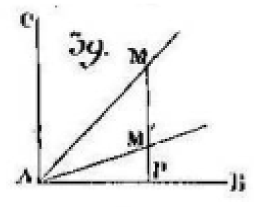
3. Para obtener fórmulas generales (ER, PRD, PRAN)

En este caso resuelve problemas relativos a la recta o el punto, que Lacroix no enuncia como tales, sino que los inserta como resultados según va desarrollando la teoría.

En el punto 88, en el que calcula la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $N(\alpha, \beta)$ y $N'(\alpha', \beta')$, da también la distancia entre esos puntos o "la parte de recta que los intercepta" (p. 143).

En el punto siguiente obtiene la recta paralela a $y = a'x + b$ y que pasa por el punto (α, β), (p. 143) y seguidamente la ecuación de una recta perpendicular a una dada (p. 144).

También calcula el punto de corte de dos rectas, *y=ax+b, y=a'x+b'* (p. 145) y la proyección ortogonal de un punto, aunque él no la denomina así:



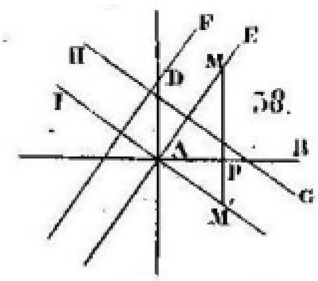
92. Puede ser útil conocer la longitud de la perpendicular bajada desde un punto dado sobre una línea dada: (...) (p.145)

Por último calcula el ángulo que forman dos rectas (p. 147).

La forma de resolver estos problemas es similar a la utilizada actualmente, aunque existen diferencias en algunos casos. Presentamos como ejemplos la obtención de la recta perpendicular a una dada, y el ángulo que forman dos rectas. Para la obtención de esta fórmula utiliza la proyección ortogonal de un punto, por lo que también incluimos su cálculo.

91. Ecuación de una recta perpendicular a una dada.

En primer lugar supone que ambas rectas pasan por el origen. Para obtener la pendiente de la recta perpendicular a la dada, que sería la *AE* (fig. 38), utiliza la semejanza de triángulos y las propiedades de los segmentos negativos que explicó en el punto 76, y que hemos recogido en el apartado de análisis de contenido (SN). Así nos dice que comparando los triángulos *APM* y *APM'* se tiene que la razón de *AP* a *PM* es inversa de la de *AP* a *PM'*,



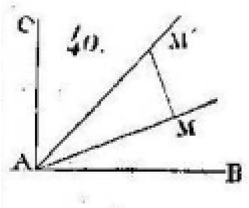
(…) de suerte que si a $\left(a = \frac{PM}{AP}\right)$es el coeficiente de *x* en la ecuacion de *AE,* este coeficiente será $\frac{1}{a}$ en la de *AI.* Pero cayendo debajo de *AB* las ordenadas de esta última deben con arreglo al núm. 76, ser afectadas del signo -; por consiguiente las ecuaciones de las rectas *AE* y *AI* serán pues $y = ax,\ y = -\frac{1}{a}x$ (p. 144).

Además de esta añade como nota al pie otra demostración en la que no se hace necesario "fundarnos en lo dicho en el núm. 76"(p.144), sino que llega al mismo resultado utilizando el teorema de Pitágoras en los triángulos *APM, APM' y MAM'* (téngase en cuenta que las rectas son perpendiculares, por lo que el último triángulo será recto en *A*).

92. Puede ser útil conocer la longitud de la perpendicular bajada desde un punto dado sobre una línea dada.

Para ello calcula el punto de corte de la recta dada $y = ax + b$ y de la perpendicular a ella por el punto dado, (α, β), calculando a continuación la distancia entre los dos puntos, obteniendo "para la longitud de la perpendicular buscada la expresión $\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1+a^2}}$"(p. 147).

93. **Ángulo que forman dos rectas.**



Para calcularlo obtiene la fórmula que da la tangente de dicho ángulo en función de las pendientes de las rectas.

Comienza suponiendo que ambas rectas pasan por el origen, por lo que tienen ecuaciones $y = ax; y = a'x$. Toma sobre la recta $y = a'x$ un punto $M'(\alpha, \beta)$ y lo proyecta sobre la otra, obteniendo el punto *M* (fig. 40). Utilizando lo calculado en el punto anterior obtiene que la longitud del segmento *MM'* viene dada por $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1+a^2}}$ (p. 147). Toma *AM'=r,* de donde se obtiene que $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$.

Por otra parte al ser *M'* un punto de $y = a'x$, infiere que $\beta = a'\alpha$ y con ambas ecuaciones obtiene los valores de α y β en función de *a, a'* y *r;* siendo estos valores $\alpha = \frac{r}{\sqrt{1+a'^2}}; \beta = \frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2}}$ (p. 147); y continúa diciendo:

(...) sustituyendo estos valores en el de la perpendicular, se hallará $\frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}$; y si se da á la perpendicular el valor *MM'* el nombre de seno, que se le ha asignado en la trigonometría, se inferirá

$$sen.MAM' = \frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}} \text{ (p.147)}$$

en cuya expresion representa *r* el radio del círculo.[37]

Si se resta de r^2el cuadrado de este valor, se sacará el de $\overline{AM}^2$, ó el cuadrado del coseno del ángulo *MAM'*, (...) sacando raiz cuadrada resultará

$$\cos.MAM' = \frac{r(1+aa')}{\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+a'^2\right)}} \text{ (p.147);}$$

últimamente, haciendo *r*=1, se sacará de estas dos expresiones la siguiente

$$\tan.MAM' = \frac{sen.MAM'}{\cos.MAM'} = \frac{a'-a}{1+aa'} \text{ (p.147)}$$

Concluye diciendo que este resultado se hubiera podido deducir inmediatamente de la fórmula de $\tan(p \pm q)$, pero que no lo hace así pues

> esta fórmula está fundada en las del número 11, obtenidas por medio de una construcción, y nos hemos propuesto sacar de solo las ecuaciones de las líneas todo lo necesario para la aplicacion del álgebra á la geometría (p.149).

Es decir, aunque es consciente de que hay resultados que se pueden obtener de forma más sencilla, los obtiene mediante el uso del Álgebra para mostrar las aplicaciones que esta tiene en el campo de la Geometría.

4. Para ejemplificar cómo resolver problemas mediante el uso de sistemas de coordenadas (PRAN, PRP, PRI).

Tras estudiar las ecuaciones de la recta y del círculo y algunas de sus propiedades (PRI, PRAN, PRP, PRD) propone algunos problemas que resuelve utilizando solamente el álgebra, comienza diciendo en el punto 96:

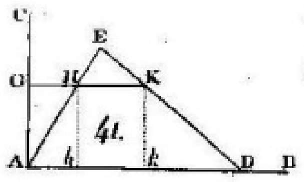
> 96. Habiendo comprendido bien lo anterior, todas las cuestiones que pueden proponerse sobre la línea recta y el círculo se reducen fácilmente al álgebra, sin que sea necesario recurrir á mas propiedades de las figuras que á la relacion que existe entre los tres lados de un triángulo rectángulo. (p.152)

Propone los siguientes problemas:

---

[37] En la página 6 de este mismo libro, en el que comienza estudiando la trigonometría, define seno de un ángulo como "la perpendicular bajada desde uno de los extremos del arco al radio que pasa por el otro extremo", y toma R como el radio del arco, no supone que R=1, como hacemos actualmente.

> 96 (...) Siendo dadas dos rectas *AE* y *DE*, fig. 41, por los ángulos que forman con una tercera *AB*, y por la parte *AD* que interceptan sobre esta tercera, hallar sobre una línea *AC*, perpendicular á *AB*, un punto *G*, por el cual tirando una recta *GK* paralela á *AB*, la parte *HK* comprendida entre *AE* y *DE* sea de una magnitud dada (p.152).



> 97. Supóngase que en vez de dar á la línea *HK* una magnitud conocida, se pida que ella sea igual á la línea *AG*, lo cual equivale á inscribir un cuadrado en un triángulo (p. 153).

Este problema, que como vemos es una variación del problema anterior, es el resuelto en el punto 66, utilizando métodos geométricos y algebraicos.

> 98.Desde un punto *E*, colocado como se quiera, tirar una recta de modo que la parte *D'F'* de esta recta, comprendida entre dos líneas que formen entre sí un ángulo recto *BAC*, sea de una magnitud dada (p.154).

Este problema, como hemos visto, está resuelto en el punto 78, combinado Álgebra y Geometría, en este caso lo hace solo con Álgebra.

En el punto 99 hace "aplicacion de las fórmulas halladas para la línea recta á la investigacion de las principales propiedades del triángulo", (p. 155) deduciendo el teorema del coseno, aunque él no lo nombra.

De estas fórmulas $\left.\begin{array}{l} c^2+c'^2-2cc'\cos\gamma''=c''^2 \\ c^2+c''^2-2cc''\cos\gamma'=c'^2 \\ c'^2+c''^2-2c'c''\cos\gamma=c^2 \end{array}\right\}$ (p. 156) obtiene estas otras:

$\left.\begin{array}{l} c-c'\cos\gamma''-c''\cos\gamma'=0 \\ c'-c\cos\gamma''-c''\cos\gamma=0 \\ c''-c\cos\gamma'-c'\cos\gamma=0 \end{array}\right\}$ y en el punto 100 demuestra que "aunque estas [ecuaciones] sean tres, con todo no pueden servir para hallar los lados cuando son conocidos los tres ángulos"(p.157).

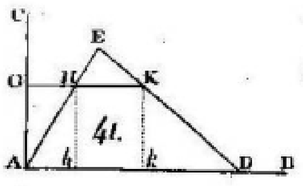
En el punto 101 obtiene el "área de un triángulo que tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas en función de las coordenadas de los otros dos vértices" y posteriormente en función de la longitud de sus lados. Esta fórmula también la obtuvo anteriormente, pero en este caso utiliza, como en los demás problemas recogidos en este epígrafe sistemas de coordenadas y ecuaciones de la recta.

De la misma forma deduce, por último en el punto 102 que:

> (...) siempre que en un cuadrilátero se conozcan los cuatro lados y una diagonal, se podrá determinar la otra, y tambien cuando se conozcan tres lados y las dos diagonales podrá hallarse el otro lado (p. 162).

Incluimos las soluciones de los problemas 96, 97 y 98 que corresponden a los problemas resueltos por Lacroix en puntos anteriores utilizando el Álgebra y la

Geometría Sintética, mientras que en este caso utilizará los sistemas de coordenadas y las ecuaciones de la recta. La forma de resolver las cuestiones propuestas en los puntos 101 y 102 es muy similar a la que utiliza en estos problemas por lo que no las incluimos.



96 (...) Siendo dadas dos rectas *AE* y *DE*, fig. 41, por los ángulos que forman con una tercera *AB*, y por la parte *AD* que interceptan sobre esta tercera, hallar sobre una línea *AC*, perpendicular á *AB*, un punto *G*, por el cual tirando una recta *GK* paralela á *AB*, la parte *HK* comprendida entre *AE* y *DE* sea de una magnitud dada (p.152).

Para resolverlo utiliza en esta ocasión métodos puramente algebraicos:

> Para formar las ecuaciones de las rectas *AE* y *ED*, llamaremos a y a' las tangentes de los ángulos *EAD* y *EDA* que ellas forman respectivamente con la recta *AB*; tómese esta por el eje de abscisas, cuyo orígen puede imaginarse en *A* igualmente que el de las ordenadas, que concibo paralelas á *AC*; además hágase $AD=\alpha$. La primera recta tendrá por ecuacion $y=ax$, puesto que pasa por el orígen *A*; como la segunda debe pasar por el punto *D*, para el cual se tiene $y=0$ y $x=\alpha$, se deberá inferir que la de dicha segunda será $y=-a'(x-\alpha)$ (...) (p. 152).

Vemos una forma de trabajar completamente diferente a la anterior. Mientras que aquí solo utiliza el Álgebra, podríamos decir que solo utiliza la Geometría Analítica, en el caso anterior utiliza la Geometría Analítica junto con la Descriptiva.

Continúa obteniendo las abscisas de los puntos *H* y *K*. Para ello toma la recta *GK* y la corta con las rectas *AE* ($y=ax$) y *ED* ($y=-a'(x-\alpha)$), obteniendo las abscisas de los puntos indicados. La diferencia de las mismas da la distancia *HK*, que debe ser igual a la magnitud dada *m*. Despejando de esa ecuación obtiene la longitud del segmento *AG*, con lo que concluye. Lo vemos con detalle:

> Para obtener los puntos *H* y *K*, (...) basta hacer $y=AG$; luego si se supone AG=t[38], se sacará
>
> $$t=ax, \quad t=-a'(x-a):$$
>
> tomando el valor de x en cada una de estas ecuaciones, saldrá
>
> $$x=\frac{t}{a}, x=\frac{\alpha a'-t}{a'}.$$
>
> Estas expresiones son las de las abscisas *Ah* y *Ak*, cuya diferencia da *hk*=*HK*, á causa de las paralelas; y designando por *m* la magnitud que debe tener *HK*, se hallará
>
> $$m=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a}$$
>
> (...) y por consiguiente
>
> $$t=\frac{(\alpha-m)aa'}{a+a'}.$$

[38] Hay una errata en el libro. En él pone AG=1

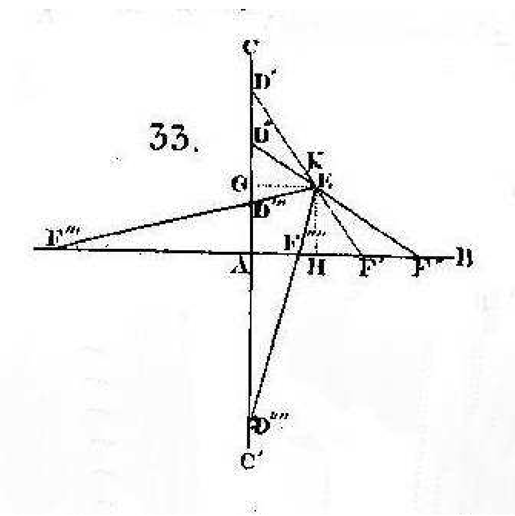
> Este es el valor de *AG*, que satisface la cuestion propuesta (p. 153).

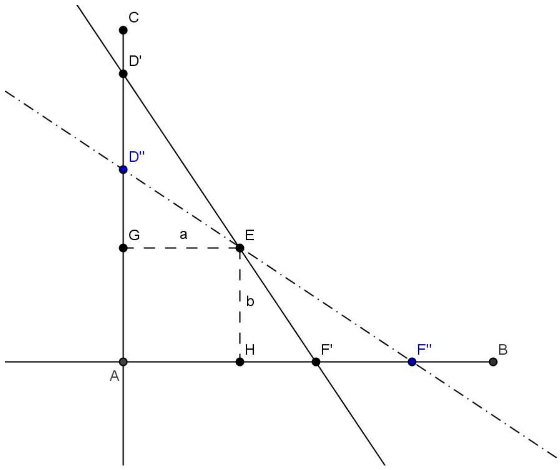
Y utilizando este resultado obtiene la solución del problema del cuadrado:

> 97. Supóngase que en vez de dar á la línea *HK* una magnitud conocida, se pida que ella sea igual á la línea *AG*, lo cual equivale á inscribir un cuadrado en un triángulo (p. 153).

En este caso en vez de igualar *HK* a *m* lo iguala a *t*, "lo que dará $t=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a}$, de la cual se deducirá $t=\frac{\alpha a a'}{aa'+a+a'}$" (p. 154).

98.Desde un punto *E*, colocado como se quiera, tirar una recta de modo que la parte *D'F'* de esta recta, comprendida entre dos líneas que formen entre sí un ángulo recto *BAC*, sea de una magnitud dada (p.154).





Como ya hemos visto antes este problema lo resuelve en puntos anteriores. De nuevo vuelve sobre él obteniendo la ecuación (3), $z^4+2z^3+2z^2+2z+1=\frac{m^2}{a^2}z^2$, esta vez empleando exclusivamente métodos algebraicos. Para ello saca la ecuación de la recta *D'F'*, y la corta con las rectas *AB* y *AC*, que considera como ejes de coordenadas, para obtener los puntos *D'* y *F'*:

> Si representamos por α y β las coordenadas del punto dado *E*, la ecuacion $y-\beta=-a(x-\alpha)$ será la de la recta *ED'* tirada por este punto. Para obtener la longitud de *D'F'* basta determinar *AD'* y *AF'*, esto es, el valor de *y* cuando *x=0*, y el de *x* cuando *y=0*; cuyas dos hipótesis conducen á las ecuaciones $y-\beta=a\alpha, -\beta=-a(x-\alpha)$, de las cuales se infiere $y=\beta+a\alpha=AD', x=\frac{\beta+a\alpha}{a}=AF'$ (...) (p. 154).

Utilizando el teorema de Pitágoras obtiene:

$F'D' = \sqrt{\overline{AD'}^2 + \overline{AF'}^2} = \left(\dfrac{\beta + \alpha a}{a}\right)^2 \left(1 + a^2\right)$ (p. 154) y *desenvolviendo esta ecuación* llega a esta otra: $a^4 + \dfrac{2\beta}{\alpha}a^3 + \dfrac{\beta^2 + \alpha^2 - m^2}{\alpha^2}a^2 + \dfrac{2\beta}{\alpha}a + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} = 0$.

> la cual es de cuarto grado; pero si se hiciese $\beta=\alpha$, esto es, si se tomase el punto *E* á igual distancia de los dos ejes *AC* y *AB*[39], se mudaría en
>
> $$a^4 + 2a^3 + \frac{2\alpha^2 - m^2}{\alpha^2}a^2 + 2a + 1 = 0,$$
>
> que es la misma que la (3) del núm. 78 cuando en esta se escribe *z* por *a*, y *a* por α (p. 155).

Suponemos, porque en el texto no aparece ningún comentario al respecto, que a partir de aquí el modo de proceder será igual que el mostrado en el punto 78, es decir, se interpretan las soluciones y se construyen. Sin embargo hay diferencias sustanciales en el modo de llegar a la ecuación algebraica que resuelve el problema.

4.6.4. Conclusiones

Como hemos visto Lacroix nos presenta tres maneras diferentes de aplicar el Álgebra a la Geometría, que también habíamos visto en el Tratado de Vallejo. Es muy posible que este último se basara en la obra de Lacroix ya que la primera edición de este texto es muy anterior al de Vallejo.

La primera forma sirve para obtener resultados generales o teoremas de Geometría ayudándose del Álgebra, las otras dos sirven para resolver problemas geométricos, una apoyándose en la Geometría Sintética y otra más en el Álgebra, haciendo uso de los sistemas de coordenadas y de las ecuaciones de la recta.

Estas maneras de combinar Álgebra y Geometría las hemos visto en la mayoría de los autores estudiados, en algunos incluso desarrolladas con más rigor y de manera más exhaustiva, pero lo que diferencia a este autor del resto es que mientras que los demás plantean problemas para ser resueltos de una manera específica, Lacroix resuelve algunos problemas utilizando dos metodologías distintas, lo que permite compararlas y ver qué aportan cada una de ellas a la resolución de los mismos.

También hay que reseñar, como en otros autores de la época, el estudio que hace Lacroix de los valores negativos, no solo como soluciones de una ecuación, sino también a la hora de obtener la ecuación de una recta.

En el primer caso el estudio que hace este autor no es tan formal como en el caso de Lista o Zorraquín, pero también es interesante. La interpretación general que da es la misma que en la Aritmética, el signo negativo indica un cambio, bien en el enunciado del problema -idea que también sigue Vallejo- bien en el sentido en que debe construirse. Esta interpretación, que es original de D'Alembert, como hemos dicho, es característica de un cierto periodo en Francia (Schubring, 2005) y aparece en numerosos

[39] Hay una errata en el libro. Pone ejes *AC* y *BC*

autores de los estudiados. Esto prueba la influencia francesa en las Matemáticas decimonónicas españolas, tal como señalamos en los primeros capítulos de este trabajo.

También debemos remarcar el comentario en el que señala que al interpretar correctamente las soluciones negativas estas se convierten en válidas y por esa razón se "ha cambiado la denominación de raíces falsas que en otro tiempo daban los analistas á las raíces negativas de las ecuaciones". Este comentario es importante pues señala un cambio de visión muy importante en la Geometría Analítica, la cual no se desarrolló antes fundamentalmente por este problema y el de la homogeneidad de las ecuaciones, y que se siguió arrastrando tiempo después de su nacimiento en el siglo XVII.

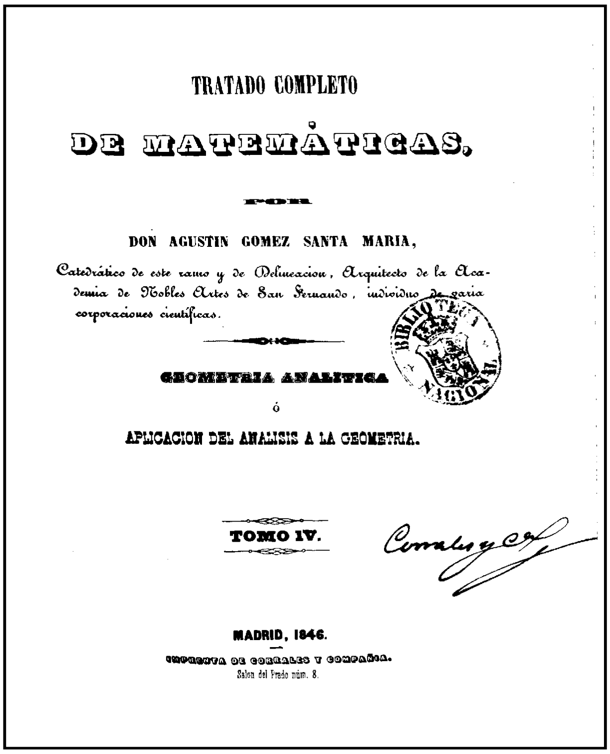
Por último recalcar la importancia de la obra que sirvió de texto durante gran parte del siglo XIX no solo en España, sino en parte de Europa, y que tuvo gran influencia en diversos autores españoles de la época, por ejemplo en Vallejo y por tanto en la enseñanza de las Matemáticas en general y de la Geometría Analítica en particular.

4.7. Tratado Completo de Matemáticas. Tomo IV. Geometría Analítica ó Aplicación del Análisis a la Geometría de Agustín Gómez Santa María (1846)

4.7.1. Autor

No se han encontrado referencias del autor.

4.7.2. Caracterización de la obra


TRATADO COMPLETO

DE MATEMÁTICAS,

POR

DON AGUSTIN GOMEZ SANTA MARIA,

Catedrático de este ramo y de Delineacion, Arquitecto de la Academia de Nobles Artes de San Fernando, individuo de varia corporaciones científicas.

GEOMETRIA ANALITICA

ó

APLICACION DEL ANALISIS A LA GEOMETRIA.

TOMO IV.

MADRID, 1846.

IMPRENTA DE CORRALES Y COMPAÑIA.

Salon del Prado núm. 8.

Figura 56: Carátula del libro. Tratado completo de Matemáticas. A. Gómez Santa María

El libro analizado corresponde al Tomo IV del *Tratado Completo de Matemáticas* de Agustín Gómez Santa María, titulado *Geometria Analitica ó Aplicación del Analisis a* *la Geometria* (Figura 56). Se trata de la primera edición impresa en Madrid, en la Imprenta de Corrales y Compañía en 1846. El ejemplar analizado se encuentra en la Biblioteca Nacional, Biblioteca digital Hispánica (mayo, 2012) (RO).

El tomo analizado contiene además de la Geometría Analítica la Trigonometría Esférica. Consta de 370 páginas de las que dedica 338 a la Geometría Analítica y de tres láminas de dibujos al final del tomo (CEO1).

El índice (CEO2) se encuentra al comienzo del tomo. En él se observa que el libro se encuentra dividido en tres partes, de las cuales solo reproducimos íntegramente la primera, ya que las otras dos quedan fuera de nuestro estudio. De esta parte solo hemos analizado los capítulos I, II, III, IV, VI y VII.

INDICE

Al comienzo del libro (CEO4), antes del índice se encuentra un prólogo, titulado *Advertencia*, que comienza diciendo:

[40] Ese es el título del capítulo I, aunque él no lo numera.

> Al considerar la falta que hay en España de obras de matemáticas tan extensas como actualmente deben serlo y lo son en otros paises, y animados por el éxito de otra de cortas dimensiones publicada el año pasado, pensamos en dar á luz la presente, cuyo destino es el suplir la necesidad que hoy esperimenta la juventud de estudiar en obras francesas; para lo que se ha incluido en esta todo cuanto exigen las carreras científicas. De este modo es útil al propio tiempo para los estudios de filosofía (Advertencia).

Debemos recordar que en la Facultad de Filosofía se incluían los estudios de las ciencias hasta la modificación de la estructura del sistema educativo en 1857 mediante la Ley Moyano.
Vemos, por tanto que el libro se basa en las obras francesas, aunque aclara, en este mismo prólogo, que no son una traducción literal de las mismas porque el nivel que se estudia en España es inferior:

> La formación de este *tomo* nunca pudo ser una traducción literal de un testo francés, porque en general contienen mas doctrina de la que es precisa en España, y porque para ella han preparado á los jóvenes haciéndoles estudiar los cálculos anticipadamente.

Tras estas aclaraciones cita, también en el prólogo, a varios autores franceses como son Biot, Franceur, Bourdon, Lacroix y Leroy (CEO4).

Por otra parte señalar la importancia de esta obra como libro de texto en el sistema educativo español. Desde su publicación en 1846 será recomendada como texto para el estudio de la Geometría Analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde 1847 a 1867, como especificamos a continuación.

Aparece en el Plan de estudios de 8 de julio de 1847/ Reglamento de 19 de agosto de 1847, para el curso 1847/1848 (Orden de 8 /09/1847, Gaceta de Madrid de 11 de septiembre). En este plan aparece la Geometría analítica dentro del *Segundo curso de matemáticas elementales*, que se estudiaba en 5º, siendo, como en el plan anterior, "optativa para aquellos que quieran estudiar en las escuelas especiales".

También aparece en las listas para los cursos 1848/49 (Gaceta de Madrid de 15 /09/1848) y 1849/50 (Gaceta de Madrid de 25 /09/1849) como texto para la asignatura *Complemento del Álgebra y su aplicación á la geometría elemental y á las líneas y superficies de primero y segundo orden,* que formaba parte de la facultad de Filosofía dentro de la sección de Ciencias, pero que se encontraba dentro de las listas de textos para la segunda enseñanza pues se estudiaba en este nivel como asignatura voluntaria.

De nuevo aparece en las listas de libros para el curso 1850/1851 (G. de Madrid de 28 /09/1850), pero cambia la denominación de la asignatura, que pasa a llamarse *Álgebra superior y Geometría Analítica.* Y seguirá apareciendo en las listas de los cursos 1851/52 (G. de Madrid de 6 /09/1851), 1852/53 (G. de Madrid de 17 /09/1852), 1853/54 (G. de Madrid de 21 /09/1853), 1854/55 (G. de Madrid de 18 /10/1854), 1855/56 (G. de Madrid de 14 /10/1855) y 1856/57 (G. de Madrid de 18 /09/1856), para esa misma asignatura que a partir del plan de estudios de 1852 desaparece de la segunda enseñanza para estudiarse únicamente en la facultad de Filosofía.

A partir de 1857, en que se aprueba la Ley de Instrucción Pública (9 de septiembre de 1857, Gaceta 10-septiembre-1857) y se crea la Facultad de Ciencias exactas, físicas y naturales, la obra de Santa María aparecerá en varias listas de libros para uso en esta facultad.

El *programa general de estudios* de esta y otras facultades se aprobó por Real Orden de 25 de agosto de 1858 (Gaceta de Madrid de 14-09-1858), y en él aparece la asignatura de *Geometría Analítica.*

Esta obra aparece en las listas de libros de los siguientes años: R.O. 25-9-1858, (Gaceta 1-10-1858); R.O. 15-10-1861, (Gaceta 20-10-1861); R.O. 10-9-1862, (Gaceta 13-9-1862); R.O. 26-9-1863, (Gaceta 30-9-1862); R.O. 31-8-1864, (Gaceta 3-9-1864) (para el trienio 1864/67) y R.O 22-9-1867, (Gaceta 24-9-1867).

4.7.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.7.3.1. Análisis de la estructura conceptual

Comienza la primera parte explicando cómo se suman, restan, multiplican y dividen las líneas (E) y con ello cómo se puede aplicar el Álgebra a la Geometría de manera similar a como se aplica a la Aritmética (D); y antes de pasar a explicar construcciones más complejas define dimensión de una expresión algebraica, ecuación homogénea y unidad, de la que hace uso explícito en varias ocasiones a lo largo del texto (U). Tras esto pasa a explicar la construcción geométrica de un polinomio, de una fracción algebraica y de un radical cuadrado (E).
En el capítulo II, titulado *Ecuaciones de 2º grado. Teoría de los signos*, explica utilizando la construcción de las soluciones de una ecuación de segundo grado cómo construir e interpretar geométricamente las soluciones negativas. A diferencia de otros autores no desarrolla una teoría específica del tema de los segmentos negativos, sino que lo explica en base a la construcción de este tipo de soluciones (SN).

El autor dedica el capítulo siguiente a la resolución de varios problemas determinados de Geometría en los que muestra la aplicación de las construcciones y conceptos explicados en las secciones anteriores (PRDT).

En el capítulo IV trata los problemas relativos a las ecuaciones de una recta. Comienza con la posición de un punto en un plano, las definiciones generales de ejes, coordenadas de un punto, etc. (C). Tras esto llega a la conclusión de que una ecuación en dos variables representa a una *línea* y estudia diferentes casos particulares como son las ecuaciones de los ejes de coordenadas y de rectas paralelas a ellos, generalizando hasta dar la ecuación explícita de una recta (ER). Tras esto da diferentes expresiones de la misma dependiendo de los datos de que se disponga (ER), entre ellas la ecuación general de una recta, a la que llega tras definir el concepto de lugar geométrico (LG). Además estudia el ángulo que forman dos rectas (PRAN), obtiene las condiciones de paralelismo y perpendicularidad (PRP) y la distancia entre dos puntos (PRD).

Santa María dedica dos capítulos a los cambios de coordenadas. Utiliza no solo coordenadas cartesianas, sino también polares. En el capítulo VI obtiene las diferentes ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas oblicuos y/o rectangulares; y en el VII hace un estudio más detallado del sistema de coordenadas polares y da también las ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas rectangulares/oblicuos y polares (C).

Veamos esto con más detalle:

1. Problemas indeterminados

Como hemos dicho comienza el libro recordando cómo se opera de forma gráfica con las líneas explicando cómo se suman, restan, multiplican por un número y dividen por un número las rectas, entendiendo rectas como segmentos, no distingue una cosa de otra

> En efecto, varias rectas se suman, colocándolas á continuación unas de otras, sobre una nueva recta indefinida; con cuyo procedimiento la recta total que comprenden desde la primera a la última, es la suma que se busca.
>
> Dos rectas se restan colocando la que figure de sustraendo sobre la otra á partir de uno de sus estremos: de este modo, la parte de recta comprendida entre los estremos no confundidos es el esceso, resta o diferencia que se deseaba hallar.
>
> Una recta se multiplica por un número, colocándola sobre una segunda recta indefinida, sin interrupción, tantas veces como unidades esprese el número dado: con lo que la recta total que componga la union de las sobrepuestas representa el producto en cuestión.
>
> Por ultimo, una recta se divide por un número, haciéndola tantas porciones iguales como unidades tenga este; y se divide por otra recta examinando las veces que la contiene: lo que en el primer caso da por resultado una recta como cociente, y en el segundo un número abstracto, que realmente espresa la relacion entre la recta que ha servido de dividendo y la que se tomó por divisor, pues que simplemente dice las veces que la primera es mayor que la segunda (p.1).

A partir de aquí explica cómo se aplica el Álgebra a la Geometría:

> Este recuerdo de los procedimientos gráficos para obtener sumas, restas, productos y cocientes entre rectas (procedimientos que no excluyen el poder espresar por números, y operar con ellos, obteniendo por resultado un nuevo número que seria el valor de la recta obtenida por los medios directos), conduce á entrever que así como el álgebra se aplica á cuestiones de números, del mismo modo se podrá emplear en las de líneas.
>
> (…) se reconoce inmediatamente que reemplazando de la misma manera por signos cualesquiera, como lo son las letras, las diversas líneas que han de producir otra por medio de una combinación oportuna, en calculando sobre dichos signos con buen raciocinio, es decir, según las reglas del álgebra, se llegará á obtener un resultado final ó fórmula que dará la línea que se busca tan luego como se construya ó forme la figura geométrica que está representando la combinación de las líneas dadas.
>
> Por consiguiente la diferencia entre la aplicacion del álgebra á las cuestiones numéricas y la aplicación á las geométricas, solo existe en la interpretación que se da á los resultados. (…) en el segundo caso los resultados son y han de mirarse como líneas, que quedarán trazadas en el mismo momento que se levante y arme, por decirlo así, con la regla y el compás la figura que está escrita en la combinación de líneas de dichos resultados ó fórmulas (p.2).

1.1. Ecuaciones homogéneas. Unidad

Como señalamos anteriormente hace uso de la unidad en las construcciones que muestra, poniendo ejemplos concretos para explicar su uso. Pero antes de comenzar a desarrollar estas construcciones habla sobre la importancia de que las ecuaciones sean homogéneas y del uso de la unidad:

> Pero antes de pasar al estudio de las espresiones, se hace precisa una consideración de la mayor importancia, y es que como en todo problema sea el número de incógnitas el que se quiera, se buscan estas una á una, sucede que en cada fórmula de las que dan uno de los valores desconocidos, está siempre escrita la letra que le venia representando, sola en un miembro, y en el otro queda la combinación de

cantidades que ha de producir su valor: por lo tanto, en los problemas de geometría en que la letra desconocida es una línea, es forzoso que la espresion que la representa sea también una linea y no pueda jamás producir otra cosa; pero el producto de dos líneas es la significación de una área, y el de tres lo es de un volumen, luego es indispensable que desaparezcan de las fórmulas aquellos términos que puedan ser entendidos como áreas ó volúmenes, ó mejor que en cada uno de ellos se modifique la forma que pudo hacerlos traducir erradamente.

Estas observaciones hacen ver que puesto que cada linea está espresada por una letra, los términos que compongan las espresiones algebraicas, deben ser todos de una sola letra, lo cual sucederá siempre que en los de forma entera no exista mas que una en cada sumando, en los de forma fraccionaria haya una letra mas en los términos del numerador que en los del denominador, y en los de forma radical haya tantas letras como unidades tenga el índice de la raiz; (...) (p.3)

Tras estas consideraciones pasa a definir dimensión de una expresión algebraica y ecuaciones homogéneas, explicando la necesidad de que las ecuaciones utilizadas en Geometría sean homogéneas.

«Llámase DIMENSION en las expresiones algebráicas á cada letra ó factor lineal. » (…)

Todos los términos de una ecuacion, han de tener antes de despejar á la incógnita un mismo número de dimensiones ó letras. Porque los productos entre líneas van representando objetos diferentes, que no podrian formar con su agregación un todo homogéneo ó de la misma especie como es indispensable para la suma; además es palpable que despejando el término de menos dimensiones, quedaria igual (si los demas tenian las mismas unos que otros) á otro objeto de distinta naturaleza, lo que es un absurdo; y si los del segundo miembro tenian diverso número de dimensiones, entonces el término despejado que siempre representaria un objeto determinado quedaria como igual á un conjunto heterogéneo que no podia producir una sola especie.
Si se tuviese esto $mx=c-b^3$ querria decir que una area era igual á una línea, menos un cubo: que es un absurdo.
«Llámense ECUACIONES HOMOGÉNEAS las que tienen en todos sus términos un mismo número de factores literales, » y «HETEROGÉNEAS á las que no tienen el mismo número de letras en cada término. »

Y después explica cómo transformar una ecuación heterogénea en homogénea:

Toda ecuacion heterogénea se ha de convertir en homogénea para construirla: lo que se consigue representando por una letra la unidad de distancias dada ó conocida por el problema, é introduciéndola como factor en cada término las veces necesarias para que todos tengan las mismas dimensiones.

En el ejemplo anterior $mx=c-b^3$, si se quisiera en vista de ser una expresión obtenida en un problema de geometría, construirla; podria representarse á la unidad por n, y multiplicando el primer miembro por n pues solo le falta una dimension para tener tantas como el que mas, y multiplicando por n^2 la c, por la misma razon, resultaria $mnx=cn^2-b^2$ que ya es ecuacion homogénea (p. 4).

Y explica que la unidad puede suprimirse en los cálculos y que se puede tomar como unidad cualquier longitud, siempre que sirva como referencia para calcular las longitudes de los demás segmentos.

> La unidad que de este modo interviene en expresiones donde no aparecia (acaso por haberla suprimido en el tránsito de unas transformaciones á otras) porque sabido es que donde aparece la unidad como multiplicador ó divisor se la puede suprimir sin que altere el valor del término donde estaba; esta unidad decimos puede ser una de las conocidas entre los hombres, si en ellas se va á estimar la longitud de las demás líneas; y puede ser tambien una longitud cualquiera á la que se refieran las otras, y aun á veces puede llegar á ser desconocida, sin que esto perjudique al representarla y operar con ella, si bien no podría construirse el resultado final hasta desaparecer esta circunstancia á menos que la misma unidad se hubiera eliminado en alguna transformacion mas oportuna, que se pudiese ejecutar en lo sucesivo” (pp. 4-5).

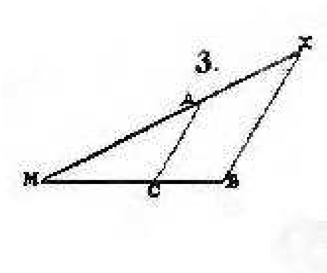
Como veremos más adelante hace uso de la unidad cuando explica de forma teórica la construcción de algunas expresiones fraccionarias y radicales.

1.2. Construcción de expresiones algebraicas

1.2.1. Construcción de expresiones lineales

Tras estas explicaciones vuelve de nuevo a las construcciones de $X=A+B$ y $X=A-B$, y basándose en ellas construye después $X=A+B-C+D-H$ de dos maneras, la primera siguiendo el orden de las operaciones sumando $A+B$, después quitándole C, etc., de la manera que ha explicado anteriormente; o bien sumando $A+B+D$ por un lado y $C+H$ por otro, y restando esta línea finalmente a la primera (p.5).

Tras esto estudia cómo construir las fracciones.



Comienza con la fracción $X = \dfrac{AB}{C}$:

> (...) bajo esta forma está escrita la igualdad de dos productos, luego los factores del primero pueden ser los estremos de una proporcion y los del segundo miembro, los términos medios de la misma, luego ésta espresion es la de la figura geométrica que puede producir cuartas proporcionales; por lo que el valor de $X = \dfrac{AB}{C}$ se dice que es una cuarta proporcional á tres rectas *A, B* y *C:* luego para construir la *X* se formará el ángulo *M* arbitrario (Fig. 3), se colocarán sobre uno de sus lados las longitudes *MC=C MB=B,* y sobre el otro lado de dicho ángulo *M* se situará del mismo modo desde el vértice la magnitud *MA=A*: tirando ahora una recta desde *C* á *A,* y por fin por el punto *B* una paralela á *CA*, la porcion *MX* que esta paralela intercepte en el otro lado del ángulo *M* desde su vértice, es decir, la *MX* será el valor *X* que se pedia, (…) (p.6)

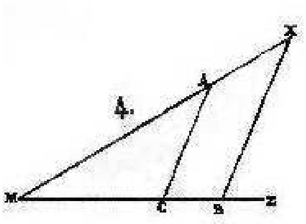
Y lo comprueba:

> (…) pues que en la figura que se ha construido hay un ángulo cuyos lados se hallan cortados por dos paralelas, y, como cuando esto sucede, los cortan en partes proporcionales, se verificará aquí que
>
> $$MC:MB::MA:MX$$
>
> ó bien

C:B::A:X

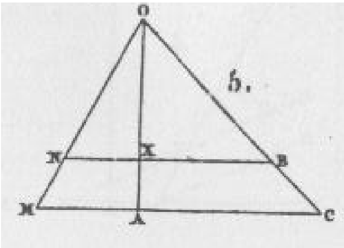
> de cuya proporcion, si se despeja la *X,* resulta $X = \frac{AB}{C}$ que es la espresion ó fórmula en que estaba escrito el valor de *X* que nos dieron (p. 6).

Da tres construcciones más de una cuarta proporcional, las dos primeras basadas en la semejanza de triángulos, y la tercera utilizando las propiedades de la circunferencia:



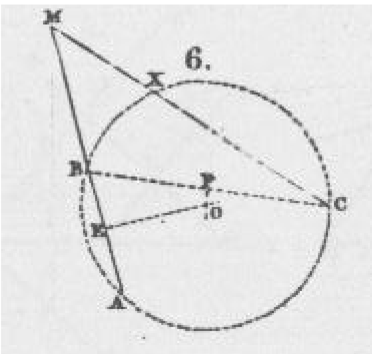
La primera forma es exactamente igual a la anterior con la única diferencia de que en este caso traza el segmento *MA* en último lugar y en el caso anterior lo dibuja el primero (p. 7).

En la segunda traza *MC=C* y *MA=A* sobre una recta y una paralela a ella en la que fija *NB=B*, traza las rectas *MN* y *CB* hasta que se cortan en un punto *O.* Uniendo este punto con *A*, se obtiene el segmento *NX* cuya medida es la solución buscada (fig. 5, p.8).



En ambos casos, tras obtener la solución geométrica comprueba mediante las propiedades de la Geometría que es la solución buscada.

Por último explica una construcción más utilizando las propiedades de la circunferencia (o el círculo, como él lo denomina).



Para ello traza dos segmentos de recta *MC=C, MA=A.* Sobre *MA* traza *MB=B,* mediante métodos gráficos (trazando las mediatrices de *AB* y *BC)* construye la circunferencia que pasa por *A, B* y *C*. Por las propiedades de las secantes de una circunferencia se tiene que *MC:MA::MB:MX* o bien *C:A::B:MX,* despejando *MX* se obtiene que su medida es la *X* pedida. De nuevo tras la construcción comprueba que el segmento hallado corresponde con la solución pedida (fig 6, p.8).

Tras esto concluye que existen multitud de construcciones y que la elección de una u otra depende de la calidad del geómetra:

> Los medios empleados para obtener la línea *X*, hacen conocer que podrían encontrarse aun otra ú otras soluciones, y esta multitud de medios que se presentan al geómetra para elegir el que mejor le convenga, ha de ocasionar consiguientemente el que unos sean mas sencillos que otros , y el que sean mas ó menos apropiados á ciertos casos. La buena elección entre las diversas construcciones que conducen á un mismo resultado, constituye el talento matemático en este ramo, y origina la clasificación de construcciones comunes y construcciones elegantes, con que los geómetras designan las mas conocidas y naturales de discurrir, de las que con menos líneas y mas prontitud dan las líneas que se buscan en cada problema (p.9).

A continuación pasa a explicar la construcción de $X = \frac{ABCD}{MNR}$, que es homogénea y que descompone en producto de fracciones más sencillas, $X = \frac{ABCD}{MNR} = \frac{AB}{M} \times \frac{C}{N} \times \frac{D}{R}$, reduciendo así su construcción a la de cuartas proporcionales:

> En esta disposicion el quebrado primero es la cuarta proporcional á las tres rectas conocidas *M, B* y *A,* que despues de hallada podría ser representada por la letra *K*, con lo que la espresion se convertiría en $X = K \times \frac{C}{N} \times \frac{D}{R}$:
>
> efectuando la multiplicacion del entero K por el quebrado inmediato, se obtendría
> $$X = \frac{KC}{N} \times \frac{D}{R}:$$
>
> En esta nueva espresion, el primer quebrado es tambien una cuarta proporcional á las tres líneas *N, C* y *K* que puede determinarse por las construcciones indicadas en el primer ejemplo de fracciones, y una vez encontrada la línea que manifiesta el quebrado $\frac{KC}{N}$.
>
> Y representándola por *K'*, el valor ó dimension de *X* aparecería bajo la forma de $X = K' \times \frac{D}{R}$ que despues de hecha la multiplicacion se transforma en $X = \frac{K'D}{R}$:
>
> Espresion que vuelve á exigir la determinacion de otra cuarta proporcional á las rectas *R, D* y *K'*.
>
> Se ve, por lo tanto, que siempre que las fracciones sean homogéneas, es decir , que tengan una dimension mas en el numerador que en el denominador, y estos sean monomios, su construccion se reduce á buscar cuartas proporcionales sucesivas (pp.9-10).

A continuación pasa a construir las expresiones $X = \frac{ABCD}{M}$, $X=A+BCD$ y $X = \frac{AB + C^2D + HGL}{MN}$, que son heterogéneas, por lo que las convierte primero en homogéneas haciendo uso de la unidad (U).

> Si la fracción que hubiese de producir construida el valor de la línea incógnita, fuese $X = \frac{ABCD}{M}$ que no es homogénea, habría que hacer ante todo que llenara esta condición de la manera espresada en el número 3. Es decir, que llamando *n* á la unidad de distancias á que se refiriesen las rectas *A, B, C,* etc., habría que multiplicar el denominador M por $n \times n$ ó n^2, para que la fracción quedase homogénea en esta forma $X = \frac{ABCD}{Mn^2}$ (...) (p.10)

Esta expresión la descompone en factores, $X = \frac{AB}{M} \times \frac{C}{n} \times \frac{D}{n}$, y la construye mediante cuartas proporcionales como en el caso anterior (p.10).

En el caso de X=A+BCD, la convierte en $X = A + \frac{BCD}{n^2}$, que ya es homogénea e indica que se construye "haciéndolo previamente con la fracción bajo las reglas prescritas, y añadiendo después a la longitud A la que se había determinado para el quebrado" (p.11).

En cuanto a la fracción $X = \frac{AB + C^2D + HGL}{MN}$, primeramente la convierte en $X = \frac{ABn + C^2D + HGL}{MN}$, ya homogénea, y después da tres métodos de resolución.

El primero de ellos consiste en escribir X como suma de fracciones monomias, $X = \frac{ABn}{MN} + \frac{C^2D}{MN} + \frac{HGL}{MN}$, que se señala se construyen como ya se ha explicado anteriormente (p.12).

La segunda construcción consiste en igualar el numerador al producto de tres factores, dos de ellos conocidos. En este caso toma $ABn + C^2D + HGL = C^2K$, con K desconocido, pero que despejando da $K = D + \frac{ABn + HGL}{C^2}$. Repite el proceso tomando ABn+HGL=ABK', con $K' = \frac{ABn}{AB} + \frac{HGL}{AB} = n + \frac{HGL}{AB}$, y termina explicando que se construye K' como ya se sabe, una vez obtenido su valor se obtiene el de $K = D + \frac{ABK'}{C^2}$, y por último el de $X = \frac{C^2K}{MN}$ (p. 13).

Da dos construcciones más de esta fracción, ambas sustituyendo cada monomio del numerador por un producto de tres factores, dos de ellos conocidos (pp. 14-15).

Termina el estudio de la construcción de expresiones fraccionarias explicando la de $X = \frac{ABC^2 + Q^3M - M^3P}{Q^3L - MNQ + CMD}$, para ello sustituye el denominador por el producto de tres factores, dos de ellos conocidos, $Q^3L - MNQ + CMD = Q^2K$, quedando $X = \frac{ABC^2 + Q^3M - M^3P}{Q^3K}$ y reduciéndose así la construcción de X al caso anterior (p.15).

Tras esto estudia la construcción de diferentes tipos de expresiones radicales. Antes de comenzar la explicación recuerda que las expresiones radicales siempre deben tener un radicando de grado dos:

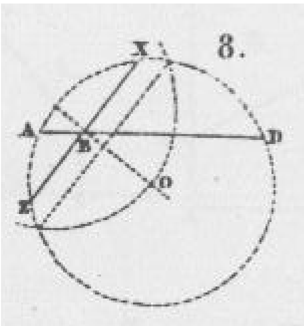
> 3ª. *Construir un radical cuadrado.*
>
> Lo primero que se debe observar al tratar de construir un radical , es que solo puede presentarse bajo una de dos formas, es decir, que la cantidad que se halla debajo del radical dado, ó es monomia ó polinomia; por consiguiente si se recuerda la condición indispensable de que para ser homogéneas las espresiones radicales han de tener en todos sus términos tantas dimensiones ó factores como unidades esprese el índice de la raiz, nos cercioraremos de que es forzoso reducirlas siempre á términos binomios, lo que se consigue introduciendo la unidad como multiplicador ó divisor las veces necesarias (p. 16).

El primer caso que estudia es $X = \sqrt{AB}$:

> Si $X = \sqrt{AB}$, es decir, si la línea incógnita es la raiz cuadrada de un producto de dos factores, como á estos se los puede imaginar como términos estremos de una proporcion, es evidente que la magnitud X, dada por la raiz cuadrada del producto de estremos de una proporcion, viene a ser una media proporcional entre los mismos, luego si se colocan sobre una recta indefinida las dimensiones *AB=A,* y *BD=B* á continuacion una de otra, si sobre su suma *AD* como diámetro, se traza una semicircunferencia y en la reunion *B* de las dos líneas, se levanta una perpendicular *BX* hasta la curva, esta será la media proporcional que se queria, pues que siéndolo entre los segmentos que produce en el diámetro toda perpendicular que se le baje desde la circunferencia, como estos segmentos se han hecho iguales á las rectas *A* y *B* dadas, la *BX* será la única que cumpla con semejante condicion (p. 16).

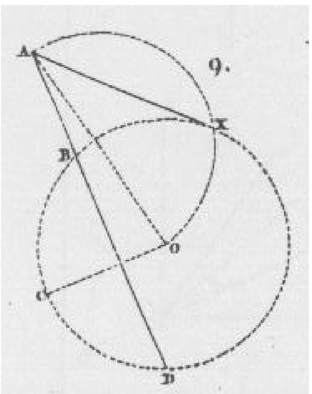
Además de esta da otras dos construcciones de la media proporcional, y por tanto de ese radical:

> Supuesto que si dos cuerdas se cortan en un círculo se dividen en partes recíprocamente proporcionales, ó lo que es lo mismo el producto de las partes de la una, es igual al producto de las partes de la otra. Claro es que si cualquiera de ellas



> está bisecada por la segunda, cada mitad será media proporcional entre los segmentos de la última, por lo tanto, toda la cuestión se reduce, después de colocar sobre una misma cuerda las dos rectas que se den, á saber tirar otra que pasando por la unión de sus segmentos quede dividida en ella en dos partes iguales. Para esto, principiaremos por colocar sobre una recta indefinida las porciones *AB=A* y *BD=B* que se han dado, y hacer pasar una circunferencia por los estremos *A* y *D* (…). La segunda cuerda que se busca ha de pasar por el punto *B* y quedar bisecada en él; pero todo radio perpendicular á una cuerda la divide en dos partes iguales, luego tirando el radio *OB* la perpendicular *BX* levantada á dicho *OB* en *B* será la media proporcional en cuestión (p. 17).

Y tras la construcción comprueba que, efectivamente, el segmento obtenido es la solución buscada:



> En efecto, las cuerdas *AD* y *ZX* que se cortan dentro del circulo, dan esta proporción:
>
> *AB : BX : : BZ : BD*
>
> y como *BZ=BX* por estar bisecada en *B* la cuerda *ZX* por el radio *OB* perpendicular, dicha proporción , puede escribirse asi
>
> *AB : BX : : BX : BD:*
>
> poniendo en vez de *AB* y *BD* las cantidades ó símbolos *A* y *B* que las representan, se tendrá
>
> *A : BX :: BX : B,*
>
> luego
>
> $$BX^2 = A \times B, \text{ ó } BX = \sqrt{AB}$$
>
> que es la espresion que produce la línea *X* que se deseaba encontrar (p. 17).

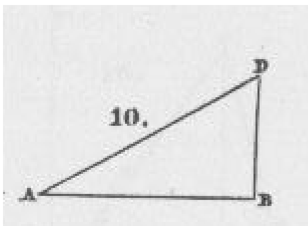
Incluye otra construcción de la media proporcional, utilizando que si desde un punto *A* exterior a una circunferencia, se trazan una tangente y una secante, el segmento de tangente *AX* es media proporcional entre la secante *AD* y su parte exterior *AB* (p. 17. fig. 9).

> (…) ó lo que es lo mismo entre las líneas *A* y *B* dadas, se verificará que $AX^2 = AD \times AB = A \times B$ de donde se obtiene $AX = \sqrt{AB} = X$ (p.17).

Seguidamente explica cómo construir las raíces del tipo $X = \sqrt{ABCD.....}$ en las que aparecen más de dos factores. Primero hace homogénea la expresión, obteniendo $X = \sqrt{\frac{ABCD}{n^2}}$ (U) (p. 18) y da dos construcciones de la misma. En la primera divide la fracción en producto de dos $X = \sqrt{\frac{AB}{n} \times \frac{CD}{n}}$, que construye buscando primero una cuarta proporcional a *n, A y B* y otra a *n, D y C* como explicó en el capítulo anterior y después una media proporcional a las rectas recién halladas; para la segunda construcción transforma *X* en $X = \sqrt{\frac{ABC}{n^2} \times D}$ y halla una cuarta proporcional a *n, B y A*, otra a *n,* a *C* y a la línea que se acaba de hallar, y por último calcula una media proporcional entre *D* y la última línea hallada (pp. 19-20).
Tras la construcción de los radicales que son producto de factores, explica la de aquellos en los que aparece una suma o diferencia:

> Otra forma de las que pueden tener los radicales cuadrados es la de una suma ó diferencia; mas como para ser homogéneos han de contener siempre en cada término dos dimensiones ó factores se puede desde luego tomar como fórmula de los mas sencillos, es decir, de los que solo tengan dos sumandos, la espresion $X = \sqrt{A^2 + B^2}$ (p. 19).

Cuya construcción dice, solo se puede obtener mediante la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se conocen sus catetos:

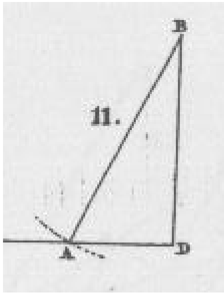


> Entre las diversas líneas que se han estudiado en la geometría, ninguna aparece con este valor, fuera de la hipotenusa de un triángulo rectángulo; por lo tanto para nosotros esta clase de radicales solo representa la citada recta: asi es que para construirla, se colocarán sobre los lados de un ángulo recto *ABD* las longitudes *AB=A* y *DB=B*, (fig. 10) y tirando la hipotenusa *AD,* resultará igual á la *X* que se queria determinar; (...)

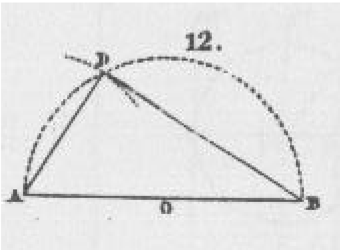
Y comprueba algebraicamente que en efecto la recta obtenida es la buscada:

> (...) puesto que en el triángulo rectángulo *ABD*, se verifica que $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$ ó bien $AD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2}$
>
> Pero *AB=A* y *BD=B* según se ha supuesto al formar el triángulo en cuestion; luego
>
> $AD = \sqrt{\overline{A^2} + \overline{B^2}}$ cuya espresion igual á la de *X* hace conocer que *X=AD* (p. 19).

De forma análoga razona que en el caso de que $X = \sqrt{A^2 - B^2}$ la raíz "solo puede representar uno de los catetos de un triángulo rectángulo, en el que la hipotenusa valiera tanto como la recta *A* y el cateto conocido tanto como la *B*" (p. 20), y da dos construcciones de dicha expresión:



> O se trazarían dos perpendiculares indefinidas, y á partir de su encuentro ó vértice del ángulo recto que forman, se tomaría sobre la una la longitud *BD*=*B* para describir seguidamente desde *B* como centro y con el radio *BA*=*A* un arco que cortaría al otro cateto en *A*, con lo que la magnitud de este *(DA)* sería la que se trataba de hallar (Fig. 11, p.20).



> O bien sobre una recta indefinida se tomaría *AB*=*A*, y sobre ella como diámetro, ó haciendo centro en la mitad *O*, se describiría la semicircunferencia *ADB* y trazando después desde el estremo *B* como centro y con un radio *BD*=*B* un arco que cortase á dicha semicircunferencia en *D,* se tiraría por último la cuerda *AD*, que habría de tener por espresion la de *X*, ó lo que es lo mismo, que podría ser siempre dicha *X* (Fig. 12, p.21).

Tras estas explicaciones comprueba algebraicamente, como en los casos anteriores, que las construcciones hechas se corresponden con las líneas buscadas (p. 21).

Utilizando estas construcciones generaliza a los casos en que *X* tiene una expresión más compleja como, $X = \sqrt{A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + E^2 ....}$ $X = \sqrt{A^2 + B^2 - \frac{4AC^2}{D} + EF}$.

Para construir *X* en el primer caso, $X = \sqrt{A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + E^2 ....}$, explica que se van agrupando los términos en binomios, calculando hipotenusas o catetos de los triángulos correspondientes, según corresponda, sucesivamente (p. 21).

Para el segundo caso, $X = \sqrt{A^2 + B^2 - \frac{4AC^2}{D} + EF}$, reduce el radicando al caso anterior igualando los términos que no son cuadrados a dos cuadrados desconocidos: $\frac{4AC^2}{D} = K^2$, $EF = K'^2$, y despeja $K = \sqrt{\frac{4AC^2}{D}}$ y $K' = \sqrt{EF}$. Construye *K* y *K'* como ha explicado en puntos anteriores quedando $X = \sqrt{A^2 + B^2 - K^2 + K'^2}$ cuya construcción se reduce al caso anterior, como habíamos comentado (p. 22).

Termina el capítulo explicando cómo debe considerarse un coeficiente numérico:

> Obsérvese que cuando en uno cualquiera de los términos de una espresion algebraica, aparece un coeficiente numérico, puede el geómetra mirarle, según vea conveniente mejor, ó como una dimension, ó más si se le descompone en factores, ó como una simple relacion entre la parte puramente literal y el término completo con su coeficiente. Bajo el primer punto de vista, al tener que emplear en una construccion un numero como si fuese una línea, es claro que habrá que tomarse

> una recta que valga tantas unidades de la escala ó medida en que se aprecien las demas, como esté espresado el número, mientras que bajo el segundo aspecto de ser el coeficiente una relacion, solo se deberá construir la linea representada por la parte literal del término, con los recursos conocidos, y despues repetirla sobre una recta indefinida las veces que diga el coeficiente numérico, si es entero, ó bien tomar de ella la porcion ó porciones que indique dicho coeficiente si fuese quebrado (p.23).

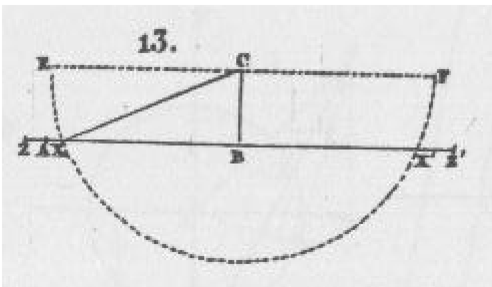
Y concluye finalmente, que todo lo expuesto muestra que se puede construir cualquier incógnita que venga expresada por una ecuación de primer grado:

> Todo lo espuesto hasta aqui hace ver que se puede construir inmediatamente cualquiera incógnita cuyo valor esté dado por una ecuacion determinada de primer grado; porque su valor no puede menos de estar espresado, ó por productos, ó por relaciones entre cantidades o líneas dadas, y por lo tanto la construcción solo exigirá determinar ó cuartas, ó medias proporcionales, para las que ya quedan manifestados los medios de obtenerlas (p. 23).

Como vemos este autor explica exhaustivamente la construcción de las expresiones algebraicas de primer grado poniendo numerosos ejemplos y dando más de una construcción en algunos casos.

1.2.2. Construcción de las soluciones de la ecuación de segundo grado. Soluciones negativas

Seguidamente, en el capítulo II, muestra cómo construir las soluciones de una ecuación de segundo grado haciendo especial hincapié en cómo se añaden los radicales que aparecen en ellas. Comienza construyendo las soluciones de $X^2 - 2AX = -B^2$, es decir $X = A + \sqrt{A^2 - B^2}$ y $X = A - \sqrt{A^2 - B^2}$.



> Pero en estas espresiones la parte radical no es otra cosa que un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *A*, y el otro cateto *B;* luego para determinarle se trazará una recta indefinida *ZZ'*, levantando en cualquier punto la perpendicular *BC=B*, y desde *C* como centro se describirá con el radio A un arco que cortará en general a *ZZ'* en dos puntos *X* y *X'*, equidistantes del pié de la perpendicular: luego las porciones *BX* y *BX'* son el radical del valor de *X*. Por consiguiente desde *B* se coloca *BA=A, AX'* será el primer valor que se buscaba por ser igual á $X = A + \sqrt{A^2 - B^2}$ y *AX* será el segundo, pues resulta ser $X = A - \sqrt{A^2 - B^2}$ [41](Fig. 13. Lám. I) (p.24).

A continuación pasa a analizar los diferentes tipos de soluciones que se obtienen dependiendo de si *B* es menor, igual o mayor que *A*.

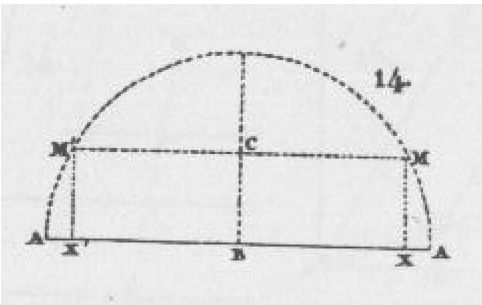
---

[41] En este párrafo hay varias erratas que se han corregido en la transcripción. Pone $X = A + \sqrt{A^2 + B^2}$, y *AX² será el segundo.*

En el caso en que *B* es menor que *A* nos dice que la construcción mostrada es completamente válida, pero no así en los casos en que *B* es igual a *A*, o *B* es menor que *A:*

> 2º. Si la longitud *B* fuese igual á *A,* es evidente que las intersecciones *X* y *X'* de la figura, se confundirían en *B,* lo que prueba que el arco descrito no cortaría á *ZZ'*, sino que la tocaría simplemente en *B.* Los radicales *BX* y *BX'* se harían nulos, y los valores de *AX* y *AX'* quedarían iguales entre sí, é iguales á la dimension *A.* Pero estas modificaciones son la traduccion exacta del significado algebráico que toman los valores dados de *X,* cuando en ellos se supone *B*=*A*, porque entonces se reducen á *X*=*A* y *X*=*A.*
>
> 3º. Si *B* fuese mayor que *A*, el arco descrito desde *C* como centro y con el rádio *CX*=*A*, no podría llegar jamás á la recta *ZZ'*, por lo que la construccion se hace imposible con semejante condicion. Esta misma circunstancia espresa tambien la interpretacion numérica de los valores de la incógnita, porque si *B*>*A* el radical que forma parte de ambos valores de *X,* se hace imaginario; es decir, que no existe cantidad alguna que cumpla con las condiciones exigidas" (p. 25).

Obsérvese que comprueba algebraicamente los resultados que obtiene geométricamente. A continuación pasa a construir las raíces de la misma ecuación mediante otro método: poniendo la ecuación $X^2-2AX=-B^2$ como $2AX-X^2=B^2$ y sacando factor común, $X(2A-X)=B^2$, se tiene que B es la media proporcional entre *X* y *2A-X*, resultado que utiliza para construir *X* (p. 25).



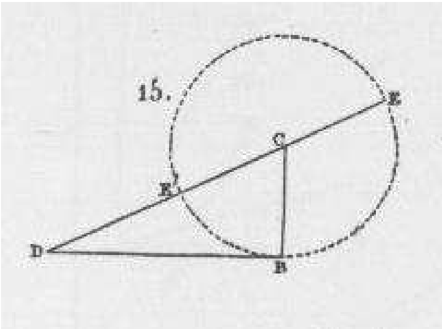
> (...) luego *X* es el segmento menor de un diámetro ó de una hipotenusa igual á *2A*, cuando la perpendicular levantada sobre él (ya sea hasta la circunferencia ó ya hasta el vértice del ángulo recto del triángulo), cumpla con la condición de ser igual á B. Por lo tanto, describiendo sobre 2A como diámetro un círculo *AM'MA'*, y levantándole (Fig. 14) la perpendicular *BC*=*B*[42], la paralela *MCM'* al diámetro, cortará a la circunferencia, en los puntos *M* y *M'* desde los que pueden bajarse perpendiculares al diámetro, cumpliendo con ser iguales a *B.* Según esta construcción los segmentos *AX* y *AX'* son las raices de la ecuación propuesta (...) (p. 25)

Pasa a continuación a construir las raíces de $X^2-2AX=B^2$, es decir $X=A-\sqrt{A^2+B^2}$ y $X=A+\sqrt{A^2+B^2}$. La construcción es análoga a la realizada con las anteriores, pero teniendo en cuenta ahora que el radicando es la hipotenusa de un triángulo, y no uno de los catetos. Pero lo interesante de esta construcción es que en ella aparece un segmento con signo negativo, y la interpretación que hace de él.
Como hemos dicho Gómez Santa María utiliza la construcción de las soluciones de la ecuación de segundo grado para explicar cómo construir e interpretar las soluciones negativas. Así antes de pasar a la construcción hace la siguiente consideración sobre la suma y resta de segmentos (SN):

[42] En este párrafo hay una errata, en vez de poner *BC*=*B*, pone *AC*=*C*

> Obsérvese desde ahora que cuando en una misma cuestion (…), se ha de añadir y sustraer una línea cualquiera de otra *A*, es claro que si á la parte derecha de dicha *A* se colocó el radical ó línea-sumando para obtener la suma, desde el estremo derecho de *A,* se habrá de colocar hácia la izquierda la que se reste, para determinar su diferencia, porque si bien en los problemas donde solo se trata de hallar longitudes como sucede hasta aquí, viene á ser indiferente colocar el sustraendo desde uno cualquiera de sus estremos hácia el otro, parece natural, no obstante, que si las agregaciones de líneas se van haciendo en un sentido ya fijado de antemano, las segregaciones se verifiquen en opuesto sentido(…). Esta suposición que en nada perjudica a la ejecucion de una resta aislada y que se aviene completamente al buen discurso, es de la mayor transcendencia en otras cuestiones que se habrán de examinar en lo sucesivo; y en ellas se verá que es necesario estimar las cantidades negativas de la manera indicada (p. 25).

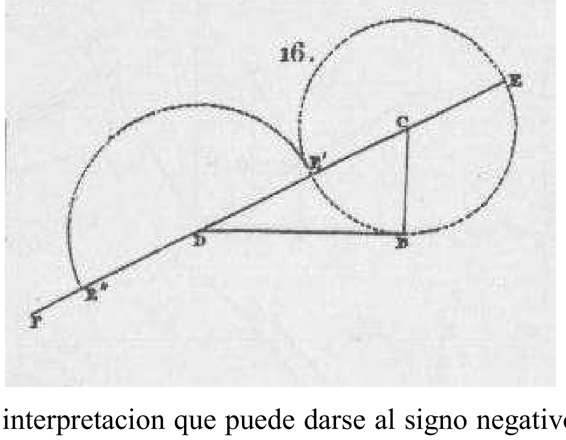
Y como ejemplo hace la siguiente construcción (E):



> Tómese pues, *BD=B*, y levantando la perpendicular *BC=A, DC* será el radical que figura en los dos valores de *X*: por lo tanto si desde *C* con el radio *CB=A* se describe un círculo que corte á la *DC* en *E'* y á su prolongacion en *E*, la parte *DE,* será $A+\sqrt{A^2+B^2}$ ó lo que es lo mismo *DE* corresponderá al primer valor de *X*; mientras que el otro segmento $DE'=\sqrt{A^2+B^2}-A$ no será la segunda raiz ó valor que se buscaba si no se cambia el signo á la igualdad que se acaba de escribir. En efecto, cambiando signos á los dos miembros, resulta $-DE'=A-\sqrt{A^2+B^2}$.

Hace la consideración de que el que aparezca una cantidad negativa no significa que no sea posible la construcción de la solución, sino que "solo manifiesta un cambio de posicion para la magnitud *DE'*" (p.26) (SN), y para mostrar la teoría de forma más clara pasa a construir $X=A+C+\sqrt{A^2+B^2}$, $X=A+C-\sqrt{A^2+B^2}$, siendo "*C* una línea cualquiera conocida" (p. 26).

> En la construccion de las nuevas raices de la ecuacion mas general que se ha supuesto (Fig. 16. Lám I), la parte radical se obtendría como anteriormente;(...) luego para obtener los valores completos, no habrá más que añadir á *DF=C* la recta *DE*, para determinar la primara raiz; que será por tanto $EF=A+C+\sqrt{A^2+B^2}$ y restar de dicha *DF=C* la *DE'*, desde *D* en sentido opuesto al que se hizo la agregación ó suma (porque tal es la única interpretacion que puede darse al signo negativo, según lo espuesto) lo que dará la magnitud $FE''=C+A-\sqrt{A^2+B^2}$. Esta dimensión podrá por sí, ser aún positiva



> si la sustracion es posible, esto es, si el valor del radical *DE'* es menor que *DF*, pero quedará con signo negativo si sucede lo contrario, y este es el caso que antes nos ocupaba, en el que *C* era nulo, y el radical *DC* mayor que la línea *A*: por consiguiente suprimiendo *DF* a la posición *DF''* será opuesta á la de la primera raíz *DE*, para que así manifieste una magnitud que debe restarse, aun cuando no apareciese línea alguna de quien hacerlo. Las dos posiciones contrarias de *DE* y *DE''* hubieran a aparecido en efecto, si á la *A* se la hubiera agregado y sustraido el radical, en vez de tomar á este como primer valor y haberle añadido y quitado aquella dimension, contra lo que espresamente indicaban las raíces en su escritura. Por eso se obtuvieron solamente los valores absolutos y no su situacion (p. 27).

Y saca como conclusión que un signo negativo en el Álgebra indica siempre una resta (SN):

> En general, «siempre que el álgebra dá á una cantidad el signo negativo, indica una sustracion por efectuar; » si existen cantidades de quienes pueda ser restada, se satisface la cuestion con la ejecucion de la resta, pero sino aparecen las cantidades de quienes pueda sustraerse, deberá permanecer el signo como indicacion de que ha de practicarse la operación que señala, y que realmente queda por efectuar por falta de medios hábiles de conseguirlo (p. 27).

Termina el capítulo con la ecuación $X^2+2AX=B^2$, cuyas raíces, $X=-A+\sqrt{A^2+B^2}$, $X=-A-\sqrt{A^2+B^2}$, se construyen del mismo modo que las de $X^2-2AX=B^2$ (fig. 15), sin más que considerar el cambio de signo que se debe hacer a $DE=A+\sqrt{A^2+B^2}$ (p.28).

Seguidamente resuelve varios problemas en los que muestra la teoría explicada, problemas que hemos recogido en la parte de fenomenología, como en otros autores.

2. Problemas determinados

Tras explicar esta forma de aplicar el Álgebra a la Geometría pasa a trabajar con sistemas de coordenadas en los capítulos siguientes (C).

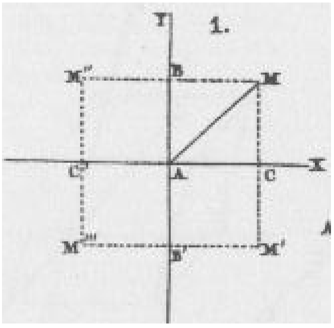
2.1. Sistemas de coordenadas

Comienza explicando cómo se fija un punto en el plano, es decir, cómo fijar sus coordenadas. Da tres métodos:

> 7. Cuando se trata de fijar un punto en un plano, es indispensable conocer, ó sus dos distancias á dos rectas fijas, ó sus distancias á un punto y una recta conocidos, ó su distancia á un punto y la inclinacion de esta con otra, ó en general dos condiciones que equivalgan á las anteriores. Por lo que se infiere que cuando al situar un punto no nos sea conocida mas que una de estas dos condiciones, se hallarán infinitos puntos que la cumplan, y el problema de fijarle será indeterminado (p.57).

Tras esto explica cómo determinar un punto del que se conocen las distancias a dos rectas fijas mediante el corte de dos rectas paralelas a las dadas que se encuentran a las distancias fijadas. Hace la distinción de signos dependiendo de la posición del punto:

Al situar la distancia $AB=b$ para tirar por su estremo B la paralela BM, es claro que tambien pudo colocarse desde A hasta B', y tirar la $B'M'$ del mismo modo, lo que hubiera doblado aquel número indefinido de soluciones, así como al trazar la CM paralela á AY debió tirarse la otra equidistante $C'M''$; con este procedimiento hubiéramos deducido que cuando se conozcan las dos distancias $MC=b$ y $MB=c$ de un punto á dos rectas, lejos de obtener uno solo que cumpliese estas condiciones simultáneas, resultarían cuatro en los cuatro encuentros M, M', M'', M''' de las cuatro paralelas; mas como queda ya sentado que cuando se toman líneas en sentidos opuestos, si á las unas se las ha marcado con el signo positivo, es preciso que á las otras les afecte el negativo, se sigue que al expresar que el punto dista de AX la cantidad b, y de AY la extensión c, lo que equivale á decir $+b$ y $+c$, solo el M pudo cumplir con estas circunstancias siempre que de antemano se hubieran fijado de A hacia la parte superior las distancias positivas á AX y de A á la derecha las distancias á AY (p.58).



Actualmente eso se da por hecho, no se debe fijar de antemano el signo que se toma a cada lado de los ejes.
Termina la explicación diciendo que para *marcar* M'' hay que tomar las distancias $+b$ y $-c$ a AX y AY respectivamente, para M'–b y $+c$, y para M'''–b y $-c$.

También explica, aunque más brevemente cómo determinar un punto conocidas sus distancias a un punto y a una recta dada, aunque no lo vuelve a utilizar, al menos en la parte que ha sido analizada:

(…) si en vez de fijar los puntos en un plano por sus distancias á dos rectas invariables marcadas de antemano en el mismo plano, se hiciera por sus distancias á un punto y una recta fijos, lo que daría (cuando entrambas se conocieran) para punto en cuestion una de las intersecciones de la circunferencia descrita desde el punto con un radio igual á la distancia conocida: la segunda interseccion debería espresarse con el signo negativo antepuesto á la distancia de punto á punto; mientras que la paralela á la recta, tirada por el lado contrario estaria afectada del signo menos cuando debiera referirse su distancia á dicha posicion contraria (p. 58).

Más adelante en el mismo capítulo define ejes coordenados, coordenadas de un punto y les da nombre:

«Se llaman EJES COORDENADOS á dos rectas fijas que se trazan en un plano, a á las cuales se refieren todos los puntos de dicho plano» (p. 59).

Obsérvese que no impone que los ejes sean perpendiculares, después hace la diferenciación entre oblicuos y rectangulares.

Si los ángulos que forman dichos ejes, son desiguales, se los designa por ejes oblícuos: si los ángulos que forman, son iguales ó rectos, se dicen ejes rectangulares.

Define origen de coordenadas y coordenadas de un punto:

«El punto de encuentro A de los ejes, ó vértice comun de sus ángulos se llama origen de coordenadas ó simplemente origen;» y desde él se cuentan en un sentido las distancias á los ejes positivas, y en el opuesto las negativas. «Llámanse COORDENADAS DE UN PUNTO las rectas tiradas por él, paralelamente á los ejes, » si estos son oblicuos las coordenadas del punto no son las distancias á los ejes, si bien las reemplazan en todas las funciones que se han manifestado para ellas; mas si lo ejes son rectangulares, las paralelas MB y MC á los ejes se convierten en las verdaderas distancias de dicho punto M á los ejes AX y AY (p. 59).

Y más adelante:

(…) se distingue cada coordenada de un punto M de la otra, por las voces *abscisa* y *ordenada;* «dando el nombre de *abscisas* á las distancias contadas sobre uno de los ejes» y «ordenadas á las contadas sobre paralelas al otro eje». Generalmente hacen de abscisas las x, y las y de ordenadas; los ejes gozan de estas mismas denominaciones, (…) (p.60).

2.2. Ecuaciones de la recta

Tras esto obtiene las ecuaciones de la recta (ER), pero comienza haciendo una serie de consideraciones generales aplicables a cualquier curva:

8. Todas las consideraciones que preceden y nos han persuadido de que para determinar un punto han de existir necesariamente dos condiciones diferentes, á las que ha de satisfacerse al mismo tiempo, previenen de igual manera que cuando al escribir en una espresion algebráica ciertas condiciones á las cuales satisfagan muchos puntos del mismo modo, cuando se trate de construir la espresion resultará una serie de puntos que en general formará una línea; luego si hay en el álgebra medios adecuados para espresar condiciones comunes á muchos puntos consecutivos, que en general las producirán ecuaciones con dos ó mas incógnitas, ó sean ecuaciones indeterminadas, será posible escribir en espresiones algebráicas la situacion de un punto, el curso de una línea con todos sus accidentes, y en general cuanto tenga relacion con las formas y dimensiones que existen en los cuerpos (p.59).

Pasa a explicar los *medios ó artificios* que se emplean para obtener las fórmulas. Dice que como un punto queda determinado por las distancias a dos rectas fijas y "como toda línea puede mirarse como una serie no interrumpida de puntos", el medio para representar las líneas es referir todos los puntos a dos ejes fijos, "escribiendo después la relacion, que haciendo depender una de otra estas distancias, sea comun á todos los puntos de la línea" (p.59).

Y más adelante señala:

9. Ahora bien, si para cada punto de una línea cualquiera trazada en un plano, existe una relacion constante, una ley invariable entre sus coordenadas, y esta relacion ó ley se escribe en una espresion algebráica entre x é y, dicha espresion ha de representar forzosamente aquella línea de donde se dedujo, y si dicha ley es esclusiva y única del curso de esta línea, la espresion algebráica representará solo la recta ó curva que le dio origen; mas si la relacion entre ordenada y abscisa de cada uno de los puntos fuese tal que se verificara en otra ú otras líneas , cuya existencia acaso se ignorase, el álgebra que con sus signos y caractéres las incluiria á todas al anotar aquella relacion ó ley, nos las haría conocer al tratar de aplicar á la determinacion de diferentes puntos.

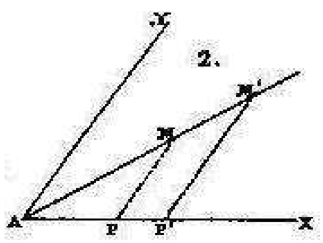
> Para encontrar los puntos de una línea cuya ecuacion se conoce, como esta ecuacion contendrá las dos incógnitas, x é y (distancias de cada punto que se han de determinar) para fijarlos, no habrá mas que dar á una de estas incógnitas, x por ejemplo, valores completamente arbitrarios, y calcular con ellos los que resultan de la ecuacion dada para la otra distancia desconocida y (p. 60).

Tras esto añade un conjunto de resultados, que él denomina *observaciones* entre los que se encuentran los siguientes:

> 2ª. La ecuación de una paralela al eje de las x, ó que esprese todos sus puntos es $y=b$: (…).
>
> 3ª. La ecuación de una paralela al eje de las y, es $x=a$: (…)
>
> 4ª . La ecuacion del eje de las x es $y=0$. (…)
>
> 5ª. La ecuacion del eje de las y es $x=0$. (…)
>
> 6ª. Las ecuaciones del origen de coordenadas son $x=0$ é $y=0$. (…)
>
> 10. Toda ecuacion en que al hacer $x=0$, dé $y=0$, es de una línea que pasa por el origen. (…)
>
> 11. La ecuacion de una recta que pasa por el origen de coordenadas es $y=ax$.

Es decir da la ecuación explícita de la recta que pasa por el origen, aunque él no la denomina así, y lo hace en el caso general en que el ángulo que forman los ejes es cualquiera:
Veamos cómo obtiene estas ecuaciones, porque lo hace sobre ejes oblicuos y utilizando semejanza de triángulos para obtenerlas:

> Sean *AX* y *AY* los ejes coordenados (cuyo ángulo *YAX* será conocido) y sea *AM'* la recta que pasa por el origen, y cuya ecuacion vamos á determinar.



> Las ordenadas de los diferentes puntos *M, M'* etc. de esta recta serán las *MP, M'P'* etc, paralelas al eje *AY*, mientras que las correspondientes abscisas, serán las distancias *AP, AP'* etc., contadas sobre el eje *AX*.
>
> Para obtener la ecuación de la recta *AM*, es necesario escribir entre x é y una relacion ó ley que se verifique en todos los puntos, y como desde luego se observa que los triángulos *APM, AP'M'*, etc. por tener los lados *PM, P'M'* etc. paralelos, son semejantes, compararemos sus lados homólogos y obtendremos esta série de razones iguales
>
> $$\frac{MP}{AP}=\frac{M'P'}{AP'}=\frac{M''P''}{AP''}=etc$$
>
> ó poniendo por las ordenadas que hacen de antecedentes ó numeradores, su representación y, y por las abscisas x; y observando que la relacion constante entre las coordenadas de cada punto tendrá un valor a, resultará

$$\frac{MP}{AP}=\frac{M'P'}{AP'}=etc.=\frac{y}{x}=a$$

> de donde despejando á y, se obtiene $y=ax$; y como esta espresion, cifra una condicion que se verifica en todos los puntos de una misma recta, siempre que pase por el origen, será la ecuacion que se desea (p.62).

Hace tres observaciones a este punto:

> Observaciones: 1ª. La relacion entre las coordenadas de cada punto de una recta es la de los senos de los ángulos que forma con los ejes (p.63).

Para demostrar esto utiliza el teorema del seno -que él no nombra, simplemente utiliza la propiedad de que en los triángulos *AMP* y *AM'P'* los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos- por el que se tiene:

$$\frac{MP}{AP}=\frac{sen.MAP}{sen.AMP};\frac{M'P'}{AP'}=\frac{sen.M'AP'}{sen.AM'P'};etc:\text{ (p.63)}$$

Sigue razonando que como los ángulos en *M, M'* son iguales por correspondientes, e iguales al *MAY* por alternos internos, tendremos:

$$\frac{MP}{AP}=\frac{sen.MAX}{sen.MAY};\frac{M'P'}{AP'}=\frac{sen.MAX}{sen.MAY};etc$$

> pero las primeras razones ó quebrados de estas ecuaciones, son siempre iguales á a, luego las relaciones de los senos lo serán también (p. 63).

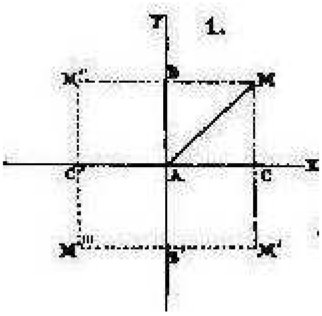
La segunda observación al punto 11 da la determinación de la recta mediante el ángulo que forma con no de los ejes, y como consecuencia la interpretación de *a:*

> 2ª Dado el ángulo que forman los ejes, y el de la recta con uno de ellos, queda esta determinada (p. 63).

Para demostrarlo utiliza de nuevo el teorema del seno: Llama m al ángulo que forman los ejes y n el que forma *AM* con el eje *AX*.

De $y=ax$ se obtiene que $y/x=a$, o lo que es lo mismo $\frac{P'M'}{AP'}=\frac{PM}{AP}=a,etc$ y aplicando el teorema del seno tiene:

$a=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{PM}{AP}=\frac{sen.m}{sen.(m-n)}$, y como m y n son conocidos, también lo es a (p. 64).



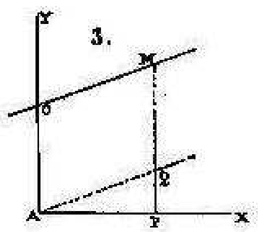
En la tercera observación da el valor de a cuando los ejes son perpendiculares, pero no lo llama pendiente de la recta en ningún momento.

> 3ª. Si los ejes son rectangulares el coeficiente a de x en la ecuacion de una recta, es la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de abscisas (p. 64).

Hace dos demostraciones, la primera utilizando el resultado anterior pero además añade:

Tambien pudo deducirse esta verdad directamente,(…) puesto que inmediatamente se hubiera visto que cada coordenada *MC* forma con su abscisa *AC* y la parte de la recta *AM*, un triángulo rectángulo *AMC*, en el que según la trigonometría cada cateto *MC* es igual al otro multiplicado por la tangente del ángulo opuesto; esto es *MC=tan.MAX* ó bien $y = tan.MAX \times x$ (p. 64).

Sigue con las *observaciones* principales, y obtiene la ecuación explícita de una recta que no pasa por el origen de coordenadas:



11. La ecuacion de una recta cualquiera que no pasa por el origen de las coordenadas, es $y=ax+b$ (p. 65).

No especifica que los ejes deban ser rectangulares, pero en el dibujo en el que se apoya para la demostración sí lo son (fig.3, lam. 2).

Hace la siguiente observación para dejar claro que el Álgebra no contradice a la Geometría:

Observacion: Por la forma de esta ecuacion, que lo es de toda recta situada de cualquier modo respecto á los ejes, se vé que para que determine una recta, es preciso conocer las dos cantidades *a* y *b*, lo que equivale en general á conocer dos de sus puntos ó condiciones que los equivalgan: por consiguiente los accidentes que en sus espresiones escribe el álgebra van conformes en todo á los que nos eran conocidos en las líneas por la geometría.

Si en la ecuacion de una recta que pasa por el origen, no habia mas que la relacion a que determinar para fijar cada recta, es decir, no habia en general que conocer mas que un punto, debe tenerse presente que con deber pasar por el origen, resultaban dos, para trazarla (p. 65).

Seguidamente da la ecuación punto-pendiente, aunque él no la nombra, ya que ni siquiera llama pendiente al valor de *a*, ni da su interpretación geométrica:

12. Dadas las coordenadas de un punto, hallar la ecuacion de toda recta que pase por él (p.65).

Para calcularla toma como coordenadas del punto *x'* e *y'*. Sustituye en la ecuación de la recta $y=ax+b$ y tiene $y'=ax'+b$, y restando ambas ecuaciones obtiene $y-y'=a\ (x-x')$. Dice que esta ecuación se suele dar en esta forma:

Aunque en la ecuacion obtenida, debiera despejarse la *y* para escribirla bajo la forma adoptada hasta aquí en las ecuaciones de las rectas, es mas comun representarla en la que tiene, de ser la diferencia entre las ordenadas igual á la de las abscisas, multiplicada por la relacion de los senos, ó por la tangente trigonométrica *a* (p. 66).

En el punto siguiente da la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, que plantea también como un problema. Da dos expresiones de la misma $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$, y $y = \frac{y' - y''}{x' - x''}x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}$ (p.67).

Como vemos el cálculo de ambas ecuaciones lo plantea como problemas por lo que también los hemos recogido en el apartado de fenomenología.

Tras esto pasa a analizar la ecuación $y'-y''=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x'-x'')$ viendo "que su formacion satisface todos los casos en que se puede hallar una recta respecto á los ejes", y estudia cuatro casos:

> 1.º En efecto, si se supone *x=x'*, resultaria *y-y'=0,* ó *y=y'* (p.68).

2º . Estudia el caso en que $x = x''$.

En el tercer caso considera $y'=y''$, es decir el caso en que $a=0$ y da su interpretación geométrica, pero solo en el caso de ejes perpendiculares:

> 3º. Si *y'=y''*, es decir si las alturas de los dos puntos por donde ha de pasar la recta fueran iguales, la ecuacion $y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$ se reduciría á $y-y'=\frac{y'-y'}{x'-x''}(x-x')$, es decir que $a=0$, é *y-y'=0* ó *y=y'*. La recta resultará paralela al eje de las *x*, puesto que pasan todos sus puntos á altura constante *y*; lo cual debía suceder, porque se supuso que los dos puntos dados equidistaban del eje de las abscisas, tan luego como se hizo *y'=y''*.
>
> El valor $a=0$ está también acorde con la posicion que toma la recta, porque siendo a la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el eje de las *x*, cuando se hace paralela á este, el ángulo es nulo, y su tangente trigonométrica tambien (p. 68).

Por último estudia el caso $x'=x''$, es decir $a=k/0$, y da su interpretación geométrica, como en el caso anterior:

> 4.º Si *x'=x''*, la ecuacion se reduce á $y-y'=\frac{y'-y''}{0}(x-x')$, en donde para ver el valor de *x* habrá que quitar el denominador, lo que produce $(y'-y'')(x-x')=0$ ó bien dividiendo por el primer binomio *x-x'=0* ó *x=x';*es decir, que la recta resulta paralela al eje de las ordenadas, como en efecto acontece á toda recta que pasa por dos puntos cuyas abscisas *x'* y *x''* se han imaginado iguales.
>
> El valor de $a=\frac{y'-y''}{0}$ ó dividiendo el numerador y denominador por el binomio *y'-y''*, el $a=\frac{1}{0}$ es tambien conforme con la posicion de la recta, que al ser paralela al eje de las ordenadas, está situada perpendicularmente al de las abscisas, ó forma con este un ángulo recto; la tangente trigonométrica de un ángulo recto es *infinita,* y el álgebra no podía menos de hacer conocer con este símbolo $\frac{1}{0}=\infty$ la posicion perpendicular de la recta respecto al eje de las *x* (p. 69).

Como vemos de nuevo da por supuesto que los ejes son perpendiculares, aunque no lo impone de antemano.

También da la ecuación general de la recta, para ello define antes lugar geométrico y concluye que el lugar geométrico de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una recta (LG):

> 20. «Por lugar geométrico de una ecuacion se entiende, la línea cuyas coordenadas tengan la relacion que esprese la ecuacion dada »
>
> Toda ecuacion de primer grado entre dos variables, tiene por lugar geométrico una recta (p. 74).

Para demostrarlo toma la ecuación general de primer grado (ER)$Ay+Bx+C=0$, despeja la y obteniendo $y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A}$, y toma $a=-\frac{B}{A}$ y $b=-\frac{C}{A}$, quedando $y=ax+b$, "ecuacion conocida para una recta, y que espresa, que esta corta al eje de las y á una altura sobre el origen, espresada por b ó $-\frac{C}{A}$, y que forma con el eje de las x un ángulo cuya tangente trigonométrica es a ó $-\frac{B}{A}$"(p. 75).

Después hace una observación, en la que explica cómo, dada una ecuación, se puede construir la recta que representa:

> *Observación.* Cuando dada una ecuación de primer grado entre dos variables, se quiera construir la recta que representa; como estas lineas no necesitan mas que dos puntos para quedar determinadas, bastará suponer $x=0$, lo que dará para y, el punto del eje de las ordenadas por donde pase, y después $y=0$,que dará á x el valor correspondiente al encuentro de la recta con el eje de abscisas.
>
> Si haciendo $x=0$ resulta $y=0$, entonces la recta pasa por el origen, y basta dar á x un valor cualquiera 1 para deducir el estremo de la ordenada correspondiente por donde pasa la recta (p. 75).

Como vemos, para representar una recta conocida su ecuación da como método general el obtener los dos puntos de corte con los ejes, como hacen otros autores como Vallejo u Odriozola, pero no pone ejemplos o ejercicios concretos que muestren cómo se hace.

Termina el estudio de la recta calculando el ángulo que forman dos de ellas, obteniendo las condiciones de paralelismo y perpendicularidad y la distancia entre dos puntos. Todo ello se encuentra recogido en el apartado de fenomenología.

2.3. Transformación de coordenadas

Posteriormente dedica dos capítulos del libro a los cambios de ejes de coordenadas. En el primero, el capítulo VI, que titula *Transformación de coordenadas,* trata los cambios de coordenadas entre ejes oblicuos y rectangulares; y en el segundo, el capítulo VII, titulado *Coordenadas polares*, trata las transformaciones entre ejes oblicuos o rectangulares y ejes polares.

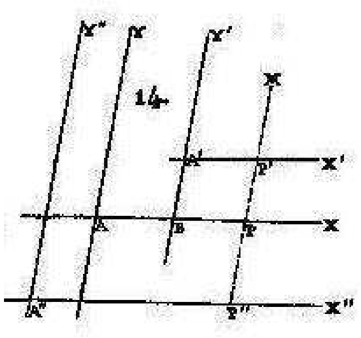
Comienza el capítulo VI con una introducción que justifica el uso de diferentes tipos de coordenadas:

> 26. Según lo que antecede se observa fácilmente que por la ecuación de una línea, es fácil determinar todos sus puntos, es decir, que se puede conocer el curso y todas las propiedades de que goza;

Esta es en realidad la esencia de la Geometría Analítica, que las ecuaciones en dos incógnitas corresponden a lugares geométricos, más que la aplicación del Álgebra a la resolución de problemas geométricos, que es lo que trata en los primeros capítulos.

