



VNIVERSIDAD
D SALAMANCA

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Mecánica

Cálculo de estructuras y/o elemento estructural por
procedimiento analítico con alguna herramienta informática

Estudio elastoplástico de vigas sometidas a flexión

Autor: Adrián Polo Puente

Tutor: José Alejandro Reveriego Martín

Septiembre 2017

ÍNDICE

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1 RESUMEN	1
1.2 ABSTRACT	1
1.3 INTRODUCCIÓN.....	2
CAPÍTULO II: INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO.....	5
2.1 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL RANGO ELÁSTICO.....	6
2.2 DEFORMACIONES PLÁSTICAS.....	9
2.3 ELEMENTOS HECHOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO.....	12
2.4 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN ELEMENTOS CON UN SOLO PLANO DE SIMETRÍA.....	16
2.5 ESFUERZOS RESIDUALES.....	18
CAPÍTULO III: INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	20
3.1 INTRODUCCIÓN.....	21
3.2 BREVE RESEÑA HISTÓRICA DEL MÉTODO.....	22
3.3 CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO.....	23
3.4 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MÉTODO.....	24
3.5 ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS.....	25
3.6 ANTES DE REALIZAR UN CÁLCULO POR EL MEF.....	26
3.7 EL MEF EN LA PRÁCTICA.....	26
3.7.1 PREPROCESO Y GENERACIÓN DE LA MALLA.....	27
3.7.2 CÁLCULO Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.....	28
3.7.3 POSTPROCESO.....	28
3.8 TIPOS DE ANÁLISIS EN INGENIERÍA.....	29
3.9 VENTAJAS DEL MEF.....	29
3.10 LIMITACIONES DEL MEF.....	30
CAPÍTULO IV: EL SOFTWARE ABAQUS	31
4.1 INTRODUCCIÓN.....	32
4.2 EL ENTORNO ABAQUS.....	32
4.3 MÓDULOS DE ABAQUS.....	34
4.4 DISEÑO DE LAS VIGAS EN ABAQUS.....	36
4.4.1 VIGA ISOSTÁTICA RECTANGULAR.....	36
4.4.2 VIGA ISOSTÁTICA CON PERFIL I.....	52
4.4.3 VIGA EN MÉNSULA CON PERFIL I.....	54
4.4.4 VIGA HIPERESTÁTICA RECTANGULAR.....	57
4.4.5 VIGA BIEMPOTRADA CON PERFIL I.....	57
CAPÍTULO V: RESULTADOS.....	59
5.1 VIGA ISOSTÁTICA RECTANGULAR.....	60

5.1.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.....	60
5.1.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.....	63
5.1.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	65
5.2 VIGA ISOSTÁTICA CON PERFIL EN I.....	67
5.2.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.....	67
5.2.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.....	72
5.2.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	73
5.3 VIGA EN MÉNSULA CON PERFIL EN I.....	75
5.3.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.....	75
5.3.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.....	79
5.3.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	81
5.4 VIGA HIPERESTÁTICA RECTANGULAR.....	83
5.4.1 MÉTODO DE CROSS.....	83
5.4.2 CÁLCULOS TEÓRICOS.....	84
5.4.3 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.....	89
5.4.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	90
5.5 VIGA BIEMPOTRADA CON PERFIL EN I.....	92
5.5.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.....	92
5.5.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.....	96
5.5.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	98
CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES.....	100
6.1 CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO REALIZADO.....	101
CAPÍTULO VII: BIBLIOGRAFÍA.....	103
BIBLIOGRAFÍA.....	104
ANEXOS.....	105
ANEXO I: RELACIÓN DE DATOS EN RANGO ELÁSTICO Y ELÁSTOPLÁSTICO.....	106
ANEXO II: ÍNDICE DE GRÁFICAS.....	140

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN.

1.1 RESUMEN.

El objetivo principal de este TFG es realizar un estudio sobre las tensiones residuales que permanecen en diferentes tipos de vigas de acero tras aplicar sobre éstas unas determinadas solicitaciones que provoquen que se exceda el límite de fluencia del material. El estudio se llevará a cabo mediante dos métodos para después comparar los resultados:

- Cálculo analítico de las vigas a partir de la teoría de la elasto-plasticidad.
- Simulación de las vigas mediante el MEF (Método de los Elementos Finitos, FEM por sus siglas en inglés) con el software Abaqus.

Para la consecución de los resultados, se hará una introducción tanto al cálculo plástico teórico como a los MEF. Posteriormente, se describirá el programa Abaqus y se procederá al cálculo de las vigas con el mismo, con el objetivo de contrastar los datos obtenidos del cálculo teórico con los que ofrece el software mediante gráficas comparativas.

1.2 ABSTRACT.

The main objective of this TFG is to carry out a study about the residual stresses that remain in different kinds of steel beams after apply on them certain loads that exceed the yield stress of the material. The study will be realized using two methods to be able to compare results:

- Analytical calculation of the beams from the theory of elasto-plasticity.
- Simulation of the beams by FEM (Finite Elements Method) with Abaqus.

To get the results, plastic theoretical calculation and FEM will be explained. After that, the software Abaqus will be described and used for the beams calculation in order to compare the data between theoretical calculation and Abaqus simulation using comparative graphs.

1.3 INTRODUCCIÓN.

Generalmente, el estudio del comportamiento de los materiales se realiza a partir de la Teoría Elástica, es decir, se parte de una relación lineal entre el esfuerzo aplicado en una pieza y la deformación que ésta sufre. En otras palabras, se trabaja bajo la hipótesis de que el límite de proporcionalidad del material en cuestión, nunca será sobrepasado. Esta suposición es factible en el caso de materiales frágiles, los cuales fracturan sin ceder. Pero para el caso de materiales dúctiles, dicha suposición implica que la resistencia a la cedencia del material no se excede. Por tanto, las deformaciones que tengan lugar en la pieza permanecerán dentro del rango elástico y, una vez retirada la carga, la pieza recuperará su forma original. Sin embargo, si los esfuerzos en cualquier parte del elemento estudiado superan la resistencia a cedencia del material, ocurren deformaciones plásticas y la mayoría de los resultados obtenidos a partir del cálculo elástico dejarán de ser válidos. Es por esto que debe realizarse un análisis más profundo que esté basado en relaciones no lineales entre esfuerzo y deformación.

De aquí surge la Teoría de la Plasticidad. Esta disciplina de la Física estudia y analiza el estado de un cuerpo que se ha deformado de manera irreversible y constituye la continuación de la de la bien establecida Teoría de la Elasticidad. La Teoría de la Plasticidad parte de los resultados experimentales sobre el comportamiento macroscópico de materiales sometidos a deformación, mayoritariamente metales, y sus principales objetivos son:

- Proveer de una descripción de la relación tensión-deformación de un material que se encuentra en estado elastoplástico, que explique de la forma más detallada posible los resultados experimentales.
- Desarrollar técnicas para poder conseguir la distribución de tensiones en cuerpos deformados de manera permanente.

En resumen, la respuesta plástica de un tipo de material ante una carga se caracteriza por una deformación, en parte irreversible, independiente del tiempo, que comienza a darse únicamente cuando se ha conseguido un determinado nivel de tensión, el cual puede variar con el estado de deformación inicial del material (endurecimiento por deformación). Por todo ello y de forma general, se necesitan cuatro requisitos que den forma a una teoría que modele la deformación elastoplástica:

- Unas relaciones explícitas entre tensiones, deformaciones, cargas y movimientos que describan el comportamiento del material en condiciones elásticas (antes de la iniciación de la deformación plástica).
- Un criterio de plastificación que defina los límites del comportamiento elástico, de forma que quede claro el nivel de tensión a partir del cual comienza la plastificación.
- Una relación tensión-deformación tras comenzar la plastificación, es decir, cuando las deformaciones tienen tanto componente elástica como plástica.
- Un criterio de endurecimiento por deformación que defina la variación de la tensión correspondiente al límite elástico.

A continuación, se citarán, de forma breve, las hipótesis que se tienen en cuenta en el momento de plantear las teorías de plasticidad más comunes, siempre que no se especifique lo contrario:

- a) Isotropía: las propiedades del material no varían en función de la dirección.
- b) Incompresibilidad debida a las deformaciones plásticas: se considera que no hay cambio de volumen en la pieza estudiada como consecuencia de las deformaciones plásticas que haya podido sufrir ésta.
- c) Las deformaciones elásticas son pequeñas comparadas con las deformaciones plásticas.

