



facultad de
economía
y empresa



VNIVERSIDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Universidad de Salamanca
Facultad de Economía y Empresa
GRADO EN ECONOMÍA
CURSO 2013/2014

**Valoración de opciones.
Modelo europeo.
Aproximación numérica.**

Realizado por la estudiante María Bernardo Heras

Tutelado por el profesor Dr. José Manuel Cascón Barbero

Salamanca, 4 de Julio de 2014

CONTENIDO

Índice de tablas, cuadros, gráficos y figuras

1. Resumen.	1
2. Introducción.	1
3. Marco conceptual del mercado de derivados financieros.	2
3.1. Mercado de opciones.	5
4. Valoración de opciones. Modelo Black-Scholes.....	7
5. Aproximación numérica del modelo de Black-Scholes.	11
6. Aplicación a un caso real.	15
6.1. Implementación en Matlab.	15
6.2. Aplicación del modelo a una opción europea tipo <i>call</i> sobre acciones de Telefónica. .	16
6.3. Aplicación del modelo a una opción europea tipo <i>put</i> sobre acciones de Santander. ...	18
7. Conclusión.....	21
8. Bibliografía.....	23
9. Anexo.Conceptos básicos de análisis estocástico..	24

ÍNDICE DE TABLAS, CUADROS, GRÁFICOS Y FIGURAS

Cuadro 3.1. Resumen de productos derivados.....	4
Cuadro 3.1.1. Resumen posiciones de opciones.....	6
Cuadro 3.1.2. Payoff opciones.....	6
Gráfico 3.1.1. Payoff <i>put</i>	7
Gráfico 3.1.2. Payoff <i>call</i>	7
Gráfico 4.1. Movimiento browniano geométrico.....	8
Gráfico 5.1. Discretización tiempo-precio subyacente.....	13
Cuadro 6.2.1. Información de una opción tipo <i>call</i> de Telefónica.....	16
Gráfico 6.2.1. Representación valor de un <i>call</i> de Telefónica.....	17
Gráfico 6.2.2. Representación solución numérica y exacta.....	18
Gráfico 6.2.3. Representación error cometido.....	18
Cuadro 6.3.1. Información de una opción tipo <i>put</i> de Santander.....	19
Gráfico 6.3.1. Representación valor de un <i>put</i> de Santander.....	19
Gráfico 6.3.2. Representación solución numérica del precio de la opción respecto al activo en el momento presente.....	20
Gráfico 6.3.3. Representación valor de un <i>put</i> de Santander con volatilidad no constante.....	21

1. RESUMEN.

El presente Trabajo de Fin de Grado tiene por objeto el análisis de la valoración de opciones financieras dentro del marco específico del modelo europeo. En particular, de opciones *plain vanilla*, en contraste con las posibles variaciones que pueden existir dentro de este campo, tales como las opciones de tipo americano, bermudas, opciones exóticas o asiáticas.

En concreto, el trabajo se centra en el estudio del modelo desarrollado por Black-Scholes en su artículo "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" (Black et al., 1973) y su famosa ecuación propuesta para la valoración de opciones. Tras una descripción del mercado de derivados financieros, nos centraremos en el estudio de la ecuación de Black-Scholes. Si bien este problema admite una solución analítica bajo ciertos supuestos (volatilidad y tasas de interés constantes), en general, el cálculo de la solución requiere procedimientos numéricos ya que el problema no puede resolverse mediante técnicas analíticas. En este trabajo, para la aproximación numérica de la ecuación diferencial de Black-Scholes se ha utilizado el denominado método de diferencias finitas. Finalmente, este método se ha implementado en el software Matlab, se ha validado y posteriormente se ha aplicado a casos reales con diferentes objetivos a analizar.

2. INTRODUCCIÓN.

En los mercados actuales, existe una gran variedad de productos financieros. Dentro de estos se encuentran los denominados derivados, los cuales se han clasificado tradicionalmente en opciones y futuros (o contratos *forward*). A pesar de que este tipo de productos son considerados como la parte menos conocida y más arriesgada dentro del mercado bursátil, en el presente trabajo se expondrá una breve reseña de su utilización desde prácticamente los comienzos del comercio moderno.

A continuación, el análisis desarrollado se centra en el mercado de opciones, el cual es, dentro de los derivados, el que más avance tecnológico y financiero ha alcanzado en los últimos años; así como que su valoración económica a través de la modelización matemática se considera como la gran cuestión a desarrollar por los actuales investigadores. En concreto, se

expone el modelo de Black-Scholes (Black et al., 1973), el cual permitió un fuerte impulso de estos instrumentos financieros con su publicación, además de la aportación al texto por parte de Merton (Merton, 1973). Para ello se introduce el marco matemático necesario para su formulación y los razonamientos económicos que lo justifican, los cuales hacen de este modelo la más brillante solución de la valoración de opciones hasta la fecha, por la cual Myron Scholes y Robert C. Merton recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997. El reconocimiento recibido destacó la introducción de una “*manera más eficiente de tratamiento del riesgo en la sociedad*”¹.

Black-Scholes modelan el precio del activo subyacente como un movimiento browniano (véase Anexo), esto es, un proceso estocástico que incluye los efectos de la tendencia del precio y de la volatilidad. A partir del lema de Itô (véase Anexo), obtienen una ecuación diferencial estocástica para el valor de la opción. La clave del proceso está en que a través de una operación de cobertura de riesgo consiguen reducir esta ecuación a una ecuación diferencial clásica. Esta ecuación admite solución analítica en un escenario de volatilidad y tasas de interés constantes. En cualquier otro caso, se requiere la implementación de procedimientos numéricos para su resolución. Para ello se puede utilizar el denominado *método de diferencias finitas* (ver por ejemplo Blackledge et al., 2000) el cual se basa en aproximar derivadas de funciones por cocientes incrementales. Este método es el elegido para ser desarrollado en el trabajo.

Una vez expuesto lo anterior, se procederá a implementar el procedimiento descrito en el software matlab (web: <http://www.mathworks.es/>), para lo que se programarán las funciones correspondientes a opciones europeas tipo *put* y *call*.

Finalmente, se validará el código generado y se aplicará a un caso real, a partir del cual el lector podrá hacerse una idea de la aplicación práctica de la teoría que se encuentra detrás de él. Dentro de este caso real, se comprobará la eficacia del método numérico desarrollado, además de que se presentará un caso con volatilidad no constante.

3. MARCO CONCEPTUAL DEL MERCADO DE DERIVADOS FINANCIEROS.

¹ Para más información, consúltese: <http://www.nobelprize.org/>.

El contexto en el cual se desarrollan este tipo de productos se debe enmarcar dentro de los mercados financieros, por lo que los derivados son, en última instancia, instrumentos financieros. Este determinado tipo de instrumentos se caracterizan por el hecho de que su valor es calculado, o “derivado” (de ahí su nombre), a partir de la evolución de los precios de otros activos denominados *activos subyacentes*, los cuales varían desde acciones, divisas, tipos de interés, valores de renta fija, materias primas, índices bursátiles a incluso riesgos de crédito o la propia variación del índice de precios de consumo (inflación). Estos últimos son los que se encuentran detrás de los más sofisticados derivados financieros existentes en la actualidad. En concreto, el auge de los derivados de crédito, tales como los *credit default swap* (CDS), *credit default options* o *credit linked notes*; se ha plasmado en la realidad de los últimos años, tanto con sus ventajas como con el peligro que su utilización desmesurada conlleva, tal y como se explica en Bodie et al. (2008).

