# SISTEMAS DE LIE, SIMETRÍAS DE LIE Y TRANSFORMACIONES RECÍPROCAS.

Departamento de Física Fundamental
Área Física Teórica
Universidad de Salamanca

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR

**Cristina Sardón Muñoz**

PhD Thesis, 2015

**Dña. Pilar García Estévez**, Catedrática de la Universidad de Salamanca y **D. Javier de Lucas Araújo**, ayudante Doctor de la Universidad de Varsovia,

CERTIFICAN:

Que el trabajo de investigación que se recoge en la siguiente memoria titulado "Sistemas de Lie, simetrías de Lie y transformaciones recíprocas", presentada por **Dña. Cristina Sardón Muñoz** para optar al título de doctor y la Mención de "Doctorado Internacional", ha sido realizada en su totalidad bajo su dirección y autorizan su presentación.

Abril, 2015

Dña. PILAR GARCÍA ESTÉVEZ
Catedrática
Universidad de Salamanca

D. JAVIER DE LUCAS ARAÚJO
Ayudante Doctor
Universidad de Varsovia

# SISTEMAS DE LIE, SIMETRÍAS DE LIE Y TRANSFORMACIONES RECIPROCAS

En esta tesis, estamos interesados en sistemas de interés físico y matemático, descritos por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Como es bien sabido, gran parte de los fenómenos naturales pueden modelizarse a través de estas ecuaciones. Por ejemplo, las cuatro ecuaciones de la Electrodinámica de Maxwell [44], o las ecuaciones de Einstein [76] son ecuaciones diferenciales.

Vamos a centrar nuestra investigación en dos tipos de sistemas: los llamados sistemas de Lie, muy recurrentes en la literatura, dadas sus múltiples propiedades geométricas y las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que aparecen en modelos físicos como los pertenecientes a la Mecánica de Fluidos, Física del Plasma o la Neurociencia, entre otros.

Dada la importancia de los métodos geométricos en el tratamiento de ecuaciones diferenciales, vamos a formular nuestra investigación desde el punto de vista de la geometría diferencial. De esta manera, presentamos un esquema inicial del contenido de esta tesis.

- FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS
    - Espacio tangente, campo vectorial y curva integral [4, 5].
    - Campo vectorial dependiente del tiempo [14].
    - Espacios tangentes de orden superior y nociones relacionadas [72].
    - Fibrados de jets [4, 5, 72].
    - Álgebras de Poisson [7, 8].
    - Variedades simplécticas, presimplécticas y de Poisson [48, 49, 74].
    - Variedades de Poisson [21, 22].

- Variedades de Jacobi [38, 70].

- SISTEMAS DE LIE
    - Sistemas de Lie [15, 16, 54].
    - Sistemas de Lie–Hamilton [7, 8, 16].
    - Sistemas de Lie–Hamilton en el plano [7, 8, 16].
    - Clasificación y aplicaciones de sistemas de Lie–Hamilton en el plano [7, 8, 37].
    - Sistemas de Dirac–Lie [11].
    - Sistemas de Jacobi–Lie [38].

- SIMETRÍAS DE LIE
    - Método clásico de las Simetrías de Lie para ecuaciones diferenciales ordinarias [28].
    - Simetrías de Lie para sistemas de Lie [25].
    - Método clásico y no clásico de las Simetrías de Lie para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [26, 27, 28].
    - Aplicaciones a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.
    - Aplicaciones a jerarquías de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [26, 27, 28].

- TRANSFORMACIONES RECÍPROCAS
    - Construcción quasi-algorítmica de transformaciones recíprocas.
    - La jerarquía de Camassa–Holm y la ecuación de CBS [32, 33].
    - La jerarquía modificada de Camassa–Holm y la ecuación mCBS [32, 33].
    - Transformación de Miura-recíproca entre la jerarquía de Camassa–Holm y la jerarquía modificada de Camassa–Holm [32, 33].

## 1. Sistemas de Lie

Un sistema de Lie es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cuya solución general puede ser descrita como una función, el principio de superposición, de un conjunto finito de soluciones particulares y varias constantes relacionadas con las condiciones iniciales de cada solución particular [12, 13, 14, 55]. Estos principios de superposición son en general no lineales. Su utilidad se debe, por ejemplo, al hecho de que permiten integrar un sistema de ecuaciones diferenciales mediante el conocimiento de un número finito de soluciones particulares [78].

Los sistemas de Lie pueden caracterizarse geométricamente por medio del teorema de Lie–Scheffers [12, 13, 14, 53]. Dicho teorema dicta que un sistema de Lie en una variedad $N$ puede representarse por medio de un campo vectorial dependiente del tiempo, $X : (t, x) \in \mathbb{R} \times N \mapsto X(t, x) \in TN$, que admite una descomposión como combinación lineal con ciertas funciones dependientes del tiempo $f_1(t), \ldots, f_r(t)$ y campos vectoriales $X_1, \ldots, X_n$ en $N$ de manera que

$$X(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{r} f_\alpha(t) X_\alpha(x), \qquad \forall x \in N, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y $[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma$ para $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$ y ciertas constantes reales $c_{\alpha\beta\gamma}$. Es decir, $X_1, \ldots, X_r$ generan un álgebra de Lie finito-dimensional real de campos vectoriales. A este tipo de álgebras de Lie se las denominará a continuación álgebras de Vessiot–Guldberg de $X$ [14, 16].