Para ganar una visión considerable acerca del comportamiento plástico se considerará un material elastoplástico idealizado en el que el diagrama esfuerzo-deformación constará de dos segmentos (Figura 1.1):

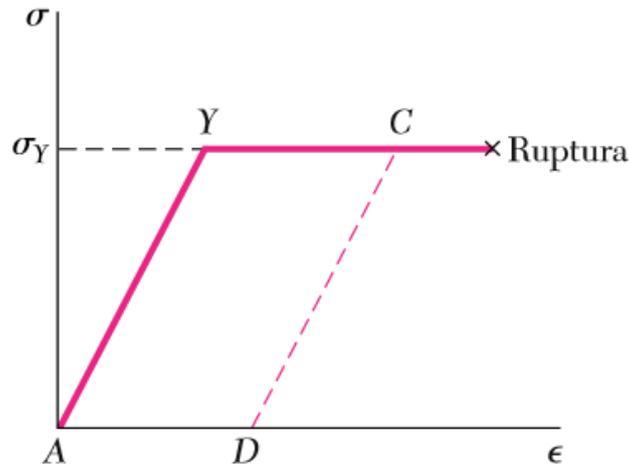


Figura 1.1: Diagrama esfuerzo-deformación para un material elastoplástico idealizado. [2]

Mientras que el esfuerzo σ desarrollado en la pieza sea menor que la resistencia a cedencia del material σ_Y , dicho material se comportará de forma elástica y obedecerá la Ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Una vez que σ alcance el valor de σ_Y , el material empezará a fluir y continuará deformándose plásticamente bajo una carga constante. Al retirar la carga, la descarga ocurrirá a lo largo del segmento CD paralelo a la porción inicial AY sobre la curva de carga. El segmento AD del eje horizontal indicará la deformación unitaria correspondiente a la deformación plástica (permanente) debida a la carga y la descarga de la pieza. Realmente, ningún material se comportará exactamente como se muestra en la figura 1, pero este diagrama resultará muy útil para analizar las deformaciones permanentes de materiales dúctiles como el acero, paso fundamental para alcanzar el objetivo principal de este trabajo.

A título de comentario, es necesario destacar que en realidad es falso referirse a la "Teoría de la Plasticidad", ya que existen varias de estas teorías y una multiplicidad enorme en la forma de aplicarlas a los diferentes tipos de problemas. En cuanto a la resolución de problemas en régimen plástico, hoy en día se han desarrollado gran cantidad de técnicas numéricas orientadas a la resolución de estos problemas por ordenador.

Otro concepto fundamental de este estudio es el de esfuerzos residuales. Tras haber aplicado en la pieza una sollicitación de carga que supere el límite elástico del material y una vez retirada dicha carga, en la pieza quedarán los denominados esfuerzos residuales. El cálculo de estos esfuerzos compone el grueso de este estudio y se determinarán por dos métodos. El primero de ellos consiste en aplicar las ecuaciones teóricas que se expondrán en apartados sucesivos y el segundo método se basa en el

Método de Elementos Finitos (MEF), utilizado a partir del software Abaqus mediante simulaciones de los diferentes casos que serán objeto de estudio.

Una vez calculados los esfuerzos residuales por ambos métodos, los resultados serán comparados y validados teniendo en cuenta el error cometido.

CAPÍTULO II: INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO.

2.1 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL RANGO ELÁSTICO.

Para iniciar el estudio, se partirá del caso en el que el momento flexionante M es tal que los esfuerzos normales en el elemento permanecen por debajo del esfuerzo de fluencia σ_y . Esto implica que, para propósitos prácticos, los esfuerzos que aparezcan en el elemento estudiado quedarán por debajo del límite elástico. Es por ello que no habrá deformaciones permanentes y se estará en condiciones de aplicar la ley de Hooke. Suponiendo que el material es homogéneo y denominando E al módulo de elasticidad (Módulo de Young), se tiene que en la dirección longitudinal x

$$\sigma_x = E\epsilon_x \quad (2.1)$$

donde ϵ_x representa la deformación unitaria longitudinal. Esta deformación ϵ_x puede expresarse como

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (2.2)$$

donde y es la distancia desde la fibra neutra y ρ es el radio de curvatura del elemento (Figura 2.1). Dicha deformación alcanza su máximo valor absoluto cuando la distancia y desde la superficie neutra es máxima. Denotando ϵ_m como el máximo valor absoluto de la deformación unitaria, se tiene

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad (2.3)$$

siendo c la distancia y máxima y ρ el radio de curvatura del elemento objeto de estudio suponiendo que está sometido a flexión pura.

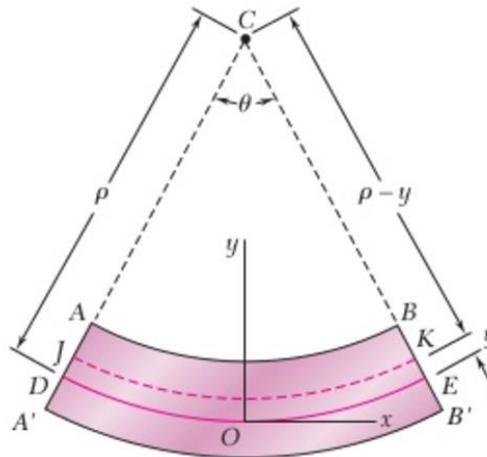


Figura 2.1: Parámetros. [2]

Resolviendo (2.3) para ρ y sustituyendo en (2.2):

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c}\epsilon_m \quad (2.4)$$

Se llega a la conclusión de que, en el análisis de las deformaciones de un elemento sometido a flexión pura, aún no es posible calcular los esfuerzos o las deformaciones en un punto dado del elemento puesto que todavía no se ha localizado la superficie neutra. Para ello se tendría que especificar la relación esfuerzo-deformación del material utilizado, excepto en los casos en los que en la pieza exista un plano de simetría vertical y otro longitudinal (el caso de una viga con sección rectangular). Para ese caso, si la curva esfuerzo-deformación es la misma para tracción que para compresión, es evidente que la superficie neutra coincidirá con el plano de simetría.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.4) por E se obtiene:

$$E\epsilon_x = -\frac{y}{c}(E\epsilon_m) \quad (2.5)$$

y relacionándolo con (2.1):

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \quad (2.6)$$

donde σ_m es el máximo valor absoluto del esfuerzo. Este resultado muestra que, dentro del rango elástico, el esfuerzo normal varía linealmente con la distancia a la superficie neutra (Figura 2.2).

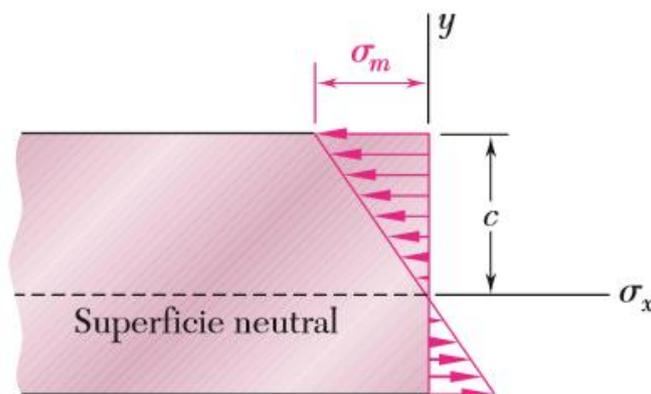


Figura 2.2: Esfuerzos de flexión. [2]

Para continuar con el estudio, hay que recordar las ecuaciones de la estática. Se considera un elemento prismático AB con un plano de simetría y sometido a pares iguales y opuestos M y M' que actúan en dicho plano. Si se realiza un corte a través del elemento AB en un punto arbitrario C, las condiciones de equilibrio de la porción AC requieren que las fuerzas internas en la sección sean equivalentes al par M (Figura 2.3):

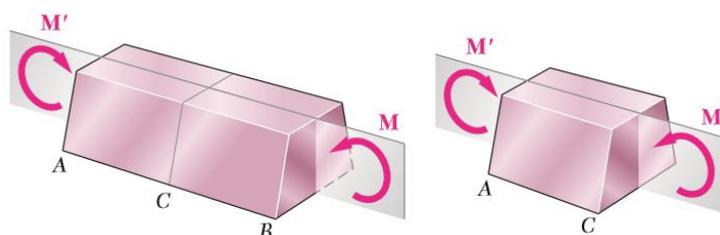


Figura 2.3: Elemento en flexión pura. [2]

De este modo, las fuerzas internas en cualquier sección transversal de un elemento simétrico en flexión pura son equivalentes a un par. El momento M de dicho par se conoce como momento flexionante en la sección. Continuando con la convención habitual, M tendrá signo positivo cuando la pieza se flexiona de forma que la concavidad apunte hacia arriba (Figura 2.3) y signo negativo en caso contrario.