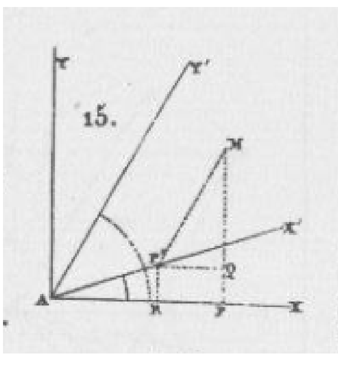
> (...) para esto no hay mas que dar valores arbitrarios á una de las variables, que generalmente es la abscisa, y levantar sobre cada una de las que se van suponiendo, la ordenada ú ordenadas que por aquel valor dé x en la ecuacion que se discute; mas como esta discusion ó exámen y construccion de la curva ha de ser mas ó menos difícil segun la ecuacion que represente, conviene encontrar la de cada línea de la manera mas simple que la relacion entre sus abscisas y ordenadas permita.
>
> Este deseo de presentar la expresión de una línea en la forma mas simple, unido á la observacion que debe haber existido al estudiar las ecuaciones de las rectas y círculos, de la sencillez que han llegado á tener cuando los ejes coordenados se eligieron situados de una manera mas conveniente que la general, que era no guardar ninguna analogía con punto alguno de dichas líneas, hace conocer ahora, la necesidad de saber referir una curva dada con respecto á unos ejes, á otros que puedan simplificar su expresión algebráica. Esta cuestion es en general la que toma el nombre de transformacion de coordenadas, y se reduce, como queda dicho, á determinar los valores que tienen las que se buscan, cuando dependen de las que se dan en la ecuacion de la curva; ó como debe decirse tratándose del álgebra, es hallar unas coordenadas desconocidas *en funcion* de otras dadas (p. 98).

En primer lugar calcula las ecuaciones para cambiar las coordenadas de un punto cuando se traslada el origen de coordenadas:



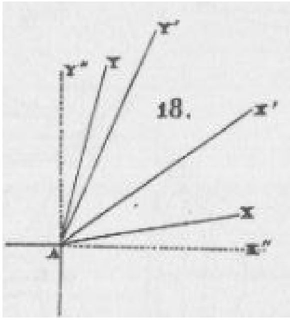
> 27. Hallar las nuevas coordenadas de un punto cuando se transporte al origen sin cambiar la direccion de los ejes (p. 98).

Considera AX y AY como los ejes originales y A' como el origen de los nuevos ejes, y halla la relación entre las coordenadas de un punto cualquiera M en los dos sistemas de coordenadas, obteniendo $x=a+x'$ é $y=b+y'$, donde x e y son las coordenadas antiguas, y las modernas x' e y' (p. 99).



Pasa a continuación a calcular las relaciones entre coordenadas nuevas y antiguas cuando el origen de los nuevos ejes se encuentra "situado en el ángulo XAY de las coordenadas negativas" (fig. 15), obteniendo, como es natural $x=x'-a$ e $y=y'-b$; de donde deduce las fórmulas generales para este cambio de ejes: $x = x' \pm a$ e $y = y' \pm b$ (p.99).

Termina explicando cómo han de aplicarse estas fórmulas dependiendo del cuadrante donde se halle el origen de los nuevos ejes, es decir, de los signos de a y b.



A continuación obtiene las ecuaciones de cambio en varios casos, en primer lugar para pasar de un sistema de ejes rectangulares a otro de ejes oblicuos con el mismo origen, obteniendo las siguientes fórmulas:
$x = x'cos.XX' + y'cosY'X; y = x'sen.XX' + y'senY'X$ (p. 101), donde x e y representan a las coordenadas del punto en los ejes rectangulares, *x'* e *y'* las coordenadas en los ejes oblicuos y *XY', XX'* son los ángulos *Y'AX, X'AX*, que los ejes nuevos forman con el eje de abscisas del sistema rectangular.

Utiliza estas ecuaciones para obtener las de cambio en los siguientes casos:

> 29. Hallar las espresiones de las coordenadas para pasar de un sistema de ejes oblicuos á otro rectangular que tenga el mismo origen (p. 101).
>
> 30. Determinar las formulas de las coordenadas de un punto para pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro también rectangular que tenga el mismo origen (p.103).

En este último caso también obtiene las fórmulas directamente, es decir, haciendo de nuevo todo el razonamiento que hizo en el primer caso pero ahora con ambos ejes rectangulares (pp.103-104).

Añade al final una observación:

> *Observacion.* Si se elevan al cuadrado los dos miembros de estas ecuaciones y se suman después, resulta
>
> $$x^2 + y^2 = x'^2\left(sen^2.XX' + \cos^2.XX'\right) + y'^2\left(sen^2.XX' + \cos^2.XX'\right)$$
>
> y como la suma de cuadrados del seno y coseno de un mismo ángulo es igual al cuadrado del radio que es la unidad, queda $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
>
> Es decir, que «las sumas de cuadrados de las coordenadas de un punto con respecto á cualesquiera ejes rectangulares, es constante:» lo que no podia menos de suceder asi, pues que cualquiera de dichas sumas de cuadrados es el cuadrado de la única distancia que existe del punto al origen común (p. 104).

También calcula las ecuaciones de cambio entre dos sistemas oblicuos con el mismo origen (fig. 18).

En este caso obtiene $x = \dfrac{x'.senX'Y - y'.senY'Y}{senXY}, y = \dfrac{x'.senXX' - y'.senXY'}{senXY}$ (p.106), siendo *AX, AY* los ejes primitivos, *AX', AY'* los nuevos, *x, y* las coordenadas antiguas y *x', y'* las nuevas. Los ángulos que aparecen son los formados por los ejes de los dos sistemas, por ejemplo *X'Y* es el ángulo *X'AY* formado por el eje de abscisas del sistema nuevo con el de ordenadas del antiguo (pp.105-106).

Termina este capítulo haciendo una observación en la que indica el procedimiento a seguir si en cualquiera de los casos anteriores hubiera que cambiar también el origen:

> *Observación.* Cuando en cualquiera de los casos de transformacion de coordenadas que hemos resuelto, hubiera que transportar el origen, que en todos se ha supuesto invariable, se aumentaría la espresion de la abscisa con la del origen, y la de la

ordenada también con la del mismo origen, como se indica en el primer caso (p.106).

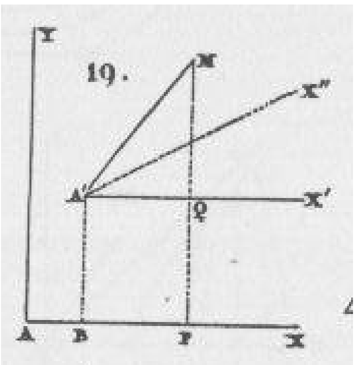
Dedica el capítulo siguiente a las coordenadas polares, como ya hemos comentado. Comienza explicando en qué consisten y definiendo sus elementos.

32. Al manifestar la manera de fijar los puntos de un plano relativamente á otros fijos ó líneas invariables trazadas en dicho plano, se vio que no solo podía conseguirse por medio de lo que viene llamándose sistema de coordenadas, sino que pudieran elegirse otras condiciones tales que determinaran completamente la situación de un punto.

Esto sucede «cuando la posición de un punto se fija por su distancia á uno invariable, y por el ángulo que forma con una recta dada;» la existencia simultánea de estas dos condiciones constituye lo que se llaman *coordenadas polares.* «La recta fija ó *eje* que ó pasa por el punto dado, ó se sustituye por una paralela tirada por él, con este mismo punto, se dice *sistema polar.* «El punto fijo al que se buscan las distancias de todos los del plano, se llama *polo,»* «y por último la distancia misma de cada punto al polo se designa con el nombre de *radio vector »* (pp. 106-107).

Tras dar las definiciones anteriores obtiene las ecuaciones para pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares cuando el eje es paralelo al eje de abscisas (p. 107, fig. 19).

Después calcula las ecuaciones para pasar de un sistema rectangular a uno polar cuando el eje de este no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados obteniendo como ecuaciones $x = a + r.\cos.(v + X''X'); \; y = b + r.sen(v + X''X')$



(p. 108), donde *a, b* son las coordenadas del polo, *r* es el radio vector, *v* el ángulo *MA'X''* que forma el radio vector con el eje, y *X''X'* el ángulo *X''A'X'* que fija la posición del nuevo eje polar respecto al antiguo.

Por último estudia el cambio de un sistema de ejes oblicuos a uno polar (p. 108).

Para calcular las ecuaciones de cambio utiliza lo hallado en puntos anteriores:

Si por el origen del sistema oblicuo dado se imaginan dos ejes rectangulares, las fórmulas halladas para pasar de uno á otro, y las que se acaban de determinar para pasar del rectangular al polar, darán eliminando las coordenadas rectangulares que se han introducido como auxiliares, la relación ó dependencia que ha de existir entre las oblícuas y las polares (p. 108).

Considera el sistema oblicuo *AX, AY,* el rectangular *AX', AY'* del mismo centro y el polar de polo *A* y eje paralelo a *AX*. Siguiendo el método expuesto anteriormente obtiene como ecuaciones:

$$y = \frac{r.sen(v' - X'X)}{sen(X'Y - X'X)}; \; x = \frac{r.sen(X'Y - v')}{sen(X'Y - X'X)} \text{ (p. 109)}$$

siendo *r* el radio vector, *v'* el ángulo que forma este con el eje de abscisas *AX* paralelo al eje polar y el resto de los ángulos los que forman los distintos ejes de coordenadas entre sí, por ejemplo $X'X$ es el ángulo $X'AX$ que forman los ejes de abscisas de los sistemas rectangular y oblicuo. Señala que estas diferencias se pueden sustituir en cada caso por los ángulos resultantes:

> Espresiones en las que formando la figura correspondiente, se pueden reemplazar las diferencias entre ángulos que existen por los verdaderos ángulos que resultan, y lo son todos con respecto á los ejes oblicuos dados (p. 109).

Termina el capítulo con tres observaciones:

> *Observación.* 1.ªCuando se tenga precisión de variar tambien el origen ó polo de estas coordenadas, se deberá aumentar la abscisa x en la del polo a, y la ordenada en b (p. 109).

Las otras dos observaciones consisten en hallar la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares. En el primer caso si el polo se sitúa en el centro de la misma y en el segundo si se sitúa en el "extremo del diámetro" (pp. 109-110), ecuaciones que quedan fuera de nuestro estudio.

4.7.3.2. Sistemas de representación

En esta obra solo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico, que aparece en forma de expresiones algebraicas; y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente, las construcciones geométricas.

No utiliza tablas, ni siquiera para representar una recta, sino que da a x e y dos valores y obtiene los puntos correspondientes, pero no valores cualesquiera sino $x=0$, $y=0$. Si para $x=0$ se obtiene $y=0$ explica que entonces la recta pasa por el origen y que basta dar $x=1$ y hallar la abscisa correspondiente, pero no recoge las coordenadas de los puntos obtenidos en forma de tabla (ER).

Define dimensión de una expresión algebraica, ecuaciones homogéneas (U), ejes de coordenadas, coordenadas de un punto y los elementos que definen un punto en coordenadas polares (C). Además da la definición de lugar geométrico (LG).

Las explicaciones de las construcciones geométricas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E).

En esta obra no encontramos teoremas, y solamente da conclusiones o resultados generales en forma de enunciado en algunos problemas puntuales como por ejemplo cuando calcula el baricentro de un triángulo (PRDT), o cuando obtiene la fórmula para calcular la distancia de un punto al origen (PRD); pero en general los utiliza como encabezamiento de cada uno de los puntos, pasando a continuación a desarrollarlo. Podemos ver esto a lo largo de todos los capítulos y no solo en los problemas.

Se hace uso del lenguaje simbólico continuamente, como no puede ser de otra manera al tratar de traducir los problemas geométricos al lenguaje algebraico. En los tres primeros capítulos nos encontramos la construcción de las fórmulas y el uso de ecuaciones en la resolución de los problemas determinados de geometría (E, PRDT).

En los capítulos VI y VII encontramos diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la tangente del ángulo que forman dos rectas, de la distancia entre dos puntos y las fórmulas de cambio de coordenadas, entre otras muchas (ER, PRAN, PRDI, C).

Los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él.

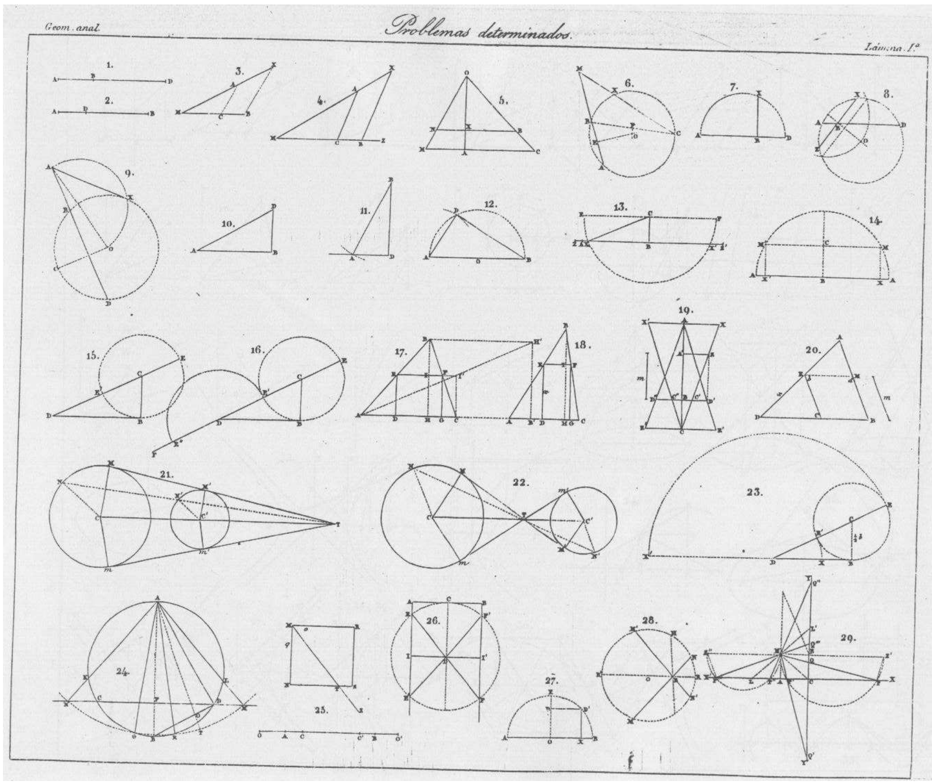


Figura 57: Lámina I. Tratado completo de Matemáticas. A. Gómez Santa María

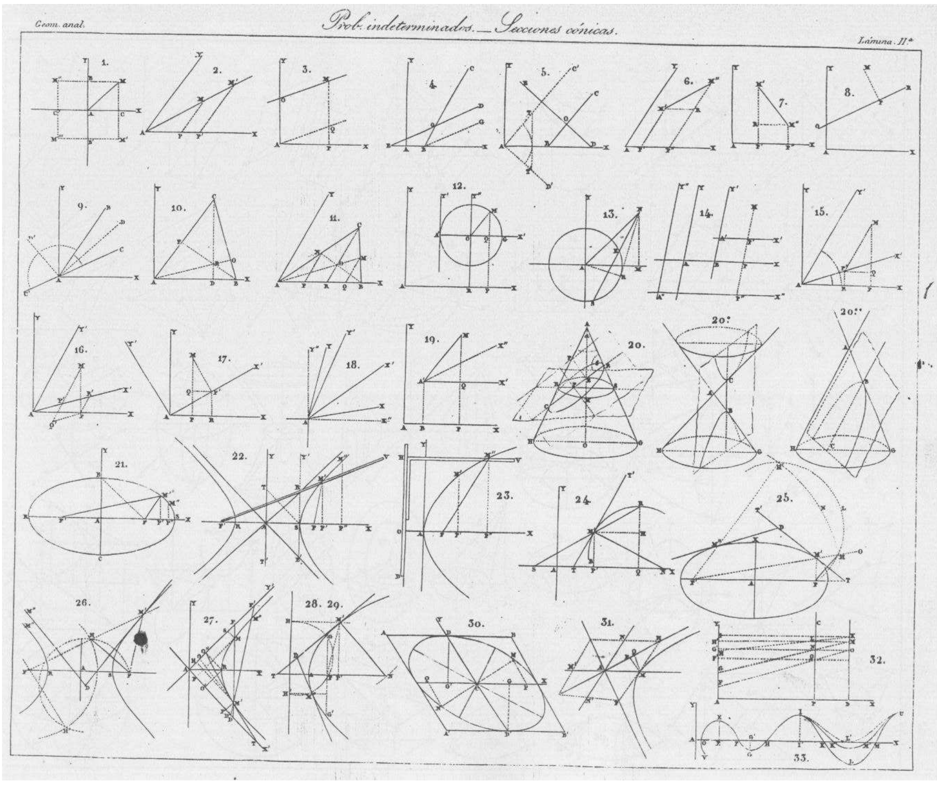


Figura 58: Lámina IIª. Tratado completo de Matemáticas. A. Gómez Santa María

Como en otras obras hay de dos tipos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas determinados resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución (PR).

El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, de diferentes tipos, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc.; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso, en sus razonamientos (SN, E, C, N, ER).

4.7.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, y en particular geométrico, pero podemos distinguir, en principio dos grandes grupos de problemas, que él mismo distingue al nombrarlos como determinados e indeterminados.

Los primeros consisten en problemas geométricos concretos en los que el autor muestra las construcciones geométricas de diferentes expresiones algebraicas y de las soluciones negativas, es decir le sirven como ejemplo de la teoría expuesta en los capítulos anteriores (PRDT, SN). Los problemas indeterminados en cambio consisten en la obtención de fórmulas generales para resolver problemas más genéricos como pueden ser obtener la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, el ángulo que forman dos rectas o la distancia entre dos puntos (E, PRAN, PRD, PRP).

Pero dentro de este grupo de problemas y tras obtener diversas ecuaciones de la recta y determinar fórmulas para calcular distancias entre elementos del plano, ángulos, puntos de corte, etc. (ER, PRI, PRP, PRD, PRAN) propone y resuelve dos problemas que podrían considerarse como determinados, pero que él incluye dentro de los indeterminados pues utiliza los conceptos explicados en este capítulo para resolverlos.

Por tanto podemos clasificar los problemas incluidos en esta obra en tres tipos, atendiendo a su fenomenología. Como siempre incluimos el enunciado y se presentamos el proceso de solución de los que consideramos más representativos:

1. **Para mostrar la construcción de las expresiones algebraicas y las soluciones negativas (PRDT)**

En el capítulo III, titulado *Problemas determinados de Geometría*, resuelve catorce problemas. Comienza el capítulo justificando la necesidad de incluir gran cantidad de ellos:

> El medio mejor de conocer las interpretaciones geométricas que tienen las espresiones del álgebra, medio que por otra parte facilita las construcciones y suministra las ideas oportunas para resolver los casos que pudieran ocurrir, es el hacerlo con el mayor número de problemas que pueda proporcionarse (p. 28).

Se incluyen a continuación los enunciados de todos ellos:

> *1.- Dadas la base y la altura de un triángulo, determinar el lado del cuadrado inscrito en dicho triángulo* (p. 28).

> *2.- Dadas la base y la altura de un triángulo, inscribir un rectángulo, conocida la relación de sus lados* (p.30).

3.-Por un punto dado respecto a dos paralelas, tirar una secante de modo que la parte interceptada por aquellas sea igual a una recta dada (p.31).

4.- Dado un triángulo, tirar paralelamente a un lado una recta cuya longitud sea determinada (p.35).

5.- Dados dos círculos, tirarles una tangente común (p. 36).

6.- Construir un rectángulo dada su superficie y la diferencia de sus lados (p.39).

7.- Dividir una recta en media y extrema razón (p.40).

8.- Dado un diámetro y una cuerda perpendicular, tirar dese el extremo más lejano del diámetro, otra cuerda cuya parte comprendida entre la primera y su arco, sea de una magnitud determinada (p.43).

9.- Dividir una recta dada en dos partes tales que el rectángulo que formen sea igual a un cuadrado conocido (p.45).

10.- Dadas dos paralelas y una perpendicular, tirar una oblícua que haga a la mitad de dicha perpendicular, media proporcional entre los segmentos de las paralelas comprendidos entre dichas perpendiculares y oblícua (p.47).

11.- Dado un punto dentro de un círculo, tirar por él una cuerda cuyos segmentos se hallen en la razón de m a n (p.48).

12.- Hallar dos rectas cuya suma de cuadrados y el rectángulo que formen, sean conocidos (p.50).

13.- Hallar el sector esférico cuyo segmento tenga el mismo volumen que el cono correspondiente (p.31).

14.- Dadas dos perpendiculares y un punto en uno de sus ángulos, equidistante de ambas, tirar por él una recta cuya parte comprendida entre las perpendiculares sea de una magnitud dada (p.32).

La gran mayoría de ellos están resueltos por otros autores, especialmente Alberto Lista y Zorraquín, y la solución se ha incluido en el análisis de sus obras, por esa razón no la volvemos a poner aquí. No obstante añadimos la de algunos de ellos pues o bien la solución o bien la interpretación que Santa María hace de ella es distinta de la de otros autores. Es el caso de los problemas 1, 2, 3, 8 y 12. En la solución de cada uno de ellos especificamos en qué obras está resuelto y qué aporta de nuevo este autor.

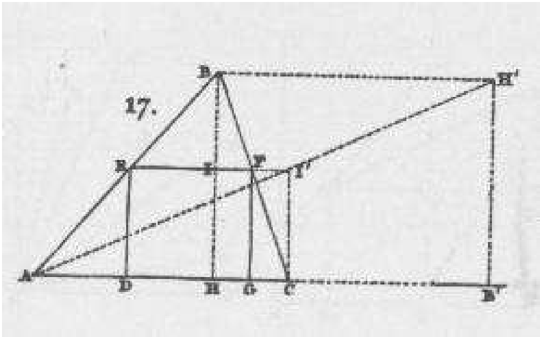
También incluimos la solución de los problemas 5 y 6 que son novedosos.

Por otra parte el problema 4 está resuelto por Lacroix y Vallejo, el 7 por Zorraquín, 9, 11 y 13 por Lista, el 10 por Lista y Zorraquín y el 14 por Lacroix.

El esquema de resolución que sigue en estos problemas es el de otros autores de la época: supone el problema resuelto y lo plantea geométricamente (PG), basándose en este planteamiento obtiene la ecuación correspondiente, que resuelve algebraicamente (PRA) y seguidamente construye la solución obtenida mediante los métodos geométricos que ha explicado en el capítulo anterior (RG).

Prob. 1º. Dadas la base y la altura de un triángulo, determinar el lado del cuadrado inscrito en dicho triángulo.

En este problema, resuelto también por otros autores, se ve un ejemplo de construcción de una cuarta proporcional. Lo incluimos porque la construcción geométrica de la solución es distinta a la que encontramos en otras obras.



PG: Como siempre supone resuelto el problema. Utilizando la semejanza de triángulos obtiene la proporción:

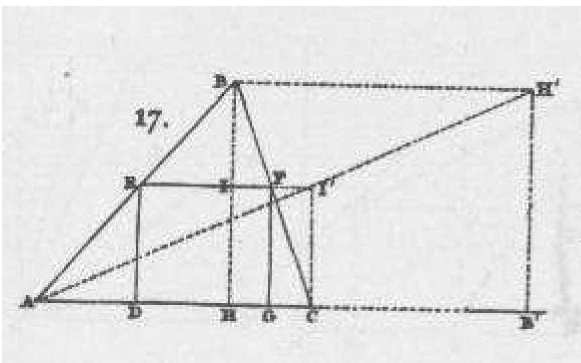
AC: BH::EF:BI.

PRA: Tomando $AC = b\ EF = x\ BH = h$ $AC = b\ EF = x\ BH = h$ y $BI = h - x$ obtiene de la proporción anterior: $b : h :: x : h - x$ y operando $x = \dfrac{bh}{b+h}$ (p.29).

RG: Una vez obtenido el valor de *x* hace la consideración de que si los datos que se conocen son numéricos para calcular *x* simplemente habrá que operar con ellos, pero si son líneas habrá que construir la solución:

> Luego si las cantidades *b* y *h* que han de hacer conocer el lado del cuadrado son números que representan los valores de la base y altura del triángulo apreciadas con la mitad de longitudes, el *valor* de la incógnita está también conocido por el cociente de su producto entre su diferencia: pero si las cantidades *b* y *h* que figuran en esta formula son las lineas en sí mismas, la longitud del lado del cuadrado puede hallarse gráficamente, construyendo una cuarta proporcional a *b+h,* á *b* y á *h*(p.29).

Construye la cuarta proporcional a *b, h* y *b+h*, utilizando la segunda construcción explicada (fig. 4, p. 7). Para que quede situada correctamente en el dibujo utiliza la base del triángulo, que está dada, como uno de los segmentos a partir de los cuales construye los triángulos necesarios para poder aplicar el Teorema de Tales.



> (...) Pero al proceder á semejante construcción, deberá preferirse si es posible, un ángulo tal, que dé la línea que se busca colocada en su lugar respecto al triángulo. Esto se logra prolongando la base $AC = b$ en una porción $CB' = h$, levantando en *B'* la perpendicular $B'H' = h$, tirando la *AH'* y levantando en *C* otra perpendicular hasta esta. Por consiguiente la paralela I'E á la base, dará en sus intersecciones con los lados *BC* y *BA* del triángulo dos vértices del cuadrado inscrito, y la porción *FE* comprendidas entre dichas intersecciones, será por si, uno de los lados del mismo (p.29).

Santa María no comprueba que la solución así construida es la cuarta proporcional buscada, como hacen otros autores, o él mismo en otros problemas.

Tras esta construcción hace la observación de que todos los triángulos de la misma base y altura tienen la misma solución, para construirlos basta tomar un punto cualquiera en la recta *BH'* como tercer vértice del triángulo.

También señala que en vista de la solución geométrica se deduce que si el triángulo es obtusángulo en *C* o en *A*, no tendría solución ya que al ser los ángulos del cuadrado rectos hay que levantar una perpendicular a la base y si un lado forma ángulo obtuso esta perpendicular saldría fuera del triángulo, limitación que no se observa en la solución algebraica (p.29). Esta observación no la hacen otros autores al resolver este mismo problema.

> Esta limitación evidente, no podia resultar escrita en la expresión de *X*, porque habiendo nacido de la única condición del ser semejantes los triángulos *BEF* y *BAC*, y gozando de esta propiedad aun en el caso que acabamos de suponer, claro es que la fórmula que dá á conocer la longitud de *X* es aplicable sin restricción alguna (p. 30).

Tras este problema plantea otro que es una generalización del mismo.

Prob. 2. Dadas la base y la altura de un triángulo, inscribir un rectángulo, conocida la relación de sus lados (p. 30).

Como decimos este problema lo presenta como una generalización del problema 1, por lo que no construye la solución obtenida, que es $x = \frac{bh}{nh+b}$, donde n es la relación entre los lados del rectángulo, y b y h la base y altura del triángulo respectivamente como en el problema anterior, pero lo incluimos porque en él hace uso explícito de la unidad:

> La construcción en el problema presente es enteramente la misma del que le precede (…).
>
> Únicamente debe recordarse que el producto nh puede mirarse como el de la recta h repetida el *número* n de veces, ó bien como el de dos rectas cuyas longitudes fueran dadas. En el primer concepto nh es una sola linea, n veces mayor que h; mientras que en el segundo por aparecer dos dimensiones, seria preciso imaginar á nh dividido por la unidad en esta forma $\frac{nh}{1}$ la cual hace ver que es una cuarta proporcional á 1, h y n que habrá de determinarse aisladamente para operar despues con ella como lo exige la construcción de x (p. 31).

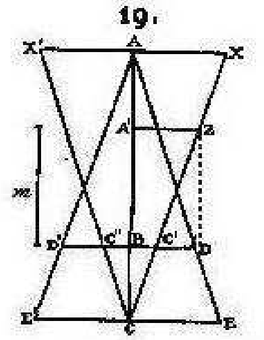
Prob. 3. Por un punto dado respecto á dos paralelas, tirar una secante de modo que la parte interceptada por aquellas sea igual á una recta dada (*m*)[43].

Este problema también lo resuelven Alberto Lista y Zorraquín, pero lo incluimos aquí no solo porque la solución propuesta por Santa María sea distinta a la de los otros dos autores sino porque en él vemos la importancia de la construcción geométrica, ya que cambiará la ecuación obtenida inicialmente al ver que el número de soluciones no

[43] En realidad es un segmento, llama indistintamente a las rectas: rectas, líneas o segmentos.

coincide con lo obtenido geométricamente. Además vemos la construcción de segmentos negativos.

19.



PG: Supone resuelto el problema, considera *DD'* y *EE'* las paralelas dadas y *A* el punto conocido, si *AE* es la *recta* pedida aplicando semejanza de triángulos se obtiene la proporción: *AB: BC::AD: DE*. Sustituyendo *AB=a BC=b* y tomando *AD=x* como incógnita se tiene la expresión algebraica:

PRA: *a:b::x:m* ($\frac{a}{b}=\frac{x}{m}$) y despejando: $x=\frac{am}{b}$.

RG: Construye la cuarta proporcional a *a, m* y *b*, utilizando la primera construcción explicada. Traza la perpendicular a las paralelas dadas por el punto *A*. Tomando centro en *C* y radio *m* (longitud que debe quedar entre las paralelas) traza un semicírculo que intercepta a la recta *DD'* en dos punto *C'* y *C''*, y por esos puntos traza dos rectas *CX, CX'*. Aplicando los criterios de semejanza de triángulos a los triángulos *XCA* y *C'CB* por un lado y a *X'CA* y *C''CB* por otro se tiene que *X'C''* y *XC'* son soluciones posibles para *x*, pero no pasan por *A*. Trazando paralelas a ambas rectas por el punto *A* se obtienen dos posibles soluciones para el problema: *AD* y *AD'*.(pp. 31-32)

Tras construir la solución comprueba algebraicamente que es la buscada:

> En efecto en los lados *CA* y *CX* del ángulo *ACX* se han colocado las dimensiones *CB=b, BA=a* y *CC'=m* por lo que se ha procedido en él á buscar una cuarta proporcional á estas longitudes tan luego como se ha trazado la *BC'* que une los consecuentes de la proporcion, y se ha tirado por estremo *A* del antecedente conocido, la *AX* paralela á dicha *BC'*.
>
> Esto mismo resulta de comparar los triángulos semejantes *CBC'* y *CAX* pues dan la proporción siguiente *CB:BA::CC':C'X*, ó poniendo por las lineas sus valores *b:a::m:C'X;* de donde resulta $C'X=\frac{am}{b}$ [44] (p. 32).

Tras la construcción hace dos observaciones importantes:

En primer lugar que la construcción nos da dos soluciones, sin embargo la ecuación planteada sólo nos daba una, por tanto busca una ecuación de segundo grado con esas soluciones.

> Si al hallar la cuarta proporcional á *b, m* y *a,* se hubiese procedido á su construccion en un ángulo cualquiera aislado ó independiente de las paralelas y punto conocido, se habría tenido que tomar seguidamente como rádio la recta hallada, y haciendo centro en *A* trazar un arco que cortase á la paralela superior *C''C'*; y como este procedimiento produciría dos intersecciones, una á cada lado de la perpendicular *AC* (…) se obtendrían dos soluciones al tirar las secantes *AD* y *AD'* á dichos puntos de interseccion del arco. Estas dos mismas soluciones las ha presentado tambien la construccion que se ha empleado en la figura, (…)

[44] Inicialmente toma AD=x, pero como AD=C''X' y C'X= AD', por ser paralelas cortadas por paralelas, basta demostrar que C'X o C''X' son solución para demostrar que el resto lo son.

> Sin embargo la espresion algebraica no presentaba mas que un valor, como solucion del problema, y esta circunstancia hace conocer que puede elegirse otra incógnita que produzca entre las líneas que hemos relacionado, una ecuacion de segundo grado cuyas raices manifiesten la circunstancia de existir dos secantes (p. 33).

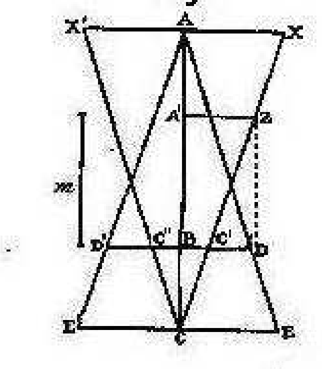
Y busca tal ecuación:

PG: (…) En efecto, si se hubiese mirado como incógnita la recta *BD,* se hubiera obtenido en el triángulo rectángulo *ABD* para espresion de la hipotenusa *AD,* $AD = \sqrt{a^2 + x^2}$, y de la proporcion *AB:BC::AD: DE*, (p. 33)

PRA: (...) que es esta otra $a : b :: \sqrt{a^2 + x^2} : m$,se deduciría que $am = b\sqrt{a^2 + x^2}$:

ecuación que dá (...) $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{m^2 - b^2}$ (pp. 33-34)

19.



RG: Al construir las nuevas soluciones aplica la construcción de cantidades negativas explicada de forma teórica en p. 26.

> Esta espresion hace ver: 1º que los dos valores de *x* son iguales y de signo contrario; luego después de construido dicho valor ó magnitud, deberá colocarse, no solo desde B hacia la izquierda como se imaginó situada esta línea, sino también desde B hacia la derecha, ó en sentido contrario al primero, para satisfacer á la espresion negativa[45].

También utiliza la construcción de un radical:

> 2ºTambién se observa que para obtener la longitud de *x,* se ha de hallar ante todo el cateto de un triángulo rectángulo, del que *m* es hipotenusa, y *h* el otro cateto: lo que produciría la línea *BC'* que llena estas condiciones, pues que en el triángulo rectángulo *CBC* 'la hipotenusa *CC'* es *m*y el cateto *CB* es *b;* y por último, habría que buscar una cuarta proporcional á *b*, al radical hallado, ó sea *BC'* y á *a;* para lo que pudiera muy oportunamente emplearse el ángulo *ACX*, colocando la distancia *AB=a* desde *C* hasta *A'* , y tirando la *A'Z* paralela á las dos dadas; dicha *A'Z* sería la incógnita *x* que se busca. Asi que se bajaría desde *Z* la perpendicular *ZD'* y *BD'*[46]sería la dimensión que había de colocarse desde *B* á uno y otro lado, para tirar las dos oblícuas *AD* y *AD'*, que por equidistar de *B* serían iguales (p. 34).

Vemos ahora por qué plantea esa solución geométrica en la primera parte, solución más compleja que la propuesta por Lista, la razón es que utiliza la misma construcción para las soluciones de la ecuación de segundo grado.
Por último interpreta de forma geométrica lo que sucede cuando varía *m.*

> La espresion de *x* hace ver por último que *m* ha de ser mayor que *b*, es decir, que *DE* ha de tener más longitud que la distancia *BC* entre las paralelas, porque el límite de la relacion entre *m* y *b* que es el de ser iguales, lo que reduciría el radical á cero, daría como única secante la perpendicular *AC* que cumple con la condicion de dar por segmento interno la parte *BC=b*, y cuyas dos distancias *BD* y *BD'* á sí

---

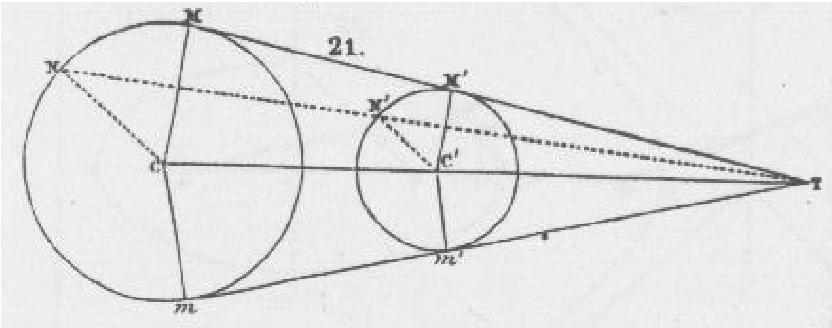
[45] Sería al revés en el dibujo.
[46] En el dibujo serían *ZD* y *BD.*

misma serían nulas, que es el valor que quedaría á x en tal supuesto. Pasado este límite de $m=b$, si m fuera menor que b, el radical sería imaginario, lo que haría ser el problema imposible; en efecto, no existe recta alguna que deje entre las paralelas una parte menor que el de la perpendicular, que es la más corta (p. 35).

Probl. 5: Dados dos círculos, tirarles una tangente común.

Primero resuelve el problema para la tangente exterior y posteriormente para la interior.

Sean *G* y *C* los círculos dados, cuyos radios *CM* y *C'M'* serán conocidos asi como la distancia *CC'* de sus centros; es claro que la tangente que se pide puede tener dos posiciones, ó tocando á los dos círculos por un mismo lado, y entonces se llama esterior, ó dejando uno á una parte y el otro á la otra, en cuyo caso se dice que la tangente es interna.



PG: Supone el problema resuelto. Considera que la recta *MM'* es la solución y *T* el punto de corte de dicha recta con la recta que une los centros. Toma como incógnita la distancia *CT*. Los triángulos *TCM* y *TC'M'* son semejantes, por tanto se tiene *CM:C'M'::CT:C'T.*

PAR: Sustituyendo cada segmento por su medida: *CM=r, C'M'=r'* y *CT=x,* se tiene que *C'T=x-a*, y por tanto *r:r'::x: x-a* de donde $x = \dfrac{ra}{r-r'}$.

RG: Por tanto la solución buscada (distancia *CT*) es la cuarta proporcional entre *r, a* y *r-r'*.

Si al construir esta cuarta proporcional se quisieran emplear, como en los problemas anteriores, las líneas dadas con los círculos, se tirarían dos radios *CN* y *C'N',* paralelos entre si, en cualquiera dirección; y la secante *NN'* prolongada, iría á cortar á la *CC'* en el punto *T,* por donde pasa la tangente: esto quiere decir que la distancia *CT* hallada por este medio, es la *x* ó cuarta proporcional que se ha determinado por el cálculo. (p. 37)

Y comprueba algebraicamente que el punto hallado corresponde efectivamente a la solución buscada.

Para persuadirse de esto, basta observar que siendo los radios *CN* y *C'N'* paralelos, "los triángulos TNC y TN'C' son semejantes, y de ello se deduce que CN:C'N'::CT:CT "ó poniendo sus representaciones algebraicas $r:r'::CT:CT-a$,

que es la misma proporción que produjo la espresion de *x;* y da $r \times CT - ra = r' \times CT$

> ó pasando los términos en *CT* al primer miembro $r \times CT - r' \times CT = ra$ que es lo mismo que *CT (r—r')=ra* de cuya espresion se saca por último que $CT = \frac{ra}{r - r'}$
>
> que es el valor encontrado para *x* (p. 37).

Hallado *T* basta tirar la tangente, que se reduce al problema de tirar una tangente a un círculo por un punto exterior. Hace notar que este problema tiene dos soluciones, "una tangente superior y otra inferior, por consiguiente deben hacerse las mismas consideraciones que en el problema de tirar desde un punto á dos paralelas una secante cuya parte interceptada por ellas, sea de una magnitud determinada" (problema 3) (p.38).

Tras esto hace una observación en la que explica geométrica y algebraicamente las diferentes soluciones dependiendo de los valores de *r* y *r'*.

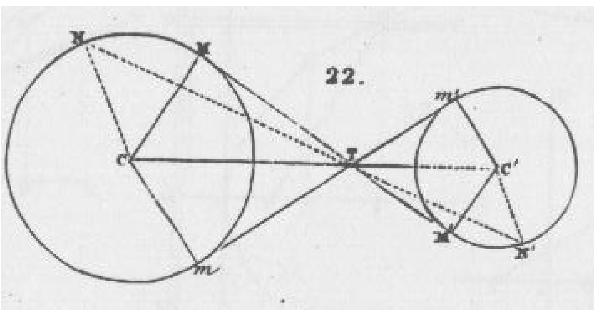
Comienza diciendo que al tener en el denominador *r-r'* es necesario que *r'*<*r,* ya que "estas dos líneas en su resta han de producir una cantidad negativa" (p. 38) y estudia las variaciones del problema tanto analítica como geométricamente cuando varía el radio de la circunferencia pequeña y por tanto esa diferencia, concluyendo que ambas coinciden:

> (…) Así, si permaneciendo constantes *r* y *a*, es decir el radio del círculo *C* y la distancia *CC'* de los centros, se supone que *r'* ó *C'M'* va aumentando, el punto *T* se alejará progresivamente de los dós círculos; la espresion algebráica dice lo mismo; porque estos supuestos hacen constante el numerador; y ya es sabido que un quebrado ó cociente, aumenta á medida que el denominador disminuye. (p. 38)

En el caso *r'=r,* geométricamente se tendría que la tangente es paralela a la recta que une los centros, es decir, "que la encontraria en el infinito: la espresion manifiesta tambien que al hacerse cero el denominador, su valor seria infinito" (p. 38).

Por último, y aunque empieza la exposición diciendo que la diferencia debe ser positiva estudia el caso en que no lo es:

> Y por último, si *r* fuera menor que *r*', el denominador resultaría *negativo*, y por consiguiente la expresion de *x* seria tambien negativa; semejante signo indica un cambio de posición en la distancia *CT,* esto es, exige que se tome á la izquierda del círculo cuyo radio se tomo *r*, y no á su derecha; y una vez tomada en cuenta esta situacion, seria necesario contarla desde el centro *C'* pues que para hallar el valor del denominador, prescindiendo de su signo, siempre habria de ser necesario el sustraer el radio menor del mayor. El álgebra manifiesta lo mismo, pues dice con el valor negativo que la cuestion es imposible de la manera que se habia fijado, pero que se hará posible tan luego como no se exija que las tangentes corten á la línea central del lado del círculo mas grande, como simplemente lo manifiesta la razon (p.38).



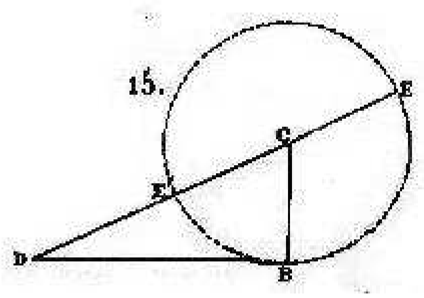
Por último resuelve el problema para el caso de las tangentes interiores (fig. 22, pp.39-40), que construye de forma análoga tomando los radios *CM* y *CM'* en los puntos de tangencia. *CT=x* será ahora $x = \frac{ra}{r' + r}$, el punto de corte *T* de la tangente con la recta que une los centros se construye de forma análoga a la anterior tomando una secante *NN'* a ambas de manera que *CN* y *CN'* sean radios paralelos.

Prob. 6: Construir un rectángulo dada su superficie y la diferencia de sus lados.

En este problema el autor construye las soluciones de una ecuación de segundo grado utilizando la construcción utilizada por Descartes en su *Geometría*, salvo que Descartes ignora la solución negativa alegando que es *falsa* (BOYER, p.428) y Santa María construye las dos.

Comienza planteando la ecuación:

> **PG:** Sea x el mayor de los lados y su esceso sobre el menor sea $2a$ si llamamos b el lado del cuadro de igual superficie que la del rectángulo que se pide, es evidente que multiplicando el lado mayor x del rectángulo por el menor $x-2a$ resultará una superficie igual al cuadrado de b, es decir que
>
> **PARA:** $x(x-2a) =b^2$, $x^2-2ax-b^2=0$, de la cual se deduce inmediatamente que $x = a + \sqrt{a^2 + b^2}, x = a - \sqrt{a^2 + b^2}$ (pp. 39-40).



RG: Señala que estas soluciones son las mismas que las halladas cuando se estudió la ecuación de segundo grado y que por tanto hay que utilizar la construcción explicada entonces.

> Estos valores son los mismos que se han empleado al examinar y analizar las ecuaciones de segundo grado, por consiguiente las construcciones que deben emplearse son las manifestadas entonces: es decir, que en la figura 15, *DE,* representa la primera de estas raices, mientras que la segunda es *DE'*.[47]La esistencia de este segundo valor, manifiesta que estando el radicando restado de a representa el lado menor del rectángulo que se busca (p. 40).

Para comprobar que esas son las soluciones buscadas utiliza la tercera construcción de la media proporcional explicada (p. 17, fig. 9), que se basa en que la tangente es media proporcional entre la secante que sale del mismo punto y su parte externa. Teniendo en cuenta esta propiedad se tiene que "$DE{\cdot}DE'=DB^2$ que aquí será b^2pues que según la construcción se ha tomado DB igual á b" (p. 40).

Finalmente da la interpretación geométrica de las dos soluciones:

> Sin embargo es notable el que al buscar un valor para x hayamos encontrado dos, que satisfagan á la ecuacion y al problema cuando solo parecia existir uno. Pero desaparece la sorpresa de la aparicion de la segunda línea, sin mas que recordar que al escribir en ecuacion una cuestion cualquiera, no se hace otra cosa que fijar cierto numero de condiciones que ha de llenar precisamente la cantidad que se busca; por

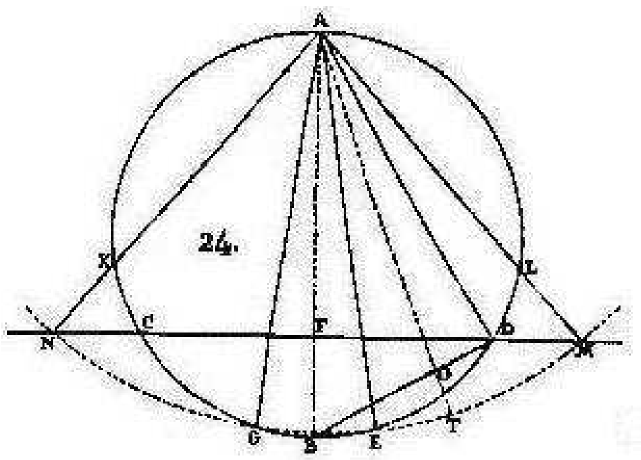
[47] Nota: esto no es totalmente cierto, pues gráficamente $DE' = \sqrt{a^2 + b^2} - a$ y no al revés como nos da la solución algebraica

> consiguiente, si estas condiciones pueden ser satisfechas por diversas cantidades, el álgebra las presentará todas aunque al establecer la ecuacion solo se pensase en la existencia de una (pág. 40).

Esta idea de que las soluciones negativas indican un problema más general que el planteado también la manifiestan otros autores como hemos visto.

Como vemos le preocupa mucho el hecho de que el número de soluciones por las vías algebraica y geométrica no coincidan, así si geométricamente obtiene dos soluciones y algebraicamente sólo una busca otra ecuación que le de las dos, si por el contrario obtiene dos algebraicamente, como es el caso, construye las dos geométricamente y justifica la obtención de las dos mediante el álgebra cuando aparentemente sólo existe una, como en este caso.

Problema 8: Dado un diámetro y una cuerda perpendicular, tirar desde el estremo mas lejano del diámetro, otra cuerda cuya parte comprendida entre la primera y su arco, sea de una magnitud determinada (p.43).



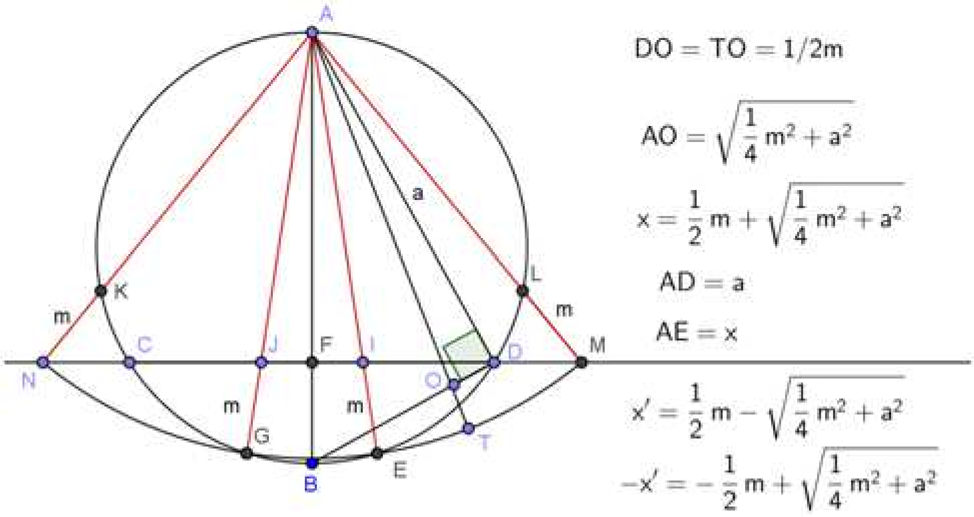
Este problema está resuelto por Lista y Zorraquín, y la solución e interpretación de las soluciones negativas que hace Santa María es la misma que la de Alberto Lista, pero a diferencia de este último el autor que nos ocupa no trabaja con cantidades directas e indirectas en ningún momento, sino que considera que las soluciones negativas indican una construcción en sentido contrario y eso aplica. Tampoco trabaja con dos incógnitas como en el caso de Lista.

PG: Toma *AB* como el diámetro dado y *CD* la cuerda que le es perpendicular. Supone el problema resuelto. Sea *AE* la *línea* que cumple con la condición de que el segmento interceptado entre la cuerda y el arco sea igual a una magnitud dada *m*. Sea *IE* ese segmento.(El punto *I* no aparece en el dibujo original). Supongamos *AD=a* (conocida) y *AE=x*, por tanto *AI=x-m*. Los triángulos *ADE* y *ADI* son semejantes porque tienen el ángulo *A* en común y los ángulos *AED* y *ADI* son iguales ya que son iguales a los arcos *AD* y *AC* sobre los que se hallan inscritos respectivamente, y ambos arcos son iguales por ser el diámetro y la cuerda perpendiculares. Por tanto aplicando semejanza de triángulos se tiene *AE: AD::AD: AI* (p. 43).

PRA: (...) "sustituyendo por estas líneas sus representaciones *x:a::a:x-m*" y operando se obtiene la ecuación $x^2 - mx = a^2$, que tiene como soluciones: $x = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + a^2}, x = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} + a^2}$ (p. 44)

RG: Representa en primer lugar la solución positiva, para ello dados el diámetro *AB* y la cuerda *CD* traza las cuerdas *AD* y *BD* que forman un ángulo recto por estar inscrito sobre un diámetro, toma el punto *O* sobre la cuerda *BD* de manera que

$DO=\frac{m}{2}$, por tanto la hipotenusa del triángulo así formado cumple $AO=\sqrt{\frac{m^2}{4}+a^2}$.



Prolonga dicha hipotenusa hasta *T* de manera que $OT=\frac{m}{2}$, con lo que se obtiene $AT=$ $\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}+a^2}$, valor que se quería construir. Tomando centro en*A* y con radio *AT* describe el arco *EG* que corta a la circunferencia dada en los puntos *E* y *G*. Las cuerdas *AE* y *AG* cumplen las condiciones del problema (p.44).

Esta vez, al obtener dos soluciones no busca una ecuación de cuarto grado que de las dos, si no que dice que la solución geométrica es más general:

> Se ve en este ejemplo que para un solo valor de *x* se han obtenido dos líneas *AE* y *AG* que solo varian en su situacion respecto al diámetro *AB;* esto quiere decir que aquí la geometría ha resuelto con mas generalidad que el álgebra la cuestion que nos ocupa, ó lo que es lo mismo, que la construccion de la línea incógnita puede ser indiferente en cualquiera de las dos partes simétricas en que el diámetro divide á la figura (p.44).

Pasa después a estudiar el caso en que la parte interceptada por la cuerda y el arco fuese máxima, o mayor que este valor máximo, obteniendo que en estos casos la solución es única o no existe. Sólo lo hace de forma geométrica en este caso:

> Si la condicion que ha de satisfacer la cuerda *AE* fuese que la parte interceptada por la otra cuerda y su arco fuese igual á *FB*, es decir, fuese máxima, es evidente que el círculo descrito desde *A* con un rádio igual al diámetro *AB* no cortaría a la circunferencia dada, mas que en el punto *B*: por consiguiente al hacerse tangentes ambas circunferencias, los dos valores de *x* se hubieran reducido a uno solo. Si pasado este límite se exigiese que la parte comprendida entre la cuerda y su arco

> fuera mayor que *FB*, es evidente que el círculo trazado desde el centro *A* con un rádio mayor que el diámetro *AB* no cortaría jamás á la circunferencia propuesta, en cuyo caso el problema sería imposible (p.44).

Vemos que en este caso, como ya hemos dicho, no busca la solución algebraica que pruebe esto.

Pasa a continuación a construir la solución negativa: (SN)

> En cuanto al valor negativo de x es necesario restar de $\frac{m}{2}$ el radical representado en la figura por *AO*, lo cual quiere decir que si con el rádio *AT* se cortaba al círculo dado en *E* y *G* antes que á la cuerda, ahora al contrario deberá atravesar á esta antes que al círculo al caminar desde *O* en sentido opuesto al que llevaron los arcos anteriores, luego se ve que prolongando la cuerda *CD* fuera del círculo, y el arco trazado desde *A* con el radio *AT,* siéndolo desde *T* en la direccion de alejarse de dicho círculo, se encontrarán en *M* y *N* dos puntos, á donde dirigiendo las cuerdas *AM* y *AN* resultarán iguales al valor negativo de x (p. 45).

Es decir, en vez de quitar a la hipotenusa la cantidad $\frac{m}{2}$ y tomar esta medida como radio, cosa que hizo en el problema anterior con la solución negativa, interpreta esta como trazar el arco en sentido inverso al anterior, pero con el mismo radio, y que el segmento interceptado es exterior a la circunferencia y no interior. Haciéndolo con el radio menor tendríamos otra circunferencia que cortaría a la dada en los puntos *L* y *K,* y prolongando las cuerdas *AL* y *AK* veríamos que, efectivamente, el segmento interceptado entre la cuerda y el arco es exterior a la circunferencia, y no interior.

En este caso sí comprueba que la solución geométrica es válida, hace una mezcla entre comprobación algebraica y geométrica:

> En efecto, siendo x según el supuesto igual á *AE* resultó al comparar los triángulos, que la línea *AI* era igual á x-m, en esta forma
>
> $$AI=x-m$$
>
> por consiguiente cuando x se convierta en una cantidad negativa, la igualdad anterior se transforma en$AI=-x-m$, ó bien-$x=+AI+m$, lo cual quiere decir que el rádio x con que se ha de trazar el arco *EG* se compone del trozo esterior á la cuerda dada, mas la porcion m, pero tomado en sentido contrario; por lo que la porcion *ML* ó *NK* será ahora la que ha de mirarse como comprendida, si no por la cuerda y el arco dados, por sus prolongaciones. Este problema presenta por consiguiente cuatro soluciones en vez de dos que solo indicaba la escritura algebraica (p. 45).

Pero en este caso no busca una ecuación de cuarto grado que le de esas cuatro soluciones.

Problema 12: Hallar dos rectas[48], cuya suma de cuadrados y el rectángulo[49] que formen, sean conocidas (p. 50)

[48] Utiliza recta en el sentido de segmento

[49] Quiere decir el área del rectángulo

En este problema vemos cómo obtiene las soluciones de un sistema de ecuaciones en dos variables de grado dos. Al resolverlo se obtendría una ecuación de grado mayor que dos que no podría resolverse geométricamente, por lo que hace una serie de transformaciones hasta llegar a la solución.
Comienza planteando las dos ecuaciones de manera que quedan homogéneas:

> Llamando x é y á las dos rectas que se buscan, la suma de sus cuadrados se espresará por a^2y el rectángulo que forman por b^2, de este modo las ecuaciones que cifrarán las condiciones prescritas, serán $x^2+y^2=a^2$ y $xy=b^2$ (p. 50)

Obsérvese que la suma de los cuadrados la llama a^2, y no a, para que la ecuación quede homogénea. De la misma forma el área del rectángulo la nombra con b^2 y no con b.
Dice que no se pueden utilizar los métodos conocidos para despejar las incógnitas pues la ecuación que se obtendría sería de grado mayor a dos, ecuación que no podría resolverse geométricamente (p. 50), por tanto multiplica por 2 la segunda ecuación y sumando y restando las ecuaciones que le quedan obtiene $x^2+2xy+y^2=a^2+2b^2$ y $x^2-2xy+y^2=a^2-2b^2$

> (…) de las que siendo los primeros miembros, cuadrados perfectos, se puede estraer su raíz cuadrada lo que dá $x+y=\sqrt{a^2+2b^2}$ $x-y=\sqrt{a^2-2b^2}$ (p.50)

Para despejar x e y se suman y se restan ambas ecuaciones, pero en vez de hacerlo directamente enuncia una propiedad:

> Estas espresiones manifiestan que se trata ya de hallar dos cantidades x é y, conocidas su suma $\sqrt{a^2+2b^2}$ y su diferencia $\sqrt{a^2-2b^2}$; y como para encontrarlas sabemos existe la propiedad de que la mayor es igual á la semi-suma *mas* la semi-diferencia, y la menor lo es á la semi-suma *menos* la semi-diferencia, desde luego se obtienen los valores de x é y en la escritura de estas propiedades
>
> $x=\frac{1}{2}(\sqrt{a+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2})$ (sic) é $y=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2})$ [50] (p. 50)

Obsérvese que podría haber resuelto el sistema de ecuaciones de otra manera, sin importar si la ecuación intermedia es resoluble geométricamente o no, porque lo que debe construir son las soluciones, sin embargo hemos visto que sigue este procedimiento por esa causa.
Termina el problema explicando las limitaciones que da el que haya una diferencia dentro del radical, y lo traduce a su interpretación geométrica, como siempre:

> (...) para que el problema sea posible, es menester que la sustraccion sea posible ó que a^2 sea mayor que $2b^2$, es decir, que no puede exigirse que la suma de los cuadrados de dos cantidades, sea más pequeña que el doble de su producto. Si a^2 fuese igual á $2b^2$ desapareciendo el segundo radical de los valores de las dos líneas, se harian iguales á $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}$ (p. 51).

Por último explica cómo construir las soluciones obtenidas (pero no las construye):

[50] Está escrito literalmente, pero existe una errata, la expresión de x debe ser $x=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2})$

> Para construir las espresiones obtenidas en el actual problema, no hay mas que construir para representacion del primer radical la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean a y $b\sqrt{2}$, y para el segundo, el cateto de otro triángulo rectángulo en el que a es la hipotenusa y $b\sqrt{2}$ el segundo cateto: la suma de las mitades de estas líneas daría la longitud de x mientras la diferencia de las mismas mitades produciría la de y (p.51).

2. Para obtener fórmulas generales (ER, PRD, PRAN, PRI, PRD)

En el capítulo IV titulado *Problemas indeterminados* y tras explicar cómo se determina un punto, y obtener las ecuaciones de los ejes, de las rectas paralelas a ellos y la ecuación explícita de una recta, tal como hemos desarrollado en la parte de análisis de contenido, plantea y resuelve los siguientes problemas con los que obtiene una serie de ecuaciones o fórmulas generales que utiliza para resolver problemas más específicos y que hemos recogido en el punto 3. La forma de trabajar en este caso es similar a la que tenemos en la actualidad, por lo que solo recogemos la solución de dos de ellos como ejemplo (PRAN, PRD, PRP, PRI).

> Dadas las coordenadas de un punto, hallar la ecuacion de toda recta que pase por él (p.65).
>
> Hallar la ecuacion de una recta que pase por dos puntos dados cuyas coordenadas son (x', y') y (x'', y'') (p.66).
>
> Hallar la ecuacion de una recta paralela á otra recta conocida (p.69).
>
> Hallar la ecuacion de una recta tirada por un punto dado, paralelamente á una recta conocida (p.69).
>
> Dadas dos rectas por sus ecuaciones, determinar el ángulo que forman (p.70).
>
> Dada la ecuacion de una recta, hallar de otra que sea perpendicular(p. 72).
>
> Dadas las coordenadas de un punto, y la ecuacion de una recta, hallar la de la perpendicular tirada por dicho punto (p.72).
>
> Dadas las ecuaciones de dos rectas, hallar su punto de encuentro (p.74).
>
> Dadas las coordenadas de dos puntos, hallar la espresion de su distancia (p.75).
>
> Hallar la distancia de un punto dado á una recta tambien dada (p.77).

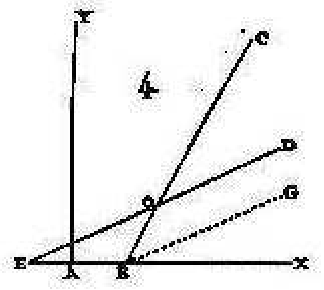
Dadas dos rectas por sus ecuaciones, determinar el ángulo que forman.

En este problema, además de obtener el ángulo que forman dos rectas, obtiene las condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

> Si las ecuaciones dadas son $y=ax+b$[51] para la primera recta *BC* é $y=a'x+b'$ para la segunda recta *ED*: la primera forma con el eje x un ángulo *CBX*, cuya tangente trigonométrica es a, y la segunda otro *DEX* cuya tangente trigonométrica es a'. El ángulo *COD* que se busca es necesariamente la diferencia de los dos anteriores, como lo manifiesta la figura (4) siempre que por el vértice *B* del uno se tire una

[51] En el libro pone y=ax+b', que debe ser una errata.

paralela *BG* á la segunda recta, pues que *COD* es igual á *CBG* por correspondientes, y este *GBC* lo es á *CBX-GBX*, ó bien á *CBX-DEX*.



Esta observacion reduce el problema al de «dadas las tangentes trigonométricas de dos arcos, hallar al de su diferencia» (…) (p.70).

que por trigonometría se tiene que es:

$$\tan .COD = \frac{\tan .CBX - \tan DEX}{1 + \tan .CBX \times \tan DEX}$$

cuya fórmula se convierte, sustituyendo por las tangentes, *a* y *a'* que son conocidas, en $\tan .COD = \dfrac{a-a'}{1+aa'}$ (p.70).

Como hemos dicho mediante esta fórmula llega a la condición de paralelismo:

1º. Si las dos rectas fueran paralelas, el ángulo *COD* que entre sí forman sería nulo, y por consiguiente el numerador de la espresion de su tangente *a-a'* debe ser igual á cero, pero de la condición *a-a'=0* resulta *a=a'* como ya sabíamos se verifica para rectas paralelas (p.71).

Y más tarde la de perpendicularidad:

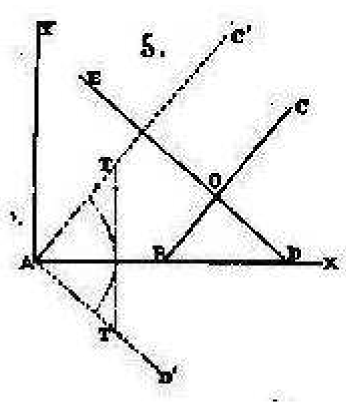
2º Si las rectas fuesen perpendiculares ó formasen un ángulo recto, la tangente trigonométrica de *COD* se haría infinita, es decir, que en la espresion algebráica de su valor, el denominador *1+aa'* deberá hacerse nulo; de esta suposición

$$1+aa' = 0$$

resulta $a = -\dfrac{1}{a'}$ (p.71)

Expresión a la que llega también directamente utilizando la trigonometría:

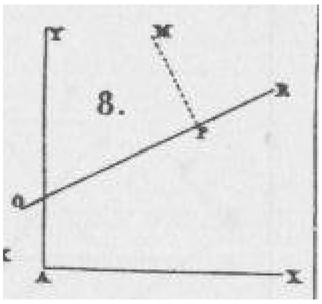
Esta condicion, necesaria para que dos rectas sean perpendiculares, que puede traducirse diciendo «que para que una recta sea perpendicular á otra es preciso que la tangente de su ángulo con el eje de las abscisas, resulte igual á la cotangente negativa del ángulo de la segunda,» esta condicion, decimos, se puede reconocer directamente sin mas que observar en la figura 5, lámina 2ª, que siendo las rectas las *BC* y *DE*, cuyo ángulo *COD* es recto: tirando por el orígen las *AC'* y *AD'* que las sean paralelas, resultará siempre que el ángulo *C'AX* de la una, y el *XAD'* de la otra son complementos mútuamente: asi que si con el radio *AR* de las tablas trigonométricas, es decir, con un radio-unidad, se describe desde un arco entre los lados del ángulo *C'AD'*, que será un cuadrante, las



> tangentes de los ángulos *C'AX* y *XAD'* serán *RT* y *RT'*[52], y las cotangentes serán la del *C'AX, RT'*; y la del *XAD', RT*, pero con signos negativos atendidas sus situaciones opuestas á las de aquella. Ademas la *RT* es igual á a, la *RT' =a'* y *AR=1*, y los triangulos *ART* y *ART'* que son semejantes por estar formados por la perpendicular *AR* bajada desde un ángulo recto á la hipotenusa *TT'*, dan
>
> *RT:AR::AR:RT'* ó
>
> *a:1::1:a';*
>
> en cuya proporcion, si se toman en consideracion (como es debido) las posiciones relativas de los lados homólogos que se han escrito, deberá ponerse
>
> *a:1::1:-a'* de donde
>
> *-aa'=1*
>
> Ó cambiando los signos á los dos miembros *aa´=-1;* ecuacion que dá á cualquiera de las tangentes *a* ó *a'* en funcion ó como dependiente de la otra, bajo la forma que se trataba de examinar (p.72).

Hallar la distancia de un punto dado á una recta tambien dada (p.77).

Para hallarla toma la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto dado, calcula el punto de corte de ambas rectas y después la distancia entre este punto y el dado, utilizando la fórmula que ha calculado en un problema anterior.



> La distancia de un punto á una recta, se mide siempre por la perpendicular tirada del uno á la otra: luego lo que deberá hacerse en el caso presente, será hallar las coordenadas del encuentro de las dos perpendiculares, y una vez conocidas con ellas y las del punto dado determinar el valor de su distancia, por la fórmula conocida para este caso (p. 77).

Desarrolla esto de forma general para obtener la fórmula que le da la distancia, en vez de hacer en cada caso particular todo el proceso.

Toma $y = ax + b$, como ecuación de la recta *OR*, *(x', y')* como las coordenadas del punto *M*, por tanto obtiene $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ como ecuación de la recta perpendicular a la *OR* que pasa por el punto *M,* recta que tiene que cortar con la *OR* dada. Para cortar ambas rectas resuelve el sistema, como es lógico, pero lo hace de una forma bastante curiosa, porque en vez de obtener las coordenadas (*x'', y''*) del punto de corte, busca obtener directamente las diferencias con las coordenadas de *M*, es decir (*x'-x''*) e (*y´-y''*), para sustituirlas directamente en la fórmula que da la distancia entre dos puntos,

> El punto de intersección de las dos perpendiculares se hallará, determinando los valores de la abscisa y la ordenada cuando se supongan iguales: si los llamamos *x''* é *y''*, como las dos rectas pasan por su intersección, sustituidos por *x é y* deberán satisfacer ambas ecuaciones, es decir, que se verificará que $y'' = ax'' + b$

---

[52] No existe la R en el dibujo, pero debe ser el punto de corte de TT' con el eje X.

> y que $y''-y'=-\frac{1}{a}(x''-x')$.
>
> Al proceder á eliminar una de las incógnitas x'' ó y'' entre estas dos ecuaciones, se presenta un artificio sencillo que dará inmediatamente las diferencias entre abscisas y ordenadas que buscamos, para sustituirlas en la espresion de la distancia:este artificio consiste en restar y[53], de los dos miembros de la ecuación primera y además añadir y sustraer al segundo miembro ax'; con esto resulta(…)
>
> $y''-y'=a(x''-x')+b+ax'-y'$ (p. 78).

Seguidamente iguala los valores de $y''-y'$ obtenidos en las dos ecuaciones anteriores y despeja $x''-x'$ en la que le queda, y posteriormente $y''-y'$obteniendo: $x''-x'=\frac{(y'-ax'-b)a}{1+a^2}$, $y''-y'=-\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}$ (pp. 78,79).
Una vez obtenidas estas expresiones las sustituye en la fórmula de la distancia entre dos puntos, solo en la de las coordenadas rectangulares, $D=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}$, aunque obtiene la fórmula para rectangulares y oblicuas en el problema correspondiente. Operando obtiene $D=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$ (p. 79) como fórmula que nos da la distancia del punto M (x', y') a la recta $y=ax+b$.

3. Para ejemplificar cómo resolver problemas mediante el uso de sistemas de coordenadas (PRDT)

Tras obtener diversas ecuaciones de la recta y determinar fórmulas para calcular distancias entre elementos del plano, ángulos, puntos de corte, etc. (ER, PRI, PRP, PRD, PRAN) propone y resuelve tres problemas que podrían considerarse como determinados, pero que él incluye dentro de los indeterminados pues utiliza los conceptos explicados en este capítulo para resolverlos. Dichos problemas consisten en el cálculo de la bisectriz del ángulo, del ortocentro y del baricentro de un triángulo, aunque él no los enuncia así, sino de la siguiente forma:

> Problema 1º. Dividir un ángulo en dos partes iguales (p. 80).
>
> 2º. Dado un triángulo por su base y las coordenadas del vértice, hallar el punto de encuentro de las perpendiculares tiradas desde cada ángulo á los lados opuestos (p. 82).
>
> 3º. Dados el vértice y base de un triángulo, determinar el punto de encuentro de las rectas tiradas de cada ángulo á las mitades de los lados opuestos (p. 84).

El modo de resolver los tres problemas es similar, por lo que incluimos solo uno de ellos a modo de ejemplo, en este caso el 3º, en el que veremos que utiliza coordenadas oblicuas en vez de rectangulares y la semejanza de triángulos para obtener el punto medio de un segmento.

---

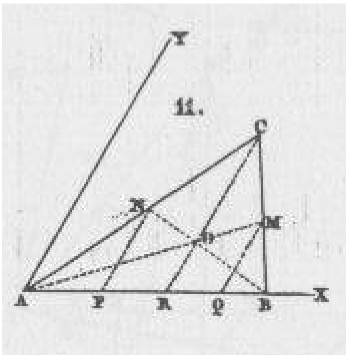
[53] Eso es una errata del texto, debería poner *y'*.

3º. Dados el vértice y base de un triángulo, determinar el punto de encuentro de las rectas tiradas de cada ángulo á las mitades de los lados opuestos (p. 84)

Para resolver este problema utiliza coordenadas oblicuas de manera que el lado conocido *AB=c* coincida con el eje *OX*, el vértice *A* con el origen de coordenadas y el eje *OY* sea paralelo a la mediana que pasa por *C*, vértice conocido.

> Si se toma por eje de las *x* la base conocida *AB=c* del triángulo, por orígen el vértice *A*, y se elige por fin para más sencillez el eje de la *y*, *AY* paralelo á la *CR* dirigida al punto medio de la base; las coordenadas del vértice *C* serán (*x'=1/2c, y'*) (p. 84).

Para calcular el baricentro, que en realidad es lo que está haciendo, calcula primero las ecuaciones de dos medianas, y para ello las coordenadas de los puntos medios de los lados *AC* y *CB.* Utiliza para ello semejanza de triángulos:



> Tirando ahora las *AM* y *BN* desde los otros ángulos á las mitades de los lados opuestos, las ordenadas de estos puntos medios *N* y *M* formarán triángulos semejantes á los dos en que queda dividido el total por la *CR* y por las proporciones de sus lados homólogos se podrán determinar las coordenadas de dichos puntos *N* y *M.*
>
> Los triángulos semejantes *ACR* y *ANP*, dan
>
> *AR:AP::AC:AN* y *RC:PN::AC:AN*
>
> Pero *AN=1/2AC*, luego *AP=1/2AR* y *PN=1/2RC.*
>
> Y como *AR=2/4c,* y *RC=y'*, resulta que las coordenadas del punto *N* son (*x''=2/4c, y''=1/2y'*)[54].
>
> Del mismo modo se deduce por los triángulos semejantes BCR y BMQ que las coordenadas del punto M son (*x'''=3/4c, y'''=1/2y'*).
>
> Conociendo ya las coordenadas de dos puntos de cada resta divisoria, sencillo es escribir sus ecuaciones y determinar su punto de encuentra (p. 84).

Calcula las ecuaciones de la recta *AM* obteniendo $y=\frac{2y'}{3c}x$; y de la recta *BN,* obteniendo $y=-\frac{2y'}{3c}(x-c)$. Con ambas ecuaciones calcula el punto de corte obteniendo $x=\frac{1}{2}c,\ y=\frac{1}{2}y'$.

> Es decir, que el punto de encuentro de cada dos rectas divisorias *AM* y *BN* está en la tercera parte de la otra, contada desde el lado en que termina: luego en todo triángulo se verifica que el encuentro de las tres rectas que bisecan los lados y van á los ángulos opuestos está á los dos tercios de cada una, contados desde dicho ángulo (p. 86).

[54] Aquí hay una errata, *x'=1/4 c*, después lo utiliza bien.

4.7.4. Conclusiones

Como hemos visto esta es una obra extensa y exhaustiva en la que encontramos un gran número de ejemplos de construcciones de expresiones algebraicas de las que da varias interpretaciones. Además hay gran número de problemas, sobre todo de los que denomina *determinados*, aunque también en la segunda parte obtiene fórmulas generales que otros autores de la época no consideran y resuelve tres problemas de aplicación.

En los problemas determinados nos encontramos ejemplos de todas los tipos de construcciones de expresiones algebraicas que pueden aparecer, (polinomios, radicales, fracciones y soluciones de una ecuación de segundo grado), también se hace uso de la unidad en uno de ellos, y sobre todo es destacable el estudio que hace de las soluciones negativas. Como hemos visto Santa María no hace un estudio teórico de los signos negativos, pero sí plantea muchos problemas en los que aparecen este tipo de soluciones, y siempre da su interpretación geométrica.

También debemos señalar en los problemas que aunque a veces la construcción utilizada no parece la más fácil, el usar esa y no otra es porque resuelve el mismo problema de formas distintas y utiliza en todas ellas la misma construcción, como hemos visto, por ejemplo, en el problema 3.

Otra de las características reseñables de este autor es su preocupación porque las soluciones algebraica y geométrica coincidan, planteando el problema de forma diferente si el número de soluciones geométricas es mayor que la algebraica, con objeto de obtener una ecuación de grado mayor que de todas las soluciones. Otros autores directamente plantean esta segunda ecuación, sin mostrar el problema que puede surgir dependiendo de la incógnita que se tome. En el caso de que no sea posible encontrar una ecuación de grado mayor explica el por qué la Geometría, aparentemente, da más soluciones que el Álgebra.

En cuanto a los problemas *indeterminados*, también hay un buen número de ellos, obteniendo fórmulas generales que no aparecen en todas las obras de la época, como por ejemplo la distancia de un punto a una recta; y resolviendo problemas de aplicación, que tampoco suelen aparecen en las obras analizadas.

Por último señalar el estudio que hace de los sistemas de coordenadas, utilizando oblicuas -que utiliza para obtener algunas de las fórmulas generales como la distancia entre dos puntos, y en un problema de aplicación- rectangulares y polares, y dando las ecuaciones de cambio entre ellas.

Todo ello muestra, como hemos dicho, que la obra es muy completa y exhaustiva mostrando, probablemente, todos los conocimientos de Geometría Analítica que se tenían entonces en España. Es probable que esta fuera una de las razones que hizo que apareciera durante veinte años en las listas oficiales de libros de texto para el estudio de esta disciplina, y que la convierten en una obra muy importante en el estudio de la Geometría Analítica en la época que nos ocupa.

4.8. Tratado de Geometría Analítica de Juan Cortázar (1862)

4.8.1. Autor

Juan Cortázar, nació en Bilbao en 1809 y murió el 12 de abril de 1873 (CA1). Inició sus estudios en el colegio de los Franciscanos de Bilbao y los completó en el Colegio de Santiago, del que fue profesor entre 1827 y 1834. Este año ingresa en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, pero dicha Escuela fue clausurada ese mismo año a causa del cólera, por lo que se vio obligado a suspender sus estudios allí. Pensionado por el Gobierno, se traslada a París para estudiar durante tres años en la Escuela Central de Artes y Manufacturas, obteniendo el título de Ingeniero en 1837 (García, 1984) (CA2).

Tras una corta estancia en Inglaterra, vuelve a España, donde es nombrado Catedrático de Matemáticas elementales de la Universidad, en diciembre de 1837, cargo que desempeña hasta 1850. Este mismo año es nombrado Catedrático de Álgebra superior y Geometría analítica de la Facultad de Filosofía, en su Sección de Ciencias, ya que además del título de ingeniero poseía el de Licenciado en Ciencias desde 1847. Tras fundarse la Facultad de Ciencias en 1857, continúa con esa misma cátedra en dicha Facultad. Ese mismo año es elegido para ocupar un sillón en la Real Academia de Ciencias, al que renuncia, sin haber ingresado, en 1862 por motivos de salud (Irueste, 1912) (CA3).

Fue Cortázar un autor prolífico de libros de texto (CA5), que se utilizaron durante los veinte años centrales del siglo XIX. Escribió sobre Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica.
García (1984, p. 121), dice de su obra que:

> Sus libros son concisos y claros, no demasiado modernos, pero incluye en ellos ya desde 1851 el cálculo de cantidades imaginarias, en sus formas binomial y trigonométrica, así como las raíces de la unidad, y diversas propiedades de ésta.

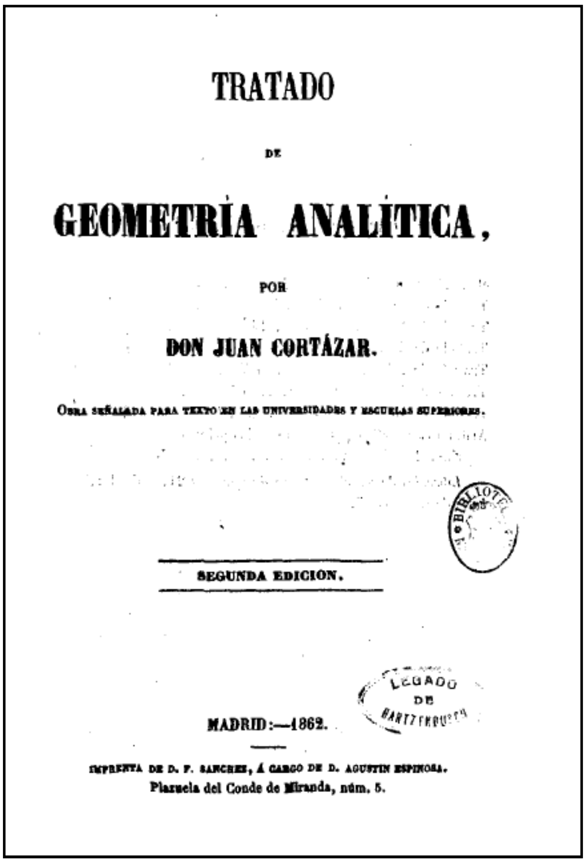
Entre ellos citaremos *Aritmética, Memoria sobre el cálculo de interés, Álgebra elemental, Complemento de Álgebra, Geometría elemental, Geometría analítica, Trigonometría y Topografía, Geometría aplicada a la industria* y *Aritmética práctica*, siendo, según Irueste (1912) la de Geometría Analítica la mejor de ellas. Además dejó inéditas un *Tratado de Trigonometría* en francés y varios *Apuntes de Cálculo infinitesimal, Mecánica Racional, Cosmografía* y *Lógica Matemática.* De las obras editadas se hicieron 150 ediciones y se consumieron en medio siglo medio millón de ejemplares (Enciclopedia Espasa-Calpe, 1929).

4.8.2. Caracterización de la obra

El libro analizado corresponde a la segunda edición del Tratado de Geometría Analítica de Juan Cortázar impresa en Madrid en 1862 en la imprenta de D.F. Sánchez (Figura 59). La primera edición data de 1855 (Escribano, 2000; p. 299). El ejemplar analizado se puede encontrar en la Biblioteca Digital Hispánica (Julio 2012) (RO).

La obra consta de un solo tomo de 279 páginas dedicadas a la Geometría, de una página de erratas al final del tomo y de 8 láminas con dibujos que se encuentran también al final (CEO1).

La obra se encuentra dividida en tres partes: *Introducción al estudio de la Geometría analítica*, *Geometría Analítica Plana y Geometría Analítica del Espacio*. Estas dos últimas divididas a su vez en dos libros (contenidos todos ellos en el mismo tomo).



TRATADO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA,

POR

DON JUAN CORTÁZAR.

Obra señalada para texto en las universidades y escuelas superiores.

SEGUNDA EDICION.

MADRID:—1862.

IMPRENTA DE D. F. SANCHEZ, Á CARGO DE D. AGUSTIN ESPINOSA.
Plazuela del Conde de Miranda, núm. 5.

Figura 59: Carátula del libro. Tratado de Geometría Analítica. J. Cortázar.

El índice se encuentra al comienzo del tomo. Reproducimos íntegramente los epígrafes de las partes que vamos a analizar, insertando solo los títulos del resto. (CEO2)

ÍNDICE

4.- Clasificacion de las líneas.

LIBRO II.- Líneas de segundo órden

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

LIBRO I.- ECUACIONES DE LAS SUPERFICIES Y LÍNEAS

LIBRO II.- SUPERFICIES DE SEGUNDO ÓRDEN

En cuanto a los objetivos que el autor perseguía al realizar esta obra y el nivel de estudios a que estaba destinada no se incluye ningún prólogo o introducción en el que se indiquen los objetivos de la misma, pero en la portada se indica que es una "obra señalada para texto en las universidades y escuelas superiores" (CEO3). De hecho esta obra se encuentra en las listas de libros de texto para la Facultad de Ciencias, en la que Cortázar era catedrático como hemos indicado en su biografía, publicadas entre los años 1858 y 1868, como especificamos a continuación:

R.O. 25-9-1858 (Gaceta 1-10-1858), R.O. 15-10-1861 Gaceta (20-10-1861), R.O. 10-9-1862 (Gaceta 13-9-1862), R.O. 26-9-1863 (Gaceta 30-9-1862), R.O. 31-8-1864 (Gaceta 3-9-1864) (para el trienio 1864/67) y R.O 22-9-1867 (Gaceta 24-9-1867) (CEO4).

En cuanto a las obras y autores en que Cortázar se basó a la hora de elaborar este texto hemos de decir que no cita a nadie en lo que se refiere a los contenidos de Geometría Analítica. Cita a Descartes en varias ocasiones pero en relación a contenidos algebraicos, en particular a los signos de las raíces de una ecuación, pero no en relación con los contenidos específicos de la obra (CEO5).

4.8.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.8.3.1. Análisis de la estructura conceptual

Cortázar hace una distinción muy clara entre lo que es la aplicación del Álgebra a la Geometría Elemental y la Geometría Analítica propiamente dicha, definiendo de forma independiente en qué consiste cada una de ellas (D), a diferencia de otros autores que consideran ambas como dos aspectos distintos de la misma teoría, dos maneras distintas de aplicar el Álgebra a la Geometría. Tenemos así que la obra está dividida en tres partes, la primera dedicada a dicha a aplicación, que subtitula como *Introducción al estudio de la Geometría Analítica*, y las dos siguientes tituladas *Geometría Analítica Plana* y *Geometría Analítica del Espacio* respectivamente (CEO2).

En la primera, tras dar la definición, explica cómo se pueden representar algebraicamente las cantidades geométricas, lo que le lleva al estudio de las ecuaciones homogéneas y del segmento unidad para conseguir transformar polinomios que no son homogéneos en otros que sí lo son (U). El autor es muy riguroso, dando las definiciones, y enunciando las propiedades en forma de teoremas cuya demostración incluye, poniendo posteriormente ejemplos sobre lo que acaba de probar, no solo en esta parte, sino en toda la analizada. En el caso de la unidad, no la usa explícitamente porque demuestra un teorema en el que prueba que si el segmento utilizado como unidad es el adecuado la ecuación es homogénea siempre (U).

En cuanto a los segmentos negativos no desarrolla, como otros autores más antiguos, una teoría referente a ellos, sino que en los problemas que aparecen soluciones negativas da su interpretación, y siempre en el contexto del problema tomando de forma natural que se deben construir en sentido contrario o que pueden dar lugar a otros problemas más generales (SN).

Tras esto pasa a resolver una serie de problemas (PRDT).

En cuanto a la parte dedicada a la Geometría Analítica plana, tras dar la determinación de un punto en un plano y definir ejes de coordenadas (C) y sus tipos pasa a estudiar el lugar geométrico de una ecuación (LG) y dar la definición de Geometría Analítica Plana (D). Hace una serie de consideraciones de carácter general sobre los lugares geométricos, como por ejemplo cómo hallar el punto de corte de dos lugares geométricos de los que se conoce su ecuación (PRI), mientras que otros autores anteriores como mucho se limitan a dar la definición, para estudiar después el caso particular de las rectas (ER, PRI).

Tras estas consideraciones de carácter general pasa a estudiar las ecuaciones de la recta, de la que da diferentes expresiones en función de los datos conocidos (ER). También estudia la distancia entre dos puntos y entre un punto y una recta (PRD), y da la condición de perpendicularidad de dos rectas (PRP), aunque no la de paralelismo ni estudia los ángulos formados por dos rectas (PR).

Como en el caso anterior, tras este estudio teórico resuelve varios problemas (ER, PRD; PR).

Por último dedica el capítulo III a los cambios de coordenadas, obteniendo las ecuaciones de cambio entre sistemas rectangulares y/o oblicuos, sin considerar el sistema de coordenadas polares (C).

Veamos esto con más detalle:

1. Aplicación del Álgebra a la Geometría

1.1. Definición

Comienza el capítulo primero, denominado *Nociones preliminares* definiendo la aplicación del Álgebra a la Geometría elemental (D):

> 1. Se llama *aplicación del Algebra á la Geometría elemental* la ciencia que trata de la resolución de las cuestiones de la geometría elemental por medio del cálculo algébrico ordinario.
>
> Para que las cuestiones de Geometría puedan resolverse por medio del cálculo algébrico, es menester representar algébricamente las magnitudes de las líneas y superficies limitadas y la de los espacios que ocupan los cuerpos (p. 1).

Y explica cómo se lleva esto a cabo:

> 2. Si llamamos *a* al valor numérico de una recta limitada, ó lo que es igual, si representamos dicha recta por *a,* es claro que toda línea limitada, recta ó curva, tendrá una razón *m* con la recta *a,* y por consiguiente su valor numérico será *ma*, ó lo que es igual, dicha línea limitada quedará representada por *ma,* siendo *m* un número abstracto y *a* el valor numérico de una recta.

Igualmente, si a y b son los valores numéricos de la altura y base de un rectángulo el producto ab será el valor numérico de este rectángulo, según está demostrado en la Geometría; y toda superficie limitada, plana ó curva, tendrá una razón m con este rectángulo, y por tanto quedará representada por mab. Por último, si a, b, c son los valores de las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo, el producto abc será, como se sabe por la Geometría, el valor numérico de este paralelepípedo; y todo espacio limitado tendrá una razón m con este paralelepípedo, y por consiguiente quedará representado por mab.

Por el contrario, si a, b, c son valores de tres líneas rectas limitadas, y m un número abstracto, ma será evidentemente el valor de una línea limitada, mab el de una superficie limitada, y $mabc$ el de un espacio limitado; ó en otros términos, ma será una longitud, mab una área, y $mabc$ un volumen (p. 2).

1.2. Ecuaciones homogéneas. Unidad

Tras esto, define grado de un monomio, de un polinomio homogéneo, de una *fracción literal* y de una cantidad radical (U). Vemos, por ejemplo la primera de ellas:

3. Se llama *grado* de un monomio entero el número de sus factores lineales. Asi, πab que consta de dos factores lineales a y b es una espresion de segundo grado; $\frac{2}{3}abc$, que consta de los tres factores lineales a, b y c, es una espresion de tercer grado (p.2).

Añade una nota al final en la que indica que algunas veces una superficie o un volumen (él lo llama espacio limitado) pueden estar indicados por una sola letra:

NOTA. A veces una superficie limitada, ó un espacio limitado, se representa por una letra: entonces, para apreciar el grado de la espresion, deberá considerarse dicha letra como de segundo grado en el primer caso, y como de tercero en el segundo caso (p.2).

Seguidamente demuestra un teorema que es la base del paso de la Geometría al Álgebra:

4.(…) demostremos que cualquier espresion de primer grado, aun cuando no sea monomio entero, representa una línea limitada; si es de segundo grado una superficie limitada; y si es de tercer grado, un espacio limitado (p.3)

Para ello demuestra primero un lema: *toda espresion de grado 0 representa un número abstracto* (p.3). Tras esto pasa a demostrar el teorema, en primer lugar demuestra que la expresión $\frac{3ab-de}{c}-\sqrt[3]{\frac{4a^2b^2}{e}}$ representa una *línea*:

1. Sea $\frac{3ab-de}{c}-\sqrt[3]{\frac{4a^2b^2}{e}}$ una espresion cualquiera de primer grado. Podemos escribir esta espresion del modo siguiente:

$$a\left(\frac{3ab-de}{ac}-\sqrt[3]{\frac{4a^2b^2}{a^2e}}\right):$$

la espresion interior al paréntesis es del grado 0, y por tanto representa un número abstracto m; luego la espresion propuesta es igual á ma, es decir (2) á una linea limitada (p. 4).

Análogamente demuestra que $\frac{3a^2b-d^2e}{c}-\sqrt[3]{\frac{4a^2b^2m^2n}{e}}$ y $\frac{3ab^3-d^2e^2}{c}-\sqrt[3]{\frac{4a^2b^2m^2n^2p^2}{e}}$ representan *una superficie limitada* y *un espacio limitado* respectivamente (p. 4).

Tras las demostraciones de lema y teorema concluye cómo se pueden resolver a través del Álgebra las cuestiones geométricas:

> 5. Representando algébricamente tanto las lineas como las superficies y los espacios, se podrán resolver por medio del cálculo las cuestiones de Geometría, es decir, las cuestiones en que se trate de hallar alguna longitud, área ó volumen; ligando primeramente por medio de ecuaciones las cantidades incógnitas con las conocidas, y despejando en seguida las incógnitas, según las reglas del Álgebra (p. 4).

Tras esto define ecuación homogénea:

> 6. Ecuación *homogénea* es aquella ecuación cuyos términos son todos del mismo grado (p.5).

Y después añade un teorema en cuya demostración se muestra claramente como se hace uso de la unidad en las ecuaciones.

> *Teorema:* Si ninguna de las líneas cuyos valores algébricos entran en una ecuación, se toma por unidad, la ecuación será homogénea.
>
> Supongamos para fijar ideas, que los valores de las cuatro líneas rectas *A, B, C* y *D* estén ligados por medio de una ecuación. Tomemos por unidad la línea recta *D,* y llamemos *a, b* y *c* á los valores algébricos que, en esta suposición, tienen las otras tres rectas; y admitamos que la ecuación, sin denominadores, ni radicales, sea entonces una ecuación cualquiera $3a - 6c + 2a^2b = 0$.... [A].
>
> Tomemos ahora por unidad una recta cualquiera *U* diferente de las cuatro *A, B,C, D*, y sean *a', b', c', d'* los valores de estas cuatro rectas referidas á la unidad U. Cuando la unidad es la recta *D,* es $\frac{A}{D}=a$, y cuando la recta *U* es la unidad, *A*= *a'U*, *D* = *d'U*; y por consiguiente $\frac{A}{D}=\frac{a'}{d'}$; luego $a=\frac{a'}{d'}$ es decir que *el valor primitivo de cualquiera de las rectas es igual al valor nuevo dividido por el nuevo valor de la recta que antes fué unidad.*
>
> Por lo tanto $b=\frac{b'}{d'}, c=\frac{c'}{d'}$.
>
> Sustituyendo estos valores en la ecuación [A], tendremos esta otra: $3\frac{a'}{d'}-\frac{b'c'}{d'^2}+2\frac{a'^2b'}{d'^2}=0$ cuyos términos son todos del grado cero, y por tanto esta ecuación es homogénea; y no dejará de serlo, aun cuando se multipliquen todos sus términos por d'^2 para que todos sean enteros.
>
> Queda pues demostrado que la nueva ecuación, correspondiente al caso en que ninguna de las cuatro rectas *A, B, C* y *D* es unidad, es homogénea, conforme al enunciado del teorema.