Los sistemas de Lie forman una reducida familia dentro de todas las ecuaciones diferenciales [14]. Sin embargo, cuentan con propiedades geométricas y algebraicas muy interesantes. Desde un punto de vista geométrico, los sistemas de Lie pueden entenderse como una curva en un álgebra de Vessiot–Guldberg, lo cual origina que su solución general pueda obtenerse a partir de una solución particular de un sistema de Lie un grupo de Lie y la acción obtanida integrando los campos del álgebra de Vessiot–Guldberg [54]. Es también relevante que los principios de superposición pueden entenderse como un cierto tipo de foliación projectiva [13].

Desde el punto de vista de su aplicabilidad, muchos sistemas de Lie juegan un papel muy relevante en Física, Matemáticas, Biología y otros muchos más campos de investigación. Algunos de los sistemas de Lie más representativos son las ecuaciones de Riccati y sus múltiples variantes (ecuaciones de Riccati matriciales, ecuaciones de Riccati sobre el plano complejo, etc) [61]. Estas ecuaciones aparecen frecuentemente en Cosmología, Matemática Financiera, Teoría de Control y en otras disciplinas [14]. Es también relevante, que los sistemas de Lie aparecen en la aplicación del método de Wei–Norman [17], en problemas mecánico cuánticos [**?**] y en Biología [7].

Adicionalmente, otras muchas ecuaciones diferenciales pueden estudiarse por medio de la teoría de sistemas de Lie aunque no sean sistemas de Lie en sí mismos. Éste es el caso las ecuaciones de Kummer–Schwarz [54], los ecuaciones de Milne–Pinney [69], los sistemas de Ermakov y los osciladores Winternitz–Smorodinsky [8], entre otros muchos otros [15, 16, 54].

Muchos de los ejemplos de sistemas de Lie anteriormente citados han sido descubiertos por la autora de esta tesis y sus colaboradores. Así pues, a los sistemas de Lie ya mencionados podemos añadir las versiones Hamiltonianas de las ecuaciones de Riccati de segundo orden [15], los sistemas de ODEs que aparecen en el estudio de ecuaciones de difusión [37], nuevos tipos de ecuaciones de Riccati sobre distintos tipos de algebras de composición, como los complejos, los cuaterniones, los números de Study [25], etc [37]. Otros ejemplos relevantes han sido los modelos víricos, algunas reducciones de Yang–Mills [25] y las ecuaciones de Bernoulli complejas [37].

Como consecuencia de todas las anteriores aplicaciones, la autora de esta tesis ha aumentado considerablemente los campos de investigación en los que se pueden aplicar los sistemas de Lie. Es especialmente relevante, que la mayor parte de las aplicaciones de los sistemas de Lie al estudio de PDEs son fruto de esta tesis, por ejemplo en el estudio de ecuaciones de Riccati parciales o en el análisis de de conexiones planas $\mathfrak{g}$-valuadas.

De manera bastante sorprendente, se encontró que muchos de los nuevos sistemas de Lie analizados contaban con álgebras de Vessiot–Guldberg de campos vectoriales Hamiltonianos con respecto a alguna estructura simpléctica o de Poisson [16]. Esto llevó a estudiar lo que se ha convertido en un importante caso particular de sistemas de Lie: los denominamos sistemas de Lie–Hamilton.

Los sistemas de Lie–Hamilton son sistemas de Lie que admiten algebras de Vessiot–Guldberg de campos vectoriales Hamiltonianos con respecto a una estructura de Poisson [16]. La autora y sus colaboradores probaron que los sistemas de Lie–Hamilton admiten un Hamiltoniano dependiente del tiempo dado por una curva en un álgebra de Lie finito-dimensional de funciones con respecto al corchete de Poisson relacionado con la estructura de Poisson: un álgebra de Lie–Hamilton [7, 8]. En los sistemas de Lie, esta estructura juega un papel análogo al de los Hamiltonianos en la Mecánica Hamiltoniana. Fruto de esta analogía, la doctoranda encontró númerosas propiedades relativas a la descripción de las constantes del movimiento, aplicaciones momento y simetrías de los sistemas de Lie–Hamilton.

Entre los métodos desarrollados para los sistemas de Lie–Hamilton, destaca el método de cálculo de los principios de superposición por coalgebras de Poisson. Los métodos tradicionales de cálculo de principios de superposición de sistemas de Lie requieren la integración de sistemas de ODEs o PDEs [13, 78]. Sin embargo, para los sistemas de Lie–Hamilton, podemos obtener estos principios por métodos algebraico-geométricos. Más exactamente, cada sistema de Lie–Hamilton induce a un álgebra de Lie–Hamilton. A partir de dicha algebra de Lie, podemos construir una algebra de Poisson. En el cálculo de los principios de superposición también entran en juego las llamadas prolongaciones diagonales de los sistemas de Lie, que son sistemas de Lie–Hamilton que admiten de nuevo algebras de Poisson asociadas. Entre el sistems de Lie–Hamilton original y los prolongados podemos establecer un coproducto primitive que da lugar a una coálgebra de Poisson. Con tal estructura, junto con los Casimires del algebra de Lie–Hamilton, podemos obtener cantidades conservadas y simetrías de Lie del sistema de Lie–Hamilton. Es más, el coproducto de la coálgebra nos permite generar, a partir de los Casimires y de un modo puramente algebraico, numerosas constantes del movimiento para las llamadas prolongaciones del sistema de Lie–Hamilton. Tales constantes de movimiento son las que habitualmente se emplean para obtener los principios de superposición. En adelante, denominamos a este procedimiento: método de cálculo de superposición por co-álgebras.