Denotando con σ_x el esfuerzo normal en un punto dado de la sección transversal y con T_{xy} y T_{xz} las componentes del esfuerzo cortante, se puede expresar que el sistema de fuerzas internas elementales ejercido sobre la sección es equivalente al par M (Figura 2.4):

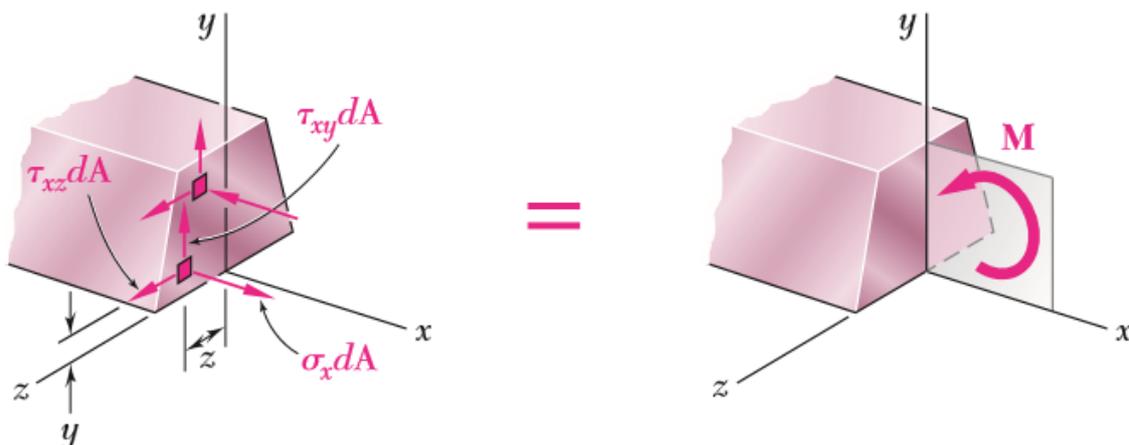


Figura 2.4: Esfuerzo normal, cortantes y momento. [2]

Partiendo de la estática, un par M en realidad consiste en dos fuerzas iguales y opuestas y la suma de las componentes de estas fuerzas en cualquier dirección es, por tanto, igual a cero. Además, el momento del par es el mismo alrededor de cualquier eje perpendicular a su plano, y es cero alrededor de cualquier eje contenido en dicho plano. Si, por ejemplo, se toma el eje Z (como en la Figura 2.4), se puede expresar la equivalencia de las fuerzas internas elementales y del par M escribiendo que las sumas de las componentes y de los momentos de las fuerzas elementales son iguales a las componentes y momentos correspondientes al par M :

$$\text{Componentes en } x: \int \sigma_x dA = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{Momentos alrededor del eje } y: \int z \sigma_x dA = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Momentos alrededor del eje } z: \int (-y \sigma_x dA) = M \quad (2.9)$$

Podrían obtenerse otras tres ecuaciones igualando a cero las sumas de las componentes en y , las componentes en z y los momentos alrededor del eje x , pero estas ecuaciones involucran únicamente las componentes del esfuerzo cortante, las cuales son iguales a cero.

Conviene aclarar dos aspectos de las anteriores ecuaciones. En primer lugar, el signo negativo en (2.9) es debido a que un esfuerzo de tensión ($\sigma_x > 0$) lleva a un momento negativo (en el sentido horario) de la fuerza normal $\sigma_x dA$ alrededor del eje z . Y, en segundo lugar, mencionar que la ecuación (2.8) podría haberse previsto, ya que la aplicación de pares en el plano de simetría del elemento AB dará como resultado un distribución de esfuerzos normales que es simétrica alrededor del eje y .

Es necesario recordar que, hasta aquí, todavía se desconoce la localización de la superficie neutra y el valor máximo σ_m del esfuerzo. Ambos pueden hallarse teniendo en cuenta las relaciones (2.7) y (2.8). Sustituyendo el valor de σ_x obtenido en (2.6) en la ecuación (2.7):

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0$$

de donde se deduce que

$$\int y dA = 0 \quad (2.10)$$

Esta relación demuestra que el primer momento de la sección transversal con respecto al eje neutro debe ser cero. Dicho de otro modo, si un elemento se somete a flexión pura y los esfuerzos permanecen en el rango elástico, el eje neutro pasa por el centroide de la sección.

Acudiendo ahora a la ecuación (2.9) y especificando que el eje z debe coincidir con el eje neutro de la sección, sustituyendo σ_x obtenido en (2.6) se tiene que

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M$$

o

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M \quad (2.11)$$

Como ya se ha dicho, en el caso de flexión pura el eje neutro pasa por el centroide de la sección y se observa que I es el momento de inercia, o segundo momento, de la sección transversal con respecto al eje centroidal perpendicular al plano del par M . Resolviendo (2.11) para σ_m :

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (2.12)$$

Si ahora se sustituye σ_m de (2.12) en la ecuación (2.6), se obtendrá el esfuerzo normal σ_x a cualquier distancia y del eje neutro:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) se denominan *ecuaciones de flexión elástica*, y el esfuerzo normal σ_x causado por la "flexión" del elemento se designa frecuentemente como *esfuerzo de flexión*. Se verifica que el esfuerzo es de compresión ($\sigma_x < 0$) por encima del eje neutro ($y > 0$) cuando el momento M es positivo, y de tracción ($\sigma_x > 0$) cuando M es negativo.

2.2 DEFORMACIONES PLÁSTICAS.

Al expresar la relación expuesta en (2.13) se parte de que la ley de Hooke es aplicable a todo el elemento. Si se excede el límite de cedencia en alguna parte de la pieza, o si se trata de un material frágil y su diagrama esfuerzo-deformación no es lineal, dicha relación se invalida. Por ello, el objetivo de esta sección es el desarrollo de un método más genérico con el que se pueda determinar la distribución de esfuerzos en un elemento sometido a flexión pura cuando la ley de Hooke no es aplicable.

Cabe recordar también, que cuando se demostró la ecuación (2.4), en la que la deformación normal unitaria ϵ_x varía linealmente con la distancia y desde la superficie neutra, no se supuso ninguna relación específica esfuerzo-deformación, por lo que aún puede usarse esa propiedad.

Sin embargo, la suposición de que, en una sección dada, el eje neutro pasa por el centroide de dicha sección ya no es válida debido a que esta propiedad se obtuvo bajo la hipótesis de deformación elástica. Generalmente, el eje neutro debe localizarse mediante aproximaciones sucesivas hasta hallar una distribución de esfuerzos que satisfaga las ecuaciones (2.7) y (2.9). En el caso concreto de una pieza que posee un

plano horizontal y un plano vertical de simetría y que se comporte de igual forma a tracción que a compresión (misma relación esfuerzo-deformación), el eje neutro coincidirá con el eje horizontal de simetría de la sección.

El análisis se limitará primero al caso anteriormente descrito. La distancia y en la ecuación (2.4) se mide desde el eje horizontal de simetría z en la sección transversal, y la distribución ϵ_x es lineal y simétrica con respecto a dicho eje. Por otra parte, la curva tensión-deformación también es simétrica con respecto al origen de coordenadas (Figura 2.5):

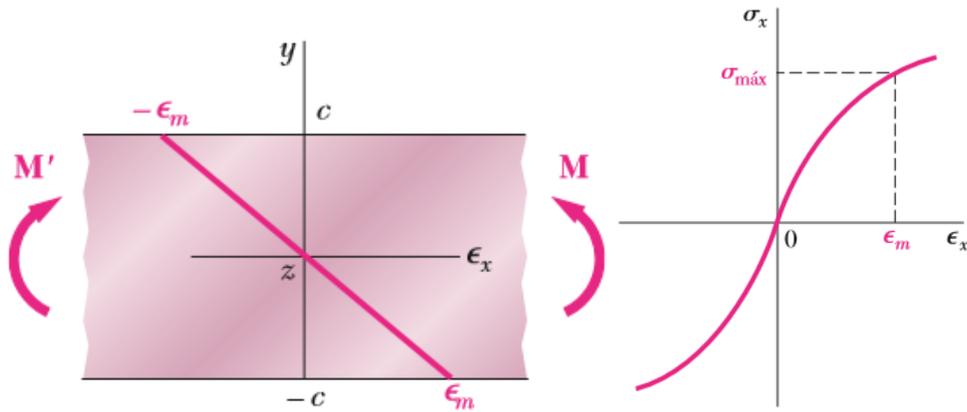


Figura 2.5: Distribución lineal de deformación unitaria en la viga y diagrama no lineal esfuerzo-def. [2]

Para obtener la distribución de esfuerzos en la sección transversal de la pieza, es decir, σ_x frente a y , suponemos que el valor de σ_{max} se ha especificado y se determina el valor correspondiente de ϵ_m del diagrama para llevarlo a la ecuación (2.4). Después, para cada valor de y , se halla el correspondiente valor de ϵ_x en la ecuación (2.4) y se obtiene el diagrama esfuerzo-deformación de la figura anterior, el esfuerzo σ_x correspondiente al valor de ϵ_x . Graficando σ_x contra y , se genera la distribución de esfuerzos deseados (Figura 2.6):

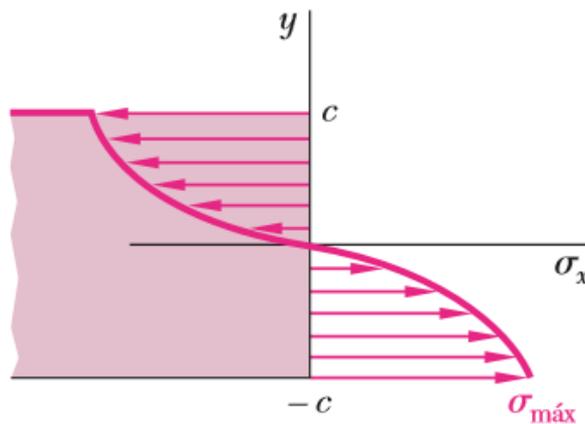


Figura 2.6: Distribución de esfuerzos. [2]

Dado que no se supuso una relación particular entre esfuerzos y deformación para la ecuación (2.9), puede usarse ésta para calcular el momento flector M que corresponde a la distribución de esfuerzos obtenida en la figura 2.6. Si se considera el caso particular de una pieza de sección rectangular de ancho b , el elemento de área de la ecuación (2.9) puede expresarse como $dA=bdy$ y se tiene:

$$M = -b \int_{-c}^c y \sigma_x dy \quad (2.14)$$

donde σ_x es la función de y graficada en la figura 2.6. Puesto que σ_x es una función impar de y , la ecuación 2.14 puede expresarse como

$$M = -2b \int_0^c y \sigma_x dy \quad (2.15)$$

Si σ_x es una función analítica conocida de ϵ_x , se puede usar la ecuación (2.4) para expresar σ_x como función de y , y la integral de (2.15) se puede hallar de forma analítica. Por otro lado, el momento flector M puede ser calculado mediante integración numérica. Este cálculo se torna más significativo si se aprecia que la integral de la ecuación (2.15) representa el primer momento con respecto al eje horizontal del área de la figura 2.6 que se ubica por encima del eje horizontal y se limita por la curva de distribución del esfuerzo y el eje vertical.