La principal diferencia de este tipo de productos con los demás instrumentos financieros radica en que se establecen en el momento presente de la contratación los detalles de una transacción que se producirá en un momento determinado del futuro. El razonamiento económico que se encuentra detrás de estos contratos es la necesidad de las partes de reducir la incertidumbre de un acontecimiento futuro pactando las condiciones a priori. Se podría ligar esta necesidad de reducción de incertidumbre a la mayoritaria aversión al riesgo de los individuos en la realidad.

Este tipo de operaciones, en las cuales se fija en el presente un acuerdo que tendrá lugar en el futuro, posee tras de sí una larga historia, prácticamente desde que el comercio se implantó. Más concretamente, ya en el siglo XVII se llevaban a cabo contratos de este tipo en los mercados holandeses cuyo activo subyacente solían ser los bulbos de tulipán. De hecho, la primera gran burbuja especulativa que se produjo en la historia fue la denominada en la literatura como *Tulipomanía*². Por otra parte, en el continente asiático se realizaban contratos de este tipo con el arroz. Más tarde, en el siglo XIX, se desarrolló de forma más avanzada en Chicago, con la aparición del primer mercado moderno de derivados. No es hasta 1973 cuando nacen, en el mismo Chicago, los primeros contratos sobre tipos de cambio dando inicio de este modo a los derivados financieros. Es el nacimiento del primer mercado organizado de opciones financieras, el CBOE (*Chicago Board Options Exchange*).

² Para más información sobre el tema, consúltese el siguiente documental : “*Documental la crisis del tulipán*”, <http://www.youtube.com/watch?v=iFr9VtXgkqk>

A partir de entonces se han ido desarrollado todo tipo de nuevos contratos de derivados, tanto negociados en mercados organizados como no, respaldados por el gran avance de las tecnologías de la información así como de los mercados financieros gracias a la liberalización financiera. La variedad de los productos derivados es muy amplia (véase cuadro 3.1.).

Tipo	Categoría	Entidades a través de las que se puede contratar	Supervisor
Productos derivados	Negociados en mercados regulados: • Futuros y opciones financieras (MEFF) ¹ y no financieras (MFAO) ² • Warrants	• Sociedades y Agencias de valores • ESI's ³ extranjeras autorizadas • Entidades de crédito nacionales • Entidades de crédito extranjeras autorizadas	CNMV
Productos derivados OTC	Productos negociados en mercados secundarios OTC ⁴ : • Contratos a plazo (<i>forwards</i>) • FRAs ⁵ • Permutas financieras (<i>swaps</i>) • Opciones • ...	• Sociedades y Agencias de valores • ESI's ³ extranjeras autorizadas • Entidades de crédito nacionales • Entidades de crédito extranjeras autorizadas	No supervisados
Productos estructurados	Negociados en mercados regulados: • Certificados • Turbowarrants • ...	• Sociedades y Agencias de valores • ESI's ³ extranjeras autorizadas • Entidades de crédito nacionales • Entidades de crédito extranjeras autorizadas	CNMV
	No negociados en mercados regulados: Derivados de crédito ⁶		No supervisados
Otros productos no negociables	• De Naturaleza Mixta • Contratos Financieros Atípicos (CFAs)	• Entidades de crédito nacionales • Entidades de crédito extranjeras autorizadas	CNMV

¹ Mercado Español de Productos Financieros Derivados.

² Mercado de Futuros del Aceite de Oliva.

³ Empresas de servicios de inversión.

⁴ Over the Counter: productos negociados en mercados no oficiales.

⁵ Forward rate agreement.

⁶ Actualmente en España no se comercializan a inversores minoristas.

Cuadro 3.1. Resumen de productos derivados. [Fuente: CNMV].

3.1. Mercado de opciones.

Dentro de los derivados financieros (Hull, 2011) se puede citar a los contratos forward o futuros como los primeros en desarrollarse, cuyo funcionamiento básico es el de un contrato a plazo en el que las partes acuerdan realizar una operación de compraventa en una fecha futura determinada con un precio fijado de antemano. Por lo tanto, un futuro es una obligación de compra o de venta futura. Esta última característica de un futuro es la que los diferencia de las opciones, ya que una opción es un producto derivado que se caracteriza por materializarse en un contrato que otorga al titular del mismo el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción de compra o *call*) o de vender (opción de venta o *put*) el activo subyacente (S) a un precio de ejercicio predeterminado o strike (K) hasta o en una fecha determinada del futuro o vencimiento (T). Las opciones requieren un pago inicial o prima (V en general, P para *put* y C para *call*), por lo que tienen un coste inicial.

Los mercados de opciones cuentan con cámaras de compensación (*Clearing House*) para garantizar su correcto funcionamiento y evitar el riesgo de contraparte que puede surgir. Por tanto, será esta cámara la encargada de dar contrapartida a las distintas partes del contrato. A pesar de que existen varios mercados organizados de opciones a escala internacional; en España, el mercado oficial de opciones es el “*Mercado Oficial de Futuros y Opciones Financieros*” (MEFF), el cual está supervisado por la CNMV y el Ministerio de Economía, en el que se negocian futuros y opciones tanto de activos de renta fija como de renta variable (bonos del estado, *ibex35* y acciones), actuando a la vez como mercado y cámara de compensación.

En términos generales, se pueden diferenciar las expectativas de los inversores sobre los activos subyacentes en función del tipo de opción: así, los inversores que compran opciones *call* suelen tener expectativas alcistas sobre el activo subyacente, es decir que esperan que el precio del mismo aumente; así como los compradores de opciones *put* tienen expectativas bajistas sobre el subyacente ya que esperan que el precio sea menor en el futuro.

Debido a que las opciones otorgan un derecho y no una obligación para el titular, se ejercerán o no dependiendo del precio del activo subyacente en el momento de ejercicio (conocido como *Stock Price*, S_t), o lo que es lo mismo, de la posición en la que se encuentre la opción. Las posiciones en las que se puede encontrar una opción son principalmente tres (“in”, “out” y “at the money”).

- “**In the money**”: aquellas que si se ejercen otorgan beneficios a su titular. En este caso, para un *call*, el *strike* debe ser menor que el precio del activo y viceversa para una opción *put*.

-“**Out of the money**”: aquellas que no se ejercen puesto que otorgarían pérdidas. En este caso, para un *call*, el *strike* debe ser mayor que el precio del activo y viceversa para el *put*.

-“**At the money**”: aquellas cuyo *strike* prácticamente coincide con el precio del activo subyacente con lo que no otorgaría ningún beneficio ni pérdida para el titular si las ejerciera.

En el cuadro 3.1.1 se resumen las posiciones de las opciones.

	PUT	CALL
K>S(T)	In the money	Out of the money
K<S(T)	Out of the money	In the money

Cuadro 3.1.1. Resumen posiciones de opciones.

Por otro lado, las opciones se pueden clasificar en función de las condiciones de ejercicio en: **opciones europeas**, cuyo titular puede ejercer el derecho a comprar o vender el activo subyacente únicamente en la fecha de vencimiento, u **opciones americanas**, cuyo titular puede ejercer el derecho de compra o venta del activo subyacente en cualquier momento.

En cuanto a las posiciones, se habla de posición larga o posición corta en el mercado de opciones. La **posición larga** se refiere a la compra de una opción, mientras que la **posición corta** se refiere a la emisión o venta de la opción. En la literatura existente sobre el tema, el **payoff** de una opción se conoce como el beneficio obtenido por el titular en el momento en el que se ejerce la opción descontando la prima pagada, que en el caso de los futuros coincide con el beneficio de la compraventa. Los payoff se resumen en el cuadro 3.1.2.

	PUT	CALL
Posición larga (compra)	Max (K-S _T -P,0)	Max (S _T -K-C,0)
Posición corta (venta)	Min (P-K-S _T ,0)	Min (C-S _T -K,0)

Cuadro 3.1.2. Payoff opciones.