Y obtiene como corolario que si una ecuación no es homogénea, "alguna de las rectas que debia entrar en ella se ha tomado por unidad; pues si no fuese asi, la ecuación seria homogénea" (p. 5). Obsérvese que utiliza el término recta para referirse a segmentos. Tras esto explica cómo transformar de manera directa una ecuación no homogénea en otra que sí lo es.

> Dada una ecuacion no homogénea, conviene á veces hallar la ecuacion correspondiente, no siendo unidad la recta que antes lo fué, ni ninguna de las otras, cuyos valores entran en la ecuacion ó<lo qué es igual, siendo la unidad indeterminada: hemos visto en la demostración del teorema (6), que los valores primitivos de las rectas son respectivamente iguales á los valores nuevos divididos por el nuevo valor de la recta que antes fué unidad; luego para hallar la nueva ecuacion, no habrá mas que sustituir en la ecuacion propuesta, en vez de cada letra, representante de recta, su razón al nuevo valor de la unidad primitiva. Como después de esta sustitución resulta una ecuación homogénea, pero cuyos términos son todos del grado 0, se hallará mas brevemente la nueva ecuacion primitiva, multiplicando los términos faltos de factores por potencias del nuevo valor de la recta que antes fué unidad (p.6).

Y pone dos ejemplos en los que muestra esto. Incluimos solamente el primero de ellos:

> *Ejemplos.* 1. Sea la ecuacion $ax^2 - bx + c = 0$ siendo a, b, c y x valores de cuatro rectas. La falta de homogeneidad de esta ecuación proviene, según queda demostrado, de que una recta cuyo valor debía entrar en dicha ecuación, se ha tomado por unidad. Supongamos ahora que no es unidad dicha recta ni ninguna de las otras cuyos valores entran en la ecuación, y que sea *d* el nuevo valor de la recta que antes fué unidad. La ecuación correspondiente será, segun la primera regla, $\frac{ax^2}{d^2} - \frac{bx}{d^2} + \frac{c}{d} = 0$ ó, multiplicando por d^2, $ax^2 - bdx + cd^2 = 0$.
>
> Según la otra regla se hallará inmediatamente $ax^2 - bdx + cd^2 = 0$.
> No se pierda de vista que las letras de esta nueva ecuacion representan números iguales respectivamente á los que las mismas letras representan en la ecuacion propuesta multiplicados por *d* (p.6).

Vemos, por tanto cómo se puede transformar una ecuación heterogénea en homogénea y por qué se debe hacer así, simplemente cambiando la unidad. Este hecho es reseñable porque otros autores no hacen hincapié en este tema: o utilizan la unidad directamente dando unas pequeñas explicaciones o lo hacen implícitamente sin que aparezca en los problemas.

De lo anterior se saca como conclusión que cualquier ecuación es homogénea si se toma la unidad de forma correcta, de ahí el comentario con el que termina el capítulo, en el que pone de relieve la importancia del teorema anterior:

> Nota: el teorema sobre la homogeneidad de las ecuaciones es de muchísima utilidad para la verificación de los cálculos; pues, suponiendo la unidad indeterminada, las diferentes ecuaciones que se vayan obteniendo, deben ser siempre homogéneas: por lo que si falta en alguna esta circunstancia, es prueba de que ha habido error. No debe pues, en general, fijarse la unidad en los cálculos, porque se perdería esta ventaja: únicamente en las líneas trigonométricas, que tan á menudo ocurren, conviene, para la sencillez de las fórmulas, que la unidad sea el radio; (p. 7)

Con esto da por finalizado el capítulo y el tema de las ecuaciones homogéneas y la unidad, pues no vuelve a utilizarla en ningún resultado más, ni teórico ni dentro de un problema.

1.3. Construcción de expresiones algebraicas

El capítulo siguiente lo dedica a las construcciones geométricas, como indica su título, es decir cómo construir con regla y compás diferentes expresiones algebraicas. Comienza definiendo construcción de una expresión lineal y explicando las ventajas de construirlas directamente en vez de hacerlo con su valor numérico una vez obtenido por medio del Álgebra. Es decir, propone dada una expresión algebraica, construirla con regla y compás para hallar el segmento que da su valor, en vez de calcular este valor numéricamente y trasladarlo directamente sobre una recta.

> La magnitud geométrica de la línea representada por una espresion de primer grado puede obtenerse midiendo con una unidad arbitraria las rectas representadas por las letras que entran en dicha espresion, hallando en seguida el valor numérico de la espresion, y construyendo por último la recta representada por este valor numérico. Pero el hallar el valor numérico de una recta, y por el contrario el construir la recta dado su valor numérico, son operaciones muy espuestas á error, y por lo tanto, cuando la cuestion se propone en el papel, es preferible, en general, obtener directamente por medio de la regla y el compás la magnitud de la recta representada por la espresion. Este segundo método es el que propiamente se llama *construcción,* y de él nos vamos á ocupar (p. 7).

E indica cuáles de ellas son construibles con regla y compás

> 9. Las espresiones lineales construibles por medio de la regla y el compás son las espresiones enteras, las espresiones fraccionarias racionales, y las espresiones radicales cuyo índice es 2^n, siendo *n* entero y positivo, es decir, las cantidades radicales cuyo índice es 2, 4, 8, etc. (p. 8).

Seguidamente explica la construcción de las "espresiones lineales enteras":

> 10. Sea la espresion $x=a-b+c$ en la que las letras *a, b* y *c* son valores numéricos de tres rectas, y $b < a+c$: *x* es el valor numérico de la recta incógnita. Para construir esta recta, tomaremos sobre una recta indefinida desde un punto cualquiera las rectas aditivas, cuyos valores sean *a* y *c,* una á continuación de otra, quitaremos de la suma de estas dos rectas la sustractiva *b,* y la parte que quede, será la recta representada por *x* (p.8).

Y después la construcción de las "espresiones lineales fracionarias". En primer lugar explica que en este caso el grado del numerador tiene que ser uno más que el del denominador y estudia varios casos, el primero de ellos la expresión $x=\frac{ab}{c}$:

> 1.º Sea la espresion $x=\frac{ab}{c}$, en la que *a, b* y *c* son valores numéricos de tres rectas:
>
> se trata de construir la recta cuyo valor es *x.* De la fórmula propuesta sale $cx=ab$ y de aquí resulta la proporción *c :a : : b : x.*
>
> Luego la recta *x* es una cuarta proporcional á las rectas *c, a* y *b* (p.8).

De forma análoga obtiene para $x=\frac{a^2}{b}$ que x es la tercera proporcional a b y a (p.9).

Seguidamente estudia el caso $x=\frac{abc^2}{fgh}$ que transforma en $x=\frac{ab}{f}\times\frac{c}{g}\times\frac{c}{h}$ y construye mediante cuartas proporcionales; y concluye dando un método general de construcción en el caso en que los dos términos de la fracción sean polinomios:

> Supongamos ahora que el uno ó los dos términos del quebrado sean polinomios. Se igualará cada polinomio á un monomio cuyos factores sean todos conocidos menos uno: determinado este *factor auxiliar, y* construida la recta que representa, quedará el quebrado reducido al caso en que sus dos términos son monomios (p.9).

Y pone como ejemplos las expresiones, $x=\frac{abc-d^2e+f^3}{gh}$ y $x=\frac{a^2b+c^2d-b^3}{mn-pq}$. En el primer caso hace $abc-d^2e+f^3=f^2\alpha$, siendo α un factor auxiliar cuyo valor se obtiene despejando de la expresión anterior y que transforma a x en $x=\frac{f^2\alpha}{gh}$, que se sabe construir. De forma análoga actúa con la segunda fracción (p.9).

Termina estudiando el caso particular en que los polinomios pueden transformarse en monomios de una manera más sencilla sin necesidad de introducir factores auxiliares, y pone como ejemplos $x=\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$ y $x=\frac{a^3}{b^2-3bc+2c^2}=\frac{a^3}{(b-c)(b-2c)}$ cuyas construcciones se reducen a los primeros casos (p. 10).

Tras las fracciones estudia las expresiones radicales de índice 2^n, con n entero y positivo. Comienza con las de índice 2, y considera cuatro casos:

> 12. (…) Consideraremos cuatro casos: l.º que la espresion que está bajo del radical sea un monomio, 2.° que dicha espresion sea un polinomio entero, 3.° que sea una fracción cuyos términos sean monomios, 4.° que sea una fracción de la cual el uno ó los dos términos sean polinomios (p.10).

En el primer caso deduce que la incógnita se obtiene mediante la construcción de una media proporcional, y reduce los demás a este caso:

> 1.º Sea $x=\sqrt{ab}$, siendo, como se ve, un monomio la cantidad que está bajo del radical.
>
> Elevando ambos miembros al cuadrado, tendremos $x^2=ab$, de donde resulta la proporción *a:x::x:b;* luego x es una media proporcional entre a y b.
>
> 2.° Si la espresion de 2.º grado que está bajo del radical, es un polinomio, se transformará en monomio, y quedará el caso actual reducido al anterior.

Pone como ejemplos $x=\sqrt{ab+c^2-de}$, que reduce al caso anterior haciendo $ab+c^2-de=c\alpha$, donde α es un factor auxiliar cuyo valor se obtiene despejándolo en la expresión anterior. También pone el ejemplo $x=\sqrt{a^2-5ab+4b^2}$, que se puede transformar en $x=\sqrt{(a-b)(a-4b)}$ y se reduce por tanto al caso 1º.

En el tercer caso pone como ejemplo $x=\sqrt{\dfrac{abc^2d}{efg}}$, que transforma en $x=\sqrt{a\times\dfrac{bc^2d}{cfg}}$ haciendo uso de un factor auxiliar $\alpha=\dfrac{bc^2d}{cfg}$ como en casos anteriores (p. 11).

Termina dando una regla general para el cuarto caso:

> 4.º Si los términos de la fracción que está bajo del radical, son polinomios, se reducirán á monomios, y quedará la cuestión reducida al caso anterior.

Y pone como ejemplo $x=\sqrt{\dfrac{ab^3+cd^3}{b^2-c^2}}$, que transforma en $x=\sqrt{\dfrac{b^3\alpha}{(b+c)(b-c)}}$ haciendo $ab^3+cd^3=b^3\alpha$, y cuya construcción ya se conoce (p. 12).

Tras esto estudia los casos particulares $x=\sqrt{a^2+b^2}$, $x=\sqrt{a^2-b^2}$ que se pueden obtener mediante la hipotenusa y el cateto de un triángulo rectángulo, respectivamente; y $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2-e^2}$ que construye mediante una sucesión de triángulos rectángulos. En primer lugar consigue $x=\sqrt{a^2+b^2}$ mediante la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos *a* y *b*, a continuación y tomando este nuevo lado construye el cateto $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ y así sucesivamente hasta completar toda la expresión (p. 12).

Concluye explicando cómo construir una expresión del tipo $\sqrt{ma^2}$:

> 13. Para construir la espresion $\sqrt{ma^2}$, siendo *m* un número abstracto, la escribiremos así: $\sqrt{ma\times a}$, media proporcional entre las rectas *ma* y *a*. (…)
>
> También se puede descomponer el número entero *m* en varios cuadrados, y entonces la espresion propuesta entra en alguno de los tres casos particulares que acabamos de considerar (p. 12).

Pone como ejemplos las expresiones $\sqrt{2a^2}=\sqrt{a^2+a^2}$ $\sqrt{5a^2}=\sqrt{4a^2+a^2}$, $\sqrt{89a^2}=\sqrt{64a^2+16a^2+9a^2}$, y haciendo $a=1$, $\sqrt{6}=\sqrt{6\times 1}=\sqrt{2\times 3}=\sqrt{2^2+1^2+1^2}$, $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2}$, $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$, $\sqrt{71}=\sqrt{36+36-1}=\sqrt{6^2+6^2-1^2}$ (p.13).

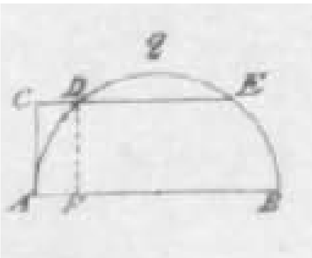
Continúa explicando la construcción de las expresiones radicales de índice 4. Considera los mismos casos que para índice 2, ya que las reduce a este caso. Mostramos, por ejemplo, el caso en que el radicando es un monomio:

> 14 (…) 1.° $x=\sqrt[4]{abcd}$; hago $ab=\alpha^2$, $\alpha=\sqrt{ab}$, $cd=\beta^2$, $\beta=\sqrt{cd}$ que son dos medias proporcionales; y por consiguiente $x=\sqrt[4]{\alpha^2\beta^2}=\sqrt{\alpha\beta}$ que es otra media proporcional (p. 13).

Para los demás casos añade:

> Los demás casos se reducen, como en las cantidades radicales de índice 2, al que acabamos de considerar (p. 13).

Tras la construcción de expresiones lineales, fracciones y radicales estudia la de "las ecuaciones completas de 2º grado, sin resolverlas". Señala que cualquier ecuación de segundo grado homogénea está comprendida en una de las siguientes: $x^2+ax+b^2=0$, $x^2-ax+b^2=0$, $x^2+ax-b^2=0$, $x^2-ax-b^2=0$; que la primera ecuación no puede tener raíces positivas "pues la suma de tres cantidades positivas no puede ser igual a cero, y además la regla de los signos de Descartes lo prueba" (p. 14); y que tiene las mismas soluciones que la segunda pues esta se obtiene de la primera cambiando x por –x, "luego sabiendo construir las raíces de la segunda ecuación, estas raíces, precedidas del signo -, serán las de la ecuación primera" (p. 14). De la misma manera la cuarta ecuación tiene las mismas soluciones que la tercera, pero cambiadas de signo. Es por ello que solo construye las soluciones de la 2º y 3º ecuaciones propuestas:



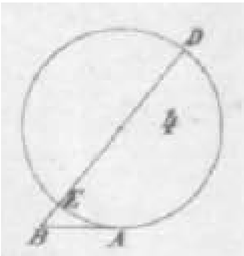
> Para construir las raíces de la ecuación segunda, podemos escribir dicha ecuacion asi: $b^2=x(a-x)$ …[1],
>
> y ahora vemos que *b* es una media proporcional entre las rectas *x* y *a-x*.
>
> *Fig.* 2. Esto supuesto, sobre una recta *AB* =*a* describo un semicírculo, en un estremo *A* del diámetro *AB* levanto una perpendicular *AC*=*b*, por el estremo *C* de esta perpendicular tiro una paralela *CE* al diámetro, y las dos rectas *CD* y *CE* serán las dos raices de esta ecuacion.
>
> En efecto, bajando la perpendicular *DF,* tendremos $DF^2=AFxFB$, ó $b^2=CD(a-CD)$. Igualdad que resulta sustituyendo en la ecuación [1] en lugar de *x* la línea *CD*; luego la línea *CD* satisface á esta ecuacion, ó es raíz de la misma. (p. 15)

A continuación estudia gráfica y algebraicamente los casos en que $AC=b=\frac{a}{2}$, donde la ecuación tiene solo una solución; y $b>\frac{a}{2}$, en cuyo caso se obtiene que la ecuación no tiene soluciones (p. 15).

Obsérvese la evolución con respecto a autores anteriores que obtenían, construían e interpretaban las soluciones negativas de la ecuación de segundo grado, mientras que Cortázar solo calcula las positivas y señala que las otras son iguales, pero cambiadas de signo, lo que indica que la construcción e interpretación de las mismas es algo conocido. Esta es la única referencia a las soluciones negativas que encontramos en la parte teórica, pero veremos la construcción e interpretación de soluciones negativas en varios problemas en que tanto una como otra no son tan evidentes, problemas recogidos en la parte de fenomenología.

En el caso de la tercera ecuación $x^2 + ax - b^2 = 0$, descomponiéndola como la anterior en $b^2 = x(a+x)$ obtiene que *b* es una media proporcional entre *x* y *a*+*x*, y hace la siguiente construcción:

> Por lo tanto, describo un círculo cuyo diámetro sea *a*, en un punto *A* tiro una tangente *AB* = *b*, desde el estremo *B* tiro la secante *BD* que pase por el centro, y tendré que *BE* y - *BD* serán las raices de la ecuación propuesta.



> En efecto, tenemos $AB^2 = BE \times BD$, ó $b^2 = BE(a+BE)$ es decir que *BE* satisface á la ecuación propuesta, ó es raiz de esta ecuación. Para probar que -*BD* es raiz de la misma, tengo *BE*=*BD*-*a*; y como $AB^2 = -BE \times -BD$, será $AB^2 = -BD(a-BD)$; luego también -*BD* satisface á la ecuación propuesta, ó es raíz de ella (p. 16).

En el siguiente punto, con el que termina este capítulo, estudia la "construcción de un ángulo, dada una de sus líneas trigonométricas" (p. 16).

Estudia dos casos, en primer lugar si $\frac{b}{a}$ es el valor del seno o del coseno del ángulo, y en el segundo si es el valor de la tangente o cotangente. En ambos casos construye el ángulo mediante un triángulo rectángulo, en el primer caso de cateto *b* e hipotenusa *a*, y en el segundo de catetos *a* y *b* (p. 16).

Tras estas construcciones teóricas resuelve una serie de problemas en las que muestra ejemplos de las mismas y de construcción de soluciones negativas, problemas recogidos, como siempre, en la parte de fenomenología.

Con la resolución de esos problemas termina la *introducción a la Geometría Analítica* y comienza el estudio de la *Geometría Analítica Plana*, tal como se puede observar en el índice de la obra (CEO2).

2. Geometría Analítica

2.1. Sistemas de coordenadas

Comienza esta parte con el estudio de las *Ecuaciones de las líneas* y esta con la determinación de un punto en un plano. Esto lo plantea como un problema, pero lo recogemos en esta parte por considerarlo un contenido teórico importante.

> 18. DETERMINAR la posición de un punto de un plano con respecto á dos rectas que se cortan y se hallan en dicho plano (p. 43).

Para resolver dicho problema comienza definiendo ejes de coordenadas, ordenada y abscisa de un punto, y coordenadas de dicho punto:

> Se llaman *ejes de coordenadas* las dos rectas indefinidas *Ox, Oy* con respecto á las cuales se determina la posición de los puntos; el eje *Ox* se llama *eje de abscisas, y* el *Oy eje de ordenadas;* el punto *O* se llama *origen de las coordenadas.*

> Se llama *ordenada* de un punto la paralela al eje de ordenadas, contada desde dicho punto hasta el eje de *abscisas. Abscisa* de un punto es la parle del eje de abscisas comprendida entre el origen y el pié de la ordenada.
>
> La abscisa y la ordenada de un punto se llaman las *coordenadas* de dicho punto (p.43).

Para explicar el signo de las coordenadas de cada punto dependiendo del cuadrante en el que estén enuncia primero el teorema de Descartes, y en base a él establece que es necesario este cambio de signos:

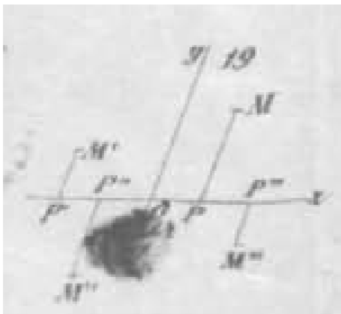
> Recordemos el teorema de Descartes (…) que puede enunciarse en los términos siguientes:
>
> *Las ecuaciones entre los valores de varias cantidades concretas se conservan las mismas, aun cuando algunas de dichas cantidades reciban sentidos enteramente opuestos á los que antes tenian, con tal que se consideren como negativos los valores de las cantidades que muden de sentido.*
> Para poder aplicar este teorema, indispensable en la Geometría analítica, supondremos que las abscisas y ordenadas de los puntos situados en el ángulo superior de la derecha de los ejes son positivas, ó lo que es igual, que las abscisas contadas á derecha del origen y las ordenadas situadas por arriba del eje *Ox* son positivas, y por consiguiente que deben ir precedidas del signo -, ó ser negativas, las abscisas contadas á la izquierda del origen y las ordenadas situadas por la parle de abajo del eje *Ox* (p. 44).

Y con esto establece cómo queda determinada la posición de un punto:

> *Esto supuesto, la posición de un punto de un plano quedará determinada con respecto á dos ejes que se hallen en dicho plano conociendo su abscisa y su ordenada* (p. 44).

Tras el comentario sobre los signos incluye una nota a pie de página en la que señala que las definiciones de abscisa y ordenada dadas al principio *solo se refieren á los valores absolutos de estas rectas* (p. 44).

Pone varios ejemplos de todo lo anterior, veamos el primero:



> Ejemplos 1º Fijar la posición de un punto cuya abscisa sea 2, y su ordenada 3.
> Tomaremos sobre el eje de las *x* la abscisa *OP=2*, y tirando por el punto *P* hacia arriba la *MP = 3* parálela al eje *Oy*, el estremo *M* dé esta paralela será el punto pedido. (p. 44)

En los demás ejemplos determina los puntos (-2,-3), (3, -2) y (-3, 2) (pp. 44-45)

En cuanto a los tipos de ejes, considera ejes rectangulares y oblicuos, que él denomina oblicuángulos, pero no coordenadas polares:

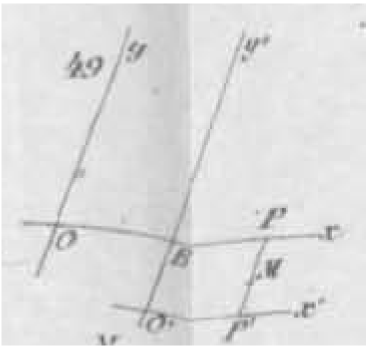
> 19. Los ejes de coordenadas pueden, ó no, ser perpendiculares entre si: en el primer caso se llaman *rectangulares, y* en el segundo *oblicuángulos.* (p. 45)

Las diferentes ecuaciones de cambio de unos sistemas de coordenadas a otros los trata en el capítulo III (CEO2). Comienza el capítulo explicando cuál es el objeto del cambio de coordenadas:

> El objeto de la transformación de las coordenadas es el siguiente: *dada la ecuación de una línea, hallar la ecuación de la misma referida á otros ejes diferentes de los primeros, pero cuya posición esté determinada con respecto á estos.* (p. 75)

Contempla tres casos:

> 1.° variación del origen, siendo los nuevos ejes paralelos a los primitivos; *2º.* variación de la dirección de los ejes, siendo el origen el mismo; 3.º compuesto de los dos primeros, á saber, variación del origen y de la dirección de los ejes (p. 75).



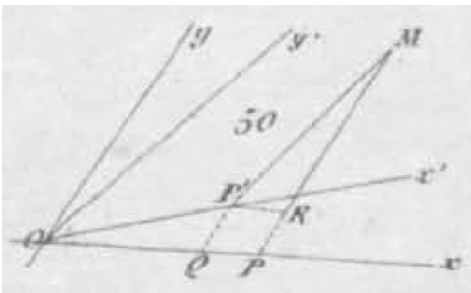
Y estudia cada uno de los casos:

> Primer caso. *Dada la ecuación de una línea con respecto á los ejes Ox, Oy, hallar la ecuación de la misma línea con respecto á los ejes Ox', Oy' paralelos á los primeros* (p.75).

Llamando *a,b* a las coordenadas del nuevo origen, *x, y* a las coordenadas primitivas de un punto cualquiera *M*, y *x', y'* a las nuevas, obtiene como ecuaciones de cambio:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b. \end{aligned}\right\} \ldots\ [1]$$

(p. 76)



Segundo caso. *Dada la ecuación de una línea con respecto á*

los ejes oblicuángulos Ox, Oy, hallar la ecuación de la misma con respecto a los nuevos ejes oblicuángulos Ox', Oy', que tienen el mismo origen que los primeros.

En este caso las ecuaciones obtenidas son: (p. 77)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{sen}(\theta - \alpha')}{\operatorname{sen}\theta}, \\ y &= \frac{x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}. \end{aligned}\right\} \ldots\ [2]$$

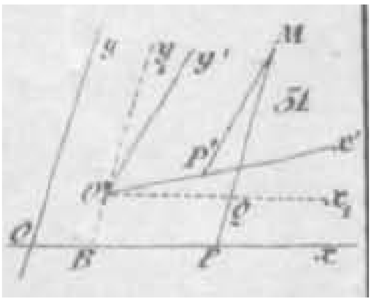
Siendo *x, y* las coordenadas antiguas, *x', y'* las nuevas, α=ángulo *x'Ox*, α'= ángulo *y'Ox* y Θ=ángulo de los ejes primitivos.

Incluye una nota en la que dice que este caso comprende los de pasar de ejes oblicuángulos a rectangulares, de rectangulares a rectangulares, y de rectangulares a oblicuos, con el mismo origen en los tres casos, y obtiene las ecuaciones particulares en cada caso tomando los ángulos α, α' y Θ como corresponda (pp. 77-78).

Por último, el tercer caso:

> Dada la ecuación de una línea, hallar la ecuación de la misma con respecto a nuevos ejes, cuyo origen y dirección sean diferentes de los primitivos (p. 78).

En este caso toma unos ejes auxiliares $O'x_1$, $O'x_2$, paralelos a los antiguos, con origen el de los nuevos ejes. Tomando α=ángulo $x'Ox_1$, α'= ángulo $y'Ox_1$ y Θ= ángulo de los ejes primitivos, a, b, las coordenadas del nuevo origen, x, y, las coordenadas antiguas, y x', y', las nuevas (en los ejes Ox', Oy'), obtiene como ecuaciones del cambio: (p. 79)



$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \operatorname{sen}(\theta-\alpha) + y' \operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta} + a, \\ y &= \frac{x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta} + b. \end{aligned}\right\} \ldots [3]$$

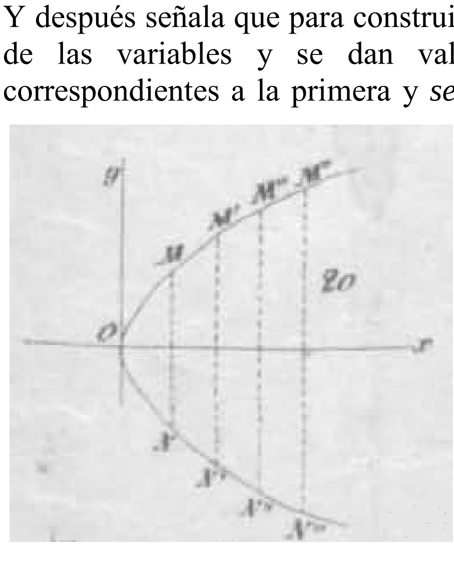
Termina el capítulo demostrando que "la transformación de las coordenadas no altera el grado de las mismas" resultado que enuncia como teorema (p. 81).

2.2. Ecuaciones de la recta

Pero anteriormente a esto, en el capítulo II y tras explicar la determinación de un punto en el plano, como hemos visto, pasa a definir el lugar geométrico de una ecuación (LG):

> 20. Dada una ecuación con dos incógnitas ó variables x é y, para hallar sus diferentes soluciones, se despeja una de las incógnitas, y por ejemplo, se dan á la otra, x, valores arbitrarios, y se hallan los valores correspondientes de la y.
>
> Supongamos ahora que se construyan los puntos, cuyas coordenadas sean las diferentes soluciones halladas: como estos puntos pueden construirse tan próximos entre si como se quiera, formarían una línea. Luego á toda ecuacion con dos variables corresponde (prescindiendo de los casos de escepcion, que mas adelante examinaremos), una línea plana que se llama el *lugar geométrico* de la ecuación (p. 45).

Y después señala que para construirlo en general se hace lo dicho arriba, se despeja una de las variables y se dan valores arbitrarios a la otra hallando los valores correspondientes a la primera y *se construyen* los puntos hallados (p. 45). Pone como ejemplo la construcción del *lugar geométrico de la ecuación* $y^2 = 2x$ (PREJ).



> Despejando la y, tendremos $y = \pm\sqrt{2x}$.
>
> Haciendo $x = 0$, resulta $y = 0$, lo que nos dice que el punto cuyas coordenadas son 0 y 0, esto es el origen, corresponde á la línea, ó que la línea pasa por el origen.
>
> Haciendo ahora $x = 1$, 2, 3, 4... los valores correspondientes de y son

$$y = \pm\sqrt{2}, \pm 2, \pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{8} \ldots$$

> Demos ahora á x valores negativos: los valores correspondientes de y son imaginarios; lo que prueba que la línea no tiene punto alguno en la región de las abscisas negativas, ó lo que es igual, que la línea está enteramente comprendida en los ángulos superior é inferior de la derecha de los ejes.
> Construyamos ahora los puntos *M, M', M", M'"..., N, N', N", N"'...*, cuyas coordenadas sean las diferentes soluciones halladas, juntándolos por medio de una línea continua, resultará la curva que indica la figura, y que será aproximadamente lugar geométrico de la ecuación propuesta (p.46).

Obsérvese que a pesar de calcular las coordenadas de varios puntos no los pone en forma de tabla.

Tras explicar qué es y cómo se construye el lugar geométrico de una ecuación, aborda el problema contrario, el de dado un lugar geométrico determinar qué se entiende por su ecuación:

> 22. Acabamos de ver cómo puede hallarse el lugar geométrico de una ecuacion de dos variables. Veamos, por el contrario, cómo, dada una línea plana, puede hallarse su ecuacion.
> Observemos en primer lugar que una línea plana está determinada ó definida cuando se conoce alguna de sus propiedades *características*, es decir, que solo pertenecen á dicha línea. El enunciado de esta propiedad es la *definición* de la línea; y el *estudio* de la línea consiste en deducir de la propiedad adoptada por definición las demás propiedades de la misma. La *ecuacion de una línea* es la ecuacion que indica la relación constante entre las coordenadas x é y de un punto cualquiera de dicha línea (p. 47).

Y tras esto da la definición de Geometría Analítica plana (D):

> Podemos ya definir la Geometría analítica plana, diciendo que es *la ciencia que se ocupa del estudio dé las líneas planas por métodos generales, representándolas antes por medio de ecuaciones* (p. 47).

Obsérvese que no define Geometría Analítica hasta no haber definido lugar geométrico de una ecuación, que es el concepto fundamental de la Geometría Analítica tal y como la conocemos hoy en día.

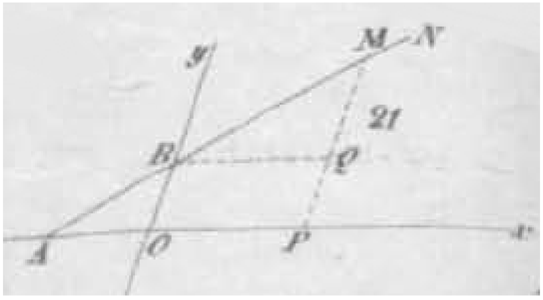
Seguidamente abunda en este concepto, explicando que dada la ecuación de una línea todos los puntos de la misma satisfacen la ecuación, por dar ésta la relación que existe entre las coordenadas del punto.

> 23. Según la definición de la ecuación de una línea, si un punto cuyas coordenadas son x' é y' corresponde á una línea cuya ecuación sea $f(x,y)=0$, tendremos $f(x',y')=0$; puesto que la ecuación $f(x,y) =0$ es la relación entre la abscisa y ordenada de un punto cualquiera de la línea. Por consiguiente, *siempre que un punto se halle en una línea, las coordenadas particulares del punto sustituidas en la ecuacion en lugar de las generales, verifican esta ecuacion* (p. 47).

Utiliza esta idea para explicar cómo se calculan algebraicamente los puntos de corte de dos curvas conocidas sus ecuaciones (PRI):

24. Sean *f(x,y)=0, φ(x,y)=0* las ecuaciones de dos líneas, y supongamos que estas dos líneas se corten en uno ó varios puntos; y sean *x'* é *y'* las coordenadas de cualquiera, de los puntos de interseccion: tendremos en virtud del principio último, las dos ecuaciones *f(x',y')=0, φ(x',y')=0.*

Resolviendo estás dos ecuaciones, cada solucion nos dará las coordenadas de un punto de interseccion de las dos líneas (p.47).



También explica cómo hallar el corte de una *línea* cualquiera con cada uno de los ejes de coordenadas.

Tras estas consideraciones generales sobre lugares geométricos obtiene la ecuación de una recta, en primer lugar para ejes oblicuos (ER):

27. Consideremos, pues, á la recta *AN* en el caso mas general, que es aquel en que la recta no es paralela á ninguno de los ejes, y tampoco pasa por el origen; y supongamos que se conozcan la *ordenada en el origen*, es decir, la ordenada del punto *B,* én que la recta corta al eje de ordenadas, y el ángulo *NAx* superior de la derecha que la recta forma con el eje *Ox* (…). Para hallar la ecuación de la recta, señalaremos las coordenadas *OP=x,MP = y* de un punto *M* de la recta, punto cuyas coordenadas sean positivas: llamemos θ al ángulo *Ox* superior de la derecha que forman los ejes, α al ángulo *NAx*, y *b* á la ordenada del punto *B,* la cual podrá ser positiva ó negativa, según la posición dé este punto. Tiremos ahora la recta *BQ* paralela al eje *Ox,* y tendremos en el triángulo *MBQ* la proporción

$$\frac{MQ}{BQ} = \frac{sen\, MBQ}{sen\, BMQ}$$

ó, puesto que el ángulo *BMQ=MPx-MAx=θ-α,* será $\frac{y-b}{x} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ (\theta-\alpha)}$,

de donde $y = \dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}x + b$ (p. 48).

Señala que la ecuación la ha hallado en el caso en que las dos coordenadas son positivas, pero que" en virtud del convenio sobre los signos que deben preceder á las coordenadas y á las líneas trigonométricas, el teorema de Descartes nos dice que la ecuación hallada es general" (p. 49), y lo comprueba en el caso en que tanto las coordenadas del punto como la ordenada en el origen son negativas (p. 49).

Vemos aquí que las cantidades negativas aún siguen siendo problemáticas en algunos aspectos, aunque en esta obra ya no se identifican las letras de una ecuación, tanto variables como parámetros, con el valor absoluto de las cantidades, pudiéndose sustituir por valores negativos y positivos sin necesidad de cambiarles el signo.

Además de esta ecuación da otra en la que se tiene como dato el ángulo β que forma la recta con el eje de las *y* y *a* es la "abscisa en el origen": $x = \dfrac{sen\beta}{sen(\theta-\beta)}y + a$ (p. 49).

Tras esto estudia los casos particulares en que la recta pasa por el origen de coordenadas, o es paralela a los ejes. Para hallar la paralela al eje de ordenadas utiliza esta última ecuación:

> Si la recta es paralela al eje de las *y*, tendremos $b=\infty$ y $\alpha=\theta\ \dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}=\infty$.
>
> Como en la ecuacion $y=\dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}x+b$ hay dos cantidades que se hacen infinitas en este caso, para hallar la ecuación de la recta en términos finitos, nos valdremos de la ecuación $y=\dfrac{sen\beta}{sen(\theta-\beta)}x+a$, la cual por ser actualmente $\beta=0$, se reduce á *x = a,* como evidentemente debe ser, pues todos los puntos de dicha recta tienen la misma abscisa *a* (p. 50).

En este mismo punto da la ecuación segmentaria de la recta, que él no llama así sino que la da como aquella que viene determinada por la ordenada *b* y la abscisa *a* en el origen. Haciendo $0=\dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}a+b$ obtiene $\dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}=-\dfrac{b}{a}$, de ahí $y=-\dfrac{b}{a}x+b$, y de ella $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (p. 50).

Finalmente inserta una nota en la que explica que el coeficiente $\dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}$ se llama *coeficiente angular de la recta*, es decir no lo llama pendiente, ni siquiera en el caso en que los ejes sean rectangulares, cuyo valor calcula a continuación. También señala que se acostumbra a representar dicho coeficiente angular (sean como sean los ejes) por *a*, quedando por tanto la ecuación de la recta $y=ax+b$ (p. 51).

También da la ecuación general al demostrar que toda ecuación de primer grado tiene por lugar geométrico una recta (LG).

> (…) *toda ecuación de primer grado tiene por lugar geométrico una línea recta.*

En efecto, la ecuacion general de primer grado con dos variables es $Ax+By=C$, ó $\dfrac{A}{C}x+\dfrac{B}{C}y=1$, ó $\dfrac{x}{\frac{C}{A}}+\dfrac{y}{\frac{C}{B}}=1$, ecuacion de una recta, cuya abscisa y ordenada en el origen son $\dfrac{C}{A}$ y $\dfrac{C}{B}$ (p. 51).

Seguidamente explica cómo representar una recta dada su ecuación. En principio nos dice que se da a *x* dos valores particulares y se hallan los correspondientes de *y*, pero después puntualiza que si la recta pasa por el origen con un punto es suficiente, y si no es así los puntos más adecuados son los de corte con los ejes. Pone un ejemplo, pero no ejercicios (p. 52).

> *Ejemplos.* Construir la recta representada por la ecuacion *2y-3x=0.*

> Esta recta pasa por el origen: dando á *x*; el valor 2, resulta $y = 3$, y por consiguiente, construido el punto cuyas coordenadas son 2 y 3, y tirando por el origen y por este punto una recta, se tendrá el lugar geométrico de la ecuación propuesta (p. 52).

De forma análoga procede con la recta $3y\text{-}2x+5=0$.

Tras estas consideraciones sobre la recta comienza un apartado que titula *PROBLEMAS SOBRE LA LÍNEA RECTA*, en el que obtiene distintas ecuaciones de la recta variando los datos, la distancia entre dos puntos, de un punto a una recta y la demostración de algunos teoremas de la Geometría elemental. Todos ellos se encuentran recogidos en el apartado de fenomenología.

4.8.3.2. Sistemas de representación

En esta obra solo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico, que aparece en forma de expresiones algebraicas; y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos y, posteriormente las construcciones geométricas.

No utiliza tablas, aunque en los ejemplos en el que representa el lugar geométrico de una ecuación dada da varios valores a la abscisa y calcula los correspondientes de la ordenada, pero no los organiza en forma de tabla (LG, ER).

Utiliza el lenguaje natural en definiciones, resultados y enunciados.

Encontramos muchas definiciones en el texto, define aplicación del Álgebra a la Geometría elemental y Geometría Analítica (D), factor lineal, grado de un monomio, de un polinomio y de un radical; ecuación homogénea (U); construcción de una expresión lineal (E), ejes de coordenadas y coordenadas de un punto (C), lugar geométrico, ecuación de una línea (LG) y coeficiente angular de una recta (ER) entre otros.

Las explicaciones de las construcciones geométricas las hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (E).

En cuanto a los enunciados tenemos que decir que en esta obra encontramos varios teoremas, incluso lemas y corolarios (U, PR, C) y además da conclusiones o resultados generales en forma de enunciado en algunos problemas (PR). También encontramos enunciados en los problemas y los ejemplos propuestos (PR, LG).

Se hace uso del lenguaje simbólico continuamente, en ambas partes de la obra, al hacer uso en todo momento del Álgebra. En la primera parte nos encontramos la construcción de las fórmulas y el uso de ecuaciones en la resolución de los problemas determinados de Geometría (E, PRDT).

En la segunda encontramos diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la distancia entre dos puntos y las fórmulas de cambio de coordenadas, entre otras muchas, así como la expresión general de la ecuación correspondiente a un lugar geométrico expresada de la forma $f(x,y)=0$, que no hemos visto en otros autores anteriores (LG, ER, PRAN, PRDI, C).

Los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados al final del texto en láminas aparte, no en él, como ya se ha dicho.

Como en otros autores los hay de dos tipos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución (PR).

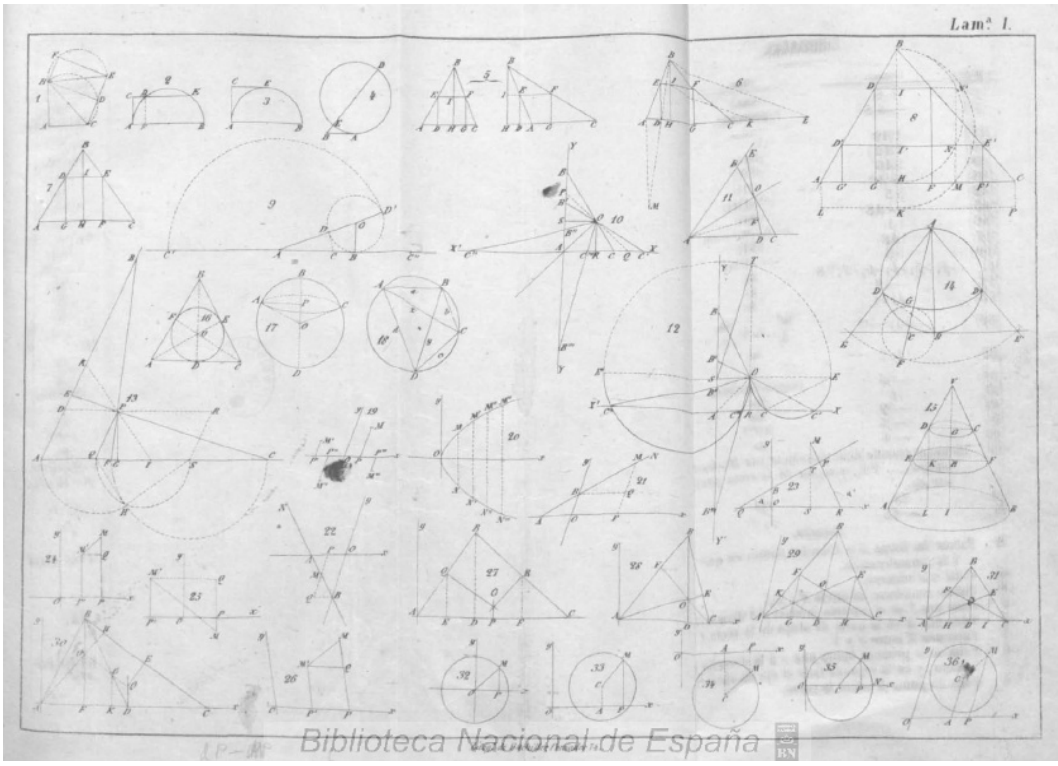


Figura 60: Lámina I. Tratado de Geometría Analítica. J. Cortázar

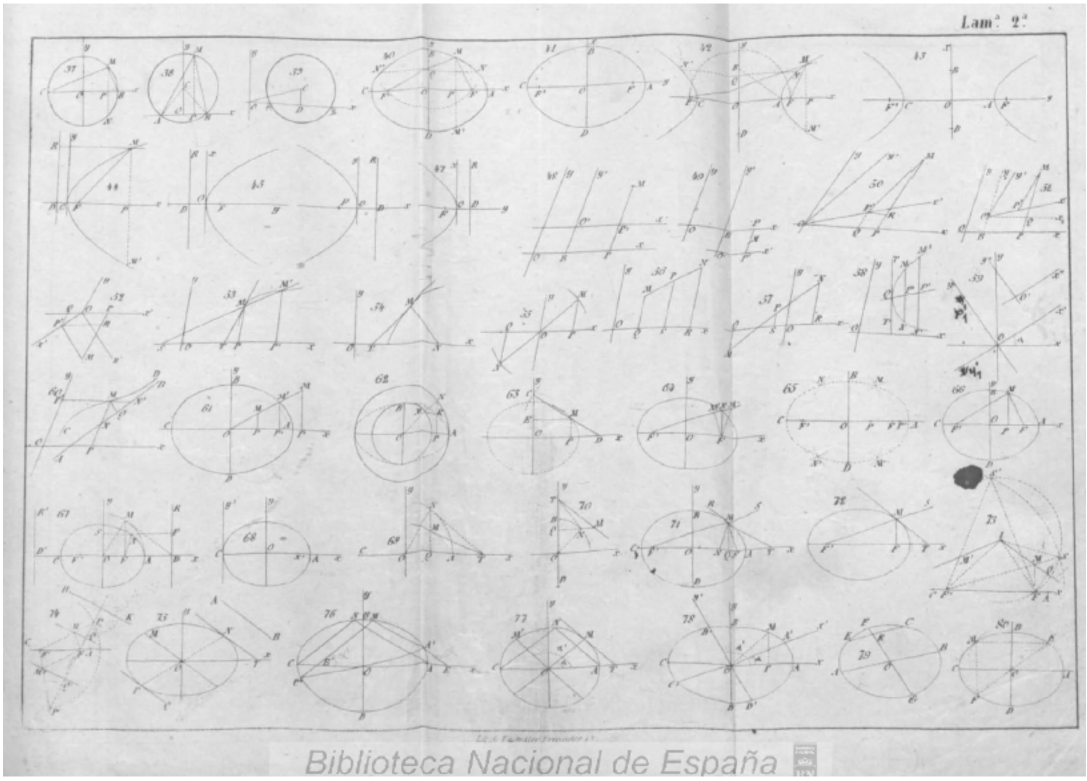


Figura 61: Lámina 2ª. Tratado de Geometría Analítica. J. Cortázar

El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc.; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso en sus razonamientos (SN, E, C, N, ER).

4.8.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, y en particular geométrico, simplemente en el problema 5 de los problemas gráficos inserta una nota al final en la que se dice que "su resolución numérica puede ser importante en la Topografía" (p. 26) (PR).

Podemos distinguir dos grandes tipos de problemas, unos resueltos en la parte de aplicación del Álgebra a la Geometría elemental, y otros en la parte de Geometría Analítica.

Dentro de los primeros los hay de dos tipos, que él mismo clasifica: los *gráficos* que requieren de una construcción gráfica de las soluciones, como inscribir un cuadrado en un triángulo; y los *numéricos* en los que se obtienen mediante el uso del Álgebra fórmulas generales de la Geometría, como calcular el área de un triángulo en función de sus lados (PRDT).Tanto unos como otros sirven para mostrar cómo se pueden resolver problemas geométricos por medio del Álgebra.

En la parte de Geometría Analítica también resuelve un buen número de problemas. Se pueden distinguir también dos tipos, aquellos en que calcula resultados teóricos como diferentes ecuaciones de una recta o la fórmula de la distancia entre dos puntos (ER, PRD); y los que él mismo enuncia como "aplicaciones de la línea recta á la demostración de algunos teoremas de la Geometría elemental", que son problemas relativos a los puntos notables de un triángulo (PR).

Por tanto nos encontramos cuatro tipos de problemas atendiendo a su fenomenología.

Por último señalar que a los largo del texto Cortázar intercala ejemplos o pequeños ejercicios con el fin de aclarar los conceptos que acaba de explicar, como la representación de un punto en un plano (PREJ) o la construcción de un lugar geométrico dando valores en su ecuación (LG), ejemplos que hemos visto en la parte de análisis de contenido.

Veremos todo esto con más detalle: como en otros autores recogemos el enunciado de todos los problemas resueltos por el autor, pero solo insertamos la solución de algunos de ellos a modo de ejemplo.

Los problemas de aplicación del Álgebra a la Geometría elemental están recogidos en el capítulo III de la primera parte de la obra, tal como se aprecia en el índice (CEO2).

Comienza el capítulo explicando cómo se lleva a cabo esta resolución:

> 17. La resolución de un problema gráfico por medio del cálculo algébrico consta de tres partes: 1.ª poner el problema en ecuación, 2.º despejar la incógnita ó las incógnitas, 3.º construir los valores de las incógnitas, cuando sean construibles por medio de la regla y el compás (p.17).

Continúa diciendo que para obtener la ecuación se debe suponer el problema resuelto, al igual que los demás autores analizados. Termina indicando cómo debe hacerse la construcción de la solución:

> La construcción de las incógnitas debe hacerse sobre la figura misma del problema, aprovechando las líneas conocidas, de modo que la construcción sea lo mas sencilla posible, y al mismo tiempo la recta que resulte de la construccion para valor de la incógnita, ocupe, sin traslacion, el lugar mas conveniente: en esta doble condición consiste la *elegancia* de la construccion (p.17).

Hace una consideración que no hacen otros autores, y es la posibilidad de que el problema sea de aplicación directa y se resuelva "sobre el terreno":

> Cuando los problemas gráficos se proponen fuera del papel, como en el terreno, la construcción geométrica de las incógnitas es inútil, y solo hay que hallar sus valores numéricos (p.17).

Como hemos señalado en esta parte nos encontramos con dos tipos de problemas: problemas gráficos y problemas numéricos, según la nomenclatura del autor. Nosotros utilizaremos una clasificación similar a la utilizada en otras obras, pero respetando a la vez la de Cortázar.

1. **Para mostrar la construcción de expresiones algebraicas y de segmentos negativos (PRDT) (*Problemas gráficos*)**

Con este fin Cortázar resuelve los diez problemas que a continuación enunciamos.
De ellos mostramos la resolución de los problemas 1, 2, 5, 6 y 7, en el desarrollo de cada uno de ellos explicamos qué tiene de característico.

El problema 3 se encuentra resuelto por Zorraquín y el 4 por Lacroix, y los tres últimos son similares al séptimo, por lo que no incluimos su resolución.

Problema 1.º *Inscribir en un triángulo ABC (Figura 5) uncuadrado, es decir, construir un cuadrado que tenga dos de susvértices sobre dos lados del triángulo, y los otros dos sobre el tercer lado, prolongado, si uno de los ángulos de la base es obtuso* (p.18).

Problema 2.º *Inscribir en un triángulo un rectángulo que tenga una área dada* (p. 20).

Problema 3.° *Dividir una recta en media y estrema razón* (p. 22).

Problema 4.° *Dadas dos rectas indefinidas XX', YY' perpendiculares entre sí, y un punto O equidistante de las dos, tirar por este punto una recta tal, que su parte comprendida entre las dos rectas indefinidas tenga una magnitud determinada* (p.24).

Problema 5.º *Dado un ángulo BAC y un punto P dentro de él, tirar por este punto una recta que forme con los dos lados del ángulo un triángulo que tenga una área dada* (p. 27).

Problema 6.° *Dado un circulo ÁDB (fig. 14) y una tangente EE', tirar por el estremo A del diámetro AB, perpendicular á dicha tangente, una recta tal, que su parte DE comprendida entre la circunferencia y la tangente tenga una magnitud determinada m* (p. 29).

Problema 7º: *Dividir un cono VAB en dos partes, cuyas áreas laterales estén en la razón m:n, por medio de un plano paralelo á la base* (p. 30).

Problema 8.º *Dividir un cono troncado de bases paralelas en dos partes, cuyas áreas laterales estén en la razón m : n , por medio de un plano paralelo á las bases* (p. 31).

Problema 9.º *Dividir un cono en dos partes, cuyos volúmenes estén en la razón m : n, por medio de un plano paralelo á la base* (p. 32).

Problema 10º. *Dividir un cono troncado dé bases paralelas en dos partes, que estén en la razon m : n, por medio de un plano paralelo a las bases* (p. 32).

Problema 1.º Inscribir en un triángulo *ABC* (Figura 5) un cuadrado, es decir, construir un cuadrado que tenga dos de sus vértices sobre dos lados del triángulo, y los otros dos sobre el tercer lado, prolongado, si uno de los ángulos de la base es obtuso (p.18)

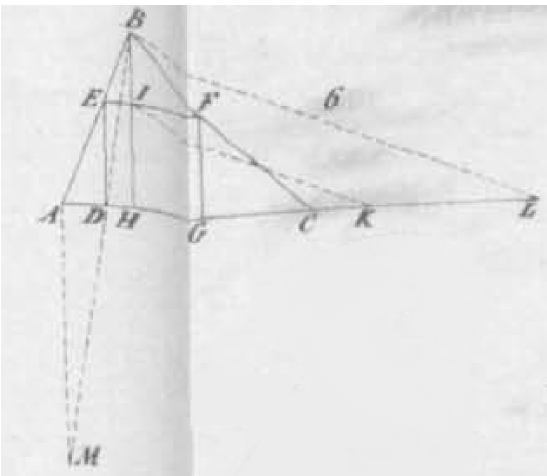
En este problema veremos la construcción de una cuarta proporcional.

Este problema lo resuelven otros autores de la misma manera, tanto analítica como gráficamente: Lista, Lacroix y Vallejo en su Tratado y también Zorraquín aunque este hace una construcción diferente. Para ver la resolución completa consultar el análisis de la obra de Alberto Lista. Pero lo incluimos porque Cortázar añade una segunda solución, tomando por incógnita un segmento distinto con el objeto "de hacer ver que una nueva incógnita principal puede dar una solución mas sencilla que la primera", como señala en la nota que inserta al final del problema (p. 20) en la que aclara los objetivos por los que plantea este problema.

Veamos esta solución alternativa. Para resolver el problema por el primer método había considerado *DEFG* el cuadrado que se quiere construir, *x=IH=DE* lado del cuadrado, *BH=α* y *AC=b*. Datos que sigue considerando en el segundo caso, pero tomando ahora *y=AD* y relacionando la antigua incógnita con la nueva.

> Aunque la solución que acabamos de dar de este problema es muy sencilla, todavía se puede hallar otra que lo sea mas, tomando por incógnita principal la *AD*.

PG: Llamemos *y* á la nueva incógnita: para llegar á conocerla, no tendremos mas que hallar la relación que hay entre *x* é *y*, puesto que *x* ha sido la incógnita principal en la solución anterior, y eliminando la *x*, se tendrá la ecuación que nos dará el valor de *y*.



Para esto, tenemos la proporción *BH:DE::AH:AD*,

PRA: ó *α:x::AH:y*, y llamando *d* al segmento *AH*, será *a:x::d:y*.

Eliminando la *x* entre esta ecuación y la [A] $\left(x=\frac{ab}{a+b}\right)$, y despejando la *y*, resulta

$y = \frac{bd}{\alpha + b}$ (p. 19).

RG: He aqui un modo elegante de construir esta espresion, que es una cuarta proporcional á las rectas $\alpha+b$, b y d. En el punto A levanto una perpendicular AM igual á la base b, junto el punto M con el B, y la recta AD será el valor de y (p. 20).

Y comprueba que el segmento obtenido es la solución buscada:

> En efecto, los triángulos semejantes *ADM, BDH* nos dan la proporción

AM:BH::AD:DH, ó $b:\alpha::AD:d-AD$, ó $\alpha+b:b::d:AD$, de donde $AD = \frac{bd}{\alpha+b}$que es el valor de y.

Levantado pues en el punto *D* la perpendicular *DE,* tirando la *EF* paralela á la *AC,* y bajando la perpendicular *FG,* tendré el cuadrado *EFGD* inscripto en el triángulo (p. 20).

Como ya hemos dicho, inserta una nota al final del problema explicando el objeto del mismo:

> NOTA 1. Hemos resuelto este problema con dos objetos:

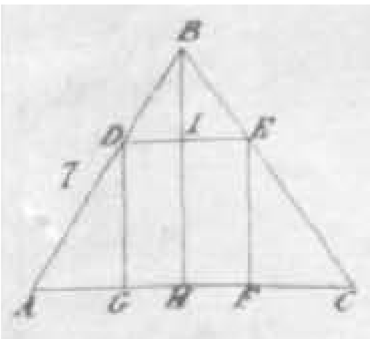
1.º con el de presentar una construcción elegante, 2.º con el de hacer ver que una nueva incógnita principal puede dar una solución mas sencilla que la primera (p. 20).

Problema 2.º Inscribir en un triángulo un rectángulo que tenga una área dada.(p. 20)

Este problema se resuelve mediante un sistema de ecuaciones que se reduce a una ecuación de segundo grado. Cortázar nos muestra la construcción de la solución sin resolver la ecuación, a través de la construcción de una media proporcional:

Considera el problema resuelto, siendo *ABC* el triángulo considerado, *AC* –“prolongado si uno de sus ángulos *A* o *C* es obtuso”- el lado sobre el que debe asentarse el rectángulo y m^2 el área que debe tener el rectángulo (p. 20). Observemos que como la cantidad que viene dada es un área toma m^2en vez de *m.* En este caso considera como incógnita *x=IH*, altura del rectángulo.

PG: Tenemos en primer lugar la ecuación $IH \times DE = m^2$, ó $x \times DE = m^2$ … [1]:



como la recta *DE* esincógnita, tenemos ahora qué hallar otra ecuación, distinta de la [1], entre las dos incógnitas *x* y *DE.*

Para esto, los triángulos semejantes *ABC* y *DBE* nos dan la proporción $\frac{AC}{DE} = \frac{BH}{BI}$ *ó,* llamando α á la altura *BH* y *b* al lado *AC,* $\frac{b}{DE} = \frac{\alpha}{\alpha - x}$

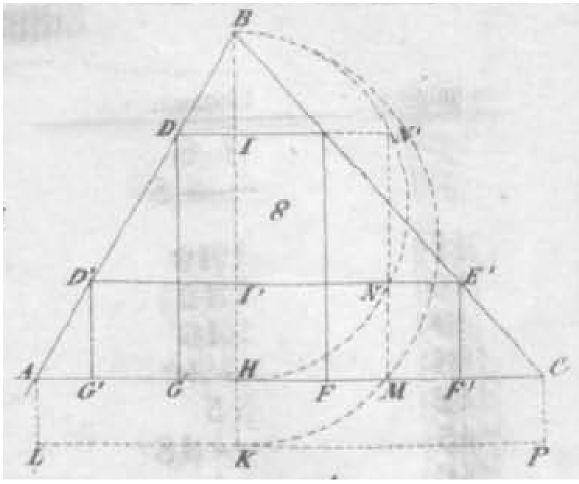
PRA: Con esta ecuación y la anterior, eliminando *DE* obtiene $x^2-\alpha x+\dfrac{\alpha m^2}{b}=0$ que tiene como soluciones: $x=\dfrac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4}-\dfrac{\alpha m^2}{b}}$ (p. 20).

Señala que *x* tiene dos valores positivos y fáciles de construir, sin embargo no los construye directamente, sino que vuelve a la ecuación y construye sus soluciones sin resolverla. Pero antes de eso discute los posibles valores de *x* dependiendo del valor del radical, y obtiene la condición que debe cumplir el área del rectángulo para que se pueda inscribir en el triángulo:

Los valores de *x* serán imaginarios, siempre que $\dfrac{\alpha m^2}{b}>\dfrac{\alpha^2}{4}$, ó $m^2>\dfrac{\alpha b}{4}$ *y* entonces el problema es imposible.

Los dos valores de *x* serán reales, $\dfrac{\alpha m^2}{b}\leq\dfrac{\alpha^2}{4}$, ó $m^2\leq\dfrac{\alpha b}{4}$: luego *el mayor rectángulo inscriptible en un triángulo es aquel cuya área es mitad de la del triángulo* (p. 21).

Tras esto pasa a la construcción de las soluciones:



La ecuacion $x^2-\alpha x+\dfrac{\alpha m^2}{b}=0$ nos da $\dfrac{\alpha m^2}{b}=x(\alpha-x)$ … [2]

Construyamos el rectángulo *ACPL* cuya área sea m^2, y tendremos $b\times HK=m^2$ y por consiguiente $\dfrac{m^2}{b}=HK$.

Luego la ecuación [2] será $\alpha\times HK=x(\alpha-x)$...[3] (p. 21).

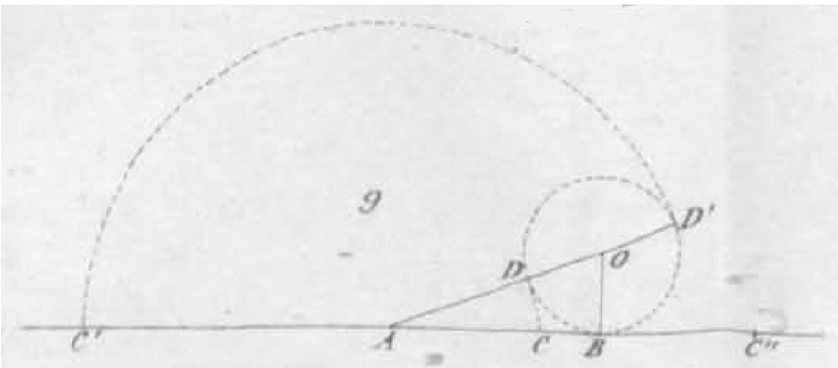
Transforma esta ecuación en otra cuyas soluciones se saben construir, para ello construye primero una media proporcional entre α y *HK* utilizando la propiedad de las circunferencias que nos dice que si un segmento de cuerda es perpendicular a un diámetro, entonces es media proporcional entre los segmentos que determina sobre el mismo.

> (..) para lo cual (la construcción de la media proporcional entre α y *HK*) , considerando á *BK* como diámetro, describo media circunferencia; y por consiguiente *HM* será la media proporcional: de suerte que la ecuación [3] se transformará en $HM^2=x(\alpha-x)$.
>
> Teniendo la ecuación esta forma, sabemos (15) que los dos valores de *x*; se construirán describiendo un semicírculo sobre el diámetro *BH* y tirando la *MN* paralela al diámetro; y entonces los dos valores de *x* serán *MN*y *MN'*. Bajando, pues, desde los puntos *N* y *N'* dos perpendiculares al diámetro, y construyendo los rectángulos correspondientes, quedará el problema resuelto (p. 21).

Problema 3.° Dividir una recta en media y estrema razón (p. 22).

No incluimos la solución de este problema porque es exactamente la misma que la dada por Zorraquín, pero sí incluiremos las conclusiones que extrae de él. Como hemos dicho en la parte de análisis de contenido Cortázar no trata de forma teórica el tema de los segmentos negativos, pero sí lo hace en algunos de los problemas propuestos. Este es uno de ellos. Tras obtener dos soluciones, una positiva y otra negativa, ésta aparentemente no válida, las estudia y llega a la conclusión de que la negativa es solución de un problema más general.

La ecuación a resolver es $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ que tiene como soluciones $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$. En principio considera que el valor negativo no es solución del problema dado, pero cambiando el signo lo es de uno nuevo, o incluso de uno más general en que las dos soluciones son válidas:



> El valor negativo no corresponde á ningún problema; pero mudado de signo corresponderá á un nuevo problema análogo al actual. En efecto, mudando el signo de *x* en la ecuación [1], la nueva ecuación será $\frac{a}{-x}=\frac{-x}{a+x}$ ó $\frac{a}{x}=\frac{x}{a+x}$, ecuación que corresponde á este problema:

Dados dos puntos A y B sobre una recta indefinida AB, hallar un tercer punto sobre la misma, y fuera de los dos puntos dados, tal que su distancia al punto mas próximo sea media proporcional entre su distancia al mas lejano y la de los dos puntos dados (p. 22).

Y concluye que ambos problemas están comprendidos en uno más general:

> Los dos problemas que acabamos de resolver están comprendidos en este otro general.

Dados dos puntos sobre una recta indefinida, hallar sobre la misma recta un tercer punto, cuya distancia á uno de los dos puntos dados sea media proporcional entre su distancia al otro punto y la de los dos puntos dados (p. 23).

En una nota al final del problema señala los objetivos al proponer el mismo:

NOTA 1.(…) al proponer el problema tercero, (…) nos proponíamos presentar un ejemplo, en el cual se verificase que el valor negativo de la incógnita de un problema de condiciones restrictivas, tomado positivamente, corresponde á otro problema análogo al propuesto, y también de condiciones restrictivas; y que quitadas dichas condiciones restrictivas, resulta otro problema general, al cual corresponden los dos valores que tiene la incógnita en cualquiera de dichos problemas, tomando el valor negativo, mudado él signo, en sentido contrario del positivo (p. 24).

Y concluye un principio general sobre las soluciones negativas:

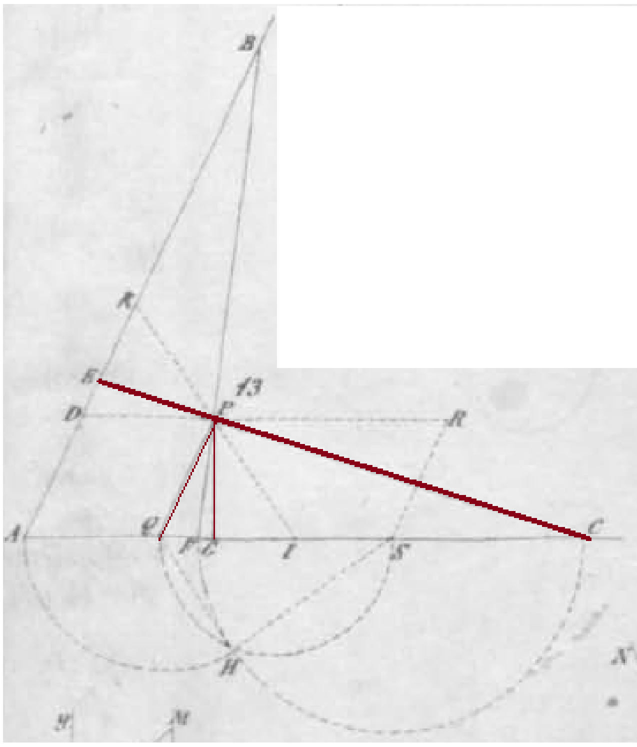
> Podemos pues sentar este principio: *Si un problema es susceptible de soluciones de sentido contrario, los valores negativos de las incógnitas, mudados los signos y tomados en sentido contrario de los positivos, resolverán el problema* (p. 24).

Como vemos en esta obra sigue apareciendo la idea de los números negativos como indicadores de un cambio en las condiciones del problema o de un cambio de sentido, que hemos visto en autores anteriores y que es característica de la matemática francesa, como indicamos en el análisis del libro de Lacroix.

Problema 5.º Dado un ángulo *BAC* y un punto *P* dentro de él, tirar por este punto una recta que forme con los dos lados del ángulo un triángulo que tenga una área dada (p. 27)

En este problema veremos una construcción *elegante* de un radical, según palabras del propio autor, que inserta, como en otros, una nota al final del problema en la que explica los motivos de incluirlo. En esa misma nota dice que "su resolución numérica puede ser importante en la Topografía" (p. 29).

Como siempre supone el problema resuelto. Planteará un sistema con $AC=x$ y AE como incógnitas, que reduce a una ecuación de segundo grado.



> Supongamos que la recta *EC* sea la recta pedida: tomemos por incógnita principal la recta $AC=x$; tiremos la recta *PQ* paralela á la *AB*, y llamemos a á la parte *AQ*, α á la perpendicular *PG* á la *AC*, y m^2 al área que ha de tener el triángulo *EAC*. Tenemos (…)
> $AE \times xsenA = 2m^2 \ldots$ [1]

Halla la otra ecuación entre *AE* y x aplicando semejanza de triángulos en los triángulos *AEC* y *QPC*:

> (…) como *AE* es también incógnita, hallaremos otra ecuacion entre las incógnitas x y *AE*. Los triángulos semejantes *AEC* y *PQC* nos dan la proporción.
>
> *AE: PQ::AC:QC,*

> Ó puesto que en el triángulo rectángulo *PGQ* es *PG=PQ senPQG,* ó *α=PQsenA* y por consiguiente (…) $AE = \frac{\alpha x}{sen\,A(x-a)}$ (p. 28)

Sustituyendo en la ecuación [1] obtiene una ecuación de segundo grado de soluciones $x = \frac{m^2}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{m^4}{\alpha^2} - 2\frac{m^2}{\alpha}a}$ (p. 28)[55].

Tras esto discute el número de soluciones el problema dependiendo del valor del radicando llegando a la conclusión de que si $\frac{2m^2 a}{\alpha} < \frac{m^4}{\alpha^2}$ o $2a\alpha < m^2$, el problema tiene dos solciones, si $2a\alpha = m^2$ tendrá solo una y si $m^2 < 2a\alpha$"el radical será imaginario y por consiguiente imposible" (p. 28)

De todo ello deduce la siguiente propiedad del triángulo que se trata de construir:

> (…) y pues m^2 es el área del triángulo *AEC,* y $2a\alpha$ es el doble del área del paralelógramo *ADPQ,* se infiere que *el menor triángulo que se puede formar, tirando* por *un punto P dentro de un ángulo una recta, es el triángulo AIK*, *cuya área es* $2a\alpha$, esto es, *doble del paralelógramo ADPQ* (p. 28).

Tras esto pasa a construir las soluciones suponiendo que el problema tenga dos. Para construir el radical no lo hace directamente, sino que lo transforma completando el cuadrado de un binomio que lo convierte en construible mediante el cateto de un triángulo rectángulo.

> Construyamos el paralelógramo *DRSA,* cuya área sea igual á m^2; será por consiguiente $DR = \frac{m^2}{\alpha}$. Observo ahora que la cantidad que está bajo el radical consta de los dos primeros términos del cuadrado del binomio $\frac{m^2}{\alpha} - a$; completando dicho cuadrado, podemos escribir la cantidad radical de este otro modo: $\sqrt{\left(\frac{m^2}{\alpha} - a\right)^2 - a^2}$; luego la cantidad radical es un cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es $\frac{m^2}{\alpha} - a$, y el otro cateto es *a.* Es evidente que la recta $QS = \frac{m^2}{\alpha} - a$; luego, para construir el cateto representado por el radical, describiré sobre la *QS* un semicírculo, desde el punto *Q* llevaré la cuerda *QH =QA = a,* y tirando la otra cuerda *HS,* esta será el valor del radical. Ahora, haciendo centro en *S*, y describiendo con el radio *SH* media circunferencia, tendré los valores *AC* y *AF* de *x*; tirando las rectas *CPE* y *FPB,* quedará el problema resuelto (p. 29).

[55] En el libro hay una errata, la a de la fórmula está elevada al cuadrado. En la discusión que hace después los valores del radicando están bien.

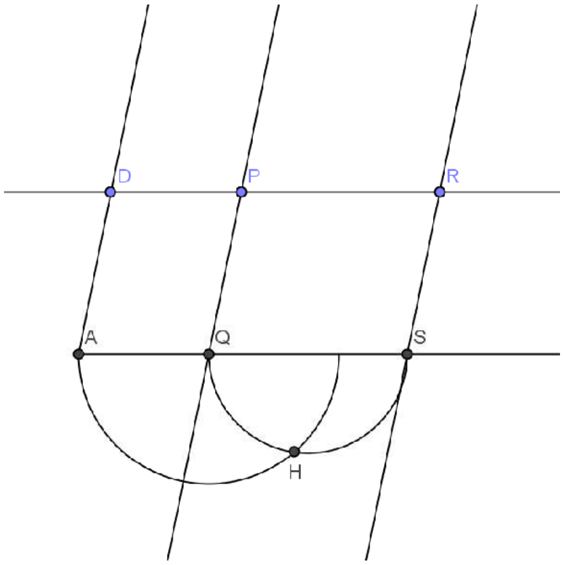


Figura 62: Construcción solución problema 5.

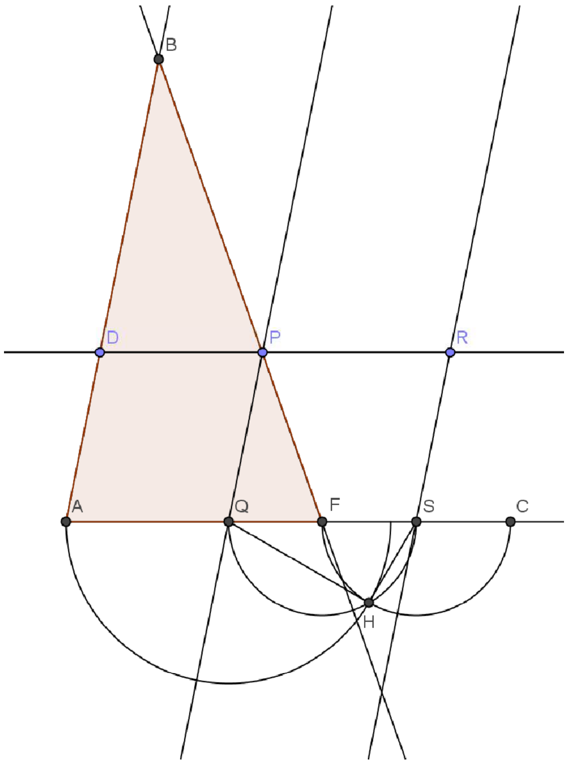


Figura 63: Solución1. Problema5

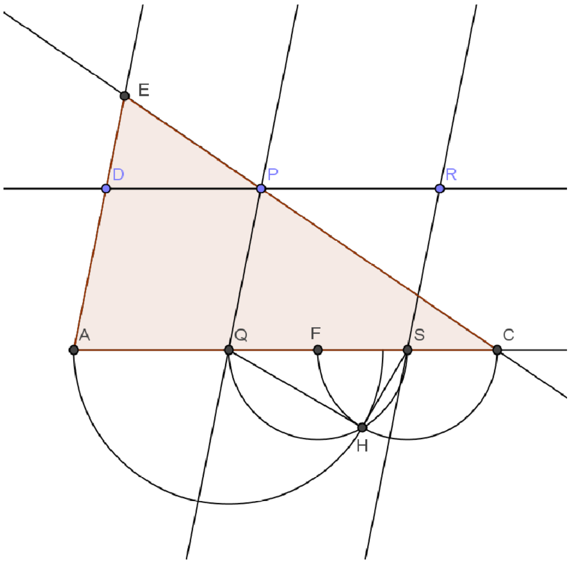
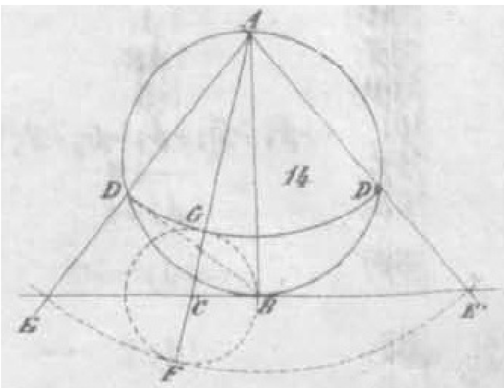


Figura 64: Solución 2. Problema 5

Problema 6.° Dado un circulo ADB (fig. 14) y una tangente EE', tirar por el estremo A del diámetro AB, perpendicular á dicha tangente, una recta tal, que su parte DE comprendida entre la circunferencia y la tangente tenga una magnitud determinada *m* (p. 29).

En este problema hace de nuevo un estudio de las soluciones negativas, pero en este caso no son soluciones de un nuevo problema. En él no hace uso del Álgebra prácticamente, pues construye la solución sin resolver la ecuación, como ya hizo en un problema anterior:

PG: Como siempre supone el problema resuelto y considera *AE* la recta que se quiere trazar de manera que *DE=m, AE=x, AB=2r*.



Tiro la cuerda *BD*, la cual será perpendicular á la recta *AE*, y por tanto $AB^2 = AE \times AD$

PRA: ó $4r^2 = x(x-m)$.

RG: Construyamos los valores *x,* sin resolver ésta ecuacion. Siendo *2r* media proporcional entre *x* y *x-m*, tomaremos $BC = \frac{m}{2}$, y haciendo centro en *C*, describiremos con el radio *CB* una circunferencia, y tirando la secante *ACF*, será *AF* el valor positivo de *x*, y *-AG* el negativo.

Haciendo, pues, centro en *A,* y describiendo con el radio *AF* una circunferencia, esta cortará á la tangente en los puntos *E* y *E'*; tirando en seguida las dos rectas *AE* y *AE'* tendremos las dos soluciones que puede tener el problema (p.29).

E interpreta y el valor negativo, *AG,* de la incógnita llegando a la conclusión de que da las mismas soluciones que la positiva (SN).

En cuanto al valor absoluto *AG* del valor negativo de *x*, vamos á ver que en este problema nos dará las mismas soluciones que el valor positivo *AF*.

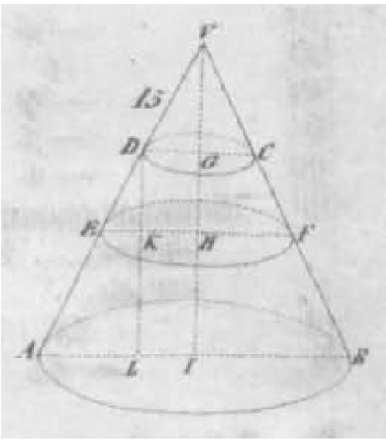
En efecto, mudemos el signo de *x* en la ecuacion anterior, y tendremos la nueva ecuacion $4r^2 = x(x+m)$, ecuación cuyas raices se diferencian de las raices de la ecuación primitiva en el signo; y que se hubiera hallado directamente si se hubiese tomado por incógnita del problema *AD*.
(…) Por consiguiente, siendo *AG* el valor positivo de la incógnita de la nueva ecuacion, haremos centro en *A*, y describiendo con el radío *AG* un arco, este cortará á la circunferencia dada en los puntos *D* y *D'*; tirando las dos rectas *ADE* y *AD'E'* se tendrán las dos soluciones del problema, las mismas halladas en el primer caso (p. 30).

Y como en otros problemas inserta una nota aclaratoria, en este caso de por qué el valor negativo no da un nuevo problema como en el caso anterior:

Nota: Obsérvese que el valor negativo, mudado el signo puede no corresponder a otro problema diferente del propuesto, por no poder admitir el problema soluciones de sentido contrario (p. 30).

Problema 7º: Dividir un cono VAB en dos partes, cuyas áreas laterales estén en la razón m:n, por medio de un plano paralelo á la base (p. 30)

En este problema, como en los tres restantes, y en los numéricos, no construye la solución.



PG: Sea *VD=x*, *l* el lado *VA* del cono: tendremos llamando *VDC* y *ADCB* á las áreas laterales del cono entero *VDC* y del troncado *ADCB*, $\frac{VDC}{ADCB} = \frac{m}{n}$, y por consiguiente $\frac{VDC}{VAB} = \frac{m}{m+n}$.
Ahora los conos *VDC* y *VAB* semejantes tienen sus áreas proporcionales á los cuadrados de sus lados, es decir, $\frac{VDC}{VAB} = \frac{VD^2}{VA^2} = \frac{x^2}{l^2}$; luego $\frac{x^2}{l^2} = \frac{m}{m+n}$ (p. 30).

No despeja *x*, ni la construye, de la construcción dice que entra en el problema 47 de la Geometría elemental (p. 31).

2. Para obtener resultados teóricos de Geometría mediante el uso del Álgebra (PRDT) (*Problemas generales numéricos*)

En estos problemas el autor obtiene una serie de fórmulas de la Geometría elemental con ayuda del Álgebra. Como las soluciones que se buscan son fórmulas que dan resultados numéricos no se construye la solución. En la solución de estos problemas se hace muy poco uso de la Geometría.

De ellos solo resolveremos uno, pues son todos muy similares. Hemos elegido el quinto pues el 1º, 3º y 4º están resueltos por Vallejo y Lacroix, y el 2º es muy similar a estos dos últimos.

Problema 1.º *Hallar el área de un triángulo, dados sus tres lados* (p. 33).

Problema 2.º *Hallar el área lateral de un cono troncado de bases paralelas, siendo conocida la regla para hallar el área lateral del cono entero* (p. 34).

Problema 3.º *Hallar el volúmen de un cono troncado de bases paralelas, conociendo la regla para hallar el volúmen del cono entero* (p. 34).

Problema 4.° *Hallar el volumen de una pirámide troncada de bases paralelas, siendo conocida la regla para hallar el volúmen de la pirámide entera* (p.35).

Problema 5º. *Hallar el radio del circulo circunscripto á un triángulo cuyos tres lados son conocidos* (p. 35).

Problema 6.° *Hallar el radio del circulo inscripto en un triángulo, cuyos tres lados son conocidos* (p. 36).

Problema 7.° *Hallar el volumen de un segmento esférico de una base, conociendo su altura y el radio de la esfera* (p.36).

Problema 8.º *Dividir una esfera por medio de un plano en dos segmentos que esten en la razón de m : n; ó lo que es igual, dado el radio de una esfera, hallar la altura del segmento de una base, cuyo volumen esté con el de la esfera en la razón de m : m+ n* (p. 37).

Problema 9.º *Dados los cuatro lados de un cuadrilátero inscripto en un círculo, hallar el área del cuadrilátero, y las diagonales del mismo* (p.40).

Problema 5º. Hallar el radio del circulo circunscripto á un triángulo cuyos tres lados son conocidos (p. 35).

En este problema prácticamente no se hace uso de la Geometría. Se parte de la fórmula del área de un triángulo en función de dos de sus lados y el ángulo comprendido y utilizando resultados de Trigonometría y Geometría se llevan a cabo transformaciones algebraicas y se llega a la fórmula que da el radio buscado en función del perímetro y los lados del triángulo, pero no vemos ningún tipo de razonamiento geométrico en él (pp. 35-36).

Tenemos

$$S = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2};$$

pero (*Trig.* 33) $\operatorname{sen} A = \frac{a}{2r}$;

luego $S = \frac{abc}{4r}$,

de donde $r = \frac{abc}{4S}$,

ó $$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

3. Para obtener fórmulas generales (ER, PRD, PRAN)

Dentro de este apartado englobamos la obtención de las ecuaciones de una recta conocidos diferentes datos, y la distancia de un punto a una recta y entre dos puntos. Cortázar no resuelve problemas relativos a ángulos, ni siquiera el ángulo que forman dos rectas.

> 31. *Hallar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas x', y' de un punto por donde pasa, y su dirección, ó sea el ángulo que la recta forma con el eje de abscisas* (p. 52).

32. Hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados (x',y'),(x",y") (p. 53).

34. Hallar la ecuación de una recta que pasa par un punto dado (x', y'), y es perpendicular á una recta dada; siendo los ejes rectangulares (p. 53).

35. Hallar la espresion de la distancia de dos puntos en funcion da las coordenadas de dichos puntos (p. 54).

36. Hallar una espresion de la distancia de un punto dado á una recta dada, siendo los ejes rectangulares (p. 55).

Incluimos la resolución del problema *34* como ejemplo de obtención de la ecuación de una recta y el *35* como ejemplo de un problema de distancias.

34. Hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto dado (x', y'), y es perpendicular á una recta dada; siendo los ejes rectangulares (p. 53)

Para ello estudia antes la condición que deben cumplir las pendientes, *tgα, tgα'* de dos rectas perpendiculares entre sí (PRP) obteniendo el resultado conocido de que $tg\alpha' = -\dfrac{1}{tg\alpha}$ (p. 54).

> Para resolver este problema, conviene primeramente *hallar la relacion que hay entre los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares entre si*.

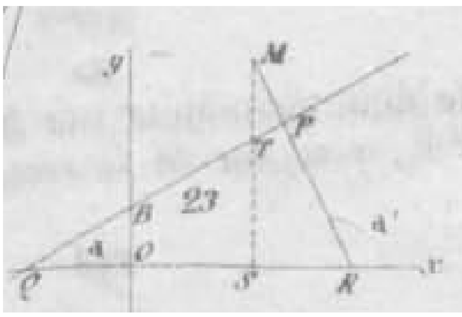


Fig. 23. Sean PQ y MR las dos rectas perpendiculares entre si, α y α' los ángulos que forman respectivamente con el eje Ox: tenemos $\alpha' = 90^{\circ} + \alpha$, y por consiguiente $tg\alpha' = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha = -\dfrac{1}{tg\alpha}$; luego $tg\alpha \cdot tg\alpha' = -1$, es decir *que el producto de las tangentes de los ángulos que dos rectas perpendiculares entre si forman con el eje de abscisas, es igual a -1*(p. 54).

Y comprueba que la condición también es suficiente:

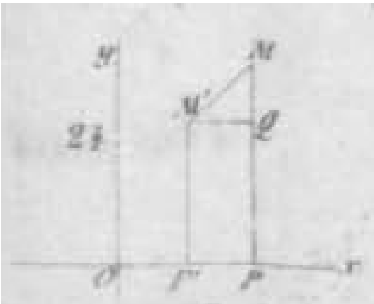
> Al contrario, si se verifica la relación $tg\alpha \cdot tg\alpha' = -1$, las dos rectas serán perpendiculares entre si.

> En efecto, de la ecuación supuesta sale $tg\,\alpha' = -\frac{1}{tg\alpha} = -\cot\alpha = tg(90° + \alpha)$; y pues los ángulos α' y 90°+ α a son ambos positivos y tienen la misma tangente, son iguales, es decir, α'=90°+ α; luego las dos rectas *PQ* y *MR* son perpendiculares entre si (p. 54).

Teniendo en cuenta esto y la ecuación de la recta conocido uno de sus puntos y su *coeficiente angular* (pendiente), calculada en el problema *31*, obtiene que la ecuación de la recta buscada es $y - y' = -\frac{1}{tg\alpha}(x - x')$, o $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$, (p. 54) siendo a la pendiente de la recta que se da como dato.

35. Hallar la espresion de la distancia de dos puntos en funcion da las coordenadas de dichos puntos (p. 54)

Calcula la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en ejes perpendiculares y oblicuos.



Primeramente lo hace considerando los ejes perpendiculares, para ello utiliza el teorema de Pitágoras:

> Supongamos en primer lugar que los ejes sean rectangulares.
>
> Sean los dos puntos dados *M* y *M',* á cuyas coordenadas llamaremos respectivamente *x* é *y, x'* é *y'* tiremos la *M'Q* paralela á *Ox,* y llamemos δ á la distancia *MM'*: tendremos en el triángulo rectángulo *MM'Q*, $MM'^2 = M'Q^2 + MQ^2$, ó
>
> $\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ (p. 55).

Concluye a modo de resultado general:

> *(…) el cuadrado de la distancia de dos puntos es igual al cuadrado de la diferencia de las abscisas de dichos puntos, mas el cuadrado de la diferencia de las ordenadas de los mismos puntos* (p. 55).

E inserta una nota en la que aclara que aunque la fórmula se ha hallado suponiendo que los dos puntos tienen coordenadas positivas, "estamos seguros por el principio de Descartes (18), que la fórmula hallada es general". Y lo comprueba para dos puntos genéricos con ordenada y abscisa negativa respectivamente (p. 55).

Termina calculando la fórmula para el caso particular en que uno de los puntos es el origen de coordenadas (p. 55).

Análogamente, utilizando en este caso el teorema del coseno, obtiene para ejes oblicuos que la distancia viene dada por $\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta$, para el caso general y por $\delta^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$, en el caso de que uno de los dos puntos sea el origen (p.55).

4. **Para ejemplificar cómo resolver problemas mediante el uso de sistemas de coordenadas (PRAN, PRP, PRI) (*Aplicaciones de la línea recta á la demostración de algunos teoremas de Geometría elemental*.)**

Bajo esta denominación el autor engloba cinco problemas que se refieren a las rectas y puntos notables de un triángulo.

Como en el caso anterior solo incluimos la resolución del primero de ellos, pues son todos muy similares.

Teorema 1º. *Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un mismo punto* (p. 57).

Teorema 2.° *Las perpendiculares bajadas desde los vértices de un triángulo á los lados opuestos se encuentran en un mismo punto* (p. 58).

Teorema 3.º *Las rectas tiradas desde los vértices de un triángulo á los puntos medios de los lados opuestos se encuentran en un mismo punto* (p. 59).

Teorema 4.° *El centro O del circulo circunscripto á un triángulo ABC , su centro de gravedad G y el punto O' de interseccion de las tres perpendiculares tiradas desde los vértices á los lados opuestos están en línea recta; y la distancia GO entre los dos primeros puntos es mitad de la distancia GO' entre los dos segundo* (p. 60).

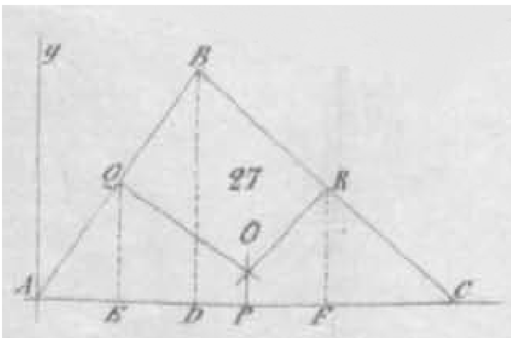
Teorema 5.º *Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un mismo punto* (p. 61).

Teorema 1º. Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un mismo punto (p. 57)

Como vemos lo que prueba es que las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto.

Para hacerlo toma el triángulo con base sobre el eje *OX* y uno de sus vértices como origen de coordenadas.

Comienza planteando el problema:



Sea *Ax* el eje de abscisas y la perpendicular *Ay* el eje de ordenadas. La cuestión está reducida á hallar las ecuaciones de las dos rectas *QO* y *RO* perpendiculares á los lados *AB*, y *BC* en sus puntos medios, á hallar la abscisa de su punto de interseccion, y ver si esta abscisa es $AP = \frac{b}{2}$; pues si asi resulta, las dos perpendiculares *QO* y *RO* se encontrarán en un punto *O* de la perpendicular *PO*, es decir, que las tres perpendiculares se encontrarán en un mismo punto.

Halla la recta *QO* y para ello el punto medio de *AB* que da directamente, no utilizando semejanza de triángulos como vimos en Odriozola.

Hallemos la ecuación de la recta *QO* (…). Tenemos pues que hallar en primer lugar las coordenadas del punto *Q*, y la tangente del ángulo *A*. Llamando *x'* é *y'* á las coordenadas *AD* y *BD* del punto *B*, tendremos evidentemente $AE=\frac{x'}{2}, QE=\frac{y'}{2}$, la tangente del ángulo *BAD* es (33) $\frac{y'}{x'}$.

Luego la ecuación de la recta *QO* será $y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'}{y'}\left(x-\frac{x'}{2}\right)$(p. 58).

Después halla *RO*:

Para hallar la ecuación de la perpendicular RO, tenemos primeramente

$AF=AD+DF=x'+\frac{b-x'}{2}=\frac{x'+b}{2}, RF=\frac{y'}{2}$ y (33) $tgBCx=\frac{y'}{x'-b}$ luego la ecuación de la *RO* es $y-\frac{y'}{2}=\frac{b-x'}{y'}\left(x-\frac{x'+b}{2}\right)$(p. 58).

Y resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtiene $x=\frac{b}{2}$ (pp.57-58). No calcula la ordenada del punto, lo que sí hace es añadir una nota en la que dice que *ya se sabe que el punto O de intersección de las tres perpendiculares es el centro del círculo circunscripto* (p. 58).

4.8.4. Conclusiones

Vemos en esta obra, como en las anteriores, dos partes claramente diferenciadas. Pero en el texto de Cortázar lo están aún más si cabe, pues el autor diferencia claramente entre lo que él define como *aplicación del Álgebra a la Geometría elemental*, en la que aún se mezclan métodos algebraicos y sintéticos, y la Geometría Analítica propiamente dicha, basada en el concepto de lugar geométrico. A este concepto este autor dedica mucha más atención que los anteriores –algunos incluso ni siquiera lo nombran- pues da su definición, explica el concepto y cómo construirlo dada su ecuación, poniendo dos ejemplos. Uno de ellos es la recta, y en él se basa para dar la ecuación de la misma.

Respecto al tema de los negativos, Cortázar los trata de una forma más superficial que autores anteriores sin hacer un estudio teórico de los mismos, de su construcción o interpretación, aunque sí pone varios ejemplos en los problemas. Esto puede ser indicativo de que en esta época ya se tenía más asimilado este concepto con lo que no era necesario explicarlo de forma tan exhaustiva como en décadas pasadas.

A pesar de esto hemos de señalar que la interpretación que da de las soluciones negativas sigue siendo la misma que aparece en obras más antiguas, lo que indica la influencia de los autores franceses aún en la segunda mitad del siglo XIX. Recordemos que Cortázar estudió ingeniería en París.

En cuanto al tema de las ecuaciones homogéneas lo resuelve con el teorema y los ejemplos que vimos en la parte de análisis de contenido, en el que llega a la conclusión de que cualquier ecuación es homogénea siempre que se tome como unidad un segmento que no forme parte de ella. Después no vuelve a utilizarla, ni siquiera a mencionarla ni en los problemas. De igual manera que con los segmentos negativos esto puede ser un indicio de que este tema empieza a estar asumido y ya se empiezan a utilizar todo tipo de ecuaciones sin necesidad de convertirlas en homogéneas, en base al teorema que hemos citado. Vemos aquí un punto de inflexión respecto al tratamiento anterior y el que se realiza actualmente.

Por otra parte, teniendo en cuenta de que es una obra de referencia para los estudios de la Facultad de Ciencias, llama la atención que no utilice coordenadas polares utilizadas con normalidad por otros autores. Ello puede indicar, como señala Escribano (2000) la escasa cultura matemática de la época.

4.9. Lecciones de Geometría Analítica de Santiago Mundi y Giró (1883)

4.9.1. Autor

Santiago Mundi y Giró nació en Figueras (Gerona) el 28 de junio de 1842 (CA1), en el seno de una familia muy modesta. Ello le llevó a dar lecciones en varios colegios y tocar el violín en algunos teatros – ya que era un buen músico-, para poder terminar sus estudios en la Facultad de Ciencias de Barcelona (CA2).

En 1881 ganó por oposición la cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de Barcelona (CA3), y siendo ya catedrático estudió en la facultad de Farmacia, licenciándose en 1900 (CA2). En 1867 ingresó en la Academia de Ciencias de Barcelona, donde ocupó diversos cargos (CA3).