El método de cálculo de superposición por coalgebras ha sido desarrollado por la doctoranda y sus colaboradores de forma original y ha demostrado su gran eficiencia para la obtención de los principios de superposición [8] evitando la larga y tediosa integración de sistemas de PDEs o ODEs de los métodos tradicionales. Como aplicación más relevante, se obtuvo el principio de superposición para las ecuaciones de Riccati describiendo que la constante del movimiento que da lugar a dicho principio de superposición es la imagen por un co-producto de un Casimir para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Debido al interés demostrado en los sistemas de Lie–Hamilton, la autora de esta tesis clasificó todas las álgebras de Lie de Vessiot–Guldberg de campos Hamiltonianos con respecto a una estructura de Poisson en el plano y analizó sus propiedades. Se obtuvieron doce clases diferentes de álgebras de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos, no difeomorfas. Adicionalmente, se estudió la estructura de todas las álgebras de Lie–Hamilton asociadas a cada álgebra. Como consecuencia de nuestro estudio, se llevó a cabo la clasificación de las relaciones entre todas las álgebras de Lie finito-dimensionales de campos vectoriales en el plano, lo cual completa el estudio llevado a cabo por Olver, Kamran y A. González.

Además, tal clasificación sirvió para clasificar todos los sistemas de Lie–Hamilton en el plano a partir de sus álgebras de Vessiot–Guldberg. Permitió identificar todas las aplicaciones físicas, matemáticas y biológicas de los sistemas de Lie–Hamilton en el plano. Más específicamente, sirvió para estudiar los sistemas de Lie trigonométricos empleados en el estudio de sistemas integrables [8], sistemas de Lie apareciendo en el estudio de distintas ecuaciones de difusión [37], los osciladores de Smorodinsky–Winternitz, el estudio de sistemas con aplicaciones médicas [7], sistemas de Lotka–Volterra [7], estudio de sistemas con trayectorias periódicas [7], etcétera.

No todo sistema de Lie es un sistema de Lie–Hamilton. Mediante el llamado teorema no-go de los sistemas de Lie–Hamilton [11], se determinó una condición muy general que permite identificar cuándo un sistema Lie no es de Lie–Hamilton. En muchos de dichos casos, se encontró que el álgebra de Vessiot–Guldberg de un sistema que no es de Lie–Hamilton es un álgebra de Lie de campos vectoriales Hamiltonianos con respecto a otras estructuras geométricas. Si imponemos que los campos vectoriales del álgebra de Lie de Vessiot–Guldberg sean Hamiltonianos con respecto a una estructura de Dirac, de Jacobi, u otras, diremos que son sistemas de Dirac–Lie [11], sistemas de Jacobi–Lie [38], etc.

A lo largo de esta tesis se darán múltiples nuevos ejemplos de sistemas de Lie sobre diferentes geometrías, que no sólo tienen una gran importancia desde el punto de vista matemático, sino que existen como modelos físicos en la naturaleza [7, 8, 11, 38, 54].

El ejemplo más notable de sistema de Lie compatible con otra estructura geométrica es el de los sistemas de Dirac–Lie [11]. Estos son sistemas que poseen una álgebra de Vessiot–Guldberg de campos Hamiltonianos con respecto a una estructura de Dirac. Como las estructuras de Dirac describen las estructuras de Poisson como casos particulares, los sistemas de Dirac–Lie contienen como caso particular a los sistemas de Lie–Hamilton.

En esta tesis se describe cómo los sistemas de Dirac–Lie permiten la descripción, con técnicas similares a la de las geometría de Poisson, de sistemas que no pueden ser descritos por sistemas de Lie–Hamilton, p.e. las ecuaciones de Kummer–Schwarz de tercer-order. También se establecieron generalizaciones de los resultados de los sistemas de Lie–Hamilton para los sistemas de Dirac–Lie. Además, se emplearon técnicas de geometría de Dirac para el estudio de estos sistemas.

El último tipo de geometría analizada es la geometría de Jacobi [38]. Una variedad de Jacobi es otra generalización de variedad de Poisson. En esta tesis se definieron y estudiaron los denominados sistemas de Jacobi–Lie. Específicamente, se utiliza la clasificación de todas las álgebras de Vessiot–Guldberg de campos vectoriales Hamiltonianos respecto de una estructura de Poisson en el plano, para la clasificación de todos los sistemas de Jacobi–Lie en el plano. Diversos ejemplos de interés físico y matemático son analizados.

## 2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

La Mecánica de Fluidos modeliza sus problemas hidrodinámicos, principalmente, mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Tales ecuaciones son fundamentalmente no lineales. El interés en dichas ecuaciones no lineales en derivadas parciales comenzó con la ahora célebre ecuación de Korteweg de Vries (KdV). Esta ecuación supuso un prototipo de modelo exactamente soluble para la propagación de ondas en superficies poco profundas [36, 42]. Desde entonces, se han propuesto muchos modelos derivados de este, generalizaciones a mayores dimensiones espaciales, etc [29, 35, 36, 39, 56, 63, 79]. Una propiedad común a la mayoría de estos modelos es que poseen un régimen de soluciones solitónicas, fuertemente estables y localizadas. Por otra parte, estos modelos con soluciones solitónicas han podido interpretarse como sistemas Hamiltonianos infinito dimensionales que poseen leyes de conservación. El estudio de los solitones y su gran papel en muchos otros campos, como es la Óptica Cuántica, la geofísica y maremotos, la Biofísica, etc. [73], ha llevado a la proposición de múltiples teorías que resuelvan las ecuaciones que los contienen. Una de las principales es la teoría del scattering inverso [1, 2, 3], la cual dió lugar a los pares de Lax [45, 46].