Un valor destacable del momento flector es el momento último M_U que causaría la falla del elemento. Su valor se calcula a partir del esfuerzo último del material σ_U tomando $\sigma_{max} = \sigma_U$ y completando los cálculos ya indicados. A pesar de ello, conviene determinar M_U de manera experimental ensayando una muestra del material. Si se supone una distribución lineal de esfuerzos ficticia, la ecuación (2.12) se puede utilizar para hallar el esfuerzo máximo correspondiente R_B :

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \quad (2.16)$$

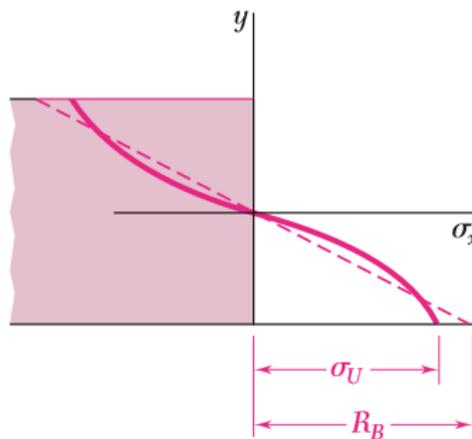


Figura 2.7: Distribución del esfuerzo en una viga en el momento último M_U . [2]

El esfuerzo ficticio R_B es el módulo de ruptura en flexión del material dado. Se puede usar para el cálculo del momento de flexión último M_U de un elemento del mismo material, cuya sección transversal tenga la misma forma, pero dimensiones diferentes, resolviendo la ecuación (2.16) para M_U . En el caso de una pieza con sección rectangular, las distribuciones de esfuerzos, real y ficticia, mostradas en la figura 2.7, deben generar el mismo valor M_U para el momento último y las áreas que ellas definen deberán tener igual el primer momento con respecto al eje horizontal. Resulta evidente que el módulo de ruptura R_B será siempre mayor que la resistencia real σ_U .

2.3 ELEMENTOS HECHOS DE MATERIAL ELASTOPLÁSTICO.

Para ofrecer una mejor visión acerca del comportamiento plástico de los materiales sometidos a flexión, se analizará el caso de un elemento compuesto de material elastoplástico y con una sección de ancho b y altura $2c$ (Figura 2.8):

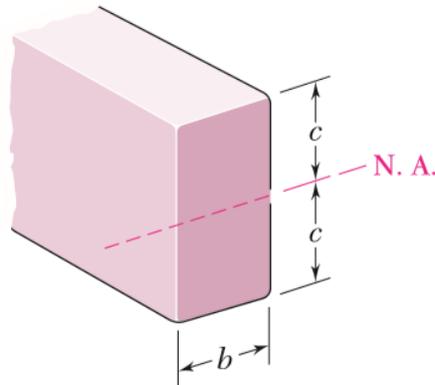


Figura 2.8: Características de la sección. [2]

Conviene recordar la forma del diagrama tensión-deformación para un material elastoplástico (Figura 2.9):

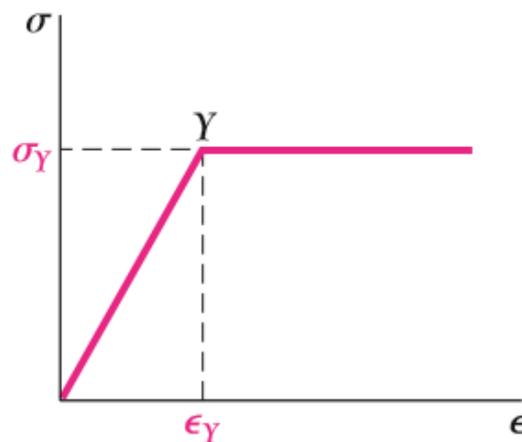


Figura 2.9: Diagrama tensión-deformación para un material elastoplástico. [2]

Mientras σ_x no exceda el límite de fluencia σ_y , es aplicable la ley de Hooke y la distribución de esfuerzos es lineal (Figura 2.10). El máximo esfuerzo será:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{2.17}$$

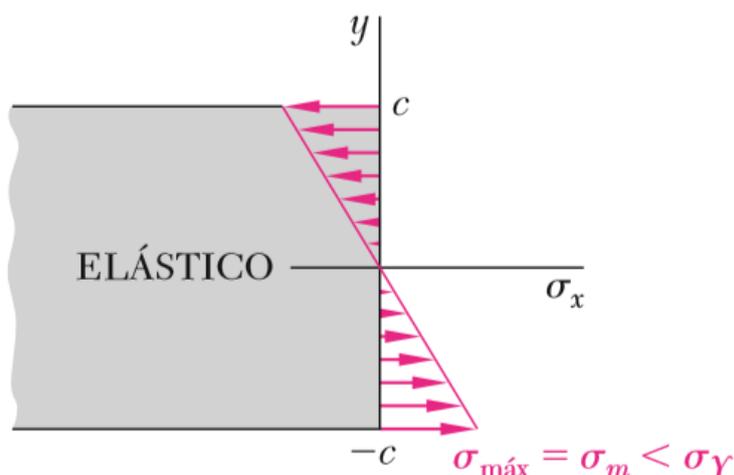


Figura 2.10: Distribución de esfuerzos lineal ($M < M_y$). [2]

Cuando el momento flector aumenta, σ_m puede llegar a alcanzar eventualmente el valor de σ_y (Figura 2.11). Sustituyendo este valor en la ecuación (2.17) y resolviendo para M , se obtiene el valor M_y del momento flexionante en el inicio de la cedencia:

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y \quad (2.18)$$

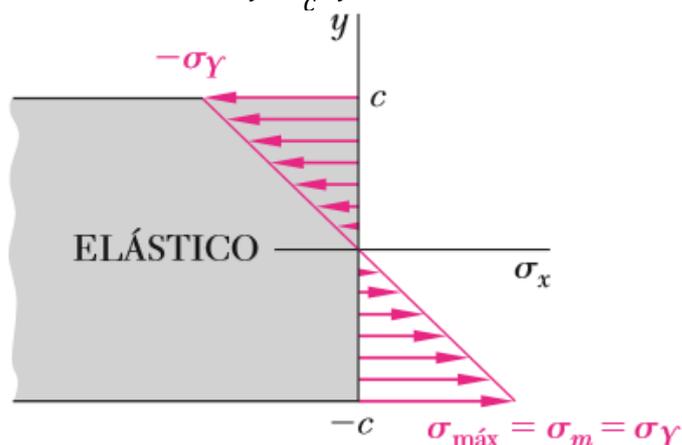


Figura 2.11: Distribución de esfuerzos lineal ($M = M_y$). [2]

El momento flector M_y representa el momento elástico máximo ya que es el mayor momento para el cual la deformación permanece constantemente elástica. Teniendo en cuenta las dimensiones de la sección estudiada, se puede expresar

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{2}{3}bc^2 \quad (2.19)$$

y sustituyendo en (2.18) se obtiene

$$M_y = \frac{2}{3}bc^2\sigma_y \quad (2.20)$$

A partir de este punto, si el momento flector sigue aumentando, se desarrollarán zonas plásticas en la pieza cuyo esfuerzo será uniformemente igual a $-\sigma_y$ en la zona superior y a $+\sigma_y$ en la zona inferior (Figura 2.12). Entre las zonas plásticas superior e inferior seguirá existiendo un núcleo elástico en el que σ_x seguirá variando de forma lineal con y ,

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_y}{y_Y} y \quad (2.21)$$

donde y_Y representa la mitad del espesor del núcleo elástico.