También intervino en política siendo elegido concejal del Ayuntamiento de Barcelona en 1903 (CA6).

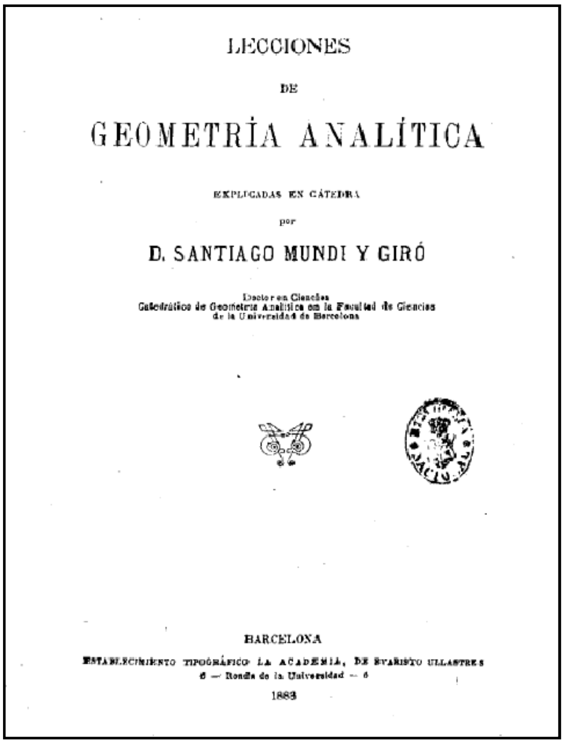
Además de los números trabajos leídos en la Academia de Ciencias y de los muchos artículos publicados en revistas entre sus obras se encuentran las siguientes (CA5):

Lecciones de Geometría Analítica, de la que se hicieron tres ediciones; *Apuntes autobiografiados de Geometría de posición* (1883), *Extracto de algunas lecciones de Geometría general, Lecciones de Geometría métrica* (1903), *Geometría General*, e *Importancia de la matemática de la música* (Enciclopedia Espasa-Calpe, 1929).

4.9.2. Caracterización de la obra

El libro analizado corresponde a la primera edición de las Lecciones de Geometría Analítica de Santiago Mundi y Giró, impresa en Barcelona en 1883 en el Establecimiento tipográfico de la academia de Evaristo Ullastres. El ejemplar analizado se puede localizar en la Biblioteca Digital Hispánica (Agosto 2012) (RO).

El libro consta de 438 páginas, aunque el texto propiamente dicho se extiende hasta la página 418 (CEO1), el resto está ocupado casi en su totalidad por el índice - situado al final del tomo- ya que especifica los contenidos de cada uno de los capítulos (CEO2).


LECCIONES

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

EXPLICADAS EN CÁTEDRA

por

D. SANTIAGO MUNDI Y GIRÓ

Doctor en Ciencias
Catedrático de Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Barcelona

BARCELONA
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO LA ACADEMIA, DE EVARISTO ULLASTRES
6 — Ronda de la Universidad — 6
1883

Figura 65*:* Carátula del libro. Lecciones de Geometría Analítica. S. Mundi.

Debido a su extensión incluimos únicamente los títulos de cada uno de los capítulos.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

SEGUNDA PARTE

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO

Capítulo XV: Rectas y planos
Capítulo XVI: Ecuaciones de primer grado en coordenadas tangenciales y tetraédricas
Capítulo XVII: Teorías del centro y de los planos diametrales en las superficies de segundo orden.
Capítulo XVIII: Clasificación de las superficies de segundo orden
Capítulo XIX: Forma de las superficies de segundo orden
Capítulo XX: Generatrices rectilíneas
Capítulo XXI: Contacto y polaridad en las superficies de segundo orden
Capítulo XXII: Intersección de superficies de segundo orden
Capítulo: XXIII: Generación de superficies
Capítulo XXIV: Ley de la dualidad en las superficies de segundo orden
Capítulo XXV: Transformación de superficies

De todos ellos solo hemos analizado los cuatro primeros, que se refieren al punto y a la recta en el plano.

Como se puede observar, entre los contenidos del texto no se encuentra el "análisis determinado" que era una parte fundamental de las obras anteriores. Escribano (2000) realiza un estudio comparado de los contenidos de las tres primeras ediciones de la obra de Mundi y señala que el análisis determinado vuelve a incluirse en la segunda edición de estas *Lecciones* (1893), aunque desaparecen de nuevo en la de 1904. Previamente a esta obra Mundi había elaborado un *Programa razonado de Geometría Analítica* (1880), que defendió en las oposiciones que le llevaron a acceder a la cátedra de Geometría Analítica de la Facultad de Ciencias de Barcelona en 1881. En este programa Mundi ya no incluye el análisis determinado, justificando su exclusión del mismo:

> Mundi prescinde de la ley de homogeneidad y de la construcción gráfica de las expresiones algebraicas, tradicionales en las obras de geometría analítica y lo hace con ciertas reservas ("quizá se nos critique") y justificando su ausencia:"estas teorías importantes tienen cabida en el primer curso de análisis y no forman parte de la asignatura [geometría analítica]" (Escribano, 2000, p. 326)

En cuanto a los objetivos (CEO3) que el autor perseguía al elaborar sus *Lecciones* y el nivel de estudios a que estaba destinada se incluye una *advertencia preliminar* al comienzo del libro en la que se especifica que la obra se trata simplemente de un resumen de las lecciones que se explican *en cátedra*, suponemos por tanto que el objetivo del autor sería que sirviera de guía para sus alumnos.

> Al publicar estas lecciones de Geometría Analítica, no hemos creido presentar una obra original, ni mucho menos censurar de ningún modo, las que suelen servir de texto en nuestras Universidades. Son sencillamente un resumen de las lecciones que explicamos en cátedra, y con su impresión esperamos prestar un verdadero beneficio á nuestros alumnos.

Según explica Escribano (2000) esta obra, publicada por su autor en tres ocasiones (1883, 1893 y 1904) y reeditada por sus herederos en 1916 y 1921, alcanzó gran resonancia en su época y fue adoptada como texto en numerosas universidades españolas y americanas. En la segunda edición se indica que fue premiada con la Medalla de Oro en la Exposición Universal de Barcelona de 1888 y en el Certamen Universal de Chicago (1893), informada favorablemente por el Real Consejo de Instrucción Pública (1892) y adoptada como texto en las universidades de Barcelona, Madrid, Sevilla y Granada, entre otras (CEO5).

En cuanto a las obras y autores en que Mundi se basó a la hora de elaborar este texto hemos de decir que no cita a nadie, por lo que no podemos saber por qué autores estuvo influenciado (CEO4).

4.9.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.9.3.1. Análisis de la estructura conceptual

En la parte analizada de la obra se distinguen claramente cuatro partes, que coinciden con sendos capítulos (CEO2).

Comienza, como otros autores, definiendo Geometría Analítica pero pasa inmediatamente a definir sistemas de coordenadas cartesianas -para poder fijar la posición de un punto en un plano- y las ecuaciones de cambio entre ellos (C). Termina el primer capítulo dando la definición de lugar geométrico y la clasificación de las curvas (LG).

En el capítulo II estudia diferentes ecuaciones de la recta (ER), y diferentes problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad, ángulos y distancias (PR).

En el capítulo siguiente introduce los sistemas de coordenadas polares, tangenciales y trilineales, estudiando en cada uno de ellos las ecuaciones de la recta y algunos de los problemas del capítulo anterior (C, E, PR).

Es de destacar la introducción conceptos propios de la Geometría Proyectiva tales como recta del infinito, punto del infinito y puntos impropios. (ER, PR) Sin embargo no se trata la Aplicación del Álgebra a la Geometría tal como hemos visto en obras más antiguas, es decir, operando algebraicamente con segmentos (SN), por lo que desaparece la necesidad de que las ecuaciones sean homogéneas (U) y de aprender a construir las soluciones obtenidas algebraicamente.

Por último, en el capítulo IV, titulado *teorías superiores de la recta*, resuelve algunos problemas clásicos e introduce nuevos conceptos como sistemas armónicos o involución (PR).

Veamos todo esto con más detalle.

1. Sistemas de coordenadas

Como decimos comienza el estudio dando la definición de Geometría Analítica:

> La Geometría analítica estudia las propiedades de las figuras geométricas por medio del cálculo algébrico (p.7).

Seguidamente pasa a tratar los sistemas de coordenadas. En primer lugar habla de la necesidad de fijar la posición de un punto:

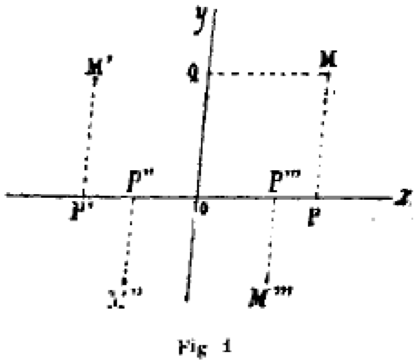
> 2. Sistemas de coordenadas.- En toda figura debe estudiarse su magnitud, su forma y su posición. La magnitud, que no es más que el resultado de comparar su extensión con la de otra figura que se toma por unidad, conduce evidentemente á un número. Mas las ideas de forma y de posición solo han sido determinadas

> numéricamente por el Análisis cartesiano. La forma se obtiene fijando la posición de los puntos de la figura (p. 7).

Y explica cómo fijarlos, con lo que define sistema de coordenadas:

> La posición de un punto se determina por dos valores numéricos si el punto pertenece a una figura plana y por tres valores si es un punto cualquiera del espacio. Estos valores que determinan la posición de un punto constituyen lo que se llama un sistema de coordenadas (p. 8).

Señala que en principio se centrará en el sistema seguido por Descartes (p. 8), dejando para más adelante el estudio de otros sistemas.



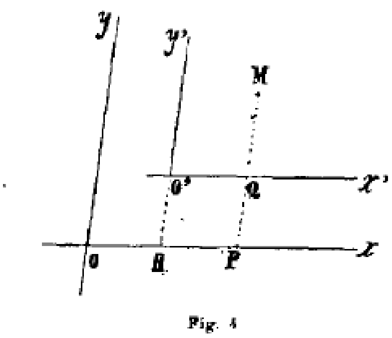
En este primer estudio utiliza sistemas oblicuos, define abscisa (él la denomina *abcisa*) y ordenada, y utiliza la notación moderna en la que las dos coordenadas se sitúan dentro de un paréntesis, notación que no había sido utilizada por otros autores anteriores.

> Dadas las dos coordenadas, no existe más que un solo punto correspondiente; por lo tanto podemos designarle por estos dos valores encerrados dentro un paréntesis, expresando siempre primero la abcisa. Así (7,-3) significa un punto cuya abcisa sea 7 y cuya ordenada sea -3. (p. 8)

Y explica los signos de las coordenadas de un punto dependiendo del cuadrante en el que se encuentren, pero tratándolo como algo obvio:

> Es evidente que M tiene sus dos coordenadas positivas, M' ordenada positiva y abcisa negativa, M' sus dos coordenadas negativas y M" abcisa positiva y ordenada negativa. Los puntos del eje de las abcisas tienen ordenada cero y los del eje de las ordenadas abcisa cero. El origen viene representado por (0, 0) (p. 8).

Tras calcular la fórmula que da la distancia entre dos puntos (PRD) y resolver el problema de dividir un segmento en otros dos según una razón dada (PRDT) –ambas cuestiones recogidas en el apartado de fenomenología- vuelve a ocuparse de los sistemas de coordenadas calculando las ecuaciones de cambio entre los diferentes tipos de ejes cartesianos. Para ello primero define transformación de coordenadas:



> 5. DEFINICIÓN.-La transformación de coordenadas tiene por objeto expresar las coordenadas de un punto, referidas á unos ejes, en función de las coordenadas del mismo punto con respecto á otros nuevos ejes (p. 11).

En primer lugar calcula las ecuaciones cuando solo hay un cambio de origen. Toma *Ox, Oy* como ejes primitivos, *O'x, O'y* los nuevos ejes, paralelos a los anteriores, y *(a,b)* las coordenadas del nuevo origen *O'* respecto del antiguo, obteniendo las ecuaciones:

$$x = a + x'$$
$$y = b + y'$$ (p. 12, fig. 4).

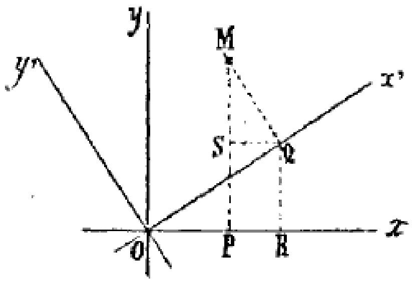


Fig. 5

Después obtiene las ecuaciones de cambio entre sistemas de ejes rectangulares, con el mismo origen. Como antes toma *Ox, Oy* como ejes primitivos, *O'x, O'y* los nuevos ejes, *que quedan determinados por* $x'Ox = \alpha$ (p. 12), obteniendo como ecuaciones

$$x = x'\cos\alpha + y'sen\alpha$$
$$y = y'\cos\alpha + x'sen\alpha$$ (p. 12, fig 5).

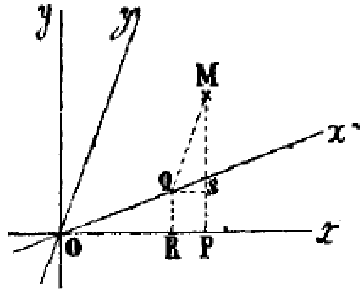


Fig. 6

A continuación calcula las ecuaciones de cambio de ejes rectangulares a oblicuos. Toma *x=OP, y=PM*, coordenadas del punto M respecto a los ejes rectangulares, y *x'=OQ, y'=QM* respecto a los oblicuos y $x'Ox = \alpha$, *y'Oy=β*, obteniendo como ecuaciones de cambio:

x=x'cosα+y'cosβ

y=x'senα+y'senβ (p. 13, fig 6)

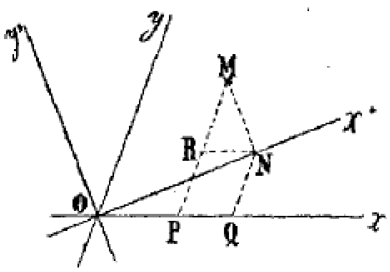


Fig. 7

Y seguidamente obtiene las ecuaciones contrarias, es decir para cambiar de ejes oblicuos a rectangulares. En este caso, las ecuaciones de cambio quedan:

$$x = \frac{x'sen(\theta - \alpha) - y'\cos(\theta - \alpha)}{sen\theta}$$
$$y = \frac{x'sen\alpha - y'\cos\alpha}{sen\theta}$$

Siendo *Ox, Oy* son los ejes oblicuos, y *θ* el ángulo que forman, *Ox', Oy'* los ejes rectangulares y $x'Ox = \alpha$, (p. 13)

Después estudia el cambio de ejes oblicuos a oblicuos obteniendo

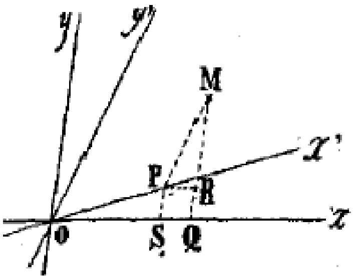


Fig. 8.ª

$$x = \frac{x'sen(\theta - \alpha) + y'sen(\theta - \alpha')}{sen\theta}$$
$$y = \frac{x'sen\alpha - y'sen\alpha'}{sen\theta}$$ (p. 14)

Donde *Ox, Oy* son los ejes primitivos, *Ox', Oy'* los nuevos, $x'Ox = \alpha$ y $yOx = \theta$.

Por último estudia el caso en que hay que cambiar el origen y los ejes, indicando que se han de combinar las ecuaciones anteriores, suponiendo primero que se traslada el origen y después se cambia la dirección de los ejes (p. 14).

Termina demostrando que el grado de una ecuación no se altera en la transformación de unos sistemas a otros, resultado que enuncia como teorema (p. 15).

Tras estudiar las ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas cartesianas encontramos otro apartado titulado *Clasificación de Líneas* (p. 15) en el que define lugar geométrico, orden de una curva y da la clasificación de las mismas (LG):

> 12. ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO.-Toda línea es un lugar geométrico de puntos que gozan de una misma propiedad expresada por la definición (p. 15).

Tras esto indica cómo se puede expresar algebraicamente esto, es decir cómo se obtiene la ecuación de un lugar geométrico:

> Las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos dependen de su posición sobre la curva, lo cual quiere decir que para un valor de la abcisa no queda la ordenada indeterminada sino que siempre es función de aquella. Estarán, pues, las dos coordenadas ligadas por una relación que podrá tener la forma explícita $y=f(x)$, ó bien la implícita $F(x,y) = 0$ (p.15).

Y recíprocamente:

> Recíprocamente, una ecuación entre dos variables *x y* representa en general una curva pues dando valores arbitrarios á la *x* que tomaremos como abcisa, la ecuación dará valores correlativos de la ordenada *y* que determinarán puntos cuyo conjunto formará la curva (p. 16).

Tras esto define orden de una curva y demuestra el siguiente teorema: Una curva cuya ecuación es de grado *m* en coordenadas cartesianas es de orden *m* (p. 16).

Por último da la clasificación de las curvas.

> 14. CLASIFICACIÓN DE LINEAS.-Las curvas se clasifican en algébricas y trascendentes, ó lo que es lo mismo, de orden finito y de orden infinito. Las curvas algébricas se clasifican en órdenes según el grado de su ecuación. Para clasificar las curvas de un mismo orden se atiende á otro elemento, muy importante en las curvas, llamado clase. *Clase* de una curva es el número de tangentes reales ó imaginarias que se le pueden trazar desde un punto. Dentro un grupo de curvas de un mismo orden y una misma clase, se clasifica en géneros, según el número de puntos que la curva tenga en el infinito. Los géneros se dividen en especies, como veremos al estudiar los géneros de las curvas de segundo orden. De modo que las curvas se clasifican en órdenes, clases, géneros y especies. (p. 16)

Como veremos vuelve a hablar de lugares geométricos cuando estudia la ecuación general de la recta (p. 18) y cuando da la ecuación de la recta al infinito. (p. 24) (ER)

Los sistemas de coordenadas polares, tangenciales, trilineales y triangulares los estudia en el capítulo II, tras estudiar las ecuaciones de la recta en cartesianas en el capítulo anterior.

Comienza con las coordenadas polares, dando su definición:

> 36. DETERMINACIÓN DEL PUNTO.-Para que quede un punto determinado basta trazar una recta *Ox* (fig. 16) que llamaremos eje polar, tomar en ella un punto *O* que llamaremos polo, unir luego el punto dado *M*, con el polo, por una recta *OM*

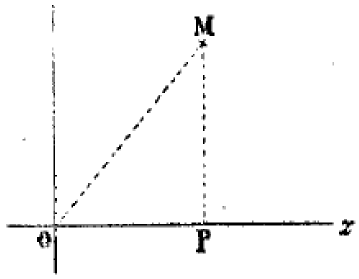


Fig. 16

llamada radio vector, que designaremos por ρ, y medir además del radio vector el ángulo *MOx* que forma con el eje polar, ángulo que designaremos por ω. Las coordenadas polares de un punto son ω y ρ. Supondremos el radio vector siempre positivo y el ángulo en el polo que pueda tomar todos los valores desde *O* á 360º, ó bien valores positivos desde *O* á 180° y negativos desde *O* á -180º (p. 45).

En el punto siguiente calcula las ecuaciones de cambio de un sistema rectangulares a otro polar obteniendo:

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OM} \cos \mathrm{MO}x \quad . \quad . \quad . \quad x = \rho \cos \omega$$

$$\mathrm{MP} = \mathrm{OM} \operatorname{sen} \mathrm{MO}x \quad . \quad . \quad . \quad y = \rho \operatorname{sen} \omega$$

$$tg\, \mathrm{MO}x = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} \quad . \quad . \quad . \quad tg\, \omega = \frac{y}{x}$$

$$\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OP}^2 + \mathrm{PM}^2} \quad . \quad . \quad . \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Siendo el polo el origen de coordenadas y el eje polar el eje de abscisas (p. 46)

Tras esto da la ecuación polar de una línea y la ecuación polar de una recta, que veremos más adelante.

Tras estudiar las coordenadas polares hace lo propio con las tangenciales, y comienza definiendo coordenadas de una recta.

> COORDENADAS DE UNA RECTA.-Así como hemos llamado coordenadas de un punto á las cantidades que determinaban su posición, asimismo llamaremos coordenadas de una recta á los valores que la determinen. Sea la ecuación de la recta $Ax+By+C=0$, que podrá transformarse dividiéndola por C y llamando u y v á los cocientes $\frac{A}{C}$ y $\frac{B}{C}$ en la siguiente $ux+vy+1=0$.
>
> A cada par de valores de u y de v corresponde una recta distinta, luego las cantidades u y v que determinan la recta son sus coordenadas. Representaremos la recta por (u, v) como antes representamos el punto por (x, y) (p. 49).

Estudia los casos en que la recta pasa por el origen de coordenadas y la recta del infinito.

> Si la recta pasa por el origen su ecuación en coordenadas cartesianas es $Ax+By=0$ es decir la C vale cero y los valores de u y v serán infinitos por lo tanto dicha recta vendrá representada por (∞, ∞). La recta al infinito tiene por ecuación como ya sabemos $0x+0y+C=0$ luego sus coordenadas serán nulas y la recta se representará por (0,0) (p. 49).

Seguidamente hace una comparación entre las coordenadas cartesianas y las tangenciales (p. 49):

En coordenadas cartesianas (ab) representa un punto propio.	En coordenadas tangenciales (ab) representa una recta propia.
En coordenadas cartesianas (0,0) representa el orígen.	En coordenadas tangenciales (0,0) representa la recta impropia.
En coordenadas cartesianas $(\infty\infty)$ representa uno de los puntos de la recta al infinito.	En coordenadas tangenciales $(\infty\infty)$ representa una de las rectas que pasan por el orígen.

En cuanto a los puntos demuestra el siguiente teorema:

> *Teorema.*-Toda ecuación de primer grado entre *u* y *v* representa un punto (p. 50).

Que establece la siguiente relación entre coordenadas tangenciales y cartesianas:

Coordenadas cartesianas	Coordenadas tangenciales
(a,b) representa un punto. Una ecuacion de primer grado representa una recta.	(a,b) representa una recta. Una ecuacion de primer grado representa un punto.

A través de la cual establece la ley de dualidad:

> Las coordenadas tangenciales ponen de manifiesto en la geometría analítica la ley de la dualidad; á cada teorema y á cada problema corresponde otro sustituyendo punto (x, y) á recta (u,v) sin cambiar el razonamiento que tenga que hacerse para su demostración ó solución (p.51).

Pero antes había llegado al concepto de curva envolvente (LG):

> 42. REPRESENTACIÓN DE LAS ECUACIONES CUYAS VARIABLES SON *u* Y *v*.- En general una ecuación dará para cada par de valores de sus variables una recta. Si la ecuación es continua, estas rectas se sucederán de un modo continuo, y podremos trazar una curva que sea tangente á todas estas rectas, ó lo que es lo mismo, que sea su envolvente. Los elementos constitutivos de esta envolvente que prolongados forman las tangentes, tienen coordenadas que satisfacen á la ecuación dada, por lo que esta se llama la ecuación tangencial de la linea. (p. 50)

Y establece el paralelismo entre coordenadas cartesianas y tangenciales (p. 50):

Una curva puede considerarse como lugar geométrico de puntos, su ecuacion tendrá entonces la forma	Una curva puede considerarse como envolvente de rectas, su ecuacion tendrá entonces la forma
$f(x,y)=0$	$f(u,v)=0$

Mundi no expresa la preocupación de autores anteriores por la homogeneidad de las ecuaciones debido a su interpretación geométrica, pero define y trabaja con coordenadas trilineales, pues con ellas se consigue *obtener ecuaciones homogéneas para las líneas* (p. 55).

> Dos coordenadas han sido suficientes para determinar la posición de un punto, según hemos visto en el sistema cartesiano y en el polar. Las líneas vienen representadas por ecuaciones, no homogéneas, entre las coordenadas de sus varios puntos. Bobillier, considerando tres coordenadas para determinar un punto (una más de las necesarias) logró obtener ecuaciones homogéneas para las líneas. (p. 55)

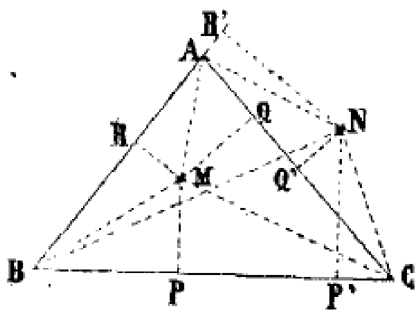


Fig. 17

Es decir, el fin del uso de las coordenadas trilineales es la de la obtención de ecuaciones homogéneas para las *líneas*. Tras esto da la definición:

> Consiste este sistema en referir los puntos á tres rectas fijas que llamaremos ejes de referencia y determinar los puntos por las distancias á dichos tres ejes. Sea (fig. 17)el triángulo de referencia *ABC*, cuyos lados tienen respecto á dos ejes perpendiculares trazados por un punto *O* cualquiera[56], que suponemos interior al triángulo, las ecuaciones siguientes:
>
> $BC.\ .\ .\ .\ \alpha = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - p_1 = 0$[57]
>
> $CA.\ .\ .\ .\ \beta = x\cos\beta + y\,\mathrm{sen}\,\beta - p_2 = 0$
>
> $AB.\ .\ .\ .\ \gamma = x\cos\gamma + y\,\mathrm{sen}\,\gamma - p_3 = 0$
>
> Las coordenadas trilineales de un punto $M(x_1, y_1)$ son
>
> $\alpha_1 = MP = x_1\cos\alpha + y_1\mathrm{sen}\,\alpha - p_1$[58]
>
> $\beta_1 = MQ = x_1\cos\beta + y_1\mathrm{sen}\,\beta - p_2$
>
> $\gamma_1 = MR = x_1\cos\gamma + y_1\mathrm{sen}\,\gamma - p_3$
>
> y se expresará por $(\alpha_1 \beta_1\ \gamma_1)$ (pp. 55,56)

Seguidamente explica que como dos coordenadas trilineales serían suficientes para determinar un punto "debe existir alguna condición entre las tres coordenadas que permita hallar la tercera cuando se conozcan las otras dos" (p. 56) y da tres condiciones:

La primera: $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\,\gamma_1 = -2S$, siendo *a, b, c* los lados *BC, CA y AB* del triángulo de referencia, *ABC*, y *S* su área:

> (…) hallaremos esta condición si unimos el punto M con los vértices del triángulo de referencia y expresamos que el área de ABC es la suma de las áreas de los triángulos BMC, CMA y AMB. Sea S el área conocida del triángulo ABC,

[56] No representado en la figura

[57] Como se verá más adelante, cuando se estudien las ecuaciones de la recta, esa expresión es la de una recta dada en *función de la perpendicular bajada desde el origen y los ángulos que esta forma con los ejes.*

[58] Esa es la expresión de la distancia de un punto a una recta dada en la forma anterior. El estudio de los problemas de distancias se encuentra recogido en el apartado de fenomenología.

> llamemos las longitudes de los lados BC, CA y AB por a, b y c, observemos que las coordenadas $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ del punto M (que suponemos interior al triángulo) son negativas, por estar en la misma región respecto cada uno de los lados, que el origen de coordenadas cartesianas (29) y tendremos la condición (…)
>
> $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\,\gamma_1 = -2S$ (p. 56)

Tras esto estudia el caso de que el punto es exterior al triángulo llegando a la conclusión de que la condición es general (p. 57).

La segunda condición es $\alpha_1 sen\ A + \beta_1 sen\ B + \gamma_1 sen\ C = -S/R$, siendo $A, B, C,$ los ángulos del triángulo de referencia, S su área y R el radio de la circunferencia circunscrita al mismo, condición que obtiene al aplicar a la anterior que en el triángulo se cumple: $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$ (p. 57).

De esta segunda condición deduce que "para determinar un punto (bastará), que se nos den tres cantidades que sean proporcionales á las coordenadas trilineales". Si l, m, y n, son las tres cantidades proporcionales a α, β y γ se tendrá

$\alpha = -\frac{2Sl}{al+bm+cn}\ \beta = -\frac{2Sm}{al+bm+cn}\ \gamma = -\frac{2Sn}{al+bm+cn}$ (p. 57)

Utilizando esta relación consigue ecuaciones homogéneas de manera similar a como hacían autores anteriores, es decir multiplicando por potencias adecuadas de la unidad:

> Como la cantidad $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{-2S}$ es igual á la unidad, las ecuaciones de todas las líneas podrán hacerse homogéneas, con solo multiplicar por una potencia conveniente de dicha cantidad los términos que sean de grado inferior al grado de la ecuación. Por consiguiente todas las ecuaciones en coordenadas trilineales las supondremos homogéneas y podremos sustituir en ellas las coordenadas α, β, y γ por cantidades proporcionales l, m y n (p. 58).

Como veremos hace uso de la unidad cuando da las ecuaciones de la recta en coordenadas trilineales (ER).

Finalmente da las ecuaciones de cambio de coordenadas trilineales a cartesianas (p. 58):

> Dada una ecuacion trilineal
>
> $f(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)=0$
>
> se halla su ecuacion cartesiana sustituyendo por α, β, γ, k sus valores
>
> $\alpha = x\cos\alpha + y\,sen\alpha - p_1$
> $\beta = x\cos\beta + y\,sen\beta - p_2$
> $\gamma = x\cos\gamma + y\,sen\gamma - p_3$
>
> siendo esta la única transformación de que haremos uso (p. 58).

Por último define las coordenadas triangulares (p. 60):

> A veces se toman por coordenadas las distancias α, β, γ multiplicadas respectivamente por constantes p, q y r que se llaman parámetros de referencia. Si llamamos U, V y W á los productos $p\alpha$, $g\beta$, $r\gamma$ el punto vendrá expresado por (U, V, W) y la condición
>
> $a\alpha + b\beta + c\gamma = -2S$

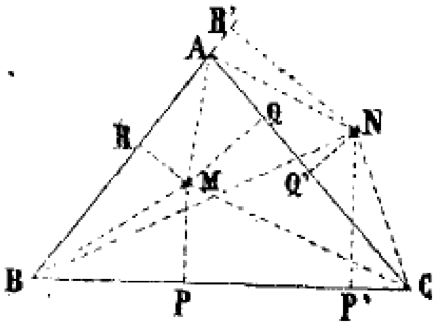


Fig. 17

se transforma en $\frac{aU}{p}+\frac{bV}{q}+\frac{cW}{r}=-2S$.

Si *p, q* y *r* son iguales á *a*, *b* y *c* la condición será U+V + W=-2Sy las coordenadas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ representan los dobles de las áreas de los triángulos *MBC, MCA, MAB* (fig. 17) por lo que se llaman coordenadas áreas.

Si suponemos que los parámetros *p, q, r* valen respectivamente $\frac{a}{2S},\frac{b}{2S},\frac{c}{2S}$ las coordenadas serán $U=\frac{\alpha a}{2S}=\frac{MBC}{ABC}$, $V=\frac{\beta b}{2S}=\frac{MCA}{ABC}$, $W=\frac{\gamma c}{2S}=\frac{MAB}{ABC}$,y son las coordenadas propiamente triangulares.

La condición á que deben satisfacer es U+V+W=-1 (pp. 60,61).

Estudia numerosos problemas referidos a la recta y el punto en los diferentes sistemas de referencia, como la distancia entre dos puntos, entre un punto y una recta, el ángulo que forman dos rectas, etc. Todos ellos se encuentran recogidos en el apartado de fenomenología. También estudia las ecuaciones de una recta en todos y cada uno de los sistemas de referencia como veremos a continuación.

2. Ecuaciones de la recta

Como hemos señalado antes, estudia la ecuación de la recta, a la que dedica el capítulo II (ER), tras introducir el concepto de lugar geométrico. Hace el estudio en dos sentidos, en primer lugar da la ecuación general de primer grado y busca su interpretación geométrica, es decir busca el lugar geométrico que representa; y después hace lo contrario, es decir da las ecuaciones de los diferentes tipos de rectas: las paralelas a los ejes, la que pasa por el origen y de una recta cualquiera.

En primer lugar estudia la recta en coordenadas cartesianas, comenzando como hemos dicho por la ecuación general *Ay+Bx+C=0*, primero en los casos en que los coeficientes son cero.

Para el caso *A=0* obtiene $x=-\frac{C}{B}=a$, "indica el lugar geométrico de puntos que tienen por abcisa (sic) a" (p. 18) (LG). En este caso considera además los subcasos *C=0*, o *B=0*, dando la definición de "recta al infinito":

> Si *B = 0*, en cuyo caso la ecuación representa el absurdo de una constante igual cero, tendremos $a=\infty$ y la ecuación representará la recta al infinito (p. 19).

Análogamente estudia los casos en que solo *B=0,* concluyendo que son rectas paralelas al eje de las *x*, y el caso en que solo *C=0.* En este último hace $y=-\frac{B}{A}x=ax$, y estudia el valor de *a* en función de los ángulos que forman los ejes entre sí (considera ejes oblicuos) y el que forma la recta con el eje *Ox*, representados por θ y α

respectivamente, obteniendo $a=\dfrac{sen\alpha}{sen(\theta-\alpha)}$, y de ella $tg\alpha=\dfrac{asen\theta}{1+a\cos\theta}$ (p. 20). De aquí obtiene la interpretación geométrica de la ecuación anterior:

> Este valor constante del ángulo α nos dice que todos los puntos del lugar constituyen una recta que pasa por el origen. El signo positivo de a nos dice que las coordenadas deben ser del mismo signo, por lo tanto la recta pasará del primero al tercer cuadrante. Si a fuese negativa, las coordenadas de los varios puntos deberían tener signos contrarios y la recta iría del segundo al cuarto cuadrante (p. 20).

Tras esto estudia la ecuación general completa. Despeja y obteniendo $y=-\dfrac{B}{A}x-\dfrac{C}{A}=ax+b$. Para la construcción de su lugar geométrico indica que primero se ha de construir y=ax y después “habrá que añadir algébricamente á cada ordenada el valor b y resultará por lo tanto una paralela a la recta anterior que cortará al eje de las ordenadas á una distancia del origen expresada por b” (p. 20).

Tras este estudio, como hemos dicho, hace el contrario, es decir va considerando los diferentes tipos de rectas y da sus ecuaciones. Así por ejemplo para el caso de rectas paralelas al eje de ordenadas dice:

> Si la recta es paralela al eje de ordenadas, puede estar á la derecha, á la izquierda ó confundirse con él; sus ecuaciones respectivas serán $x=+a$, $x=-a$, $x=0$ (p. 21).

Obsérvese que considera a siempre positiva y le añade el signo, lo mismo hace en el caso de una recta cualquiera, da todas las posibilidades de ecuaciones:

> Cuando la recta no es paralela á ningún eje, ni pasa por el origen, puede tener las cuatro posiciones indicadas en las *figuras 10, 11,12 y 13,* (…) luego la recta dada AB tendrá por ecuación
>
> $$y=ax+b\ \ (fig.10)$$
>
> $$y=ax-b\ \ (fig.11)$$
>
> $$y=-ax+b\ \ (fig.12)$$
>
> $$y=-ax-b\ \ (fig.13)\ \text{(p. 22)}$$

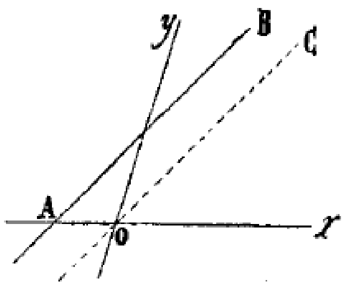


Fig. 10.

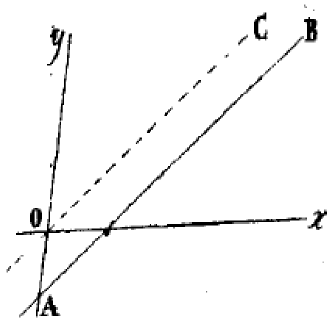


Fig. 11

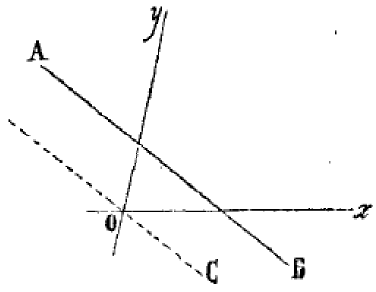


Fig. 12.

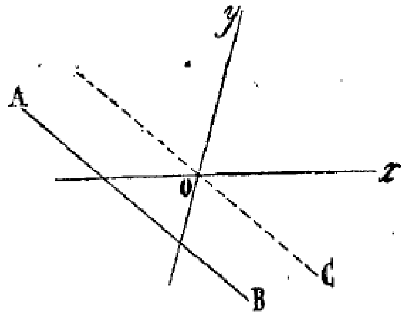


Fig. 13.

Aunque termina por agruparlas en una sola:

> Todas las ecuaciones de la recta en las doce posiciones que puede tener están incluidas en la ecuación $y=ax+b$
>
> ó mejor aun, en $Ay+Bx+C=0$
>
> que puede transformarse fácilmente en la anterior (p. 22).

Seguidamente estudia los coeficientes a y b, al primero lo llama *coeficiente angular*, y especifica su valor para ejes oblicuos y también para rectangulares. De b da la interpretación geométrica, de donde deduce que es *la ordenada en el origen* (p. 23).

También da la ecuación segmentaria de la recta, aunque él no la denomina así, sino la "ecuación de la recta en función de los segmentos que determina sobre los ejes". Parte de la ecuación general $Ay+Bx+C=0$ y haciendo $x=0$ $y=0$ obtiene los puntos de corte de la recta con los ejes, $n=-\frac{C}{A}$, $m=-\frac{C}{B}$, siendo m el segmento determinado sobre el eje de abscisas y n el determinado sobre el eje de ordenadas, y de ahí la ecuación buscada $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ (p. 24).

Utilizando los valores de m y n da la definición de recta al infinito, y su interpretación como lugar geométrico, como ya habíamos señalado al hablar de este:

> 19. RECTA AL INFINITO.-Suponiendo $A=B=0$ en la ecuación $Ay+Bx+C=0$ los segmentos anteriores m y n valdrán infinito, luego la ecuación $0y+0x+C=0$representa la recta al infinito que debe considerarse como lugar geométrico de todos los puntos impropios del plano.
>
> Llamaremos la recta al infinito, recta impropia, y designaremos con el nombre de rectas propias las demás del plano (p. 24).

Seguidamente calcula la "ecuación de la recta en función de la perpendicular bajada desde el origen y los ángulos que esta forma con los ejes" (p. 25). Esta ecuación será muy importante pues la utiliza en numerosas ocasiones a lo largo del texto, entre otras para definir las coordenadas trilineales como hemos visto (C).

> Sea (*figura 14*) OA=m, OB=n, OC=p, COA= α COB= β los triángulos rectángulos COA y COB nos dan

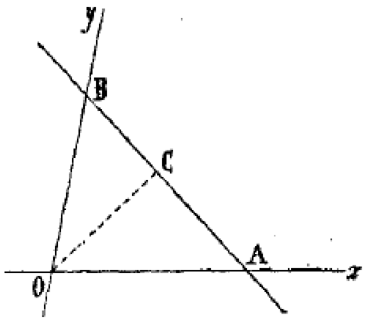


Fig. 14

$$p = m\cos\alpha \ldots\ldots m = \frac{P}{\cos\alpha}$$

$$p = n\cos\beta \ldots\ldots n = \frac{P}{\cos\beta}$$

y la ecuacion anterior $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

se transforma en $\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\cos\beta}} = 1 x\ cos\alpha\ + y\ cos\beta$ $= p$ (p. 25)

Obtiene la ecuación para el caso en que los ejes sean perpendiculares. Como en este caso α y β son complementarios la ecuación se reduce a

$$xcos\alpha\ + ysen\alpha\ = p.$$

Señala que suele denotarse como α=0 (p. 25).

Una vez dada esta ecuación estudia los cambios necesarios para ponerla en la forma *Ay+Bx+C=0.* Para ello multiplica esta última por un valor indeterminado *h*: $Ahy + Bhx + Ch = 0$. Igualando coeficientes con *xcosα +ysenα –p=0* obtiene *Ah=senα, Bh=cosα, Ch=-p*, y de ellos el valor de *h*: $h = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (p. 26), fórmulas que utilizará posteriormente para obtener la distancia de la recta al origen (PRD) y el ángulo que forman dos rectas (PRAN).

Después calcula la ecuación "de una recta que pasa por un punto (x', y')" obteniendo $y - y' = a(x - x')$, es decir la ecuación punto-pendiente, aunque en este caso "no es determinada, no se conoce el valor de a (…) pues no hay las condiciones suficientes para determinar la recta" (p. 27).

Por ello en el punto siguiente calcula la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. Dados los puntos *(x', y'), (x'', y'')* los sustituye en la ecuación anterior y operando obtiene el valor de *a*, $a = \frac{y' - y''}{x' - x''}$, y con él la ecuación buscada: $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$ (p. 27).

Pero no deja la ecuación así, sino que dice que es equivalente a $y(x' - x'') + y'(x'' - x) + y''(x - x') = 0$ "que no es mas que el desarrollo de la determinante (sic) $\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ y' & x' & 1 \\ y'' & x'' & 1 \end{vmatrix} = 0$ " (p.28)

Vemos aquí un salto cualitativo respecto a autores anteriores, en relación a los métodos de cálculo, pues por primera vez vemos la utilización de determinantes.

Utiliza esta ecuación para obtener la condición para que tres puntos estén alineados (p. 28) y para que tres rectas sean concurrentes (p. 29). Ambas las hemos recogido en la parte de fenomenología por considerarlos problemas de incidencia.

Tras esto calcula la ecuación de la "recta que pasando por un punto concurre con otras dos rectas". Considera el punto (*x', y'*) y las rectas *Ay+Bx+C=0, A'y+B'x+C'=0.*

> (…) es evidente que la ecuación de primer grado $Ay+Bx+C+l\left(A'y+B'x+C'\right)=0$ en que *l* tiene un valor cualquiera, representa variando el valor de *l,* rectas que pasan constantemente por el punto de intersección de las dos dadas (…). La condición para que una de estas rectas pase por *(x', y')* es $Ay'+Bx'+C+l\left(A'y'+B'x'+C'\right)=0$. Despejando en esta *l*y sustituyéndolo en la ecuación general anterior resulta la ecuación pedida $\dfrac{Ay+Bx+C}{Ay'+Bx'+C}=\dfrac{A'y+B'x+C'}{A'y'+B'x'+C'}$ (p. 30).

Seguidamente define rectas imaginarias, para poder hacerlo define antes punto imaginario y demuestra cuatro teoremas relativos a los mismos (pp. 36-38).

> 32. RECTAS IMAGINARIAS.- Llamaremos recta imaginaria aquella en cuya ecuación entran coeficientes imaginarios. Dos rectas imaginarias se llaman conjugadas cuando los coeficientes de sus ecuaciones son imaginarias conjugadas (p. 39).

Demuestra que toda recta imaginaria tiene un solo punto real, resultado que enuncia como teorema, y del que deduce que dos rectas imaginarias conjugadas se cortan en un punto real (p. 39).

Termina el capítulo estudiando las ecuaciones no lineales que representan un conjunto de rectas.

Comienza estudiando la interpretación geométrica de una ecuación de una variable, cualquiera que sea su grado. En primer lugar estudia una de segundo grado:

> Sea la ecuación $Ax^2+Bx+C=0$ si suponemos que las raíces sean *a* y *b*, será equivalente á $A(x-a)(x-b)=0$.
>
> Ahora bien; esta ecuación queda satisfecha por los valores que anulan á cada uno de los factores, por lo tanto puede descomponerse en las dos
>
> $$x-a=0 \text{ .... } x=a$$
>
> $$x-b=0 \text{ .... } x=b$$
>
> que representan dos rectas paralelas al eje de las y, que serán reales ó imaginarias, distintas ó coincidentes según sean las raíces de la ecuación (p. 40).

Razonando análogamente llega a la conclusión de que la ecuación de grado *m, f(x)=0* "representará por lo tanto *m* rectas paralelas al eje de las *y* que podrán ser, como en el caso anterior, reales ó imaginarias, distintas o coincidentes", y que *f(y) = 0*, representa *m* rectas paralelas al eje de la *x* (p. 40).

También estudia la ecuación homogénea con dos variables. Como en el caso anterior estudia en primer lugar la de grado dos: $Ay^2+Bxy+Cx^2=0$, que transformada en

$A\left(\frac{y}{x}\right)^2+B\left(\frac{y}{x}\right)+C=0$ descompone como $A\left(\frac{y}{x}-a\right)\left(\frac{y}{x}-b\right)=0$, que representa dos rectas que pasan por el origen, *y=ax, y=b* (p. 41).

Análogamente concluye que una ecuación homogénea en dos variables de grado *m* "se puede descomponer en *m* ecuaciones de primer grado que representan otras tantas rectas que pasan por el origen y que son reales o imaginarias distintas o coincidentes" (p. 41).

Por último estudia la condición para que la ecuación general de segundo grado con dos variables $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$ represente dos rectas.

Para obtener esta condición resuelve la ecuación respecto a *y* obteniendo $y=-\frac{Bx+D}{A}\pm\frac{1}{A}\sqrt{\left(B^2-AC\right)x^2+2\left(BD-AE\right)x+D^2-AF}$ (p. 43), que representará a dos rectas cuando la "cantidad subradical sea potencia exacta de segundo grado", por tanto la condición será $\left(BD-AE\right)^2=\left(B^2-AC\right)\left(D^2-AF\right)$, que reducida quedará $ACF+2BDE-AE^2-B^2F-CD^2=0$, "que no es más que el desarrollo de la determinante (sic) $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0$" (p. 43).

Como ya hemos señalado también estudia la recta en los sistemas de coordenadas distintos del cartesiano considerados en el capítulo III.

En primer lugar obtiene la ecuación polar de una recta. Partiendo de la ecuación *Ay+Bx=C* y utilizando las ecuaciones de cambio (C) llega a $\frac{1}{\rho}=Psen\omega+Q\cos\omega$, donde $P=\frac{A}{C}$, $Q=\frac{B}{C}$ (p. 47).

Como *escolio* obtiene que si en la ecuación cartesiana fuese *C=0*, es decir pasara por el polo, la ecuación en coordenadas polares sería: $\omega=arc.tg\left(-\frac{B}{A}\right)=\text{constante}$ (p. 47).

Seguidamente obtiene la ecuación polar de una recta que pasa por un punto. Partiendo de la ecuación en coordenadas cartesianas rectangulares $y-y'=tg\alpha(x-x')$ mediante los cambios correspondientes obtiene: $\rho=\frac{\rho' sen\left(\omega'-\alpha\right)}{sen\left(\omega-\alpha\right)}$ (p. 48)

También estudia la recta en coordenadas tangenciales. En este caso, como ya hemos visto, la recta de ecuación cartesiana *ux+vy+1=0* viene dada por dos coordenadas *(u,v)*(C) (p. 49).

Obtiene además las coordenadas de la recta que pasa por dos puntos, problema correlativo al de hallar las coordenadas del punto de corte de dos rectas (PRI) por lo que las ecuaciones obtenidas son las mismas que en ese caso sin más que cambiar las ecuaciones de las rectas en cartesianas por las de los puntos en tangenciales, así si las ecuaciones de los puntos son *au+bv+1=0, a'u+b'v+1=0,* las coordenadas de la recta serán $u=\frac{b-b'}{ab'-ba'}$, $v=\frac{a-a'}{ab'-ba'}$ (p. 52).

También da la ecuación de la recta en coordenadas trilineales:

> 53. ECUACIÓN DE LA RECTA EN COORDENADAS TRILINEALES.
>
> La ecuación de primer grado homogénea $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ representa lo mismo que la ecuación cartesiana $Ay + Bx + C = 0$, es decir, es la ecuación general de la recta (p. 61).

Para demostrarlo sustituye en la primera ecuación α, β, γ por sus valores en función de x e y -valores que hemos visto al estudiar este tipo de coordenadas (C)- obteniendo una ecuación del tipo $Ay + Bx + C = 0$ donde $A = l sen\alpha + m sen\beta + n sen\gamma$, $B = l\, cos\alpha + m cos\beta + n cos\gamma$, $C = -lp_1 - mp_2 - np_3$. Estas serán las ecuaciones de paso de una ecuación trilineal a una cartesiana. Señala además que si se quiere hacer el cambio contrario no hay más que hallar l, m, n en función de A, B, C en las fórmulas anteriores (p. 62).

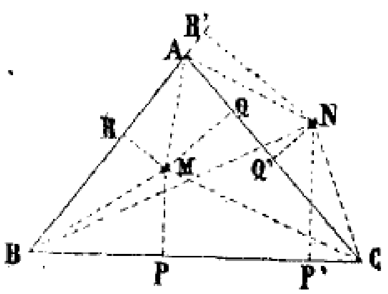


Fig. 17

Tras esto estudia las diferentes ecuaciones, dependiendo de los coeficientes que se hagan nulos:

> Si uno de los coeficientes, por ejemplo l, fuese cero la ecuación sería $m\beta + n\gamma = 0$ y representaría una recta concurrente con β y γ, es decir, una recta que pasaría por A. Análogamente las ecuaciones $l\alpha + n\gamma = 0$, $l\alpha + m\beta = 0$ representan dos rectas que pasan respectivamente por B y por C.
>
> Ya sabemos que las ecuaciones de los ejes de referencia son $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, y evidentemente tendremos que las paralelas á dichos ejes tendrán por ecuaciones $\alpha=p$, $\beta=q$, $\gamma=r$ en que p, q y r serán positivas ó negativas según la región en que se encuentre la recta respecto al eje paralelo (pp. 62-63).

Hace la consideración de que estas ecuaciones no son homogéneas, pero que se pueden convertir en homogéneas multiplicando p, q, r por la unidad (U).

> Las ecuaciones últimas no son homogéneas, pero se pueden convertir en otras equivalentes (49) multiplicando la p, q ó r por $\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{-2S}$ que sabemos es igual á la unidad (p. 63).

Estudia también la recta al infinito:

> En el caso particular de que en la ecuación de la recta supongamos que l, m y n valen respectivamente a, b y c (longitudes de los lados del triángulo de referencia), se transforma en $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ ó lo que es lo mismo, una constante igual cero ecuación absurda que representa la recta al infinito (p. 63).

Obtiene también la ecuación de la recta que pasa por dos puntos en coordenadas trilineales: si los puntos son $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, la ecuación de la recta pedida viene dada por $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$ (p. 64).

Por último obtiene la ecuación de la recta en coordenadas triangulares. Parte de la ecuación trilineal de la recta MN: $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$. Considera el triángulo de referencia ABC, cuyos vértices tienen coordenadas trilineales A($-h_1$, 0, 0), B(0, $-h_2$, 0), C(0, 0, $-h_3$); y las distancias d_1=AL, d_2=BK, d_3=CR. En estas condiciones la recta MN viene dada en coordenadas triangulares por la ecuación $d_1U+d_2V+d_3W=0$, siendo $U = \frac{\alpha}{h_1}$, $V = \frac{\beta}{h_2}$, $W = \frac{\gamma}{h_3}$ (pp. 68,69).

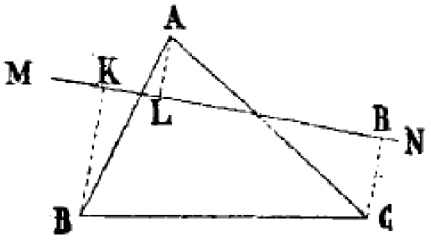


Fig. 10

Como escolio añade que "las distancias d_1, d_2, d_3 que determinan la recta pueden llamarse coordenadas de la recta" (p. 69).

3. Contenidos de Geometría Proyectiva

Para terminar este análisis haremos un breve resumen de otros contenidos de Geometría Proyectiva contenidos en la obra:

Como hemos visto introduce las coordenadas tangenciales y con ellas la ley de dualidad (C), define recta al infinito (ER), punto impropio de una recta y punto del infinito (PRDT).

En el capítulo IV titulado *teorías superiores de la línea recta*, tras resolver dos problemas relativos a la razón armónica de cuatro puntos en línea recta y de un haz de cuatro rectas (PRDT) define sistemas armónicos y sistemas homográficos de los que dice que "están conocidos bajo el nombre de proyectivos y de conformes por algunos geómetras" (p. 85). Tras esto da algunas definiciones y demuestra algunos teoremas de manera conjunta para puntos y haces de rectas.

Llámase cuadrilátero completo á cuatro rectas de las cuales tres no pasan por un mismo punto, que se cortan en seis puntos llamados vértices.	Llámase cuadrángulo completo á cuatro puntos de los cuales tres no están en una misma línea recta, que se unen de dos en dos por seis rectas llamadas lados.

Así da definiciones sobre el cuadrilátero y el cuadrángulo completos:

Y enuncia y demuestra dos teoremas de forma conjunta (insertamos solo una parte de la demostración para mostrar el modo de trabajo, pero no en su totalidad pues es muy extensa y consideramos que incluirla entera no aporta nada al estudio):

— 87 —

Teorema.—Los dos vértices que hay en cada diagonal están armónicamente separados por los puntos de interseccion de esta diagonal con las otras dos.

Teorema.—Los dos lados que pasan por cada punto diagonal están armónicamente separados por las rectas de union de este punto diagonal á los otros dos.

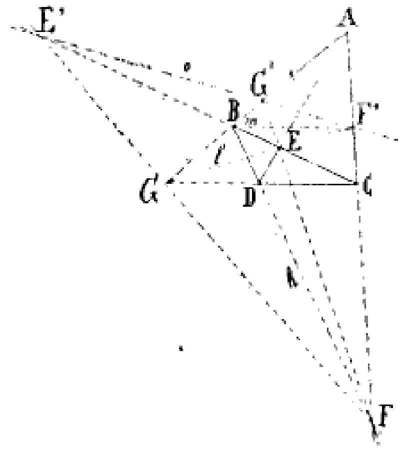


Fig. 31

Demostracion. — Sean en coordenadas trilineales las ecuaciones de los lados.

$a. \;.\;.\;.\;.\; \alpha=0$

$b. \;.\;.\;.\;.\; \beta=0$

$c. \;.\;.\;.\;.\; \gamma=0$

$d. \;.\; l\alpha+m\beta+n\gamma=0$

la ecuacion de la recta diagonal *e* por pasar por *da* ha de tener la forma

$$l\alpha+m\beta+n\gamma-K\alpha=0$$

Demostracion. — Sean en coordenadas tangenciales las ecuaciones de los vértices

$A. \;.\;.\;.\;.\; \alpha=0$

$B. \;.\;.\;.\;.\; \beta=0$

$C. \;.\;.\;.\;.\; \gamma=0$

$D. \;.\; l\alpha+m\beta+n\gamma=0$

la ecuacion del punto diagonal E, por estar en DA ha de tener la forma

$$l\alpha\, m\beta+n\gamma-K\alpha=0$$

También define polar de un punto respecto a una recta/polo de una recta respecto de dos puntos (p. 89) e involución (p. 90); estudia la relación métrica de la involución de seis puntos/relación métrica de la involución de seis radios (p. 91) y las ecuaciones de los seis puntos/de los seis radios (p. 93) y por último demuestra que tres pares de puntos armónicamente conjugados a otros dos están en involución/tres pares de rectas armónicamente conjugadas a otras dos están en involución (p. 94).

4.9.3.2. Sistemas de representación

En esta obra solo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos.

Utiliza el lenguaje natural en definiciones, resultados y enunciados.

Encontramos muchas definiciones en el texto: define aplicación Geometría Analítica (D), sistemas de coordenadas, abscisa, ordenada y coordenadas de un punto (C). También define lugar geométrico (LG), recta al infinito (ER), punto impropio de una recta y punto del infinito (PRDT), puntos imaginarios conjugados y recta imaginaria (ER), entre otros.

Los razonamientos de los diferentes resultados, bien sean problemas o teoremas los hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (U, C, PR, LG).

Y en lo que se refiere a los enunciados los encontramos en teoremas, en algunos resultados generales enunciados o propuestos como problemas -como las propiedades de las rectas notables de un triángulo por ejemplo- y en el resto de problemas resueltos y ejercicios propuestos (PR, GP).

El lenguaje simbólico aparece continuamente, al utilizar el álgebra en todo momento. Como ejemplos podemos citar las diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la fórmula de la distancia entre dos puntos y las ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas, entre otras muchas.

Además es novedosa la expresión de un lugar geométrico por $y = f(x)$, $F(x, y) = 0$ y la de un punto por (x, y).

Señalaremos que utiliza el símbolo ≡, que no debe ser muy usual pues explica su significado y destacamos la utilización del cálculo con determinantes, y por tanto la notación que lleva implícito (LG, ER, PR, C).

En cuanto a los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados en el texto, y no en láminas aparte como era usual en autores anteriores. Se trata de dibujos relativos a cada resultado, no aparecen gráficas de curvas, por ejemplo, ni otro tipo de gráfica.

4.9.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, y en particular geométrico (PR).

Podemos distinguir tres tipos: en el primero incluimos tres problemas en los que trata conceptos de Geometría Proyectiva. Los demás problemas se dividen en dos grandes grupos, unos resueltos en los capítulos II y III, en los que se obtienen resultados generales como la fórmula que da la distancia entre un punto y una recta, el ángulo entre dos rectas, la condición de incidencia de dos rectas, o diferentes ecuaciones de la misma, por poner algunos ejemplos (PRI; PRD; PRPP); resultados que se utilizarán posteriormente para resolver problemas más complejos. El último tipo de problemas se puede encontrar en el capítulo IV y engloba teoremas clásicos como el de Ceva y Menelao, las propiedades de las rectas notables de un triángulo o resultados propios de la Geometría Proyectiva (PRDT).

Por último señalar que a lo largo del texto Mundi propone multitud de problemas o ejercicios como práctica de la teoría explicada (EJ).

Como hemos hecho con los libros de otros autores recogemos el enunciado de todos los problemas resueltos, pero solo insertamos la solución de algunos de ellos a modo de ejemplo.

1. Para introducir conceptos de la Geometría Proyectiva

En este apartado incluimos aquellos problemas que el autor utiliza para definir conceptos de la Geometría Proyectiva, como el primer problema, por ejemplo, cuyo resultado utiliza para definir punto al infinito y punto impropio de una recta; o los dos últimos en los que calcula la razón anarmónica de cuatro puntos o cuatro rectas.

Incluiremos la resolución del primer problema en sus tres versiones al realizarse respecto de diferentes sistemas de coordenadas, y la del problema 70 como ejemplo del cálculo de una razón anarmónica.

> 4. División de una recta limitada en dos segmentos cuya razón sea conocida (p.9).

También resuelve, en coordenadas tangenciales, el problema correlativo a este:

> 48. Ecuación de un punto que divide en una relación dada, la distancia entre otros dos puntos (p. 54).

Y de nuevo resuelve el mismo problema en coordenadas trilineales.

> 50. División de una distancia en dos segmentos cuya razón sea conocida (p. 58).

También resuelve dos problemas a cerca de la razón anarmónica:

> 70. RAZÓN ANARMÓNICA DE CUATRO PUNTOS EN LÍNEA RECTA.

> 71. RAZÓN ANARMÓNICA DE UN HAZ DE CUATRO RECTAS.

División de una recta limitada en dos segmentos cuya razón sea conocida

La resolución es puramente analítica, no aparecen razonamientos geométricos, no interpreta geométricamente las soluciones y mucho menos las construye. Mostramos su resolución íntegramente para mostrar la diferencia con los autores anteriores:

Sea *(fig. 3)* AB la recta cuyos extremos son A *(x'y')* y B *(x" y"),* hallemos las coordenadas del punto C *(xy)* que divide AB de modo que $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$. Trazando las respectivas ordenadas tendremos $\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$

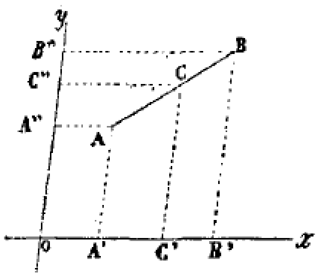


Fig. 3

pero $A'C'=x-x'$, $C'B'=x''-x$

luego $\frac{x-x'}{x''-x}=\frac{m}{n}$, $\qquad n(x-x')=m(x''-x)$, $x=\frac{mx''+nx'}{m+n}$.

Un raciocinio análogo después de trazar las AA", BB" CC" nos conducirá á la fórmula $y=\frac{my''+ny'}{m+n}$ (p. 10).

Estudia el caso particular en que m y n son iguales, es decir calcula las coordenadas del punto medio, y también el caso en que la relación $\frac{m}{n}$ sea negativa, siendo entonces el punto exterior al segmento. En este caso las fórmulas para las coordenadas del punto son $x=\frac{nx'-mx''}{n-m}$, $y=\frac{ny'-my''}{n-m}$, fórmulas que utiliza para definir " punto al infinito" y "punto impropio" de una recta:

> Si en estas fórmulas se supone á n igual á m resultan para x é y valores infinitos, serán pues las coordenadas del punto al infinito de la recta propuesta.
>
> Cada recta tiene un solo punto al infinito que llamaremos punto impropio, y es el punto que divide la recta en dos segmentos cuya relación es igual á menos uno. Llamaremos á los otros puntos de la recta puntos propios (p. 11).

Ecuación de un punto que divide en una relación dada, la distancia entre otros dos puntos.

> Sean las ecuaciones de los dos puntos dados $A=x_1u+y_1v+1=0$, $B=x_2u+y_2v+1=0$,
>
> cuyas coordenadas cartesianas son respectivamente (x_1y_1), (x_2y_2), el punto que divide á la distancia de estas dos en la relación $\frac{m}{n}$ tiene como coordenadas cartesianas $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ luego su ecuación será $\frac{mx_2+nx_1}{m+n}u+\frac{my_2+ny_1}{m+n}v+1=0$ ó bien $m(x_2u+y_2v+1)+n(x_1u+y_1v+1)=0$.
>
> Si llamamos λ á $\frac{m}{n}$ esta ecuación podrá escribirse abreviadamente $A+\lambda B=0$.
>
> Cuando el punto sea exterior al segmento AB, la relación λ es negativa y la ecuación del punto será $A-\lambda B=0$ (p. 54).

Obtiene como corolario que $A+B=0$ representa al punto medio del segmento y $A-B=0$ al punto al infinito de la recta AB (p.55).

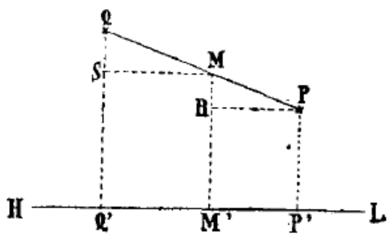


Fig 18

División de una distancia en dos segmentos cuya razón sea conocida.

Considera los puntos dados $P(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$, $Q(\alpha''\ \beta''\ \gamma'')$, $M(\alpha\ \beta\ \gamma)$ el pedido y $\lambda=\frac{m}{n}$ la razón conocida. Obtiene para α β y γ valores similares a los obtenidos en los otros tipos de coordenadas:

$\alpha=\frac{m\alpha''+n\alpha'}{m+n}=\frac{\alpha'+\lambda\alpha''}{1+\lambda}$, $\beta=\frac{m\beta''+n\beta'}{m+n}=\frac{\beta'+\lambda\beta''}{1+\lambda}$, $\gamma=\frac{m\gamma''+n\gamma'}{m+n}=\frac{\gamma'+\lambda\gamma''}{1+\lambda}$ y al igual que en otros casos estudia los valores de λ que dan el punto medio, un punto exterior y el punto al infinito (p. 59).

RAZÓN ANARMÓNICA DE CUATRO PUNTOS EN LÍNEA RECTA.

Consideremos un sistema de cuatro puntos en línea recta A, B, C, D, cuyas ecuaciones son (48) (A) α=0; (B) β=0; (C) α-λβ=0; (D) α-λ'β=0; la razón anarmónica de estos cuatro puntos es $\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}$, mas sabemos que $\lambda = \frac{CA}{CB}$,

$\lambda' = \frac{DA}{DB}$luego el valor de la razón anarmónica es $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

Si los cuatro puntos están dados por ecuaciones de la forma

$\alpha - \lambda\beta = 0$ (B) $\alpha - \lambda'\beta = 0$ (C) $\alpha - \lambda''\beta = 0$ (D) $\alpha - \lambda'''\beta = 0$

en que α y β representan expresiones de la forma

$$au+bv+1$$

y que igualadas á cero representarían dos puntos cualesquiera de la recta ABCD, para hallar su razón anarmónica procuraremos dar á estas ecuaciones la forma anterior para lo cual supondremos

$$\alpha - \lambda\beta = \gamma$$

$$\alpha - \lambda'\beta = \delta$$

de donde deducimos $\beta = \frac{\gamma-\delta}{\lambda'-\lambda}$, $\alpha = \frac{\lambda'\gamma-\lambda\delta}{\lambda'-\lambda}$ y las ecuaciones de los cuatro puntos serán (A) γ=0, (B) δ=0, (C) $\gamma - \frac{\lambda-\lambda''}{\lambda'-\lambda''}\delta = 0$, (D) $\gamma - \frac{\lambda-\lambda'''}{\lambda'-\lambda'''}\delta = 0$ y su razón anarmónica viene expresada por $\frac{\lambda-\lambda''}{\lambda'-\lambda''}:\frac{\lambda-\lambda'''}{\lambda'-\lambda'''}$ (p. 81).

2. Para obtener fórmulas generales (PRD, PRAN, PRI, PRPP)

El autor obtiene la condición para que tres puntos estén alineados en coordenadas cartesianas, tangenciales y trilineales, y la condición para que tres rectas sean concurrentes en coordenadas cartesianas y trilineales (este problema es correlativo al anterior en tangenciales).

También calcula el punto de corte de dos rectas en los tres sistemas de coordenadas anteriores y obtiene las condiciones de paralelismo y perpendicularidad en cartesianas y tangenciales.

Además obtiene la fórmula para calcula la distancia entre dos puntos en coordenadas cartesianas rectangulares y oblicuas, y en trilineales; y la de un punto a una recta en los tres sistemas de coordenadas utilizados en los problemas anteriores.

Por último calcula el ángulo que forman dos rectas, también en los tres sistemas de referencia anteriores, y cómo aplicar la fórmula obtenida para resolver los problemas 30 y 34 incluidos en el siguiente apartado.

Incluimos la solución del primer problema, es decir el de hallar al condición para que tres puntos estén alineados y el de su correlativo, en la que utiliza constantemente los determinantes y los problemas de distancias y de ángulos pues da fórmulas novedosas respecto a otros autores.

Condición para que tres puntos estén en línea recta.

En primer lugar lo resuelve en coordenadas cartesianas. Considera los puntos *(x'y')* *(x"y") (x"'y'")*y utiliza la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\begin{vmatrix} y & x & 1 \\ y' & x' & 1 \\ y'' & x'' & 1 \end{vmatrix} = 0$ (p. 28) (ER) con lo que la condición pedida viene dada por $\begin{vmatrix} y' & x' & 1 \\ y'' & x'' & 1 \\ y''' & x''' & 1 \end{vmatrix} = 0$ (p. 28)

Seguidamente obtiene la condición para que tres rectas sean concurrentes. Da dos criterios, en el primero utiliza determinantes:

> Supongamos las tres rectas dadas por las ecuaciones $Ay + Bx + C = 0$, $A'y + B'x + C' = 0$, $A''y + B''x + C'' = 0$, si tienen un punto común, sus coordenadas deben satisfacer á la vez á las tres ecuaciones que constituyen un sistema absurdo, á no ser que se verifique la ecuación de condición $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$ que resulta de eliminar las dos incógnitas *x* e *y*. (p. 28)

No así en el segundo:

> Otro criterio puede emplearse para saber si tres rectas concurren en un punto y es el siguiente: si las ecuaciones de las rectas son *S=0, S' = 0, S" = 0*(…) y se satisface la identidad $lS + mS' + nS'' \equiv 0$ para cualquier valor de *x* y de *y*, después de haber elegido convenientemente los valores de *l*, *m* y *n*, podemos asegurar que las tres rectas son concurrentes (p. 29).

En la ecuación anterior hace el comentario a pie de página de que se utilizará el símbolo $\equiv$ para indicar *las ecuaciones idénticas*, por lo que suponemos que no debía ser de uso común entonces, como ya hemos comentado en el apartado de sistemas de representación.

Como hemos dicho también estudia en coordenadas tangenciales la condición para que tres puntos estén en línea recta, problema correlativo a que tres rectas sean concurrentes, obteniendo las mismas condiciones que en ese caso sin más que cambiar las ecuaciones de unas en cartesianas por las de los otros en tangenciales. Así si las ecuaciones de los puntos son $a_1u+b_1v+1=0$, $a_2u+b_2v+1=0$, $a_3u+b_3v+1=0$, la condición vendrá dada por $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (p. 53), y si vienen dadas por *P=0, P'=0, P''=0* la condición será $lP + mP' + nP'' \equiv 0$ (p. 53).

Si los puntos vienen dados en coordenadas trilineales (*α',β',γ'*), (*α'',β'',γ''*), (*α''',β''',γ'''*) la condición viene dada por:

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{vmatrix} = 0 \text{ (p. 65)}$$

Tras esto obtiene la ecuación general de una recta concurrente con otras dos: si las rectas son $S = l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, $S' = l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$, la ecuación buscada es $S+KS'=0$ (p. 65), y estudia las condiciones para que tres rectas dadas en coordenadas trilineales sean concurrentes:

> Para saber si tres rectas dadas por sus ecuaciones trilineales $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0, l''\alpha + m''\beta + n''\gamma = 0$ son concurrentes ó bien formaremos la determinante de los coeficientes para ver si tiene por valor cero, como deberia, ó bien buscaremos valores de K, K' y K'' para los que se verifique la identidad $\mathrm{K}(l\alpha + m\beta + n\gamma) + \mathrm{K}'(l'\alpha + m'\beta + n'\gamma) + \mathrm{K}''(l''\alpha + m''\beta + n''\gamma) \equiv 0$ (p. 66)

Distancia entre dos puntos

En el capítulo I, tras dar la definición de Geometría Analítica y de coordenadas de un punto estudia la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas cartesianas. Establece esa distancia en primer lugar para coordenadas oblicuas y utiliza para ello el teorema del coseno, obteniendo

$$\delta = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + 2(x'-x'')(y'-y'')\cos\theta} \text{ (p. 9)}$$

Donde θ es el ángulo que forman los ejes de coordenadas.

> Para ejes rectangulares recuerda que $\cos\theta = 0$, con lo que la fórmula queda:
> $$\delta = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2} \text{ (p. 9)}$$

También da las fórmulas para el caso en que uno de los puntos sea el origen.

Como hemos dicho esta distancia también la calcula en coordenadas trilineales (p. 59). Para ello considera los puntos ($\alpha'\ \beta'\ \gamma'$), ($\alpha''\ \beta''\ \gamma''$), de coordenadas cartesianas (x', y'), (x'', y'') y parte de la fórmula en cartesianas $D = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$. Calcula los valores de $(x'-x'')$, $(y'-y'')$ en función de las otras coordenadas y de los ángulos del triángulo de referencia obteniendo

$$\left[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2\right](\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C)=2\left[(\alpha'-\alpha'')^2+(\beta'-\beta'')^2+(\gamma'-\gamma'')^2\right]$$
$$-2(\beta'-\beta'')(\gamma'-\gamma'')\cos A-2(\gamma'-\gamma'')(\alpha'-\alpha'')\cos B-2(\alpha'-\alpha'')(\beta'-\beta'')\cos C$$

Y concluye: "y por fin extrayendo la raíz cuadrada y recordando el valor de D habremos resuelto el problema" (p. 60).

Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia de un punto a una recta en coordenadas cartesianas supone los ejes rectangulares y el punto $P(x', y')$.

En primer lugar la calcula cuando la recta viene dada por $x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0$, en cuyo caso p es igual a la distancia de dicha recta al origen de coordenadas (ER).

Tracemos por P la recta CD paralela á AB su ecuación será

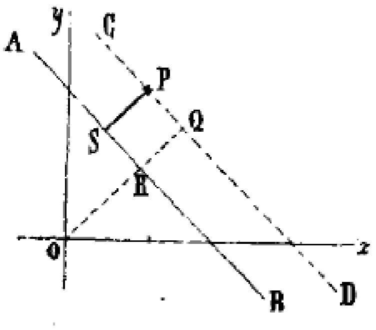


Fig. 15.

$$xcos\alpha+ysen\alpha\text{-}p'=0$$

y como esta recta pasa por *(x' y')* deberá haber la condición

$$p'=x'cos\alpha+y'sen\alpha$$

pero la distancia PS que llamaremos *d* es la diferencia de OQ y OR ó sea de *p' y p,* luego

$$d=x'cos\alpha+y'sen\alpha\text{-}p \text{ (p. 34)}$$[59].

Nótese que considera que las distancias pueden ser positivas y negativas, lo que indicará la posición del punto respecto a la recta:

> *Escolio.-* Cuando el punto P esté en distinta región que el punto O, será *p'* mayor que *p* y por lo tanto *d* positiva: y cuando P y O estén en la misma región, *p'* es menor que *p* y*d* es negativa (p. 34).

También calcula las expresiones de la distancia en caso de que la recta venga dada por su ecuación general *Ay+Bx+C=0,* sustituyendo en la fórmula anterior *cosα* y *senα* por los valores calculados en el punto 20 (ER) y obteniendo la expresión conocida $d=\dfrac{Ay'+Bx'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$; y de que venga dada por la explícita *y=ax+b*, tomando en esta última *A=1, B=-a, C=-b,* "obteniendo $d=\dfrac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$"(p. 35).

La misma fórmula la obtiene en coordenadas tangenciales por las equivalencias entre coordenadas y ecuaciones de una recta y/o un punto en cartesianas y tangenciales (p. 53):

	Coordenadas tangenciales	Coordenadas cartesianas
Punto. . . .	$au+bv+1=0$ . . .	(a,b)
Recta. . . .	(u_1,v_1).	$u_1x+v_1y+1=0$

la distancia será segun (29).

$$D=\frac{au_1+bv_1+1}{\sqrt{u_1^2+v_1^2}}$$

Por último calcula la distancia de un punto (*α' β' γ'*) a la recta $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ dados en coordenadas trilineales. Partiendo de la fórmula en coordenadas cartesianas y haciendo el cambio correspondiente obtiene la fórmula $\delta=\frac{l\alpha'+m\beta'+n\gamma\prime}{\sqrt{l^2+m^2+n^2-2mncosA-2nlcosB-2lmcosC}}$, que denota como $\delta=\frac{l\alpha'+m\beta'+n\gamma\prime}{\{l,m,n\}}$ (p. 68).

---

[59] Esta es la fórmula de la distancia de un punto a una recta que utiliza para definir las coordenadas trilineales de un punto.

Ángulo formado por dos rectas

En primer lugar lo hace suponiendo ejes rectangulares y teniendo en cuenta diferentes expresiones de la recta:

Cuando vienen dadas por las ecuaciones *xcosα+ysenα-p=0, xcosϐ+ysenϐ-q=0* (ecuación de la recta en función de la perpendicular bajada desde el origen y los ángulos que esta forma con los ejes), "como el ángulo formado por las dos rectas es igual al formado por las perpendiculares trazadas por el origen resulta, llamando V, el ángulo de las dos rectas, *V=α-ϐ*" (p. 32).

En el caso en que vengan dadas por su ecuación general, $Ay+Bx+C=0$, $A'y+B'x+C'=0$ utiliza las ecuaciones de cambio entre la ecuación general y la anterior (ER) y obtiene $senV=\frac{AB'-BA'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}$, $\cos V=\frac{AA'+BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}$, $tgV=\frac{AB'-BA'}{AA'+BB'}$[60] (p. 32).

Para el caso de que vengan dadas en explícitas, $y=ax+b$, $y=a'x+b'$, utiliza las fórmulas anteriores suponiendo *A=A'=1, B=-a, B'=-a'*, obteniendo $senV=\frac{a-a'}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1^2+a'^2}}$, $\cos V=\frac{1+aa'}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1^2+a'^2}}$, $tgV=\frac{a-a'}{1+aa'}$ (p. 33).

En el caso en que las rectas vengan dadas en coordenadas tangenciales obtiene exactamente la misma fórmula para la tangente de dicho ángulo que en el caso de coordenadas cartesianas, ya que considera las coordenadas tangenciales de las rectas (u_1, v_1), (u_2, v_2), pero con ellas escribe las ecuaciones de las mismas en cartesianas $u_1x+v_1y+1=0$, $u_2x+v_2y+1=0$, y de ahí $tg\varphi=\frac{u_2v_1-u_1v_2}{u_1u_2+v_1v_2}$ (p. 52).

Por último obtiene la fórmula en coordenadas trilineales, sin más que aplicar las ecuaciones de cambio entre estas coordenadas y las cartesianas en la ecuación de la tangente del ángulo que forman las dos rectas dadas mediante su ecuación general. Así, dadas las rectas $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$, $l'\alpha+m'\beta+n'\gamma=0$, la tangente del ángulo que forman viene dada por

$$tg\varphi=\frac{(mn'-nm')senA+(nl'-ln')senB+(lm'-ml')senC}{ll'+mm'+nn'-(mn'+nm')\cos A-(nl'+ln')\cos B-(lm'+ml')\cos C}$$

siendo *A, B, C* los ángulos del triángulo de referencia (p. 67).

3. Para mostrar las aplicaciones de la Geometría Analítico-Proyectiva (GP)

Recogemos en este apartado varios problemas clásicos resueltos por el autor utilizando la Geometría Analítica y/o la Proyectiva.

---

[60] En el libro hay una errata, pone $tgV=\frac{AB'-BA'}{AA'-BB'}$.

Incluimos la solución del Teorema de Menelao por ser un teorema clásico, no así el de Ceva porque la resolución es análoga.

Como ejemplo de resolución de los problemas del 65 al 69, que son análogos, incluimos la del problema 66; y lo mismo ocurre con el 80, que es similar al 81 y 82.

30. BISECTRIZ DEL ÁNGULO DE DOS RECTAS

61.- Dados los extremos de una recta limitada hallarla razón de segmentos que determina sobre ella otra recta dada por su ecuación. (p. 70)

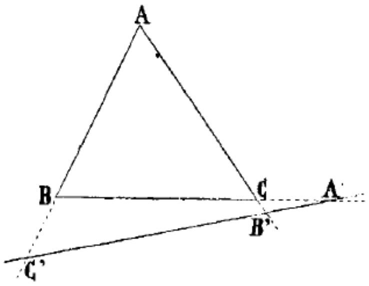


Fig. 21

62.- TEOREMA DE MENELAO.-Si en un triángulo ABC se traza una transversal que no pase por ningún vértice, determina seis segmentos en los lados, entre los cuales existe la relación $\frac{C'A \times B'C \times A'B}{C'B \times B'A \times A'C} = -1$,(p. 71) y recíprocamente (p. 72).

63.- Dados los extremos de una recta limitada, hallar la relación de segmentos determinados sobre ella por otra recta que está dada por dos puntos (p. 73).

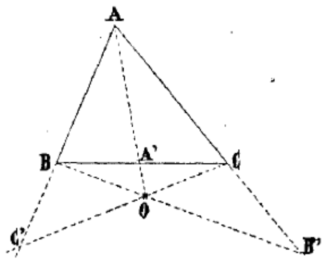


Fig. 23

64. TEOREMA DE CEVA. -Si en un triángulo ABC se une un punto, (que no está en ningún lado) con los tres vértices, determina en los lados opuestos seis segmentos entre los que existe la relación $\frac{C'A \times A'B \times B'C}{C'B \times A'C \times B'A} = 1$, (p. 74) y recíprocamente (p. 75).

65. TRIÁNGULOS HOMOLÓGICOS.- Si dos triángulos ABC y A'B'C son tales que los lados homólogos concurren en puntos de una recta LMN las rectas AA', BB', CC', que unen los vértices homólogos concurren en un punto (p. 76).

66. PROPIEDAD DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO.- Las bisectrices de los ángulos internos de un triangulo concurren en un punto (p. 77).

Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo con la bisectriz del tercer ángulo interno son concurrentes (p. 78).

Las bisectrices de los ángulos externos cortan á los lados opuestos del triángulo en puntos que están en línea recta (p. 78).

67. PROPIEDAD DE LAS ALTURASDE UN TRIANGULO. –Las alturas de un triángulo concurren en un punto (p. 78).

68. PROPIEDAD DÉLAS MEDIANASDE UN TRIÁNGULO.- Las tres medianas de un triángulo son concurrentes (p. 79).

69. PROPIEDAD DE LAS PERPENDICULARES LEVANTADAS EN LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO. -Las perpendiculares en los puntos medios delos lados de un triángulo concurren en un punto (p. 80).

80.- Área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices (p. 96).

81.- Área de un triángulo dadas las ecuaciones de sus lados (p. 97).

82.- Área de un polígono (p. 99).

62.- TEOREMA DE MENELAO.-Si en un triángulo ABC (figs. 20 y 21) se traza una transversal que no pase por ningún vértice, determina seis segmentos en los lados, entre los cuales existe la relación $\frac{C'A\times B'C\times A'B}{C'B\times B'A\times A'C}=-1$

Este problema lo resuelve en coordenadas cartesianas y se basa en el resultado demostrado en el punto anterior: Dados los extremos de una recta limitada hallarla razón de segmentos que determina sobre ella otra recta dada por su ecuación.

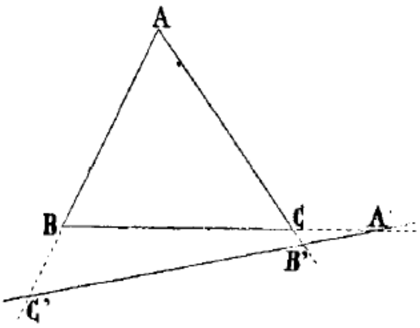


Fig. 21

Demostración.- Sean (x' y'), ($x''y''$) ($x'''y'''$) los tres vértices A, B y C y sea la ecuación de la transversal $Ay+Bx+C=0$.

Según el problema anterior (61) (PRD) son evidentes las siguientes igualdades

$\frac{C'A}{C'B}=-\frac{Ay'+Bx'+C}{Ay''+Bx''+C}$, $\frac{B'C}{B'A}=-\frac{Ay'''+Bx'''+C}{Ay'+Bx'+C}$, $\frac{A'B}{A'C}=-\frac{Ay''+Bx''+C}{Ay'''+Bx'''+C}$, y multiplicando estas igualdades quedará$\frac{C'A\times B'C\times A'B}{C'B\times B'A\times A'C}=-1$que es lo que queríamos demostrar (p.72).

Demuestra un *escolio* y el teorema recíproco:

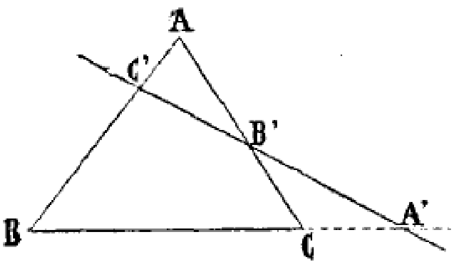


Fig. 20

Escolio.-Si la transversal es interior al triángulo como en la *(fig. 20),* los segmentos formados sobre dos lados son aditivos y los segmentos formados en el tercer lado son sustractivos, por lo tanto las razones correspondientes á los primeros $\frac{C'A}{C'B}$y $\frac{B'C}{B'A}$son positivasylaqueserefiere al tercer lado,$\frac{A'B}{A'C}$ negativa y el producto de lastres razones debe serevidentemente negativa. Si la transversal fuese exterior *(fig. 21)* los segmentos determinados sobre los tres lados serian sustractivos, sus razones serian negativas y el producto también sería negativo.

***Reciproco.-Si sobre los tres lados de un triángulo* ABC (*figuras 20* y *21) se toman tres puntos* A'B'C *que determinen segmentos aditivos ó sustractivos en los lados, que verifiquen la relación*$\frac{C'A\times B'C\times A'B}{C'B\times B'A\times A'C}=-1$ *los tres puntos A', B' y C' están en línea recta* (p. 72).**

Demostración.-Supongamos que la recta C'B' no cortase á BC en A' sino en otro punto A'' (no dibujado en la figura), resultará según el teorema directo

$$\frac{C'A\times B'C\times A''B}{C'B\times B'A\times A''C}=-1$$

dividiendo esta igualdad por la que se verifica por hipótesis, tendremos

$$\frac{A'B}{A'C} : \frac{A''B}{A''C} = 1$$

ó bien

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A''B}{A''C}$$

luego A' y A" se confunden, pues no existe mas que un punto que divida la distancia BC en una relación dada (p. 73).

66. PROPIEDAD DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO.-

Las bisectrices de los ángulos internos de un triangulo concurren en un punto.

Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo con la bisectriz del tercer ángulo interno son concurrentes.

Las bisectrices de los ángulos externos cortan á los lados opuestos del triángulo en puntos que están en línea recta.

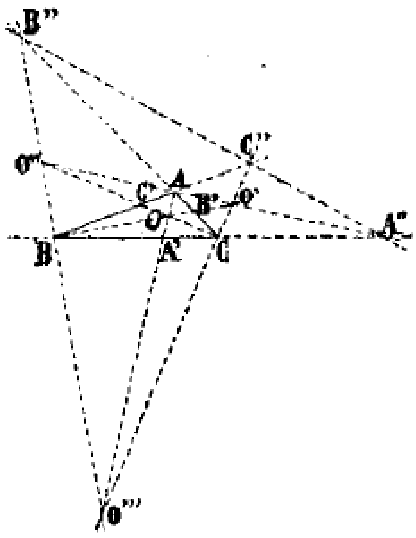


Fig. 25

Este problema lo resuelve en coordenadas trilineales.

Sea el triángulo ABC (fig. 25) que tomaremos como triángulo de referencia, las ecuaciones trilineales de las bisectrices son (30)

$AA' \dots \beta - \gamma = 0$

$BB' \dots \gamma - \alpha = 0$
$CC' \dots \alpha - \beta = 0$

cuya suma es una identidad (p.78).

De forma análoga demuestra los otros dos resultados.

80.- Área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices.

Para resolver este problema y los dos siguientes utiliza coordenadas cartesianas y cálculo con determinantes:

Sean las coordenadas de los vértices *A(x' y'), B(x'' y''), C(x''' y''')*. La expresión del área es 2S=AB×CC' y la distancia AB viene dada por (3) $AB = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$.

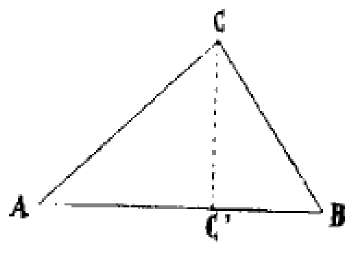


Fig. 38

Nos falta solo hallar CC' para lo que observaremos que la ecuación de AB es (23)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ó lo que es lo mismo $x(y' - y'') + y(x'' - x') + (x'y'' - y'x'') = 0$, luego la distancia de C(x''',y''') á esta recta es (29)

$$CC' = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}} = 0$$

sustituyendo en el valor de 2S los valores de AB y CC', resulta

$$2S = \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ (p. 97).}$$

4. Ejercicios propuestos

Incluimos la lista de los ejercicios propuestos.

Ejercicio 1.º Hallar las longitudes de los tres lados de un triángulos cuyos vértices tienen por coordenadas rectangulares, (0, 7) (-2, 0) (5 -3).

Ejercicio 2.º Hallar las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo anterior.

Ejercicio 3.º Hallar las coordenadas del centro de gravedad del triángulo anterior.

Ejercicio 4.° Expresar que la distancia de un punto *(x y)* á otro (2,5) es igual á 4.

Ejercicio 5.° Hallar el centro de un círculo que pase por los tres puntos (0, 7) (-2, 0) (5 -3) (p. 11).

Ejercicio 6.º¿En qué se convierte la ecuación $x^2+y^2-4x+2y-1=0$ trasladando el nuevo origen en el punto (2, -1)?

*Ejercicio 7.°*Transformar la ecuación $x^2-y^2=a^2$ tomando como ejes nuevos las bisectrices de los ángulos formados por los ejes primitivos que suponemos rectangulares (p. 15).

Ejercicio 8.°- Hallar la ecuación del lugar geométrico de puntos igualmente distantes de un punto y de una recta dada.

Ejercicio 9.°- Construir el lugar geométrico representado por la ecuación $y = \log x$.

Ejercicio 10°- ¿Cuáles son los puntos de intersección de la curva $y^3 - 3y^3x + 4x^3 - 8y + 7x - 9 = 0$ con el eje de las *x*?

Ejercicio 11.°-¿Qué representa la ecuación $xy^2 - 4x^2y + 8x^2 - 7xy - 4x = 0$? (p. 17).

Ejercicio 12.-¿Cuál es el coeficiente angular y la ordenada en el origen en las siguientes ecuaciones:

$$3x - 4y = 5, ay + bx + c + m(a'y + b'x + c') = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 .$$

Ejercicio 13.- Construir la recta 2x+5y=12.

Ejercicio 14.-¿Cuál es el ángulo que la recta *y=3x-4* forma con el eje de las *x* suponiendo θ=60º?

Ejercicio 15.- ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje de la *y* la recta del problema anterior?

Ejercicio 16.- Resolver los dos problemas anteriores suponiendo los ejes rectangulares (pp. 23-24).

Ejercicio 17.-Transformar la ecuación *3x-4y=2* en otra equivalente de la forma α=0.

Ejercicio 18.-¿Cuál es la distancia al origen de la recta *3x-4y=2*?

Ejercicio 19.-¿Cuál es la distancia del punto (3, 7) á la recta del problema anterior? (p. 26)

Ejercicio 20.-Suponiendo las coordenadas de los vértices de un triángulo *(x'y') (x"y")(x"'y'")* cuales son las ecuaciones de las tres medianas.

Ejercicio 21.-Hallar las ecuaciones de la recta trazada en los vértices del triángulo anterior paralelas á los lados opuestos.

Ejercicio 22.-Se pregunta si los puntos (0,4) (-2-2) y (7,25) están ó no en línea recta (p. 29).

Ejercicio 23. Demostrar que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto.

Ejercicio 24. Hallar la ecuación general de las rectas paralelas á una recta dada.

Ejercicio 25. Buscar las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, $\frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1$ (p. 31).

Ejercicio 26.- Hallar el ángulo de las dos rectas *y=ax, y=a'x* suponiendo que los ejes coordenados forman un ángulo θ.

Ejercicio 27.-Hallar la distancia de un punto á una recta suponiendo los ejes oblicuos.

Ejercicio 28.-Hallar las ecuaciones generales de las paralelas y de las perpendiculares á la recta *Ay+Bx+C=0*

Ejercicio 29.-Las tres bisectrices de un triángulo concurren en un punto.

Ejercicio 30.-Las dos bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.

Ejercicio 31.-Hallar las ecuaciones de las alturas de un triángulo cuyos vértices son *(x' y'), (x'' y''), (x''', y''').*

Ejercicio 32.-Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto.

Ejercicio 33.-Hallar las ecuaciones de las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo cuyos vértices son *(x' y'), (x'' y''), (x''', y''').*

Ejercicio 34.-Demostrar que una recta que divida á dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, es paralela al tercer lado (p. 36).

Ejercicio 35.- ¿Qué condición es necesaria para que las dos rectas $\left(A+A'\sqrt{-1}\right)y+\left(B+B'\sqrt{-1}\right)x+C+C'\sqrt{-1}=0$, $\left(M+M'\sqrt{-1}\right)y+\left(N+N'\sqrt{-1}\right)x+P+P'\sqrt{-1}=0$, tengan un punto real común? (p. 39)

Ejercicio 36.-¿Qué representa la ecuación

$A\left(y-a\right)^m+B\left(y-a\right)^{m-1}\left(x-b\right)+C\left(y-a\right)^{m-2}\left(x-b\right)^2+...L\left(x-b\right)^m=0$?

Ejercicio 37.- Se pregunta si la ecuación $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$ representa ó no dos rectas.

Ejercicio 38.- Determinar *h* de modo que la ecuación $y^2+2hxy+x^2+4y-6x+9=0$ represente dos rectas (p. 44).

Ejercicio 39.-Construir la recta $\frac{1}{\rho}=3sen\omega-\frac{2}{3}\cos\omega$.

Ejercicio 40.-Transformar en coordenadas polares la ecuación $x^2+y^2=25$.

Ejercicio 41.-Transformar en coordenadas polares la ecuación $\rho=a+b\cos\omega$.