En muchas ocasiones, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de carácter no lineal, pueden reescribirse equivalentemente como la condición de compatibilidad de un par de Lax, es decir, como par de ecuaciones lineales en una autofunción, entendiendo la condición de compatibilidad la igualdad de las derivadas cruzadas de las dos ecuaciones del par de Lax [24, 30]. A veces, la resolución del par de Lax es más sencilla que la de la ecuación no lineal. El precio que pagamos, sin embargo, es resolver dos ecuaciones [1] en vez de una, pero lineales en la función espectral.

La existencia del par de Lax translada la resolución de la ecuación diferencial a la resolución de un problema de índole Mecánica Cuántica, en que un potencial inicial (perteneciente a la ecuación no lineal). Dicho problema puede tratarse por medio de su par de Lax y encontrar el espectro de valores del problema mecánico cuántico asociado, el cual establece una analogía entre los valores del espectro, con los valores que puede tomar la ecuación no lineal. Este método de tratamiento de las ecuaciones diferenciales no lineales, se denomina método del scaterring inverso (IST) [1] y ha sido ampliado exitosamente en las últimas décadas [41].

De manera muy general, una primera noción de integrabilidad de las ecuaciones diferenciales la identificamos con la obtención de soluciones que además tengan un comportamiento predecible a lo largo del tiempo. Sin embargo, la definición de integrabilidad de un sistema puede variar dependiendo del problema con el que nos enfrentamos y el método de resolución que escogemos para afrontarlo [1, 4, 5, 40, 43, 62]. El test de integrabilidad más utilizado para ecuaciones diferenciales es el llamado test de Painlevé [65, 66], de carácter algorítmico y es el aplicado a las ecuaciones que aparecen en esta tesis. A partir de ahora, cuando nos refiramos a una ecuación integrable, nos referiremos a una ecuación integrable en el sentido Painlevé [20, 30, 71, 77].

## 2.1. Simetrías de Lie

Una de las maneras más utilizadas para el estudio de ecuaciones diferenciales es el cálculo de Simetrías [58], iniciada por Sophus Lie en el siglo XIX [50, 51, 52], y todas sus variantes desarrolladas en las últimas décadas. El método de las simetrías de Lie puede resumirse brevemente en la determinación de una transformación que deje invariante el conjunto de ecuaciones que planteamos [62, 67, 72]. La propiedad de invarianza de una ecuación bajo una transformación implica la posibilidad de reducir el número de variables independientes en uno, por cada cantidad conservada. Un número de simetrías igual al número de variables de la ecuación, nos conduce a su integración hasta reducirla a una ecuación ordinaria. Dada una ecuación ordinaria, una simetría daría lugar a su posible integración completa o en forma de cuadratura.

El método clásico de las simetrías se generalizó a lo largo del siglo XX. El desarrollo de los ordenadores y su potencial de cálculo ha ayudado enormemente en las generalizaciones del método de simetría de Lie, además de su posible aplicación a ecuaciones más complejas. El desarrollo de software orientado al cálculo simbólico, como puede ser Maple, resulta muy útil en la resolución de los tediosos pasos intermedios y ha sido el medio por el que hemos obtenido la mayoría de resultados de esta tesis.

Una importante generalización del método clásico, es el método no clásico, introducido por Bluman y Cole en 1969 [9], Olver y Rosenau [63, 64]. Se trata de buscar un tipo particular de simetría que deje invariante un subconjunto de todas las soluciones posibles de la ecuación. La propuesta de este tipo de simetrías se inició con la búsqueda de soluciones para la ecuación del calor [34], las cuales no eran deducibles con el método clásico. Desde entonces, se popularizó el método no clásico [6, 19, 59]. Una diferencia notoria entre el método clásico y no clásico es que el último da lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales para la obtención de las simetrías. En los últimos años, tanto el análisis clásico como el no clásico, han demostrado su gran eficiencia para el trato de ecuaciones de origen hidrodinámico, en contextos de la Física del Plasma, modelos cosmológicos, y Mecánica de Fluidos [1, 10, 30, 47, 57, 60].

En nuestra investigación, encontramos de particular interés la aplicación tanto del método clásico, como el no clásico, a los pares de Lax asociados a las ecuaciones diferenciales no lineales. La inspección de simetrías de las ecuaciones ha sido un tema muy tratado por multitud de autores, sin embargo, las simetrías de sus pares de Lax asociados, han sido mucho menos investigadas. Nuestro objetivo es ver cómo se reducen los pares de Lax y en el caso de problemas no isoespectrales, ver si su condición de no isopectralidad se propaga a dimensiones menores [26, 27, 28].