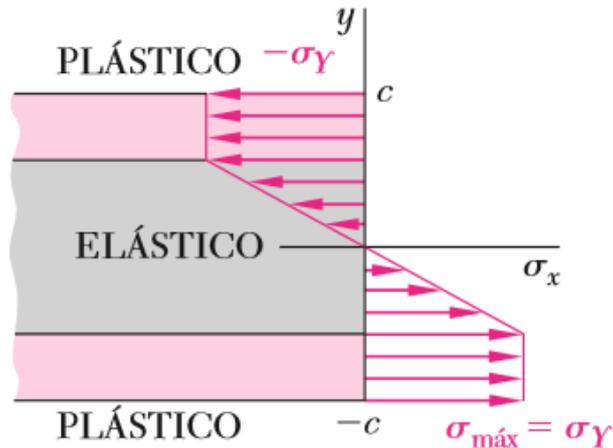


Figura 2.12: Distribución de esfuerzos ($M > M_y$). [2]

Si de nuevo continúa aumentando el momento flector M aplicado, las zonas plásticas irán aumentando hasta alcanzar una deformación completamente plástica (Figura 2.13):

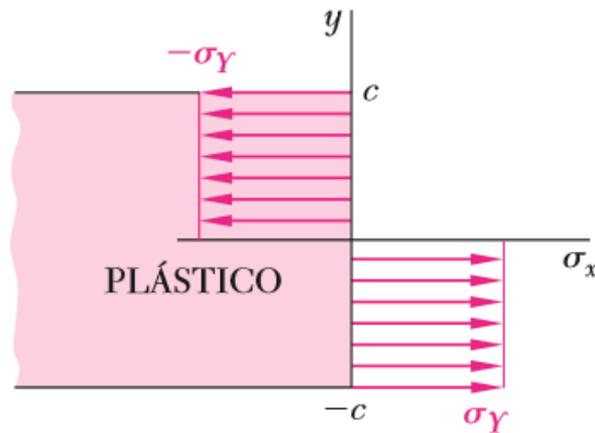


Figura 2.13: Distribución de esfuerzos ($M = M_p$). [2]

Se acudirá a la ecuación (2.15) para calcular el momento flexionante M que corresponde a un espesor $2y_Y$ del núcleo elástico. Hay que recordar que σ_x está dado por la ecuación (2.21) para $0 \leq y \leq y_Y$, y es igual a $-\sigma_y$ para $y_Y \leq y \leq c$, por lo que se tiene:

$$M = -2b \int_0^{y_Y} y \left(-\frac{\sigma_y}{y_Y} y \right) dy - 2b \int_{y_Y}^c y (-\sigma_y) dy = \frac{2}{3} b y_Y^2 \sigma_y + b c^2 \sigma_y - b y_Y^2 \sigma_y$$

$$M = b c^2 \sigma_y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right) \quad (2.22)$$

Relacionando este resultado con la ecuación (2.20), se puede escribir

$$M = \frac{3}{2} M_y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right) \quad (2.23)$$

donde M_y es el momento elástico máximo. Por otra parte, se observa que cuando y_Y tiende a cero, el momento flector se puede aproximar como

$$M_p = \frac{3}{2}M_y \quad (2.24)$$

Este valor de momento flector, correspondiente a una deformación completamente plástica (Figura 2.13), se denomina *momento plástico* de la pieza estudiada. Es necesario resaltar que la ecuación (2.24) es aplicable únicamente a piezas de sección rectangular compuestas de material elasto-plástico.

Debe quedar claro que la distribución de deformaciones en la sección permanece lineal tras la fluencia. Por ello, la ecuación (2.2) sigue siendo válida y se puede usar para calcular el espesor medio y_Y del núcleo elástico. Se tiene

$$y_Y = \epsilon_y \rho \quad (2.25)$$

donde ϵ_y es la deformación unitaria de fluencia y ρ el radio de curvatura que corresponde a un momento $M \geq M_y$. Si el momento flector aplicado sigue aumentando hasta alcanzar el valor de M_y , se tiene que $y_Y = c$ y la ecuación (2.25) puede expresarse como

$$c = \epsilon_y \rho_y \quad (2.26)$$

siendo ρ_y el radio de curvatura que corresponde al momento elástico máximo M_y . Al dividir miembro a miembro la ecuación (2.25) entre la (2.26) se obtiene la relación

$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_y} \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) es aplicable a cualquier elemento hecho de cualquier material dúctil con un punto de fluencia bien definido, ya que su deducción no depende de la geometría de la sección transversal ni de la forma del diagrama esfuerzo-deformación una vez superado el punto de fluencia.

Si ahora se sustituye el valor y_Y/c de la ecuación (2.27) en la ecuación (2.23), se puede expresar el momento flector M como función del radio de curvatura ρ de la superficie neutra:

$$M = \frac{3}{2}M_y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{\rho_y^2} \right) \quad (2.28)$$

Esta ecuación sólo es válida para valores de $M > M_y$ (después del inicio de la fluencia). En el caso de no haber alcanzado el límite de fluencia se deberá utilizar la relación:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2.29)$$

Analizando la ecuación (2.28), se observa que el momento flexionante alcanza el valor $M_p = \frac{3}{2}M_y$ únicamente cuando $\rho = 0$. Como, evidentemente, no puede tenerse un valor nulo del radio de curvatura en todos los puntos de la superficie neutra, se deduce que no puede desarrollarse una deformación totalmente plástica en flexión pura.

En la figura 2.14 se representan, en tres dimensiones, la distribución de esfuerzos de un elemento rectangular, correspondientes a un momento elástico máximo M_y (a) y al caso límite del momento plástico M_p .

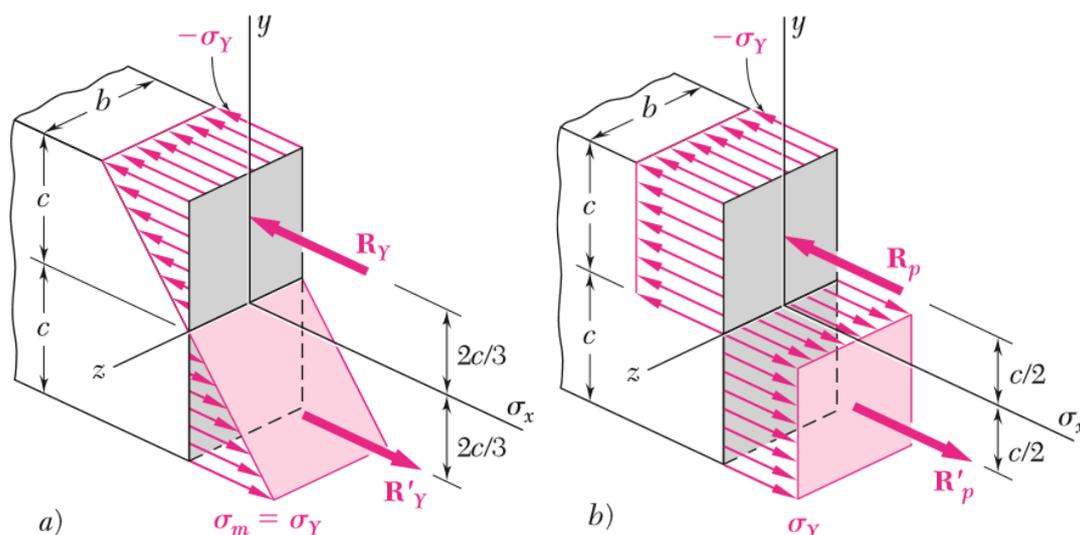


Figura 2.14: Distribución del esfuerzo para los máximos momentos elástico (a) y plástico (b). [2]

Dado que, en ambos casos, las resultantes de las fuerzas elementales de tensión y compresión deben pasar por los centroides de los volúmenes que representan la distribución de esfuerzos y ser iguales en magnitud a dichos volúmenes, se tiene que:

$$R_y = \frac{1}{2} bc \sigma_y$$

$$R_p = bc \sigma_y$$

y que los momentos de los pares correspondientes son, respectivamente,

$$M_y = \left(\frac{4}{3}c\right) R_y = \frac{2}{3} bc^2 \sigma_y \quad (2.30)$$

$$M_p = c R_p = bc^2 \sigma_y \quad (2.31)$$

De esta forma, queda demostrado que para un elemento rectangular, $M_p = (3/2)M_y$, tal y como requería la ecuación (2.24).

2.4 DEFORMACIONES PLÁSTICAS EN ELEMENTOS CON UN SOLO PLANO DE SIMETRÍA.

Hasta este punto, se ha supuesto en el análisis de las deformaciones plásticas que el elemento sometido a flexión tiene dos planos de simetría, uno que contiene los pares M y M' , y el otro que es perpendicular a ese plano. A partir de aquí, se estudiará un caso más genérico en el que la pieza de estudio sólo posea un único plano de simetría que contenga a M y a M' . Sin embargo, el análisis estará limitado al caso en el que la deformación es totalmente plástica, de forma que los esfuerzos normales sean uniformemente iguales a $-\sigma_y$ sobre la superficie neutra y a $+\sigma_y$ por debajo de la misma (Figura 2.15).

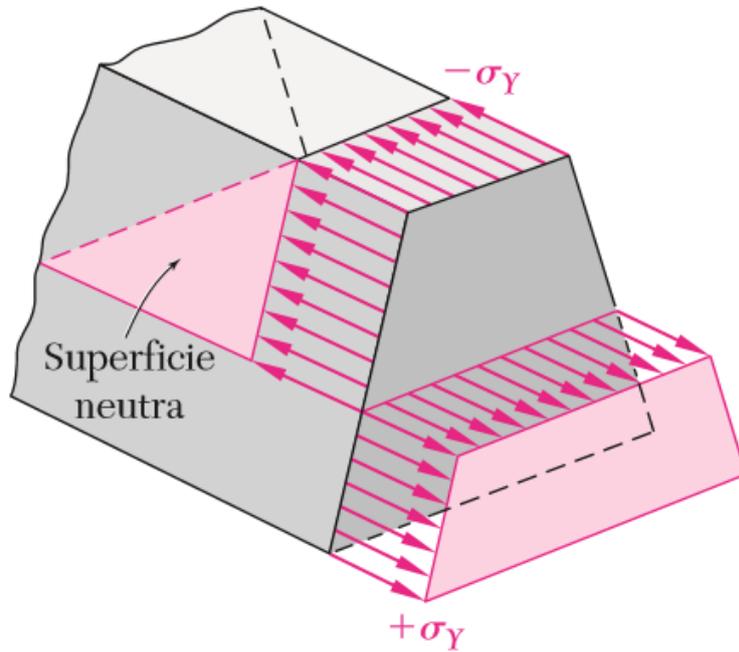


Figura 2.15: Viga asimétrica sometida a un momento plástico. [2]

Como ya se introdujo en la sección 2, Deformaciones Plásticas, no puede suponerse que el eje neutro coincide con el eje centroidal de la sección transversal cuando dicha sección no es simétrica con respecto a ese eje. Para conocer la localización del eje neutro, se analizará la resultante R_1 de las fuerzas de compresión ejercidas sobre el área A_1 de la sección transversal situada por encima del eje neutro y la resultante R_2 de las fuerzas de tracción ejercidas sobre el área A_2 por debajo del eje neutro (Figura 2.16).