Ejercicio 42.-Hallar las fórmulas de transformación suponiendo que el eje de las *x* forma un ángulo α con el eje polar.

Ejercicio 43.- Cuáles son las fórmulas de transformación para pasar de ejes oblicuos á polares suponiendo el origen en el polo y el eje de las *x* por eje polar?

Ejercicio 44.-Hallar la distancia entre dos puntos dados por coordenadas polares (p. 48).

Ejercicio 45.-Hallar la distancia entre dos puntos dados por sus ecuaciones.

Ejercicio 46.- ¿Cuál es en coordenadas tangenciales la condición para que tres rectas sean concurrentes?

Ejercicio 47.-¿Qué significa en coordenadas tangenciales una ecuacion homogénea de grado m? (p. 55)

Ejercicio 48.-Encontrar las coordenadas trilineales de los puntos medios del triángulo de referencia.

Ejercicio 49.-¿Cuáles son las coordenadas del centro del círculo inscrito en el triángulo de referencia?

Ejercicio 50.-¿Cuáles son las del centro del círculo circunscrito? (p. 61)

Ejercicio 51.-¿Cuáles son las ecuaciones de las paralelas á los ejes de referencia, trazadas por los vértices opuestos?

Ejercicio 52.-Dada la ecuación trilineal de una recta $3\alpha - 4\beta + 5\gamma = 0$ hallar su ecuación cartesiana suponiendo que los lados del triángulo de referencia son

$x cos\ 30° + y sen\ 80° - 12 = 0$, $x cos\ 135° + y sen\ 135° - 3 = 0$,

$x cos\ 300° + y sen\ 300° - 5 = 0$.

Ejercicio 53.-Suponiendo el mismo triángulo de referencia del problema anterior transformar la ecuación $y=3x-4$ en coordenadas trilineales (p. 66).

Ejercicio54.-¿Cuál es la ecuación de la perpendicular bajada de (α' β' γ') á la recta $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$?

Ejercicio 55. - Hallar el ángulo que forma la recta $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ concada uno de los lados del triángulo de referencia (p. 69).

Ejercicio 56.- Hallar el lugar geométrico de las posiciones que ocupa el vértice de un triángulo cuya base es fija y la diferencia de cuadrados de los otros dos lados es constante.

Ejercicio 57.- Si juntamos los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, la figura que resulta es un paralelogramo.

Ejercicio 58.- En todo trapecio, la recta que une los puntos medios de los diagonales, es paralela á las bases (p. 77).

Ejercicio 60.- Demostrar los teoremas del párrafo (66) apoyándose en los teoremas de Ceva y Menelao.

Ejercicio 61. Demostrar por el teorema de Ceva los teoremas de los párrafos 67 y 68 (p. 81).

Ejercicio 62.- Dos alineaciones homográficas, si tienen como elemento unido el punto de intersección, son perspectivas, es decir son secciones de un mismo haz de radios.

Ejercicio 63. Dos haces homográficos, si tienen como elemento unido la recta que une sus centros, son perspectivos, es decir, los radios homólogos determinan por sus intersecciones una recta (p. 85).

Ejercicio 64.- Por un punto se trazan tres rectas *m, n, p,* á los vértices de un triángulo, luego otras tres *m', n', p',* que completen los haces armónicos en los vértices, cada dos de estas últimas concurren en un mismo punto con una de las primeras.

Ejercicio 65.-Demostrar que las rectas *m' n' p'* cortan á los lados opuestos del triángulo en puntos que están en línea recta.

Ejercicio 66.- Formar las ecuaciones de los seis lados de un cuadrángulo completo tomando por triángulo de referencia el triángulo diagonal (p. 90).

Ejercicio 67.-Una transversal encuentra los lados de un cuadrángulo completo en seis puntos de involución.

Ejercicio 68.-Juntando un punto á los vértices de un triángulo, una secante corta á las seis rectas de la figura en seis puntos en involución.

Ejercicio 69.-Enunciar y demostrar los teoremas correlativos á los dos ejercicios anteriores (p. 96).

Ejercicio 70.-Hallar el área de un triángulo conociendo las coordenadas tangenciales de sus lados.

Ejercicio 71.-Hallar el área de un triángulo cuyos lados tienen por ecuaciones $3x-2y+4=0$, $x+2y-5=0$, $-2x+y-9=0$ (p. 100).

4.9.4. Conclusiones

Como vemos esta obra supone una ruptura completa con respecto a las anteriores, por una parte desaparecen los conceptos relativos a la homogeneidad de las ecuaciones -en el sentido utilizado por los autores anteriores- a la construcción de las mismas y a los segmentos negativos, pero también los métodos de resolución a los que iban asociados, muy ligados aún a la Geometría Sintética. Aunque esto es así, y como hemos señalado en el análisis de la estructura de la obra, Mundi vuelve a incorporar estos contenidos en la segunda edición de la obra (1893), lo que indica que aún a finales de siglo se seguían estudiando, y lo que es más, se seguín considerando una parte de la Geometría Analítica. La inercia de todo un siglo siendo parte importante del temario de esta asignatura se conserva, como vemos, hasta los últimos años, y convive con un tipo de geometría que empieza a anteponer los métodos proyectivos a los métricos.

Pero no solo desaparecen estos conceptos y se conservan únicamente aquellos basados en el uso de sistemas de coordenadas y en el concepto de lugar geométrico, sino que se incorporan nuevos conceptos y métodos, propios ahora, de la Geometría Proyectiva.

Hemos de destacar, en relación a la parte que abarca nuestro estudio, la incorporación de nuevos sistemas de coordenadas ligados a este tipo de Geometría en los que el autor estudia el punto y la recta y los problemas relativos a ellos - tales como el estudio de las condiciones de incidencia, las de paralelismo y perpendicularidad, el cálculo de distancia o el ángulo entre rectas- y resuelve varios problemas clásicos utilizando la Geometría Analítica.

Destacar además el uso de cálculo con determinantes, también novedoso con respecto a las obras analizadas anteriormente.

4.10. Geometría Analítica de Ignacio Sánchez Solís (1883)

4.10.1. Autor

Ignacio Sánchez-Solís y Mayole nació en Murcia en 1816 y murió en Madrid en 1890 (CA1). Su formación fue amplia y muy variada. Entre 1828 y 1833 estudió en el Real Colegio Militar de Segovia, obteniendo el empleo de subteniente al terminar sus estudios. En 1834 pidió la baja en el Ejército y decidió ingresar en el sacerdocio, realizando para ello estudios de filosofía y teología en el Seminario Conciliar de San Fulgencio de Murcia. En 1838 abandonó estos estudios y cursó la carrera de Leyes en Valencia y Madrid, obteniendo la licenciatura en 1843. Entre 1851 y 1854 cursó los tres años en la escuela normal del Real Instituto Industrial de Madrid, obteniendo el número uno de su promoción. Obtuvo el título de ingeniero industrial (rama mecánica) en 1864 (CA2).

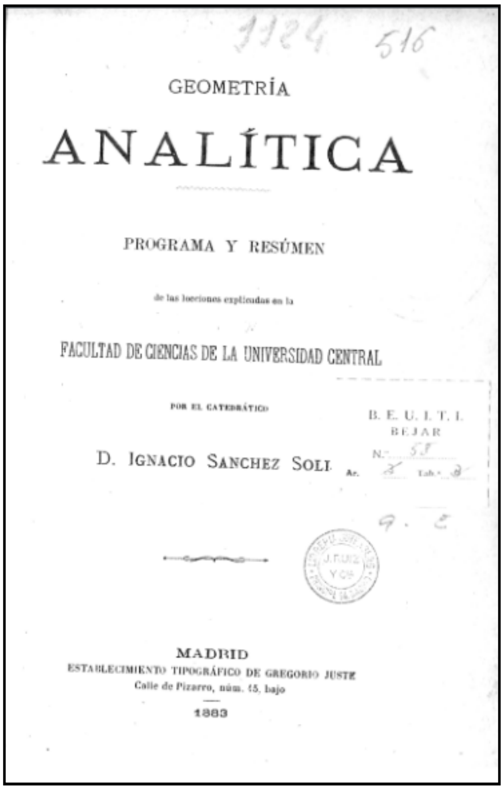
Mientras realizaba estos estudios y ante la carencia de profesorado, fue nombrado ayudante en el Instituto entre 1852 y 1853, y en 1853 desempeñó la cátedra de Física en la Escuela Industrial de Vergara, de la que fue subdirector. En 1857 obtuvo por oposición la cátedra de construcción de máquinas del Real Instituto y al clausurarse el centro en 1867 pasó a desempeñar la misma asignatura en la Escuela Industrial de Barcelona. En 1876 regresó a Madrid para desempeñar la cátedra de Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias, cargo que ocupó hasta su muerte (CA3).

Su obra es escasa: publicó el pequeño texto docente de Geometría Analítica que hemos estudiado y un folleto con la conferencia de apertura de curso en el seminario de Vergara (CA5) (Cano, 1998).

4.10.2. Caracterización de la obra

El libro analizado corresponde a la primera edición de la *Geometría Analítica* de Ignacio Sánchez Solís, impresa en1883 en Madrid, en el Establecimiento tipográfico de Gregorio Juste. El ejemplar analizado se puede localizar en la Biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad de Salamanca, ubicada en Béjar, USALIB/Desp.58 (RO).

La obra consta de un solo tomo de 162 páginas, más una de erratas y dos láminas con dibujos al final del tomo (CEO1).



GEOMETRÍA

ANALÍTICA

PROGRAMA Y RESÚMEN

de las lecciones explicadas en la

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL

POR EL CATEDRÁTICO

D. IGNACIO SANCHEZ SOLI

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE GREGORIO JUSTE
Calle de Pizarro, núm. 15, bajo
1883

Figura 66: Carátula del libro. Geometría Analítica. I. Sánchez Solís

En el ejemplar analizado no se encuentra ningún índice (CEO2), pero insertamos uno realizado por nosotros en el que se incluyen los principales epígrafes de la obra. Indicamos con más detalle la parte que hemos analizado correspondiente a la Analítica Indeterminada y a la Determinada en dos dimensiones, restringida esta al caso de la recta:

GEOMETRÍA ANALÍTICA

ANALÍTICA DETERMINADA

ANALÍTICA INDETERMINADA

PRIMERA PARTE. PLANA O DE DOS DIMENSIONES

- Coordenadas cartesianas
- Transformación de coordenadas
- De la línea recta
- Problemas fundamentales
- Coordenadas tangenciales binarias
- Coordenadas trilineales
- Coordenadas tangenciales ternarias
- Coordenadas polares
- Aplicaciones

Del círculo

Curvas de segundo orden

SEGUNDA PARTE. DE TRES DIMENSIONES

PREGUNTAS PARA EL EXAMEN

Los objetivos de la obra (CEO3) se muestran claramente tanto en el título como en la exposición. La obra se subtitula *Programa y resúmen* (sic) *de las lecciones explicadas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central por el catedrático D. Ignacio Sánchez Solís* y es exactamente eso, pues la exposición de la teoría y los problemas es esquemática y somera, añadiendo en algunos casos comentarios como "Aquí pueden explicarse otras construcciones geométricas más elegantes por lo sencillas" (p. 3). La explicación es especialmente reducida en el caso de la "Analítica Determinada" a la que dedica solamente cinco páginas.

No cita a ningún autor, al menos en la parte analizada, con lo que no podemos saber en qué autores se basó para su realización (CE04).

El interés del análisis de esta obra reside en el hecho de que, como se ha señalado en su biografía, Sánchez Solís fue Catedrático de Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias desde 1876 hasta su muerte, en 1890, por lo que suponemos que esta obra se utilizó como texto en la misma desde su publicación hasta, al menos, la muerte de su autor (CEO5).

4.10.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.10.3.1. Análisis de la estructura conceptual

Una de las características de esta obra, o al menos de la parte analizada, es la estructura tan sencilla que tiene.

Aunque no se divide en capítulos existen dos partes claramente diferenciadas, la primera dedicada a la "Analítica Determinada" y una segunda dedicada a la Indeterminada. La parte dedicada a la Analítica Indeterminada se divide en varios epígrafes, correspondientes, todos excepto uno, al estudio de diferentes sistemas de coordenadas. Para cada uno de ellos el autor sigue prácticamente la misma estructura: da su definición, obtiene la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, en algunos casos da las ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas y resuelve unos problemas que él denomina "fundamentales", problemas relativos a distancias, ángulos e incidencia.

La última parte que denomina "Aplicaciones" la dedica a resolver problemas, o demostrar teoremas, en los que aplica los resultados obtenidos en los apartados anteriores. También introduce en este capítulo conceptos propios de la Geometría Proyectiva.

En el análisis que presentamos a continuación no respetamos esta estructura, sino que presentamos juntos todos los sistemas de coordenadas que utiliza, los problemas (que se encuentran en la parte de fenomenología), el estudio de la recta y los contenidos de Geometría Proyectiva que introduce.

1. Definición de Geometría Analítica

Comienza la obra dando la definición de Geometría Analítica y las partes de que consta:

> La Geometría Analítica es la parte de las Matemáticas que enlaza el Algebra con la Geometría para utilizar en la resolución de las cuestiones la generalidad de la primera y la claridad de la segunda. Puede dividirse en determinada é

> indeterminada, y ésta en plana y del espacio, ó sea de dos y de tres dimensiones (p. 3).

2. Analítica Determinada

Tras esto aborda el estudio de la "Analítica Determinada" a la que solamente dedica cinco páginas, como ya hemos dicho. Sin preámbulo de ningún tipo explica los pasos que se han de seguir para resolver un problema geométrico mediante este método:

> Para resolver un problema geométrico con el auxilio del análisis determinado, conviene seguir este método:
>
> 1. Suponer el problema resuelto.
> 2. Dar nombres á las cantidades conocidas é incógnitas.
> 3. Plantear el problema ó ponerlo en ecuación.
> 4. Resolver la ecuación por las reglas del Algebra.
> 5. Discutir los valores de la incógnita ó incógnitas.
> 6. Construir geométricamente esos valores (p. 3).

Seguidamente pone como ejemplo cuatro problemas que hemos recogido en el apartado de fenomenología. Tras resolver los problemas explica que las soluciones de los mismos se han presentado bajo ciertas formas homogéneas, a las que se pueden reducir cualquier otra (U):

> Los valores de las incógnitas obtenidas en los problemas anteriores, se han presentado bajo estas formas homogéneas:
> $x = \frac{ab}{c}, x = \frac{a^2}{c}, x = \sqrt{ab}, x = \sqrt{a^2 + b^2}, x = \sqrt{a^2 - b^2}$
> A estas formas pueden reducirse todas las que se hallen en otros problemas, aunque parezcan más complicadas; pero deberán hacerse homogéneas si no lo fuesen, y eso se consigue dividiendo todas las letras que hubiere en la fórmula (sin exceptuar ninguna) por un símbolo de la unidad, por ejemplo r (p. 6).

Pone ejemplos de cómo hacerlo en el caso de los cocientes y los radicales. En la primera cuestión pone solamente tres ejemplos (p. 6):

Si fuera $x = \frac{abcd}{mnp} = \frac{ab}{m} \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{d}{p} = \frac{zc}{n} \cdot \frac{d}{p} = \frac{ud}{p}$.

Si » $x = \frac{abc + efg + hlk}{mn} = \frac{abc}{mn} + \frac{efg}{mn} + \frac{hlk}{mn}$.

Si » $x = \frac{abc + efg}{mn + pq} = \frac{abc + efg}{mz} = \frac{abc}{mz} + \frac{efg}{mz} \ldots\ldots$

$$\left[mn + pq = mz \ldots\ldots z = n + \frac{pq}{m}\right].$$

Y en el caso de los radicales explica solamente cómo hacer homogénea la expresión $\frac{x}{r} = \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c^2m}{n^2}}$ (p. 7). Indica que si esa fuese la expresión debería hacerse

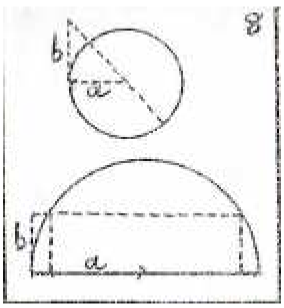
$$\frac{x}{r} = \sqrt{\frac{\frac{a}{r}}{\frac{b}{r}} - \frac{\frac{c^2}{r^2}\,\frac{m}{r}}{\frac{n^2}{r^2}}} \;\ldots\ldots\; x = r\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{c^2 m}{n^2 r}}$$

$$= \sqrt{r\,.\,\frac{ar}{b} - r\,\frac{c^2}{n}\,\frac{m}{n}} = \sqrt{r\,(z-u)}\,,$$

Siendo $\frac{ar}{b} = z$, $\frac{c^2}{n} \cdot \frac{m}{n} = u$, y concluye que “con esto se construye todo con cuartas, terceras y medias proporcionales geométricas” (p. 7).

Añade que también se pueden construir geométricamente las raíces de las ecuaciones de segundo grado sin necesidad de resolverlas (E).

> (…) acudiendo para ello á dos propiedades de las rectas en el círculo, que son: la tangente es media proporcional entre la secante y porción externa, y la ordenada es media proporcional entre los segmentos del diámetro.
>
> 1ª. $x^2 - 2ax - b^2 = 0 \ldots x(x - 2a) = b^2 \ldots x{:}\,b :: b{:}\,x - 2a.$
>
> 2ª. $x^2 + 2ax - b^2 = 0 \ldots x(x + 2a) = b^2 \ldots x{:}\,b :: b{:}\,x + 2a.$
>
> 3.ª$x^2 - 2ax + b^2 = 0 \ldots x(2a - x) = b^2 \ldots x{:}\,b :: b{:}\,2a - x.$
>
> 4.ª $x^2 + 2ax + b^2 = 0 \ldots - x(2a + x) = b^2 \ldots - x{:}\,b :: b{:}\,2a + x.$ (p. 7)



Termina diciendo que en la figura 8 “se contienen las dos construcciones geométricas, que se explicarán de viva voz” (p. 7).

Podemos apreciar, en este comentario, así como en otros que inserta en los problemas resueltos en la parte de Análisis Determinada, el carácter de manual para el profesor que tiene la obra que estamos analizando, más que texto de consulta para los alumnos.

A diferencia de otros autores anteriores no trata el tema de los segmentos negativos (SN), dando así por finalizada la parte dedicada a la Analítica Determinada.

Vemos por tanto que más que una parte con entidad propia dentro del libro es prácticamente un residuo de la Analítica Determinada que venía explicándose desde principios de siglo.

3. Analítica Indeterminada

3.1. Sistemas de coordenadas

La parte dedicada a la Analítica Indeterminada está dividida a su vez en dos, la primera de ellas dedicada a la Geometría plana. En ella el autor desarrolla una Geometría Analítica similar a la actual trabajando con sistemas de coordenadas. Sánchez Solís define seis tipos de sistemas de coordenadas: las cartesianas, las tangenciales binarias, las trilineales, las tangenciales ternarias, las polares y “otro sistema” con el que trabaja en el plano complejo (pp. 8-28).

Comienza el estudio (C) estableciendo la posición de un punto.

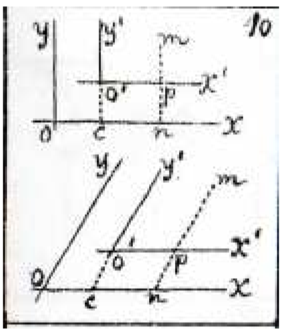
> La posición de un punto en un plano se puede determinar refiriéndole á dos rectas fijas llamadas ejes, de las X ó abscisas, de las Y ó sea de ordenadas. Pueden ser rectangulares ú oblicuas; y su intersección O se llama origen de las coordenadas (p. 8).

Estudia los posibles valores de las coordenadas: positivas, negativas o cero, y añade que "de su combinación resulta que un punto puede ocupar nueve posiciones en un plano con respecto á los ejes" (p. 8). Es novedoso el hecho de que añade punto del infinito e imaginarios:

> También puede alejarse al infinito siendo $\left[x = \frac{a}{0} \ldots y = \frac{b}{0}\right]$y aun puede llamarse imaginario si *x y* son imaginarias (p. 8).

Tras dar la determinación de un punto en ese tipo de ejes presenta la fórmula de la distancia entre dos puntos en coordenadas cartesianas, tanto rectangulares como oblicuas (PRD). La incluye sin deducir ni demostrar, simplemente indicando la fórmula para calcularla:

> La distancia entre dos puntos cuyas coordenadas cartesianas sean (x '… y') del 1.° … (x"… y") del 2.°, y que tengan por ecuaciones [$x = x'$ $y = y'$] [$x = x''$ $y = y''$] se expresa con unos radicales, si los ejes son rectangulares por
>
> $$\mathrm{D} = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$
>
> si los ejes son oblicuos por …$\mathrm{D} = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')cos\omega}$
>
> si el 2.º punto fuera el origen se harían x' = 0 … y"=0 (p. 9).

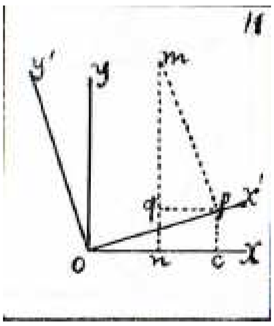


Tras esto da las ecuaciones de cambio de ejes, sin explicar cómo se obtienen (pp.9-10):

Ocurre muchas veces tener que cambiar de ejes y hé aquí los casos:

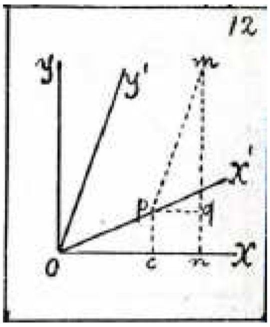
1.° Pasar de unos ejes rectangulares ú oblicuos á otros paralelos.

$$\text{Fig. 10.} \ldots \begin{cases} on = o'p + oc \\ mn = mp + o'c \end{cases} \begin{matrix} x = x' + a \\ y = y' + b \end{matrix}$$



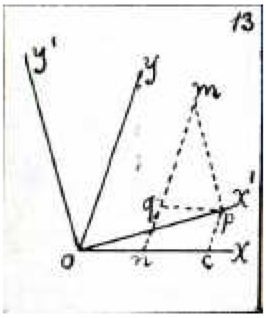
2.° Pasar de unos ejes rectangulares á otros rectangulares.

$$\text{Fig. 11.} \ldots \begin{cases} on = oc - pq \\ mn = cp + mq \\ oc = x' \cos. XX' \\ pq = y' \sen. XX' \\ cp = x' \sen. XX' \\ mq = y' \cos. XX' \end{cases} \begin{cases} x = x' \cos. XX' - y' \sen. XX' \\ y = x' \sen. XX' + y' \cos. XX' \end{cases}$$



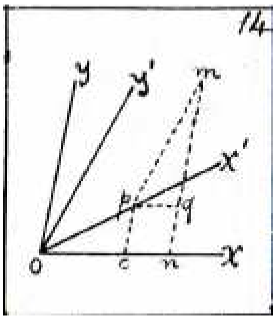
3.° Pasar de ejes rectangulares á ejes oblicuos.

$$\text{Fig. 12.}\ldots\left\{\begin{aligned} on &= oc + pq \\ mn &= cp + mq \\ oc &= x'\,cos.\,XX' \\ pq &= y'\,cos.\,XY' \\ cp &= x'\,sen.\,XX' \\ mq &= y'\,sen.\,XY' \end{aligned}\right\}\begin{aligned} x &= x'\,cos.\,XX' + y'\,cos.\,XY' \\ y &= x'\,sen.\,XX' + y'\,sen.\,XY' \end{aligned}$$



4.° Pasar de ejes oblicuos á ejes rectangulares.

$$\text{Fig. 13.}\left\{\begin{aligned} on &= oc - pq \\ mn &= cp + mq \\ \frac{oc}{sen.\,YX'} &= \frac{x'}{sen.\,XY} \\ \frac{pq}{sen.\,YY'} &= \frac{y'}{sen.\,XY} \\ \frac{cp}{sen.\,XX'} &= \frac{x'}{sen.\,XY} \\ \frac{mq}{sen.\,XY'} &= \frac{y'}{sen.\,XY} \end{aligned}\right\}\begin{aligned} x &= \frac{x'\,sen.\,YX' - y'\,cos.\,YX'}{sen.\,XY} \\ y &= \frac{x'\,sen.\,XX' + y'\,cos.\,XX'}{sen.\,XY} \end{aligned}$$

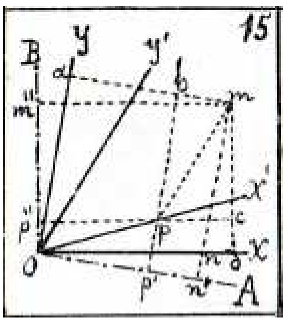


5.° Pasar de ejes oblicuos á ejes oblicuos.

$$\text{Fig. 14.}\left\{\begin{aligned} on &= oc + pq \\ mn &= cp + mq \\ \frac{oc}{sen.\,YX'} &= \frac{x'}{sen.\,XY} \\ \frac{pq}{sen.\,YY'} &= \frac{y'}{sen.\,XY} \\ \frac{cp}{sen.\,XX'} &= \frac{x'}{sen.\,XY} \\ \frac{mq}{sen.\,XY'} &= \frac{y'}{sen.\,XY} \end{aligned}\right\}\begin{aligned} x &= \frac{x'\,sen.\,YX' + y'\,sen.\,YY'}{sen.\,XY} \\ y &= \frac{x'\,sen.\,XX' + y'\,sen.\,XY'}{sen.\,XY} \end{aligned}$$

Añade que cuando se quiera cambiar al mismo tiempo el origen y la dirección de los ejes, no habrá más que añadir a las ecuaciones de cambio las coordenadas del nuevo origen (p. 10).

Seguidamente explica otra manera de hacer el cambio de coordenadas:



De otros modos se pueden hallar las fórmulas de transformación.

Fig.15. Trazados los ejes oblicuos XY y los X'Y', así como tambien las coordenadas antiguas y nuevas de un punto *m*, se tiran OA OB, perpendiculares á OY OX y sobre ellas se proyectan los contornos *onm opm*, y sale:

$$\left.\begin{aligned} on' &= op' + p'n' \\ om &= \mathrm{op} + p'm'' \end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned} xsenXY &= x'sen.YX' + y'sen.YY' \\ ysen.XY &= sen.XX' + y'\,sen.XY' \end{aligned}\right\}$$

(p. 10)

Propone además tomar los ejes auxiliares *ma, md* en vez de OA, OB, obteniendo de otro modo las ecuaciones de cambio, y concluye diciendo que "cambiando después los valores de los ángulos salen las demás fórmulas" (p. 10).

Tras trabajar con coordenadas cartesianas define las coordenadas tangenciales binarias (C):

> Hemos visto que la ecuación de una recta en función de los segmentos que corta en los ejes X, Y, es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
>
> Se puede escribir $x.\frac{1}{a}+y.\frac{1}{b}=1$, y haciendo $\frac{1}{a}=u, \frac{1}{b}=v$, queda $xu+yv=1$.
>
> Las dos cantidades *u, v,* recíprocas de *a, b,* se llaman coordenadas tangenciales; ellas bastan para determinar la posición de una recta referida á dos ejes que suponemos rectangulares, y por consiguiente, son las coordenadas de la recta (p. 17).

Seguidamente da la definición explica la relación entre las coordenadas tangenciales y cartesianas:

> Entre los dos sistemas de coordenadas cartesianas y tangenciales hay notable armonía, correspondiendo en el uno á las rectas lo que en el otro á los puntos. Asi es que
>
> en coordenadas cartesianas $\begin{cases} \text{ecuaciones del punto} \ldots\ldots\ x=\alpha \ldots y=\beta \\ \text{ecuación de la recta} \ldots\ldots\ Ax+By=1 \end{cases}$
>
> en coordenadas tangenciales $\begin{cases} \text{ecuaciones de la recta} \ldots\ldots\ u=\alpha \ldots v=\beta \\ \text{ecuación de la recta} \ldots\ldots\ Au+Bv=1 \end{cases}$

dando la primera noción del principio de dualidad:

> Con una sola ecuación $xu+yv=1$, se representará una recta si se toman *u, v* como coeficientes constantes, y las *x, y* como coordenadas cartesianas variables, y se representará un punto si se toman *x*, *y* como coeficientes constantes, y las *u*, *v* como coordenadas tangenciales variables. Desde aquí empieza á vislumbrarse un principio de dualidad, porque con la misma ecuación se pueden expresar dos cosas distintas sólo con cambiar el significado de las letras (p. 17).

En este sistema de referencia resuelve cuatro "problemas fundamentales" y tras ello pasa a trabajar con las coordenadas trilineares[61], que define de la siguiente manera (C):

> Este sistema de coordenadas trilineares, que también podemos llamar triláteras y triangulares, consiste en referir los puntos de un plano á tres rectas fijas que son ejes de referencia, y en determinar la posición de cada punto por las perpendiculares á los tres ejes (p. 18).

Con el término perpendicular se refiere a la distancia del punto a cada uno de los ejes.

[61] Solís las llama trilineares y Mundi trilineales.

Señala que aquí se utilizará la ecuación de una recta bajo la forma $xcos\alpha + ysen\alpha - p = 0$, y explica cómo se dan las coordenadas de un punto, y qué relación existe entre ellas (pues son tres):

> Fig. 20. Si tomamos tres rectas BC, CA, A B y escribimos sus ecuaciones en función de las perpendiculares tiradas á ellas desde el origen de un sistema rectangular, y de los ángulos que formen con el eje X, se tendrá:
> recta BC… $xcos\alpha + ysen\alpha - p = 0$ … ó abreviadamente $\alpha=0$.
> recta CA… $xcos\beta + ysen\beta - p' = 0$ … ó abreviadamente $\beta=0$.
> recta AB… $xcos\gamma + ysen\gamma - p'' = 0$ … ó abreviadamente $\gamma=0$.
>
> Estas tres rectas son los ejes de referencia del sistema, y un punto m se determina por las tres perpendiculares á los ejes, que son α, β, γ cuales están sujetas á una relación fija, pues que llamando a, b, c las longitudes de los lados del triángulo, será $a\alpha+b\beta+c\gamma=2S$ ó sea doble área del triángulo.
>
> Pero $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$, diámetro del círculo circunscrito; luego $\alpha sen\,A + \beta sen\,B + \gamma sen\,C = \frac{S}{R}$, cantidad constante, ó también
>
> $$\alpha sen\,(\beta - \gamma) + \beta sen\,(\alpha - \gamma) + \gamma sen\,(\alpha - \beta) = \frac{S}{R}$$ (p. 19)

Como vemos la explicación que da es concisa, como en el resto del libro, pero muy clara. En Mundi la definición de este tipo de coordenadas y la relación que existe entre ellas es mucho más compleja.

Seguidamente explica cómo serán los signos de las coordenadas de un punto en relación a su posición respecto del triángulo de referencia. Se supone que los puntos que se encuentren dentro tendrán todas sus coordenadas positivas, por lo que los puntos exteriores no podrán tener las tres negativas (p. 19).

También da las coordenadas de los puntos que se encuentran sobre los ejes, y las de los vértices del triángulo de referencia (p. 19).

Así mismo calcula la distancia entre dos puntos, (α' β' γ')(α'' β'' γ''), en coordenadas trilineales (PRD). Para ello toma las ecuaciones que dan cada una de las coordenadas

$$\begin{array}{l|l}
\alpha' = x' \cos.\ \alpha + y' \operatorname{sen.}\ \alpha - p & \alpha'' = x'' \cos.\ \alpha + y'' \operatorname{sen.}\ \alpha - p \\
\beta' = x' \cos.\ \beta + y' \operatorname{sen.}\ \beta - p' & \beta'' = x'' \cos.\ \beta + y'' \operatorname{sen.}\ \beta - p' \\
\gamma' = x' \cos.\ \gamma + y' \operatorname{sen.}\ \gamma - p'' & \gamma'' = x'' \cos.\ \gamma + y'' \operatorname{sen.}\ \gamma - p''
\end{array}$$

e indica que restándolas para obtener (α'-α''), (β'-β''), (γ'-γ''), y combinando las ecuaciones obtenidas se llega a (p. 19):

$$x' - x'' = \frac{(\beta' - \beta'') \operatorname{sen.}\ \alpha - (\alpha' - \alpha'') \operatorname{sen.}\ \beta}{\operatorname{sen.}\ (\alpha - \beta)}$$

$$x' - x'' = \frac{(\gamma' - \gamma'') \operatorname{sen.}\ \alpha - (\alpha' - \alpha') \operatorname{sen.}\ \gamma}{\operatorname{sen}\ (\alpha - \gamma)}$$

$$x' - x'' = \frac{(\gamma' - \gamma'') \operatorname{sen.}\ \beta - (\beta' - \beta'') \operatorname{sen.}\ \gamma}{\operatorname{sen}\ (\beta - \gamma)}$$

$$y' - y'' = \frac{(\alpha' - \alpha'') \cos. \beta - (\beta' - \beta'') \cos. \alpha}{\text{sen.} (\alpha - \beta)}$$

$$y' - y'' = \frac{(\alpha' - \alpha'') \cos. \gamma - (\gamma' - \gamma'') \cos. \alpha}{\text{sen.} (\alpha - \gamma)}$$

$$y' - y'' = \frac{(\beta' - \beta'') \cos. \gamma - (\gamma' - \gamma'') \cos. \beta}{\text{sen.} (\beta - \gamma)}$$

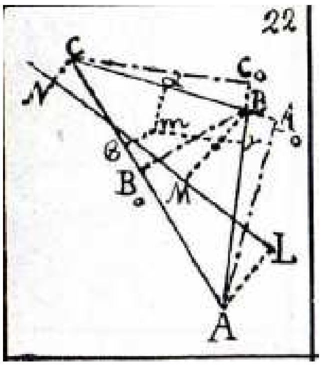
Continúa diciendo que elevando al cuadrado y sumando, con la consideración de que *α-ϐ=C*, *α-γ=B*, *ϐ-γ=A* se obtiene (p. 20):

$$[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(\gamma'-\gamma'')^2] (\text{sen.}^2 A+\text{sen.}^2 B+\text{sen.}^2 C)=\ldots.$$
$$2 [(\alpha' - \alpha'')^2 + (\beta' - \beta'')^2 + (\gamma' - \gamma'')^2 - (\alpha'-\alpha'') (\beta'-\beta'') \cos. C$$
$$- (\alpha' - \alpha'') (\gamma' - \gamma'') \cos. B - (\beta' - \beta'') (\gamma' - \gamma'') \cos. A]$$

Y concluye: "y por fin D=, etcétera" (p. 20), lo que muestra una vez más el carácter de guía del profesor más que de libro de texto para los alumnos, que tiene esta obra.

En cuanto a las transformaciones de coordenadas indica que las fórmulas de transformación para pasar de las trilineares á las cartesianas son los valores de *α, ϐ, γ* (p. 20).

Tras trabajar en coordenadas trilineares pasa a definir las coordenadas tangenciales ternarias (C):



Llamamos así á las perpendiculares tiradas á una recta desde los vértices del triángulo de referencia (p. 23)

Continúa designándolas: a la perpendicular AL como L, a BM como M y a CN como N, y da sus valores, aunque como en tantos otros casos de forma esquemática.

Siendo el punto A(A_0…0…0) ….$L = \frac{lA_0}{\sqrt{\ldots\ldots}}$ (…) (p. 23)

De forma análoga da los valores de $M = \frac{mB_0}{\sqrt{\ldots\ldots}}$ y $N = \frac{nC_0}{\sqrt{\ldots\ldots}}$. De estas fórmulas obtiene los coeficientes *l, m* y *n* de la ecuación $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, en función de L, M y N respectivamente. Así tiene $l = \frac{L}{A_0}\sqrt{\ldots} = \frac{aL}{2S}\sqrt{\ldots}$, $m = \frac{M}{B_0}\sqrt{\ldots} = \frac{bM}{2S}\sqrt{\ldots}$, $n = \frac{N}{C_0}\sqrt{\ldots} = \frac{cN}{2S}\sqrt{\ldots}$ y sustituyéndolas en la ecuación anterior y simplificando llega a $aL\alpha + bM\beta + cN\gamma$=0. Y como *α=2RsenA*, *ϐ*=2RsenB y *γ=2RsenC*, obtiene finalmente la ecuación

$$(senA)L\alpha + (senB)M\beta + (senC)N\gamma = 0$$

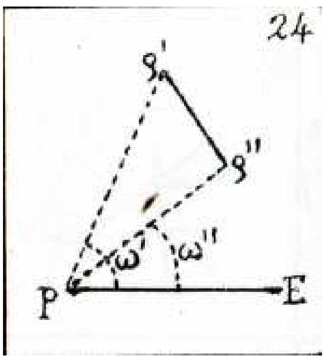
que dan a la vez las coordenadas trilineares de un punto *αϐγ* y las coordenadas tangenciales de una recta LMN. Solís señala que "vuelve aquí á presentarse el mismo carácter de dualidad de la ecuación *xu*+*yv*=1" (p. 23).

Como en el caso de los puntos en coordenadas trilineares, el autor indica que como dos coordenadas tangenciales ternarias son suficientes para determinar una recta, debe existir una relación entre las tres LMN. Calcula dicha relación obteniendo (p. 24):

$$L^2\,\text{sen.}^2A+M^2\,\text{sen.}^2B+N^2\,\text{sen.}^2C\left.\begin{matrix}-LM\,\text{sen. A sen. B cos. C}\\-LN\,\text{sen. A sen. C cos. B}\\-MN\,\text{sen. B sen. C cos. A}\end{matrix}\right\}=\frac{S^2}{R^2}.$$

En este sistema de coordenadas no resuelve ningún problema, señala simplemente que se resuelven "por el mismo estilo que en los sistemas precedentes, pero no ofrecen para nosotros interés" (p. 24).

También trabaja Sánchez Solín en coordenadas polares (C). Empieza definiéndolas:



Un punto en un plano se puede determinar por medio de su distancia á un punto fijo P llamado polo, y por el ángulo que esa distancia ó recta forma con otra recta fija PE llamada eje polar. La distancia variable del punto al polo se designa por ρ y se llama radio vector: el ángulo variable sedesigna por ω (p. 25).

Análogamente a como ha hecho con otros sistemas de referencia da la distancia entre dos puntos en coordenadas polares. Lo hace sin calcularla ni deducirla, sino directamente (PRD).

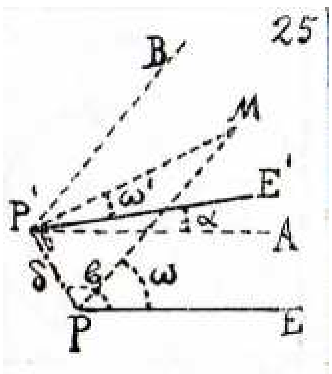
La distancia entre dos puntos que tengan por coordenadas polares $\rho'\omega'\rho''\omega''$ se expresa del modo siguiente, sacándola de un triángulo

$$D=\sqrt{\rho'^2+\rho''^2-2\rho'\rho''\cos(\omega'-\omega'')}\ \text{(p. 25)}$$

Tras dar la fórmula de la distancia entre dos puntos da las fórmulas de transformación de unos sistemas a otros. Considera varios casos (p. 25):

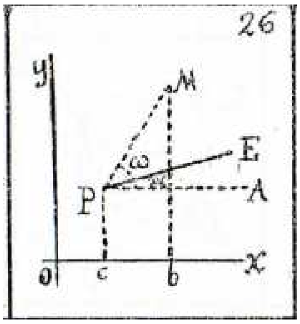
1º. Pasar de un polo P y eje PE, a otro polo P' y eje P'E'.

En este caso deduce "examinando con atención lados y ángulos" de la figura 25 las siguientes fórmulas:



$$\begin{cases}\rho=\sqrt{\rho'^2+\delta^2+2\rho'\delta\cos.(\omega'+\alpha-\beta)}\\ \tan.\omega=\dfrac{\rho'\,\text{sen.}\,(\omega'+\alpha)+\delta\,\text{sen.}\,\beta}{\rho'\cos.(\omega'+\alpha)+\delta\cos.\beta}\end{cases}$$

2º Pasar de coordenadas cartesianas rectangulares a polares.



En este caso de la figura 26 obtiene:

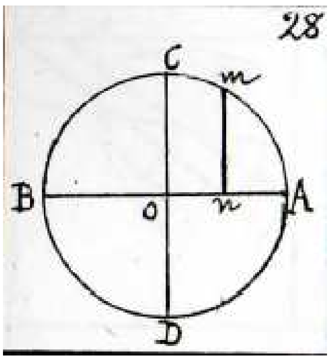
$$\left.\begin{array}{l} ob = oc + Pq \\ mb = Pc + mq \end{array}\right\} \text{ó sean } \begin{array}{l} x = a + \rho \cos.\,(\omega + \alpha) \\ y = b + \rho \operatorname{sen.}(\omega + \alpha) \end{array}.$$

3º. Pasar de coordenadas polares á cartesianas rectangulares

En este caso el procedimiento que sigue para obtener las ecuaciones de cambio es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \rho \cos.\,(\omega + \alpha) = x - a \\ \rho \operatorname{sen.}(\omega + \alpha) = y - b \end{array}\right\} \text{ó sean } \begin{array}{l} \rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ \tan\,(\omega + \alpha) = \dfrac{y - b}{x - a} \end{array}$$

Finalmente, tras obtener las ecuaciones de la recta en polares y resolver los problemas fundamentales como en sistemas anteriores pasa a definir y trabajar con "otro sistema", que trabaja en el plano complejo (C):

> Hay otro sistema de coordenadas, que puede pasar por una abreviación del cartesiano y del polar, y que proviene de introducir en el cálculo las cantidades algebraicas complejas. Se llaman así las cantidades binomias que contienen un término real y otro imaginario, que son irreducibles.
>
> 
>
>
> Fig. 28. En el círculo se sabe que $OC = \sqrt{OA \cdot OB}$ y $OD = -\sqrt{OA \cdot OB}$; de modo que si OA = + 1 y OB = - 1 serán $OC = +\sqrt{-1}$ y $OD = -\sqrt{-1}$. Así mismo
>
> $mn = \sqrt{nA \cdot nB} = \sqrt{+ax - c} = \sqrt{-ac} = \sqrt{-b^2} = +b\sqrt{-1}$.
>
> Aquí tenemos símbolos geométricos del $\sqrt{-1}$ del $b\sqrt{-1}$, etcétera; quiere decir que las rectas horizontales de la figura, contadas desde un punto dado hacia la derecha, se consideran positivas; las contadas hacia la izquierda, negativas, y las perpendiculares, imaginarias. Pero téngase en cuenta que un símbolo no es más que un indicio ó señal de la cosa significada, y por consiguiente, la perpendicular que para el geómetra simboliza una expresión imaginaria, no dá ni puede dar á esa expresión ninguna realidad. El símbolo algebraico $\sqrt{-1}$, el literal i, la recta perpendicular al eje, son cosas reales; pero simbolizan seres imaginarios (p. 27)

Tras esta definición pasa a explicar cómo se determina un punto en este sistema:

> Partiendo de esto, así como en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares se determina la posición de un punto con dos ecuaciones $x = x'$... $y = y'$ ó con sus

> dos coordenadas $(x'\ y')$, también se puede decir el punto $x' + y'\sqrt{-1}$ reuniendo las dos coordenadas en una expresión compleja ó suma de dos términos irreducibles; por medio de ella se busca la posición del punto, recorriendo sobre el eje de abscisas, á partir del origen, la distancia x',y subiendo luego en dirección perpendicular la distancia y' (p. 27).

Define seguidamente módulo y argumento del punto:

> Hay que convenir en que de la expresión compleja se vuelven á sacar las dos ecuaciones del punto. La distancia al origen del punto $x' + y'\sqrt{-1}$ es $\sqrt{x'^2 + y'^2}$y se le llama módulo ó radio vector; la inclinación de esa recta sobre el eje es $\frac{y'}{x'}$ y se le llama argumento ó ángulo variable (p. 28).

También utiliza este sistema en polares:

> Si en vez de coordenadas rectangulares usamos las polares, entonces cambia la forma de la cantidad compleja, porque siendo $x' = \rho cos\omega \ldots\ y' = \rho sen\omega$ se obtiene
>
> $$x' + y'\sqrt{-1} \ = \rho(cos\omega + sen\omega\sqrt{-1} = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$$
>
> forma esponencial (sic) en que se hallan de manifiesto el radio vector (módulo) y el ángulo (argumento (p. 28).

En cada uno de estos sistemas estudia las ecuaciones de la recta (ER), tal y como veremos a continuación.

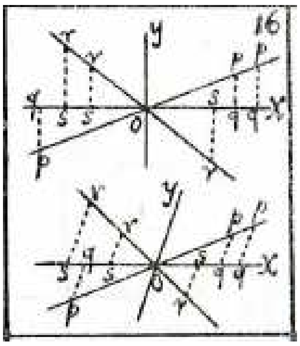
3.2. Ecuaciones de la recta/punto

En el sistema de coordenadas cartesianas tras definirlo y dar las ecuaciones de cambio entre unos sistemas cartesianos y otros, trata las cuestiones relativas a la ecuación de una recta. Comienza relacionándola con su ecuación:

> Una recta se simboliza algebraicamente en una ecuación que contiene las dos coordenadas de cada punto, y denota la relación constante, ó sea la ley que las enlaza, por lo cual se llama la ecuación de la recta (p. 10).

Seguidamente da todas las ecuaciones posibles, dependiendo de su posición respecto de los ejes (p. 11):

> Doce posiciones puede tener una recta referida á unos ejes rectangulares ú oblicuos, y sus ecuaciones son las siguientes:



(Fig. 16) 1ª.- Eje de las Y ó de las ordenadas. x = 0
2ª.- Paralela por la derecha…………x = +a
3ª.- Paralela por su izquierda……… x = -a
4ª.- Eje de las X ó de las abscisas…. y = 0
5ª.- Paralela por encima…………….y = +b
6ª.- Paralela por debajo……………..y = -b
7ª.- Recta tirada por el origen hácia la derecha………………………..y = mx
8ª.- Paralela á ella, pero más alta…..y = mx+n
9ª.-Paralela por la parte inferior……y = mx-n

10ª.- Recta por el origen hácia la
izquierda……………………y = -mx
11ª.- Paralela pero más alta………y = -mx+n
12ª.- Paralela por la parte inferior..y = -mx-n

Obsérvese que Sánchez Solís sigue identificando los parámetros con su valor absoluto, pues los signos los toma de forma independiente. Vemos un residuo de los antiguos problemas con los números negativos.

Continúa haciendo notar que $\frac{pq}{oq} = \frac{rs}{os} = \frac{y}{x} = m$ en coordenadas rectangulares es $m = tan.\alpha$ y en coordenadas oblicuas $m = \frac{sen.\alpha}{sen.\beta}$, y aclara:

> (…) esto es: en coordenadas rectangulares la *m* significa la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el eje de las X positivas; y en coordenadas oblicuas, la relación de los senos de los ángulos que la recta forma con los dos ejes (p. 11).

Llama a m coeficiente angular, e indica que n es una constante que representa la ordenada de la recta correspondiente al origen (p. 11).

Tras esto señala que la ecuación general de primer grado con dos variables *Ax+By+C=0* representa una recta en cualquiera de las doce posiciones…

> (…) porque se puede escribir así $x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}$, o también $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}y$, dando valores á las letras ABC resultan todos los doce casos (p. 11).

Además da otras dos ecuaciones de la recta, señalándolas como importantes. En primer lugar la segmentaria: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, donde a y b son los segmentos de corte de la recta con los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente. También da la ecuación en función de la perpendicular tirada a la recta desde el origen y el ángulo que dicha perpendicular forma con el eje X:

> Si á la perpendicular se la designa por p y al ángulo por α multiplicando por p la ecuación de la forma anterior diráx$\frac{p}{a} + y\frac{p}{b} = p$ y como $\frac{p}{a} = \cos\alpha$ … $\frac{p}{b} =$ sen αresulta $xcos\alpha + ysen\alpha = p$ (p. 12).

Explica que la ecuación general *Ax+By+C=0* puede tomar esta forma. Para ello hay que multiplicarla por un factor h, quedando *Ahx+Bhy+Ch=0*; e identificando esta ecuación con $xcos\alpha + ysen\alpha - p = 0$ y operando resulta, $h = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, y por tanto la ecuación queda $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$. Asimismo señala que "la ecuación *y=mx+n* también toma la forma de $xcos\alpha + ysen\alpha - p = 0$ de este modo $\frac{y-mx-n}{\sqrt{1+m^2}} = 0$" (p. 12), e indica que ya se verá la importancia de estos cambios de formas de las ecuaciones de la recta (p. 12).

También obtiene la ecuación de una recta que pasa por un punto y la que pasa por dos, que plantea como problemas, por lo que ambos se encuentran recogidos en el apartado de fenomenología.

Tras el problema 1, en el que halla el punto de corte de dos rectas, explica que al igual que dos ecuaciones de primer grado, juntas, representan un punto, dos ecuaciones de cualquier grado representan varios puntos en el plano. Y considera varios casos:

> Del mismo modo que las dos ecuaciones anteriores de primer grado ($y=mx+n$, $y=mx'+n'$) estando juntas representan un punto, así otras dos ecuaciones de cualquier grado f (x y) = 0… $\varphi\ (xy) = 0$ representarán varios puntos del plano.
>
> Una ecuación del grado m con x sola f (x) = 0 representa m rectas paralelas al eje de ordenadas, pues equivale á las ecuaciones $x = a \ldots x = b \ldots x = c \ldots$ &.
>
> Una ecuación del grado n con y sola f (y) = 0 representa n rectas paralelas al eje de abscisas.
>
> Una ecuación homogénea en x, y, representa muchas rectas que pasan por el origen de coordenadas (…)
>
> Una constante igualada á cero C=0 es un absurdo, y significa una recta alejada al infinito, pues equivale á 0x+0y+C=0 que corta á los dos ejes en el infinito.
>
> Una ecuación de coeficientes imaginarios pertenece á una recta imaginaria; pero toda recta imaginaria contiene un punto real.
>
> En efecto $\left[a + b\sqrt{-1}\right]x + \left[c + d\sqrt{-1}\right]y + \left[e + f\sqrt{-1}\right] = 0$ equivale á estas dos $\left.\begin{matrix} ax + cy + e = 0 \\ x + dy + f = 0 \end{matrix}\right\}$ que combinadas dan $\left.\begin{matrix} x = \frac{cf-de}{ad-bc} \\ y = \frac{be-af}{ad-bc} \end{matrix}\right\}$
>
> Si ad-$bc=0$, el punto se aleja al infinito y el coeficiente angular es $-\frac{b}{d}$ (p. 13).

También estudia la recta en coordenadas tangenciales binarias. Como hemos visto anteriormente, cuando define este sistema de coordenadas da la determinación de una recta, que viene dada por dos coordenadas, (u, v), siendo el punto el que viene dado por una ecuación, $xu+yv=1$ (p. 17).

Así mismo en este sistema obtiene la ecuación de una recta que pasa por un punto y por dos, planteados como problemas y recogidos por tanto en el apartado de fenomenología.

Además escribe la ecuación de una recta en coordenadas trilineares o triláteras, y comprueba que en efecto es la ecuación de una recta haciendo el cambio a coordenadas cartesianas:

> La ecuación de una recta en coordenadas trilineares es $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, que contiene implícitamente un término conocido; y en efecto, pasando á las coordenadas cartesianas, se encuentra

$$l(xcos\alpha + ysen\alpha - p) + m(xcos\beta + ysen\beta - p') + n(xcos\gamma + ysen\gamma - p'') = 0$$

ó bien $\left.\begin{matrix} (lcos\alpha + mcos\beta + ncos\gamma)x + \\ (lsen\alpha + msen\beta + nsen\gamma)y - \\ (lp + mp' + np'') \ldots\ldots\ldots\ldots.. \end{matrix}\right\} = 0,$

y haciendo $\left.\begin{array}{r} l cos\alpha + m cos\beta + n cos\gamma = A \\ l sen\alpha + m sen\beta + n sen\gamma = B \\ lp + mp' + np'' \ldots\ldots\ldots\ldots = -C \end{array}\right\}$ Quedará Ax+By+C=0 (p. 20).

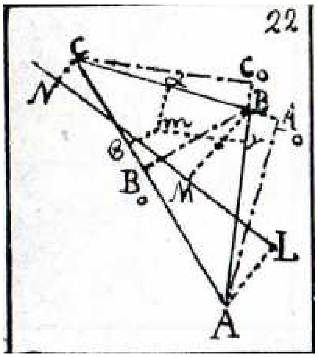
Trata a continuación los casos particulares de los ejes de referencia y sus paralelas, el de una recta paralela a una dada, y el de la recta del infinito:

> La ecuación de una recta paralela á la $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, se obtiene añadiendo ó quitando una constante, y como $\alpha\, sen\, A + \beta\, sen\, B + \gamma\, sen\, C$es constante, se pone$l\alpha + m\beta + n\gamma + h(\alpha senA + \beta senB + \gamma senC) = 0$.
>
> La ecuación $\alpha\, sen\, A + \beta sen\, B + \gamma\, sen\, C$=0 es absurda ó de la recta del infinito (p. 21).

También en este caso plantea hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos como un problema.

Tras trabajar con coordenadas trilineales, define las coordenadas tangenciales ternarias. Como hemos visto anteriormente para determinar una recta traza perpendiculares desde los vértices del triángulo de referencia ABC, que llama L, M y N, respectivamente (fig. 22).

Tomando la recta $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, en coordenadas trilineares, y calculando l, m y n, en función de L, M y N; y α, β y γ en función de los ángulos del triángulo de referencia, A, B y C, obtiene la ecuación:



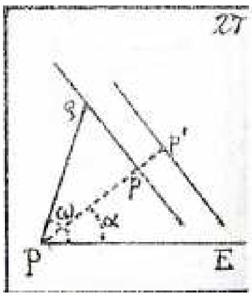
$$(sen\, A)L\alpha + (sen\, B)M\beta + (sen\, C)N\gamma = 0$$

> En esta ecuación se hallan al mismo tiempo las coordenadas trilineares de un punto *αβγ*, y las coordenadas tangenciales de una recta LMN, de manera que si se consideran constantes LMN tendremos la ecuación trilinear de una recta; y si se miran como constantes *α β γ* tendremos la ecuación tangencial de un punto (p. 23).

Y señala el carácter de dualidad que se presenta en esta ecuación:

> Vuelve aquí á presentarse el mismo carácter de dualidad de la ecuación *xu*+*yv*=1 (p. 23)

También estudia la ecuación de una recta en coordenadas polares:

> La ecuación de una recta en coordenadas polares es la siguiente:
>
> 
>
> Fig. 27. $\rho \cos(\omega - \alpha) = p$ ….. α …. p son constantes (p. 26).

Tras ella da los valores que toman *ω*, ρ y p si la recta pasa por el polo, si es paralela al eje polar y si es perpendicular al eje (p. 26).

Como en otros sistemas resuelve como problemas las cuestiones de hallar la ecuación de la recta que pasa por uno y dos puntos que pueden consultarse en el apartado de fenomenología.

Finalmente, como ya hemos visto, define "otro sistema" de referencia (p. 27) utilizando cantidades complejas y en el que también da la determinación de una recta:

> En esta clase de cantidades complejas no se escribe ecuación para una recta, sino una mera expresión, introduciendo un coeficiente variable t para la abscisa y la ordenada de un punto, que las hace variar según una ley determinada. Así, por ejemplo,$\left(x' + y'\sqrt{-1}\right)t$expresa una recta que sale del origen y pasa por el punto (x' y') porque se puede poner $x = x't$ $y=y't$, de donde $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \dots y = \frac{y'}{x'}x$ (p. 28).

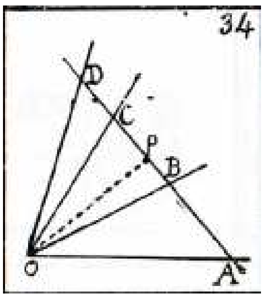
Análogamente prueba que la expresión $\left(x' + y'\sqrt{-1}\right) + \left(x'' + y''\sqrt{-1}\right)t$ es de una recta que pasa por (x' y') y es paralela á otra que va desde el origen al punto (x'' y''). Añade que cuando la variable t reconozca límites fijos "la expresión de la recta será de un segmento limitado", y pone como ejemplo $\left(x' + y'\sqrt{-1}\right) + \left(x'' + y''\sqrt{-1}\right)sen^2\alpha$ (p. 28).

4. Contenidos de Geometría Proyectiva

Por último analizaremos los contenidos de Geometría Proyectiva (GP) que podemos encontrar en esta obra. Ellos se encuentran dentro del apartado denominado *Aplicaciones.*

Así en el epígrafe titulado *División de rectas* define haz armónico y anarmónico, razón doble de cuatro puntos, divisiones homotética y homográfica de una recta y puntos en involución, entre otros conceptos.

Como veremos, las explicaciones de estos conceptos, a pesar de ser concisas, son muy claras, dejando muy bien definidos los conceptos.



Comienza explicando que cuatro rectas que salen de un mismo punto O, forman un haz, y si cortan á otra recta AD la dejan dividida en varios segmentos, entre los que se encuentran AB, AO, AD, BC, BD y CD, que guardan cierta relación con los senos de los ángulos en O (fig. 34). Para calcular dicha relación toma una perpendicular a AD (Op) desde el origen y calcula el doble del área de los triángulos AOB, AOC, AOD, BOC, BOD y COD en función de los lados OA, OB, OC y OD y los ángulos que estos forman entre sí. Así obtiene "la doble área de cada triángulo" (p. 34):

2 triáng.º AOB = *Op*. AB = AO·BO·sen.AOB

2 triáng.º AOC = *Op*. AC = AO·CO·sen.AOC

2 triáng.º AOD = *Op*.AD = AO·DO·sen.AOD

2 triáng.º BOC = *Op*. BC = BO· CO·sen.BOC

2 triáng.º BOD = *Op*. BD = BO·DO·sen.BOD

2 triáng.º COD = *Op*.CD = CO·DO·sen.COD

Toma estas igualdades y las combina multiplicando la primera por la sexta, la segunda por la quinta, la tercera por la cuarta, y las divide por ese orden, obteniendo las siguientes igualdades:

$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CD}{BD}=\frac{senAOB\cdot senCOD}{senAOC\cdot senBOD}$, $\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{senAOC\cdot senBOD}{senAOD\cdot senBOC}$, $\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BC}{CD}=\frac{senAOD\cdot senCOD}{senAOB\cdot senCOB}$ (p. 35), e indica:

> Esta última igualdad se puedo escribir así:
>
> $$\frac{AD}{AB}:\frac{CD}{CB}=\frac{senAOD}{senAOB}:\frac{senCOD}{senCOB}$$
>
> Los tres segmentos AD, AB, CD, van en el mismo sentido ótienen el mismo signo, mientras que CB tiene sentido y signo contrario (p. 35).

De aquí obtiene varios conceptos que define a continuación:

> El haz de las cuatro rectas se llama haz anarmónico (ó mejor inarmónico).
>
> La división de la recta AD, división anarmónica.
>
> La razón de los quebrados $\frac{AD}{AB}:\frac{CD}{CB}$ razón de dos razones ó razón doble, se llama también razón anarmónica.
>
> En el caso de que los dos quebrados sean iguales en valor, aunque de signos contrarios, será:
>
> $$\frac{AD}{AB}:\frac{CD}{CB}=\frac{senAOD}{senAOB}:\frac{senCOD}{senCOB}=-1,$$
>
> y entonces el haz, la división de la recta y la razón de los quebrados, se llamarán haz armónico, división armónica, razón armónica (p. 35).

Explica que el origen de estos nombres está en la proporción armónica de los números y en las ideas relativas á los tonos musicales (p. 35). Seguidamente define cuándo tres números son armónicos y cómo se aplica eso a los segmentos:

> Tres números son armónicos cuando la razón geométrica del mayor con el menor es igual á la razón de sus diferencias con el mediano; es decir, que si los números se designan por g (el grande), m (el mediano), y p (el pequeño), serán armónicos si se verifica que *g:p::g- m:m-p*, de donde sale *gm-gp=gp-mp... mp+gm=2 gp...* $\frac{1}{g}+\frac{1}{p}=\frac{2}{m}$ (…).
>
> Aplicando estas ideas á la recta AD, en la cual AD es la distancia grande, AC la mediana y AB la pequeña, se obtiene AD:AB::CD:CB, como se había escrito antes (pp.35-36)

Seguidamente obtiene las ecuaciones de las rectas del haz armónico, tomando OA como eje de las X y OC de las Y.

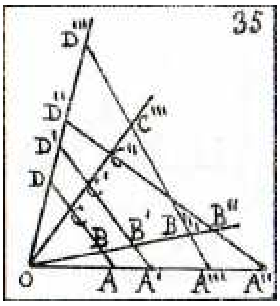
Lo hace en primer lugar en coordenadas cartesianas oblicuas, en cuyo caso se tiene, para la recta OB $y=\frac{sen\,AOB}{senCOB}x$ y para la OD $y=\frac{sen\,AOD}{senCOD}x$, como $\frac{sen\,AOB}{senCOB}:\frac{sen\,AOD}{senCOD}=-1$ se tiene OA≡*y=0,* OB≡*y-mx=0*, OC≡*x=0,* OD≡*y+mx=0*, siendo $m=\frac{sen\,AOB}{senCOB}=$

$-\frac{sen\,AOD}{senCOD}$. Análogamente las calcula en trilineares donde OA≡$\alpha=0$, OB≡α-$K\beta=0$, OC≡$\beta=0$, OD≡α+$K\beta=0$, siendo $K=\frac{sen\,AOB}{senCOB}=-\frac{sen\,AOD}{senCOD}$ (p. 36) y concluye:

> Así es que en cualquiera de los dos sistemas, las ecuaciones de las cuatro rectas del haz armónico tienen un mismo orden. La 1.ª y 3.ª son las fundamentales, y la 2.ª y 4.ª se forman combinando del mismo modo las otras dos, en una por resta y en otra por suma (p. 36).

Considera el caso en que el haz no es armónico, sino anarmónico, siendo por tanto las razones $\frac{sen\,AOB}{senCOB}$ y $\frac{sen\,AOD}{senCOD}$ desiguales. Indica que en ese caso las ecuaciones de las rectas no podrán tener el mismo coeficiente m *ó* K (p. 37).

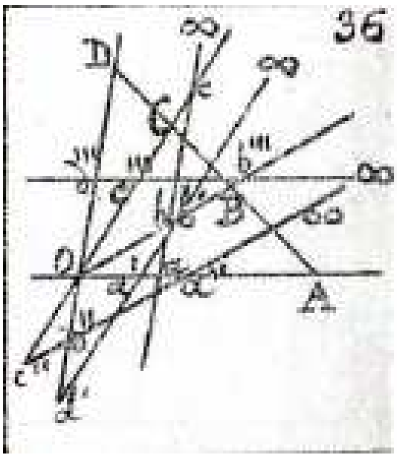
Tras esto define divisiones homotéticas y homográficas:



> Si ahora en un mismo haz de rectas tiramos diversas secantes ó transversales, como AD, A'D', A"D", A'"D'", todas ellas quedarán convenientemente divididas.
>
> En las paralelas AD, A'D' las divisiones podrán llamarse homotéticas porque los segmentos homólogos son proporcionales
>
> AB:BC:CD::A'B':B'C':C'D'.
>
> En las que no son paralelas, como AD, A"D", A'"D'", las divisiones se llaman homográficas, y las razones dobles son iguales porque los ángulos son constantes.
>
> $$\frac{AD\cdot CB}{AB\cdot CD}=\frac{AD''\cdot CB''}{AB''\cdot CD''}=\frac{AD'''\cdot CB'''}{AB'''\cdot CD'''}=\frac{sen\,AOD\times senCOB}{sen\,AOB\times senCOD}\text{ (p. 37).}$$

Para el caso de un haz armónico indica que cualquier transversal quedará dividida armónicamente, y si es paralela á una de las cuatro rectas, quedará cortada en partes iguales por las otras tres

> (…) porque en la expresión $\frac{1}{g}+\frac{1}{p}=\frac{2}{m}$, habrá que hacer g=∞, y saldrá m = $2p$ la parte mediana doble de la pequeña (p. 37).



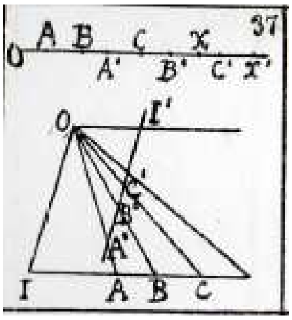
Después estudia las posiciones posibles que puede tener una recta transversal respecto a las rectas del haz, que él enumera de la forma siguiente: 1ª cortando a las cuatro, 2ª paralela a OD, 3ª paralela a OC, 4ª paralela a OB y 5ª paralela a OA. Y estudia los puntos de corte (fig. 36):

> En la 1.ª tiene sus cuatro puntos de división á distancias finitas, en las otras posiciones siempre tiene un punto á distancia infinita, que es el de intersección con su paralela.
>
> En la posición primera los puntos de división son A.. B.. C.. D.

> En la segunda ……………………a.. b.. c.. d
> En la tercera ……………………..a'. b'. ∞. d'
> En la cuarta ……………………...a'' ∞ c'' d''
> En la quinta ……………………..∞ b'''c'''d''' (p. 37)

Añade que al comparar la primera transversal con cualquiera de las otras, siempre habrá un punto que se corresponde con otro del infinito, y al comparar el resto de transversales de dos en dos y en cualquier orden se encontrarán dos puntos correspondientes a otros a otros dos del infinito.

> Así (*c…d'*), (*b…d'*), (*a…d'''*), (*b'…c''*), (*a'…c'''*), (*a''…b'''*), son los puntos que forman parejas con los del infinito (p. 38).



Seguidamente explica que las divisiones homográficas de dos rectas forman dos series que en ocasiones se colocan sobre una misma recta que se llama base.

Así toma las series (A, B, C, X) y (A', B', C', X'), de las que se sabe que deben tener iguales sus razones dobles $\frac{AX}{CX}\cdot\frac{BC}{AB}=\frac{A'X'}{C'X'}\cdot\frac{B'C'}{A'B'}$, e indica que se puede tomar un punto O cualquiera como origen, y designar a cada distancia tomada desde O con la letra minúscula correspondiente (OA=a, OB=b, etc.)

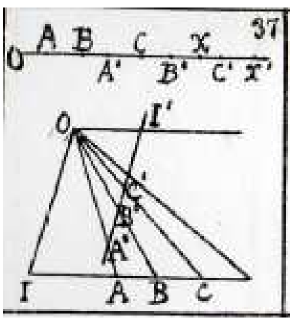
Teniendo en cuenta que AX=OX-OA=x-a, A'B'=b'-a', etc., sustituye en la igualdad anterior, opera y señala que "se llegará a un resultado de esta forma": $xx'-mx-nx'+p=0$ (p. 38).

Continúa explicando que como son conocidos los coeficientes *m, n, p*, porque se suponen dados los seis puntos, tomando un nuevo punto de la primera serie se puede hallar su correspondiente en la segunda, y concluye:

> Esto enseña que, conociendo tres parejas de puntos homográficos, se puede hallar otra cuarta pareja para completar las dos series; para un punto D hallaríamos su correspondiente D' (…) (p. 38)

Incluye entre estos puntos los del infinito, cuyas coordenadas calcula:

> (…) para un punto alejado al infinito en la primera série, su correspondiente I' en la segunda y para el punto al infinito de la segunda série, su correspondiente I en la primera. Por el cálculo sería
>
> $x'-m-\frac{nx'}{x}+\frac{p}{x}=0$ … haciendo $x=\infty$… sale $x'=m$=OI'.
>
> $x-\frac{m}{x'}-n+\frac{p}{x'}=0$ … " $x'=\infty$… sale $x=n$=OI (p. 39).



Y demuestra lo mismo geométricamente:

> Geométricamente se resuelve la misma cuestión, como se ve en la figura (37), pues las tres parejas de puntos (AA'), (BB'), (CC') están ligadas por las rectas que salen de O, y si señalásemos en la ABC un punto D ó F no habría más que unirlo con O por medio de una recta y se obtendría en A'B'C' el punto buscado D' ó F ', así como tirando la recta OI ' paralela á la ABC se obtiene el punto I' de la segunda série,

> correspondiente al del infinito de la primera, y tirando la OI paralela á la A'B'C' sale el punto I de la primera serie, que corresponde al infinito de la segunda (p. 39).

Indica que no es "nuestro propósito" estudiar las propiedades y aplicaciones de las divisiones homográficas, y que por tanto sólo se centrará en las series de puntos en involución, que comienza definiendo:

> Estas séries son un caso particular en que los dos puntos I, I' correspondientes á los del infinito en ambas series se reunen en uno solo, por lo cual $m = n$ y $xx' - m(x + x') + p = 0$ (p. 39).

Seguidamente estudia los puntos dobles. Traslada el origen O a ese punto I=I', que recibe el nombre de "punto central", y considera los puntos tales que $x = m \pm z$, $x' = m \pm z'$, equidistantes del origen. Sustituyendo en la ecuación anterior resulta $zz' = m^2 - p$, y haciendo $z = z'$ se tendrá $z^2 = m^2 - p$y $z = \pm\sqrt{m^2 - p}$. A continuación estudia los casos posibles:

> Aquí podrán ocurrir tres casos, á saber:
>
> $$m^2 - p > 0 \ldots = 0 \ldots < 0$$
>
> En el primer caso tiene la z dos valores reales iguales y de signos contrarios, quiere decir, que á derecha é izquierda del punto central hay unos puntos notables llamados puntos dobles, porque si en cualquiera de ellos es $z = z'$ tomando uno como perteneciente á la 1ª serie, coincide con su conjugado de la 2.ª, y tomándole como de la 2.ª serie, coincide con su correspondiente de la 1.ª
>
> En el 2.° caso es la z = O, y quiere decir que los puntos dobles se han confundido con el punto central.
>
> En el 3er caso la z es imaginaria, y ya no existen puntos dobles (p. 40).

Concluye haciendo notar que para la división armónica de una recta se necesitan cuatro puntos; seis puntos para la involución, y ocho para las series homográficas (p. 40). Y añade:

> Además debemos llamar la atención sobre estas tres verdades:
>
> 1.ª Para determinar una involución se necesitan dos condiciones, que por lo regular son dos pares de puntos conjugados.
>
> 2.ª Que los dos puntos dobles de una involución, son armónicos con los de cualquier pareja.
>
> 3.ª Estando seis puntos en involución, la razón anarmónica de cuatro de ellos tomados arbitrariamente en las tres parejas, es igual á la de sus correspondientes ó conjugados (p. 40).

E indica que aplaza para más adelante su demostración y su representación geométrica, "cuando puedan entenderse con mucha claridad" (p. 40).

Tras esto demuestra tres teoremas con los que introduce nuevos conceptos propios de la Geometría Proyectiva como son polo y recta polar, cuadrilátero completo y eje de homología entre otros.

Teorema.-Dadas dos rectas fijas, si por un punto se tiran parejas de rectas que las corten, y se trazan las diagonales de los cuadriláteros resultantes, el lugar geométrico de los puntos de intersección de esas diagonales será una recta, que concurrirá con las dos fijas.

Al punto elegido se le llamará Polo: al lugar geométrico recta Polar (p. 40).

Teorema.-En un cuadrilátero completo, cada diagonal está dividida armónicamente por las otras dos y los lados del cuadrilátero, y los puntos medios de las tres diagonales están en línea recta (p. 41).

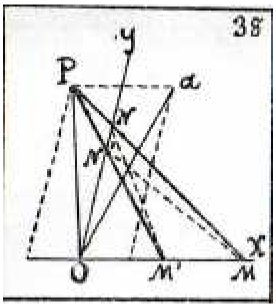
Teorema de Desargües (sic).-Sien dos triángulos se verifica que las intersecciones de los lados que se corresponden en un cierto orden, se hallan en línea recta, también se verificará que las rectas que unan los vértices respectivos concurrirán en un punto.

Esos triángulos se llaman homólogos; la recta indicada, eje de homología; y el punto, centro de homología (p. 43).

Incluimos solamente la demostración del primero y el tercero en los que define los conceptos de polo y recta polar; y triángulos homólogos, eje y centro de homología, respectivamente.

Teorema.-Dadas dos rectas fijas, si por un punto se tiran parejas de rectas que las corten, y se trazan las diagonales de los cuadriláteros resultantes, el lugar geométrico de los puntos de intersección de esas diagonales será una recta, que concurrirá con las dos fijas.

Al punto elegido se le llamará Polo: al lugar geométrico recta Polar (p. 40).



Lo demuestra utilizando coordenadas cartesianas. Toma las OX OY como las rectas fijas dadas (fig. 38), que además le sirven como ejes oblicuos. El punto P elegido tiene por coordenadas (-*x´, y´*), y hace OM=*m,* ON=*n,* OM'[62]=*m'* y ON'=*n'*.

Las ecuaciones de las rectas PNM y PN'M' serán, respectivamente:

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,\ \frac{x}{m'}+\frac{y}{n'}=1$ y Sánchez Solís sustituye el punto P, obteniendo las ecuaciones $\frac{-x'}{m}+\frac{y'}{n}=1, \frac{-x'}{m'}+\frac{y'}{n'}=1$.

Análogamente escribe las ecuaciones segmentarias de las diagonales MN', M'N y explica que eliminando las cuatro cantidades *m, n, m', n'*, que son las que fijan la posición de las secantes, quedará la ecuación del lugar buscado. Para hacerlo indica que "restando unas y otras" se obtiene

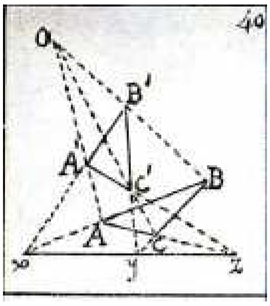
$y'\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)=x'\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}\right)$, $y\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)=x\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m'}\right)$, "dividiendo 2ª por 1ª $\frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}$… $y=\frac{y'}{x'}x$ … ecuación de la recta O*a*"(p. 41).

[62] En el libro hay una errata, pone OM=*m'*

Concluye diciendo que las cuatro rectas OX, Oa, OY y OP forman un haz armónico "porque sus ecuaciones son y=0, $y-\frac{y'}{x'}x=0$, x=0, $y+\frac{y'}{x'}x=0$ " (p. 41).

> *Teorema de Desargües (sic).*-Sien dos triángulos se verifica que las intersecciones de los lados que se corresponden en un cierto orden, se hallan en línea recta, también se verificará que las rectas que unan los vértices respectivos concurrirán en un punto.
>
> Esos triángulos se llaman homólogos; la recta indicada, eje de homología; y el punto, centro de homología (p. 43).

Este teorema lo demuestra en coordenadas trilineares y la demostración es más esquemática que la del problema anterior:



> Fig. 40. Para demostrarlo, sean los triángulos ABC…A'B'C'y los ejes de referencia BC…α=0; AC…β=0; AB…γ=0. Suponiendo que los puntos x, y, z, están en linea recta, se tendrán
>
> la ecuación de xyz……………$l\alpha+m\beta+n\gamma=0$
> la ecuación de B'C'y………….. $l'\alpha+m\beta+n\gamma=0$
> la ecuación de A'C'z………… $l\alpha+m'\beta+n\gamma=0$
> la ecuación de A'B'x………..… $l\alpha+m\beta+n'\gamma=0$
>
> y esto proviene, de que las coordenadas del punto y han de satisfacer á las ecuaciones 1.ª y 2.ª; las del punto z, á 1.ª y 3.ª, y las del punto x, á 1.ª y 4.ª, como en efecto sucede[63].
>
> Ahora restándolas dos á dos, se deduce que
>
> la ecuación de CC' será …………………… $(l-l')\alpha-(m-m')\beta=0$
>
> la ecuación de AA' » …………………….. $(m-m')\beta-(n-n')\gamma=0$
>
> la ecuación de BB' » ……………………… $(n-n')\gamma-(l-l')\alpha=0$ (p. 43)

Esta deducción no es inmediata, por ejemplo, para calcular la ecuación de CC' hay que tener en cuenta que de la resta de las ecuaciones de B'C'y y A'C'z se obtienen las coordenadas del punto C'. Con ellas y las de C, sustituyendo en la fórmula que se obtuvo en el problema 3 del apartado de coordenadas trilineares para la ecuación de una recta que pasa por dos puntos se obtiene la ecuación que se da. Vemos de nuevo el carácter de programa, como se indica en el título de la obra, más que de libro de texto para los alumnos.

Y por último concluye:

> (…) y como la suma de estas tres ecuaciones es cero, las tres rectas concurren en un punto, que es O, centro de homología (p. 43).

[63] Téngase en cuenta que $y\epsilon$BC≡α=0

4.10.3.2. Sistemas de representación

En esta obra solo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural; el lenguaje simbólico y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos.

Utiliza el lenguaje natural en definiciones, resultados y enunciados.

Encontramos muchas definiciones en el texto: define Geometría Analítica (D) y los diferentes sistemas de coordenadas (C). También define divisiones homotéticas y homográficas, haz armónico y anarmónico, polo y recta polar, cuadrilátero completo y eje de homología, etc. (GP).

Los razonamientos de los diferentes resultados, bien sean problemas o teoremas los hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (PR, GP).

Y en lo que se refiere a los enunciados los encontramos en teoremas, en los problemas resueltos y ejercicios propuestos (PR, GP)

Se hace uso del lenguaje simbólico continuamente, al utilizar el álgebra en todo momento.

Como ejemplos podemos citar las diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la fórmula de la distancia entre dos puntos y las ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas, entre otras muchas.

Además es novedosa la expresión de un lugar geométrico, aunque Sánchez Solís no le da ese nombre en ningún momento, por$f(x) = 0$, $f(x, y) = 0$y la de unpunto por (xy).

Destacamos la utilización del cálculo con determinantes, como en la obra de Mundi y por tanto la notación que lleva implícito (LG, ER, PR, C).

En cuanto a los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, se encuentran en láminas al final del texto.

Como en otros autores los hay de dos tipos: el primero de ellos consiste en dibujos que ilustran los problemas resueltos. En ellos se representan las figuras geométricas implicadas en el problema, así como las construcciones geométricas necesarias para su resolución (PR). En el caso de esta obra son solamente las ocho primeras figuras.

El segundo tipo consiste en sistemas de coordenadas, en los que inscribe los elementos con los que está trabajando, puntos, rectas, etc.; y que le sirven de apoyo, como en el primer caso en sus razonamientos (E, C, ER).

Haremos notar que se su aspecto es el de dibujos hechos a mano, no de imprenta, lo que le da un carácter más de unos apuntes del profesor que de un libro de texto.

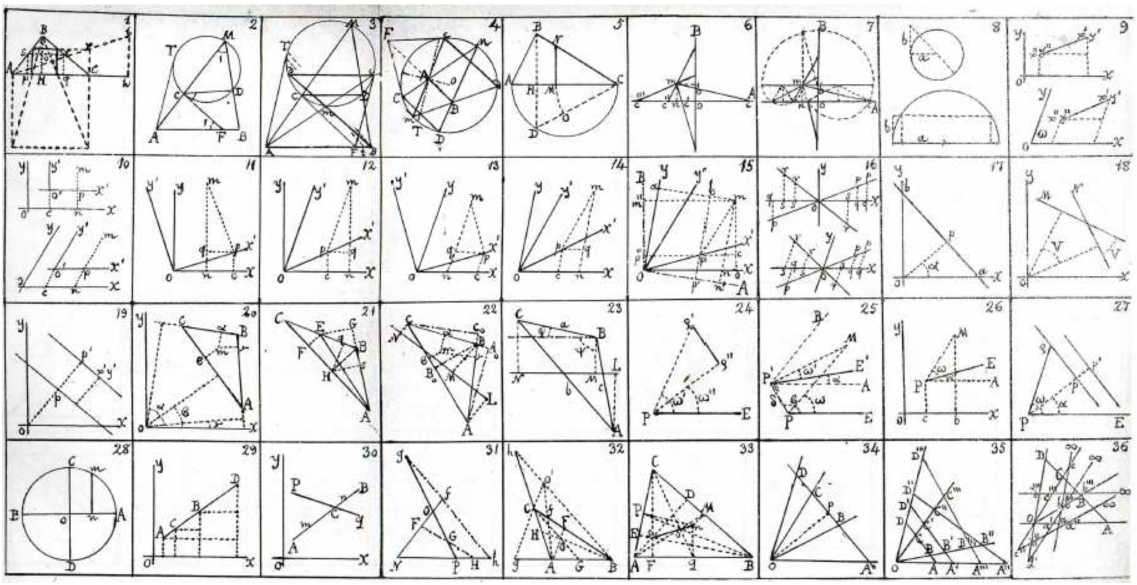


Figura 67: Lámina I. Geometría Analítica. I. Sánchez Solís

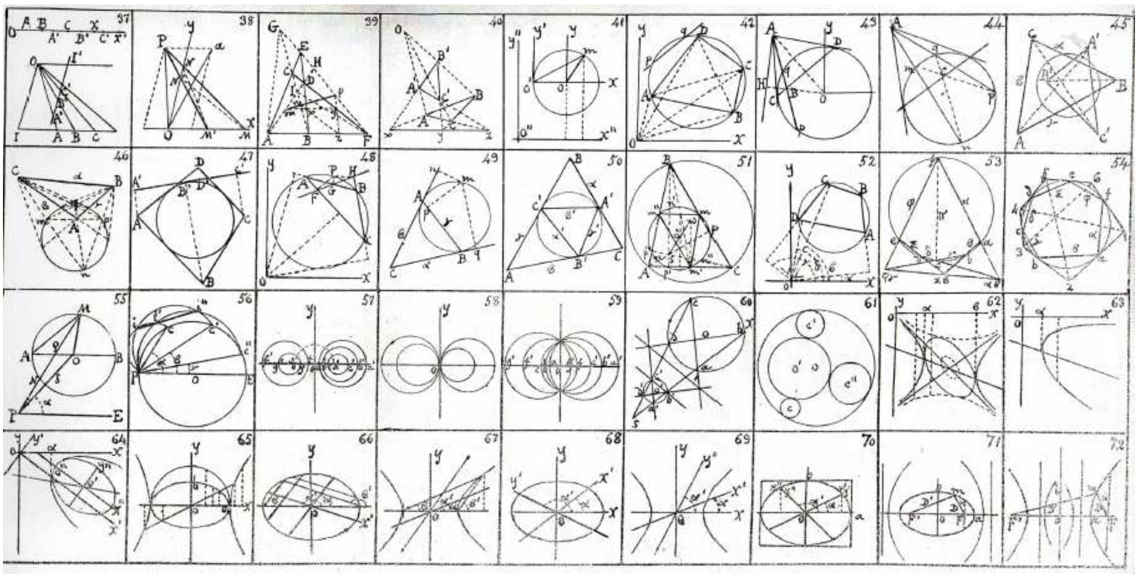


Figura 68: Lámina II. Geometría Analítica. I. Sánchez Solís

4.10.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, y en particular geométrico (PR).

En esta obra encontramos tres tipos de problemas, diferenciados claramente por el autor: los problemas determinados, los “problemas fundamentales” y las “aplicaciones”. Los primeros los pone como ejemplo de la utilización conjunta de la geometría y el álgebra (PRDT). Los segundos engloban problemas generales relativos a las rectas, tales como calcular su ecuación dados dos puntos, la distancia de un punto a una recta o el ángulo que forman dos de ellas, es decir problemas que sirven para obtener fórmulas generales (PRD, PRI, PRA,PRPP). En esta categoría no hemos incluido el cálculo de la distancia entre dos puntos que el autor inserta en la teoría, y no considera como problema. Por último, tenemos los problemas de aplicación, incluidos por Sánchez Solís en un apartado denominado así, en los que resuelve teoremas clásicos como el de Menelao o de Ceva, o calcula las rectas y puntos notables de un triángulo.

Haremos una clasificación similar a la utilizada en otras obras, pero respetando a la vez la del autor.

Como en otras obras recogemos el enunciado de todos los problemas resueltos por el autor, pero solo insertamos la solución de algunos de ellos a modo de ejemplo.

1. **Para mostrar la resolución de problemas geométricos "con el auxilio del análisis determinado" (PRDT).**

En el apartado de Análisis Determinada resuelve cuatro problemas, de forma esquemática, indicando los pasos a seguir y poco más. Incluimos la resolución del cuarto, que es el más complejo de los cuatro, a modo de ejemplo.

> *Primer problema*.- Inscribir un cuadrado en un triángulo, apoyando dos vértices en su lado mayor, que se toma por base (p. 3).
>
> *Segundo problema*.- Dado un círculo y una recta limitada, buscar un punto en la circunferencia que, unido con los extremos de la recta, determine un arco cuya cuerda sea paralela á la recta dada (p. 4).
>
> *Tercer problema*.-Dividir un triángulo en dos partes que estén en la razón de 5:4 por medio de una perpendicular á su lado mayor (p. 4).
>
> *Cuarto problema*.- Por un punto equidistante de los lados de un ángulo recto, tirar una recta de modo que la porción interceptada por los lados del ángulo, sea de una magnitud conocida (p.5).

PROBLEMAS RESUELTOS

> ***Cuarto problema*.- Por un punto equidistante de los lados, de un ángulo recto, tirar una recta de modo que la porción interceptada por los lados del ángulo, sea de una magnitud conocida (p.5).**

En este caso insertamos la solución íntegramente del libro, para que se observe con claridad la forma tan esquemática con que resuelve este tipo de problemas (pp.5-6):

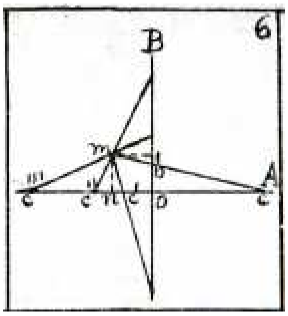


Fig. 6.ª Sean AOB el ángulo recto; m el punto; bc la magnitud dada.

1. Supongamos el problema resuelto.
2. Demos nombres $mn = a$ . . . . $bc = b$ . . . . . $nc = x$.
3. Para plantear el problema tenemos la proporcion

$$nc : oc :: mn : ob, \text{ ó sea } x : x - a :: a : ob,$$

luego $ob = \frac{a(x-a)}{x}$; mas como $ob^2 + oc^2 = bc^2$, resulta que

$$\frac{a^2(x-a)^2}{x^2} + (x-a)^2 = b^2.$$

4. Resolver la ecuacion

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2x^2-2a^3x+a^4}{x^4}+x^2-2ax+a^2=b^2\\[2ex] \dfrac{a^4}{x^2}+2a^2+x^2-2\dfrac{a^3}{x}-2ax=b^2\\[2ex] \left(\dfrac{a^2}{x}+x\right)^2-2a\left(\dfrac{a^2}{x}+x\right)=b^2\ldots\ldots\end{array}\right\}\begin{array}{l}\dfrac{a^2}{x}+x=z\\[2ex] x^2-zx+a^2=0\\[2ex] x=\dfrac{z}{2}\pm\sqrt{\dfrac{z^2}{4}-a^2}\end{array}$$

$$z^2-2az=b^2\ldots\ldots z=a\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}\pm\sqrt{\frac{(a\pm\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}-a^2}$$

contiene cuatro valores.

5. Discutir los valores de la incógnita x.

$$\left.\begin{array}{ll}1.^{\circ} & x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}+\sqrt{\dfrac{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}-a^2}\\[2ex] 2.^{\circ} & x=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}-\sqrt{\dfrac{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}-a^2}\end{array}\right\}\text{reales siempre.}$$

$$\left.\begin{array}{ll}3.^{\circ} & x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}+\sqrt{\dfrac{(a-\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}-a^2}\\[2ex] 4.^{\circ} & x=\dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}-\sqrt{\dfrac{(a-\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}-a^2}\end{array}\right\}\text{varían}$$

haciendo $\dfrac{(a-\sqrt{a^2+b^2})^2}{4}=a^2$,

resulta $a^2+a^2+b^2-2a\sqrt{a^2+b^2}=4a^2\ldots\ldots$

$$b^2-2a^2=2a\sqrt{a^2+b^2}\ \ldots\ldots\ b^4-4a^2b^2+4a^4=4a^4+4a^2b^2$$

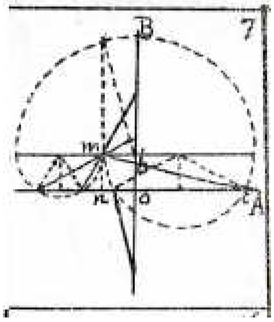
$$b=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}.$$

Si $b>\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}$, los valores de x, 3.° y 4.°, serán reales desiguales.

Si $b=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}$ » » » » » reales iguales.

Si $b<\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}$ » » » » » imaginarios.

En vez de explicar a continuación la construcción geométrica de la solución, como hacían autores anteriores simplemente lo indica:



6. La construcción geométrica de los diversos valores de x está en la fig. 7, y deberá explicarse detenidamente de viva voz (p. 6).

Y añade:

Este problema ofrece mucha enseñanza si se eligen otras incógnitas (p. 6).

Todo ello nos da cuenta, una vez más, del carácter de guía para profesores, más que de libro de texto, que tenía esta obra.

2. **Para calcular fórmulas generales (*Problemas fundamentales)* (ER, PRI, PRPP, PRD, PRA)**

Incluimos a continuación los enunciados de los problemas que resuelve en cada uno de los sistemas de coordenadas. Como se observará son, prácticamente los mismos problemas en todos ellos, o sus correlativos.
Incluiremos, en todos los sistemas de coordenadas, la resolución del problema de hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, como ejemplo de obtención de la ecuación de una recta y el calcular el ángulo que forman dos rectas, puesto que en la teoría hemos incluido ya un ejemplo del cálculo de distancias de ellos deduce otras condiciones, como veremos.

COORDENADAS CARTESIANAS

> 1º. Hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas dadas por sus ecuaciones (p. 12).
>
> *Segundo problema:* Hallar la ecuación de una recta sujeta á pasar por un punto cuyas coordenadas sean (*x’ y’*) (p. 13).
>
> *Tercer problema* - Hallarla ecuación de una recta sujeta á pasar por dos puntos
> *(x’y’)*
> *(x’’ y’’)*
>
> *Cuarto problema*-Hallar el ángulo de dos rectas dadas por sus ecuaciones (p. 14).
>
> *Quinto problema*-Hallar la distancia de un punto á una recta (p. 15).
>
> *Sexto problema*-Hallar la condición para que tres rectas pasen por un mismo punto (p. 16).

PROBLEMAS RESUELTOS

Tercer problema* - Hallarla ecuación de una recta sujeta á pasar por dos puntos *(x’y’) (x’’ y’’)

$$\left.\begin{array}{r} Ecuación general y\ = mx\ + n \\ 1.^{\underline{a}}\quad Condición y' = mx' + n \\ 2.^{\underline{a}}\, Condición y''\ = mx''\ + n \end{array}\right\} \begin{array}{c} y — y' =\ (x — x') \ldots . \\ y' — y" — m\,(x' — x") \\ y — y' = \dfrac{y' - y''}{x' - x''}\,(x — x') \end{array}\Bigg\}$$

$$x(y' - y'') + y(x'' - x') + x'y'' - x''y' = 0$$

Tras hallar esta condición, y dentro del mismo problema da la condición para que tres puntos estén alineados, que deduce de la anterior:

> La condición para que tres puntos estén en línea recta se halla ya escrita en esas ecuaciones, pero se profiere escribirla bajo estas otras formas, á saber:

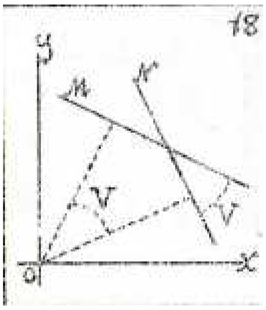
$$\frac{y'-y''}{y'-y'''} = \frac{x'-x''}{x'-x'''}\ \text{ó también}$$

$$x'(y''-y''')+x''(y'''-y')+x'''(y'-y'')=0 \begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ (p. 14)}$$

Por último, dentro de este mismo problema, prueba que si los dos puntos dados son imaginarios, la recta obtenida sería real (p. 14).

***Cuarto problema*-Hallar el ángulo de dos rectas dadas por sus ecuaciones**

Obtiene la fórmula para calcula la tangente del ángulo que forman para las distintas ecuaciones de la recta:



Si las rectas son MN y el ángulo V según sean las ecuaciones darán:

$\left.\begin{matrix} xcos\alpha + ycosa - p = 0 \\ xcos\beta + ycos\beta - p' = 0 \end{matrix}\right\}$ su ángulo V=α-β (p. 14).