Aplicamos el método clásico de las simetrías de Lie a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, revisados en la primera parte de los sistemas de Lie. Estas son: las ecuaciones de Kummer–Schwarz de segundo y tercer orden, las ecuaciones de Riccati de primer y segundo orden y los osciladores de Milne–Pinney. Dada la naturaleza de sistema de Lie de las ecuaciones estudiadas, a continuación proponemos el estudio de sus simetrías de Lie clásicas (de un tipo particular), haciendo uso de sus álgebras de Vessiot–Guldberg. Como resultado importante, cabe destacar que las simetrías encontradas forman un álgebra de Lie finito-dimensional y, bajo ciertas condiciones, es isoforma al álgebra de Vessiot–Guldberg. Las simetrías obtenidas serán comparadas a las obtenidas por el método clásico y se aplicará a un número mayor de ejemplos: sistemas con álgebras de Vessiot–Guldberg isomorfas a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, que engloban ecuaciones de Riccati, ecuaciones de Cayley-Klein Riccati, la ecuación de Riccati cuaterniónica con coeficientes reales, el sistema generalizado de Darboux–Brioshi–Halphen, entre otras [25]. También se aplicará a sistemas con álgebras de Vessiot–Guldberg isomorfas a $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$, con un par de ejemplos: la ecuación de Buchdahl y la ecuación de Painlevé–Ince [25]. Es importante contemplar la generalización de este último método a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el ejemplo de las ecuaciones de Riccati en derivadas parciales. Como conclusión, tenemos que si dos sistemas tienen el mismo álgebra de Vessiot–Guldberg, sus álgebra de Lie de simetrías (obtenidas por este particular método), son equivalentes.

Hemos introducido el método no clásico de simetrías de Lie a sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de carácter hidrodinámico. Comenzamos con el ejemplo de la ecuación de Bogoyanlevski–Kadomtsev–Petviashvili en 2+1 dimensiones (2+1-BKP a partir de ahora) y su correspondiente par de Lax, de dos componentes en $2+1$, de carácter no isoespectral y definido sobre el campo complejo. La autora de esta tesis y colaboradores han obtenido tanto las simetrías clásicas como las no clásicas y se han comparado los resultados. A partir de las simetrías obtenidas, se han reducido tanto la ecuación como su par de Lax y se obtienen dos reducciones de especial interés. Una de ellas, se corresponde con la ecuación KdV en $1+1$ dimensiones, lo que implica que $2+1$-BKP es una generalización de la ecuación KdV a una dimensión mayor. La segunda reducción de interés puede ser interpretable desde el punto de vista físico. Continuamos con la reducción y su par de Lax asociado en $1+1$ dimensiones, con un segundo proceso de cálculo de simetrías de Lie, tanto clásicas como no clásicas, y posterior reducción a una ecuación diferencial ordinaria (dado que el parámetro espectral es no isoespectral y se considerará como otra variable independiente). Corroboramos, específicamente, que las no clásicas son simetrías más globales y contienen a las clásicas, y, consecuentemente, son más difíciles de computar. Una segunda tanda de reducciones se presentará al final de la sección.

Hemos aplicado igualmente el cálculo de simetrías de Lie, tanto clásicas como no clásicas, al caso de jerarquías completas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y sus pares de Lax asociados. Una jerarquía es un conjunto de ecuaciones diferenciales que están relacionadas por medio de un operador de recursión [18]. La iteración enésima del operador de recursión, nos la ecuación o miembro enésimo de la jerarquía. En particular, vamos a contemplar dos ejemplos de jerarquías de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, de índole parecida: la llamada jerarquía de Camassa–Holm [10] en $2+1$ dimensiones y la jerarquía de Qiao o jerarquía modificada de Camassa–Holm en $2+1$ dimensiones (correspondientemente denotadas como CHH$(2+1)$ y Qiao$2+1$ o mCHH$(2+1)$). Haremos una descripción exhaustiva de las simetrías no clásicas atendiendo a diferentes valores de las funciones y constantes de integración obtenidas en las simetrías, entre otros factores. Un número de reducciones de interés aparecerán para ambos problemas. Hemos destacado principalmente las reducciones de los pares de Lax correspondientes con tales jerarquías, y hemos comprobado si se transmiten sus caracteres no isoespectrales en una dimensión menor. Para el caso de CHH$(2+1)$, entre sus reducciones recuperamos la jerarquía positiva y negativa de Camassa–Holm en $1+1$ dimensiones y sus pares de Lax correspondientes [26]. Algunas de las reducciones del par de Lax mantendrán su carácter no isoespectral, lo cual es curioso, porque los pares de Lax en $1+1$ dimensiones son, generalmente, espectrales. Para la jerarquía de Qiao, se obtuvieron algunas de sus reducciones, entre las cuales existen interpretaciones físicas [27].

## 2.2. Transformaciones Recíprocas

Las transformaciones recíprocas pueden utilizarse muy convenientemente en el campo de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Una transformación recíproca permite convertir una ecuación no integrable en el sentido Painlevé, en otra que sí lo sea.

Un buen ejemplo es el de la ecuación de Camassa–Holm (no integrable en el sentido Painlevé), que puede transformarse mediante una transformación recíproca en la ecuación de Calogero-Bogoyanlevskii-Schiff (ecuación de CBS), que sí es integrable en el sentido Painlevé [32, 33].

Las transformaciones recíprocas, en una primera aproximación, consisten en el intercambio de papeles entre las variables dependientes e independientes. El resultado buscado por medio de tales transformaciones es obtener versiones más simples o incluso versiones linearizadas de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales [23, 31].

Las transformaciones recíprocas, a partir de la experiencia de muchos ejemplos vistos, nos ayudan a la identificación de muchas ecuaciones diferenciales de la literatura de la Física y las Matemáticas [23, 31, 32, 33]. Dos ecuaciones diferentes, aunque a primera vista parezcan no relacionadas, pueden ser dos versiones de una misma ecuación, después de una transformación recíproca [33]. De esta manera, el gran número de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales existente en la literatura puede clasificarse si establecemos un método para discernir cuáles son versiones equivalentes de un mismo problema. Así, surge la siguiente cuestión: Hay alguna manera de identificar si dos ecuaciones son versiones de una misma? En principio, la única forma de asegurarse es con un procedimiento de prueba y error, sin embargo, sería deseable que existiera una forma canónica común a todas las ecuaciones equivalentes.