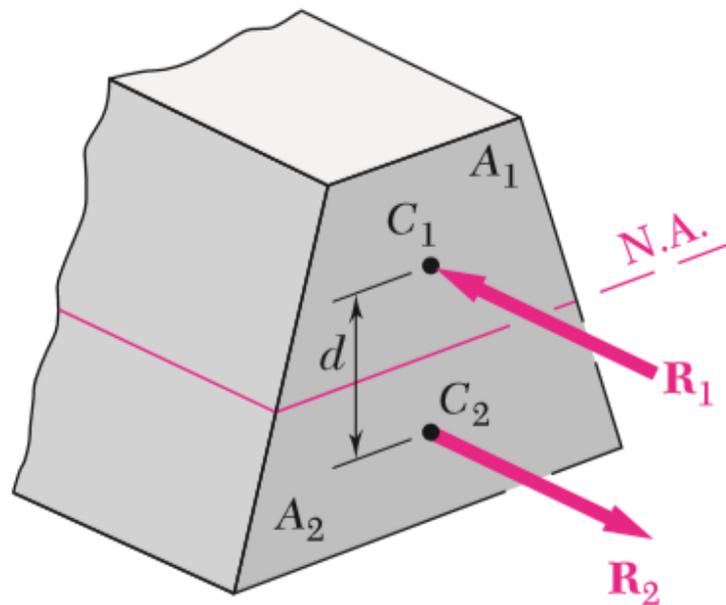


Figura 2.16: Resultantes y sus puntos de aplicación. [2]

Puesto que R_1 y R_2 forman un par equivalente al aplicado sobre la pieza, deben tener la misma magnitud y sentidos opuestos. Por tanto, se puede escribir $R_1 = R_2$, o $A_1\sigma_y = A_2\sigma_y$, de lo que se deduce que $A_1 = A_2$. Dicho de otro modo, el eje neutro divide la

sección transversal en porciones de áreas iguales. Nótese que el eje así obtenido no será, generalmente, un eje centroidal de la sección.

También hay que destacar que las líneas de acción de R_1 y R_2 pasarán por los centroides C_1 y C_2 de las dos áreas definidas. Si se denomina d a la distancia entre los centroides y A el área total de la sección transversal, el momento plástico se puede expresar como

$$M_p = \left(\frac{1}{2} A \sigma_y\right) d$$

2.5 ESFUERZOS RESIDUALES.

En los apartados anteriores se demostró que en un elemento compuesto de material elasto-plástico sometido a un momento flector lo suficientemente grande, aparecerán zonas plásticas. Cuando ese momento flector se retira (se reduce a cero), la correspondiente reducción en esfuerzo y deformación en cualquier punto, se puede representar en el diagrama esfuerzo deformación mediante una línea recta (Figura 2.17).

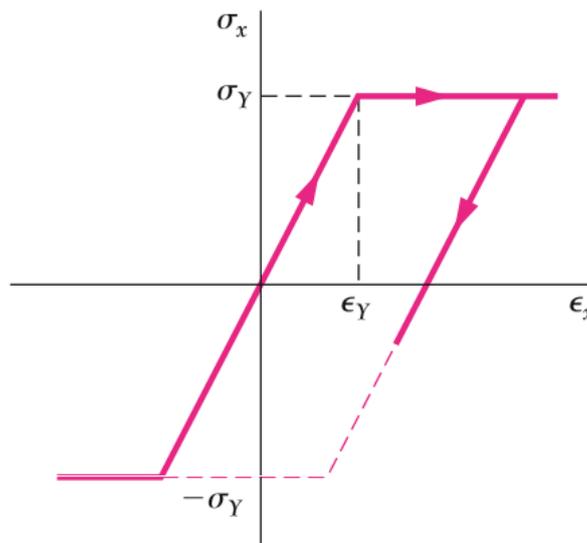


Figura 2.17: Diagrama esfuerzo-deformación cuando el momento flector se reduce a cero. [2]

El valor final del esfuerzo en un punto concreto será distinto de cero, generalmente. Existirá un esfuerzo residual en casi todos los puntos que podrá ser positivo o negativo independientemente del signo del esfuerzo máximo alcanzado.

Dado que la relación lineal entre σ_x y ϵ_x es aplicable en cualquier punto del elemento durante la fase de descarga, la ecuación (2.13) se podrá utilizar para calcular el cambio de esfuerzo en cualquier punto dado. Esto es, la fase de descarga puede manejarse suponiendo que la pieza es completamente elástica.

Los esfuerzos residuales se calcularán aplicando el principio de superposición. Se analizarán, por una parte, los esfuerzos correspondientes a la aplicación del momento flector M y, por otra, los esfuerzos correspondientes al momento flector igual y opuesto

–M, aplicado para la descarga de la pieza. El primer grupo de esfuerzos representa el comportamiento elastoplástico del material durante la fase de carga, y el segundo grupo la conducta lineal del material durante la fase de descarga. La suma de ambos esfuerzos corresponde a la distribución de esfuerzos residuales en el elemento.

CAPÍTULO III: INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).

3.1 INTRODUCCIÓN.

El método de los elementos finitos (MEF en castellano, o FEM por sus siglas en inglés) es un método numérico genérico utilizado en la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales empleado en diversos problemas tanto de ingeniería como de física.

El FEM es un proceso que está pensado para ser usado en ordenadores y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. El método es muy utilizado en el diseño y mejora de muchos productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal del problema a considerar sean conocidas previamente.

Este método permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (denominado medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios, no intersectantes entre sí, denominados “elementos finitos”. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados “nodos”. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito y, además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama “malla”.

Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos o nodos, que sirven a su vez de base para la discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales. La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama *matriz de rigidez del sistema*. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Habitualmente, el método de los elementos finitos se programa por ordenador para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas, las deformaciones y tensiones cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o, más generalmente, un problema de mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos es muy usado debido a su generalidad y a la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos (en dos o tres dimensiones). Además, el método es fácilmente adaptable a problemas de transmisión de calor, mecánica de fluidos (para calcular campos de velocidades y presiones) o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas con frecuencia, en la práctica de la ingeniería, los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Una importante propiedad del método es la convergencia. Ésta, consiste en considerar particiones de elementos finitos sucesivamente más finas para que la solución numérica calculada converja rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

3.2 BREVE RESEÑA HISTÓRICA DEL MÉTODO.

Pese a que el nombre del MEF se ha establecido de forma reciente, el concepto lleva usándose desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretización espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde la antigüedad. El concepto de 'elementos finitos' parte de esa idea.

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416.

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant ("Variational methods for de solution of problems of equilibrium and vibrations", citado por Carnicero) propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh-Ritz para aproximar soluciones.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp ("Stiffness and deflection analysis of complex structures", citado por Carnicero) quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando de manera paralela a las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de EF, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación. Tanto es así que el MEF es considerado hoy día como una de las herramientas más potentes para la solución de problemas de ingeniería.

3.3 CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO.

La idea fundamental del MEF es la división de un sistema continuo en un conjunto de elementos de pequeño tamaño unidos por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que marcan el comportamiento del sistema continuo marcarán también el comportamiento de los elementos. Se consigue así, pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), gobernado por ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número finito de grados de libertad, cuyo comportamiento está definido por un sistema de ecuaciones, lineales o no. Es decir, se trata de una técnica que sustituye el problema diferencial por otro algebraico para el que se conocen técnicas de resolución y que es aproximadamente equivalente.

En todo sistema de estudio se podrán diferenciar (Figura 3.1):

- Dominio: es el espacio geométrico en el que se va a describir y analizar el sistema.
- Condiciones de contorno: variables conocidas que marcan la respuesta del sistema, tales como cargas, desplazamientos, focos de calor, voltaje, temperaturas...
- Incógnitas: representan las variables del sistema que se desean conocer, teniendo en cuenta el efecto que provocan las condiciones de contorno sobre el sistema.

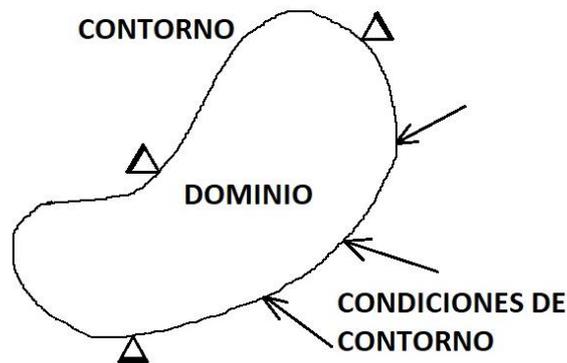


Figura 3.1: Esquematización del problema.