Análogamente obtiene las ecuaciones en los casos en que las rectas vienen dadas por *Ax+By+C=0, Ax'+By'+C'=0*, en cuyo caso la fórmula obtenida es $tanV=\frac{A'B-AB'}{AA'+BB'}$. También la deduce para el caso en que la recta viene dada en implícitas, $y=mx+n$, $y=m'x+n'$, siendo la fórmula de la tangente $tanV=\frac{m-m'}{1+mm'}$. Por último la calcula en el caso en que se tenga la ecuación segmentaria, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1$, siendo la fórmula en este caso $tanV=\frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}$, para calcularla utiliza la obtenida para la ecuación general pues escribe $tanV=\frac{\frac{1}{a'}\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\frac{1}{b'}}{\frac{1}{a}\frac{1}{a'}+\frac{1}{b}\frac{1}{b'}}=\frac{ab'-a'b}{aa'+bb'}$ (pp. 14-15).

De aquí obtiene las condiciones de paralelismo y perpendicularidad:

Según estas fórmulas, se tendrán las condiciones siguientes:

para que las rectas sean paralelas

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'} \ldots m=m' \ldots \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

para que sean perpendiculares

AA'+BB' = 0 … mm' = - 1… $aa'+bb'$=0.

De aquí se infiere que teniendo una recta... y = $mx+n$

una paralela suya que pase por (x' y') será... y-y' = m (x-x')

una perpendicular id. id. … $y-y'=-\frac{1}{m}(x-x')$

una inclinada formando con ella el ángulo

V … $y-y'=\frac{m-tanV}{1+mtanV}(x-x')$[64] (p. 15)

[64] En el libro no aparece la raya de fracción.

COORDENADAS TANGENCIALES BINARIAS

1º. Hallar la ecuación del punto en que se cortan dos rectas dadas (u' v') (u'' v'') (p. 17).

2º Hallar las coordenadas de una recta sujeta á pasar por dos puntos $x'u+y'v=1$ … $x''u+y''v=1$ (p. 18).

3º. Hallar la tangente del ángulo formado por dos rectas (u' v') (u'' v'') (p. 18).

4º. Hallar la distancia de una recta (u' v') al punto $x'u+y'v=1$(p. 18).

En este caso incluimos no solo el segundo problema, que es el de hallar la recta que pasa por dos puntos, sino también el primero, pues es el correlativo del tercer problema resuelto en cartesianas:

1º hallar la ecuación de un punto en que se cortan dos rectas (u' v') (u'' v'').

Ecuación general de un punto..............$xu+yv=1$.
Condición de estar en la primera recta. $xu'+yv'=1$.

Condición de estar en la segunda recta. $xu''+yv''= 1$.

Eliminando x, y sale $u(v'-v'')+u'(v''-v)+u''(v-v')=0$
ó también … $u(v'-v)+v(u''-u')+u'v''-u''v'=0$ (p. 17).

Añade que esta es la condición para que tres rectas pasen por el mismo punto (p. 18).

2º. Hallar las coordenadas de una recta sujeta á pasar por los dos puntos $x'u+y'v=1$ … $x''u+y''v=1$.

Resolviendo las dos ecuaciones, se obtiene $u=\frac{y''-y'}{x'y''-x''y'}$, $v=\frac{x'-x''}{x'y''-x''y'}$ (p. 18).

Obsérvese que este problema es el correlativo del primer problema resuelto en coordenadas cartesianas.ç

3º. Hallar la tangente del ángulo formado por dos rectas (u' v') (u'' v'')

Para calcular dicha tangente utiliza las fórmulas obtenidas en la parte de coordenadas cartesianas:

Recordando que $tanV=\frac{\frac{1}{a'}\cdot\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b'}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a'}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b'}}$se obtiene $tanV=\frac{u''v'-u'v''}{u'u''+v'v''}$, y de ahí la condición para que dos rectas sean paralelas ……………………… $\frac{u'}{u''}=\frac{v'}{v''}$

condición para que sean perpendiculares ….. $u'u''+v'v''=0$ (p. 18)

COORDENADAS TRILINEALES

1º. Hallar las coordenadas del punto en que se cortan dos rectas (p. 21).

2º. Hallar la ecuación de una recta sujeta á pasar por un punto ($\alpha'\beta'\gamma'$) (p. 21).

3º Ecuación de una reta que pase por dos puntos (p. 21).

4º. Hallar el ángulo que forman dos rectas (p. 22).

5º. Hallar la distancia de un punto $\alpha'\beta'\gamma'$ a una recta (p. 22).

3.º Ecuación de una recta que pase por dos puntos:

$$\left.\begin{array}{r} l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 \\ l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0 \\ l''\alpha + m''\beta + n''\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{eliminando } l,m,n, \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0, \text{ ó bien}$$

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = 0 \text{ (p. 21)}$$

Señala que esta es también la condición para que tres puntos estén alineados, y como consecuencia saca las ecuaciones de las bisectrices, alturas y medianas de un triángulo (pp. 21-22).

4º. Hallar el ángulo que forman dos rectas.

Para calcular este ángulo utiliza los resultados obtenidos en la parte de coordenadas cartesianas, pero en este caso no llega a calcular la fórmula, sino que únicamente indica cómo obtenerla:

$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ … equivalente á esta otra $Ax+By+C=0$

$l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$ … “ “ $A'x+B'y+C'=0$,

recordando los valores de los coeficientes y de tanV, que son:

$$\left.\begin{array}{r} A = lcos\alpha + mcos\beta + ncos\gamma \\ B = l\,sen\alpha + msen\beta + nsen\gamma \\ A' = l'cos\alpha + m'cos\beta + n'cos\gamma \\ B' = l'\,sen\alpha + m'sen\beta + n'sen\gamma \end{array}\right\} tanV = \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'},$$

Resulta tanV= etc.; de esta fórmula salen las condiciones de paralelismo y perpendicularidad (p. 22)

COORDENADAS POLARES

1º. Hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas (p. 26).

2º. Hallar la ecuación de una recta que pase por un punto $\rho'\omega'$ (p. 26).

3º. Hallar la ecuación de la recta que pase por dos puntos $\rho'\omega'$… $\rho''\omega''$ (p. 26).

4º. Hallar el ángulo de las dos rectas $\rho\cos(\omega-\alpha) = p$… $\rho\cos(\omega-\alpha') = p'$ [65] (p. 26).

5º. Hallar la distancia de un punto $\rho'\omega'$ a una recta (p. 27).

[65] En el libro hay una errata, en la segunda ecuación pone $\rho = \cos(\omega-\alpha') = p'$

3º. Hallar la ecuación de la recta que pase por dos puntos $\rho'\omega'$… $\rho''\omega''$

$\rho\cos(\omega-\alpha)=\rho'\cos(\omega'-\alpha)\ \ldots\ \rho\cos(\omega-\alpha)=\rho''\cos(\omega''-\alpha)$

$$\left.\begin{array}{r}(\rho\cos\omega-\rho'\cos\omega')\,cos\alpha=(\rho'\operatorname{sen}\omega'-\rho\operatorname{sen}\omega)\,sen\alpha\\(\rho\cos\omega-\rho''\cos\omega'')\,cos\alpha=(\rho''\operatorname{sen}\omega''-\rho\operatorname{sen}\omega)\,sen\alpha\end{array}\right\}$$

Dividiendo estas ecuaciones, quitando denominadores y ordenando, resulta

$\rho\rho'sen(\omega-\omega')+\rho'^{\rho'}{}'sen(\omega'-\omega'')+\rho''\rho sen(\omega''-\omega)=0,$

esta es también la condición para que tres puntos estén en línea recta (p. 26).

4º. Hallar el ángulo de las dos rectas $\boldsymbol{\rho\cos(\omega-\alpha)=p}$… $\boldsymbol{\rho\cos(\omega-\alpha')=p'}$[66]

el ángulo V = α-α', si son paralelas α=α'; si perpendiculares α=90º+α' (p. 27).

3. Para mostrar las aplicaciones de la Geometría Analítica (PRDT)

Tras estudiar los diferentes sistemas de referencia, como hemos visto, y resuelto una serie de problemas elementales en la mayoría de ellos, el autor incluye un apartado titulado Aplicaciones en el que resuelve varios problemas aplicando la Geometría Analítica, problemas que insertamos a continuación. Entre ellos se encuentran varios teoremas, que incluimos aquí y no dentro del análisis de contenido pues el autor los incluye entre los problemas.

> Problema.- Hallar las coordenadas de los puntos que dividen interior y exteriormente á la distancia de otros dos en la razon *m:n* (p. 28).
>
> Problema.- Hallar la relación de los segmentos en que una recta dada PQ ó sea
>
> $Ax+By+C=0$ divide á la distancia entre los puntos (x' y') (x" y") (p. 29).
>
> *Teorema de Menelao.*-Si una recta corta los tres lados de un triángulo, determina en ellos seis segmentos tales, que el producto de tres no consecutivos es igual y del mismo signo que el producto de los otros tres (p. 29).
>
> *Teorema, de Juan de Ceva.*- Si se une un punto O ú O' con los tres vértices de un triángulo, y se prolongan las rectas hasta los lados opuestos, resultan seis segmentos tales, que el producto de tres no consecutivos es igual, pero de signo contrario al producto de los otros tres (p. 30).
>
> *Teorema.*- Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto (p. 31).
>
> *Teorema.*- Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto (p. 31).
>
> *Teorema.*-Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto (p. 31).
>
> *Teorema.*-Las perpendiculares á los lados de un triángulo levantadas en sus puntos medios concurren en un punto (p. 31).

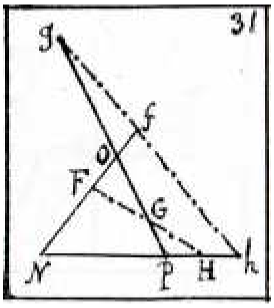
[66] En el libro hay una errata, en la segunda ecuación pone $\rho=\cos(\omega-\alpha')=p'$

> *Teorema.-* Los tres puntos *s, o, n,* de los tres teoremas anteriores, están en línea recta, que se llama recta de Euler; y la distancia *so*, es doble que la *on* (p. 32).
>
> *Problema.-* Hallar el área de un triángulo y después la de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices (p. 33).
>
> *Problema.-*Hallar las coordenadas del centro de las distancias medias de varios puntos en un plano, como son (*x' y'*) (*x'' y''*) (*x''' y'''*)… (p. 33).

PROBLEMAS RESUELTOS

La forma de resolver estos problemas es similar a la utilizada en la actualidad. Lo que caracteriza al autor, como en el resto de la obra, es lo esquemático de la solución, pero no hay diferencias con la forma de trabajar actualmente, Por ello solo incluiremos la demostración del Teorema de Menelao, por ser un teorema clásico; la del teorema de las bisectrices de un triángulo, que resuelve en trilineares y la del teorema de las mediatrices, que resuelve en cartesianas.

> ***Teorema de Menelao.-*Si una recta corta los tres lados de un triángulo, determina en ellos seis segmentos tales, que el producto de tres no consecutivos es igual y del mismo signo que el producto de los otros tres (p. 29).**



Demostración.- Para demostrarlo utiliza el resultado obtenido en el problema anterior. En él halla que la relación de los segmentos en que una recta $Ax + By + C = 0$ divide "a la distancia entre los puntos (x' y') (x'' y'')" viene dada por la expresión $\frac{m}{n} = \frac{Ax'+By'+C}{Ax''+By''+C}$(p.29)

El autor demuestra el teorema conjuntamente para los casos en que los cortes se den en los lados del triángulo o en sus prolongaciones. Utiliza la fórmula que hemos puesto anteriormente, que es válida en ambos casos, ya que la obtiene basándose en el resultado obtenido en el primer problema, que como ahora resuelve conjuntamente para las dos opciones posibles.

Así considera la recta FGH o*fgh* de ecuación $Ax + By + C = 0$y los vértices del triángulo N (x' y'), P (x'' y''), O (x''' y''').

Aplicando la fórmula anterior a los lados y a esa recta obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{NF}{OF} = \frac{Nf}{Of} = \frac{Ax'+By'+C}{Ax'''+By'''+C} \\ \frac{OG}{PG} = \frac{Og}{Pg} = \frac{Ax'''+By'''+C}{Ax''+By''+C} \\ \frac{PH}{NH} = \frac{Ph}{Nh} = \frac{Ax''+By''+C}{Ax'+By'+C} \end{array}\right\} \frac{NF\cdot OG\cdot PH}{OF\cdot PG\cdot NH} = \frac{Nf\cdot Og\cdot Ph}{Of\cdot Pg\cdot Nh} = 1 \text{ (p. 30)}$$

Concluye afirmando que el teorema recíproco también se cumple, pero no lo demuestra:

> (…) el teorema reciproco es verdadero, y dice: Si en los lados de untriángulo se señalan tres puntos, y el producto de tres segmentosno consecutivos es igual y del mismo signo que el producto de losotros tres, dichos puntos estarán en línea recta (p. 30).

***Teorema.*- Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto.**

Demostración.-Las ecuaciones trilineares de las bisectrices son *α-β=0…β-γ=0…γ-α=0*, cuya suma es igual á cero (p. 31).

***Teorema.*-Las perpendiculares á los lados de un triángulo levantadas en sus puntos medios concurren en un punto.**

Demostración.- Comienza la demostración escribiendo las coordenadas de los vértices y puntos medios del triángulo y las ecuaciones de sus lados:

Usando coordenadas rectangulares, siendo A el origen y AB el eje de las X, serán coordenadas de los tres vértices del A(0…0)…del B(x´’…o)…del C(x’’ y’’),

la ecuacion de AB …$y = 0$

la “ de AC … $y = \frac{y''}{x''}x$

la “ de BC … $y = \frac{-y''}{x'-x''}(x - x')$

coordenadas de Q … $\left(\frac{x'}{2} \ldots 0\right)$

idem de P … $\left(\frac{x''}{2} \ldots \frac{y''}{2}\right)$

idem de M … $\left(\frac{x'+x''}{2} \ldots \frac{y''}{2}\right)$(p. 31)

Tras esto, y de forma análoga, escribe las ecuaciones de las perpendiculares a los lados por Q, P y M (en ese orden), y concluye:

Si se preparan estas ecuaciones multiplicando la 1.ª por x', la 2ªpor - y'' y la 3.ª por + y'', sumadas se destruirán, pues,

$$\left(x - \frac{x'}{2}\right)x' - \left(y - \frac{y''}{2} + \frac{x''}{y''}\left(x - \frac{x''}{2}\right)\right)y'' + \left(y - \frac{y''}{2} - \frac{x' - x''}{y''}\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right)\right)y'' = 0$$

lo que demuestra que las tres perpendiculares concurren en un punto, que es el centro del círculo circunscrito al triángulo (p 32).

4.10.4. Conclusiones

Como hemos señalado en varias ocasiones a lo largo del análisis lo que caracteriza a la obra de Sánchez Solís es la parquedad, que hace bueno el subtítulo de “resumen” que reza en la portada.

Lo interesante de esta obra es, por una parte su utilización en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, que en aquella época era la facultad de referencia para las del resto de España, siendo la única en la que se realizaban los estudios de Ciencias al completo, hasta el grado de doctor.

Por otra parte, y desde el punto de vista conceptual, vemos que esta obra representa un puente entre la Geometría Analítica que se venía haciendo desde principios de siglo,

-conservando aún un pequeño residuo de Análisis Determinada- y una Geometría Analítica más moderna que introduce elementos de la Geometría Proyectiva.

En palabras de Escribano (2000):

> La obra de Sánchez Solís, supone el ocaso de un modelo de textos de Geometría Analítica anclados en los métodos exclusivamente geométricos, que habían alcanzado su cénit con la obra de Zorraquín (p. 229).

4.11. Tratado de Geometría Analítica de Miguel Vegas (1906)

4.11.1. Autor

Miguel Vegas Puebla-Collado nació en Madrid el 5 de julio de 1856 (CA1). Estudió la carrera de Ciencias en la Universidad Central, donde obtuvo el título de doctor (CA2). Su Tesis doctoral versó sobre las curvas alabeadas de tercer orden, tema enmarcado dentro de la Geometría de la Posición. Esta rama de la Geometría comenzaba ser introducida por aquellos años por Eduardo Torroja y Caballé, profesor, mentor y, posteriormente, amigo de Vegas, quien colaboró activamente con su maestro, en un plano científico e institucional, en la difusión en España de la Geometría Sintética (CA4). Tras defender su Tesis, ganó con 22 años las oposiciones a la Cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza; y en 1891, tras la muerte del profesor Ignacio Sánchez Solís, las oposiciones a la Cátedra de Geometría Analítica de la Universidad Central, ocupada por Solís hasta entonces. En este puesto permanecería durante 44 años, hasta su jubilación, y en él desarrollaría una importante labor investigadora y docente (CA3). Entre sus publicaciones (CA5) destaca su *Tratado de Geometría Analítica*, publicado por primera vez en 1894 y editado en cuatro ocasiones. Esta obra fue texto de referencia para los estudiantes de Ciencias y los Ingenieros durante varias generaciones (Vegas, n.d.).

Cabe destacar su participación, junto con Torroja, en la elaboración del Plan de Estudios de García Alix para la sección de Ciencias Exactas, siendo Vegas consejero de Instrucción Pública (Escribano, 2000) (CA3).

En 1905 fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la que fue elegido, en 1934, Vicepresidente y Presidente de la Sección de Exactas. Y en 1912 fue incluido entre los cinco becados oficiales españoles para asistir al Congreso Mundial de Matemáticos de Cambridge, junto con Luis Octavio de Toledo, José Ruiz-Castizo, Cecilio Jiménez Rueda y Esteban Terradas (Vegas, n.d). También mencionaremos que formó parte del reducido grupo de científicos que acompañó a Albert Einstein en su visita a España en 1923. Todo ello nos da cuenta del estatus que tenía Vegas dentro del mundo científico de nuestro país.

A lo largo de los años, y hasta su jubilación en 1935, siguió combinando docencia e investigación, colaborando frecuentemente en la Revista de la Sociedad Matemática Española, en los Congresos de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias y en diversas revistas. También realizando publicaciones directamente relacionadas con la docencia, como las diversas ediciones de su *Tratado* o unos *Problemas de Geometría Analítica* (Vegas, n.d.). Murió en Madrid en 1943.

4.11.2. Caracterización de la obra

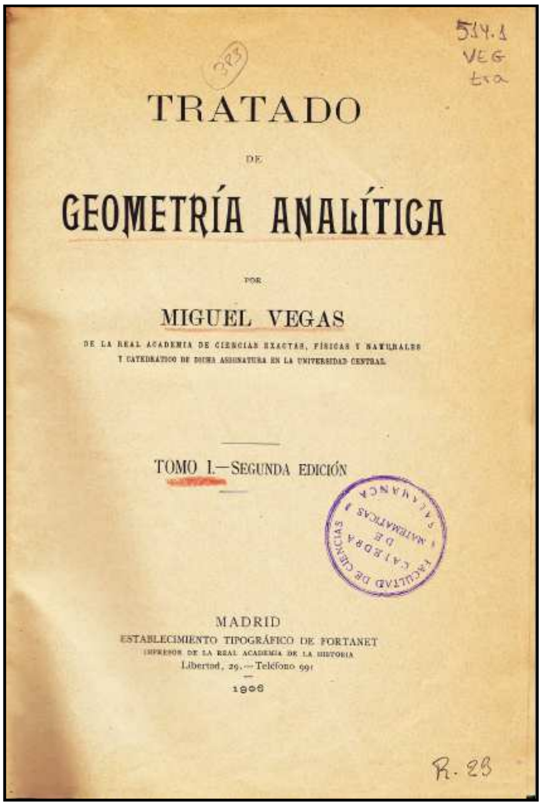


Figura 69: Carátula del libro. Geometría Analítica. M. Vegas

El libro analizado corresponde a la segunda edición del *Tratado de Geometría Analítica* de Miguel Vegas, impresa en 1906 en Madrid, en el Establecimiento tipográfico de Fortanet. La primera edición de esta obra se imprimió en Madrid en 1884. El ejemplar analizado se puede localizar en la Biblioteca Abraham Zacut, Universidad de Salamanca, con referencia AZ/ 514.1 VEG tra.

El tratado consta de dos tomos, pero solo analizaremos una parte del primero.El libro comienza con una hoja de erratas y un prólogo numerados aparte y consta de 688 páginas, de las cuales dedica 677 a contenidos y el resto están ocupadas por el índice que se encuentra al final del mismo (CEO1).

Como decimos el índice (CEO2) es muy extenso, ocupa 10 páginas (pp.679-688), pues es muy detallado. Por ello solo incluimos los títulos de aquellos capítulos que vamos a analizar, y de las secciones del resto del libro.

ÍNDICE

PRÓLOGO

PRELIMINARES

Clasificación de las figuras geométricas. Objeto y división de la Geometría Analítica. Nociones acerca de las proyecciones sobre recta ó sobre plano.

SECCIÓN PRIMERA

Figuras de primera categoría

CAPÍTULO PRIMERO.-*Series rectilíneas*.
CAPÍTULO II.-*Haces*
CAPÍTULO III.- *Figuras proyectivas de primera categoría.*
CAPÍTULO VI: *Figuras de primera categoría en involución.*

SECCIÓN SEGUNDA

Figuras de segunda categoría

LIBRO PRIMERO

FIGURAS DE PRIMER ORDEN.

CAPÍTULO PRIMERO.-*Coordenadas binarias de un punto en una figura plana.*
CAPÍTULO II.- *Coordenadas tangenciales binarias en una figura plana.*
CAPÍTULO III.-*Coordenadas binarias de una recta en una figura radiada.*
CAPÍTULO IV.- *Coordenadas tangenciales binarias en una radiación.*
CAPÍTULO V.-*Ley de la correlación y problemas sobre figuras de segunda categoría, sujetos á esta ley.*
CAPÍTULO VI.- *Ángulos y distancias en las figuras planas y en las radiadas*.
CAPÍTULO VII.- *Coordenadas ternarias en las figuras planas y en radiadas*.
CAPÍTULO VIII.- *Problemas sobre figuras de segunda categoría en coordenadas ternarias*.
CAPÍTULO IX.- *Sistemas de coordenadas no rectilíneas en las figuras planas y sus correspondientes en las radiadas*.

LIBRO SEGUNDO

CURVAS Y CONOS DE SEGUNDO ORDEN

LIBRO TERCERO

CURVAS PLANAS Y SUPERFICIES CÓNICAS EN GENERAL

LIBRO CUARTO

TRANSFORMACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS EN LAS FIGURAS DE SEGUNDA CATEGORÍA

Esta obra fue texto de referencia para los estudiantes de Ciencias e Ingeniería desde la publicación de su primera edición en 1894, especialmente esta segunda en la que añade nuevos contenidos, y fue difundida por varias naciones de Europa y América (Escribano, 2000). La importancia de la obra estriba en dos hechos, por un lado Miguel Vegas fue catedrático de Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, Madrid, desde 1891 hasta 1935, facultad que junto con la de Barcelona fueron centros de referencia para las pocas facultades de Ciencias existentes en el resto del país a finales de siglo (Millán, 1991); por otro Vegas fue consejero de Instrucción Pública y participó junto con su maestro Eduardo Torroja en la elaboración del Plan de Estudios de García Alix para la sección de ciencias exactas, como hemos indicado en su biografía. Entre ambas ediciones Miguel Vegas colabora con la redacción de los aspectos métricos de la Geometría de la Posición de Torroja, estas y otras investigaciones dieron lugar a algunas publicaciones que luego aparecieron como capítulos de la segunda edición del *Tratado* (Vegas, n.d). En esta edición se anteponen las cuestiones de carácter proyectivo presentando las métricas como casos particulares de estas, lo que complica la exposición. Según afirma Escribano, (2000, p. 323):

> La primera es una obra clásica de geometría analítica que incorpora conceptos y procedimientos de la geometría proyectiva; por el contrario, los dos volúmenes de la segunda edición conforman un extenso tratado de geometría proyectiva elemental, ajustado a los cánones de la escuela de Torroja y desarrollado con métodos analíticos.

Los objetivos generales de la obra (CEO3) quedan patentes en el prólogo, en el que comienza diciendo:

> Al publicar la primera edición de la Geometría Analítica, me propuse hacer un libro en el que se harmonizasen los modernos procedimientos de esta rama de la Matemática con las necesidades de la enseñanza (p. V).

Continúa explicando que por este motivo organizó tal como están los contenidos, en particular lo que se refiere a figuras radiadas:

> (…) Las figuras radiadas aparecen al mismo tiempo que las planas y deben estudiarse á la vez; pero al tratar de obtener la ecuación de un plano de la radiación tropecé con grandes dificultades para resolver el problema con la sencillez que demanda una obra de esta índole, (…)

Problema que ha resuelto en la presente edición:

> (…) Vencidas hoy aquellas dificultades, en la presente edición he procurado estudiar á la vez todas aquellas figuras cuyos elementos constitutivos se representan del mismo modo en el terreno algébrico, estableciendo desde luego la ley de correlación en toda su extensión (p. V).

En cuanto a los autores en los que Vegas se basa al realizar este texto (CEO4) tenemos que cita a Plücker y a su obra *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betractung der geraden Linie ad Raumelemente* en el prólogo (p.VI), y cuando define las coordenadas que llevan su nombre (p. 108) (C).
Cita a Möbius cuando define la *abscisa baricéntrica* de un punto (C) (p. 31); y de nuevo en el punto 105 en el que señala que este autor "extendió el concepto de involución" (p. 80). Por último cita a D'Ocagne cuando define las *coordenadas axiales* y las *coordenadas paralelas* (p. 114) (C).

4.11.3. Caracterización del tratamiento realizado sobre la Geometría Analítica

4.11.3.1. Análisis de la estructura conceptual

Esta obra es conceptualmente bastante compleja, pues aunque es un libro sobre Geometría Analítica esta se estudia desde el punto de vista de la Geometría Proyectiva, por lo que se introducen y se utilizan continuamente los conceptos propios de esta última para definir los de la primera. Así, por ejemplo, no solo se utiliza la ley de correlación para relacionar las coordenadas cartesianas con las tangenciales y resolver problemas, como en las obras de Mundi o Sánchez Solís, sino que estos se estudian como casos particulares de otros sistemas de referencia más generales, definidos todos ellos utilizando los conceptos de haces de planos y punto y recta del infinito.

Como el objeto de nuestro trabajo es el estudio de la Geometría Analítica nos centraremos en el análisis de los aspectos propios de esta, que en esta obra se ciñen al uso de sistemas de coordenadas, el estudio de la ecuación de la recta o el punto (en coordenadas tangenciales) y la resolución de problemas de incidencia, distancias y ángulos y de algunos problemas geométricos, aunque estos son los menos.

Como se puede observar en el índice (CEO2) el libro se divide en tres grandes secciones, una primera titulada *Preliminares*, en la que da la clasificación de las curvas, la definición de Geometría Analítica (D) y las nociones básicas de la Geometría Proyectiva (GP) que son la base conceptual de esta obra; una segunda titulada *Sección Primera* dedicada a las figuras de primera categoría; y una tercera llamada *Sección Segunda*, dedicada a las figuras de segunda categoría y que a su vez está divida en cuatro libros, de los cuales nosotros analizaremos solo parte del primero en el que se estudian el punto y la recta.

Como decimos en la *Sección Primera* estudia las figuras de primera categoría. En ella introduce los conceptos de *serie rectilínea* y *haz de rectas* y define diferentes sistemas de coordenadas sobre la recta tanto para el punto como para los haces. En ambos casos da las ecuaciones de cambio de unos sistemas a otros y estudia las ecuaciones de la recta. Esta estructura se conserva en los capítulos de la sección siguiente.

Define en esta sección diversos sistemas de coordenadas (C).

En el capítulo I estudia las coordenadas binarias de un punto, definiendo un sistema general de coordenadas y después varios casos particulares, entre los que se encuentran las coordenadas cartesianas. Estudia las ecuaciones de la recta en estos sistemas y da las ecuaciones de cambio entre varios de ellos.

En el siguiente capítulo estudia las coordenadas binarias de una recta (coordenadas tangenciales), definiendo como en casos anteriores un sistema general, del que obtiene otros particulares, en este caso las coordenadas plückerianas; estudiando las ecuaciones del punto y dando las ecuaciones de cambio entre diferentes sistemas.

Tras estudiar estos tipos de coordenadas en las figuras radiadas, estudia la ley de correlación y algunos problemas relativos a ella (PR) en el capítulo V, y dedica el siguiente a resolver diversos problemas de distancias y ángulos tanto en coordenadas de puntos como en las tangenciales (PRAN, PRD, PRP).

Análogamente tal como ha hecho con las coordenadas binarias, estudia las ternarias, es decir, las define para los puntos y para las rectas -sistemas de coordenadas tangenciales ternarias- (C), obtiene diferentes ecuaciones de la recta o el punto, y resuelve los problemas básicos de ángulos y distancias (PRAN, PRD, PRP).

Por último, dedica el capítulo IX a los sistemas de coordenadas no rectilíneas, dentro de los cuales se incluyen, como casos particulares, las coordenadas polares, las polares tangenciales y las tripolares (C). Como en los casos anteriores define las ecuaciones de la recta o el punto, da las ecuaciones de cambio entre diferentes sistemas y resuelve problemas relativos a ángulos y distancias (PRAN, PRD, PRP).

En el análisis que presentamos a continuación no respetamos esa estructura, sino que aunque Vegas estudia la ecuación de la recta en cada uno de los sistemas de coordenadas, nosotros analizaremos juntos los sistemas de referencia, y posteriormente las ecuaciones de la recta/punto, también todas juntas.

1. Definiciones

Comienza el capítulo denominado *Preliminares* definiendo las figuras geométricas:

> 1. En la constitución de las figuras geométricas se consideran como elementos el punto, la recta, y el plano, ya sean propiamente tales, ya sean impropios ó del infinito.
>
> Se llama *serie rectilínea* el conjunto de todos los puntos de una recta que recibe el nombre de *base* de la serie, recta que puede ser propiamente tal ó del infinito.
>
> *Haz de rectas* es el conjunto de todas las rectas (*rayos*) situadas en un plano que pasan por un punto llamado *vértice*, el cual junto con aquel plano constituye la *base* del haz. Los haces de rectas pueden ser propiamente tales, ó tener sus rayos paralelos, ó estar en el plano del infinito, según que el vértice sea un punto propiamente tal, ó sea este punto impropio o del infinito y su plano propiamente tal, ó sea este plano el del infinito (p. 1).

Seguidamente define *haz de planos*, de forma análoga al haz de rectas y señala que las series rectilíneas, los haces de rectas y los de planos reciben el nombre de figuras *fundamentales* o *de primera categoría* por contener elementos de *una sola naturaleza.* Después define *figura plana* -conjunto de todos los puntos y todas las rectas contenidas en un plano que constituye su *base*-, *figura radiada o radiación* –conjunto de todas las rectas y de todos los planos que pasan por un punto, ya sea propio ó del infinito, el cual se llama *vértice* ó *base* de la radiación-, que constituyen las *figuras de segunda categoría* y por último las *figuras de tercera categoría* ó *figuras en el espacio* (pp. 1-2).
Tras haber definido las figuras geométricas y haberlas clasificado pasa a definir la Geometría Analítica:

> 4. El estudio de las propiedades de las figuras geométricas constituye el objeto de la Geometría, y cuando este estudio se verifica, utilizando como medio el Análisis matemático, recibe el nombre de Analítica. La Geometría analítica se propone, pues, estudiar las figuras geométricas utilizando los recursos del Álgebra, ó sea, dándolas representación algébrica, con lo cual se consigue dar á las cuestiones geométricas la generalidad del Análisis; pero a su vez, permite pasar del Álgebra á la Geometría, dando á las cuestiones analíticas el sabor geométrico que tanto contribuye a la claridad (p. 2).

Más adelante concreta esto más:

> 108. Toda cuestión geométrica referente á líneas de un plano tiene, pues, como correspondiente en el Algebra, una cuestión sobre ecuaciones con dos variables, y recíprocamente (p. 84).

Y pone como ejemplo de ello el problema de cortar dos curvas (PRI) (p. 84). Tras definir las coordenadas tangenciales, vuelve a repetir esto mismo y pone como ejemplo el problema geométrico que consiste en encontrar los rayos comunes á dos haces de rectas situados en un plano (PRI) (p. 103).
Vemos que a lo largo del texto el autor deja patente la relación entre la Geometría y el Álgebra y cómo utilizar esta para la resolución de problemas geométricos. Como hemos dicho, Vegas desarrolla esta relación entre ambas ramas de las Matemáticas mediante el uso de sistemas de coordenadas, definiendo gran número de ellos.

2. Sistemas de coordenadas

2.1. Determinación de un punto sobre una recta

Veremos a continuación todos los sistemas que utiliza, empezando por los *sistemas de abscisas* para determinar un punto sobre una recta. Incluimos estos sistemas de coordenadas pues en ellos basa los definidos en un plano. Dentro de estos últimos haremos mayor hincapié en las coordenadas cartesianas, plückerianas, tangenciales, trilineales y polares, que son las utilizadas por el autor para resolver los problemas, viendo el resto de forma más superficial:

> 21. Para determinar un punto *M* sobre una recta basta conocer su distancia á un punto fijo *O* de ésta llamado *origen* y el sentido en que aquella distancia debe tomarse. El punto *M* queda, pues, representado algébricamente por el número que mide la distancia *OM* afectado de un signo que represente aquel sentido; y, puesto que en una recta sólo hay dos sentidos opuestos entre sí, representaremos uno de ellos por el signo + y el otro por el signo -, con lo cual un punto de la serie rectilínea se representa analíticamente por un *número positivo ó negativo* que se denomina *abscisa* de dicho punto (p. 15).

Seguidamente explica que el punto *O* tiene abscisa nula y pone ejemplos de puntos con abscisas de diferentes signos. Tras esto explica cuál es la abscisa del punto del infinito.

A continuación trata los puntos imaginarios y después da la ecuación de cambio de abscisa de un punto, cuando cambia el origen (p. 17). Por último habla de *coordenadas de un punto*, para poder trabajar con ecuaciones homogéneas:

> 28. Como las ecuaciones homogéneas son muy cómodas para el cálculo, con objeto de operar con ecuaciones de esta clase, se suele representar la abscisa de un punto de una serie rectilínea por la razón $\frac{x}{y}$, en cuyo caso los valores de x y de y se llaman *coordenadas* de dicho punto. Es claro que entonces un mismo punto tendrá infinitos pares de coordenadas; pero la razón de las que componen cada par es constante é igual á la abscisa de dicho punto (p. 20).

Más adelante define otros dos *sistemas de abscisas* (p. 30). En el primero de ellos la abscisa de un punto cualquiera es la inversa de la abscisa del mismo punto definida en el primer sistema, es decir de su distancia al origen; en el segundo, un punto queda determinado en relación a otros dos, es el sistema de *abscisas baricéntricas*:

> 42. Cuando los puntos de una serie rectilínea se refieren á otros dos O_1 y O_2 de la misma, un punto cualquiera *A* de esta serie queda determinado por la razón $\frac{AO_1}{AO_2}$ de las distancias del mismo del mismo punto á los dos de referencia, razón que será negativa ó positiva según que dicho punto pertenezca al segmento limitado por los O_1 y O_2ó sea exterior á este segmento; dicha razón se denomina *abscisa baricéntrica* del punto A, abscisas que fueron empleadas por primera vez por Möbius y que sirven de base al Cálculo baricéntrico establecido por este ilustre geómetra (p. 31).

Seguidamente da la ecuación de cambio entre este sistema y el definido en primer lugar (p. 31) y finalmente define otro sistema en que los puntos están referidos a otros tres:

> 45. Finalmente, los puntos de una serie rectilínea se pueden referir á otros tres O_1, O_2, O_3 de la misma, y entonces la *abscisa* de un punto cualquiera *A* de la serie es la

razón doble (O_1 O_2 O_3 A), puesto que esta razón determina la posición de este punto. En el sistema de abscisas que consideramos las abscisas de los puntos O_1, O_2, O_3 de referencia son respectivamente (O_1 O_2 O_3O_1) = ∞, (O_1O_2 O_3O_2) = 0, ($O_1O_2O_3O_3$) = 1, y reciben respectivamente los nombres de *punto límite, origen* y *punto unidad* (p. 33).

En el punto siguiente da las ecuaciones de cambio de este sistema al baricéntrico:

46. Conviene, en ocasiones, pasar de este sistema de abscisas al anterior, para lo cual si tomamos como puntos de referencia los dos primeros O_1 y O_2, y designamos por a y z las abscisas baricéntricas de los puntos O_3 y A y por t la razón doble (O_1, O_2, O_3, A), entre estas cantidades se verifica la relación

$$t = \frac{O_1O_3}{O_1A} : \frac{O_2O_3}{O_2A} = \frac{O_1O_3}{O_2O_3} : \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{a}{z}$$

relación que permite pasar de uno de los dos últimos sistemas considerados al otro (p. 33).

A continuación demuestra que los tres sistemas de abscisas definidos anteriormente son casos particulares de este último (p. 34) y señala que con tres puntos de referencia se pueden obtener seis sistemas de abscisas, “según cual sea el punto que se tome como origen, el punto unidad y el punto límite” (p. 35).

2.2. Determinación de un haz sobre una recta

El capítulo II lo dedica a los haces y los trata de forma análoga como lo ha hecho con los puntos. Comienza explicando cómo determinar un haz de rayos paralelos y definiendo *abscisa* de un rayo:

50. Para determinar un rayo a de un haz de rayos paralelos, ya sea de rectas ó de planos, basta conocer la distancia x de este rayo á otro o del haz llamado *origen* y el sentido en que esta distancia debe tomarse, sentido que se representará por el signo + ó por el signo -; y el valor de aquella distancia, afectado del signo que le corresponde, es la *abscisa* de dicho rayo a. La distancia entre el rayo a y el de origen o se toma en una dirección cualquiera que no sea común á los dos.

De esta definición se deduce que si cortamos un haz de rayos paralelos por una recta que contiene la dirección de las distancias entre sus rayos, se obtiene una serie rectilínea cuyos puntos referidos al situado en el rayo de origen del haz, tienen como abscisas las de los rayos correspondientes de este haz; con lo cual el estudio de los haces de rayos paralelos se deduce al de una de sus secciones rectilíneas (p. 37).

Tras definir razón doble de un haz de cuatro rayos paralelos señala que un rayo de un haz de rayos paralelos puede quedar determinado por la inversa de la distancia del mismo al origen, ó por la razón de las distancias de dicho rayo a otros dos del haz, o por la razón doble de la figura simple (o_1 o_2 o_3 a) que dicho rayo forma con otros tres de referencia, de forma análoga a cómo se hizo con los puntos de una serie rectilínea, “pudiendo repetirse aquí todo lo dicho en el capítulo anterior” (p. 38).
Seguidamente da la determinación de un rayo de un haz cualquiera, no de rayos paralelos:

> 53. Para determinar un rayo a de un haz propiamente tal, basta conocer el ángulo que forma con otro rayo o del mismo llamado *origen* y el sentido en que debe tomarse este ángulo, sentido que se indica por el signo que afecta al ángulo. Y como un ángulo queda determinado en valor y signo por su tangente, de aquí que determinaremos un rayo cualquiera a de un haz propiamente tal por la tangente del ángulo que forma con el rayo origen, tangente que se denomina *abscisa* de dicho rayo a (p. 38).

Señala que la abscisa del rayo origen es nula y la del perpendicular al origen es infinita y añade que todo lo dicho anteriormente para coordenadas homogéneas se aplica también a los haces (p. 38).

Al igual que hizo en otros casos, define más adelante dos nuevas determinaciones de un haz de rayos no paralelos. En la primera de ellas un rayo de un haz queda determinado cuando se conoce la razón de los senos de los ángulos que forma con otros dos rayos fijos o_1 y o_2 de dicho haz (p. 40). En la segunda cada rayo a del haz queda determinado en relación a otros tres o_1, o_2, y o_3 mediante la razón doble $(o_1o_2o_3\, a)$, que se denomina también *abscisa* de dicho rayo a (p. 45). Da las ecuaciones de cambio entre los tres sistemas y también en esta ocasión concluye señalando que los dos primeros sistemas son casos particulares de este último (p. 46). Con esto concluye el estudio de los sistemas de referencia sobre una recta. Veremos a continuación los definidos sobre un plano.

2.3. Determinación de un punto sobre una figura plana

Como hemos señalado en la introducción de este análisis, en el primer capítulo de la Sección Segunda, dedicada a las figuras de segunda categoría, define las coordenadas binarias de un punto en una figura plana. Comienza definiendo un sistema general de coordenadas, del que deduce otros sistemas particulares, entre ellos las coordenadas cartesianas.

> Artículo I.- Sistema general de coordenadas de un punto.
>
> 106. Siendo el punto y la recta los elementos constitutivos de una figura plana, puede ésta considerarse como conjunto de puntos ó como conjunto de rectas.
>
> Considerada una figura plana como conjunto de puntos, queda determinada por dos haces de rectas, cuyos vértices O_1y O_2sondos puntos distintos, de modo que si Aes uno de los puntos de la figura plana viene determinado por la intersección de los dos rayos O_1Ay O_2Aque pasan por él; pero en cada uno de los citados haces un rayo cualquiera se representa analíticamente por su abscisa; luego el conjunto de las dos abscisas de los rayos O_1Ay O_2A, constituye la representación algébrica de dicho punto A, y son las coordenadas de este punto que designaremos respectivamente por las letras xé y (p.83).

Y seguidamente define ejes de coordenadas y origen de coordenadas:

> Los puntos del rayoO_1O_2, común á los dos haces generadores de la figura plana, son los únicos de ésta que no quedan determinados por sus coordenadas; pero determinaremos uno cualquiera de ellos por la intersección de dicha recta O_1O_2con otra cualquiera del plano que lo contenga.

> Los rayos O_1Oy O_2O que tienen nula su abscisa respectiva x é y se llaman *ejes coordenados* designándose respectivamente por Y y X, y el punto O en donde estos ejes concurren, se denomina *origen de coordenadas* (p.83).

Tras esto explica cómo son las coordenadas de los puntos que están en los ejes, y en concreto las del origen de coordenadas.

Seguidamente da la ecuación de una recta en un sistema de coordenadas en que son infinitas las abscisas del rayo O_1O_2 (ER) (p. 86), ecuación que veremos más adelante, y aclara que en lo sucesivo se utilizarán siempre sistemas de este tipo:

> Mientras no se advierta lo contrario, en todo cuanto digamos debe entenderse que en el sistema de coordenadas que se considera, son infinitas las abscisas del rayo común á los dos haces generadores de la figura plana, en cuyo caso dicho rayo se llama *recta límite* de1 sistema (p. 86).

Como caso particular define las coordenadas homogéneas:

> 112.Como las ecuaciones homogéneas son muy cómodas para el cálculo, con objeto de operar con ecuaciones de esta especie se designan 1as coordenadas de un punto por las razones$\frac{x}{z}$ é $\frac{y}{z}$, y las cantidades x, y, z se llaman *coordenadas homogéneas* de dicho punto las cuales son indeterminadas; pero las razones de las dos primeras á la tercera tienen valores determinados que son las coordenadas primitivas del punto considerado que, para distinguirlas de las anteriores, reciben el calificativo de *absolutas* y pueden considerarse como valores de las x é y medidas con la unidad z (p. 88).

Y tras dar la ecuación de una recta en tales coordenadas (ER) da la determinación de un punto:

> En el sistema de coordenadas homogéneas todo punto del plano queda determinado por sus tres coordenadas, pertenece á uno de los lados del triángulo de referencia cuando una de ellas es nula, y se confunde con uno de los vértices cuando son nulas dos de dichas coordenadas (p. 88).

Tras esto estudia el problema de transformar unas coordenadas en otras:

> 113. Tratemos ahora de encontrar las relaciones que enlazan las coordenadas x é y de un punto M referido á un triángulo OO_1O_2 con las x' é y' del mismo punto referido á otro triángulo $OO'_1{}^{o}{}'_2$ situado en el mismo plano que aquel, es decir, vamos á resolver el problema de la *transformación de coordenadas* (p. 88).

Comienza estableciendo que las fórmulas de cambio deben ser de la forma $x = \frac{f(x',y')}{\psi(x',y')}$, $y = \frac{\varphi(x',y')}{\psi(x',y')}$, donde $f(x',y')$, $\psi(x',y')$, $\varphi(x',y')$, son funciones de x', y' (p. 88). Deduce a continuación que dichas funciones deben ser lineales, por lo que las relaciones buscadas son de la forma: $x = \frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{a_3x'+b_3y'+c_3}$, $y = \frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{a_3x'+b_3y'+c_3}$ (1) (p. 89) y en coordenadas homogéneas $\frac{x}{a_1x'+b_1y'+c_1z'} = \frac{y}{a_2x'+b_2y'+c_2z'} = \frac{z}{a_3x'+b_3y'+c_3z'}$(2) (p.89). Seguidamente estudia diferentes casos particulares:

> Si el rayo límite O_1O_2 en el primer sistema es también rayo límite en el segundo, (…) las relaciones anteriores se reducen á las

$$x = \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{c_3}, \ y = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{c_3}$$

ó sea $x = p_1x' + q_1y' + a, y = p_2x' + q_2y' + b$ (4)

> En este caso observemos que para x'=0 é y'=0 se tiene x=a, y=b, lo que prueba que los coeficientes a y b son las coordenadas del origen *O'* en el primer sistema; (…) (p. 89)

Como veremos utilizará estas ecuaciones más adelante al estudiar cambios de coordenadas entre sistemas cartesianos.

Estudia dos casos particulares más: si suponiendo fijo el triángulo OO_1O_2 de referencia se cambia e1 eje *OY*, ó sea OO_2, por la recta límite O_1O_2; y particulariza aún más suponiendo además que el rayo unidad del haz O_2 permanece el mismo (p. 90).

En el siguiente punto concluye que en cualquier caso el grado de una ecuación no varía al efectuar una transformación de coordenadas (p. 91), y tras esto da una clasificación de las curvas:

> Las líneas planas se dividen en algébricas y trascendentes según la naturaleza de las ecuaciones que las representan; y las líneas algébricas se clasifican en órdenes atendiendo al grado de su ecuación (p. 91).

Tras esto estudia las coordenadas cartesianas de un punto, que define como un caso particular del sistema general tratado anteriormente:

> 115. Los casos particulares más importantes de los sistemas de coordenadas que acabamos de establecer, son aquellos en los cuales uno ó dos vértices del triángulo de referencia OO_1O_2, son puntos del infinito.

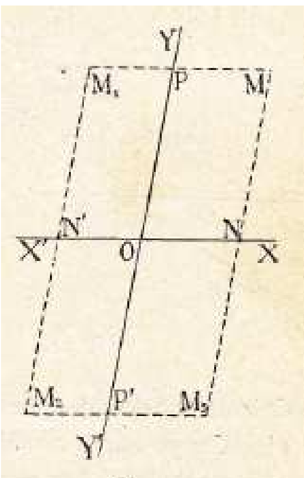


Fig. 10.

> Si suponemos que los vértices O_1y O_2 son puntos del infinito de un plano, los haces generadores de la figura contenida en él tienen sus rayos paralelos á dos rectas *X* é *Y* que se cortan en un punto *O*(fig. 10), y si tomamos como abscisa de cada rayo de estos haces la distancia respectiva á su rayo de origen *Y* ó *X*, resulta el sistema de coordenadas ideado por Descartes, *coordenadas* que; por esta razón, se llaman *cartesianas*, y que no son otra cosa que las distancias del punto á cada uno de los ejes *Y* y *X* de referencia, contadas en direcciones paralelas al otro. Así, las coordenadas del punto *M* son *x*=*MP* é *y*=*NM* las cuales son, respectivamente, iguales á los segmentos *ON* y *OP* contados sobre los ejes.
>
> En este sistema, la coordenada *x* de un punto se denomina *abscisa* de ese punto, y la coordenada *y* se llama *ordenada* del mismo (p. 91).

Tras estudiar las ecuaciones de la recta en este sistema (ER) da las ecuaciones de transformación de unas coordenadas cartesianas a otras, basándose en las obtenidas en el punto 113:

119. Las fórmulas para la transformación de coordenadas en este sistema, es decir, para pasar de unos ejes cartesianos *OX* y *OY*(fig. 13) á otros también cartesianos *O'X'* y *O'Y'*, son (113)

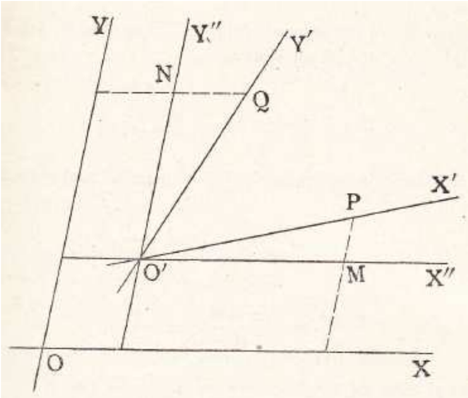


Fig. 13.

$$x = p_1x' + q_1y' + a,$$

$$y = p_2x' + q_2y' + b \quad (1)$$

en las cuales a y b son las coordenadas del origen *O'* respecto de los ejes *OX* y *OY*, y los otros coeficientes dependen del ángulo θ que forman estos ejes, y de los ángulos α y β que los ejes nuevos *O'X'* y *O'Y'* forman con el eje *OX*, (…)

Por tanto, las relaciones (1) se transforman en las siguientes

$$x = \frac{x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{sen}(\theta - \beta)}{\operatorname{sen}\theta} + a \quad \text{ó} \quad y = \frac{x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta} + b, \quad [2]$$

(p. 96)

que son las que buscábamos (p. 96).

Para el caso en que los ejes primitivos son rectangulares, como θ=90º, obtiene:

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + a \quad \text{é} \quad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\beta + b. \quad [3]$$ (p. 96)

En el caso de que sean rectangulares los ejes nuevos se tendrá β-α=90º, por lo que las ecuaciones de cambio en este caso son:

$$x = \frac{x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}\theta} + a \quad \text{ó} \quad y = \frac{x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha}{\operatorname{sen}\theta} + b. \quad [4]$$ (p. 97)

Y en el caso de que lo sean ambos sistemas las ecuaciones se reducen a:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha + a, \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b. \quad [5]$$ (p. 97)

Termina señalando que en todos los casos si el origen de coordenadas no varía, los términos a y b son nulos y las relaciones anteriores carecen de términos independientes (p. 97).

En el artículo III trata otros sistemas particulares de coordenadas.

En el primero de ellos supone que uno de los ejes coordenados, el *X*, por ejemplo, es la recta del infinito del plano, uno de los haces generadores de la figura plana es de rayos paralelos (es decir, su vértice *O* es un punto del infinito) y el otro tiene el vértice O_2 en el plano. Toma como abscisa del rayo *AP* del haz O_1 la cantidad $\frac{1}{O_2P}$ inversa de su distancia al eje Z (común a los dos haces) (figura 14) y como abscisa del rayo O_2A la razón de los senos de los ángulos que este rayo forma con los ejes Y y Z. En el caso de que Y y Z sean perpendiculares las coordenadas del punto A son

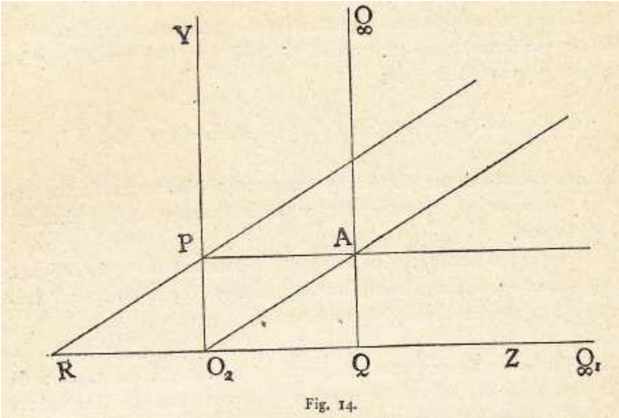


Fig. 14.

$$x = tgAO_2P \text{ e } y = \frac{1}{O_2P}; \text{ (p. 97)}$$

Como en otros casos tras dar las ecuaciones de la recta en este sistema (ER) da las ecuaciones para pasar de este sistema al cartesiano, y termina el artículo definiendo un nuevo sistema de referencia.

En este nuevo sistema el origen O de coordenadas es el único vértice del triángulo de referencia OO_1O_2 que está en el infinito (por lo que los ejes X e Y son paralelos) y toma como coordenadas de un punto A (fig. 15) las razones de los senos de los ángulos que las rectas O_1A y O_2A forman con los ejes Y y Z y X y Z respectivamente (p.99).

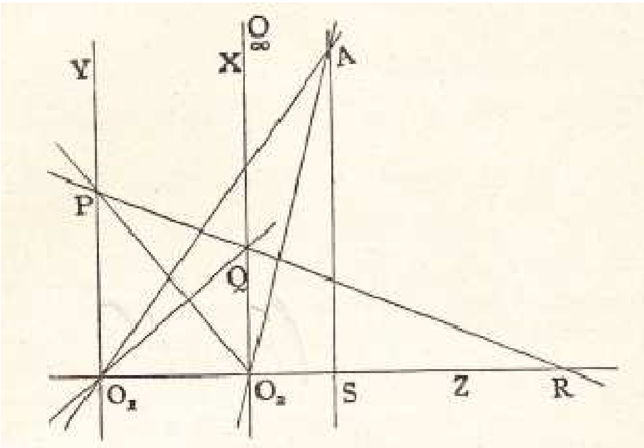


Fig. 15.

Si además se suponen los ejes X é Y perpendiculares al eje Z y se consideran como positivos los ángulos del haz O_1, contados de Y á O_1O_2 y los del haz O_2 contados de X á O_2O_1, las coordenadas de un punto A son, respectivamente, $x = tgPO_1A$ é $y = tgQO_2A$(p. 100).

Como antes tras estudiar las ecuaciones de la recta (ER) da las ecuaciones de cambio de este sistema al cartesiano cuyos ejes *X'* é *Y'* son, respectivamente, los ejes *Z* é *Y*(p. 101).

2.4. Determinación de una recta sobre una figura plana

El capítulo II titulado *coordenadas tangenciales binarias en una figura plana* tiene la misma estructura del anterior. Comienza definiendo un sistema general de coordenadas tangenciales, y estudia después como casos particulares las coordenadas plückerianas en el artículo II y otros sistemas particulares en el III.

Define el siguiente sistema general:

> 129. Si se considera una figura plana como conjunto de rectas una cualquiera de ellas queda determinada por los puntos *P* y *Q* en que encuentra á dos rectas fijas *U* y *V* situadas en el plano de la figura dada; de modo que esta figura viene determinada por dos series rectilíneas de bases *U*y *V*. Pero en cada una de estas series un punto queda representado analíticamente por su abscisa correspondiente luego una recta del plano se representa algébricamente por las abscisas *u* y *v* de los

> puntos P y Q en que corta á las rectas U y V, abscisas que se denominan coordenadas de dicha recta. Si O_1y O_2 son los puntos de aquellas series que tienen nula su abscisa, las tres rectas U, V yO_1O_2, que representaremos por W, forman un triángulo que se denomina de *referencia* y sus lados son los *ejes de referencia* (p. 102).

Seguidamente especifica cómo son las coordenadas de las rectas que pasan por los vértices, y a continuación define *haz plano de rectas* y explica que las coordenadas u y v se llaman coordenadas tangenciales de la recta:

> 130. Una ecuación *f(u,v)*=0 representa un sistema simplemente infinito de rectas, cada una de las cuales tiene por coordenadas una solución de dicha ecuación; á este sistema lo llamaremos *haz plano de rectas*, generalizando el concepto de haz que establecimos en el párrafo I.
>
> Los rayos de un haz plano de rectas son por lo general tangentes á una *línea curva* que se llama *envolvente* del mismo, de modo que cada par de valores simultáneos de las variables u y v que satisfacen á la ecuación *f(x,y)*=0determina una tangente de esta curva, por cuya razón las cantidades u y v se denominan coordenadas tangenciales de la recta, y la ecuación anterior se llama ecuación tangencial de dicha línea envolvente.
>
> Recíprocamente, un haz plano de rectas, ó sea, el conjunto de las tangentes á una línea se representa por una ecuación *f(u,v)*=0 entre las coordenadas de sus diversos rayos, que es la expresión algébrica de la propiedad que caracteriza á cada una de las rectas que componen dicho haz (pp. 102-103).

Tras estudiar la ecuación de un punto, equivalente en coordenadas tangenciales a la ecuación de una recta (ER), estudia las ecuaciones de cambio entre sistemas de coordenadas tangenciales y explica que siguiendo un razonamiento análogo al realizado en el caso de cambio general de coordenadas entre sistemas binarios de puntos se llega a las mismas relaciones que en este. Es decir si *u, v* y *u', v'* son las coordenadas de una misma recta en dos sistemas de coordenadas tangenciales binarias distintos, las ecuaciones de cambio de uno a otro vienen dadas por:

$$u = p_1u' + q_1v' + av = p_2u' + q_2v' + b;$$

y en coordenadas homogéneas $\frac{u}{a_1u'+b_1v'+c_1w'} = \frac{v}{a_2u'+b_2v'+c_2w'} = \frac{w}{a_3u'+b_3v'+c_3w'}$ (p. 106).

Al igual que en el caso de las coordenadas cartesianas señala que el grado de una ecuación no se altera cuando se realiza un cambio de coordenadas, y da la clasificación de haces planos de rectas en *algébricos y trascendentes* (p. 106).

Por último explica cómo pasar de un sistema de coordenadas tangenciales a otro de "coordenadas de puntos":

> 139. Es fácil pasar de un sistema de coordenadas tangenciales al de coordenadas de puntos que tiene por ejes X é Y los U y V de aquél, y en el cual e1 elemento límite de cada sistema es el origen del otro, cuando se toma como abscisa de un rayo cualquiera de cada uno de dichos haces la de su punto de intersección con el eje coordenado no perteneciente á aquel haz, estando los elementos unidad harmónicamente separados por los límites respectivos. Pues, si la ecuación tangencial de un punto se pone en la forma $Au+Bv+1=0$, los coeficientes A y B son

> precisamente las coordenadas x é y de dicho punto (135); y si la ecuación de una recta en coordenadas de puntos, se pone en la forma $Ax+By+1=0$ los coeficientes A y B son las coordenadas tangenciales u y v de dicha recta (111) (p. 107).

Es decir, la ecuación $Ax+By+1=0$ nos sirve para determinar tanto un punto como una recta en coordenadas tangenciales y coordenadas de puntos, sin más que tomar la ecuación o los coeficientes según corresponda en el sistema considerado.
Seguidamente, en el artículo II estudia las coordenadas *plückerianas* de la recta como caso particular de las anteriormente definidas:

> l40. Los casos particulares más importantes de 1os sistemas de coordenadas que acabamos de establecer, son aquellos en los cuales uno de los vértices del triángulo de referencia ó dos de ellos son direcciones, ó sea puntos del infinito.

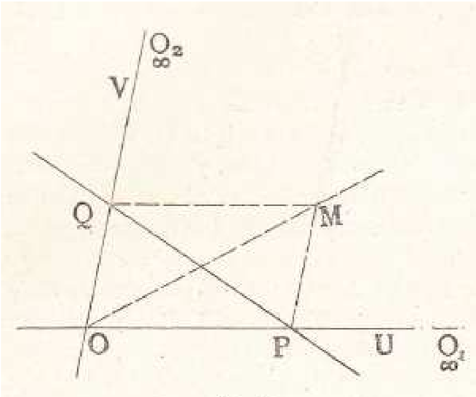


Fig. 16.

> Si suponemos que los puntos O_1 yO_2 son puntos del infinito de un plano, y tomamos como coordenadas u y v de una recta PQ las inversas con signo contrario de las distancias del tercer vértice O del triángulo de referencia (fig. 16) á los puntos P y Q en que dicha recta encuentra á los ejes U y V, es decir, las cantidades $u=-\frac{1}{OP}$ y $v=-\frac{1}{OQ}$, se obtiene el sistema de coordenadas tangenciales ideado por el ilustre geómetra Plücker, por cuya circunstancia estas coordenadas se denominan plückerianas (pp. 107-108).

Y explica que las abscisas el punto O son infinitas, las rectas paralelas al eje U tienen nula su coordenada u, las paralelas al V la v, y la recta del infinito tiene nula sus dos coordenadas (p. 108). Seguidamente estudia las ecuaciones del punto (punto 141, p. 108) y da la interpretación geométrica de sus coeficientes, ambas cosas las hemos recogido más adelante en este estudio. Tras esto da las condiciones para el cambio de estas coordenadas a las cartesianas[67]:

> 142. Para pasar de este sistema al cartesiano que tenga como ejes X é Y los U y V, basta observar que puesta la ecuación cartesiana de una recta en la forma $Ax+By+1=0$, los coeficientes A y B son las coordenadas plückerianas de la misma recta; y puesta la ecuación plückeriana de un punto en la forma $Au+Bv+1=0$, los coeficientes A y B son las cartesianas de este punto; de modo que la ecuación $ux+vy+1=0$ representa, en coordenadas cartesianas, una recta cuyas coordenadas tangenciales son u y v, y en coordenadas plückerianas, un punto cuyas coordenadas cartesianas son x é y; por tanto, en cuanto al punto y á la rectase refiere, se puede pasar del sistema de coordenadas cartesianas al de Plücker mediante estas consideraciones (p. 109).

Como vemos, la correspondencia que se establece entre un sistema de puntos y uno tangencial mediante una ecuación del tipo $ux+vy+1=0$ visto anteriormente en el caso general, se concreta ahora en la relación plückerianas-cartesianas.

[67] Este cambio, así como otros propuestos a continuación, se obtienen inmediatamente de la definición de ecuación de un punto en coordenadas plückerianas y de la interpretación geométrica de los coeficientes.

También da las ecuaciones para pasar de un sistema U, V de coordenadas plückerianas a otro U', V'. Para ello utiliza las ecuaciones de cambio obtenidas para las coordenadas cartesianas y sustituye los valores de las coordenadas x, y, de un punto en el sistema antiguo en función de los nuevos x', y', en la ecuación $ux+vy+1=0$, y comparándola con la nueva $u'x'+v'y'+1=0$, obtiene:

$$u' = \frac{u \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + v \operatorname{sen}\alpha}{(1 + au + bv)\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad v' = \frac{u \operatorname{sen}(\theta - \beta) + v \operatorname{sen}\beta}{(1 + au + bv)\operatorname{sen}\theta},$$

donde u, v son las coordenadas de una recta referida a los ejes U y V, y u', v' las de la misma recta referida a los ejes U', V'; el ángulo θ es el que forman los ejes U y V, y los ángulos α y β son los que los ejes nuevos forman con el eje U (p. 110).
Estudia además los casos en que los ejes U y V son perpendiculares, obteniendo:

$$u' = \frac{u \cos\alpha + v \operatorname{sen}\alpha}{1 + au + bv} \qquad \text{y} \qquad v' = \frac{u \cos\beta + v \operatorname{sen}\beta}{1 + au + bv}.$$ (p. 110)

El caso en que lo son ambos sistemas de ejes:

$$u' = \frac{u \cos\alpha + v \operatorname{sen}\alpha}{1 + au + bv} \qquad \text{y} \qquad v' = \frac{v \cos\alpha - u \operatorname{sen}\alpha}{1 + au + bv}.$$ (p. 110)

Y en el que el origen no varía, por lo que $a=b=0$, y por tanto las ecuaciones generales de transformación quedan:

$$u' = \frac{u \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + v \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{y} \qquad v' = \frac{u \operatorname{sen}(\theta - \beta) + v \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta}.$$ (p. 110)

Termina indicando cómo pasar de este sistema al sistema de coordenadas de puntos visto anteriormente en el que las coordenadas de un punto A son $x = tgAO_2P$ e $y = \frac{1}{O_2P}$, donde O_2 es un vértice del sistema, el eje X es la recta del infinito del plano, AO_2P es el ángulo que forma el rayo AO_2 con el eje Y y O_2P es la distancia de A al rayo común a los dos haces, O_1O_2.

Las consideraciones que hay que hacer en tal caso para llevar a cabo el cambio de coordenadas son las siguientes.

> (…) si tomamos como eje X é Y las U y V respectivamente, de tal modo que los sentidos de los Y y V sean opuestos, y puesta la ecuación de una recta en el último sistema de coordenadas en la forma $y=mx+n$, los coeficientes m y n están ligados á las coordenadas plückerianas de dicha recta por las relaciones $m=u$ y $n=v$ (122) y si tomamos la ecuación plückeriana de un punto en la forma $v=mu+n$, los coeficientes m y n están relacionados con las coordenadas x é y de dicho punto mediante las igualdades (141) $m=-x$ y $n=y$; de modo que la ecuación $y=ux+v$ enlaza las coordenadas plückerianas de una recta con las de uno cualquiera

de sus puntos, y por su medio es fácil pasar de uno de los dos sistemas considerados al otro (p. 110).

Obsérvese la conveniencia de considerar ese sistema de coordenadas de puntos, es al que se pasa de forma natural desde un sistema de coordenadas plückerianas al poner la recta en forma explícita.

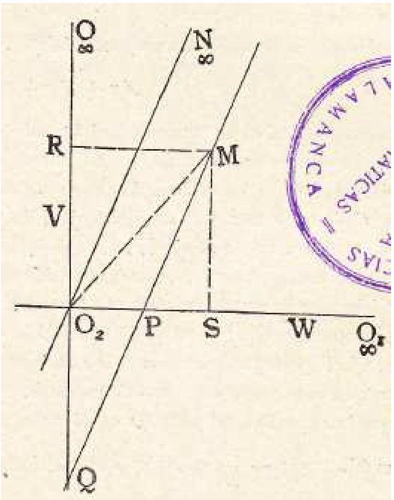


Fig. 17.

Como hemos señalado, en el artículo siguiente define tres nuevos sistemas de coordenadas tangenciales.

En el primero de ellos supone que uno de los ejes de referencia, por ejemplo el eje U, es la recta del infinito del plano. Para determinar uno N de los puntos del infinito (fig. 17) toma la razón de los senos de los ángulos que la recta O_2N que lo une con el vértice O_2 forma con los ejes W y V, y determina un punto Q de la serie V por su distancia á dicho vértice O_2. En tales condiciones las coordenadas de una recta PQ son respectivamente $u = \frac{sen\,\alpha}{sen(\theta-\alpha)}$ y $v = O_2Q$ (p. 111) designando por α y θ los ángulos que el eje W forma con la recta dada y con el eje V.
Si los ejes V y W son perpendiculares entre sí, la coordenada u es la tangente del ángulo α que la recta dada forma con el eje W (p. 111).

Como en casos anteriores tras dar las ecuaciones de un punto (ER) da las consideraciones necesarias para pasar a otros sistemas de coordenadas, en este caso a las coordenadas cartesianas, al sistema en que las coordenadas de un punto A son

$x = tgAO_2P$ e $y = \frac{1}{O_2P}$, y al sistema plückeriano (p. 113).

Termina definiendo dos nuevos sistemas de coordenadas, las coordenadas axiales y las coordenadas paralelas:

148. Si para determinar un punto de la serie U del infinito, se toma el ángulo β que la recta que lo une con el punto O_2 forma con el eje V, se obtiene el sistema de *coordenadas* que D'Ocagne denomina *axiales* (p. 114).

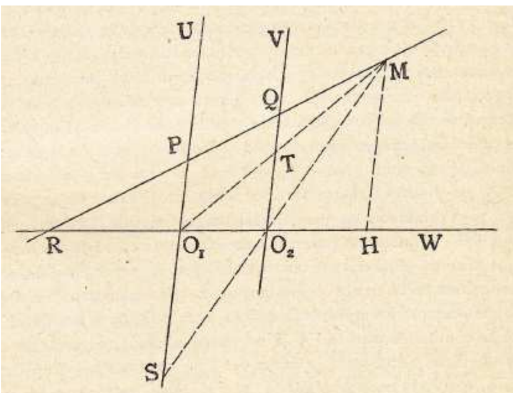


Fig. 18.

149.Si suponemos que los ejes de referencia U y V son paralelos entre sí, y tomamos para abscisa de los puntos de las series generadoras de la figura plana, las distancias de los mismos al vértice respectivo O_1 y O_2 del triángulo de referencia UVW, obtenemos el sistema de coordenadas, ideado por D'Ocagne, denominado de *coordenadas paralelas* por este ilustre geómetra, en el cual las coordenadas de una recta PQ (fig. 18) son los segmentos

> O_1P y O_2Q, que en los ejes *U* y *V* determinan dicha recta y el tercer eje *W*, coordenadas que consideraremos positivas cuando se cuenten por encima de este eje, y como negativas, cuando hayan de tomarse en sentido contrario (p. 114).

Como en los otros casos hace referencia a las ecuaciones de punto (ER) y termina indicando cómo pasar de este sistema a otros, entre ellos al sistema cartesiano (pp. 115-116).

2.5. Coordenadas ternarias

Las coordenadas ternarias las trata en el capítulo VII. Las estudia tanto en las figuras planas como en las radiadas, pero nosotros solo analizaremos las primeras.

En este caso dedica el artículo I a las coordenadas ternarias de un punto y en particular a las trilineales y a las baricéntricas; y el artículo II a los sistemas de coordenadas tangenciales ternarias.

Comienza definiendo coordenadas ternarias de un punto:

> 222. Si referimos los puntos de una figura plana á tres puntos fijos *A', B'* y *C'* de la misma, esta figura viene determinada por tres haces de rectas, cuyos vértices respectivos son dichos puntos; de modo que un punto cualquiera M del plano se determina por las abscisas *X, Y, Z* de los rayos *A'M*, *B'M* y *C'M*, abscisas que se denominan *coordenadas ternarias* de dicho punto (p. 175).

Denomina *A'C, B'A* y *C'B* a los rayos de los haces generadores cuyas abscisas son nulas, es decir, a los rayos origen de cada uno de los haces, y da la definición de ejes y triángulo de referencia del sistema de coordenadas ternarias:

> Generalmente, las tres rectas *A'C, B'A* y *C'B* que se denominan *ejes de referencia*, forman un *triángulo ABC* que se llama *de referencia*, á cuyos lados los designaremos por *a, b* y *c* (p. 175).

Añade que si los puntos *A', B'* y *C'* están en línea recta, todos los puntos del plano quedan determinados por sus coordenadas, excepto los de esta recta (que es común a los tres haces) y uno cualquiera de estos puntos se determinará por la intersección de dicha recta con otra cualquiera que pase por él, y que si esta recta tiene infinita su abscisa en cada uno de estos haces, alguna de las coordenadas de los puntos de dicha recta es infinita (p. 175). A continuación indica que mientras no se advierta lo contrario, al hablar de sistemas ternarios de coordenadas se entenderá que se cumplen todas las condiciones anteriores, es decir que los ejes de referencia forman un triángulo, y que los haces generadores de la figura plana tienen un rayo común, cuya abscisa es infinita en cada uno de estos haces, rayo denominado *recta límite* del sistema (pp. 175-176).

En el punto siguiente hace la observación de que como para determinar los puntos de una figura plana solo son necesarios dos haces de rectas, entre las coordenadas ternarias de un punto M debe existir una relación, que obtiene a continuación. Tras diversos cálculos llega a la conclusión de que si X, Y, Z son tales coordenadas se cumple una relación del tipo $H_1X + H_2Y + H_3Z = 1$ (1) cuando los ejes forman un triángulo, en virtud de la cual "basta conocer dos coordenadas ternarias de un punto para determinar la tercera" (p. 176). Añade además que también quedan conocidas estas cantidades cuando se dan cantidades proporcionales "pues, si *l, m* y *n* son estas cantidades, se tiene $\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n} = \frac{H_1X+H_2Y+H_3Z}{H_1l+H_2m+H_3n} = \frac{1}{H_1l+H_2m+H_3n}$" (p. 176).

Concluye también que la relación (1) permite hacer homogéneas las ecuaciones que no lo son sin más que multiplicar los términos de grado α-1, α-2,…, 1 y 0 de la ecuación en cuestión, suponiendo que esta sea de grado α, por las potencias 1, 2, 3, …, α-1, α del primer miembro de la relación y "por esta razón supondremos siempre que las ecuaciones en coordenadas ternarias son homogéneas" (p. 177).

Seguidamente define las coordenadas trilineales:

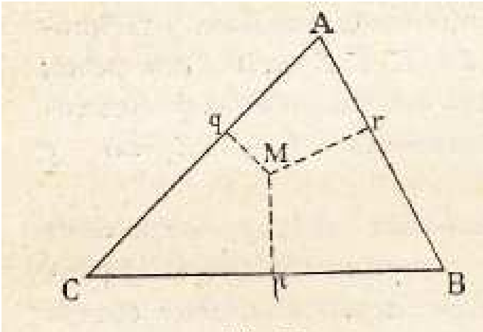


Fig. 29.

225. Un caso particular interesante del sistema de coordenadas acabamos de exponer es aquel en que los puntos *A'*, *B'* y *C'* son direcciones, es decir, que los haces generadores de la figura plana tienen sus rayos paralelos á los lados del triángulo de referencia, y se toman como abscisas de cada uno de estos rayos la distancia á su eje respectivo multiplicada por un número conocido que se denomina *parámetro de referencia*, y considerando dicha distancia como positiva cuando el rayo correspondiente está en aquel de los dos medios planos separados por el eje de referencia que contiene el triángulo fundamental.

Entonces si designamos por α, β y γ las distancias de un punto M (fig. 29) á los tres lados *BC*, *AC* y *AB* ó a, b y c, del triángu1o de referencia, y los parámetros de referencia son los números positivos λ, μ y υ, las coordenadas ternarias del punto M, que en este caso reciben el nombre de *trilineales* ó *triláteras*, son

$$X = \lambda \times Mp = \lambda\alpha$$

$$Y = \mu \times Mq = \mu\beta$$

$$Z = \nu \times Mr = \nu\gamma \text{ (p. 178)}$$

Seguidamente da la relación entre las coordenadas de un punto cualquiera, basándose en la obtenida para el caso general:

La relación que enlaza las coordenadas triláteras de un punto cualquiera es (223)

$\frac{X}{\lambda h_1} + \frac{Y}{\mu h_2} + \frac{Z}{\nu h_3} = 1$, siendo h_1, h_2y h_3 las alturas del triángulo de referencia (p.178).

Otra en función de los lados del triángulo:

Si se quiere expresar esta relación en función de las longitudes de los lados a, b y c de este triángulo, basta observar, que si S designa el área del mismo se verifican las igualdades a h_1=bh_2 =ch_3=$2S$, en virtud de las cuales aquella relación se transforma en la$\frac{a}{\lambda}X + \frac{b}{\mu}Y + \frac{c}{\nu}Z = 2S$, (…) (p. 179)

Y una más en función del radio del círculo circunscrito al triángulo y a los ángulos de éste:

Designando por *R* el radio del círculo circunscrito al triángulo *ABC* se tienen las igualdades *a=2R sen A, b=2R sen B* y *c=2R sen C,* y la relación fundamental se transforma en la

$$\frac{sen\,A}{\lambda}X + \frac{sen\,B}{\mu}Y + \frac{sen\,C}{\nu}Z = \frac{S}{R} \text{ (p. 179)}$$

Tras esto pone ejemplos de diferentes sistemas de coordenadas trilineales dependiendo del valor de los parámetros:

226. Según los valores que se den á los parámetros de referencia, así se obtienen diferentes sistemas de coordenadas trilineares. Si suponemos $\lambda=a$, $\mu=b$ y $\upsilon=c$, las coordenadas de un punto *M* son $X = a \times Mp$, $Y = b \times Mq$ y $Z = c \times Mr$, es decir, los duplos de las áreas de los triángulos parciales *MBC, MAC* y *MAB,* y entre ellas existe la relación *X+Y+Z=2S.*

Si suponemos $\lambda = \frac{a}{2S}$, $\mu = \frac{b}{2S}$ y $\upsilon = \frac{c}{2S}$, las coordenadas de un punto *M* son

$X = \frac{a \times Mp}{2S}$, $Y = \frac{b \times Mq}{2S}$ y $Z = \frac{c \times Mr}{2S}$, es decir, las razones de las áreas de los triángulos parciales *MBC, MAC* y *MAB* á la del triángulo total *ABC,* entre cuyas *coordenadas*, denominadas *baricéntricas*, existe la relación *X+Y+Z=1.*

Cuando los parámetros de referencia son iguales á la unidad positiva, las coordenadas de un punto son las distancias del mismo á los lados del triángulo de referencia, y entre ellas existe la relación *aX+bY+cZ=2S.* De este sistema es del que nos ocuparemos, por ser el que generalmente se usa; por lo demás, para pasar de él al sistema general de coordenadas trilineales, basta sustituir en las ecuaciones *X, Y* y *Z* por $\frac{X}{\lambda}, \frac{Y}{\mu}$ y $\frac{Z}{\nu}$ (p. 179).

Seguidamente da las ecuaciones de cambio para pasar del sistema de coordenadas triláteras al cartesiano, siendo dichas ecuaciones:

$$X = \lambda(xcos\alpha + ycos\beta - p)$$

$$Y = \mu(xcos\alpha_1 + ycos\beta_1 - p_1)$$

$$Z = \nu(xcos\alpha_2 + ycos\beta_2 - p_2)$$

Donde

$xcos\alpha + ycos\beta - p = 0$, $xcos\alpha_1 + ycos\beta_1 - p_1 = 0$ y $xcos\alpha_2 + ycos\beta_2 - p_2 = 0$ son las ecuaciones de los lados *BC, AC* y *AB* del triángulo de referencia, referidos a unos ejes cartesianos cualquiera (p. 180).

Dichas ecuaciones se reducen a $X = xcos\alpha + ycos\alpha - p$, $Y = xcos\alpha_1 + ycos\alpha_1 - p_1$ y $Z = xcos\alpha_2 + ycos\alpha_2 - p_2$, cuando $\lambda=\mu=\upsilon=1$ y los ejes son rectangulares (p. 180).

Tras analizar la ecuación de la recta en coordenadas trilineales (ER) termina el artículo estudiando el cambio de un triángulo de referencia a otro llegando a la conclusión de que las relaciones que se buscan entre las coordenadas en los diferentes sistemas tienen la forma:

$$\frac{X}{a_1X' + b_1X' + c_1Z'} = \frac{Y}{a_2X' + b_2Y' + c_2Z'} = \frac{Z}{a_3X' + b_3Y' + c_3Z'},$$

"y manifiestan que el grado de una ecuación es independiente del triángulo de referencia"[68](p. 182).

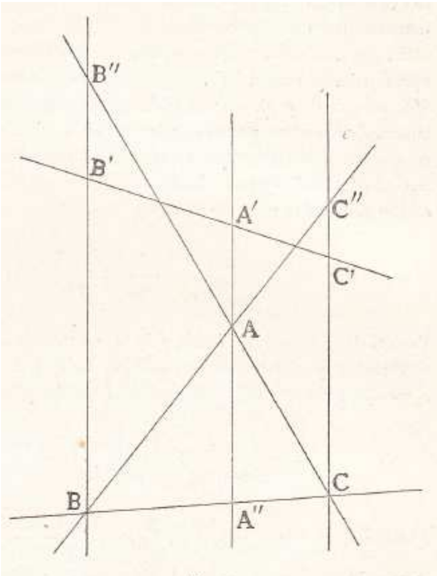


Fig. 31.

En el artículo II trata de las coordenadas tangenciales ternarias en el plano como ya hemos dicho. Comienza definiéndolas. Podríamos decir que la definición es la "correlativa" a la de las coordenadas ternarias que ha definido anteriormente, como él mismo señala al comienzo del párrafo:

> 230. Por consideraciones correlativas con las expuestas en los párrafos 222, 223 y 224, se deduce que considerada una figura plana como conjunto de rectas, queda determinada por las tres series de puntos en que son cortadas todas las rectas de la figura por tres fijas, siendo, según esto, las *coordenadas ternarias* de una recta *A'B'* las abscisas de los puntos respectivos *A', B'* y *C'* de estas series (fig. 31).

En este caso considera los puntos *A, B* y *C* de las series generadoras que tienen nulas las abscisas correspondientes *U*, *V* y *W*. Indica que estos tres puntos forman, por lo general, un *triángulo* que se denomina *de referencia*, y las bases de dichas series son concurrentes en un punto D. Generalmente el punto *D*, común á las tres series generadoras de la figura plana tiene su abscisa infinita en cada una de estas series y, por tanto, alguna de las coordenadas de las rectas que lo contienen es infinita. Añade que "a este caso nos referiremos siempre mientras no se advierta lo contrario, y llamaremos al *D punto límite* del sistema" (pp. 182-183).

Tras esto explica que, al igual que ocurre con los puntos, debe existir una relación entre las coordenadas ternarias de una recta, relación que es lineal y que sirve para hacer homogéneas las ecuaciones (p. 183).

Como hizo con las coordenadas ternarias considera un caso particular que podemos considerar como el correlativo a las coordenadas trilineales definidas anteriormente. Es aquel en el cual las bases de las series generadoras son paralelas entre sí, y se toma como abscisa de un punto de una de dichas series la distancia del mismo al vértice respectivo del triángulo de referencia multiplicada por un número conocido que se denomina *parámetro de referencia* (p. 184).

Seguidamente obtiene para este sistema las relaciones entre las coordenadas de una recta de forma análoga a como lo hizo con las coordenadas trilineales de un punto. Explica que según sean los valores que se dan a los parámetros de referencia, así se obtienen diferentes sistemas de coordenadas tangenciales, y que generalmente estos parámetros se toman iguales a la unidad positiva (p.184).

[68] Obsérvese que hay una errata en el denominador del primer cociente, sería b_1Y' y no b_1X' como pone.

Tras estudiar las ecuaciones de un punto, que hemos recogido más adelante, da las condiciones de cambio entre diferentes sistemas. En primer lugar de este al trilineal:

> 234. Para pasar de este sistema al trilineal, basta observar que si la ecuación trilineal de una rectase pone en la forma $apX+bqY+crZ=0$ las cantidades p, q y r son proporcionales á las coordenadas tangenciales de esta recta (228); y puesta la ecuación tangencial de un punto en la forma $apU+bqV+crW=0$ (233) las cantidades p, q y r son proporcionales á las coordenadas trilineales de este punto; con lo cual es fácil pasar de uno de los dos sistemas ternarios al otro (p. 186).

Y después, análogamente, explica el cambio a coordenadas baricéntricas (p. 186), con lo que concluye el capítulo.

2.6. Coordenadas polares

Las coordenadas no rectilíneas las estudia en el capítulo IX, que está dividido en cuatro artículos. En el primero estudia las coordenadas polares en una figura plana, en el II las coordenadas polares tangenciales, en el artículo III las coordenadas polares en una radiación –que no estudiaremos por salirse de nuestro tema de estudio- y en el cuarto las tripolares.

Como decimos el artículo I lo dedica a las coordenadas polares en una figura plana. Comienza introduciendo sistemas de coordenadas en los que las figuras no se determinan como intersección de rectas sino de líneas cualesquiera:

> 258. En los sistemas de coordenadas considerados hasta aquí, los elementos de una figura plana ó radiada se han determinado por medio de dos ó de tres rectas ó puntos en las figuras planas, y en las radiadas por dos ó tres planos ó rectas. Pero se comprende fácilmente que en un plano

un punto puede determinarse por la intersección de dos líneas cualesquiera;	una recta puede determinarse considerándola como tangente común á dos líneas cualesquiera;

> (…)
> De aquí que los sistemas de coordenadas que pueden emplearse para el estudio analítico de las propiedades de las figuras planas y de las radiadas son en extremo variados, según sea la naturaleza de las líneas ó de las superficies que se tomen como determinantes de los elementos que constituyen dichas figuras, á las cuales se denominan, por esta razón *líneas ó superficies coordenadas* (p. 206).

Seguidamente define las coordenadas polares:

> 259. Así por ejemplo, pueden determinarse los puntos de un plano, por medio de un haz de rectas, y un sistema de circunferencias concéntricas, en cuyo caso las coordenadas de uno de estos puntos son, respectivamente, la abscisa del rayo de aquel haz que pasa por él y el radio de la circunferencia que lo contiene, siendo necesario establecer algún convenio para distinguir uno de otro los dos puntos de intersección de las dos líneas coordenadas.
>
> Si suponemos que el centro O de todas las circunferencias es el vértice del haz de rectas, y consideramos este haz como compuesto de medios rayos, se obtiene el sistema de coordenadas polares en el plano, en el cual las coordenadas de un punto M son la distancia $OM=\rho$ de dicho punto a uno fijo O, llamado *polo*, y el ángulo ω

> que el medio rayo *OM* forma con otro fijo que parte del polo, que se denomina *eje polar*. La distancia *OM*, que se llama *radio vector*, se considera siempre como positiva, y la coordenada angular se cuenta de cero á cuatro ángulos rectos (pp. 206-207).

Tras estudiar las ecuaciones de la recta en polares (ER) y diversos problemas relativos a ella da las ecuaciones de cambio de coordenadas de un sistema de coordenadas polares a uno cartesiano.
Comienza considerando el caso particular en que el sistema cartesiano tiene ejes rectangulares, siendo el eje de abscisas el eje polar y el de ordenadas una recta perpendicular a él que pase por el polo, *que es el caso más frecuente.* En este caso da como ecuaciones de cambio: $x = \rho cos\omega$, $y = \rho sen\ \omega$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $y = x\ tg\omega$, "de las cuales las dos primeras sirven para pasar del sistema de coordenadas cartesianas al polar, y por medio de las últimas se efectúa la transformación de coordenadas inversa de la anterior" (p. 210).

Seguidamente considera el caso general, en el que se quiere pasar del sistema cartesiano de ejes *OX* y *OY* al polar del polo *O'* y eje *O'P*, en el que este no es paralelo al eje de abscisas del sistema cartesiano. Designa por θ el ángulo *XOY* por α el ángulo que forma el eje polar *O'P* con el eje *OX*, por a y b las coordenadas cartesianas del polo *O'*, y por ρ y ω las coordenadas polares del punto *M*, cuyas coordenadas cartesianas son x é y. Para este caso obtiene como ecuaciones de cambio:

$$x = a + \rho\frac{sen(\theta-\omega-\alpha)}{sen\theta} \text{ é } y = b + \rho\frac{sen(\omega+\alpha)}{sen\theta} \text{ (p. 211)}$$

Estudia los casos particulares en que los ejes son cartesianos entre sí, reduciéndose las ecuaciones a:

$$x = a + \rho cos(\omega + \alpha) \text{ é } y = b + \rho sen(\omega + \alpha) \text{ (p. 211)}$$

y señala que si el polo se confunde con el origen de coordenadas cartesiano, y el eje polar con el eje de abscisas se obtienen las ecuaciones dadas en un principio, y con esto concluye este artículo (p. 211).

A continuación da las ecuaciones de cambio inversas, es decir, para pasar del sistema polar al cartesiano, obteniendo:

$$OM = \rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta}$$

$$\cot(\omega+\alpha) = \cot\theta + \frac{x-a}{(y-b)\operatorname{sen}\theta}.$$ (p. 211)

que se reducen a

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}(\omega+\alpha) = \frac{y-b}{x-a},$$

si el ángulo θ es recto, y "que comprenden, como caso particular, las primitivamente obtenidas cuando el polo y el eje polar se confunden, respectivamente, con el origen de coordenadas y con el eje de abscisas"(p. 211), y con esto concluye este artículo.

El artículo II lo dedica a las coordenadas polares tangenciales, como hemos señalado. Comienza definiéndolas como sistema de coordenadas correlativo a las polares:

> 262. Un sistema de coordenadas en cierto modo correlativo con el que acabamos de establecer es aquel en que 1as rectas de un plano se determinan por su distancia pá un punto fijo O del mismo llamado *polo* y el ángulo α que dicha distancia forma con un medio rayo que parte del punto O; pues en este caso las líneas coordenadas son circunferencias de centro O y los puntos del infinito del plano (p. 212).

Y tras estudiar las ecuaciones del punto da las indicaciones para pasar de un sistema polar al otro:

> 264. Comparando la ecuación de un punto, obtenida en el párrafo anterior, con la de la recta obtenida en el párrafo 260, se ve que tanto el punto como la recta vienen representados por la ecuación$\rho\cos(\omega-\alpha)=p$, sin más diferencia que ser variables las p y α cuando se trata de un punto en coordenadas tangenciales, y las ρy ω cuando representa una recta en coordenadas de puntos. Es, pues, fácil pasar de uno de los sistemas polares al otro (…) (p. 213).

El artículo IV lo dedica a las coordenadas tripolares, que define de la siguiente manera:

> 270. Para poner un ejemplo de coordenadas polares ternarias, vamos á indicar uno que tiene mucha aplicación: aquel en que se determina una recta de un plano por sus distancias p, q y r á los tres vértices de un triángulo *ABC* llamado *de referencia* ó *fundamental*, ó bien, los productos λp, μq y υr dichas distancias por tres números conocidos λ, μ y υ que se denominan parámetros de referencia; pues, en este caso, las líneas coordenadas son circunferencias cuyos centros son los vértices de aquel triángulo, debiendo ser cada una de las rectas del plano que se considera, una tangente común á sus circunferencias coordenadas. (…) Los parámetros de referencia se toman generalmente iguales á la unidad, y así lo haremos nosotros (p. 216).

En el siguiente punto señala que todo lo dicho para las coordenadas tangenciales ternarias de una recta vale para este sistema de referencia:

> 271.Si por los vértices del triángulo de referencia se trazan tres rectas paralelas entre sí, y consideramos el sistema tangencial ternario que tiene como series rectilíneas generadoras las contenidas en estas rectas, entre las coordenadas U, V y W de una recta en este sistema y las p, q y r de la misma en el tripolar existen las relaciones $\frac{p}{U}=\frac{q}{V}=\frac{r}{W}=sen\theta$, siendo θ el ángulo que dicha recta forma con las bases de las series rectilíneas antes consideradas.
>
> Conclúyase, de aquí, que todo cuanto hemos dicho en el Artículo II, del Capítulo VII y en el Capítulo VIII, acerca de las coordenadas tangenciales ternarias de una recta, subsiste para las coordenadas tripolares de la misma (p. 217).

Como en los casos anteriores determina la relación que enlaza las coordenadas tripolares de una recta. En primer lugar entre estas y los lados y ángulos del triángulo de referencia, seguidamente en función del área, S, los lados y los ángulos del triángulo fundamental (p. 218), y por último en función de las alturas, h_1, h_2, h_3 de este triángulo (p. 219).

Y con esto concluye el análisis relativo a los sistemas de coordenadas en la recta o el plano, pasaremos ahora a analizar cómo estudia Vegas las ecuaciones de la recta (o el punto si es en tangenciales), pero antes estudiaremos cómo trata el concepto de lugar geométrico.

3. Ecuaciones de la recta/punto

El autor no habla explícitamente de lugares geométricos (LG), pero el concepto aparece en varias ocasiones a lo largo del texto.

En primer lugar en la sección primera cuando habla de la determinación de un punto sobre una recta identifica los puntos de una recta con las raíces de una ecuación:

> 24. Un conjunto de números representa un conjunto de tantos puntos de una serie rectilínea como números componen el primero, ya vengan dados estos números de una manera explícita ya implícitamente, es decir, cuando vienen dados como raíces de una ecuación. Por consiguiente, una ecuación $f(x) = 0$ representa tantos puntos como raíces tiene, siendo estos puntos reales y distintos, reales y confundidos en uno ó imaginarios según sea la naturaleza de dichas raíces (p. 17).

Y más adelante en esta misma sección vuelve a esta idea, pero con las ecuaciones homogéneas:

> Una ecuación homogénea $f(x, y) = 0$ representa, pues, tantos puntos como unidades tiene su grado (p. 20).

Posteriormente cuando estudia los haces tras definir abscisa de un haz establece la relación entre tal haz y una ecuación de una variable:

> 54. El conjunto de varios rayos de un haz está representado por la ecuación que tenga como raíces las abscisas de dichos rayos; y recíprocamente, una ecuación $f(x) = 0$ representa el conjunto de tantos rayos de un haz como raíces tiene, rayos que son distintos ó pueden algunos considerarse como reunión de otros varios ó, finalmente, ser imaginarios según sea la naturaleza de dichas raíces (p. 39).

Y en la sección segunda, en la que trata las figuras de segunda categoría, tampoco habla de lugares geométricos, pero sí dice que una ecuación representa una *línea* y viceversa:

> 107. Una línea de la figura plana está representada algébricamente por una ecuación, que es la expresión analítica de la propiedad geométrica que caracteriza los puntos de la línea; ecuación cuyas soluciones son las coordenadas de estos puntos y se denomina *ecuación de dicha línea*.
>
> Recíprocamente, toda ecuación $f(x, y)=0$representa una línea, pues á cada valor de x corresponderá uno ó varios valores de$y$, 1os cuales determinan otros tantos puntos; y haciéndose variar la cantidad x, la y variará también, por lo general, con lo cual se obtendrá como lugar de estos puntos una línea (p. 84).