Cabe destacar el gran apoyo de las transformaciones recíprocas para la obtención de pares de Lax. Dada una ecuación inicial cuyo par de Lax es desconocido, podemos transformala mediante transformación recíproca en otra ecuación cuyo par de Lax sea conocido. La inversión de la transformación recíproca en el par de Lax de la segunda, nos da el par de Lax de la inicial.

En esta tesis hemos propuesto transformaciones recíprocas para la jerarquía de Camassa–Holm CHH$(2+1)$ y la jerarquía de Qiao mCHH$(2+1)$, anteriormente mencionadas. La jerarquía $n$-componente de CHH$(2+1)$ se transformó en $n$ copias de la ecuación de CBS. De manera similar, construimos la transformación recíproca que nos lleva de la jerarquía $n$-componente mCHH$(2+1)$ a $n$ copias de la ecuación mCBS. Dado un par de Lax para la ecuación mCBS, si invertimos la transformación recíproca, obtendremos el par de Lax de la jerarquía $n$-componente mCHH$(2+1)$.

Además, entre las ecuaciones CBS y mCBS existe una transformación de Miura. Si realizamos una composición de esta transformación de Miura y de las dos transformaciones recíprocas [68] comentadas en líneas anteriores, es posible relacionar las jerarquías CHH(2+1) y mCHH(2+1) dando una expresión entre sus campos y variables independientes [32, 33].

El contenido de esta tesis está publicado ó en trámites de envío para publicación. La siguiente lista se corresponde con las publicaciones científicas de la doctoranda, en las cuales se apoya el manuscrito de esta tesis.

**PUBLICACIONES**

1. Similarity reductions arising from nonisospectral Camassa Holm hierarchy in 2+1 dimensions,
   P.G. Estevez, J.D. Lejarreta, C. Sardón,
   *J. of Nonlin. Math. Phys.* **18**, 9–28 (2011).

2. A new Lie systems approach to second-order Riccati equations,
   J.F. Cariñena, J. de Lucas, C. Sardón,
   *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **9**, 1260007 (2012).

3. Miura reciprocal Transformations for hierarchies in 2+1 dimensions,
   P.G. Estevez, C. Sardón,
   *J. Nonlin. Math. Phys.* **20**, 552–564 (2013).

4. Integrable 1+1 dimensional hierarchies arising from reduction of a non-isospectral problem in 2+1 dimensions,
   P.G. Estevez, J.D. Lejarreta, C. Sardón,
   *Appl. Math. Comput.* **224**, 311–324 (2013).

5. On Lie systems and Kummer-Schwarz equations,
   J. de Lucas, C. Sardón,
   *J. Math. Phys.* **54**, 033505 (2013).

6. From constants of motion to superposition rules of Lie–Hamilton systems,
   A. Ballesteros, J.F. Cariñena, F.J. Herranz J. de Lucas, C. Sardón,
   *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 285203 (2013).

7. Lie–Hamilton systems: theory and applications,
   J.F. Cariñena, J. de Lucas, C. Sardón,
   *Int. Geom. Methods Mod. Phys.* **10**, 0912982 (2013).

8. Dirac–Lie systems and Schwarzian equations,
   J.F. Cariñena, J. Grabowski, J. de Lucas, C. Sardón,
   *J. Differential Equations* **257**, 2303–2340 (2014).

9. Lie–Hamilton systems on the plane: theory, classification and applications,
   A. Ballesteros, A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón,
   *J. Differential Equations* **258**, 2873–2907 (2015).

10. Lie symmetries for Lie systems: applications to systems of ODEs and PDEs,
    P.G. Estevez, F.J. Herranz, J. De Lucas, C. Sardón.

Enviado a *Appl. Math. Comput.* (2014),
arXiv:1404.2740

11. Lie–Hamilton systems on the plane: applications and superposition rules,
A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón,
Enviado a *J. Phys. A* (2014),
arXiv:1410.7336

## PROCEEDINGS

1. Miura reciprocal transformations for two integrable hierarchies in 1+1 dimensions
P.G. Estevez, C. Sardón
Proceedings GADEIS, Protaras, Chipre (2012),
arXiv:1301.3636

2. Jacobi–Lie systems: fundamentals and low-dimensional classification
F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón,
Proceedings AIMS, Madrid, España (2015),
arXiv:1412.0300

## PUBLICACIONES EN PREPARACIÓN

1. Classical and nonclassical approach for a wave model in 2+1 dimensions,
P.G. Estevez, J.D. Lejarreta, C. Sardón.
En preparación

# Bibliografía


[1] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering,* London Mathematical Society, Lecture Notes Series **149**, Cambridge University Press, (1991).

[2] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type I, *J. Math. Phys.* **21**, 715 (1980).

[3] M.J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform,* SIAM, Philadelphia, (1981).

[4] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics,* Benjamin-Cummings, London, (1978).

[5] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* 2nd. Ed. Springer, (1997).

[6] D. Arrigo, J.R. Beckham, Nonclassical symmetries of evolutionary partial differential equations and compatibility conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **289**, 55–65 (2004).