Gráficamente, los payoff se podrían representar como en los gráficos 3.1.1 y 3.1.2.

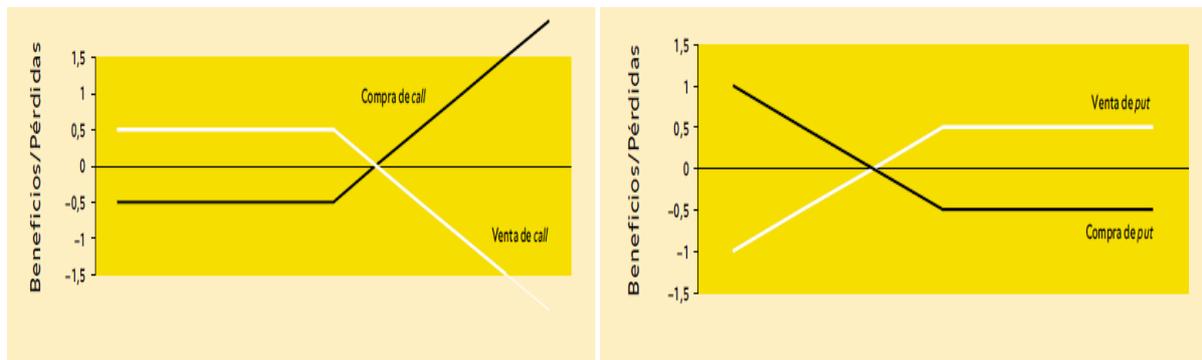


Gráfico 3.1.1. Payoff *call*.

Gráfico 3.1.2. Payoff *put*.

[Fuente:CNMV]

Resulta importante destacar el hecho de que las pérdidas pueden ser ilimitadas para posiciones cortas en el caso de opciones de tipo *call* mientras que los beneficios pueden ser ilimitados en el caso de posiciones largas, tal y como se observa en el gráfico 3.1.1.

Con el objetivo de especificar dentro de las posibilidades existentes en el mundo de las opciones, en el presente trabajo se centrará la atención en opciones europeas sobre acciones.

4. VALORACIÓN DE OPCIONES. MODELO BLACK-SCHOLES.

En primer lugar, antes de desarrollar el modelo de Black-Scholes, es necesario comenzar con la lógica económica que se encuentra detrás del mismo. El análisis se centrará, por simplicidad, en “*plain vanilla European options*”, en contraposición a modalidades de opciones más complejas.

A priori, está claro que el precio de una opción en la fecha de expiración coincide con su payoff, ya que en ese momento deja de existir incertidumbre. Determinar el valor de una opción consiste en hallar un “precio justo” antes del momento de expiración de la misma. Dado que lo que se pretende es valorar la opción, el payoff se redefinirá ya que como se observa en los gráficos 3.1.1. y 3.1.2 de la sección anterior se asume un coste fijo de la opción y en el problema de valoración ese coste es precisamente la incógnita. Para las opciones de tipo *call* el payoff se define como $\text{Max}(K - S_t, 0)$ mientras que para las de tipo *put* se utiliza la función $\text{Max}(S_t - K, 0)$.

Para todo ello, es necesario modelizar primero el precio del activo subyacente. Black-Scholes modelan el precio del activo subyacente como un movimiento browniano (véase Anexo). Desde el punto de vista económico esto corresponde con la hipótesis de mercados eficientes, es decir, el mercado responde instantáneamente a la nueva información disponible, con lo que el precio actual sólo depende del precio del pasado más reciente. Más concretamente, Black-Scholes proponen que el precio del activo subyacente S_t verifica la ecuación:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t, \quad (1)$$

donde X_t es un proceso de Wiener o , movimiento browniano (véase Anexo) y además, dX_t sigue una distribución normal del tipo $N(0, dt)$. Por un lado, el primer término marca la tendencia del precio del activo a través del parámetro μ (denominado tendencia) y se observa que es un término determinista, mientras que en el segundo se representa la volatilidad del precio del activo a través del parámetro σ . Este segundo término es de carácter estocástico ya que contiene el proceso de Wiener. La ecuación (1) puede resolverse de forma analítica y su solución viene dada por (Hull, J.C., 2012):

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma X_t \right) \quad (2)$$

Por lo tanto, se observa que $F(S_t) = \log S_t$ sigue una normal con media $\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$ y desviación típica, $\sigma^2 t$, con lo que el precio del activo se distribuye según una distribución log normal, o siguiendo un camino aleatorio log normal (*log normal random walk*). Trayectorias de este tipo se encuentran en el gráfico 4.1. Black-Scholes asumen. Todo lo comentado hasta este punto suele aparecer en la bibliografía (ver Vázquez (2010)) como la hipótesis de que Black-Scholes asumen una distribución log normal del precio del activo. Se debe tener en cuenta que el modelo considerado en este trabajo no admite saltos en precios.

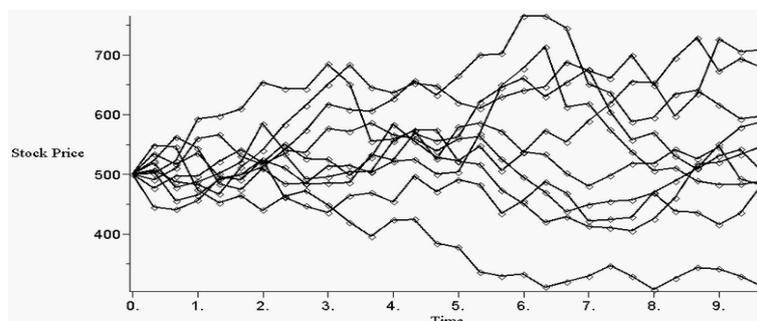


Gráfico 4.1. Movimiento Browniano geométrico.

Una vez definido cómo se comporta el precio del activo subyacente en (1), se pasa a modelizar la variación del precio de la opción, V , la cual es una función que depende del precio del activo subyacente, S , y del tiempo, t , y que denotaremos $V(t,S)$. Aplicando el lema de Itô (véase Anexo) a la función $V(t,S)$ obtenemos:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX \quad (3)$$

Para resolver esta ecuación, Black-Scholes asumen algunas hipótesis, (véase Vázquez (2010)), además de la ya comentada acerca del activo subyacente, las cuales son: que la tasa de interés libre de riesgo, r , y la volatilidad, σ , son funciones deterministas del tiempo-aunque por lo general se tratan como constantes-; que no existe arbitraje, o lo que es lo mismo, que todas las carteras libres de riesgo deben de tener el mismo rendimiento - tipo de interés libre de riesgo, r -; que el mercado es continuo, es decir, no necesariamente un número entero de activos pueden ser vendidos o comprados en tiempo continuo; además se asume que no existen costes de transacción y los activos no pagan dividendos.

Black-Scholes son premiados por resolver esta ecuación diferencial estocástica de forma brillante. Su idea radica en la construcción de una cartera formada por la opción y Δ activos:

$$\pi = V - \Delta S \quad (4)$$

Mediante operaciones de cobertura consiguen que esta cartera sea libre de riesgo en el intervalo temporal $[t, t+dt]$, con lo que para ello se venderían Δ activos (escogiendo el Δ adecuado) y se compraría 1 opción en el momento t (mercado continuo). Con todo esto, la variación del valor de la cartera en el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$ está relacionada con la variación del cambio en el precio de la opción y del activo subyacente. Por lo tanto, la variación del precio de la cartera sería:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu \Delta S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX \quad (5)$$

Para que la cartera sea libre de riesgo se tendría que tener un $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, con lo que sustituyendo este valor en (5), se obtiene:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (6)$$

Además, utilizando el supuesto de no arbitraje por el cual:

$$d\pi = r\pi dt \quad (7)$$

y sustituyendo (4) y el valor de Δ en (7) se obtendría:

$$d\pi = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt \quad (8)$$

A continuación, se identifican (6) y (8), para después reordenarlas obteniendo una ecuación diferencial clásica sin parte estocástica, la cual se conoce en la bibliografía como ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (9)$$

La ecuación (9) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, en la que sólo aparece la variable independiente V , el valor del activo, S , la volatilidad σ y la tasa de interés libre de riesgo, r . Así, se ha eliminado de la ecuación el término μ o tendencia así como la parte estocástica (dX). Añadimos que la ecuación anterior determina tanto el comportamiento de una opción de tipo *call*, como *put*.