También aparece este concepto cuando estudia las coordenadas ternarias, al dar la interpretación geométrica de las ecuaciones en tres variables:

> 224. Una ecuación $f(X,Y,Z)$=0 representa una línea y recíprocamente; y la ecuación $f(X,Y,Z)+kf_1\ (X,Y,Z)$=0 representa, para cada valor del parámetro k, una línea que pasa por los puntos comunes á las dos representadas por las ecuaciones $f(X,Y,Z)$=0 y $f_1\ (X,Y,Z)$=0 (p. 177).

Añade que si la línea de que se trata es recta, la ecuación que la representa es de primer grado (p. 177). Y de nuevo cuando estudia las coordenadas tangenciales ternarias, pues dice que "una ecuación f(U;V;W)=0 representa un haz plano de rectas ó su curva envolvente; y recíprocamente, una curva considerada como envolvente de sus tangentes está representada por una ecuación" (p. 183).

Por último, cuando define las coordenadas polares tangenciales indica que una ecuación $f(p,\alpha)$ representa un haz plano de rectas, o su curva envolvente, y recíprocamente (p. 212).

Vemos, como habíamos señalado, que el concepto de lugar geométrico aparece continuamente a lo largo del texto, y en particular cuando estudia la ecuación de primer grado, como veremos a continuación en el análisis sobre el tratamiento del autor de las ecuaciones de la recta.

3.1. Ecuaciones de recta en sistemas de coordenadas binarias de un punto

Como hemos indicado en el análisis de los sistemas de coordenadas, Vegas estudia las ecuaciones de la recta o el punto en cada uno de los sistemas considerados.
En primer lugar cuando define un sistema general de coordenadas binarias de un punto. En este caso da las ecuaciones de una recta en un sistema de ejes cualesquiera:

> 109. Si se trata de una línea recta, podrá suceder que sea rayo de uno de los haces generadores de la figura plana, ó que no se verifique esta circunstancia.
>
> Si la recta pasa por el punto O_1, vértice de uno de estos haces, todos sus puntos tienen la misma coordenada x, que es la abscisa a de dicha recta en el haz; luego la ecuación que la representa es $x=a$. Si la recta considerada pasa por el punto O_2, su ecuación es $y=b$. Las ecuaciones de los ejes coordenados Y y X son, respectivamente, $x=0$ é $y=0$.
>
> Si la recta de que se trata no pasa por ninguno de los puntos O_1 y O_2, los dos haces que proyectan sus diferentes puntos desde estos dos son perspectivos[69] y tienen doble el rayo O_1O_2 (65); luego entre las coordenadas de dichos puntos existe una relación de la forma
>
> $$Dxy+Ax+By+C=0$$
>
> con la condición $Dmn+Am+Bn+C=0$, que expresa que las abscisas m y n del rayo O_1O_2, común á los dos haces, satisfacen á la misma (66)[70]; por consiguiente, aquella ecuación, unida á esta condición, representa la recta considerada.
>
> Recíprocamente; toda ecuación de primer grado con una variable representa una recta que es rayo de uno de los dos haces generadores de la figura plana; y toda ecuación bilineal $Dxy+Ax+By+C=0$, á la cual satisfagan las abscisas m y n del rayo O_1O_2, común á dichos haces, representa una recta que no pertenece á ninguno de ellos (…) (p.85).

[69] Dos haces son perspectivos cuando lo son de una misma serie rectilínea, y un haz de rectas y una serie rectilínea son perspectivos cuando cada uno de los puntos de la serie está sobre el rayo correspondiente del haz (p. 47). Podríamos decir, por tanto dos haces son perspectivos cuando cortan a una misma recta, y se pueden hacer corresponder los rayos de un haz con los del otro a través del punto de corte común con la recta.
[70] Esa propiedad está demostrada en el punto 66, p. 48 y no la hemos incluido en el análisis por no tratarse de un contenido de Geometría Analítica.

En el punto siguiente estudia el caso particular de un sistema de coordenadas en que la recta O_1O_2, es el rayo límite de los dos haces (C):

> 110. Si las abscisas m, y n del rayo O_1O_2 son infinitas es decir cuando esta recta es el rayo límite de los dos haces, la condición que expresa que dicho rayo es doble en los dos haces proyectivos considerados en el párrafo anterior, se reduce á $D=0$[71], y la ecuación de toda recta que no pase por ninguno de los puntosO_1 y O_2 es de primer grado
>
> $$Ax+By+C=0$$
>
> y contiene, como caso particular, la que encierra una sola de las dos variables, x é y. Luego en todo sistema de coordenadas en el cual sean infinitas 1as abscisas del rayo común á los dos haces generadores de la figura plana de que se trata, una recta cualquiera viene representada por una ecuación de primer grado, y recíprocamente (p. 86).

y generaliza para el caso de ecuaciones homogéneas de grado n, que representan n rectas:

> Toda ecuación homogénea $f(x,y)=0$ de grado n representa n rayos del haz de vértice O; pues, si dividimos por x^n la ecuación dada y designamos por $m_1,m_2,\ldots m_n$ las raíces de la ecuación resultante $f\left(\frac{y}{x}\right)=0$, aquella ecuación es equivalente al conjunto de las
>
> $$y-m_1x=0,\ y-m_2x=0,\ \ldots y-m_nx=0,$$
>
> cada una de las cuales representa una recta que pasa por el origen O de coordenadas (p.86).

Tras esto obtiene la ecuación segmentaria de la recta, que él no nombra:

> 111. Vamos ahora á buscar la representación geométrica de los coeficientes de la ecuación de una recta cuando uno de ellos se ha reducido á la unidad.
>
> Sea la ecuación $Ax+By+1=0$ y determinemos los puntos de intersección de la recta representada por esta ecuación con los ejes coordenados; para esto hagamos, sucesivamente, $x=0$ é $y=0$ en dicha ecuación y tendremos, para determinar las otras coordenadas de los puntos de que se trata, las ecuaciones respectivas $By+1=0$y $Ax+1=0$; de modo que si designamos por b la coordenada y del punto de encuentro de la recta dada con el eje Y, y por a la coordenada x del punto en que una recta encuentra al eje X, se tendrán (…) $A=-\frac{1}{a}$ y $B=-\frac{1}{b}$. Por consiguiente, los coeficientes A y B representan en este caso las inversas de las coordenadas no nulas de los puntos de intersección de la recta considerada con los ejes coordenados, tomadas con signo contrario, y la ecuación de esta recta en función de dichas coordenadas a y b es$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (p. 87).

Y también la explícita, que tampoco nombra, dando la interpretación de sus coeficientes:

---

[71] Dividiendo la expresión $Dmn+Am+Bn+C=0$ entre m, se obtiene, al ser esta infinita $Dn+A=0$. De donde $D=-\frac{A}{n}$. Como $n=\infty$ se tiene que $D=0$.

> Consideremos ahora la ecuación $y=mx+n$ y hagamos sucesivamente $x=0$ y $x=\infty$, y obtendremos $y=n$ y $\frac{y}{x} = m = -\frac{b}{a}$ (p. 87).

En el punto siguiente define las coordenadas homogéneas (C) y da la ecuación de una recta en tales coordenadas:

> En coordenadas homogéneas la ecuación de una recta es $Ax+By+Cz=0$, reduciéndose á $Ax+Cz=0$ cuando dicha recta pasa por el punto O_1; á $By+Cz=0$ cuando pasa por el punto O_2 y á $Ax+By=0$ cuando pasa por el origen O de coordenadas (p. 88).

Y más adelante en el artículo en el que trata las coordenadas cartesiana, afirma, apoyándose en el punto 110, que toda recta en este sistema viene dada por una ecuación de primer grado, y recíprocamente (p. 92); y da la ecuación segmentaria $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, donde a y b son los puntos de corte de la recta con los ejes X e Y respectivamente (p. 92) apoyándose en el punto 111.

Además interpreta los valores de m y n de la ecuación explícita, primero para ejes oblicuos:

> Si la ecuación de una recta se pone bajo la forma $y=mx+n$, el término n es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y y se llama ordenada en el origen; y el coeficiente $m$es la razón de la ordenada á la abscisa de un punto cualquiera de la paralela á dicha recta trazada por el origen (111), de modo que se tiene (fig. 11) $m = \frac{M_1P_1}{OP_1} = \frac{sen\, M_1OP_1}{sen\, OM_1P_1}$, ó bien $m = \frac{sen\, \alpha}{sen\, (\theta - \alpha)}$, designando por α el ángulo que la recta dada forma con el eje X, y por θ el ángulo que forman los ejes. El coeficiente no depende, pues, solamente del ángulo que la recta forma con el eje X y se llama *coeficiente angular*, el cual es el mismo para todas las rectas paralelas á la propuesta (p. 92).

Y después para rectangulares:

> Si los ejes coordenados son perpendiculares entre sí, las coordenadas de un punto se llaman rectangulares, y el coeficiente angular de una recta es la tangente del ángulo que forma con el eje X (p. 92).

Además de estas ecuaciones de la recta da la que el autor denomina *ecuación normal*, denominada en otras obras como la ecuación de la recta en función de la perpendicular a la misma por el origen de coordenadas:

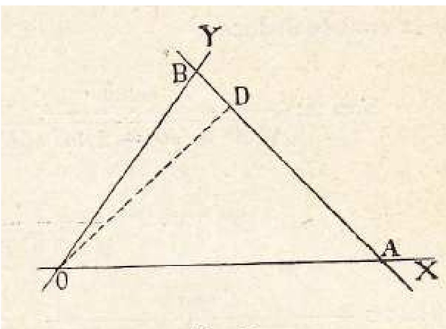


Fig. 12.

> 117. Otra forma interesante de la ecuación de una recta es la llamada *ecuación normal*, ó sea la expresada en función de la distancia p de la misma al origen de coordenadas y de los ángulos a y p que esta distancia forma con los ejes coordenados.
>
> Para obtener esta ecuación observemos que si OD es la distancia de la recta AB al origen de coordenadas (fig. 12), y designamos por a y b los segmentos OA y OB que dicha recta determina sobre los ejes, la ecuación de la recta dada es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; pero los triángulos rectángulos

> *OAD* y *OBD* dan $p=a$ cosα y $p=b$cosβ, de cuyas igualdades y de la ecuación anterior se deduce la pedida
>
> $$xcos\alpha + ycos\beta - p = 0 \text{ (p. 93).}$$

A continuación halla α, β y p en función de A, B y C cuando la ecuación viene dada en la forma $Ax+By+C=0$, obteniendo $\cos\alpha = \pm\frac{A\, sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2ABcos\theta}}$, $\cos\beta = \pm\frac{B\, sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2ABcos\theta}}$, $p = \pm\frac{C\, sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2ABcos\theta}}$, donde θ es el ángulo que forman los ejes coordenados (p. 94), por lo que para el caso de ejes rectangulares obtiene:

$$cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ cos\beta = sen\,\alpha \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ (p. 94).}$$

Además da la interpretación geométrica de una ecuación de una sola variable, y la de una homogénea:

> 120. Una ecuación con una sola variable, representa un sistema de rectas paralelas á uno de los ejes coordenados, y una ecuación homogénea *f(x, y)*=0 representa un sistema de rectas que pasan por el origen de coordenadas (110) (p.97).

Seguidamente define un nuevo sistema de coordenadas en que el eje *X* es la recta del infinito del plano (p. 97) (C), y habla de las ecuaciones de la recta en este sistema. Como en el caso de las coordenadas cartesianas, basándose en el punto 110 indica que toda ecuación de primer grado en dos variables representa una recta e interpreta los coeficientes de la misma cuando viene dada en la formas $Ax+By+1=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ y $y=mx+n$ (p. 99). Así mismo interpreta las ecuaciones en una variable y las homogéneas en dos.

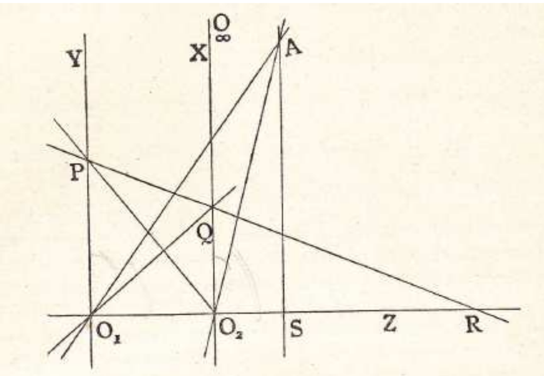


Fig. 15.

Lo mismo hace para el sistema en el que como coordenadas de un punto *A* (fig. 15) se toman las razones de los senos de los ángulos que las rectas O_1Ay O_2A forman con los ejes *Y, Z* y *X, Z* respectivamente, el eje *Z* es la recta límite del sistema y los ejes *X* e *Y* son perpendiculares a este (pp. 100-101) (C).

3.2. Ecuaciones de un punto en coordenadas tangenciales binarias

Para el caso de coordenadas tangenciales binarias hace un estudio de la ecuación del punto análogo al que hizo con la de la recta en coordenadas binarias. En primer lugar lo hace para un sistema general, después para los sistemas en que las abscisas del punto común a las dos series generadoras son infinitas y por último para las coordenadas plückerianas que son un caso particular de estas últimas.

En el caso general llega a la conclusión, al igual que sucedió con la recta, de que toda ecuación bilineal $Duv+Au+Bv+C=0$ que tenga solución $u=m$, $v=n$ (*m* y *n* coordenadas del punto *O* común a las dos series generadoras) representa un punto y recíprocamente. Además si *m* y *n* son infinitas concluye que todo punto viene representado por una ecuación de primer grado $Au+Bv+C=0$, y recíprocamente” (p. 104).
Después da las coordenadas homogéneas de la recta:

> 134. Si se quiere operar con ecuaciones homogéneas, podemos designarlas coordenadas de una recta por las razones $\frac{u}{w}$ y $\frac{v}{w}$en cuyo caso las cantidades u, v y w se llaman *coordenadas homogéneas* de la recta; por lo demás, suponiendo $w=1$en las ecuaciones en coordenadas homogéneas se obtienen las correspondientes en coordenadas binarias (p. 104).

Y en el punto siguiente (135) busca la interpretación geométrica de A y B en la ecuación $Au+Bv+C=0$ de un punto, llegando a la conclusión de que $A=-\frac{1}{a}$ donde a es la coordenada u de la recta que une el punto dado con el vértice O_2del triángulo de referencia "puesto que para obtener las coordenadas de esta recta basta resolver el sistema formado por las $Au+Bv+1=0$ y $v=0$, que representan dichos puntos" (p. 104). Análogamente obtiene que $B=-\frac{1}{b}$, siendo b la coordenada v de la recta determinada por el punto dado y el vértice O_1 del triángulo de referencia. La ecuación del punto en función de las mismas es, por tanto $\frac{u}{a}+\frac{v}{b}=1$ (p. 104).

A continuación da la interpretación de los coeficientes m, n cuando la ecuación del punto es del tipo $v=mu+n$, obteniendo análogamente al caso de las rectas que $n=b$, $m=-\frac{b}{a}$ (p. 105)

Como hemos dicho también da las ecuaciones plückerianas de un punto e interpreta los coeficientes basándose en lo deducido anteriormente para el caso general:

> 141. Todo punto está representado en coordenadas plückerianas por una ecuación de primer grado, (…).
>
> Puesta la ecuación de un punto M (fig. 16) en la forma $Au+Bv+1=0$ las cantidades A y B son precisamente los segmentos OP y OQ que las paralelas MP y MQ, á cada uno de los ejes V y U, determina en el otro (135); y cuando dicha ecuación se pone en la forma $v=mu+n$, el término n es igual á $-\frac{1}{B}$, y el $m=-\frac{A}{B}$ es también la razón de las coordenadas de la recta MO que une el punto dado con el O; pero el triángulo MPO permite establecer la relación (…) $m=-\frac{sen\,\beta}{sen\alpha}$, designando por α y β los ángulos que dicha recta OM forma con los ejes U y V de referencia. Cuando estos ejes son perpendiculares entre sí los ángulos α y β son complementarios, y el citado coeficiente m está determinado por la ecuación$m=-cot\alpha=-tg\beta$ (p. 109).

Así mismo da las ecuaciones del punto en los otros sistemas de referencia particulares. En todos ellos indica que todo punto viene representado por una ecuación de primer grado $Au+Bv+C=0$ y a continuación da la interpretación geométrica de los coeficientes tanto de esta ecuación como cuando el punto viene dado como $v=mu+n$ (p. 112-115).

3.3. Ecuaciones de la recta/ punto en coordenadas ternarias

En este caso demuestra para las coordenadas ternarias generales que la ecuación de una recta es una ecuación homogénea de primer grado y recíprocamente (p. 177), y da las ecuaciones de la misma para cada uno de los sistemas particulares.

En el caso de coordenadas trilineales nos dice una recta viene representada por una ecuación de primer grado $lX+mY+nZ=0$, que es completa si dicha recta no pasa por ninguno de los vértices del triángulo de referencia (p. 180).

A continuación da la interpretación geométrica de los coeficientes de esa ecuación, obteniendo la relación $\frac{l}{p\,sen\,A}=\frac{m}{q\,sen\,B}=\frac{n}{r\,sen\,C}$, o bien $\frac{l}{pa}=\frac{m}{qb}=\frac{n}{rc}$, donde *A, B, C* son los vértices del triángulo de referencia, y por tanto *a, b, c* sus lados y *p=AG, q=BK* y *r=CF* las distancias de la recta dada a los vértices de dicho triángulo contadas en una misma dirección (pp. 180-181).

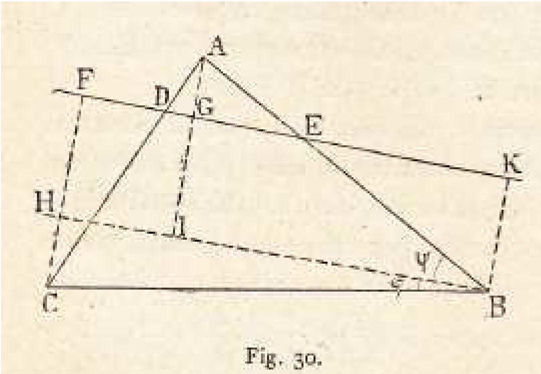


Fig. 30.

Utilizando la proporción anterior obtiene la ecuación de la recta en función de las distancias *p, q, r, apX+bqY+crZ=0* y de esta deduce la dada en función de las alturas del triángulo de referencia $\frac{p}{h_1}X+\frac{q}{h_2}Y+\frac{r}{h_3}Z=0$(p. 181).

Da la ecuación de la recta del infinito, que es *aX+bY+cZ=0*, pues “si la recta dada se aleja indefinidamente, las razones $\frac{p}{r}$ y $\frac{q}{r}$ tienden hacia la unidad positiva”(p. 181).

Por último da la ecuación de una recta en coordenadas baricéntricas, *pX+qY+rZ=0*, y la de la recta del infinito, que en este caso es *X+Y+Z=0* (p. 181).

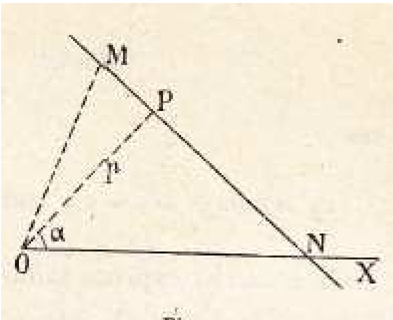


Fig. 35.

En el caso de los sistemas de coordenadas tangenciales ternarias da la ecuación de un punto y la interpretación geométrica de los coeficientes de tal ecuación en el caso particular de coordenadas tangenciales ternarias en que las bases de las series generadoras son paralelas entre sí (p. 185). Obtiene los mismos resultados que acabamos de exponer para la recta, sin más que sustituir *X,Y, Z* por *U, V, W*, y una ecuación más, en función de las áreas, S_1, S_2, S_3, de los triángulos *MBC, MAC* y *MAB*. Dicha ecuación es $S_1U+S_2V+S_3W=0$ por ser los productos *ap, bq* y *cr* los duplos de dichas áreas (p. 185).

Concluye dando la condición para que un punto esté en la recta del infinito, que no es más que *l+m+n=0* (p. 186).

3.4. Ecuaciones de la recta/ punto en coordenadas polares

En cuanto a los sistemas de coordenadas no rectilíneas, encontramos la ecuación de la recta en coordenadas polares:

> Si un medio rayo parte del polo, todos sus puntos tienen la misma coordenada angular y, por tanto, dicho medio rayo viene representado por la ecuación *ω=k*.
>
> Si consideramos una recta *MN* (fig. 35) que no pasa por polo *O,* designamos por *p* la distancia *OP* de este punto á dicha recta y por *α* el ángulo que esta distancia forma con el eje polar, el triángulo rectángulo *MOP*, determinado por los puntos *O, P* y uno cualquiera *M* de la recta propuesta, permite establecer la relación
>
> *OP=OM cosMOP,*
>
> ó sea, *p=ρ cos(ω-α)*, que es la ecuación que representa dicha recta *MN* (p. 207).

Y finalmente la ecuación de un punto en coordenadas polares tangenciales:

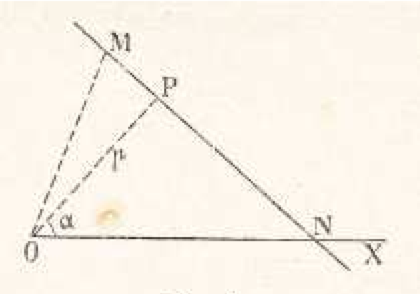


Fig. 38.

263. Vamos, ahora, á determinar la ecuación de un punto propiamente tal *M*. Para esto, si *MN* (fig. 38) es una recta cualquiera que pasa por dicho punto, del triángulo *MOP* se deduce la relación

MOP=OMcosOP

y si designamos por ρ y ω las coordenadas polares de dicho punto, coordenadas que son constantes, la ecuación anterior se transforma en la$p = \rho\cos(\omega - \alpha)$, que representa el punto M considerado (p. 212).

4. Contenidos de Geometría Proyectiva

Terminamos el análisis de la estructura conceptual incluyendo un breve resumen de los contenidos de Geometría Proyectiva que hemos encontrado en la parte analizada, y que se han utilizado de forma directa o indirecta para definir conceptos propios de la Geometría Analítica como los sistemas de coordenadas.

En el artículo II del capítulo inicial, denominado *Preliminares,* trata de la razón doble o anharmónica de una figura simple rectilínea. En él estudia los valores de la razón doble de cuatro puntos cuando se permutan sus posiciones y finalmente define *figuras simples impropias,* y las clasifica en figuras de primera, segunda o tercera especie (pp. 21-23).

En el siguiente artículo de este capítulo trata las figuras harmónicas (pp. 24-29).

En el capítulo II define *razón doble de un haz* de cuatro rayos paralelos y haz de rayos paralelos *harmónico*, da el valor de la razón doble en función de las abscisas de los rayos y la relación entre las abscisas de cuatro rayos harmónicamente separados (pp. 37-38).

Más adelante, en el mismo artículo toma cuatro rayos *a, b, c, d* de un haz (de rayos no paralelos) y define *razón doble de un haz* o de la *figura simple abcd*, y en los siguientes puntos da el valor de la razón doble en función de las abscisas de los rayos, la relación entre las abscisas de cuatro rayos harmónicamente separados y define *eje harmónico* de un sistema de rayos (pp. 42-43).

El capítulo III (pp. 45-60) lo dedica a las figuras proyectivas de primera categoría: comienza definiéndolas, y demuestra varios resultados relativos a las propiedades que cumplen los elementos homólogos de dos figuras tales. Define también *series proyectivas semejantes* y demuestra varios resultados referentes a ellas, y el capítulo IV (pp. 60-82) lo dedica a las figuras de primera categoría en involución.

El Capítulo V de la sección II lo dedica a la ley de correlación y su aplicación a las figuras de segunda categoría. Comienza el capítulo definiendo dicha ley:

> 176. (…) el conjunto de dos números puede representar un punto ó una recta de una figura plana, y también una recta ó un plano en una radiación; y que una ecuación con dos variables puede representar ya una línea plana ó un haz plano de rectas, ya una superficie cónica ó un haz radiado de planos según que se consideren

> las dos variables como representando coordenadas de puntos ó de rectas de un plano, ó bien, coordenadas de rectas ó de planos de una radiación.
> De modo que toda cuestión analítica sobre ecuaciones con dos variables es susceptible de cuatro interpretaciones geométricas, dando lugar á cuatro proposiciones, dos de las cuales se refieren á figuras planas y las otras dos á figuras radiadas.
> Así, el problema de Álgebra, que tiene por objeto resolver el sistema formado por dos ecuaciones con dos variables, da lugar á los siguientes problemas geométricos:
>
> α) Determinar los puntos comunes á dos líneas situadas en un plano;
> β) Determinar los rayos comunes á dos haces de rectas situados en un plano;
> γ) Determinar los planos comunes á dos haces radiados que tienen el mismo vértice;
> δ) Determinar las generatrices comunes á dos superficies cónicas de un mismo vértice;
>
> de los cuales los γ y δ pertenecientes á figuras radiadas, se deducen de los α y β pertenecientes á figuras planas sin más que sustituir los puntos, rectas, líneas y haces de rectas de la figura plana por planos, rectas, haces radiados de planos y superficies cónicas. Pues bien, las proposiciones obtenidas de este modo se llaman *correlativas* y esto constituye la *ley de correlación* en su aspecto más general; pero además de esta correlación existe otra en el plano, en la cual aparecen contrapuestos los puntos y las rectas, y otra en la radiación en la que se contraponen los planos y las rectas (pp. 138-139).

y después resuelve una serie de problemas sujetos a esta ley, que se encuentran recogidos en el apartado de fenomenología.

4.11.3.2. Sistemas de representación

En esta obra solo encontramos tres tipos de sistemas de representación: el lenguaje natural, que aquí se manifiesta a través de definiciones, enunciados y resultados; el lenguaje simbólico y los gráficos en los que se apoya para hacer los razonamientos.

Encontramos muchas definiciones en el texto, de las cuales citaremos algunas, como ejemplo. Así en el capítulo *Preliminares* define conceptos básicos utilizados posteriormente tales como serie rectilínea, haz de recta, vértice, etc; así como la Geometría Analítica como parte de la Geometría (D). También define sistemas de coordenadas, abscisa, ordenada y coordenadas de un punto o de una recta, dependiendo del sistema considerado (C). Además define otros conceptos como punto límite de un sistema, razón doble de de una figura simple o la ley de correlación, entre otros (C, GP).

Los razonamientos de los diferentes resultados, bien sean problemas, la obtención de las ecuaciones de una recta o de las fórmulas para la transformación de unos sistemas de coordenadas a otros, por ejemplo, los hace de forma literal, aunque se apoya en gráficos y utiliza leguaje simbólico (C, PR, LG).

En cuanto los enunciados, los encontramos en los problemas, no enuncia teoremas (PR).

Se hace uso del lenguaje simbólico continuamente, al utilizar en todo momento el Álgebra. Nos encontramos diferentes expresiones de la ecuación de la recta, de la distancia entre dos puntos y las fórmulas de cambio de coordenadas, entre otras muchas

(ER, PR, C). Denota la expresión de un lugar geométrico por $f(x) = 0$ o $f(x, y) = 0$ (LG); y utiliza el cálculo con determinantes, y por tanto la notación que lleva implícito (ER).

Los gráficos, que utiliza constantemente para apoyar sus razonamientos, están insertados en el texto. Se trata de dibujos relativos a cada resultado, no aparecen gráficas de curvas, por ejemplo, ni otro tipo de gráfica.

4.11.3.3. Fenomenología

Todos los problemas planteados se inscriben dentro de un contexto matemático, y en particular geométrico (PR).

Podemos distinguir cinco tipos de problemas: por una parte están aquellos en los que se trabaja con concepto propios de la Geometría Proyectiva (PRDT), en segundo lugar aquellos en los que se obtienen resultados generales como la fórmula que da la distancia entre un punto y una recta, o el ángulo entre dos rectas(PRI; PRD; PRPP); en tercer lugar nos encontramos problemas conducentes a obtener la ecuación de una recta o un punto, con diferentes datos; y por último algunos problemas, los menos, de aplicación de la Geometría Analítica, como por ejemplo calcular el área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices (PRDT). Además Vegas propone a lo largo del texto ejercicios y problemas para ser resueltos por los alumnos.

1. **Para introducir conceptos de la Geometría Proyectiva**

Recogemos en este apartado problemas en los que se trabaja con conceptos propios de la Geometría proyectiva, como el cálculo de la razón doble de una figura simple o problemas con elementos homólogos. Aunque no son problemas de Geometría Analítica, ni se utiliza la misma en su resolución los recogemos por ser una parte importante de la parte del texto que hemos analizado.

Algunos problemas vienen planteados como tal, pero otros simplemente vienen enunciados como cuestiones generales, siendo un punto más de la teoría. Incluimos los enunciados de unos y otros tal y como los hallamos en el texto.

> 182. Dados cuatro elementos *A, B, C* y *D* de una figura de primera categoría contenida en una de segunda, determinar la razón doble λ de la figura simple *ABCD* (p. 143).

Además resuelve los siguientes problemas:

PROBLEMA I.—Dados dos pares de puntos homólogos a - a' y b - b' de dos series rectilíneas perspectivas, hallar el punto c' de una de ellas homólogo de otro cualquiera c tomado en la otra.

PROBLEMA II.—Dados dos pares de rayos homólogos de dos haces de rectas de un plano perspectivos entre sí, hallar el rayo de uno de ellos homólogo de otro cualquiera tomado en el segundo.

(p. 146)

PROBLEMA I.—Construir dos series proyectivas de bases distintas situadas en un plano dados tres pares $A - A'$, $B - B'$ y $C - C'$ de puntos homólogos.

PROBLEMA II.—Construir pares de rectas homólogas de dos haces proyectivos situados en un plano con distintos vértices dados tres pares de rayos homólogos.

(p. 147)

Fig. 25.

PROBLEMA III.—Dados tres pares de elementos correspondientes de una serie y un haz de rectas proyectivos entre sí, determinar otros pares de elementos homólogos.

(p. 148)

PROBLEMA IV.—Construir dos series proyectivas superpuestas, dados tres pares de puntos homólogos de las mismas.

Este problema se reduce al anterior, proyectando una de las dos series desde un punto exterior á su base.

PROBLEMA V.—Construir dos haces de la misma base, dados tres pares de rectas homólogas de los mismos.

Este problema se reduce al anterior, cortando uno de los dos haces por una recta que no pase por su vértice.

(p. 148)

PROBLEMA VI.—Dados tres elementos A, B y C de una figura simple $ABCD$, determinar el cuarto elemento D con la condición de que la razón doble de esta figura sea dada é igual á $\frac{m}{n}$.

(p. 148)

PROBLEMA.—Dados tres elementos A, B y C de una figura de primera categoría, determinar el cuarto elemento D harmónicamente separado del B por los A y C.

(p. 150)

249. Hallar la razón doble de la figura simple $M_1M_2M_3M_4$de primer orden perteneciente á una figura plana ó radiada (p. 200).

PROBLEMAS RESUELTOS

Incluimos como ejemplo solamente la solución del problema de la p. 147 como ejemplo, por no tratar contenidos de Geometría Analítica.

PROBLEMA I.—Construir dos series proyectivas de bases distintas situadas en un plano dados tres pares $A - A'$, $B - B'$ y $C - C'$ de puntos homólogos.

PROBLEMA II.—Construir pares de rectas homólogas de dos haces proyectivos situados en un plano con distintos vértices dados tres pares de rayos homólogos.

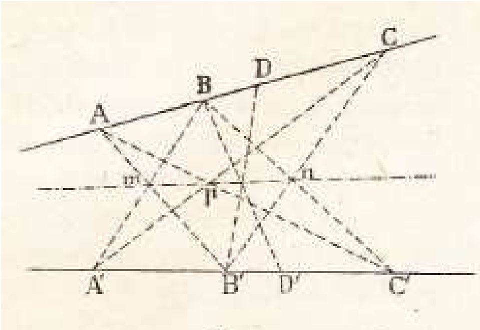


Fig. 25.

Los puntos *m* y *n* de intersección de los dos pares de rectas *AB'-BA'* y *BC'-CB'*(fig. 25) determinan el eje proyectivo de las dos series; y, para determinar el punto homólogo de uno *D* tomado en la serie *ABC…*, basta hallar el punto *p*de encuentro del eje proyectivo con la recta *B'D,* por ejemplo, y el punto *D'* en donde encuentra á la recta *A'B'* á la *pB* que une los puntos *p* y B, es el pedido (p.148).

2. Para obtener fórmulas generales

En este apartado recogemos las fórmulas para el cálculo de la distancia entre dos puntos, o de un punto a una recta que el autor calcula en diferentes coordenadas, así como las que dan el ángulo que forman dos rectas, de la que deduce las condiciones de paralelismo y perpendicularidad. También incluimos los problemas relativos al cálculo de las ecuaciones de la recta/punto dados diferentes datos. Como en el caso anterior unos vienen enunciados como problemas y otros simplemente dentro de uno de los puntos de la teoría. Agruparemos los problemas en tres grupos, problemas de distancias, el de calcular el ángulo que forman dos rectas y ecuaciones de la recta. Indicamos los problemas que resuelve en cada caso, aunque solo mostramos el estudio de las distancias ya que con los ángulos procede de forma similar.

En el caso de las distancias calcula la distancia entre dos puntos determinados sobre una recta (p. 17), la distancia entre dos puntos (p.158) y de un punto a una recta (p. 162) en coordenadas cartesianas. La distancia entre dos puntos y de un punto a una recta en coordenadas plückerianas (p. 165). La distancia de un punto a una recta en coordenadas tangenciales ternarias (p. 203). La distancia entre dos puntos y de un punto a una recta en polares (p.209) y la distancia de un punto a una recta en coordenadas tripolares (p.219).

En cuanto a los ángulos obtiene la tangente del ángulo que forman dos rayos de un haz en función de sus abscisas (p.39), el ángulo que forma una recta con el eje de abscisas (p.159) y el que forman dos rectas en coordenadas cartesianas oblicuas y rectangulares (p. 160). También halla el ángulo que forman dos rectas en coordenadas plückerianas (p. 165) y en coordenadas trilineales (p. 201).

En el caso de las rectas/ punto calcula las ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos/ el punto en el concurren dos rectas en diferentes sistemas de coordenadas, y la ecuación de la recta/punto conociendo las cantidades *l, m* y *n* proporcionales á sus coordenadas en coordenadas ternarias.

Cálculo de distancias

En primer lugar, tras explicar la determinación de un punto sobre una recta (C) da la expresión de la distancia entre dos puntos:

26. Si *x* y *x'* son las abscisas de dos punto *M* y *M'* el segmento *M'M* viene evidentemente dado en valor y signo por la igualdad

$$M'M=M'O+OM=OM-OM'=x-x'$$

> es decir, que dicho segmento tiene por valor la diferencia entre la abscisa del extremo *M* del mismo y la de su origen *M'* (p. 17).

Dedica todo un capítulo al estudio de los ángulos y las distancias en coordenadas binarias rectilíneas, tanto de punto como de rectas. Comienza estudiando las distancias en coordenadas de puntos, en particular en cartesianas:

> 194. Hallar la distancia entre dos puntos en coordenadas cartesianas.

Para calcularla utiliza el teorema del coseno (aunque él no lo nombra) obteniendo la fórmula conocida:

$$AB = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y')cos\theta}$$

siendo θ el ángulo que forman los ejes (p. 158).

Considera el caso particular en que los ejes son perpendiculares en cuyo caso la fórmula anterior se reduce a $AB = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$ (p. 158).

En el caso de la distancia de un punto a una recta también la calcula en cartesianas:

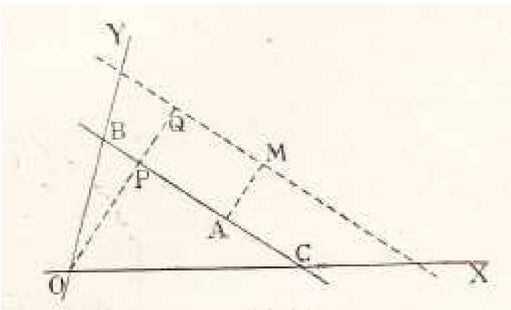


Fig. 28.

> 20l. Hallar la distancia del punto *M*, cuyas coordenadas son *x'* é *y'* á la recta *BC* representada por la ecuación *Ax+By+C=0*.
>
> Si por el punto dado *M* trazamos la recta *MQ* paralela á la dada (fig. 28), la distancia *AM* entre estas dos rectas, ó sea la distancia del punto dado á la recta dada es igual á la diferencia de las distancias del origen de coordenadas á aquellas dos rectas, es decir, que se tiene la igualdad
>
> *AM=OQ-OP.*
>
> Pero la ecuación de la recta *MQ*es (199) $A(x - x') + B(y - y') = 0$, ó sea,
>
> $Ax + By - (Ax' + By') = 0$, y las distancias *OP* y *OQ* están dadas por las igualdades$OP = -\frac{Csen\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2ABcos\theta}}$ y $OQ = \frac{(Ax'+By')sen\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2ABcos\theta}}$ luego la diferencia pedida es
>
> $AM = \frac{(Ax'+By'+C)sen\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2ABcos\theta}}$ (p. 162).

Seguidamente estudia el caso en que la ecuación viene dada por su ecuación normal $xcos\alpha + ycos\beta - p = 0$, en cuyo caso la distancia AM viene dada por (p. 162):

$$AM = \frac{(x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p) \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta}} = x'\cos\alpha + y'\cos\beta - p.$$

Tras plantear algunos problemas de aplicación de estas fórmulas, recogidos en el punto 4 de este apartado hace la observación de que las distancias entre dos puntos y la de un punto a una recta tienen valores independientes de los ejes coordenados, "por lo tanto sus expresiones no varían cuando se efectúa una transformación de coordenadas" (p. 164), y utiliza esto explicando que para resolver los problemas de distancias en los demás sistemas de coordenadas de puntos tratados en capítulos anteriores lo más sencillo es pasar al sistema cartesiano y resolver en ese sistema el problema que se proponga (p. 164).

A continuación dedica un artículo al cálculo de distancias y ángulos en coordenadas tangenciales, pero dicho artículo consta de un solo punto pues comienza diciendo que para resolver cualquier problema en estas coordenadas el procedimiento más sencillo consiste en pasar a uno de los sistemas de puntos, preferentemente el cartesiano, y resolver el problema correspondiente en dicho sistema. Pone como ejemplo el siguiente problema:

> Problema I.-En coordenadas plückerianas, determinar: 1ºla distancia entre dos puntos; 2º.la distancia de un punto á una recta; (…)
>
> 1º. Si $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ y $a_2u + b_2v + c_2 = 0$ son las ecuaciones de los dos puntos dados, sus coordenadas cartesianas son (142),
>
> $x_1 = \frac{a_1}{c_1}, y_1 = \frac{b_1}{c_1}$ y $x_2 = \frac{a_2}{c_2}, y_2 = \frac{b_2}{c_2}$; luego la distancia D entre estos puntos es
>
> $$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta}$$
> $$= \frac{1}{c_1c_2}\sqrt{(a_1c_2 - c_1a_2)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + 2(a_1c_2 - c_1a_2)(b_1c_2 - c_1b_2)\cos\theta}\,.$$
>
> 2º Si $a_1u + b_1v + c_1 = 0$es la ecuación de un punto, y *(u_1, v_1)* son las coordenadas de una recta, la ecuación cartesiana de esta recta es
>
> $u_1x + v_1y + 1 = 0$y las coordenadas cartesianas de dicho punto son $\frac{a_1}{c_1}$ y $\frac{b_1}{c_1}$; luego la distancia *D* entre este punto y aquella recta es
>
> $$D = \frac{(a_1u_1 + b_1v_1 + c_1)\,\mathrm{sen}\,\theta}{c_1\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 2u_1v_1\cos\theta}}.$$
> (p. 165)

De forma análoga obra cuando se trata de problemas relativos a ángulos y distancias en coordenadas trilineales. Comienza diciendo que una manera sencilla de resolver estos problemas es pasar al sistema cartesiano y resolver en este el problema en cuestión, poniendo como ejemplo la distancia de un punto a una recta:

> (…) vamos á determinar la distancia *p'* de un punto á una recta.
>
> Sean X_1 , Y_1, y Z_1 las coordenadas del punto y $lX+mY+nZ=0$ la ecuación de la recta, la ecuación cartesiana de ésta es $A_1x+B_1y+C_1=0$, viniendo dados los coeficientes A_1, B_1 y C_1, por las igualdades$A_1 = lcos\alpha + mcos\alpha_1 + ncos\alpha_2$, $B_1 = lsen\alpha + msen\alpha_1 + nsen\alpha_2$y $C_1 = -(lp + mp_1 + np_2)$, en virtud de las fórmulas$X = xcos\alpha + ysen\alpha - p$, $Y = xcos\alpha_1 + ysen\alpha_1 - p_1$,y $Z = xcos\alpha_2 + ysen\alpha_2 - p_2$para pasar del sistema de coordenadas trilineales á uno cartesiano

rectangular (227). Además, si x_1é y_1 son las coordenadas cartesianas del punto dado, se tienen las igualdades $X_1 = x_1 cos\alpha + y_1 sen\alpha - p$, $Y_1 = x_1 cos\alpha_1 + y_1 sen\alpha_1 - p_1$y $Z_2 = x_2 cos\alpha_2 + y_2 sen\alpha_2 - p_2$, y, por tanto, la distancia pedida tiene por valor (201) $p' = \frac{A_1x_1+B_1y_1+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$, y sustituyendo en esta igualdad las cantidades A_1, B_1 y C_1 por sus valores anteriores, se obtiene

$$p' = \frac{lX_1 + mY_1 + nZ_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2lm\cos C - 2ln\cos B - 2mn\cos A}} = \frac{lX_1 + mY_1 + nZ_1}{\{l, m, n\}}$$

representando el denominador por el símbolo $\{l,m,n\}$ (pp. 200-201).

En el caso de coordenadas tangenciales ternarias explica que uno de los procedimientos más sencillos consiste en pasar de este sistema al trilineal. En el caso de distancias solo calcula la distancia de un punto a una recta:

253. (…) PROBLEMA I.- Hallar la distancia de un punto a una recta.

Si U_1, V_1y W_1son las coordenadas de la recta dada y $lU+mV+nW=0$ la ecuación del punto dado, la ecuación trilineal de dicha recta es (234) $aU_1X+b\ V_1Y+c\ W_1Z=0$, y las coordenadas trilineales X_1, Y_1 y Z_1,del punto están determinadas (233) por las relaciones

$$\frac{aX_1}{l} = \frac{bY_1}{m} = \frac{cZ_1}{n} = \frac{2S}{l+m+n};$$

por tanto, la distancia p' que se busca está dada (250) por la igualdad

$$p' = \frac{2S(lU_1 + mV_1 + nW_1)}{(l+m+n)\{aU_1, bV_1, cW_1\}}.$$

(p. 203)

En cuanto a las coordenadas polares sí calcula la expresión de la distancia entre dos puntos y la de un punto a una recta:

Problema IV.- Hallar la distancia entre dos puntos cuyas coordenadas son ρ', ω' y ρ'', ω''.

Utilizando el teorema del coseno, que él no llama así, obtiene que el cuadrado de la distancia entre los puntos M y M', viene dada por

$$\overline{MM'^2} = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\omega - \omega')\text{(p. 209).}$$

Problema V.- Hallar la distancia de un punto á una recta.

Para calcularla toma la paralela a esta recta por el punto dado, ρ', ω' obteniendo como distancia$p_1 = p' - p = \rho'\cos(\omega' - \alpha) - p$ (p. 209).

En el caso de coordenadas polares tangenciales, comienza haciendo la observación de que tanto el punto como la recta vienen representados por la ecuación

$$\rho\cos(\omega - \alpha) = p,$$

"sin más diferencia que ser variables las p y α cuando se trata de un punto en coordenadas tangenciales, y las ρ y ω cuando representa una recta en coordenadas de puntos", (p. 213), y utilizando este resultado llega a la conclusión de que las soluciones a los problemas de calcular la distancia entre dos puntos, o de un punto a una recta en coordenadas polares tangenciales son las mismas que las obtenidas para las polares (pp. 213-214).

Cuando se trata de coordenadas tripolares calcula la distancia de un punto a una recta:

> PROBLEMA.- Hallar la distancia de un punto á una recta.
>
> Si $lp+mq+nr=0$ es la ecuación del punto, y p_1, q_1 y $r_1$son las coordenadas de la recta, la distancia *p'* que se busca está dada (253, Problema I), por la igualdad (…)
>
> $p' = \frac{lp_1+mq_1+nr_1}{l+m+n}$ (…) (p. 219).

Ecuaciones de la recta o del punto

En este apartado recogemos todos los problemas relativos al cálculo de ecuaciones de la recta (o el punto en caso de tangenciales) conocidos diferentes datos.

> **177.** α) Hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas de una figura plana;
>
> β) Hallar las coordenadas de la recta que pasa por dos puntos de una figura plana.
>
> γ) Hallar las coordenadas del plano determinado por dos rectas de una radiación
>
> δ) Hallar las coordenadas de la recta de intersección de dos planos de una radiación.
>
> (p. 139)
>
> **178.** Hallar la ecuación de una recta que pasa por uno ó por dos puntos dados por sus coordenadas.
>
> Hallar la ecuación de un punto situado en una ó en dos rectas dadas por sus coordenadas.
>
> (p. 140)
>
> **179.** Hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y por el de intersección de otras dos.
>
> Hallar la ecuación del punto de intersección de una recta y de otra determinada por dos puntos.
>
> (p. 141)
>
> 199. Dadas las coordenadas (*x',y'*) de un punto y la ecuación $y=mx+n$ de una recta, determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y sea paralela ó perpendicular a la recta dada (p. 160).
>
> 226. PROBLEMA.-Construir un punto conociendo las cantidades *l, m* y *n* proporcionales á sus coordenadas[72] (p.179).

[72]En coordenadas trilineales

232. PROBLEMA.-Construir una recta conociendo cantidades *l, m* y *n* proporcionales á sus coordenadas[73] (p. 185).

245.

Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos en coordenadas trilineales.

Hallar la ecuación del punto de intersección de dos rectas en coordenadas tangenciales.

(p. 197)

Del problema anterior deduce (p. 198):

Si X_1, Y_1, Z_1 y X_2, Y_2, Z_2 son las coordenadas de dos puntos de una figura plana, las de otro punto cualquiera de la recta que une aquéllos dos son

$$\frac{X_1-\lambda X_2}{1-\lambda},\ \frac{Y_1-\lambda Y_2}{1-\lambda},\ \frac{Z_1-\lambda Z_2}{1-\lambda}.$$

Si U_1, V_1, W_1 y U_2, V_2, W_2 son las coordenadas de dos rectas de una figura plana, las de otra recta cualquiera que pasa por su punto de intersección son

$$\frac{U_1-\lambda U_2}{1-\lambda},\ \frac{V_1-\lambda V_2}{1-\lambda},\ \frac{W_1-\lambda W_2}{1-\lambda}.$$

260. PROBLEMA I.- Hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto[74] (p. 207).

PROBLEMA II: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos cuyas coordenadas son ρ', ω' y ρ'', ω'' (p. 207).

PROBLEMA III.- Hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas[75] (p. 208).

263. PROBLEMA I.- Hallar las coordenadas de la recta que pasa por dos puntos[76] (p. 212).

PROBLEMA II: Hallar la ecuación del punto intersección de dos rectas, cuyas coordenadas son p', α' y p'', α'' (p. 213).

Obsérvese que los problemas 260II y 263II son correlativos, así como los 260III y 263I.

PROBLEMAS RESUELTOS

Incluimos la solución del problema 178, ejemplo de problema *sujeto a la Ley de correlación* en coordenadas cartesianas, como indica el autor; el 232 ejemplo de obtención de una recta en coordenadas tangenciales ternarias; el 245 problema sujeto a la ley de correlación en coordenadas trilineales; así como el 260II y el 263II, que están en coordenadas polares. Obsérvese que en este caso la solución dada para esos problemas no es la misma aunque son correlativos.

[73] En coordenadas tangenciales ternarias
[74] En coordenadas polares
[75] En coordenadas polares
[76] En coordenadas polares tangenciales

178. Hallar la ecuación de una recta que pasa por uno ó por dos puntos dados por sus coordenadas.	Hallar la ecuación de un punto situado en una ó en dos rectas dadas por sus coordenadas.

Para resolver el problema de la izquierda, designemos por x' é y', las coordenadas de uno de los puntos dados, y sea $y=mx+n$, la ecuación general de una recta, cuyos coeficientes vamos a determinar las condiciones propuestas. Como esta recta ha de pasar por el punto dado tiene la condición $y'=mx'+n$ que permite eliminar uno de los dos coeficientes, el n por ejemplo, entre ella y la ecuación general con lo que se obtiene la $y-y'=m(x-x')$ que representa, para cada valor del coeficiente m, una recta que contiene el primer punto dado.

Si designamos por x'' é y'' las coordenadas del segundo punto dado, se tiene la condición $y''-y'=m(x''-x')$ que expresa que la rectaen cuestión pasa por él, y de ella se deduce $m=\frac{y''-y'}{x''-x'}$; por tanto, la ecuación de la recta que une los dos puntos dados es $y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$.

Las ecuaciones que resuelven el problema correlativo son

$$v-v'=m(u-u') \quad \text{y} \quad v-v'=\frac{v''-v'}{u''-u'}(u-u');$$

y éstas mismas y las anteriores resuelven los problemas correspondientes en las figuras radiadas.

Si suponemos que las coordenadas empleadas para resolver el problema de la izquierda son cartesianas, obtenemos para coeficiente angular de la recta que pasa por dos puntos dados, la razón de la diferencia de las coordenadas de estos puntos á la diferencia de sus abscisas (p. 140).

PROBLEMA.-Construir una recta conociendo cantidades *l, m* y *n* proporcionales á sus coordenadas.

Los puntos de las series rectilíneas generadoras de la figura plana, cuyas abscisas respectivas son l, m y n forman un triángulo cuyos lados cortan á los correspondientes del fundamental en tres puntos de la recta pedida (p. 185).

Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos en coordenadas trilineales.	Hallar la ecuación del punto de intersección de dos rectas en coordenadas tangenciales.

X_1, Y_1, Z_1y X_2, Y_2, Z_2 son las coordenadas de los dos puntos dados, y designamos por $lX+mY+nZ=0$la ecuación de la recta que determinan, como esta ecuación debe quedar satisfecha por aquellas coordenadas, los coeficientes deben verificar las condiciones $lX_1+mY_1+nZ_1=0$y $lX_2+mY_2+nZ_2=0$ eliminando, pues, l, my n, entre estas igualdades y aquella ecuación, se obtiene la siguiente

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

que resuelve el problema de la izquierda.

La ecuación pedida en el problema de la derecha es

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0(\dots)$$

Las ecuaciones anteriores expresan: la primera, la condición para que tres puntos de un plano estén en línea recta, ó para que tres rectas de una radiación estén en un plano, y la segunda, la condición para que tres rectas de un plano pasen por un punto, ó para que tres planos de una radiación pasen por una recta (pp. 197-198).

PROBLEMA II: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos cuyas coordenadas son ρ', ω' y ρ'', ω''.

Colocada la ecuación general de una recta bajo la forma

$$cos\omega cos\alpha + sen\omega sen\alpha - \frac{p}{\rho} = 0$$

las condiciones que expresan que los puntos dados están en dicha recta son

$$cos\omega' cos\alpha + sen\omega' sen\alpha - \frac{p}{\rho'} = 0$$

$$cos\omega'' cos\alpha + sen\omega'' sen\alpha - \frac{p}{\rho''} = 0;$$

y eliminando entre estas dos relaciones y la ecuación anterior las cantidades

$cos\alpha$, $sen\alpha$ y p se obtiene, para representar la recta pedida, la ecuación

$$\begin{vmatrix} \cos\omega & sen\,\omega & \frac{1}{\rho} \\ \cos\omega' & sen\,\omega' & \frac{1}{\rho'} \\ \cos\omega'' & sen\,\omega'' & \frac{1}{\rho''} \end{vmatrix} = 0,$$

ó sea

$\rho\rho' sen(\omega - \omega') + \rho'\rho'' sen(\omega' - \omega'') + \rho''\rho sen(\omega'' - \omega) = 0$ (p. 208).

Esta ecuación expresa también que los tres puntos, cuyas coordenadas son ρ y ω, ρ' y ω', ρ'' y ω'', están en línea recta (p. 208).

PROBLEMA II: Hallar la ecuación del punto intersección de dos rectas, cuyas coordenadas son p', α' y p'', α'' (p. 213)

Si $\rho\cos(\omega - \alpha) = p$es la ecuación del punto que se busca, y la colocamos en la forma $\rho cos\omega cos\alpha + \rho sen\omega sen\alpha - p = 0$ la resultante de eliminar las cantidades $\rho cos\omega$ y $\rho sen\omega$ entre esta ecuación y las $\rho cos\omega cos\alpha' + \rho sen\omega sen\alpha' - p' = 0$ y$\rho cos\omega cos\alpha'' + \rho sen\omega sen\alpha'' - p'' = 0$que expresan que dicho punto está en las dos rectas dadas, se encuentra la ecuación pedida

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & p \\ \cos\alpha' & sen\alpha' & p' \\ \cos\alpha'' & sen\alpha'' & p'' \end{vmatrix} = 0,$$

ó sea, $psen(\alpha'' - \alpha') + p'sen(\alpha - \alpha'') + p''sen(\alpha' - \alpha) = 0.$

Esta ecuación expresa también que las tres rectas, cuyas coordenadas son p y α ,

p' y α', p'' y α'', son concurrentes (p. 213).

3. Para mostrar las aplicaciones de la Geometría Analítica

En este apartado veremos algunos problemas de aplicación de las fórmulas de distancias y ángulos que el autor recoge en el texto, así como otros problemas clásicos de la Geometría resueltos utilizando Geometría Analítica, como el cálculo del área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices, por ejemplo.

> 26. Problema II.- Hallar la abscisa del punto de una recta tal que la razón de sus distancias á otros dos M_1y M_2 de la misma es igual á un número λ dado en magnitud y signo.
>
> 55. Problema II.- Hallar la abscisa del rayo que divide á uno de los dos ángulos formado por otros dos m_1 y $m_2$en dos ángulos mm_1y mm_2, tales que la razón de sus senos sea igual á un número dado λ (p. 39).
>
> 195. Dados dos puntos determinar otro en la recta que aquellos determinan tal, que la razón de sus distancias á aquellos dos sea igual á un número dado λ (p. 158).
>
> 202. Encontrar la ecuación de la recta que divide al ángulo que forman otras dos en dos ángulos cuyos senos están en una razón dada *K* (p. 162).
>
> 203. Hallar el área de un triángulo *ABC* en función de las coordenadas (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)de sus vértices (p. 163).

Tras esto y en este mismo punto plantea el siguiente problema:

> PROBLEMA: Hallar el área de un polígono en función de las coordenadas de los vértices (p. 163).
>
> 204. Encontrar la razón de los segmentos aditivos o sustractivos en que una recta divide a la distancia entre dos puntos dados *P* y *Q*.
>
> 206. PROBLEMA I.-En coordenadas plückerianas, determinar: (…)4º las coordenadas de la recta que divide al ángulo que forman otras dos en dos ángulos, cuyos senos tienen una razón dada μ.
>
> 245. Hallar las ecuaciones de alturas y las medianas del triángulo de referencia y las coordenadas del ortocentro y del baricentro del mismo.
>
> 252. Hallar la ecuación de una recta que divide al ángulo de otras dos en dos ángulos cuyos senos están en una razón dada *K*[77].

[77] En coordenadas trilineales

PROBLEMAS RESUELTOS

Incluimos la solución de los problemas de los puntos 26 y 202-252, como aplicaciones de las fórmulas obtenidas para las distancias; el del punto 206 como aplicación de las fórmulas calculadas para obtener el ángulo que forman dos rectas; y los resueltos en los puntos 203 y 245 en los que se calcula el área de un triángulo y las ecuaciones y coordenadas de las retas y puntos notables de un triángulo, respectivamente.

Problema II.- Hallar la abscisa del punto de una recta tal que la razón de sus distancias á otros dos M_1y M_2 de la misma es igual á un número λ dado en magnitud y signo.

Si designamos por x_1 y $x_2$las abscisas de los dos puntos dados M_1y M_2, y por x la del punto M que resuelve el problema, se tiene la igualdad

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \lambda$$

ó bien $x_1 - x = \lambda\,(x_2 - x)$ de la cual resulta $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$,

Dedúcese, de aquí, que la expresión $\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$ representa, para cada valor del parámetro λ, un punto de la recta M_1M_2, punto que pertenece al segmento finito limitado por los M_1y M_2ó a su adyacente, según que dicho parámetro λ sea negativo ó positivo. Para $\lambda = -1$ el punto correspondiente es el punto medio del segmento M_1M_2 y su abscisa es, por tanto, la media aritmética de las abscisas de los extremos M_1 y M_2 de dicho segmento (pp.17-18).

Encontrar la ecuación de la recta que divide al ángulo que forman otras dos en dos ángulos cuyos senos están en una razón dada *K* (p. 162)

Si $Ax+By+C=0$y $A'x+B'y+C'=0$son las ecuaciones de las dos rectas dadas, la razón de sus distancias á un punto cualquiera de la recta pedida, es igual á la razón de los senos de los ángulos que esta recta forma con aquellas; luego la ecuación que se busca es

$$\frac{(Ax+By+C)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}} = K\frac{(A'x+B'y+C')\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}}.$$

Si la razón K es igual a ±1, la recta que se pide se confunde con una de las bisectrices de los dos ángulos formados por las dadas (p. 163).

Hallar la ecuación de una recta que divide al ángulo de otras dos en dos ángulos cuyos senos están en una razón dada *K*[78]

En la resolución remite al párrafo 202 (problema anterior), utilizando el resultado allí obtenido, por lo que si lX+mY+nZ=0 y l'X+m'Y+n'Z=0 son las ecuaciones de las dos rectas "se obtiene para la ecuación de la recta pedida la

[78] En coordenadas trilineales

$$\frac{lX+mY+nZ}{\{l,m,n\}} = K\,\frac{l'X+m'Y+n'Z}{\{l',m',n'\}}, \text{ (p. 202)}$$

Y como en el caso anterior deduce que si $K=\pm 1$ las rectas obtenidas son las bisectrices de los ángulos formados por las dadas (p. 202).

Hallar el área de un triángulo *ABC* en función de las coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) de sus vértices.

Si representamos por S el área que se busca y por h la altura correspondiente al lado BC, se tiene $2S=BC\text{x}h$.

Pero la ecuación de la recta BC es (178)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

y, por tanto, se tiene (201)

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} sen\,\theta}{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+2(x_2-x_3)(y_2-y_3)\cos\theta}}$$

cuyo denominador es precisamente el valor del segmento rectilíneo BC; luego el valor del área S que se busca es

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} sen\,\theta \text{ (p. 163).}$$

PROBLEMA I.-En coordenadas plückerianas, determinar: (…) 4º las coordenadas de la recta que divide al ángulo que forman otras dos en dos ángulos, cuyos senos tienen una razón dada μ.

4º. (u_1, v_1), (u_2, v_2) son las coordenadas de las dos rectas dadas, sus ecuaciones cartesianas son $u_1x+v_1y+1=0$ y $u_2x+v_2y+1=0$; y la ecuación que representa la recta pedida es (202) (…)

$$u_1x+v_1y+1 = \mu\,\frac{\sqrt{u_1^2+v_1^2-2u_1v_1\cos\theta}}{\sqrt{u_2^2+v_2^2-2u_2v_2\cos\theta}}\,(u_2x+v_2y+1),$$

ó sea,

$$(u_1-k\mu u_2)x+(v_1-k\mu v_2)y+1-k\mu=0,$$

designando por k la cantidad

$$\frac{\sqrt{u_1^2+v_1^2-2u_1v_1\cos\theta}}{\sqrt{u_2^2+v_2^2-2u_2v_2\cos\theta}},$$

que es la razón de las distancias del origen de coordenadas á las dos rectas dadas. Por tanto, las coordenadas pedidas son

$$\frac{u_1 - k\mu u_2}{1 - k\mu} \quad \text{y} \quad \frac{v_1 - k\mu v_2}{1 - k\mu}.$$ (p. 166)

(…) Problema: Hallar las ecuaciones de las alturas y de las medianas del triángulo de referencia, y las coordenadas del ortocentro y del baricentro del mismo.

Este problema se resuelve observando que tanto unas como otras de las rectas mencionadas pasan por un vértice y por un punto del lado opuesto cuyas coordenadas son fáciles de calcular. Así se obtienen, para las alturas, las ecuaciones

X cosA-Y cosB=0, Y cosB –Z cosC=0 y Z cosC-X cosA=0,

y para las medianas las ecuaciones

X senA-Y senB=0, Y senB –Z senC=0 y Z senC-X senA=0,

y como sumadas las ecuaciones de cada grupo se obtiene una identidad, tanto las alturas como las medianas concurren en un punto, el ortocentro ó el baricentro del triángulo (p. 198).

4. Ejercicios y problemas propuestos.

Recogemos los problemas y ejercicios propuestos por el autor. Como en los apartados anteriores el número que figura delante del enunciado es el punto en el que se encuentra.

24. PROBLEMA: Construir los puntos representados por una ecuación numérica de segundo grado (p. 17).

26. PROBLEMA I.- Hallar la distancia entre los dos puntos representados por la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$(p. 17).

26. PROBLEMA III.- Hallar la abscisa del punto medio del segmento limitado por los puntos representados por la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$(p. 18).

29. PROBLEMA.- Dada la razón doble de una figura simple y las abscisas de tres de sus puntos, determinar las abscisas del cuarto (p. 21).

33. PROBLEMA.- Hallar la condición que debe verificarse para que los dos puntos representados por la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$ estén harmónicamente separados por los que representan la ecuación $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$ (p. 24).

55. PROBLEMA I.- Hallar el ángulo que forman los rayos representados por la ecuación$ax^2 + 2bx + c = 0$ y la condición para que estos rayos sean perpendiculares entre sí (p. 39).

206. PROBLEMA I.-Hallar: 1º,la distancia entre dos puntos; 2º,la distancia de un punto á una recta; y 3º, el ángulo de dos rectas en el sistema de coordenadas, expuesto en el párrafo 121(p. 164).

206. PROBLEMA II.-En el sistema de coordenadas, expuesto en el párrafo 125 determinar: 1º,la distancia entre dos puntos; 2ºla distancia de un punto á una recta; y 3º el ángulo de dos rectas (p. 164).

207. PROBLEMA II,-En el sistema de coordenadas, expuesto en el párrafo 145, determinar: 1º la distancia entre dos puntos; 2ºla distancia de un punto á una recta; y 3ºel ángulo de dos rectas (p.166).

207. PROBLEMA III.-En el sistema de las coordenadas paralelas, determinar: 1ºla distancia entre dos puntos; 2º la distancia de un punto á una recta; y 3º el ángulo de dos rectas (p.166).

4.11.4. Conclusiones

Como se puede apreciar en el análisis, la obra de Vegas se diferencia de todas las analizadas anteriormente en la complejidad conceptual y en el enfoque con que se aborda el desarrollo de la Geometría Analítica. En esta obra no solo podemos encontrar contenidos de Geometría Proyectiva como en las de Mundi y Sánchez Solís, sino que sobre la base conceptual de esta última se construye la primera a través de las definiciones de los sistemas de coordenadas mediante el uso de haces de rectas y los conceptos de punto y recta del infinito.

Esta forma de definir los sistemas de coordenadas permite por una parte unificar su estudio, dando una definición general para los principales sistemas –de puntos, de rectas y polares- de la que se obtienen diversos sistemas como casos particulares, ampliando el tipo y número de ellos estudiados en esta obra respecto a las otras; pero por otra parte este enfoque dificulta el estudio de la Geometría Analítica, pues para llegar a comprender los conceptos propios de ella, incluso algunos tan simples como el de coordenadas cartesianas de un punto, es necesario comprender y dominar los conceptos de la Geometría Proyectiva.

Este planteamiento se debe al alto grado de formalismo matemático que presenta esta obra, que no se encuentra en ninguna de las anteriores y que muestra el nivel y la importancia que empiezan a tener las Matemáticas y la Facultad de Ciencias en nuestro país a principios del siglo, frente a la escasa cultura matemática y la baja categoría académica de esa facultad en el anterior.

En esta vemos el culmen de la evolución que siguió la Geometría Analítica durante el siglo XIX, de una Geometría Analítica que al principio de siglo mantenía muchas similitudes con la de Descartes y que hacía un uso muy básico de las coordenadas, se fue pasando a lo largo del siglo y especialmente en el último tercio a una Geometría en la que el uso de las coordenadas iba teniendo cada vez más peso, a la que se fueron incorporando contenidos de Geometría Proyectiva, hasta terminar en esta obra con lo que podríamos denominar Geometría Analítico-Proyectiva.

También destacar la influencia de autores alemanes, como el mismo autor indica, a diferencia de las obras utilizadas en los tres primeros cuartos de siglo, que seguían basándose aún muy entrada la segunda mitad de siglo en obras francesas, obsoletas ya en los años setenta y en desuso en el resto de Europa.

CAPÍTULO 5:
Resultados y Conclusiones

En el presente capítulo presentaremos a modo de compendio los resultados obtenidos mediante el análisis de los libros de texto que se ha desarrollado extensamente en el capítulo anterior. Para cada una de las categorías de análisis realizaremos un estudio a través del tiempo, viendo cómo se han presentado en cada uno de los libros a lo largo del siglo y cómo han evolucionado a lo largo del mismo.

A la luz de estos resultados sacaremos las conclusiones en relación con las hipótesis de partida. Además veremos qué grado de consecución de los objetivos planteados al comienzo de este trabajo se ha obtenido, explicaremos las limitaciones que ha tenido el mismo, y qué líneas de trabajo futuras deja abiertas.

5.1. Resultados

A continuación estudiaremos cómo se presentaron los conceptos de Geometría Analítica en las obras analizadas, mediante el estudio comparativo de las categorías de análisis definidas en el capítulo 2. Esto nos permitirá por una parte realizar un análisis de contenido y por otro un estudio comparativo de las obras viendo la evolución de la GA a través del periodo considerado.

5.1.1. Estructura conceptual

El análisis de la estructura conceptual de las once obras estudiadas aporta los siguientes datos respecto a las diferentes categorías de análisis consideradas:

- **Concepto de Geometría Analítica (D)**

En las once obras analizadas encontramos dos términos para nombrar a esta manera de resolver problemas geométricos, y dos concepciones, que no se corresponden en la mayoría de las obras con estos términos.

Los términos utilizados son: Aplicación del Álgebra a la Geometría y Geometría Analítica.

En cuanto a las concepciones son las siguientes:

a) Método de resolución de los problemas geométricos por medio del Álgebra, de la misma manera que esta se utiliza para resolver problemas aritméticos, pero en vez de operar con números se opera con segmentos. Se construyen geométricamente las soluciones obtenidas algebraicamente.
b) Método de resolución de problemas geométricos por medio del Álgebra, basándose en el concepto de lugar geométrico. Se utilizan sistemas de coordenadas.

Algunos autores utilizan únicamente el término *Aplicación del Álgebra a la Geometría* que engloba las dos concepciones indicadas, es el caso de Vallejo y Lacroix. Lista también utiliza únicamente este término, pero no utiliza sistemas de coordenadas en su obra. Sánchez Solís sólo utiliza el término *Geometría Analítica*, pero distingue *Analítica determinada e indeterminada*, englobando también en un solo término ambas concepciones.

Otros autores utilizan ambos términos indistintamente, englobando en ellos las dos concepciones. Vemos esto en las obras de Zorraquín, Odriozola y Santa María.

Cortázar utiliza ambos términos, pero identifica *Aplicación del Álgebra a la Geometría* con la primera concepción y *Geometría Analítica* con la segunda.

Por último Mundi y Vegas solo hablan de *Geometría Analítica* y únicamente trabajan con sistemas de coordenadas.

Recogemos todo lo dicho de forma esquemática en la siguiente tabla:

Autor/texto	*Aplicación del Álgebra a la Geometría* a) y b)[79]	*Aplicación del Álgebra a la Geometría* *o* *Geometría Analítica* a) y b)	*Aplicación del Álgebra …* a) *versus* *Geometría Analítica* b)	*Geometría Analítica* *Determinada* a) *Indeterminada* b)	*Geometría Analítica* b)
Vallejo, J.M*Tratado* (1817)	X				
Zorraquín, M(1819)		X			
Lista, A(1823)	X				
Odriozola, J (1829)		X			
Vallejo, J.M*Compendio* (1840)	X				
Lacroix, S.F (1846)	X				
Gómez Sta María, A.(1846)		X			
Cortázar, J.(1862)			X		
Mundi, S(1883)					X
Sánchez Solís, (1883)				X	
Vegas, M(1906)					X

Tabla 25: Concepto de Geometría Analítica

- **Construcción geométrica de las soluciones algebraicas de las ecuaciones de primer y segundo grado (E)**

Uno de los conceptos característicos de la mayoría de las obras analizadas es el de la "construcción de las fórmulas", como algunos de los autores denominan. Como hemos visto en el capítulo anterior, este concepto está implícito dentro de la concepción de la Geometría Analítica (o Aplicación del Álgebra a la Geometría) como una herramienta de resolución de problemas en la que el Álgebra se aplica a la Geometría de forma análoga a como se hace con la Aritmética. Por tanto encontramos este tipo de construcciones en todos los textos analizados, excepto los de Mundi y Vegas.

Este análisis de las obras nos muestra diferentes construcciones dependiendo del autor y el texto.

[79] Concepciones que definen

En algunas de ellas se indica cómo sumar y restar segmentos, es el caso de las obras de Vallejo, Odriozola, Santa María y Cortázar.

En todas ellas[80] se nos muestra, con más o menos profundidad, cómo construir cocientes y radicales algebraicos. En algunas de ellas además particularizan en el caso de que dentro del radical sólo se encuentre un número, es decir la construcción de números irracionales de tipo radical. Obran así Zorraquín, Odriozola, Lacroix, Santa María y Cortázar.

La construcción de las soluciones de una ecuación de segundo grado podemos encontrarlas en todas las obras que presentan las construcciones de las fórmulas, excepto en la de Alberto Lista. Pero mientras algunos autores las construyen resolviéndolas primero y construyendo las soluciones (1)[81], otros construyen estas soluciones sin resolver la ecuación, directamente de esta, aplicando propiedades de la circunferencia (2). Vallejo en su *Tratado,* Odriozola, Lacroix y Santa María enseñan las dos formas de resolución. Vallejo en su *Compendio* solo la primera (1), y Zorraquín, Cortázar y Sánchez Solís solo la segunda (2).

Además de estas expresiones Odriozola considera de forma genérica cómo construir las soluciones de una ecuación de grado mayor que dos, y de la construcción de expresiones trigonométricas. Cortázar indica cómo construir un ángulo conocidas sus razones trigonométricas, Zorraquín, Lista, Odriozola y Lacroix explican cómo construir expresiones algebraicas de grado dos y tres, que representan un área y un volumen respectivamente.

Recogemos todo lo anterior en la tabla que se inserta a continuación:

Autor/texto	Sumas/ Restas	Cocientes	Radicales	N^{os} irracionales	Soluciones ec. 2º grado (1)	Soluciones ec. 2º grado (2)	Soluciones ec. grado>2	Áreas y volúm.	Expr. Trigonom
Vallejo, J.M*Tratado* (1817)	X	X	X		X	X			
Zorraquín, M(1819)		X	X	X		X		X	
Lista, A (1823)		X	X					X	
Odriozola, J(1829)	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Vallejo, J.M*Compendio* (1840)	X	X	X		X				
Lacroix, S.F(1846)		X	X	X	X	X		X	
Santa María, A. (1846)	X	X	X	X	X	X			
Cortázar, J.(1862)	X	X	X	X		X			X
Mundi, S(1883)									
Sánchez Solís, I(1883)		X				X			
Vegas, M(1906)									

Tabla 26: Construcción de las expresiones algebraicas

[80] Excepto las de Mundi y Vegas

[81] Utilizaremos esta notación para distinguirlas en la tabla adjunta.

- **Unidad. Ecuaciones homogéneas y heterogéneas (U)**

En todos los textos analizados se habla de ecuaciones homogéneas y de cómo usar expresiones algebraicas iguales a la unidad para convertir en homogéneas ecuaciones o expresiones algebraicas que no lo son. Pero no todos los autores lo utilizan en el mismo sentido, de hecho encontramos dos interpretaciones completamente diferentes de las ecuaciones homogéneas y del uso de la unidad.

a) Por un lado se habla de la necesidad de que las expresiones algebraicas deben ser homogéneas para que haya una coherencia desde el punto de vista geométrico. Como hemos visto, en muchas de las obras analizadas se entienden las expresiones del tipo a^2+ab, por ejemplo, como una suma de superficies. En este sentido la unidad de la que se habla es el segmento que sirve como unidad de medida, respecto al que se refieren los demás segmentos que aparecen en las construcciones geométricas implicadas en la cuestión que se esté tratando. Este problema de la homogeneidad de las expresiones algebraicas, como hemos visto en el capítulo 2, viene desde los geómetras griegos, y fue el principal escollo que se encontraron históricamente los matemáticos para pasar de la Geometría que solo utilizaba métodos sintéticos a la Geometría Analítica.
b) Otros autores hablan de la utilidad de considerar las ecuaciones homogéneas de las curvas porque se facilitan mucho los cálculos, pero sin ninguna implicación geométrica del tipo anterior.

Son muchos los autores decimonónicos que siguen tratando el concepto de ecuaciones homogéneas de la forma indicada en el apartado a). De los analizados lo hacen todos excepto Mundi y Vegas. Lo hace incluso Sánchez Solís, aunque de forma muy superficial, y eso que su obra data de 1883. Por otra parte, dentro de estas obras hemos encontrado dos formas distintas de utilizar la unidad para convertir ecuaciones homogéneas y heterogéneas. Hay autores que tratan el tema de forma teórica, explicando por qué y cómo debe utilizarse, pero no la usan nunca en ningún caso en concreto. Es el caso de Lacroix, Cortázar y Sánchez Solís. Sin embargo Alberto Lista, Vallejo, Zorraquín, Odriozola y Santa María ponen ejemplos concretos de cómo utilizarla. Los cuatro primeros cuando explican la “construcción de las fórmulas”, Santa María lo hace en un problema.

En cuanto al uso de las ecuaciones homogéneas de una curva, aparecen en las obras de Mundi y Vegas. Y cuando utilizan coordenadas trilineales usan una expresión, que relaciona las tres coordenadas de un punto, que es igual a uno, para convertir ecuaciones heterogéneas en homogéneas. Pero como ya hemos indicado esto lo hacen por la simplicidad que tales ecuaciones aportan a los cálculos, como ellos mismo indican, y no por otras razones.

Resumimos estos resultados en la siguiente tabla:

Autor /texto	Homogeneidad de las expresiones algebraicas (a)		Ecuaciones homogéneas (b)
	Uso explícito de la unidad	Tratamiento de la unidad solo de forma teórica	
Vallejo, J.M *Tratado* (1817)	X		
Zorraquín, M (1819)	X		
Lista, A (1823)	X		
Odriozola, J (1829)	X		
Vallejo, J.M *Compendio*(1840)	X		
Lacroix, S.F (1846)		X	
Santa María, A. (1846)	X		
Cortázar, J. (1862)		X	
Mundi, S(1883)			X
Sánchez Solís, I(1883)		X	
Vegas, M(1906)			X

Tabla 27: Ecuaciones homogéneas. Uso de la unidad

- **Interpretación de las soluciones negativas (SN)**

El tema de la interpretación de las soluciones negativas aparece en todas las obras anteriores a 1880, así pues en todas excepto las de Mundi, Vegas y también Sánchez Solís, que no lo trata ni siquiera en la parte dedicada a la *Geometría Analítica Determinada*.

Por otra parte, la interpretación que hacen los autores que sí lo incluyen en sus obras es de clara influencia francesa, como ya hemos señalado en el análisis de algunos de los textos. Aunque en todos ellos se interpretan las cantidades negativas como indicadoras de un cambio -bien en las condiciones del problema, bien en el sentido en que se deben representar- existen algunas diferencias en el tratamiento de éstas que nos permiten distinguir tres concepciones. Como hemos visto en el análisis cada una va incluyendo a la anterior, a la cual amplía:

a) Las cantidades negativas indican un cambio de posición, y por tanto deben construirse en sentido contrario a las positivas.
   Esta interpretación la hacen todos los autores señalados anteriormente.

b) Las soluciones negativas de una ecuación indican un error en las hipótesis del problema, o un cambio del que es susceptible que dan lugar a otras versiones del problema o a otro más general.
   Esta interpretación, originaria de D'Alembert es la adoptada por Vallejo en su *Tratado* y Lacroix. En este caso también se indica que las cantidades negativas deben tomarse en sentido contrario en algunos casos, lo que incluye el caso anterior, como ya dijimos.

c) Las soluciones negativas indican o una contradicción en las condiciones del problema o la existencia de una cantidad inversa.
La teoría de las cantidades correlativas, que es la que da esta interpretación de las soluciones negativas de un problema geométrico, fue desarrollada por Carnot, como ya hemos señalado. Podemos encontrarla en las obras de Zorraquín y Lista. También en Cortázar vemos una breve referencia cuando habla del paso de cantidades negativas a positivas de forma continua a través de cero o ∞.

Recogemos lo anterior en la siguiente tabla:

Autor /texto	Cambio de sentido	Error en el enunciado	Existencia de una cantidad inversa
Vallejo, J.M(1817)	X	X	
Zorraquín, M (1819)	X		X
Lista, A (1823)	X		X
Odriozola, J (1829)	X		
Vallejo, J.M (1840)	X		
Lacroix, S.F (1846)	X	X	
Santa María, A. (1846)	X		
Cortázar, J. (1862)	X		?
Mundi, S(1883)			
Sánchez Solís, I(1883)			
Vegas, M(1906)			

Tabla 28: Interpretación de las cantidades negativas

- **Sistemas de coordenadas (C)**

Excepto Alberto Lista, todos los demás autores trabajan con sistemas de coordenadas, pero el número y tipo de sistemas varía de unos autores a otros.

Podemos diferenciar dos grandes grupos dependiendo del tipo de sistemas de coordenadas que utiliza:

a) Las obras anteriores a 1880, que contienen lo que podríamos denominar los sistemas de referencia clásicos: sistemas de coordenadas cartesianas (rectangulares y/u oblicuas), y polares, aunque éstas últimas no en todos los casos. Estos sistemas son sistemas de coordenadas binarias de puntos, pues se determinan puntos mediante dos condiciones.
b) Las posteriores a 1880 que además de los sistemas anteriores incluyen sistemas de rectas (sistemas tangenciales) y ternarias, que refieren los puntos o las rectas mediante tres condiciones.

Por otra parte podemos diferenciar la obra de Miguel Vegas de las del resto de autores en la forma de definir los sistemas de coordenadas. Todos los autores analizados, anteriores a Vegas, definen cada sistema de coordenadas de forma particular. Vegas, sin embargo, define un sistema general de coordenadas binarias y los demás como casos particulares de este. Y lo mismo hace con las tangenciales y las ternarias.

En la **Tabla 29** especificamos los sistemas de coordenadas, en el plano, utilizados por cada uno de los autores. Vegas antes de estudiar estos sistemas lo hace con los definidos sobre una recta.

- **Ecuaciones de la recta (ER)**

Todos los autores analizados trabajan con ecuaciones de la recta, excepto Alberto Lista, como es obvio, al no trabajar con sistemas de coordenadas. No hemos encontrado diferencias dignas de mención en la obtención y el estudio de las ecuaciones de la recta, con respecto a la actualidad. Lo que sí varía de unas obras a otras es el tipo de ecuaciones que obtiene cada uno de los autores. Todos ellos presentan las ecuaciones de la recta en coordenadas cartesianas, algunos también en polares y Mundi, Sánchez Solís y Vegas lo hacen en todos los sistemas de referencia que definen.

Mostramos en la **Tabla 30** los tipos de ecuaciones que aparecen en cada una de las obras.

- **Concepto de lugar geométrico (LG)**

Todos los autores que trabajan con ecuaciones de la recta lo hacen, implícitamente, con el concepto de lugar geométrico, concepto fundamental de la Geometría Analítica tal y como la conocemos actualmente. Sin embargo, no aparecen ni el término ni el concepto explícitamente en las obras publicadas antes de 1846. Después de esta fecha aparece en todas las analizadas, es decir en las de Lacroix, Santa María, Cortázar, Mundi, Sánchez Solís y Vegas.

- **Contenidos propios de la Geometría Proyectiva (GP)**

Solo aparecen contenidos de Geometría Proyectiva en las obras publicadas a partir de 1883, es decir, las de Mundi, Sánchez Solís y Vegas.

Hemos podido observar en estas obras dos planteamientos diferentes respecto a estos contenidos.

Mundi y Sánchez Solís desarrollan los contenidos de Geometría Proyectiva desde la Analítica, es decir, los presentan como unos contenidos más de esta geometría. Por el contrario Vegas presenta los contenidos métricos, propios de la Geometría Analítica, como un caso particular de la Geometría Proyectiva.

Autor /texto	Sistema general de coordenadas binarias	Coordenadas cartesianas		Otros sistemas de coordenadas binarias	Sistema en el plano complejo	Sistema general de coordenadas tangenciales binarias	Coordenadas Tangenciales binarias	Otros sistemas de coordenadas tangenciales binarias	Coordenadas ternarias	Coordenadas Tangenciales ternarias	Coordenadas polares	Coordenadas polares tangenciales	Coordenadas tripolares
		Rect.	Oblic.										
Vallejo, J.M *Tratado* (1817)		X	X								X		
Zorraquín, M (1819)		X	X								X		
Lista, A (1823)													
Odriozola, J (1829)		X	X								X		
Vallejo, J.M *Compendio* (1840)		X											
Lacroix, S.F (1846)		X											
Gómez Santa María, A. (1846)		X	X								X		
Cortázar, J. (1862)		X	X										
Mundi, S (1883)		X	X				X		X		X		
Sánchez Solís, I (1883)		X	X		X		X		X	X	X		
Vegas, M (1906)	X	X		X		X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 29: Sistemas de coordenadas

Autor /texto	General	Explícita	Pto-pendiente	Segmentaria	Normal	Definida por dos puntos	Definida por un punto y una recta	Conocidos los ángulos que forma con los ejes	Homogénea	Coordenadas tangenciales de la recta / ec. del punto	En coordenadas ternarias	Coord.tangenciales ternarias de la recta / ec. del punto	Polar	Coordenadas polares tangenciales / ec. del punto	Otros sistemas
Vallejo *Tratado* (1817)		X	X		X	X		X					X		
Zorraquín (1819)			X			X									
Lista, A (1823)															
Odriozola (1829)	X	X	X			X									
Vallejo, J *Compendio* (1840)		X	X			X									
Lacroix, S.F (1846)	X	X	X			X									
Gómez Santa María, A. (1846)	X	X	X			X									
Cortázar, J. (1862)	X	X	X	X		X	X								
Mundi, S (1883)	X		X	X	X	X				X	X	X	X		X
Sánchez Solís, I (1883)	X	X		X	X	X				X	X		X	X	X
Vegas, M (1906)	X	X		X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X

Tabla 30: Ecuaciones de la recta

5.1.2. Sistemas de representación

En todas las obras analizadas hemos encontrado tres tipos de sistemas de representación:

- **Lenguaje natural**

Todos los autores utilizan el lenguaje natural para desarrollar los contenidos de los textos. En todos ellos lo hemos encontrado bajo tres formas:

- **Definiciones.**
  En todas las obras aparecen definiciones tales *Aplicación del Álgebra a la Geometría* o *Geometría Analítica*, sistemas de coordenadas o abscisa y ordenada de un punto. En el *Tratado* de Vallejo aparecen definidos los métodos sintético y analítico de resolución de problemas y en las obras posteriores a 1880 se definen conceptos propios de la Geometría Proyectiva, por poner algunos ejemplos.
- **Resultados.**
  Todos los autores explican los conceptos que introducen de forma literal, aunque apoyados generalmente en gráficos y combinando el lenguaje natural con el algebraico.
- **Enunciados.**
  También encontramos enunciados en todos los textos analizados, generalmente son enunciados de problemas, pero algunos autores también incluyen teoremas en sus obras. Es el caso de Vallejo en su *Tratado*, Cortázar, Mundi y Gómez Santa María.

- **Lenguaje simbólico**

Todos los autores utilizan el lenguaje simbólico en sus textos, como no puede ser de otra manera al estar presente el Álgebra. Aparecen expresiones algebraicas de todo tipo: radicales, fracciones algebraicas y ecuaciones.

Señalaremos que la notación utilizada difiere muy poco de la actual, en general. Destacaremos la utilizada por Odriozola para denotar los ejes de coordenadas, las coordenadas negativas de un punto o las ecuaciones de la recta cuando trabaja con varias a la vez. Es una notación que no aparece en ninguno de los otros autores, ni anteriores ni posteriores.

Por otra parte haremos hincapié en la utilización de las expresiones $y=f(x)$, $F(x,y)=0$, para denotar la expresión algebraica de un lugar geométrico, que aparecen en las obras de Cortázar, Mundi y Vegas. Y también en el uso de determinantes por parte de los autores de las obras posteriores a 1880, con la notación que lleva asociada.

- **Gráficos**

Todos los autores analizados utilizan gráficos en los que apoyarse en sus razonamientos. En todos los textos, excepto en el de Alberto Lista que no trabaja con sistemas de coordenadas, encontramos gráficos de dos tipos:

- Dibujos de figuras implicadas en un problema, o de construcciones geométricas.
- Sistemas de coordenadas en los que se inscriben elementos con los que se está trabajando: puntos, rectas, ejes de otros sistemas, etc.

Los gráficos están insertos al final de los libros, en láminas aparte, en todas las obras excepto las de Mundi y Vegas, que las incluyen dentro del texto.

Ninguno de los autores utiliza tablas o cuadros para organizar la información, ni siquiera aquellos que explican cómo representar una recta dando valores.

5.1.3. Fenomenología

El análisis de las obras nos ha mostrado que todos los problemas planteados por los autores se inscriben en un contexto matemático. Algunos autores hacen referencia a la Mecánica o la Topología, pero no presentan ningún problema de aplicación.

Aunque todos los problemas son de tipo geométrico se pueden clasificar en varias categorías dependiendo de la intencionalidad del autor a la hora de plantearlos.

- Para mostrar los métodos analítico y sintético.
  Sólo aparecen este tipo de problemas en el *Tratado* de Vallejo.
- Para mostrar la construcción de expresiones algebraicas y soluciones negativas.
  Este tipo de problemas aparecen en las obras de Zorraquín, Lista, Odriozola, Vallejo (solo en el *Compendio*), Lacroix, Santa María, Cortázar y Sánchez Solís.
- Para obtener fórmulas generales, como la que da la distancia entre dos puntos, el ángulo que forman dos rectas o la ecuación de una recta dados diferentes datos.
  Encontramos este tipo de problemas en todas las obras analizadas excepto la de Alberto Lista.
- Para mostrar las aplicaciones de los sistemas de coordenadas/la Geometría Analítica. Dependiendo de la fecha de edición de la obra se usa el término Geometría Analítica o no. En muchas obras el uso de coordenadas es un tipo de aplicación del Álgebra a la Geometría, por eso hacemos la distinción.
  Resuelven este tipo de problemas Zorraquín, Odriozola, Lacroix, Santa María, Cortázar, Mundi, Sánchez Solís y Vegas.
- Para obtener resultados teóricos de Geometría Analítica mediante el uso del Álgebra, como por ejemplo la fórmula del área de un triángulo en función de sus lados.
  Podemos encontrar este tipo de problemas en el *Tratado* de Vallejo, en el texto de Lacroix y en el de Cortázar.
- Para introducir conceptos de la Geometría Proyectiva.
  Este tipo de problemas solo aparecen en las obras posteriores a 1880, es decir las de Mundi, Sánchez Solís y Vegas.
- Ejercicios.
  Cortázar intercala en el texto pequeños ejercicios con el fin de aclarar los conceptos que acaba de explicar. Mundi y Vegas, sin embargo insertan listas de ejercicios para que los resuelvan los alumnos. En el resto de las obras solo encontramos problemas.

La siguiente tabla recoge todos los datos anteriores:

Autor /texto	Métodos analítico y sintético	Construcciones expresiones alg. / soluciones neg.	Fórmulas generales	Aplicaciones de Geometría Analítica	Resultados teóricos de Geometría	Introducir conceptos de Geometría Proyectiva	Ejercicios
Vallejo *Tratado* (1817)	X		X		X		
Zorraquín (1819)		X	X	X			
Lista, A (1823)		X					
Odriozola (1829)		X	X	X			
Vallejo, J *Compendio* (1840)		X	X				
Lacroix, S.F (1846)		X	X	X	X		
G. Santa María, A. (1846)		X	X	X			
Cortázar, J. (1862)		X	X	X	X		X
Mundi, S (1883)			X	X		X	X
Sánchez Solís, I (1883)		X	X	X		X	
Vegas, M (1906)			X	X		X	X

Tabla 31: Tipos de problemas

5.2. Influencia del contexto histórico

En vista de los resultados que acabamos de ver, se observa que a lo largo del siglo XIX hubo en España dos estilos bien diferenciados de hacer Geometría Analítica. Y dos momentos clave en la enseñanza de esta asignatura dentro de la educación secundaria y en la Facultad de Ciencias. El primero de ellos tiene que ver con su consideración como materia del currículo, cuando pasa de enseñarse en secundaria o en la Facultad de Filosofía (que también se consideraban unos estudios previos a las carreras universitarias), a enseñarse en la Universidad propiamente dicha. El segundo hito importante tiene que ver con el tipo de contenidos que se enseñan, pasando de la Aplicación del Álgebra a la Geometría a la Geometría Analítico-Proyectiva.

En este apartado recogemos los aspectos sociopolíticos y culturales que influyeron en todos los aspectos que acabamos de señalar.

En relación con el paso de la asignatura de un nivel educativo a otro, este cambio se produce en 1857, a partir de la aprobación de la Ley Moyano. Como hemos visto en el capítulo 2, anteriormente a la ley la Geometría Analítica se encontraba en el currículo de secundaria, pero de forma inestable e inconstante, desapareciendo en los planes de estudios más conservadores que daban preferencia al estudio de las letras; en estos casos podemos encontrar la Geometría Analítica dentro de los planes de estudios de la Facultad de Filosofía. A partir de la creación de la Facultad de Ciencias pasó a ser una asignatura permanente en el currículo de esta facultad y desapareció del de secundaria, como hemos visto en el punto 2.5.

La promulgación de la *Ley de Instrucción Pública* de 1857, más conocida como *Ley Moyano* fue un hito en el desarrollo del sistema educativo español, y vino a dar respuesta a una necesidad que venía siendo patente desde principios de siglo: la de una ley que estructurara y diera estabilidad al sistema educativo. La inestabilidad política, la guerra civil y los profundos cambios que se produjeron en la estructura social en los años anteriores habían impedido que se llevara a cabo la tan necesaria reforma, abortando todos los intentos que se dieron durante la primera mitad de siglo. La ley fue finalmente aprobada en julio de 1857, durante los primeros años de gobierno de la *Unión Liberal*, pero estuvo influida, como hemos visto en el punto 2.3. por el *Proyecto de Ley Instrucción Pública* elaborado durante el bienio progresista y que había visto la luz en diciembre de 1855. Durante estos dos años se había llevado a cabo una obra legislativa notable por su cantidad y significado, aunque en materia educativa no se promulgó ningún plan de estudios pues se centraron en la elaboración de una ley de instrucción pública, que no pasó de proyecto al no conseguir que fuera aprobada por las Cortes. A pesar de esto el *Proyecto* se considera como el primer paso de ruptura con la situación que se venía dando hasta entonces, revitalizador de la reforma educativa y, como hemos dicho, sirvió de base para la elaboración de la Ley de instrucción pública de 1857.