[7] A. Ballesteros, A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón, Lie–Hamilton systems on the plane: theory, classification and applications, *J. Differential Equations* **258**, 2873–2907 (2015),

[8] A. Ballesteros, J.F. Cariñena, F.J. Herranz J. De Lucas, C. Sardón, From constants of motion to superposition rules for Lie–Hamilton systems, *J. Phys. A: Math. Theor.* **26**, 285203 (2013).

[9] G.W. Bluman, J.D. Cole, The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.* **18**, 1025–1042 (1969).

[10] R. Camassa, D.D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1661–1664 (1993).

[11] J.F. Cariñena, J. Grabowski, J. de Lucas, C. Sardón, Dirac–Lie systems and Schwarzian equations, *J. Differential Equations* **257**, 2303–2340 (2014)

[12] J.F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo, *Lie–Scheffers systems: a geometric approach, Napoli Series in Physics and Astrophysics,* Bibliopolis, Napoli, (2000).

[13] J.F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo, Superposition rules, Lie theorem and partial differential equations, *Rep. Math. Phys.* **60**, 237–258 (2007).

[14] J.F. Cariñena, J. de Lucas, Lie systems: theory, generalisations and applications, *Dissertations Math.* **479**, 1–126 (2011).

[15] J.F. Cariñena, J. de Lucas, C. Sardón, A new Lie system's approach to second–order Riccati equations, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **9**, 1260007 (2012).

[16] J.F. Cariñena, J. de Lucas, C. Sardón, Lie–Hamilton systems: theory and applications, *Int. Geom. Methods Mod. Phys.* **10**, 0912982 (2013).

[17] J.F. Cariñena, G. Marmo, J. Nasarre, The nonlinear superposition principle and the Wei–Norman method, *Int. J. Mod. Phys. A* **13**, 3601 (1998).

[18] P.A. Clarkson, A.N.W. Hone, N. Joshi, Hierarchies of differential equations and Bäcklund transformations, *J. Nonlin. Math. Phys.* **10**, 13–26 (2003).

[19] P.A. Clarkson, P. Winternitz, Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation, *Physica D* **49**, 257–272 (1991).

[20] R. Conte, *The Painlevé property. One century later,* Springer-Verlag, New York, 1999.

[21] T. Courant, *Dirac Manifolds*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, (1987).

[22] I. Dorfman, Dirac structures of integrable evolution equations, *Phys. Lett. A* **125**, 240–246 (1987).

[23] P.G. Estévez, Reciprocal transformations for a spectral problem in $2+1$ dimensions, *Theor. Math. Phys.* **159**, 762–768 (2009).

[24] P.G. Estévez, P.R. Gordoa, Singular manifold method: Darboux transformations and nonclassical symmetries, *J. Nonlin. Math. Phys.* **2**, 334–355 (1995).

[25] P.G. Estévez, F.J. Herranz, J. De Lucas, C. Sardón, Lie symmetries for Lie systems: applications to systems of ODEs and PDEs, submitted to *Appl. Math. Comput.* (2014), arXiv:1404.2740

[26] P.G. Estévez, J.D. Lejarreta, C. Sardón, Non isospectral 1+1 hierarchies arising from a Camassa–Holm hierarchy in $2+1$ dimensions, *J. Nonlin. Math. Phys.* **8**, 9–28 (2011).

[27] P.G. Estevez, J.D. Lejarreta, C. Sardón, Integrable 1+1 dimensional hierarchies arising from reduction of a non-isospectral problem in 2+1 dimensions, *Appl. Math. Comput.* **224**, 311-324 (2013).

[28] P.G. Estévez, J.D. Lejarreta, C. Sardón, Classical and nonclassical approach for a wave model in $2+1$ dimensions, In preparation.

[29] P.G. Estévez, J. Prada, A generalization of the sine-Gordon equation to 2+1 dimensions, *J. Nonlin. Math. Phys.* **11**, 164–179 (2004).

[30] P.G. Estévez, J. Prada, Singular manifold method for an equation in $2+1$ dimensions, *J. Nonlin. Math. Phys.* **12**, 266–279 (2005).

[31] P.G. Estévez, J. Prada, Hodograph transformations for a Camassa–Holm hierarchy in $2+1$ dimensions, *J. Phys.A: Math. Gen.* **38**, 1–11 (2005).

[32] P.G. Estevez, C. Sardón, Miura reciprocal Transformations for hierarchies in 2+1 dimensions, *J. Nonlin. Math. Phys.* **20**, 552-564 (2013).

[33] P.G. Estevez, C. Sardón, Miura reciprocal transformations for two integrable hierarchies in 1+1 dimensions, Proceedings GADEIS, Protaras, Cyprus (2012). arXiv:1301.3636,

[34] L.C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, (1998).

[35] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Method for solving the Korteweg de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095–1097 (1967).

[36] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Korteweg de Vries equation and generalization. IV Method for exact solution, *Comm. Pure Appl. Math.* **27**, 97–133 (1974).

[37] A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón, Lie–Hamilton systems on the plane: applications and superposition rules, submitted to **J. Phys. A** (2014), arXiv:1410.7336

[38] F.J. Herranz, J. de Lucas, C. Sardón, Jacobi–Lie systems: fundamentals and low-dimensional classification, accepted in *Proceedings AIMS* (2014), arXiv:1412.0300

[39] J. Hietarinta, in: *Nonlinear evolution equations: integrability and spectral methods,* Manchester University Press, 1990, p. 307.

[40] J. Hoppe, *Lectures on integrable systems, Lect. Notes Phys.* **10**, New Series m: Monographs 10, Springer–Verlag, Berlin, (1992).