El modelo se completa imponiendo la correspondiente condición inicial (en este caso sería apropiada llamarla final), que corresponde al valor de la opción en el tiempo de expiración. Así, en los casos que nos ocupan las condiciones finales para un *call* y un *put*, respectivamente, vendrían dadas por:

$$C(T, S) = \max(S - K, 0) \quad \forall S \in (0, S_\infty)$$

$$P(T, S) = \max(K - S, 0) \quad \forall S \in (0, S_\infty)$$

En el supuesto de que la tasa de interés y volatilidad sean constantes, las ecuaciones anteriores se pueden resolver mediante técnicas más o menos complejas de análisis matemático (Black et al., 1973).

A continuación se exponen las fórmulas correspondientes para opciones *put* y *call* europeas siendo éstas opciones *plain vanilla* que no pagan dividendos (Black et al., 1973):

Opciones tipo call: $C(t, S) = SN(d_1) - E \exp(-r(T-t)) N(d_2) \quad (10)$

Opciones tipo put: $P(t, S) = -SN(-d_1) + E \exp(-r(T-t)) N(-d_2) \quad (11)$

donde \exp es la función exponencial; N es la función normal [$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$], r es la tasa de interés libre de riesgo, S es el precio del activo, T , la fecha de expiración, t , el momento del tiempo, d_1 y d_2 vienen dados por las expresiones:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

En el supuesto en el que no existe arbitraje se puede obtener una fórmula que relacione las dos anteriores para calcular el precio de una en función de la otra (paridad de las fórmulas *put-call*), (Black et al., 1973):

$$P(t,S) = C(t,S) - S + K \exp(-r(T-t)) \quad (12)$$

Insistimos en que la ecuación (9) se puede resolver de forma analítica, y cuya solución viene dada por las ecuaciones (10) y (11); siempre y cuando los parámetros σ y r sean constantes mientras que en otro caso es necesario hacerlo a través de métodos numéricos. Los supuestos que se relajan en todos esos casos suelen aproximar el modelo de forma más precisa a la realidad. Aunque también se debería añadir que en general es difícil determinar de forma precisa los parámetros que aparecen en la ecuación diferencial.

5. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES.

En este apartado se presentará un método que permite la aproximación numérica del modelo de Black-Scholes. Para ello es preciso discretizar la ecuación que se ha descrito en la sección anterior-(6)-. Con dicho propósito, se va a emplear el denominado “*método de diferencias finitas*”. Para una descripción detallada del método consultar por ejemplo Mayers et al. (1994) o Vázquez (2010).

La idea principal del método es sustituir las derivadas de funciones por cocientes incrementales. Por ejemplo, para aproximar la derivada de una función $f(x)$ en el punto x_0 , se utilizan fórmulas del tipo: $f'(x_0) \approx (f(x_0) - f(x_0 + h))/h$; donde h , es el paso de discretización, que se escoge suficientemente pequeño. El tamaño de este parámetro, por tanto, influirá en la calidad de la aproximación.

Por otro lado, en lugar de escribir (9) sobre un dominio continuo (recinto de \mathbb{R}^2), se escribe sólo sobre un conjunto finito de puntos, expresando las derivadas como cocientes incrementales. Tras esta discretización, la resolución de (9) se reduce a calcular la solución de un sistema lineal de ecuaciones.

Con el objetivo de simplificar la explicación, el siguiente desarrollo se centra en el caso de opciones de tipo *call* europeas, siendo válido el mismo procedimiento, para las opciones de tipo *put*. A partir de aquí, se empleará C en lugar de V para representar el valor de la opción tipo *call*.

En primer lugar, para poder discretizar el problema, es necesario fijar un dominio acotado donde aplicar el método ya que (9) está definida si $t \in [0, T]$ y $S \in \mathbb{R}$, y así es tratada analíticamente. Sin embargo, para la resolución numérica es preciso limitar el valor máximo del activo S (algo que desde el punto de vista práctico no supone ninguna limitación). En la literatura, el rango de variación del precio del subyacente que se utiliza suele ser tres o cuatro veces el valor del strike (Kangro et al. (2000)), es decir, $S \in [0, 4K]$. En conclusión, en lo que sigue, (9) se escribe sobre el dominio $[0, T] \times [0, 4K]$.

Al trabajar en un dominio acotado, además de imponer condiciones iniciales como las citadas anteriormente, se precisa imponer condiciones de contorno. Es decir, se debe especificar cuál es el comportamiento del valor de la opción cuando $S=0$, y cuando $S= 4K$. En la bibliografía, es habitual utilizar las siguientes condiciones de contorno en el tiempo t (*boundary conditions*):

$$1. C(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad 2. C(t, S_{\infty}) = S_{\infty} - K \exp(-r(T-t)) \quad \forall t \in [0, t].$$

Para una opción de tipo *put* serían estas otras:

$$1. P(t, 0) = K \exp(-r(T-t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{y} \quad 2. P(t, S_{\infty}) = 0 \quad \forall t \in [0, t].$$

A continuación, se construye una *malla de diferencias finitas* sobre el recinto $[0, T] \times [0, 4K]$.

Esto es:

- Se fijan tamaños de discretización en tiempo $\Delta t = T/N$ y subyacente $\Delta S = 4K/M$. Siendo N, y M, el número de subdivisiones que se realizarán en cada uno de los ejes. Esta información es suministrada por el usuario.

- Se generan los nodos de la malla, según la fórmula,

$$(t_j, S_i) = (j\Delta t, i\Delta S); \quad j=0, \dots, N+1; \quad i=0, \dots, M+1$$

Esta discretización del dominio tiempo-precio del subyacente se puede observar en el gráfico 5.1.

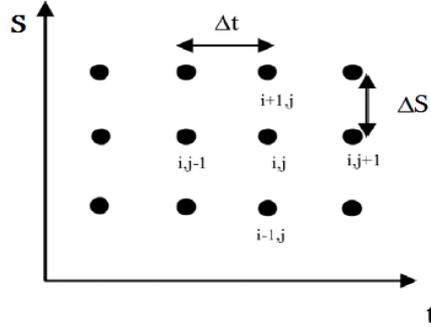


Gráfico 5.1. Discretización tiempo-precio subyacente.