En relación con la Universidad, y en particular con la Facultad de Ciencias, la ley Moyano impone el modelo napoleónico, donde las Ciencias tienen un carácter meramente útil, preparatorio para las carreras profesionales como las Ingenierías y la Arquitectura, como hemos visto en el apartado 2.5. Y aunque se da un cambio en la estructura del sistema educativo, el país sigue inmerso en un atraso científico y cultural, ya que en esa época los poderes públicos se muestran reticentes a impulsar la enseñanza e investigación de las ciencias al margen de sus aplicaciones. Habrán de pasar aún algunos años para que la situación mejore y los cambios se vean plasmados en los contenidos de los libros de texto.

Ese cambio nos lo muestra claramente el análisis de contenido realizado a los textos. Dicho análisis pone de manifiesto que la ruptura en relación a los contenidos de Geometría Analítica que se estudian en la Facultad de Ciencias se da en los años 80, fecha que coincide con la aprobación del Plan Lasala (1880).

Como hemos visto en el capítulo 2 el año 1865 es muy importante en lo que se refiere al estudio de la Geometría en España, pues en ese año se introduce la Geometría Superior de Chasles por Echegaray, sin embargo en la Facultad de Ciencias se seguía enseñando la Geometría Analítica de forma similar a como se venía haciendo desde principios de siglo.

Como hemos mostrado en el capítulo 3, en las listas de libros de texto publicadas para el curso 1867/68 siguen apareciendo las obras de Cortázar y Gómez Santa María. El análisis de contenido nos muestra que estas obras se asemejan más a las de Monje o Lacroix que a las de Plücker o Möbius, por poner un ejemplo, obras publicadas en los últimos años de de la segunda década del siglo. Habrá que esperar hasta las obras de Sánchez Solís y Mundi, catedráticos de Geometría Analítica en Madrid y Barcelona, publicadas en 1883, para encontrar una Geometría Analítica que bebe de estas nuevas fuentes. Los textos de Solís y Mundo fueron escritos, sin ninguna duda, adaptándose al nuevo plan de estudios aprobado en 1880.

Nos preguntamos cómo influyó el contexto histórico en todo lo descrito anteriormente. Pues bien, como hemos visto en el punto 2.4. en el que hemos revisado la evolución de la Matemática española en el XIX, la libertad ideológica existente en el sexenio y la calma política de la Restauración posibilitaron el crecimiento del número de profesionales dedicados al estudio de las matemáticas, que se ocuparon fundamentalmente a la importación de conocimientos. En 1874 Alfonso XII es proclamado Rey, terminando el periodo del Sexenio y, aunque se vuelve a idearios más conservadores, la Restauración canovista supuso la definitiva entrada de las Ciencias modernas en la Universidad, como hemos visto en el capítulo 2.

Previo al Plan Lasala, durante el Sexenio, se aprueba el Plan de estudios de Eduardo Chao, que daba un mayor protagonismo a las Ciencias, dándoles entidad propia y no un mero carácter preparatorio. Y aunque este plan no llegó a entrar en vigor algunas de las ideas que propone se plasmarán en el plan de estudios de 1900, plan que supone la modernización de la Facultad de Ciencias, equiparándola a las de otra naciones europeas. Esta nueva reforma, que estará en vigor durante casi 30 años nace bajo el impulso de regeneración nacional fruto de la crisis de 1898.

En resumen, el estudio que hemos llevado a cabo muestra una clara influencia francesa en el estudio de la Geometría Analítica en los niveles educativos considerados, no solo en los contenidos de los libros sino en la orientación del estudio de las Ciencias en la Universidad, influencia que es consecuencia natural del devenir histórico de España es estos años. Recordemos que el siglo comienza con una guerra de ocupación, donde la invasión francesa se veía con buenos ojos por ciertos sectores de la sociedad que la consideraban una opción aceptable frente al absolutismo de Fernando VII. Algunos de los principales intelectuales de la época, entre los que se encuentran Vallejo o Lista se vieron obligados a exiliarse en Francia a la vuelta al trono de Fernando VII donde completaron su formación, trayendo sus saberes cuando regresaron a España. Además de ellos, otros matemáticos o ingenieros civiles o militares completan sus estudios en Francia, entre los autores que hemos estudiado tenemos el caso de Cortázar.

Si este hecho unimos la preponderancia en el estudio de las Ciencias en las Academias de Ingenieros, tanto civiles como militares, y la cerrazón de los poderes públicos ante el desarrollo de éstas, vemos que es natural no sólo la influencia de los autores franceses en las obras analizadas, sino el carácter preparatorio y utilitario que tuvo el estudio de las Ciencias hasta casi finales de siglo.

Solo cuando el país empieza a abrirse a partir del Sexenio revolucionario y encuentra una cierta estabilidad política a partir de la Restauración, empiezan a llegar las ideas alemanas preponderantes en el resto de Europa desde hace años, no sólo en conocimientos científicos, sino en la consideración de la Universidad como centro no solo de preparación sino de investigación. Tendencia que recibiría el espaldarazo definitivo a finales de siglo a consecuencia de la regeneración que se llevó a cabo tras la crisis de 1898.

5.3. Conclusiones

5.3.1. Consecución de los objetivos de la investigación

En este apartado analizaremos en qué medida han sido alcanzados los objetivos que nos habíamos planteado al iniciar este trabajo.

> **Objetivo 1:** Identificar y analizar los planes de estudios de educación secundaria y de la Facultad de Ciencias donde aparecen contenidos de Geometría Analítica

Este objetivo lo hemos alcanzado en el apartado 2.5. En el mismo hemos realizado un análisis de los planes de estudios de educación secundaria y de la Facultad de Ciencias que estuvieron en vigor en España desde 1836 hasta 1906, dividiendo este periodo en espacios de tiempo menores, que han venido determinados por fechas significativas en el desarrollo de estas etapas educativas.

El análisis de los planes ha consistido en estudiar la finalidad con que se orientaban los estudios –bien de secundaria, bien universitarios- plasmada generalmente en el prólogo de la ley; también su estructura general: edad de acceso, número de cursos que comprende, asignaturas que incorpora y el número de horas semanales de cada una de ellas para ver el peso que tenía dentro del currículo. Además hemos estudiado la titulación que era necesaria para acceder al nivel estudiado y la que se obtenía tras sus estudios. Para poder determinar qué contenidos de Geometría Analítica se contemplaban en cada uno de los currículos, además de las asignaturas estudiadas hemos considerado los libros de texto utilizados en cada uno, localizando las listas de libros de texto publicadas por el gobierno -en el caso de que existiesen-, o las obras de los matemáticos más relevantes del periodo.

> **Objetivo 2:** Identificar los principales libros de texto de Geometría Analítica utilizados en la segunda enseñanza, en las Facultades de Ciencias del país

Este objetivo lo hemos desarrollado en los apartados 2.5, donde hemos realizado el análisis de los planes de estudios, como hemos indicado, y en el 3.4.2, en el que hemos explicado cómo se realizó la selección de las fuentes.

Para llevar a cabo esta identificación hemos localizado todas las listas de libros de texto publicados por el gobierno para educación secundaria y/o para la Facultad de Ciencias en el periodo considerado. En el caso de los periodos en que no existían listas de libros hemos revisado estudios realizados por diversos autores sobre la Matemática, la Geometría, la Educación Secundaria y/o la Universidad en España en el siglo XIX.

> **Objetivo 3:**Realizar un análisis de contenido de una muestra significativa de los textos citados en el punto anterior, con el fin de caracterizar el tratamiento dado a la Geometría Analítica plana en los mismos

Este objetivo lo hemos desarrollado ampliamente en el capítulo 4. Mediante la utilización de una serie de categorías, definidas en el apartado 3.4.3, hemos llevado a cabo un análisis de contenido de once textos publicados a lo largo de todo el siglo. El análisis se ha centrado en el estudio de la estructura conceptual, los tipos de problemas que se resuelven -atendiendo a su fenomenología- y cómo se resuelven; y de los sistemas de representación utilizados por cada uno de los autores.

Objetivo 4: Realizar un análisis comparativo de las obras analizadas con el fin de establecer la evolución seguida por la Geometría Analítica en España en el periodo fijado.

En el primer punto del presente capítulo hemos realizado un compendio de los resultados obtenidos en el análisis de cada una de las obras a tres niveles: las categorías definidas para el análisis de la estructura conceptual, los fenómenos en que se enmarcan los problemas resueltos y los sistemas de representación utilizados.

Este resumen no se ha hecho de forma individual para cada uno de los libros, sino que hemos hecho un estudio transversal, viendo cómo son tratados en cada una de las obras los aspectos anteriormente citados. Esta comparativa nos ha permitido detectar qué contenidos han permanecido en todas las obras a lo largo del tiempo, cuáles han desaparecido y cuáles se han ido incorporando. El estudio de los problemas nos ha permitido además estudiar métodos de resolución y/o formas de hacer Geometría Analítica se usaron a los largo de la centuria.

Objetivo 5: Identificar los factores sociales, culturales, científicos y académicos que influyeron en esta evolución y la forma en que lo hicieron.

En el capítulo 2 hemos hecho un amplio estudio del contexto histórico en el que se desarrolla nuestro trabajo. Dicho estudio se ha hecho desde tres perspectivas:

- El contexto sociopolítico, considerando los hechos más relevantes del periodo, tales como cambios de gobierno e ideología política de los mismos, estructura social, conflictos bélicos, etc.
- El desarrollo normativo del sistema educativo en los niveles educativos objeto de nuestro trabajo, estudiando los diferentes planes de estudios vigentes en el periodo considerado.
- La evolución de las Matemáticas en España en el siglo XIX y en particular la Geometría Analítica, a la luz del contexto político y social del país.

Este estudio nos ha permitido interpretar la evolución seguida por la enseñanza de la Geometría Analítica a lo largo del siglo, tanto desde el punto de vista curricular, como de disciplina científica, identificando los factores históricos que propiciaron los momentos claves en esta evolución. Todo esto lo hemos desarrollado en el punto 5.2 de este mismo capítulo.

5.3.2. Conclusiones sobre las hipótesis

Hipótesis 1: La Geometría Analítica fue materia de estudio en los niveles de secundaria y/o universidad durante el siglo XIX.

El análisis de los planes de estudios de la Facultad de Ciencias nos muestra que la Geometría Analítica fue una de las asignaturas que formaba parte de estos estudios -y de muchas de las Ingenierías y la Arquitectura- a partir de su creación en 1857. Anteriormente la Geometría Analítica apareció, explícitamente, en algunos de los planes de secundaria, aunque no en todos. En otros había asignaturas de ampliación de Matemáticas, en las que es muy posible que también se estudiara si tenemos en cuenta los textos más utilizados en el periodo. Por otra parte, en algunos casos la Geometría Analítica formaba parte del currículo de la Facultad de Filosofía, que estuvo muy ligada a la segunda enseñanza hasta su desaparición tras la Ley Moyano. Por todo ello confirmamos esta primera hipótesis, aunque con algunas reticencias en lo que se refiere a los primeros años de andadura de la segunda enseñanza.

Hipótesis 2: La Geometría Analítica en nuestro país conservó durante muchos años del siglo XIX reminiscencias de los problemas clásicos a la hora de unificar Álgebra y Geometría, tales como la homogeneidad de las ecuaciones, o la interpretación de las soluciones negativas.

El análisis de contenido aplicado a los once textos que hemos seleccionado nos muestra que esta hipótesis es completamente cierta. La necesidad de la homogeneidad de las ecuaciones, y la transformación de ecuaciones heterogéneas a homogéneas mediante el uso del segmento unidad aparece incluso en el libro de Sánchez Solís, que representa el punto de inflexión entre las dos maneras de hacer Geometría Analítica que hemos identificado en este estudio.

Por otra parte, el otro problema importante que aparecía al aplicar el Álgebra a la Geometría de forma análoga a como se hacía con la Aritmética es el de la construcción de soluciones negativas, que representan segmentos negativos. Como hemos visto este problema se trata en mayor o menor medida en todas las obras analizadas anteriores a 1800.

Hipótesis 3: Los modos de hacer Geometría Analítica durante casi todo el siglo están más próximos a la geometría de Descartes que a la actual, conjugando en la resolución de problemas los métodos analíticos con los sintéticos, probablemente por la influencia de los matemáticos franceses.

Esta hipótesis la confirmamos parcialmente. Es cierto que hasta el libro de Sánchez Solís aparece lo que los autores suelen llamar Análisis Determinada, o problemas determinados, que combina métodos analíticos y sintéticos y en el que los elementos que aparecen en una ecuación (tanto números como letras) representan segmentos. Esta forma de aplicar el Álgebra a la Geometría, que en siglo XIX era considerada Geometría Analítica, realmente está más próxima a la Geometría de Descartes que a la actual. En ese sentido la hipótesis es cierta, como también es cierto que los matemáticos españoles estaban influidos por los franceses, como hemos visto, en particular por Carnot, Monge y Lacroix, al que hemos analizado.

Pero por otra parte esta no era la única manera de hacer Geometría Analítica a lo largo del siglo, de hecho salvo en la obra de Lista en todas las demás se trabaja con sistemas de coordenadas de forma muy similar a la actual. La mayoría de autores trabaja con más de un tipo de coordenadas (cartesianas, polares, tangenciales…), da distintas ecuaciones de la recta y estudia problemas de incidencia, paralelismo, distancias y ángulos. Por tanto no podemos afirmar tajantemente que "los modos de hacer Geometría Analítica durante casi todo el siglo están más próximos a los de Descartes…", una afirmación más correcta sería que hasta los años 80 se conserva una forma de combinar el Álgebra y la Geometría para resolver problemas geométricos -que en ese tiempo se consideraba Geometría Analítica-, que está más próxima a los métodos de Descartes que a los actuales.

Hipótesis 4: La Geometría Analítica fue evolucionando durante el siglo XIX de una Geometría próxima a la de Descartes hacia la Geometría Analítica Proyectiva, probablemente por la influencia de la escuela alemana.

Como hemos constatado mediante el análisis de contenido realizado a los textos y desarrollado en el capítulo 4, efectivamente a lo largo del siglo XIX nos encontramos con dos maneras de hacer Geometría Analítica completamente diferentes. La primera de ella, que combina métodos sintéticos y analíticos y que en muchos aspectos se asemeja a la desarrollada por Descartes en su *Geometría* forma parte de los contenidos de Geometría Analítica de los textos utilizados en la Facultad de Ciencias hasta los años 80. A partir de esta fecha aparecen nuevas publicaciones, de los catedráticos de esta asignatura en Madrid, Barcelona o Valencia en la que la Geometría Analítica contiene, o incluso se basa, en los conceptos de la Geometría Proyectiva. El paso de una a otra no puede considerarse una evolución al ser tan distintas, lo que vemos en las obras es la desaparición de los contenidos de la primera, y la aparición de los de la segunda, siendo las obras de Solís o Mundi las que marcan el punto de inflexión. En la de Solís aparecen unos restos de lo que algunos autores llaman análisis determinado, y aunque en la edición estudiada de las *Lecciones* de Mundi no aparece este tipo de geometría estudios anteriores nos muestran que el autor volvió a incluirlos en la segunda edición. Esto nos indica que aún a finales de siglo se conservaban algunas reminiscencias de esta antigua manera de hacer Geometría Analítica, que hoy en día ni siquiera se considera como tal.

Por otra parte, de forma simultánea al análisis determinado, encontramos en las obras de Geometría Analítica el análisis indeterminado, en el que se trabaja con sistemas de coordenadas. Desde este punto de vista sí vemos que existe una evolución de la Geometría métrica, que aparece en todas las obras desde principios de siglo hasta los años ochenta, a la proyectiva que tiene su culmen en la obra de Vegas, en la que la primera se considera un caso particular de la segunda. De nuevo el punto de inflexión lo encontramos en las obras de Solís y Mundi, en las que se incorporan ya algunos conceptos y métodos propios de la Geometría Proyectiva, aunque se siguen basando en la Métrica.

En cuanto a la influencia de la escuela alemana, el estudio de la Matemática española en el XIX que hemos desarrollado en el punto 2.4 nos muestra esta influencia en la matemática española en general y en la geometría en particular, pero además en la obra de Vegas se explicita el trabajo de Plücker y Möbius, máximos exponentes del desarrollo de la Geometría Analítico-Proyectiva en Alemania

Hipótesis 5: Esta evolución fue lenta en nuestro país, llevándose a cabo en el último tercio de siglo.

Como hemos señalado al verificar la hipótesis anterior el paso de de la geometría métrica a la proyectiva se produjo en los años 80 del siglo, al menos en lo que se refiere a los estudios universitarios. A pesar de que en 1875 Echegaray había publicado su *Introducción a la Geometría Superior*, donde da a conocer en nuestro país la geometría de Chasles, vemos que los contenidos de Geometría Proyectiva no se introducen en los textos utilizados en la universidad hasta 1883, al menos en lo que se refiere a la Geometría Analítica. Podemos decir que la evolución de la Geometría Métrica a la Proyectiva más que lenta, fue tardía, como pasó en otros tantos aspectos de las Ciencias en nuestro país en este siglo.

> **Hipótesis 6:** Las condiciones sociales, culturales y políticas de España en aquellos años influyeron de forma decisiva en esta lenta evolución y en el tratamiento de la Geometría Analítica, y en general de las Matemáticas, en los diferentes planes de estudios de los niveles considerados.

Como hemos visto en el apartado 5.2 el contexto histórico influyó decisivamente en el desarrollo de la ciencia en España y en particular de la Geometría Analítica, así como en la evolución del sistema educativo.

El esfuerzo de renovación científica existente en nuestro país a finales del siglo XVIII se interrumpe bruscamente durante la Guerra de Independencia y a lo largo de todo el reinado de Fernando VII. Al inicio del segundo tercio del siglo XIX empiezan a adoptarse algunas medidas con las que se trata de retomar de algún modo el espíritu de los últimos años de la Ilustración, como hemos visto. Pero las numerosas guerras –de sucesión, cantonales y coloniales- y la inestabilidad política y social, no harán posibles la creación de un sistema educativo moderno y estable. Todo esto junto, con el poder de la Iglesia, entorpecerá el desarrollo de la Ciencia en España al mismo ritmo que en otros países, hasta el último tercio del siglo. Como hemos visto el desarrollo de las libertades existente en el Sexenio y la estabilidad política de Restauración posibilitaron un nuevo impulso en el desarrollo de la Ciencia y la Técnica en España, que se vio culminado con los movimientos de renovación -a todos los niveles- que surgieron en el país tras la crisis de 1898.

5.4. Limitaciones de la investigación

Toda investigación a nivel de tesis doctoral conlleva una serie de dificultades y limitaciones que van apareciendo a los largo del proceso y que condicionan algunas de las actividades realizadas. En algunos casos estas limitaciones llegan a paralizar el trabajo y en otros hacen necesario cambios importantes en el enfoque o en los objetivos del mismo.

En nuestro caso las principales dificultades que encontramos fueron las siguientes:

- En primer lugar encontrar una herramienta de análisis que nos permitiera plasmar no sólo los contenidos de Geometría Analítica que se estudiaron durante el periodo considerado, sino cómo hacían Geometría Analítica los matemáticos de esta época. Al encontrarnos con unos métodos geométricos tan distintos a los utilizados hoy en día necesitábamos una herramienta de análisis que nos permitiera no sólo ver qué se enseñaba sino cómo se hacía.
- Otra de las limitaciones que nos hemos encontrado está relacionada con la documentación. Existen ediciones de los textos seleccionados que no hemos podido localizar, o que no estaban disponibles, lo que nos ha llevado a no poder hacer un reparto más homogéneo de las obras a través del siglo, así, por ejemplo de las tres últimas obras analizadas dos son de 1883, y la siguiente de 1906. Existe una edición de la obra de Mundi de 1893 que nos hubiese gustado analizar pero que no ha sido posible encontrar. También hemos tenido dificultades a la hora de localizar algunos artículos referentes al estado de la cuestión, que hemos visto citados en otros trabajos, siendo en algunos casos imposible su localización.
- También nos hemos visto limitados en cierto modo por no conocer el francés. Algunas de las obras que aparecen en las listas de texto aprobadas por el

gobierno o que aparecen citadas en otras investigaciones como utilizadas en España en los niveles educativos considerados son de matemáticos franceses, el desconocer el idioma nos ha limitado al estudio de las obras de matemáticos españoles, o traducidas al castellano, como en el caso de Lacroix.

- La extensión del trabajo no ha hecho posible el estudio directo de las obras de Descartes, Carnot o Monge, que citamos como influencias de los textos analizados, por lo que hemos acudido a fuentes secundarias para estudiar su contenido.
- Una limitación importante referente a la investigadora es el hecho de no poder dedicarse a tiempo completo a la investigación, por trabajar en un IES, lo que también la ha dificultado a la hora de presentar los avances de la investigación en foros como Congresos y Simposios, que suponen una gran ayuda en la revisión y evaluación del trabajo que se va haciendo.
- Por último señalar que cuando se había llevado a cabo el análisis de gran número de los textos fue necesario cambiar de director, lo que conllevó una reorganización y un nuevo enfoque en algunos aspectos del trabajo.

5.5. Algunas líneas para trabajos futuros

Esta investigación nos ha permitido mostrar algunos aspectos interesantes sobre la enseñanza de la Geometría Analítica en nuestro país, pero aún quedan abiertos otros entre los que destacamos los siguientes:

- Hemos citado en varias ocasiones las obras de Descartes, Monge, Carnot, Echegaray y Plücker como importantes influencias en muchos de los textos analizados. Sería interesante analizar estos textos y compararlos con alguna de las obras analizadas para ver hasta qué punto llega esa influencia.
- También en varias ocasiones hemos mencionado la importancia que tuvieron las Academias Militares y las Escuelas de Ingenieros en el desarrollo de la Geometría, y en particular la Analítica, en nuestro país. Para completar nuestro trabajo parece conveniente realizar uno similar centrándose en estos centros educativos. Esto serviría además para contrastar si el nivel educativo en estos centros era superior al de la Universidad, como afirman varios historiadores de la Ciencia.
- Puesto que nuestro trabajo se centra en la geometría plana y el estudio de la recta, otro aspecto que se podría considerar para completar el trabajo es el de estudiar la geometría del espacio, o centrarse en el estudio de las curvas, para ver si estos contenidos aportan información adicional sobre la evolución de la Geometría Analítica.
- Nuestra investigación finaliza en los primeros años del siglo XX. En el trabajo realizado para la obtención de la Suficiencia Investigadora estudiamos todos los planes de estudios de secundaria del XIX y primer tercio del XX. En él pudimos constatar que la Geometría Analítica desaparece del currículo de este nivel educativo a partir de la Ley Moyano, y vuelve a aparecer en el plan de 1934. Se podría continuar nuestra investigación a lo largo del siglo XX y en el nivel de secundaria para ver cómo evolucionó la Geometría Analítica dentro del currículo de estos estudios.
- Por último, y dada la visión geométrica que tenían los matemáticos de esta época, y la controversia entre Geometría Analítica o Sintética que se mantuvo

durante todo el siglo, se podría realizar un estudio sobre la influencia de los métodos algebraicos en la pérdida de visión geométrica en la resolución de problemas en los estudiantes de secundaria, frente a la utilización de métodos puramente sintéticos, o la mezcla de los dos, al estilo de los geómetras decimonónicos.

Referencias bibliográficas

Alberto Lista y Aragón. El autor: Vida y obra. (n.d.). En *Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes.* Recuperado en junio de 2014 de http://www.cervantesvirtual.com/portales/alberto_lista/autor_biografia/

Alonso, M.E.; Del Amo, M. C; Mallavibarrena, R; Pinto, I; Ruiz, J. M. (2002). Geometría Proyectiva, una exposición. *Proyectos UCM de Innovación Educativa. Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM.* Recuperado de http://www.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/expogp.html, en enero de 2014.

Amaral, A., Ralha, E. y Gomes, A. (2011). The historical approach of the fundamental concept of measurement in Portuguese mathematics textbooks for 5th and 6th grades. En E. Barbin, M. Kronfellner y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Sixth European Summer University- History and Epistemology in Mathematics Education* [CD-ROM], 259-270. Vienna, Austria.

Ausejo, E. (n.d. a). Rodríguez de Lista y Aragón, Alberto (1775-1848). En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española.* Recuperado el 28 de junio de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3415%3Arodrez-de-lista-y-aragalberto-1775-1848&catid=45%3Abiograf-de-matemcos-espas&directory=67&limitstart=1

Ausejo, E. (n.d. b). Vallejo, José Mariano (1779-1846). En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española.* Recuperado en junio de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3423%3Avallejo-josariano-1779-1846&catid=45%3Abiograf-de-matemcos-espas&directory=67&showall=1

Ausejo, E. (n.d. c). Zorraquín, Mariano. En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española.* Recuperado en junio de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3427%3Azorraqu-mariano--1823&catid=45%3Abiograf-de-matemcos-espas&directory=67&showall=1

Bagni, G. (2000). The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. *Proceedings of CERME-1,* Schwank, I. (Ed.), II. Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, 220-231.

Barbin, E. (2012). Teaching of conics in 19th and 20th centuries in France: On the conditions of changing (1854-1997) *Proceedings of the Second International Conference on the History of Mathematics Education.* Lisbon, Portugal.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido.* España: Ediciones Akal.

Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process, en Athen y Kunle, (eds.) *Proceedings of the Third International Congress on Mathemaical Education* (Universität Karlsrule, Zentralbatt für didktik der Mathematik: Karlsrule, RFA).

Bjarnadóttir, K. (2006). *Mathematical education in Iceland in historical context* [La educación matemática en Islandia en un contexto histórico] (Tesis doctoral). Recuperado de http://rudar.ruc.dk/bitstream/1800/3491/1/IMFUFA_456.pdf en enero de 2014.

Bjarnadóttir (2012). Values and virtues of a rural society reflect in 18th and 19th century aritmetic terxtbooks in Iceland. *Proceedings of the Second International Conference on the History of Mathematics Education.*Lisbon, Portugal.

Boyer, C.B (1987) *Historia de la Matemática.* Madrid. Alianza Editorial. S.A.

Bruno, A. y Martinón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *Suma, 34*, 27-44.

Caballer, M.C. (2006). *El álgebra en la Enseñanza Secundaria en España (1836-1936).* Tesis doctoral. UPV/EHU.

Cano Pavón, J.M. (1998). El Real Instituto Industrial de Madrid (1850-1867): medios humanos y materiales. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, 21*, 33-62.

Cantoral, R. (1995): *Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas* (documento inédito) (Citado en González y Sierra, 2002).

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L.Dir., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). : ICE - Horsori.

Chevallard, Y. y Joshua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de transposition didactique: la notion de distance. *Recherche en Didactique des mathematiques.* 3(1), 159-239.

Chevallard, Y. (1985). *La tranposition didactique du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chica, A. (2001) La matemática en sus personajes. Descartes. Geometría y método. Madrid. NIVOLA

Choppin, A. (2000). Los manuales escolares de ayer a hoy el ejemplo de Francia. *Revista interuniversitaria,19,* 13-37.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Collados, E 2008. El concepto de dibujo y su práctica en los libros de texto de educación primaria publicados en España en el periodo comprendido entre 1915-1900. *Historia de la Educación,* 27, 323-346.

Delgado, B. 1983 Los libros de texto como fuente para la historia de la Educación, *Historia de la Educación*, 2, 353-358.

Descartes, R. (1637) *La Geometría*. Traducido por Pedro Rossell. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1947.

Dhombres, J. (1984). French Mathematical Textbooks form Bézout to Cauchy, *Historia scientarum*, 28 pp. 91-137.

Dormolen, J. (1986).Textual Análisis. En Christiansen, B.; Howson, A. G. y Otte, M. (eds.): *Perspectives on Mathematics Education*, Dordrecht, Reidel. 141-171.

Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana. (1929). Madrid. Espasa-Calpe, S.A.

Escribano Benito, J.J. (1998). Los elementos de Geometría Analítica de Sixto Cámara Tecedor. *Matemáticos y región. La Rioja. Sobre matemáticos riojanos y matemáticos en La Rioja.* (coord.) Luis Español González, pp.123-136.

Escribano Benito, J.J. (2000) Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española. Tesis doctoral. Universidad de la Rioja.

Escribano Benito, J J., Español, L. (2004) El Programa de Geometría Analítica (1880) de Santiago Mundi. En: *Actas VIII Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 2,*845-858. Logroño. Universidad de la Rioja.

Español, L. (2003) Avances en la historia de la Geometría contemporánea española durante el último cuarto de siglo. *LLULL*, vol. 26. pp. 809-836.

Esteves, A.E. (2008) *Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Etayo, J.J. (1988). Los caminos de la Geometría. *Historia de la Matemática*. pp. 11-29. Recuperado de http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5151, en enero de 2012.

Etayo, J.J. (1992). El reinado de la Geometría Proyectiva. *Historia de la Matemática*. pp. 115-138. Recuperado en enero de 2012 de http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5161.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning problems in mathematics, 11*(2). Pp.3-6.

Fermat, P. (1891). *Oeuvres*. Vol I. C.Henry, P.Tannery (eds). Gauthier-Villars. París.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). *From an Aritmética to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 years old)*, en Moser, J. (ed.): *Proceedings on the Sixth Annual meeting for the Pshycology of Mathematics Education*, North American Chapter, Madison, Wisconsin, EE.UU.51-56

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del algebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra.

Gaceta de Madrid (1836), (1843), (1845), (1846), (1847), (1848), (1849), (1850), (1851), (1852), (1853), (1854), (1855), (1856). Madrid. Imprenta Real

García Camarero, E. (1984). La matemática en la España del siglo XIX. En Hormigón, M. (coord.) *La ciencia y la técnica en España entre 1850 y 1936: comunicaciones. Actas II Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias. 2*, pp.115-130. SEHCYT.

Gascón Pérez, J (2002) Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato ¿Dos mundos completamente separados? *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *39,*13-26.

Gentil Baldrich, J.M. (1999). Nuevos datos sobre la vida y la obra de José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846). *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, 22*, 117-186.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática*. *Séptimo Simposio de la SEIEM*. pp.79-85. Granada. España; Universidad de Granada.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA. 7(3),* 251-292.(Citado en Maz, 2005)

González, M. T. (2002): *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca

González, M. T. y Sierra, M. (2002) La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la educación, 21*.177-198.

González, M. T. y Sierra, M. (2003) El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro, P. Flores, T. Orega, L. Rico y A. Vallecillo (eds.) *Investigación en Educación Matemática VII*, 109-130 Granada: Universidad de Granada.

González, M.T. y Sierra, M. (2004) Metodología del análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *28(3),* 389-408.

González Urbaneja, P.M. (2004a). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,45*, 17-28.

González Urbaneja, P.M. (2004b). Orígenes y evolución histórica de la Geometría Analítica. En *La Història de la Matemàtica com a recurs didàctic i instrument d'integració cultural de la Matemàtica*. (Documento 2.1).Memoria. Licencia por estudios retribuida curso 2003/2004. Recuperado el 15 de septiembre de 2013 de http://www.xtec.cat/web/innovacio/bdllicencies

González Urbaneja, P.M. (2007).Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria. 30,* 205-236.

Hernández Pérez, C; Medrano Pérez, J. (1990). José Mariano Vallejo: Notas para una biografía científica. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, 13*, 427-446.

Hernández, J.M., Ayuso, F. y Requero, M. (1997) *Historia de España.* Madrid. Edit. Akal

Hormigón, M. (1983). García de Galdeano (1846-1924) y la modernización de la Geometría en España. *DYNAMIS, 3*,199-229.

Hormigón, M. (1991) *Las matemáticas en el siglo XIX*. Historia de la Ciencia y de la Técnica, 38. Madrid. Ediciones Akal. S.A.

Howson, G (1995). *Mathematics Textbooks: A comparative Study of grade 8 Texts.* Vancouver: Pacific Educational Press.

Irueste, J.A. (1912). D. Juan Cortázar. *Revista de la Sociedad Matemática Española,8*, 285-290. Recuperado en julio de 2014 de http://elgranerocomun.net/D-Juan-Cortazar.html

Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

La institución libre de enseñanza. (n.d). En *Universidad Politécnica de Cartagena*. Recuperado de http://www.upct.es/seeu/_as/divulgacion_cyt_09/Libro_Historia_Ciencia/web/mapa-centros/Institucion%20Libre%20de%20Ensenanza.htm en marzo de 2014.

López, C. (2011). *La formación de maestros en aritmética y álgebra a través de los libros de texto.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. España.

López, I. (2011). *Análisis sistémico de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la investigación histórica en Educación Matemática.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. España.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). This is so: a text on text. En A. Bisop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde. *International Handbook of Mathematics Education,* 371-410. Dordrecht: Kluwer.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática* [Cronología reciente de la enseñanza de la matemática]. Lisboa, Portugal: APM.

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Revista Iberoamericana de Educação Matemática, Março, 5*, 91-110.

Matos, J. M. (2007). História do ensino da matemática em Portugal: a constituição de um campo de investigação. En J. M. Matos y W, Valente (Org.), *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudios.* São Paulo, Brasil: CAPES-GRICES.

Maz, A. (1999) La historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En Berenguer, M.I; Cardeñoso, J.M. y Torquero, M. (Eds). *Investigaciones en el aula de matemátcas. Matemáticas en la sociedad.* (pp. 205-209) Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática.

Maz, A (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Maz, A., Torralbo, M., Rico, L. (Eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Maz, A (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander. SEIEM

Millán, A. (1991). Los estudios de Geometría Superior en España en el siglo XIX. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, *14*, 117-186.

Montesinos, J. L (1995) Descartes: El álgebra y la geometría. *Actas año II: De Arquímedes a Leibniz. Tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico*. (pp. 391-404). Canarias. Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia.

Montesinos, J. L (2000) Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria. Madrid. Síntesis

Moreno, A(2000). La física en los manuales escolares un medio resistente a la renovación (1845-1900).*Historia de la educación: Revista interuniversitaria*, *19*, 51-93.

Moreno Castillo, R. (2005). Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría. *La matemática en sus personajes. 21*. Madrid. Nivola.

Navarro, M; Puig, L.(2012) Aspectes de la representació gráfica de funcions en el Tractat Elemental de Trigonometria de Lacroix. *Actes de la IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. (pp. 73-85). Barcelona, SCHCT-IEC. Grapí Vilumara, P; Massa Esteve, M.R. (ed.)

Nolla, R. (2001). *Estudis i activitats sobre problemas clau de la Història de la Matemàtica. Per una aproximació genética al tractament de les idees matemàtiques.* Memòria de Llicència d'estudis. Generalitat de Catalanya. Recuperado de http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200001/resums/rnolla.htm en enero de 2014.

Odriozola Oñativia, José. (n.d).En *Enciclopedia Auñamendi-Fondo Bernardo Estornés Lasa*. Recuperado de http://www.euskomedia.org/aunamendi/99088 en julio de 2014.

Otte, M. (1986). What is a text? En B. Christiansen, A.G.Howson, M. Otte, (eds.). *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 173-203.

Peralta, J (1999). La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX Madrid. NIVOLA.

Peralta, J (2008). La matemática española del siglo XIX. *La Ciencia antes de la Gran Guerra*. Fundación la Orotava de Historia de la Ciencia.

Pérez de Anaya. F. (1848). *Biografía de Alberto Lista y Aragón, seguida de una colección de poesías inéditas unas, y otras no comprendidas en las ediciones que se han hecho de las de dicho señor.* Madrid, Cuesta.

Peset, M y Peset, J.L. (1992). Las universidades españolas del siglo XIX y las ciencias. En López Piñero, J.M. (Eds.) *La Ciencia en España en el siglo XIX. Revista AYER. 7,* 19-49.

Piaget, J. (1979). *Naturaleza y métodos de la epistemología.* Buenos aires: Paidos. (Citado en Maz, 2005)

Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en los libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892).*Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* New Yrk Routledge y Kegan Paul. Traducción cast.(1990). *El lenguaje matemático en el aula.*Madrid: Ministerio de Educación y Ciencias-Ediciones Morata.

Pimm, D. (1994). Mathematics classromm lenguaje form, function and forcé. En R. Bielher, R.W. Scholtz, R. Straber y B. Winkelmann (eds.). *Didactic of mathematiques as a scientific discipline,* 159-169. Dordrecht: Kluwer.

Puelles Benítez, M. (2000). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. *Historia de la Educación*, *19*. 5-11.

Puig, L. (1994). El *De Numéris Datis* de Jordanus Nemoratius como sistema matemático de signos , *Mathesis*, *10*. 47-92.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* 61-94. Barcelona: Horsori / ICE.

Rey Pastor, J y Babini, J (1986). *Historia de la Matemática. Vol 2. Del Renacimiento a la Actualidad*. Barcelona, GEDISA.S.A.

Rey Pastor. 1915. Discurso Inaugural del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el progreso de las Ciencias. http://www.ateneodemadrid.com/biblioteca_digital/folletos/Discursos-011.pdf

Rico, L y otros. (2008) Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA*. *58*, 7-23. FESPM

Rodríguez, M. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 12*(1), 45-56.

Ruiz, J. (1976) El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía.134*, 449-475. Madrid.

Sánchez Ron, J.M. (1992) Las ciencias físico-matemáticas en la España del siglo XIX. En López Piñero, J.M. (Eds.) *La Ciencia en España en el siglo XIX. Revista AYER. 7,* 51-84.

Schubring, Gert (1987) On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, *7 (3)*, 41-51.

Schubring, Gert (2005) *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer.

Segovia, I., y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed.): *Didáctica de las matemáticas en educación primaria. 11*. 83-104. Madrid. Síntesis.

Sylvestre François Lacroix (n.d.) En *MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado de http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Lacroix.html en junio 2014.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. pp. 179-194. Barcelona, España: Horsori.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. *Números, 43-44*, 93-96.

Sierra, M., González, M. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C: O. U): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Tiana, A. (2000) El Proyecto Manes y la investigación histórica sobre los manuales escolares (siglos XIX y XX). *Historia de la educación: Revista interuniversitaria,19,* 179-194.

Tortella, G., Martí, C., Jover, J. Mª y otros. (1981) Dirigida por Tuñón, M. *Historia de España. Tomo VIII: Revolución burguesa, oligarquía y constitucionalismo (1834-1923).* Barcelona. Edit. LABOR.

Utande, M (1964) *Planes de estudios de enseñanza media (1787-1963)*.Madrid. Dirección general de Enseñanza Media.

Vea, F. (1995) *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX.* Zaragoza. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Facultad de Ciencias (Matemáticas)

Vea, F. (1998) La Facultad de Ciencias (1857-1868).En García, J.L., Moreno, J.M., Ruiz, G. (coord.), *Estudios de Historia de las Técnicas, la Arqueología Industrial y las Ciencias (II): VI Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. pp. 541-552. Segovia-La Granja. Junta de Castilla y León.

Vegas, J.M. (n.d). Vegas Puebla-Collado, Miguel (1856-1943). En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española*. Recuperado el 28 de junio de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article

&id=3424%3Avegas-puebla-collado-miguel-1856-1943&catid=45%3Abiograf-de-matemcos-espas&directory=67

Velamazán, M.A. (1993) Nuevos datos sobre los estudios de Geometría Superior en España en el siglo XIX: la aportación militar. *LLULL*, *16*, 587-620

Velamazán, M.A. (1994) *La enseñanza de las matemáticas en las academias militares en España en el siglo XIX*. Zaragoza. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Facultad de Ciencias (Matemáticas)

Referencias bibliográficas de los libros analizados

Cortázar, J.(1862). *Geometría Analítica.* Madrid. Imprenta de D.F. Sánchez.

Gómez Santa María, A. (1846) *Tratado completo de matemáticas.* Tomo IV. Madrid. Imprenta de corrales y compañía.

Lacroix, S.F. (1846) *Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría.* Tomo IV. Madrid. En la Imprenta Nacional.

Lista, A. (1823) *Elementos de matematicas puras y mistas (sic).* Tomo III. Madrid. Imprenta de Don LeonAmarita.

Mundi, S. (1883) *Lecciones De Geometría Analítica.* Barcelona. Establecimiento tipográfico la academia, de Evaristo Ullastres.

Odriozola, J. (1829) *Curso completo de matemáticas puras.* Tomo III. Madrid. Imprenta que fue de García.

Sánchez Solís, I. (1883)*Geometría Analítica.* Madrid. Establecimiento tipográfico de G. Juste.

Vallejo, J.M (1817) *Tratado elemental de matemáticas.*TomoII. Madrid. Imprenta de Doña Catalina Piñuela.

Vallejo, J.M (1840) *Compendio de matemáticas puras y mixtas. Tomo II*. Madrid. Imprenta Garrasayaza.

Vegas, M. (1906) *Geometría Analítica.* Madrid. Establecimiento tipográfico de G. Juste.

Zorraquín, M (1819). *Geometría analítica-descriptiva.* Alcalá. Impresor de la Real Universidad.

Anexo 1: Índice cronológico

	Acontecimientos políticos		Normativa educativa
1833	Muerte de Fernando VII. Regencia de Mª Cristina Inicio de la primera guerra carlista		
1834	Martínez de la Rosa (moderado) es nombrado presidente del gobierno		
1835	El Conde de Toreno (también moderado) sustituye a Martínez de la Rosa En el verano Mendizábal (progresista) sustituye al Conde de Toreno al frente del gobierno. Expulsión de los jesuitas.	**1835**	Real orden de 23 de junio de 1835 por la que se suprimen los estudios de *filosofía* en los centros religiosos.
1836	Decreto de desamortización. **mayo** Dimite Medizábal y comienza un nuevo gobierno moderado **12 de agosto** Motín de La Granja, restablecimiento de la Constitución de 1812. Gobierno progresista	**1836**	Plan General de Instrucción pública de 4 de agosto de 1836 (plan del Duque de Rivas) Arreglo provisional de estudios de 29 de octubre de 1836
1837	Nueva Constitución Los moderados ganan las elecciones y en los siguientes tres años los moderados estarán en el gobierno.		
		1838	*Proyecto de Ley sobre la Instrucción secundaria y superior* del Marqués de Someruelos
1839	Pacto de Vergara, fin de la primera guerra carlista.		
1840	Renuncia de Mª Cristina		
1841	Comienza la regencia de Espartero	**1841**	*Proyecto de Ley sobre la organización de la enseñanza intermedia y superior de 12 de julio de 1841*, propuesto por Facundo Infante.

1843	**julio** Espartero se exilia en Londres. **noviembre** Isabel II es declarada mayor de edad	**1843**	Plan de estudios para la Facultad de filosofía de **8 de junio** de 1843 **30 de agosto**, se deroga el plan de estudios anterior y se restablece el arreglo provisional de 29 de octubre de 1836
1844	Comienza la *década moderada* **mayo** Narváez sube al poder		
1845	Se promulga una nueva Constitución de corte conservador	**1845**	Plan de estudios de 17 de septiembre (Plan Pidal)
1846	**febrero** Dimisión de Narváez	**1846**	Plan de estudios de 24 de junio
1847	**octubre** Comienza la dictadura de Narváez	**1847**	Plan de estudios de 8 de julio
1849		**1849**	Plan de estudios de 14 de agosto
1850	**enero** Fin de la dictadura de Narváez Bravo Murillo asume la presidencia.	**1850**	Plan de estudios de 28 de agosto
1851	**enero** **marzo** Firma del Concordato con la Santa Sede	**1851**	Reglamento de 10 de septiembre de 1851
1852	**Diciembre** Bravo Murillo deja la presidencia. Se suceden varios gobiernos moderados.	**1852**	Reglamento de estudios de 10 de septiembre de 1852
1854	**junio** Pronunciamiento de Vicálvaro. Comienza el *Bienio progresista.* **julio** Gobierno Espartero- O'Donnell		
		1855	Proyecto de Ley de Instrucción pública de 9 de diciembre

1856	Comienza la segunda guerra carlista **julio** Dimisión de Espartero **octubre** Gobierno de Narváez		
		1857	Ley de bases de 17 de julio de 1857 Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857 (Ley Moyano) Plan de estudios provisional para el curso 1857/58
1858	Gobierno de O'Donnell	**1858**	Programas de las Facultades de Filosofía y Letras, Ciencias, Derecho, Medicina y Farmacia de 11 de septiembre,
1863	Fin del Gobierno de O'Donnell	**1863**	
1866	Pacto de Ostende entre progresistas y demócratas contra Isabel II	**1866**	Plan de estudios de 24 de octubre (Plan de Orovio)
1868	Alzamiento de Cádiz. Comienza el Sexenio Revolucionario	**1868**	
1871	Amadeo I Rey de España		
1873	**febrero** Primera República española	**1873**	
			Plan de Estudios de Eduardo Chao
1874	Alfonso XII es proclamado Rey. Gobierno conservador de Cánovas		
1876	Se aprueba una nueva Constitución		Se funda la Institución Libre de Enseñanza
		1880	Plan Lasala
1881	Gobierno liberal de Sagasta		
1884	Gobierno conservador de Cánovas		
1885	Muere Alfonso XII. Comienza la regencia de Mª Cristina Comienza la alternancia de partidos		
		1900	Plan de estudios de García Alix
1902	Alfonso XIII es proclamado Rey		
1904	Se inicia la penetración española en el reino de Marruecos		
1909	**julio** *Semana Trágica*		

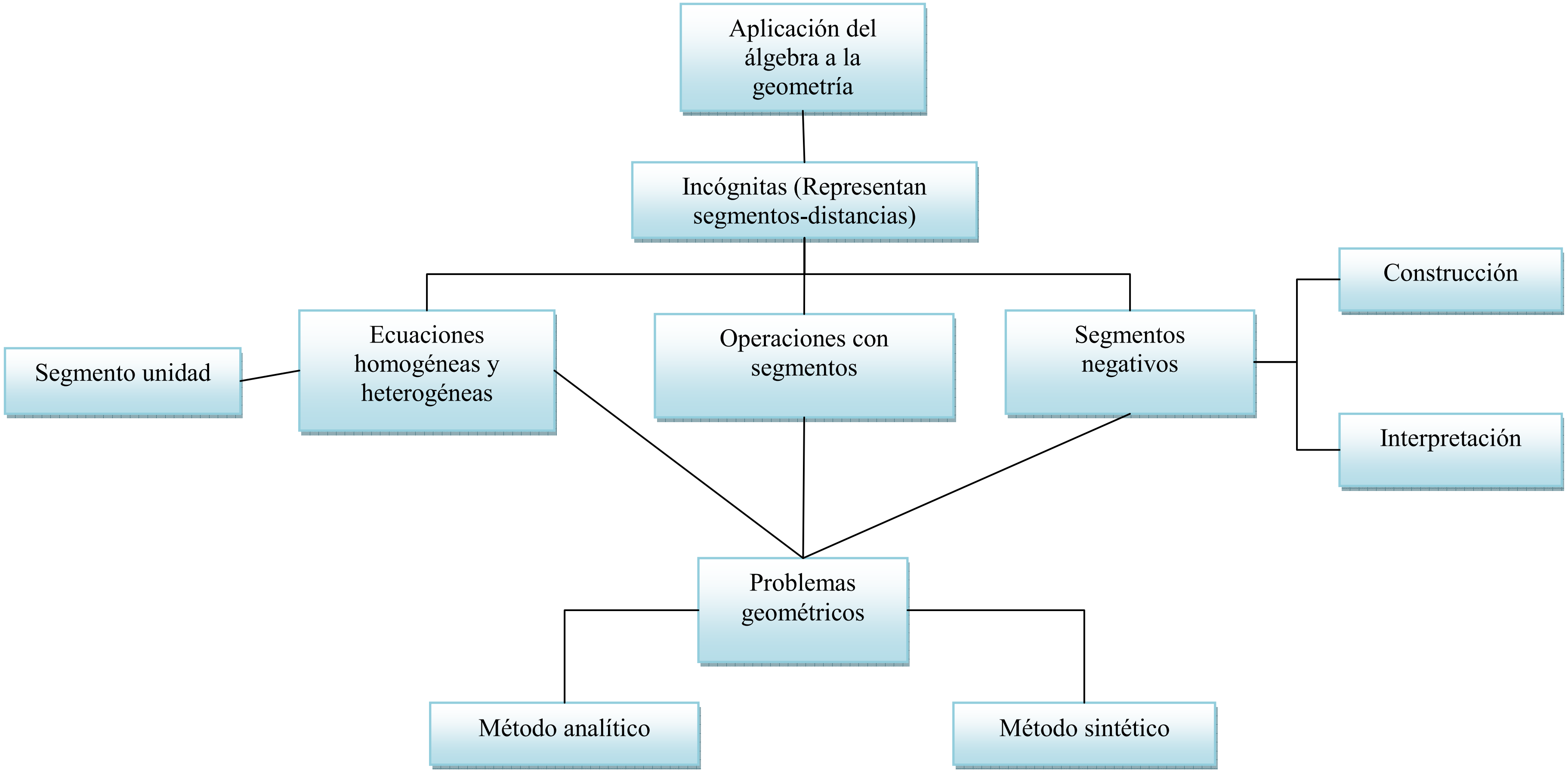
Anexo 2: Obras de Geometría

	Obras extranjeras		Obras españolas
1637	*La Geometría* -Descartes		
1639	*Proyecto borrador del alcance sobre lo que …* - Desargues		
1649	*La Geometria a Renato Descartes- Van Shooten*		
1679	*Ad locos planos et solidos isagoge*- Fermat		
		1706	*Elementos de matemáticas*- Pedro de Ulloa
1748	*Introductio in Analysis Infinitorum*- Euler		
		1775-1781	*Elementos de Matemáticas*- Benito Bails
1795-1799	*Geoemtría Descriptiva*- Monge	**1798**	*Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría*-Lacroix
1801	*De la correlación de las figuras geométricas* -Carnot		

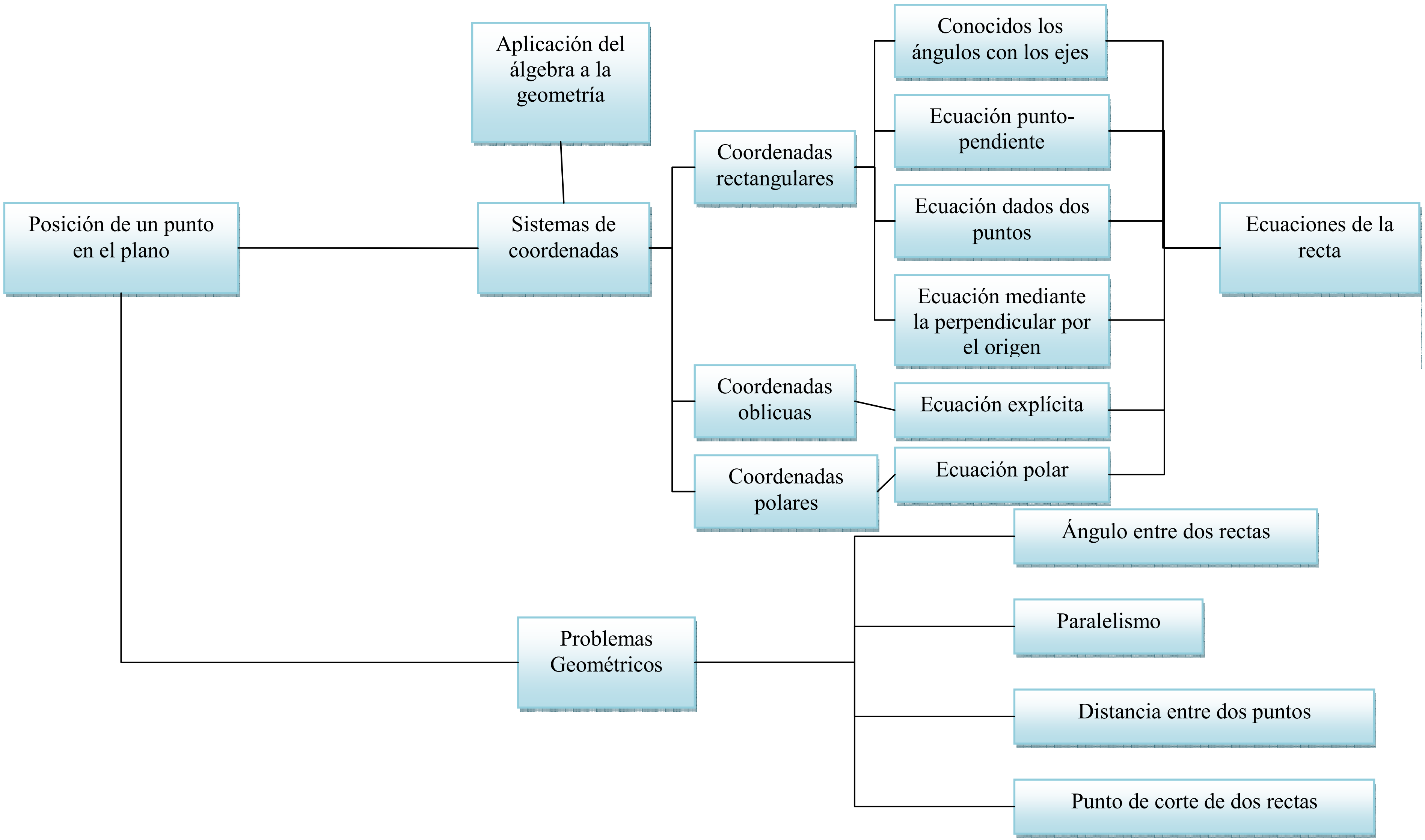
1802	*Aplicación del álgebra a la geometría*-Monge		
1803	*Geometría de la posición*-Carnot		
		1813	*Tratado elemental de matemáticas*-Vallejo
		1819	*Geometría analítica-descriptiva*- Zorraquín *Compendio de matemáticas puras y mixtas*-Vallejo *Elementos de matematicas puras y mistas*-Lista
1822	*Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*-Poncelet		
1827	*El cálculo baricéntrico* - Möebius		
1829	*Über ein neues coordinaten*- Plücker		*Curso completo de matemáticas puras*-Odriozola
1832	*Desarrollo sistemático de la dependencia mutua de las figuras geométricas*- Steiner		
		1846	*Tratado completo de matemáticas*-Gómez de Santa María
1847	*Die Geometrie der Lage*-Staud		
1852	*Tratado de Geometría Superior*-Chasles		
		1855	*Tratado de Geometría Analítica*-Cortázar
1856-1858	*Beiträgezur Geometrie der Large*-Staud		
1872	*Programa Erlangen*- Klein		
		1883	*Lecciones de Geometría Analítica*-Mundi *Geometría Analítica*-Sánchez Solís
		1884	*Geometría Analítica*-Vegas

Anexo3: Mapas conceptuales

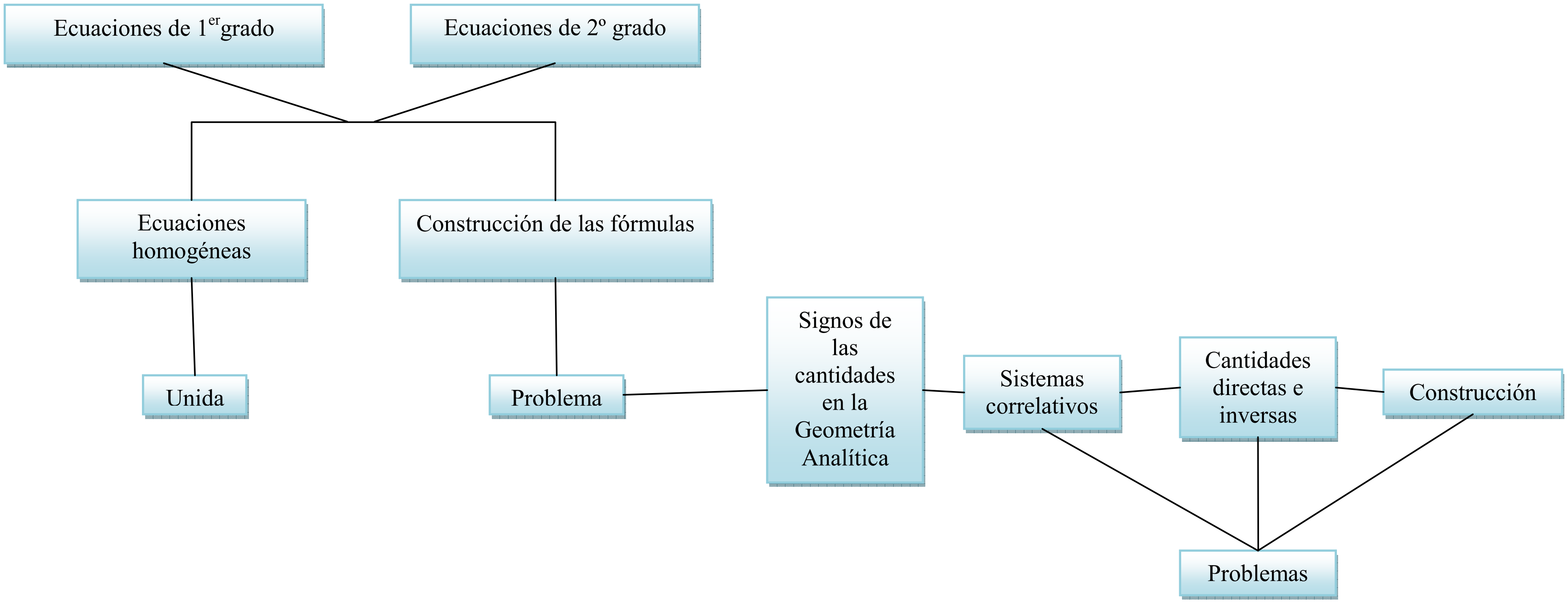
TRATADO ELEMENTAL DE MATEMÁTICAS ("PROBLEMAS DETERMINADOS") - J.M. VALLEJO (1817)



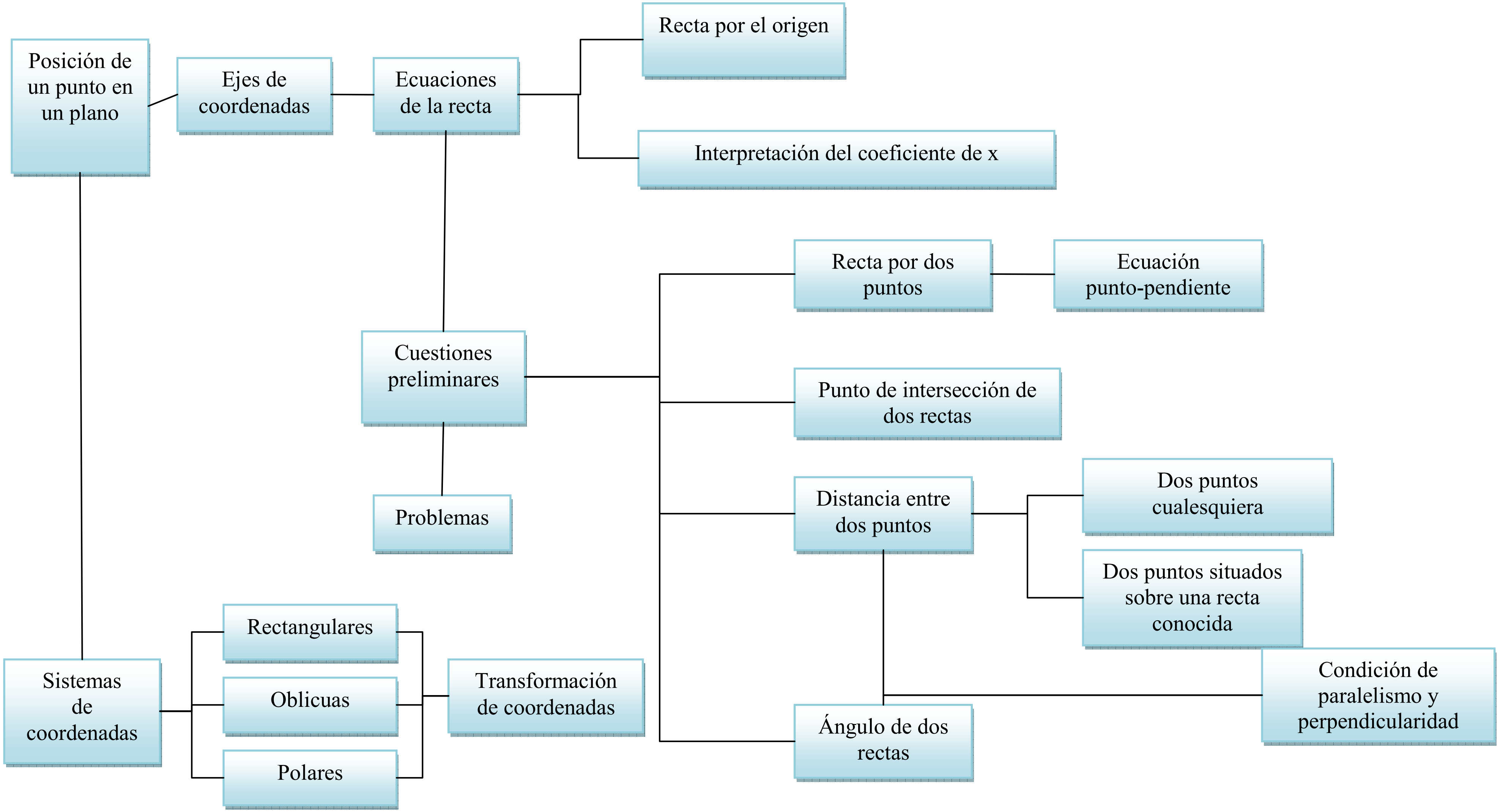
TRATADO ELEMENTAL DE MATEMÁTICAS ("PROBLEMAS INDETERMINADOS") - J.M. VALLEJO (1817)



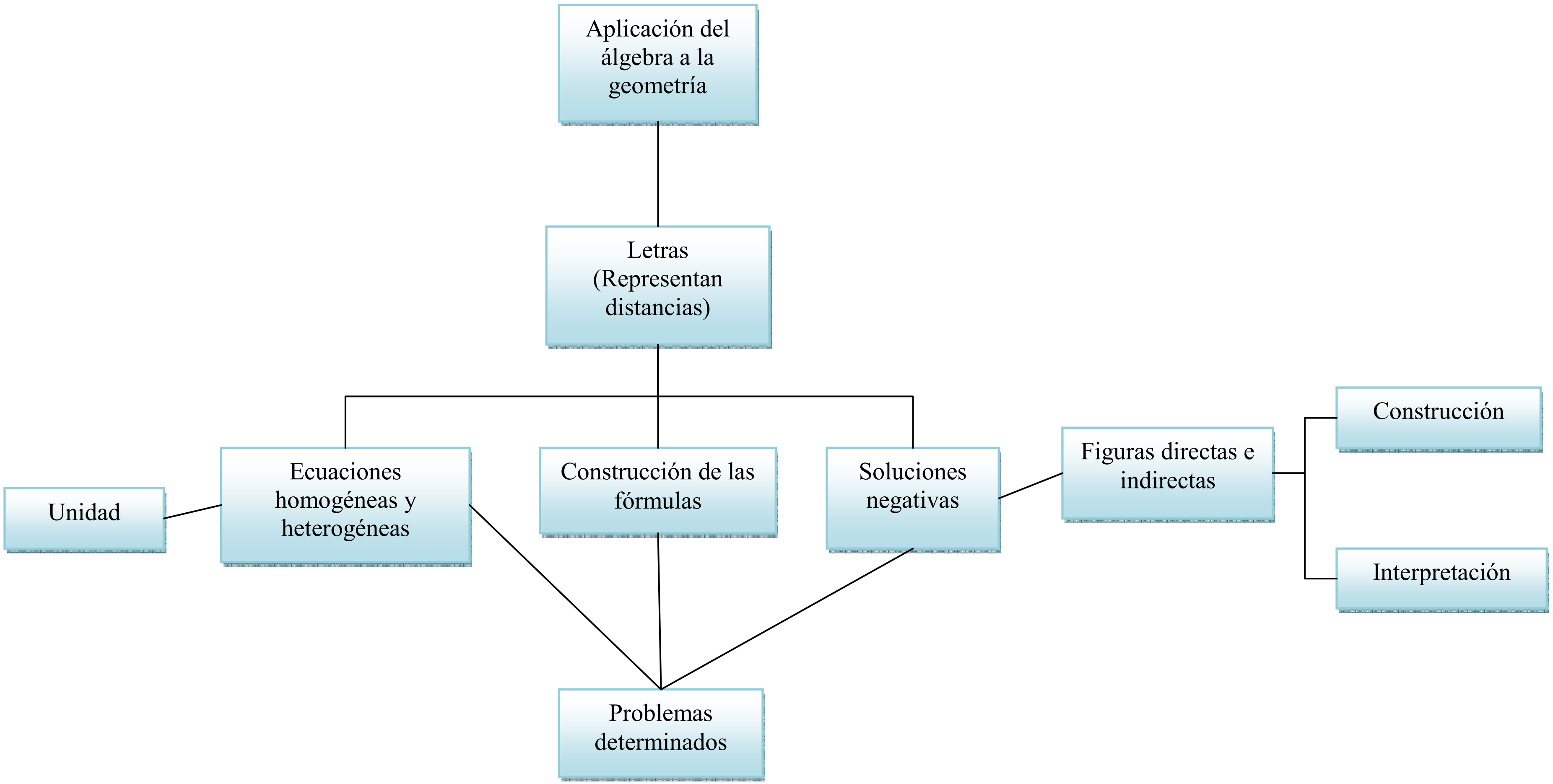
GEOMETRÍA ANALÍTICA-DESCRIPTIVA (PROBLEMAS DETERMINADOS)- M. ZORRAQUÍN (1819)



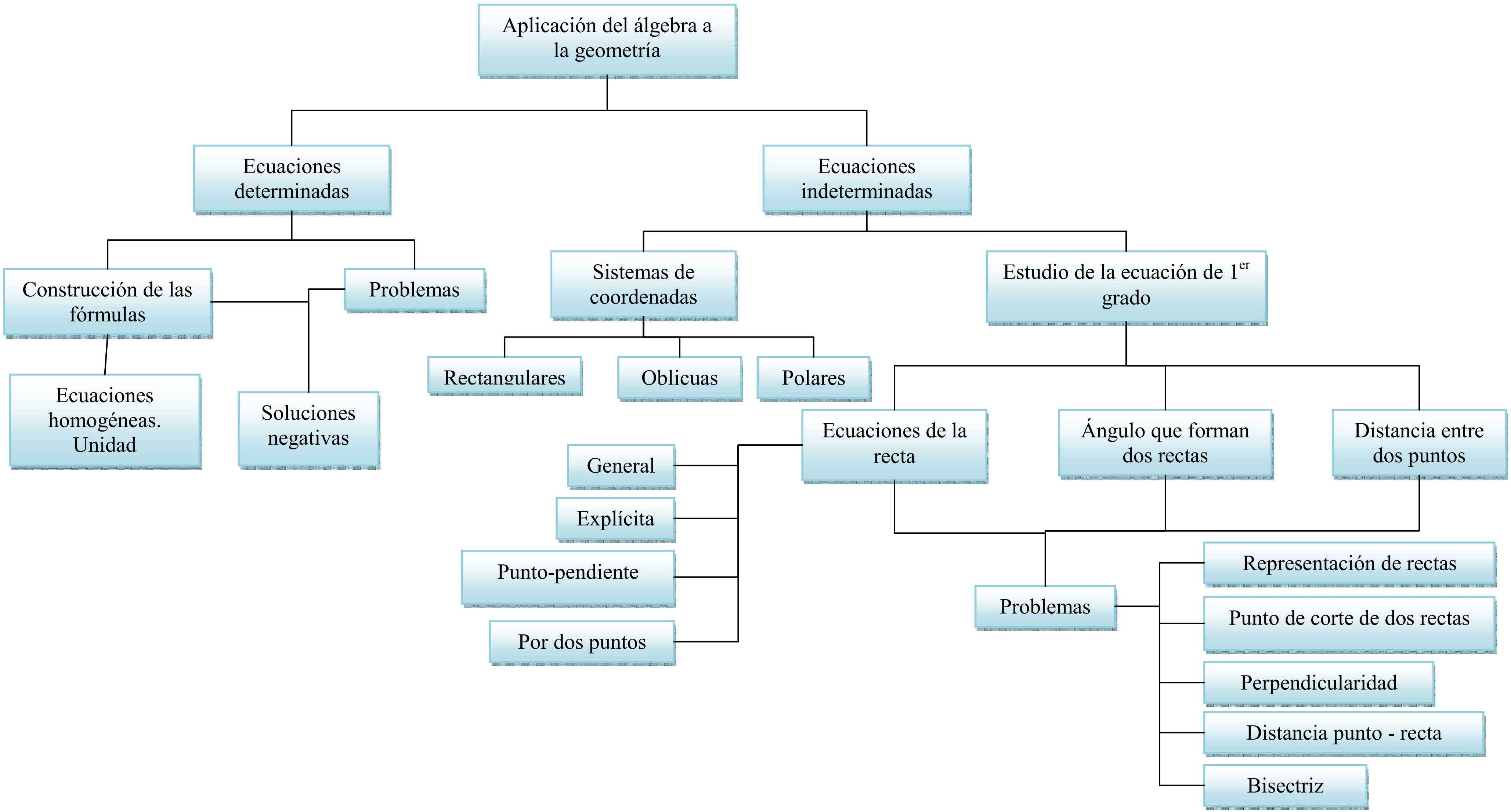
GEOMETRÍA ANALÍTICA-DESCRIPTIVA (PROBLEMAS INDETERMINADOS) – M. ZORRAQUÍN (1819)



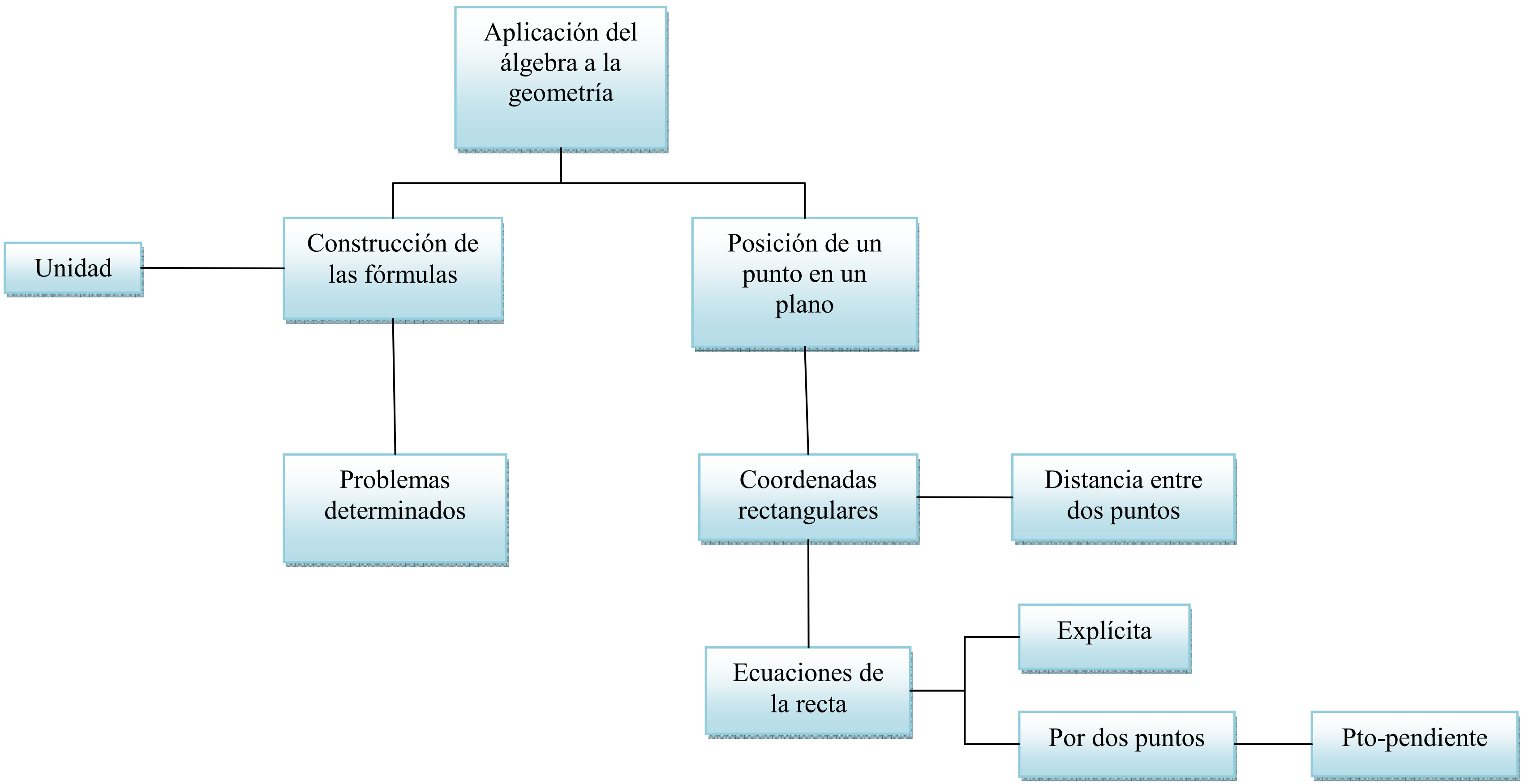
ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS PURAS Y MISTAS (SIC) - ALBERTO LISTA (1825)



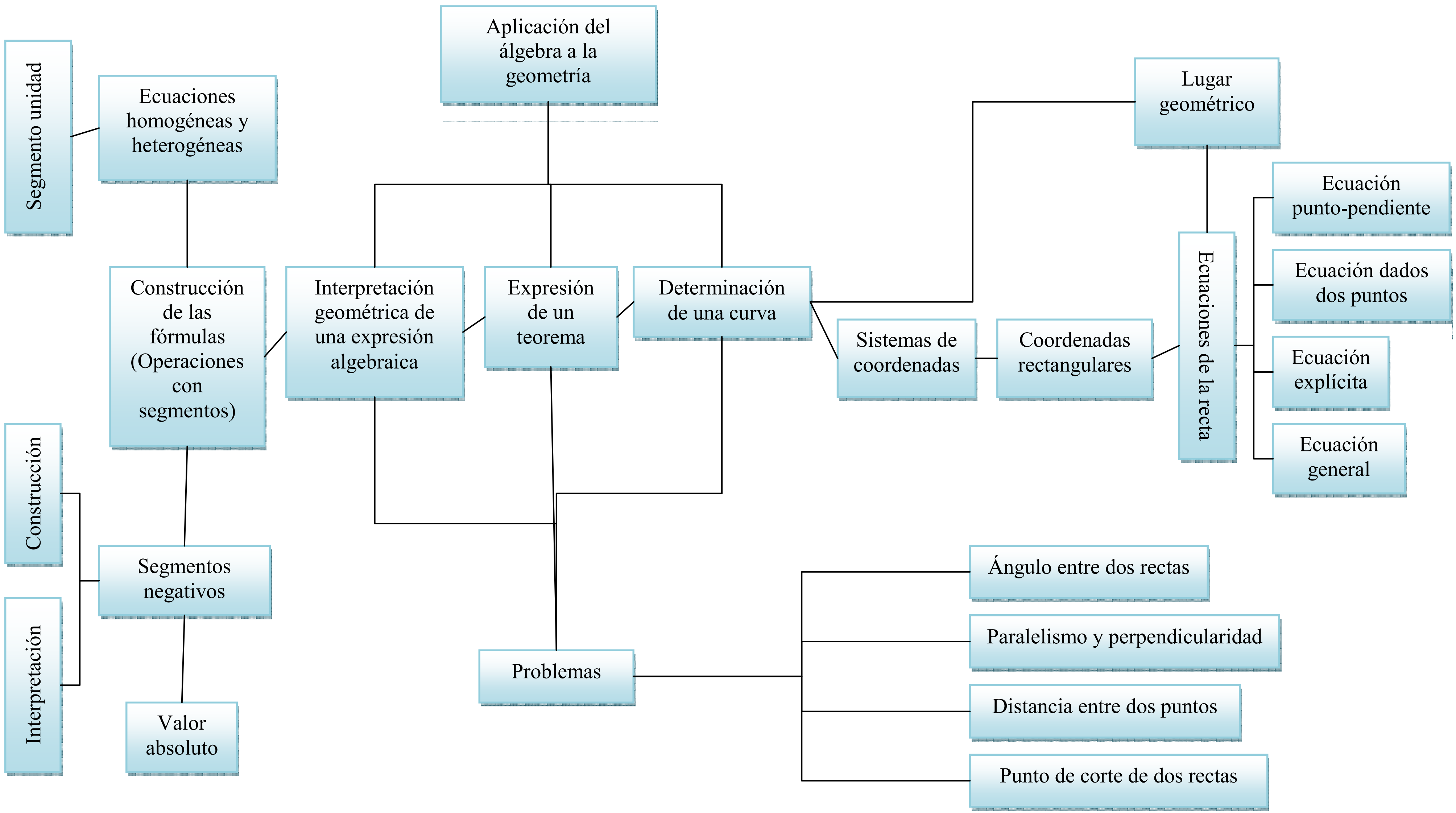
CURSO COMPLETO DE MATEMÁTICAS PURAS - J. ODRIOZOLA (1829)



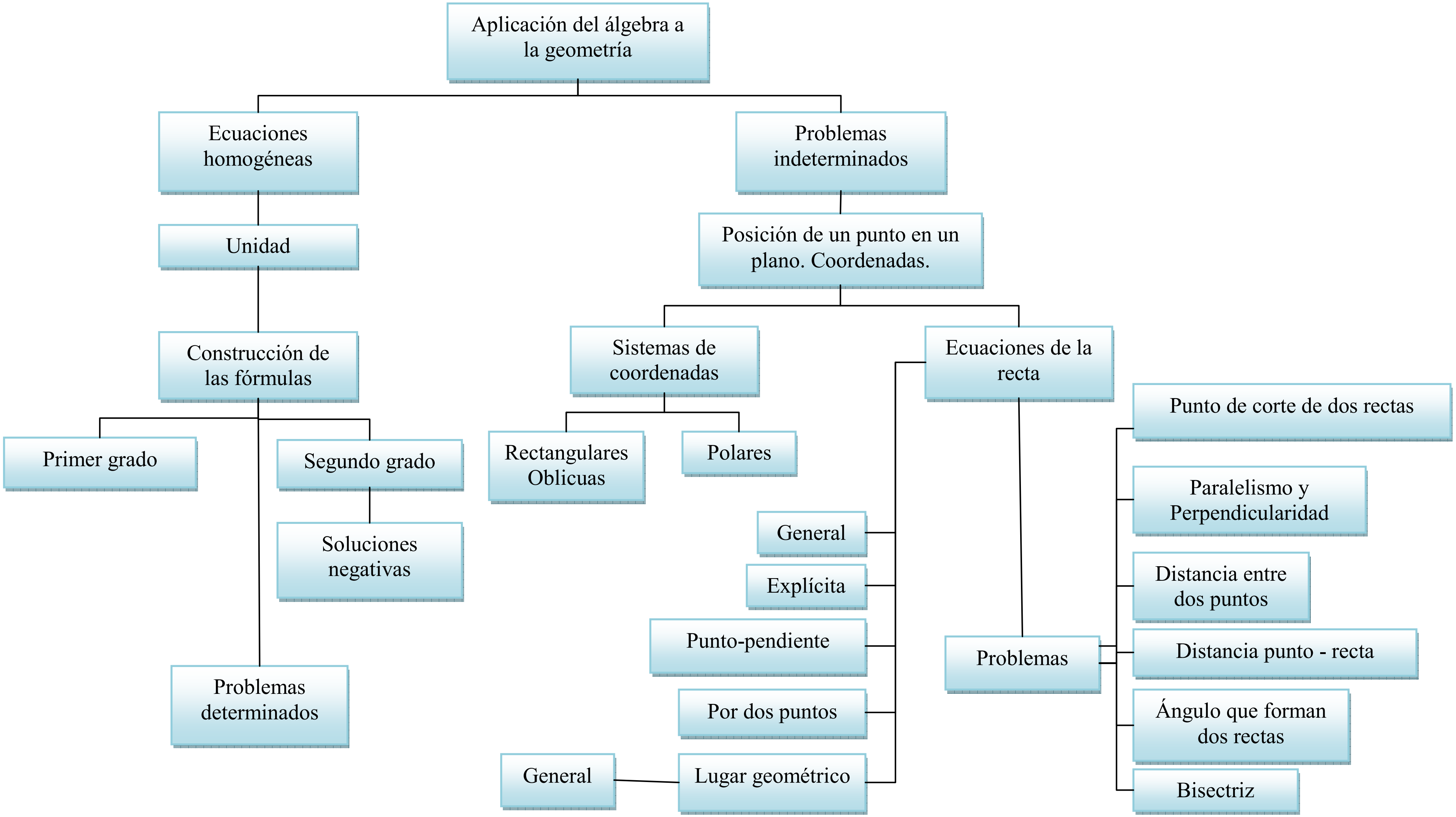
COMPENDIO DE MATEMÁTICAS PURAS Y MISTAS (SIC) - J.M. VALLEJO (1840)



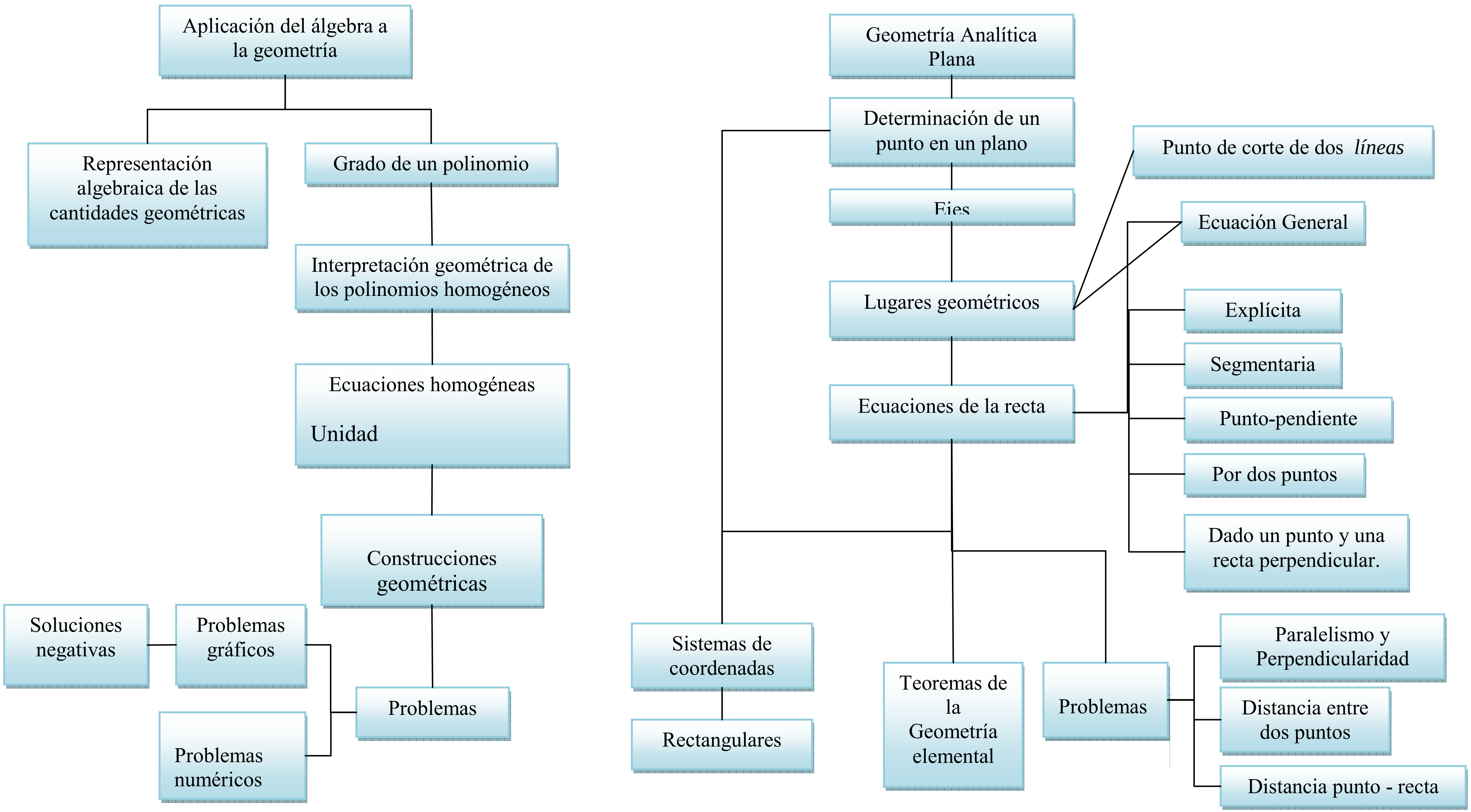
TRATADO ELEMENTAL DE TRIGONOMETRÍA (…), Y DE LA APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA.-S.F. LACROIX (1846)



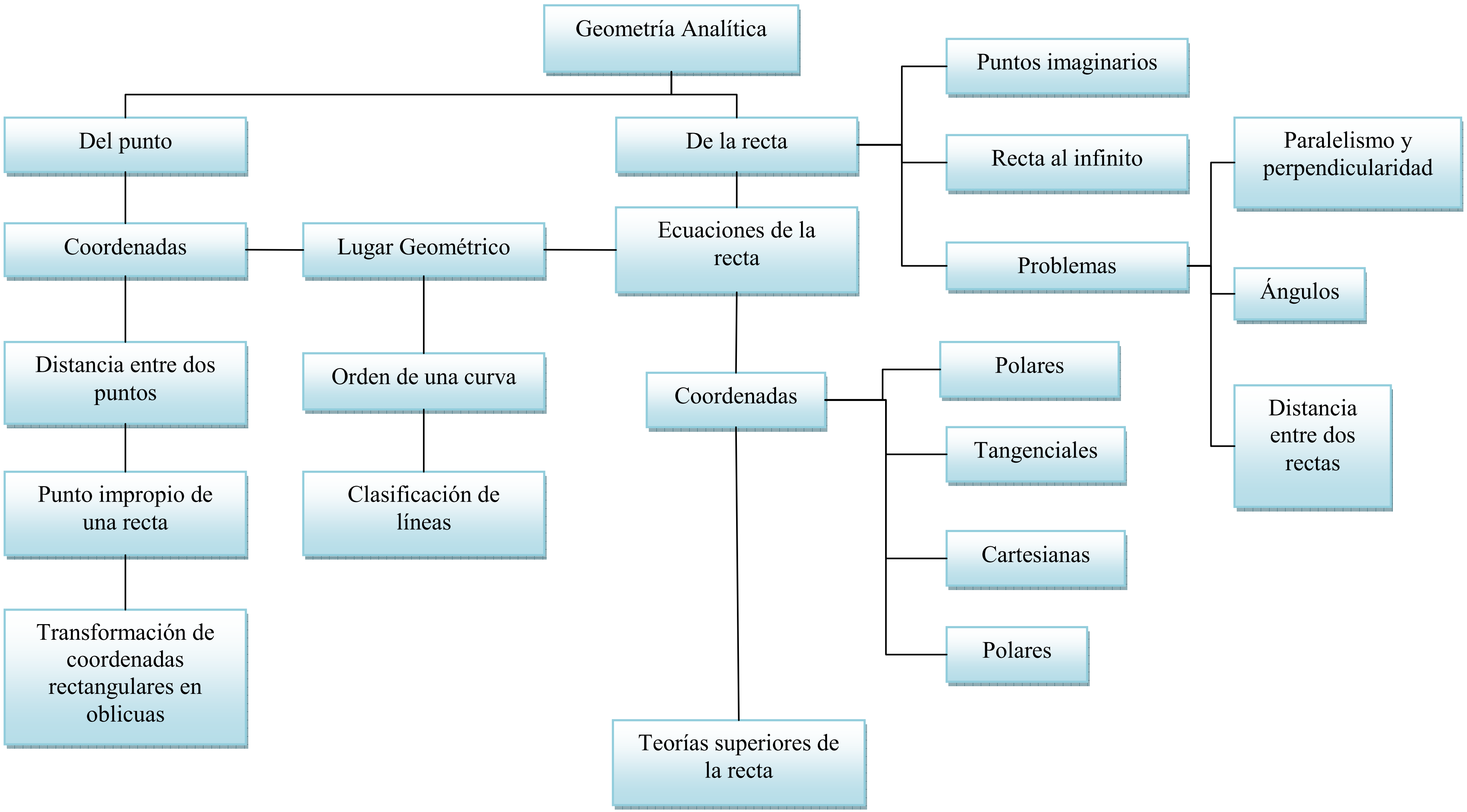
TRATADO COMPLETO DE MATEMÁTICAS - A. GÓMEZ SANTA MARÍA (1846)



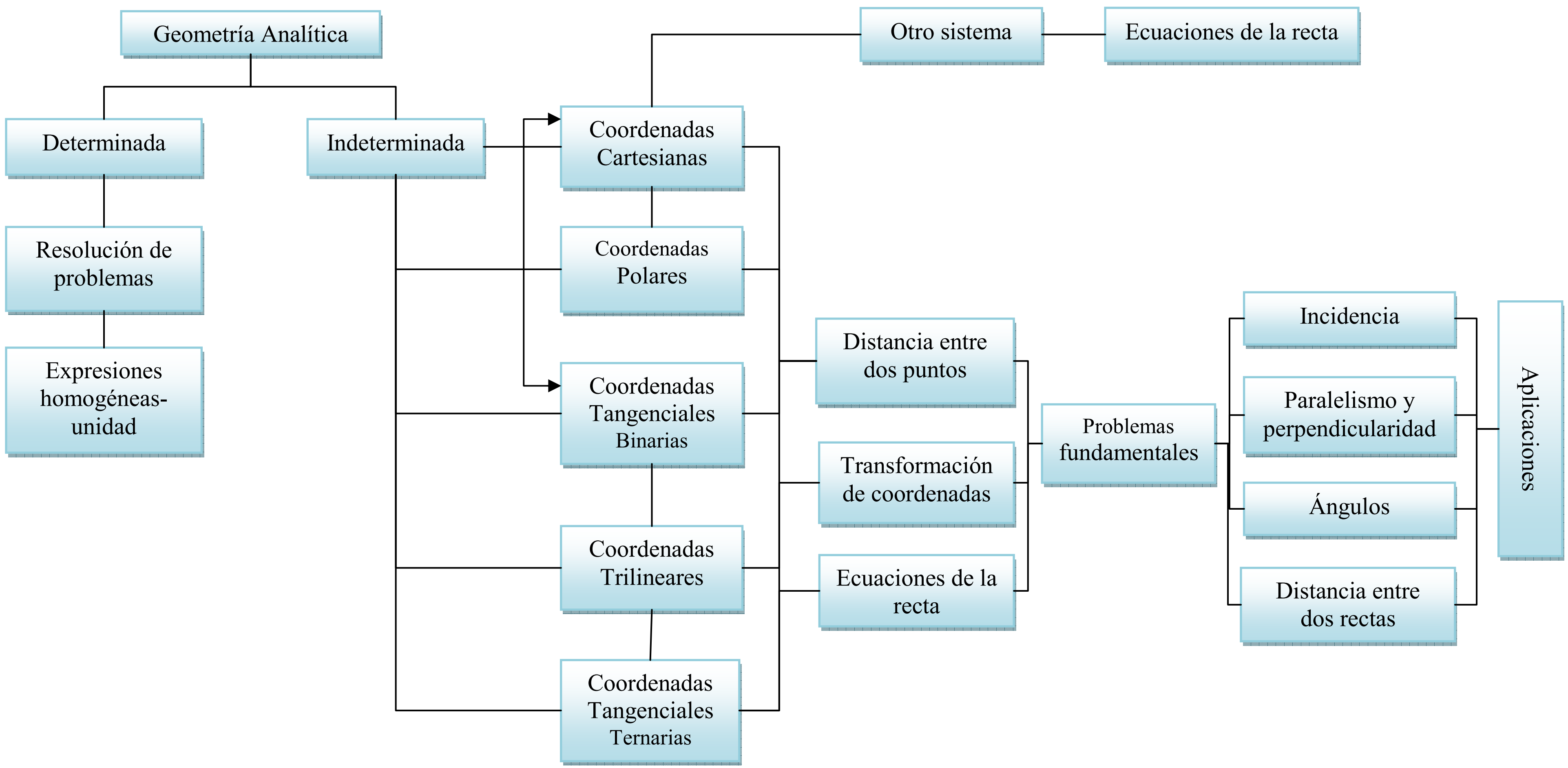
TRATADO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA - J. CORTÁZAR (1862)



LECCIONES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA - S. MUNDI Y GIRÓ (1883)



GEOMETRÍA ANALÍTICA. PROGRAMA Y RESÚMEN - I. SÁNCHEZ SOLÍS (1883)



TRATADO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA - M. VEGAS (1906)