El método de los elementos finitos divide el sistema continuo de estudio en elementos discretos. El continuo se divide mediante puntos (caso lineal), líneas (caso bidimensional) y superficies (caso tridimensional) imaginarios. De esta forma, se aproxima el dominio total en estudio mediante los elementos en los que se divide. Estos elementos constitutivos quedan definidos por una serie de puntos, o nodos, que los unen entre sí. Sobre estos nodos, se definen las incógnitas fundamentales del problema. Estas incógnitas son los grados de libertad de cada nodo, que son las variables que determinan el estado y posición del nodo. Para los elementos estructurales, estas incógnitas son los desplazamientos nodales. A partir de estas incógnitas se pueden determinar las demás incógnitas que resulten de interés.

Obtenido el valor de las incógnitas nodales, se puede plantear la ecuación diferencial que domina el comportamiento del continuo para el elemento. De esta forma, se obtendrán fórmulas que relacionan el comportamiento de cualquier punto del elemento

con el valor que toman las incógnitas en los nodos. Estas funciones reciben el nombre de funciones de interpolación, ya que su función es interpolar el valor de las incógnitas entre los nodos que marcan un elemento para hallar los valores intermedios del mismo.

El problema es formulado mediante matrices ya que se manipulan fácilmente por ordenador. Una vez conocidas las matrices que marcan el comportamiento del elemento, se unen y se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que determinan el valor de los grados de libertad en los nodos del sistema.

3.4 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MÉTODO.

Este apartado puede llegar a alcanzar una gran complejidad. Pero en este estudio, sin embargo, simplemente interesa conocer los fundamentos del método, para poder entender el funcionamiento de un programa comercial de cálculo que utiliza el método de los elementos finitos, en este caso, Abaqus. Por ello, sólo se presentará una breve explicación.

El desarrollo de un algoritmo de EF con el objetivo de resolver un problema que se define mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno requiere, en general, cuatro etapas:

- El problema debe ser reformulado en forma variacional.
- El dominio de variables las independientes (usualmente un dominio espacial para problemas dependientes del tiempo) debe dividirse mediante una partición en subdominios o elementos finitos. Asociadas a la partición anterior se construye un espacio vectorial de dimensión finita, llamado espacio de elementos finitos. Siendo la solución numérica aproximada obtenida por elementos finitos una combinación lineal en dicho espacio vectorial.
- Se obtiene la proyección del problema variacional original sobre el espacio de elementos finitos obtenido de la partición. Esto da lugar a un sistema con un número de ecuaciones finito, aunque en general con un número elevado de incógnitas. El número de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial de elementos finitos obtenido y, en general, cuanto mayor será dicha dimensión tanto mejor será la aproximación numérica obtenida.
- El último paso es el cálculo numérico de la solución del sistema de ecuaciones.

Esta serie de pasos permiten sustituir un problema de cálculo diferencial por un problema de álgebra lineal, como se esquematiza en la figura 3.2:

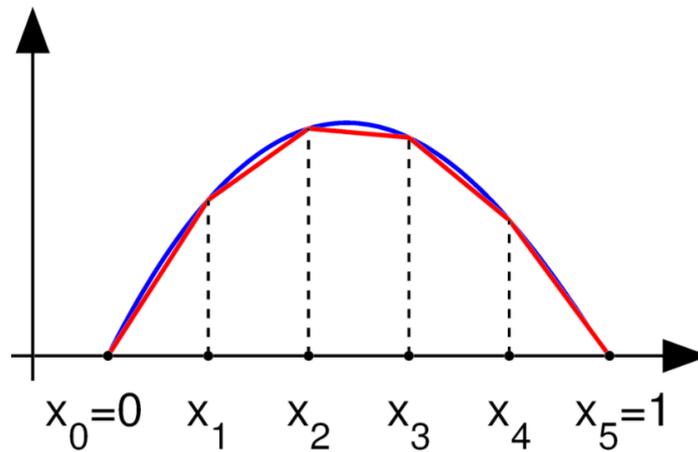


Figura 3.2: Aproximaciones sucesivas de una función curva en tramos rectos. (Fuente: Wikipedia.)

Dicho problema, en general, se plantea sobre un espacio vectorial de dimensión no finita, pero que puede resolverse aproximadamente encontrando una proyección sobre un subespacio de dimensión finita y, por tanto, con un número finito de ecuaciones (aunque en general el número de ecuaciones será elevado, típicamente de miles o incluso de centenares de miles). La discretización en elementos finitos ayuda a construir un algoritmo de proyección sencillo, logrando además que la solución por el método de elementos finitos sea generalmente exacta en un conjunto finito de puntos. Estos puntos coinciden usualmente con los vértices de los elementos finitos o puntos destacados de los mismos. Para la resolución concreta del enorme sistema de ecuaciones algebraicas, en general, pueden usarse los métodos convencionales de álgebra lineal en espacios de dimensión finita.

3.5 ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

Cualquier análisis por medio del MEF contempla los siguientes puntos:

- 1- Descripción de los nodos (condiciones de contorno, coordenadas).
- 2- Agrupar y ordenar esta información para hacerla compatible con los elementos finitos.
- 3- Recopilar la información acerca de las propiedades del material y las cargas para todos y cada uno de los elementos que intervienen.
- 4- Se ensamblan todas las matrices que intervengan en el proceso con la forma:

$$[K] \times [U] = [P]$$

siendo:

- K: matriz de rigidez.
 - U: matriz de deformaciones o desplazamiento.
 - P: matriz de cargas.
- 5- Una vez conocidos desplazamientos y deformaciones, éstas se llevan a la ecuación constitutiva. Si la situación se encuentra dentro del período elástico del material, esta ecuación será la Ley de Hooke, a partir de cual se realiza la integración. Dicha integración se realiza a partir de un algoritmo que, en la gran parte de los programas comerciales, utiliza el método de Gauss.

- 6- El resultado de esta integración ofrece las tensiones que aparecen en los elementos finitos, y al estar éstos interconectados con los nodos, también ofrece información sobre la tensión nodal.

3.6 ANTES DE REALIZAR UN CÁLCULO POR EL MEF.

De forma previa a resolver cualquier problema con la ayuda de un programa de EF, es conveniente plantear una serie de cuestiones.

¿Qué se pretende con el análisis?

Determinar tensiones, obtener distribuciones de temperatura, ver cómo evoluciona el sistema, calcular frecuencias... Esta pregunta determinará el tipo de análisis a realizar.

¿Cómo va a ser la geometría que se va a analizar?

La geometría real del problema seguramente sea conocida, pero a la hora de realizar el análisis debe simplificarse al máximo en función del objetivo de dicho análisis, ya que la mayor parte de los detalles son intrascendentes y únicamente conllevan un excesivo tiempo de cálculo y espacio de almacenamiento. Para ello, es necesario buscar simetrías, antisimetrías o axisimetrías en la geometría que se va a estudiar, así como problemas de tensión o deformación planas, etc. Una vez estudiada la geometría, se estará en disposición de decidir el tipo de elemento a utilizar y sus características así como el material a emplear.

¿Qué condiciones de contorno se impondrán en el sistema a estudiar?

Al igual que la geometría, debe decidirse si las condiciones de contorno influyen en el tipo de análisis para evitar aplicar condiciones que no tengan trascendencia. Es necesario también, decidir cómo se aplican, si son condiciones reales del problema, si existe equilibrio en el caso de que sea un análisis estático,... La imposición de las condiciones de contorno es una de las cuestiones más complejas a la hora de realizar un estudio por EF.

¿Qué resultados se esperan obtener?

Para poder saber si el análisis ha sido correcto, es necesario saber cómo responderá el sistema de forma general. Por ejemplo, si el estudio trata sobre una tubería sometida a presión interior y el resultado indica que el radio disminuye, es obvio que se ha modelado mal el sistema. Esto podría deberse a una mala aplicación de las cargas, a un mallado incorrecto, etc.

Una vez respondidas estas cuestiones, se estará en condiciones de realizar un análisis por el MEF.

3.7 EL MEF EN LA PRÁCTICA.

El MEF es un método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales. La solución obtenida por MEF es sólo aproximada, coincidiendo con la solución exacta sólo en un número finito de puntos llamados nodos. En el resto de puntos que no son nodos, la

solución aproximada se obtiene interpolando a partir de los resultados obtenidos para los nodos, lo cual hace que la solución sea sólo aproximada debido a ese último paso.

El MEF convierte un problema definido en términos de ecuaciones diferenciales en un problema definido de forma matricial que proporciona el resultado correcto para un número finito de puntos e interpola posteriormente la solución al resto del dominio, resultando finalmente sólo una solución aproximada. El conjunto de puntos donde la solución es exacta se denomina conjunto de nodos. Dicho conjunto de nodos forma una red, denominada malla formada por retículos. Cada uno de los retículos contenidos en dicha malla es un “elemento finito”. El conjunto de nodos se obtiene dividiendo o discretizando la estructura con elementos de forma variada (pueden ser superficies, volúmenes y barras).