Una vez definido el escenario, (9) se escribe en cada uno de los puntos de la malla substituyendo las derivadas parciales por cocientes incrementales. En concreto, en nuestro caso se ha optado por utilizar fórmulas de tipo implícito: conocido el valor de la opción en el tiempo t_{j+1} , para calcular el precio en el tiempo t_j es preciso resolver un sistema de ecuaciones. Por el contrario, los métodos explícitos proporcionan expresiones *explícitas* que permiten expresar la solución en t_{j+1} en función de la solución en t_j , aunque matemáticamente pueden ser inestables y por ello son desaconsejados en este trabajo.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t_j, S_i) \approx \frac{C(t_j, S_{i+1}) - 2C(t_j, S_i) + C(t_j, S_{i-1}))}{\Delta S^2} \quad \frac{\partial C}{\partial S}(t_j, S_i) \approx \frac{C(t_j, S_{i+1}) - C(t_j, S_i)}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t_j, S_i) \approx \frac{C(t_{j+1}, S_i) - C(t_j, S_i)}{\Delta t}, \text{ para } j = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, M$$

Con lo que introduciendo las relaciones anteriores en (9) se obtiene:

$$\frac{C(t_{j+1}, S_i) - C(t_j, S_i)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \frac{C(t_j, S_{i+1}) - 2C(t_j, S_i) + C(t_j, S_{i-1}))}{\Delta S^2} + r S_i \frac{C(t_j, S_{i+1}) - C(t_j, S_i)}{\Delta S} - r C(t_j, S_i) \approx 0.$$

Posteriormente, reordenando los términos y agrupando convenientemente se llega a la siguiente expresión:

$$(1 + \Delta tr + \frac{\Delta t \sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{\Delta tr S_i}{\Delta S}) C(t_j, S_i) - \frac{\Delta t \sigma^2 S_i^2}{2 \Delta S^2} C(t_j, S_{i-1}) + (-\frac{\Delta t \sigma^2 S_i^2}{2 \Delta S^2} - \frac{\Delta tr S_i}{\Delta S}) C_{j, i+1} = C_{j+1, i}$$

En lo que sigue utilizaremos la notación $C_{j,i} \approx C(t_j, S_i)$, y sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$$-\frac{\Delta t \sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} C_{j,i-1} + \left(1 + \Delta tr + \frac{\Delta t \sigma^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{\Delta tr S_i}{\Delta S}\right) C_{j,i} + \left(-\frac{\Delta t \sigma^2 S_i^2}{2\Delta S^2} - \frac{\Delta tr S_i}{\Delta S}\right) C_{j,i+1} = C_{j+1,i}$$

Además, para cada j se utilizan las condiciones de contorno señaladas anteriormente:

$$C_{j, M+1} = C(t_j, S_\infty) = S_\infty - K \exp(-r(T-t_j)) \quad ; \quad C_{j, 0} = C(t_j, 0) = 0$$

y la condición final: $C_{N+1,i} = C(T, S_i) = \text{payoff}(S_i, T) = \max(S_i - K, 0)$.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como un sistema lineal tridiagonal del tipo

$$AC_j = b_j, \quad (13)$$

donde los elementos que no son cero vienen dados por:

$$A_{ii} = 1 + \rho + \gamma S_i^2 + \kappa S_i, \quad A_{i, i+1} = -\theta S_i^2 - \kappa S_i, \quad A_{i, i-1} = -\theta S_i^2,$$

siendo los parámetros anteriores como sigue:

$$\gamma = \frac{\Delta t \sigma^2}{\Delta S^2} \quad \theta = \frac{\Delta t \sigma^2}{2\Delta S^2} \quad \rho = \Delta tr \quad \kappa = \frac{\Delta tr}{\Delta S}$$

y los términos independientes b_j se definen del siguiente modo:

$$b_j = (C_{j+1,1} + \theta S_1^2(t_j), C_{j+1,2}, \dots, C_{j+1, M-1}, C_{j+1, M} + (\theta S_{N+1}^2 + \kappa S_{N+1})\beta(t_j))^t$$

y donde el vector solución es:

$$C_j = (C_{j,1}, C_{j,2}, \dots, C_{j, M-1}, C_{j, M})^t, \quad j=0, \dots, N+1.$$

Dada la solución en el tiempo T (tiempo de expiración), que corresponde con la indexada como:

$$C_{N+1,j} = (C_{N+1,1}, C_{N+1,2}, \dots, C_{N+1, M-1}, C_{N+1, M})^t,$$

Se resuelve recursivamente el sistema (13) para $j = N, \dots, 0$.

6. APLICACIÓN A UN CASO REAL.

En este último apartado se describirá la implementación en Matlab del procedimiento descrito en la sección 5 y se utilizará para la aproximación primero de una opción de tipo *call* y después una de tipo *put*.

6.1. Implementación en Matlab.

El método descrito en la sección anterior se ha implementado en Matlab. Matlab, desarrollado desde 1984, “es un programa de cálculo técnico y científico de gran capacidad para el cálculo, la programación y la visualización” (Referencia web: <http://www.mathworks.es/>).

La programación se ha realizado de forma estructurada, es decir, está formada por una serie de funciones con un propósito específico, de las cuales se puede distinguir entre funciones de cálculo, las cuales aparecen en los siguientes párrafos en primer lugar, y funciones de postproceso, las cuales permiten presentar los resultados. En concreto:

-“*bscallsolver.m*”- Es la función principal del proceso. Calcula la solución de una opción de tipo *call*, proporcionados los parámetros de la opción: unos valores determinados de strike (E), volatilidad (σ), tipo de interés(r) y tiempo de expiración (T) y de discretización: N, M. Es decir, calcula el valor del precio de una opción de tipo *call* según el modelo de Black-Scholes en el recinto $[0, T] \times [0, 4E]$ mediante un método de diferencias finitas implícito. Además, si existe la solución exacta, proporciona el error cometido.

-“*implicitFD.m*” - Es la función que calcula la solución (precio de opción) en el tiempo j , a partir de la solución en el paso $j+1$. Es decir se construye y resuelve el sistema tridiagonal asociado a cada paso de tiempo.

-“*payOffCall.m*” - Es la función que sirve para fijar la condición final.

-“*gSinfity.m*” - Condición de frontera cuando el precio del activo es "infinito = $4K$ ".

-“*gS0.m*” - Condición de frontera cuando el precio del activo es 0.

Y como postproceso, se incorporan las siguientes:

-“*plotSol.m*” – Función utilizada para dibujar la superficie de la solución obtenida.

-“exactCall.m” - Es la solución exacta de Black-Scholes. Se utiliza para calcular el error que se comete con la aproximación numérica, en el caso de que el tipo de interés y la volatilidad sean constantes.

Las funciones anteriores son simétricas para el caso de una opción tipo *put*, con pequeñas variaciones en el payoff y las condiciones de frontera.

Para validar el modelo se ha incluido la función “exactCall.m”, que calcula el valor de la opción mediante el uso de las fórmulas (10) y (11), la cual permite hallar el error cometido por el método numérico cuando la solución analítica existe (volatilidad y tasa de interés constante).

6.2. Aplicación del modelo a una opción europea tipo *call* sobre acciones de Telefónica.

En este caso se implementa el modelo en una opción europea tipo *call* sobre acciones de Telefónica. Como tipo de interés libre de riesgo se toma el de un bono alemán a 10 años (valor actualizado el 06/06/2014) y como volatilidad la misma empleada por Vázquez (2010), es decir, un 25%. Toda la información acerca de la opción se encuentra resumida en el cuadro 6.2.1 (web: <http://www.meff.es>).

Precio de ejercicio o strike (€)	13,50
Tipo de interés libre de riesgo	1,35%
Fecha de expiración o vencimiento	18/12/2015 (1,5 años aprox.)
Volatilidad	25%
Subdivisiones precio (n)	100
Subdivisiones tiempo (m)	100

Cuadro 6.2.1. Información de una opción tipo *call* de Telefónica.

En el gráfico 6.2.1. se puede observar que existe una relación positiva entre el precio del activo subyacente y el de la opción, ya que se trata de un derecho de compra, por lo que al inversor le interesa que el precio del activo sea elevado, y por ello el valor de la opción y del activo subyacente tienden a converger a medida que se acerca la fecha de vencimiento.