[41] B.G. Konopelchenko, *Introduction to multidimensional integrable equations*t, the inverse spectral transform in 2 + 1 dimensions, Plenum Press, New York and London, (1992).

[42] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a New Type of Long Stationary Waves, *Philosophical Magazine* **39**, 42–443 (1895).

[43] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd edition, Elsevier, Oxford, (1976).

[44] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields,* **2**, 4th Ed. Butterworth-Heinemann, (1975).

[45] P.D. Lax, Integrals of Nonlinear Equations in Evolution and Solitary Waves, *Commun. Pure Appl. Math.* **21**, 467–490 (1968).

[46] P.D. Lax, R.S. Phillips, *Scattering Theory for Automorphic Functions*, Annals of Mathematics Studies 87, Princeton University Press, Princeton, (1976).

[47] D. Levi, M.C. Nucci, C. Rogers, P. Winternitz, Group theoretical analysis of a rotationg shallow liquid in a rigid container, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 4743–4767 (1989).

[48] P. Libermann, C.M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics,* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, (1987).

[49] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algébres de Lie associées, *J. Differential Geometry* **12**, 253–300 (1977).

[50] S. Lie, Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen, *Arch. for Math.* **6**, 328–368 (1881).

[51] S. Lie, *Theorie der Transformationgruppen,* **2**, Teubner, Leipzig, (1890).

[52] S. Lie, *Theorie der Transformationgruppen,* **3**, Teubner, Leipzig, (1893).

[53] M.S. Lie, G. Scheffers, *Vorlesungen über continuerliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen,* Teubner, Leipzig, (1893).

[54] J. de Lucas, C. Sardón, On Lie systems and Kummer–Schwarz equations, *J. Math. Phys.* **54**, 033505 (2013).

[55] S. Lie, G. Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, Edited and revised by G. Scheffers, Teubner, Leipzig, (1893).

[56] G. Meng, Y. Gao, X. Yu, Y. Shen, Y. Qin, Multi-soliton solutions for the coupled nonlinear Schrödinger type equation, *Nonlin. Dynamics* **70**, 609–617 (2012).

[57] M.C. Nucci, The complete Kepler group can be derived by Lie group analysis, *J. Math. Phys.* **37**, 1772–1775 (1996).

[58] M.C. Nucci, The role of symmetries in solving differential equations, *Mathl. Comput. Modelling*, **25** 181–193 (1997).

[59] M.C. Nucci, Nonclassical symmetries as special solutions of heir-equations, *Math. Anal. Appl.* **279**, 168–179 (2003).

[60] M.C. Nucci, W.F. Ames, Classical and nonclassical symmetries of the Helmholtz equation, *J. Math. An. Appl.* **178**, 584–591 (1993).

[61] M.A. del Olmo, M.A. Rodríguez and P. Winternitz, Superposition formulas for the rectangular matrix Riccati equations, *J. Math. Phys.* **28**, 530–535 (1987).

[62] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential equations,* Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 107, Springer-Verlag, New York, (1993).

[63] P.J. Olver, P. Rosenau, The construction of special solutions to partial differential equations, *Phys. Lett. A* **114**, 107–112 (1986).

[64] P.J. Olver, P. Rosenau, Group-invariant solutions of differential equations, *J. Math. Mech.* **47**, 263–278 (1987).

[65] P. Painlevé, Memoire sur les équations diffeérentielles dont líntégrale générale est uniforme, *Bull. Soc. Math. Phys. France* **28**, 201–261 (1900).

[66] P. Painlevé, Sur les équations différentieless du second ordre et dórdre supérieur dont líntégrale générale est uniforme, *Acta Math* **25**, 1–85 (1902).

[67] E. Pucci, G. Saccomandi, On the reduction methods for ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 6145–6155 (2002).

[68] C. Rogers, M.C. Nucci, On reciprocal Bäcklund transformations and the Korteweg de Vries hierarchy, *Physica Scripta* **33**, 289–292 (1986).

[69] C. Rogers, W.K. Schief, P. Winternitz, Lie-theoretical generalization and discretization of the Pinney equation, J. Math. Anal. Appl. **216**, 246–264 (1997).

[70] T. Rybicki, On automorphisms of a Jacobi manifold, *Univ. Iagel. Acta Math.* **38**, 89–98 (2000).

[71] W.H. Steeb, N. Euler, *Nonlinear Evolution Equations and Painlevé test,* (1989).

[72] H. Stephani, *Differential equations: their solution using symmetries,* Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

[73] V. Torrisi, M.C. Nucci, Application of Lie group analysis to a mathematical model which describes HIV transmission, in *The Geometrical Study of Differential Equations* (J.A. Leslie and T.P. Hobart, Eds.), A.M.S., Providence, 11–20 (2001).

[74] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, *Progress in Mathematics* **118**, Birkhäuser Verlag, Basel, (1994).

[75] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Graduate Texts in Mathematics **102**, Springer-Verlag, New York, (1984).

[76] R.M. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press, Chicago, (1984).

[77] J. Weiss, M.J. Tabor, G. Carnevale, The Painlevé Property for partial differential equations, *J. Math. Phys.* **24**, 522–526 (1983).

[78] P. Winternitz, Lie groups and solutions of nonlinear differential equations. In: *Nonlinear phenomena. Lect. Notes Phys.* **189**, Springer-Verlag, Oaxtepec, 263–331 (1983).

[79] V.E. Zakharov, S.V. Manakov, On the complete integrability of a nonlinear Schrödinger equation, *J. Theor. Math. Phys.* **19**, 551–559 (1974).