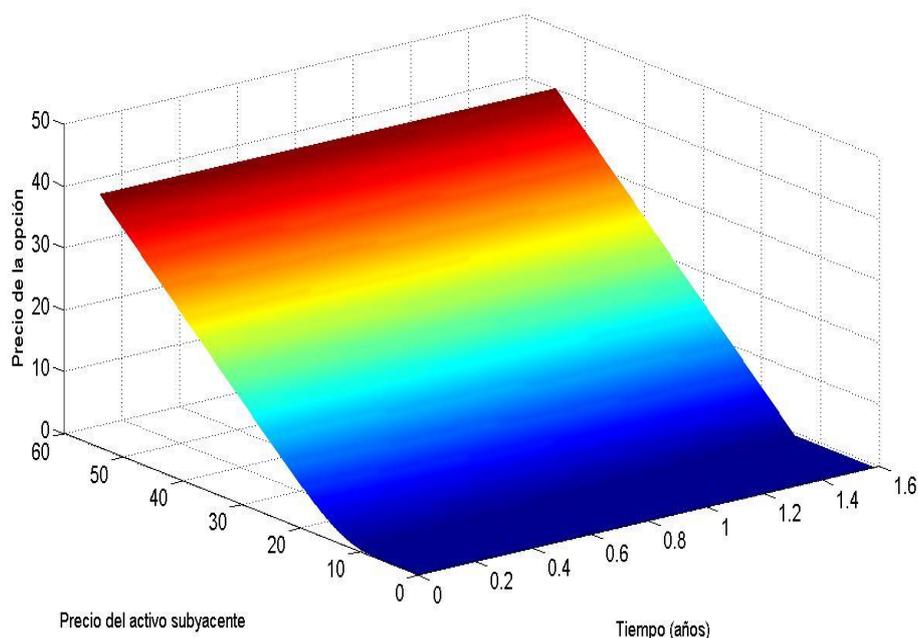


Gráfico 6.2.1. Representación valor de un *call* de Telefónica.

A continuación, utilizando los valores de este mismo ejemplo, se muestra la “validación del método numérico”. Es decir, empleando el ejemplo con volatilidad y tipo de interés constantes, se comprueba cuál es el error del método utilizado. A través de esta comprobación se puede saber si el método es adecuado y puede ser utilizado para casos en los que la solución analítica no se puede calcular.

En lo que respecta a los gráficos 6.2.2 y 6.2.3, en el primero se representa el valor de la opción con respecto al precio del activo subyacente tanto en la solución exacta como en la solución numérica, mientras que en el segundo aparece representado el error cometido en la solución numérica con respecto a la solución exacta.

En cuanto a la interpretación del gráfico 6.2.2, se puede decir que la solución numérica no dista demasiado de la solución exacta, por lo que podríamos presumir que error cometido por el método es irrelevante.

Esta presunción se corrobora con el gráfico del error cometido, calculado para el paso de tiempo 1, en el cual se observa un error máximo de aproximadamente 3.4×10^{-3} , el cual es despreciable en comparación con el precio del activo subyacente, y que además coincide con el precio del subyacente 10, para el cual el precio de la opción “se comienza a elevar” en el gráfico primero.

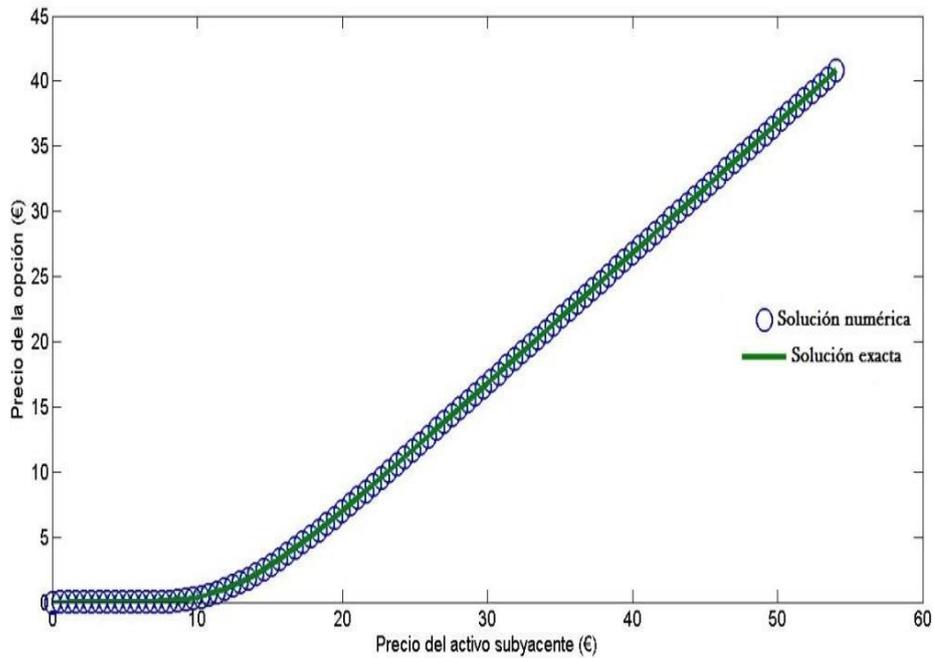


Gráfico 6.2.2. Representación solución numérica y exacta

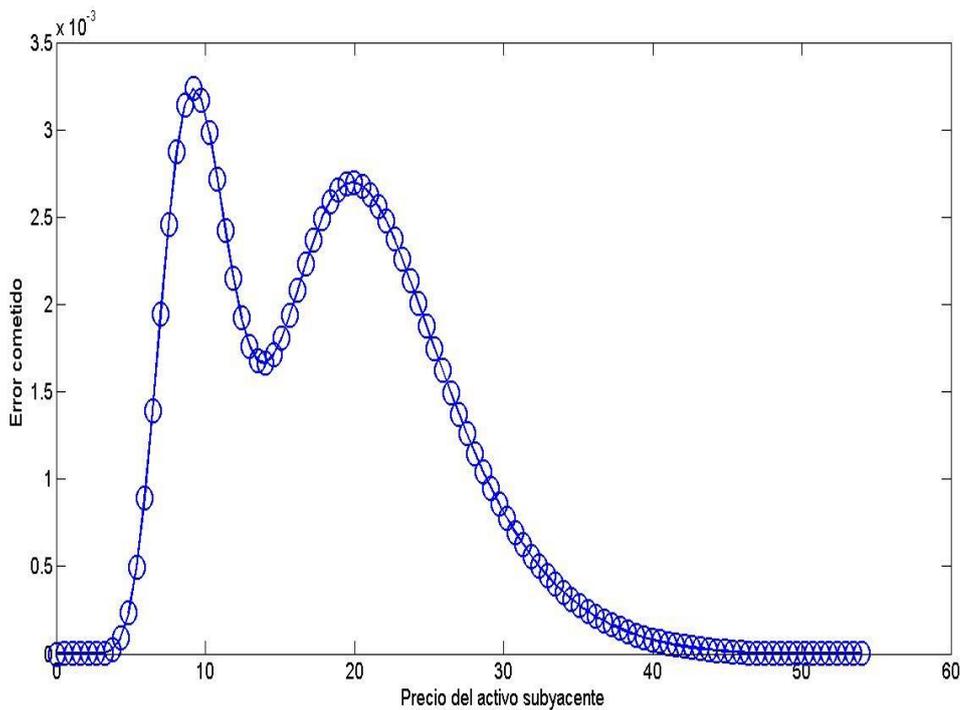


Gráfico 6.2.3. Representación error cometido.

6.3. Aplicación del modelo a una opción europea tipo *put* sobre acciones de Santander.

En este caso, el ejemplo para la opción tipo *put* es el de una opción de venta sobre acciones del Banco Santander, con la información del cuadro 6.3.1.

Precio de ejercicio o strike (€)	7,00
Tipo de interés libre de riesgo	1,35%
Fecha de expiración	19/12/2015(aprox. 0,5 años)
Volatilidad	25%
Subdivisiones precio (n)	100
Subdivisiones tiempo (m)	100

Cuadro 6.3.1. Información de una opción tipo *put* de Santander.

En este caso, al tratarse de un derecho de venta, al inversor le interesa que el precio del activo subyacente sea bajo, por lo que el valor de la opción será mayor cuanto menor sea el precio del activo subyacente, ya que reportará mayor beneficio para su titular. Todo ello se puede observar en el gráfico 6.3.1.

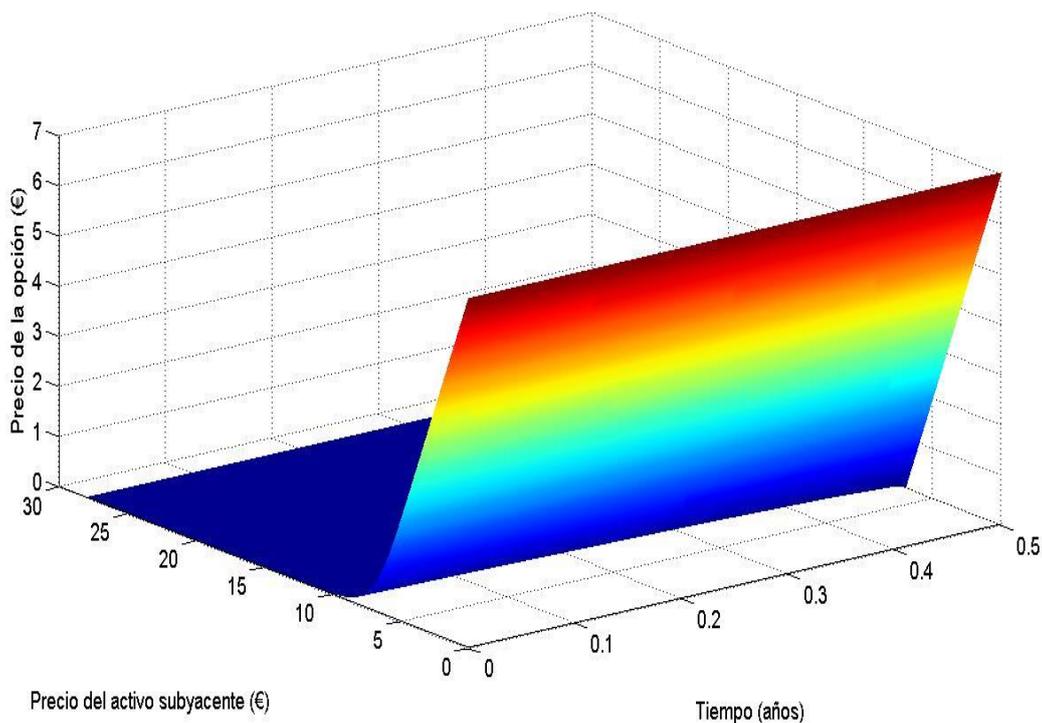


Gráfico 6.3.1. Representación valor de un *put* de Santander.

Por último, se va a mostrar un caso en el cual la volatilidad deja de ser constante para poder observar cómo quedarían las gráficas en dicho escenario. Para ello, se utilizan los mismos

datos de la opción tipo *put* de Banco Santander anterior y se implementa seleccionando una volatilidad con la forma siguiente:

$$\sigma(t) = 0.25 + 0.1 * \text{sen} \left(5 * \Pi * \frac{T-t}{T} \right)$$

En el gráfico 6.3.2. se observa la solución numérica (dado que al utilizar una volatilidad no constante no se puede obtener la solución exacta de forma analítica) obtenida para la opción en el tiempo presente ($t=0$) con todos los demás parámetros iguales a los del cuadro 6.3.1. La forma de la función representada presenta el patrón general de una opción tipo *put*. El gráfico 6.3.3 simplemente representa los diferentes valores de la opción para cada precio del activo subyacente en cada momento del tiempo.

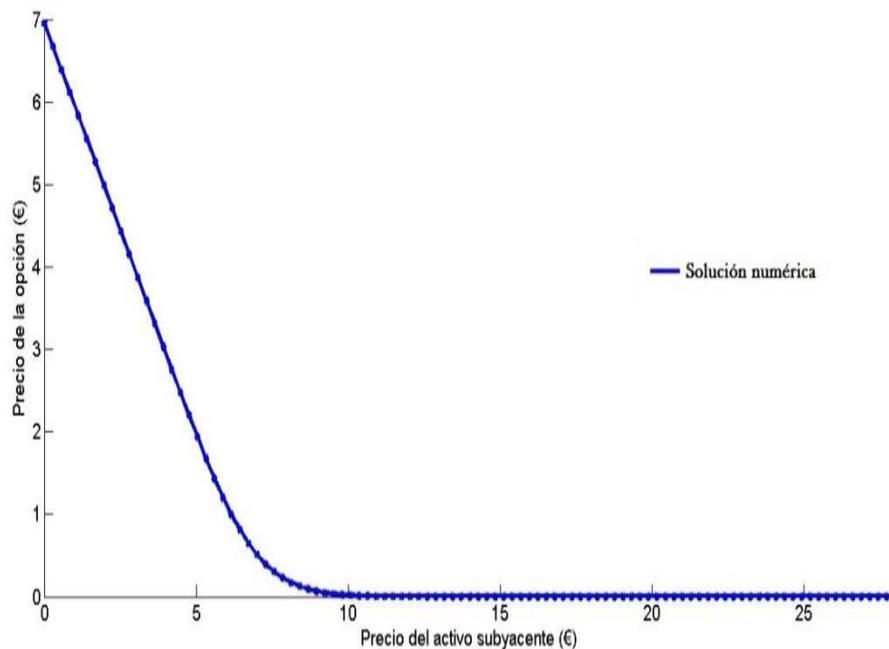


Gráfico 6.3.2. Representación solución numérica del precio de la opción respecto al activo en el momento presente.

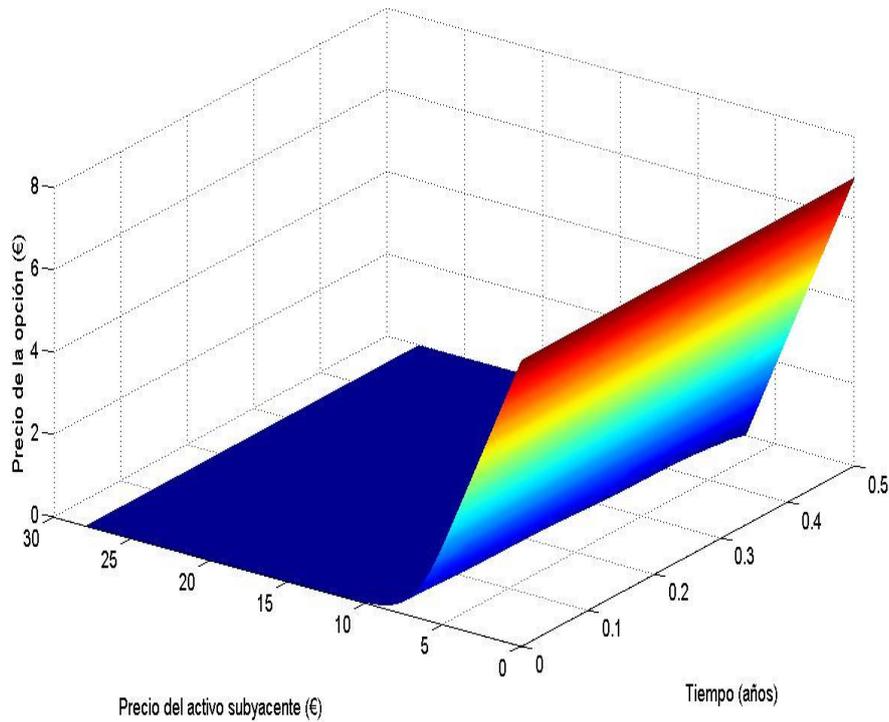


Gráfico 6.3.3. Representación valor de un *put* de Santander con volatilidad no constante.

7. CONCLUSIÓN.

Este trabajo comienza con una exposición general del mercado de derivados financieros para más tarde centrar el análisis en el marco concreto de las opciones de tipo europeo. Dentro del mundo de los derivados, las opciones poseen una serie de características específicas que hacen que su forma de funcionar sea distinta de otros productos. La principal diferencia radica en que se trata de derechos y no de obligaciones, lo cual condiciona su modelización matemática además del estudio de su valoración. Esta característica de las opciones hace que sean instrumentos financieros muy atractivos para inversores y empresas como protección ante el riesgo de variación de los precios de los activos, así como un potente foco de especulación bursátil.

Los mercados en los que operan las opciones fueron desarrollados de forma avanzada a partir de la segunda mitad del siglo XX y es desde entonces cuando se empieza a incrementar su utilización a lo largo del mercado internacional.

El hecho de trabajar con opciones de tipo europeo facilita en cierta medida la modelización matemática pero podría resultar más atractivo modelizar opciones americanas debido a que pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta la fecha de expiración.

En la segunda parte del trabajo se desarrolla la valoración de opciones comenzando por la presentación del modelo de Black-Scholes (Black et al., 1973), seguido por su aproximación numérica, para más tarde terminar con la aplicación del mismo a un caso real a partir de su implementación en el software Matlab. La programación de modelos de este tipo a través de ordenador es uno de los grandes avances de la informatización de los mercados financieros ya que permite trabajar con gran cantidad de datos a tiempo real además de facilitar la toma de decisiones mediante las herramientas gráficas que incorporan.

El objetivo del modelo de Black-Scholes es el de valorar una opción, es decir, determinar su “precio justo”, en el período de tiempo antes de la fecha de expiración de la misma. Por ello, primero se modeliza el precio del activo subyacente seguido de la variación del precio de la opción y, finalmente, se reduce la ecuación inicial a una ecuación diferencial clásica (sin parte estocástica). La solución analítica de esta ecuación se ha obtenido para el caso en el que los tipos de interés y la volatilidad del activo sean constantes. En otro caso se debe acudir a técnicas numéricas para solucionarla. En este trabajo, se ha realizado a través del método de diferencias finitas.

Una vez obtenidas la solución analítica y numérica de la ecuación de Black-Scholes, el trabajo se centra en la implementación de las mismas en el software Matlab y para ello utiliza datos de opciones reales. Además, se ha validado el método numérico a través de la comprobación del error cometido entre la solución numérica y analítica en un escenario de volatilidad y tipos de interés constantes. La razón de esta comprobación es la inferencia sobre la calidad de la aproximación del método ya que en un caso en el que sólo exista la solución numérica no tendremos oportunidad de compararla con la solución analítica. Dicho error es relativamente pequeño, por lo que nuestro método se puede considerar adecuado como aproximación.

Es necesario tener en cuenta la dificultad que existe a la hora de modelizar el comportamiento de cualquier producto financiero, y en concreto de una opción, ya que se deben hacer una serie de supuestos (a veces muy restrictivos). Todos estos supuestos son una simplificación de la realidad y pueden no cumplirse en el mercado, provocando de este modo que el valor

proporcionado por el modelo no sea precisamente justo. Además, la observación y determinación de trayectorias como la volatilidad del precio del activo pueden resultar prácticamente imposibles de calcular de forma precisa lo cual incrementa la dificultad del análisis.

Todo el desarrollo del trabajo se ha centrado en opciones de tipo europeo, pudiéndose ampliar el mismo a otros tipos como las americanas, las que pagan dividendos, opciones sobre índices u opciones asiáticas. Las futuras líneas de investigación y análisis de estas otras clases son tan amplias como la variedad de opciones, además de que a medida que aumenta el avance y desarrollo de los mercados financieros el abanico de nuevos tipos de opciones incrementa.

8. BIBLIOGRAFÍA.

Alliera, C.H.D. (2007). *Estudio y aplicaciones de Black-Scholes*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires.

Black, F., Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.

Blackledge, J. , Evans, G., Yardley (2000). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Springer.

Bodie, Z., Kane, A., and Marcus A.J. (2008). *Investments*. McGraw-Hill.

Hull, John C. (2011). *Introducción a los mercados de opciones y futuros*, (6ª ed.). Pearson.

Hull, John C. (2012). *Options, futures, and other derivatives* (8ª ed.). London: Pearson.

Mayers, D.F ,Morton, K.W., (1994). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press.

Merton, Robert C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4(1): 141-183.

Mordecki, E. (1998) *Modelos Matemáticos en Finanzas: Valuación de Opciones*. Unidad de Perfeccionamiento y Actualización de Egresados (UPAE), Facultad de Ciencias Económicas y Administración. Universidad de la República, Uruguay.

Kangro,R., Nicolaidis,R. (2000) .Far field boundary conditions for Black-Scholes equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38: 1357-1368.

Vázquez, C. (2010). *An introduction to Black-Scholes. Modeling and Numerical Methods in Derivatives Pricing*, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral.

Referencias web:

<http://www.mathworks.es>

<http://www.meff.es>

9. ANEXO. Conceptos básicos de análisis estocástico. (Mordecki, E.1998)

Proceso Estocástico

Un proceso estocástico describe la evolución temporal de una variable aleatoria a través de una asignación del tipo: $t \rightarrow X_t \equiv \{X_t\}_t$

Proceso de Markov

Un proceso de Markov es un tipo concreto de proceso estocástico caracterizado porque el valor actual del mismo es el único relevante para predecir el futuro. Es decir, el valor actual del proceso sólo depende del valor del período inmediatamente anterior.

Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

Un proceso de Wiener se define como un proceso estocástico de Markov que cumple la siguiente relación: $X_t = X_{t-1} + \xi_t \sqrt{\Delta t}$, donde Δt es el incremento de los períodos de tiempo; ξ_t sigue una normal $N(0,1)$ y es independiente un período de otro [$\xi_t \neq \xi_s, s \neq t$]

Además, ΔX sigue una $N(0, \Delta t)$, con lo que, por analogía, para incrementos infinitesimales de X , la diferencial seguiría también una normal del tipo: $dX_t \equiv N(0, dt)$.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener en (Ω, F, P) es un proceso aleatorio, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ tal que: $W_0 = 0$, parte del origen; sigue trayectorias continuas, sus incrementos son independientes y la diferencia $W_t - W_s$ sigue una normal $N(0, t-s)$.

Lema de Íto (Íto, 1951).

“Tengamos S_t que sigue un proceso del tipo: $dS_t = A dt + B dX_t$, donde X_t es un proceso de Wiener, y $F(S_t, t)$ es una función que depende de S_t y de t , se verifica lo siguiente:

$$dF_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + A \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(B \frac{\partial F}{\partial S_t} \right) dX_t$$

siendo todas las derivadas parciales con respecto a variables deterministas”.

En términos generales, se puede considerar la regla de cadena del cálculo estocástico. En finanzas, se utiliza frecuentemente para derivar el proceso estocástico seguido por el precio de una opción o de cualquier otro derivado.

Aplicación de la fórmula de Íto al modelo del precio de subyacente establecido por Black-Scholes

Concretamente, en la función que se utiliza en el modelo de Black-Scholes:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t,$$

el término A es $A = \mu S_t$ y el término B es $B = \sigma S_t$, con lo que sustituyendo en la ecuación obtenida por el lema de Íto y teniendo en cuenta que $F = V(t, S)$, se obtiene:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX$$