Desde el punto de vista de la programación algorítmica modular, las tareas necesarias para llevar a cabo un cálculo mediante un programa de MEF se dividen en:

- Preproceso: consiste en la definición de geometría, generación de la malla, las condiciones de contorno y asignación de propiedades a los materiales y otras propiedades. En ocasiones existen operaciones cosméticas de regularización de la malla y preacondicionamiento para garantizar una mejor aproximación o una mejor convergencia del cálculo.
- Cálculo (o proceso): es el resultado del preproceso, en un problema simple no dependiente del tiempo, permite generar un conjunto de N ecuaciones y N incógnitas, que puede ser resuelto con cualquier algoritmo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Cuando el problema a tratar es un problema no lineal o un problema dependiente del tiempo a veces el cálculo consiste en una sucesión finita de sistemas de N ecuaciones y N incógnitas que deben resolverse uno a continuación de otro, y cuya entrada depende del resultado del paso anterior.
- Postproceso: el cálculo proporciona valores de cierto conjunto de funciones en los nodos de la malla que define la discretización, en el postproceso se calculan magnitudes derivadas de los valores obtenidos para los nodos y, en ocasiones, se aplican operaciones de suavizado, interpolación e incluso determinación de errores de aproximación.

3.7.1 PREPROCESO Y GENERACIÓN DE LA MALLA.

La malla se genera y ésta, en general, consta de miles (e incluso de centenares de miles) de puntos. La información sobre las propiedades del material y otras características del problema se almacena junto con la información que describe la malla. Por otro lado, las fuerzas, los flujos térmicos o las temperaturas se reasignan a los puntos de la malla. A los nodos de la malla se les asigna una densidad por todo el material dependiendo del nivel de la tensión mecánica u otra propiedad. Las regiones que recibirán gran cantidad de tensión tienen normalmente una mayor densidad de nodos (densidad de malla) que aquellos que experimentan poco o ninguno. Los puntos de interés consisten en: puntos de fractura previamente probados del material, entrantes, esquinas, detalles complejos, y áreas de elevada tensión. La malla actúa como la red de una araña en la que desde cada nodo se extiende un elemento de malla a cada nodo adyacente. Este tipo de red vectorial es la que lleva las propiedades del material al objeto, creando varios elementos.

Las tareas asignadas al preproceso son:

- 1- El sistema continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias en un número de elementos finitos. Esta parte del proceso se desarrolla habitualmente mediante algoritmos incorporados a sistemas informáticos de mallado durante la etapa de preproceso.
- 2- Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos o "nodos", situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema tal y como ocurre en el análisis simple de estructuras o elementos mecánicos por el método matricial.
- 3- Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada "elemento finito", en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento. Por ejemplo, el campo de desplazamientos dentro de un elemento lineal de dos nodos podría venir definido por: $u = N_1 u_1 + N_2 u_2$, siendo N_1 y N_2 las funciones comentadas (funciones de forma) y u_1 y u_2 los desplazamientos en el nodo 1 y en el nodo 2.
- 4- Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las propiedades constitutivas del material, definirán a su vez el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, en sus contornos.
- 5- Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera carga repartidas, resultando así una relación entre fuerzas F y desplazamientos u de la forma $F = k u$, que es similar a la del cálculo matricial.

3.7.2 CÁLCULO Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

En un problema mecánico lineal no dependiente del tiempo, como un problema de análisis estructural estático o un problema elástico, el cálculo generalmente se reduce a obtener los desplazamientos en los nodos y con ellos definir de manera aproximada el campo de desplazamientos en el elemento finito.

Cuando el problema es no lineal, en general, la aplicación de las fuerzas requiere la aplicación incremental de las mismas y considerar incrementos numéricos, y calcular en cada incremento algunas magnitudes referidas a los nodos. Algo similar sucede con los problemas dependientes del tiempo, para los que se considera una sucesión de instantes, en general bastante cercanos al tiempo, y se considera el equilibrio instantáneo en cada instante. En general estos dos últimos tipos de problemas requieren un tiempo de cálculo substancialmente más elevado que en un problema estacionario y lineal.

3.7.3 POSTPROCESO.

Actualmente, el MEF es usado para calcular problemas tan complejos que los ficheros de resultados que generan los programas de cálculo MEF tienen tal cantidad de datos que resulta conveniente procesarlos de alguna manera adicional para hacerlos más

comprensibles e ilustrar diferentes aspectos del problema. En la etapa de postproceso los resultados obtenidos de la resolución del sistema son tratados para obtener representaciones gráficas y obtener magnitudes derivadas, que permiten extraer conclusiones del problema.

El postproceso del MEF generalmente requiere software adicional para organizar los datos de salida, de tal manera que sea más fácilmente comprensible el resultado y permita decidir si ciertas consecuencias del problema son o no aceptables. En el cálculo de estructuras por ejemplo, el postproceso puede incluir comprobaciones adicionales de si una estructura cumple los requisitos de las normas pertinentes, calculando si se sobrepasan tensiones admisibles o existe la posibilidad del pandeo en la estructura.

3.8 TIPOS DE ANÁLISIS EN INGENIERÍA.

El programador puede insertar numerosos algoritmos o funciones que pueden hacer al sistema comportarse de manera lineal o no lineal. Los sistemas lineales son menos complejos y normalmente no tienen en cuenta deformaciones plásticas. Los sistemas no lineales toman en cuenta las deformaciones plásticas y algunos, incluso, son capaces de verificar si se presentaría fractura en el material.

Algunos tipos de análisis en ingeniería comunes que usan el método de los elementos finitos son:

- Análisis estático: se emplea cuando la estructura está sometida a acciones estáticas, es decir, no dependientes del tiempo.
- Análisis vibracional: es usado para analizar una estructura sometida a vibraciones aleatorias, choques o impactos. Cada una de estas acciones puede actuar en la frecuencia natural de la estructura y causar resonancia y el consecuente fallo.
- Análisis de fatiga: ayuda a los diseñadores a predecir la vida del material o de la estructura, prediciendo el efecto de los ciclos de carga sobre el espécimen. Este análisis puede mostrar las áreas donde es más probable que se presente una grieta. El análisis por fatiga puede también predecir la tolerancia al fallo del material.
- Análisis térmico: incluyen los modelos de análisis de transferencia de calor por conductividad o por dinámicas térmicas de flujo del material. El estado continuo de transferencia se refiere a las propiedades térmicas en el material que tiene una difusión lineal de calor.

3.9 VENTAJAS DEL MEF.

El MEF se ha vuelto una solución para la tarea de predecir los fallos debidos a tensiones desconocidas, mostrando la distribución de tensiones en el material y permitiendo así a los diseñadores ver todas las tensiones involucradas. Este método de diseño y prueba del producto es mejor que el ensayo y error, donde hay que añadir costos de manufactura asociados a la construcción de cada ejemplar o prototipo para las pruebas.

Las grandes ventajas del cálculo por ordenador se pueden resumir en:

- Hace posible el cálculo de estructuras que, bien por el gran número de operaciones que su resolución presenta (entramados de muchos pisos, por ejemplo) o por lo tedioso de las mismas (entramados espaciales, por ejemplo) eran, en la práctica, inabordables mediante el cálculo manual.
- En la mayoría de los casos reduce a límites despreciables el riesgo de errores operativos.

3.10 LIMITACIONES DEL MEF.

En general, el MEF tal como se usa actualmente tiene algunas limitaciones:

- El MEF calcula soluciones numéricas concretas y adaptadas a unos datos particulares de entrada, no puede hacerse un análisis de sensibilidad sencillo que permita conocer como variará la solución si alguno de los parámetros se altera ligeramente. Es decir, proporciona sólo respuestas numéricas cuantitativas concretas, no relaciones cualitativas generales.
- El MEF proporciona una solución aproximada cuyo margen de error en general es desconocido. Si bien algunos tipos de problemas permiten acotar el error de la solución, debido a los diversos tipos de aproximaciones que usa el método, los problemas no lineales o dependientes del tiempo en general no permiten conocer el error.
- En el MEF la mayoría de aplicaciones prácticas requieren mucho tiempo para ajustar detalles de la geometría, existiendo frecuentemente problemas de mal acondicionamiento de mallas, desigual grado de convergencia de la solución aproximada hacia la solución exacta en diferentes puntos, etc. En general, una simulación requiere el uso de numerosas pruebas y ensayos con geometrías simplificadas o casos menos generales que el que finalmente pretende simularse, antes de empezar a lograr resultados satisfactorios.

CAPÍTULO IV: EL SOFTWARE ABAQUS.

4.1 INTRODUCCIÓN

El software “Abaqus” es un programa de simulación de gran importancia en aplicaciones de ciencia e ingeniería desarrollado por Dassault Systemes. Su funcionamiento está basado en el método de los elementos finitos, gracias a lo cual puede resolver desde simples problemas lineales hasta complejas simulaciones no lineales.

El programa posee una muy variada y completa librería que permite modelar prácticamente cualquier geometría que se desee estudiar. Además, cuenta con un extenso listado de los materiales más frecuentemente utilizados en ingeniería, tales como metales, gomas, polímeros, hormigón, compuestos de fibras o materiales geotécnicos, entre otros.

Aunque Abaqus fue diseñado como una herramienta de simulación genérica, no sólo es aplicable en problemas estructurales relacionados con tensiones o desplazamientos. También abarca otros muchos campos de la ingeniería entre los que se encuentran la transferencia de calor, difusión de masa, análisis termoeléctricos o termomecánicos, acústicos, de mecánica de suelos, piezoeléctricos, electromagnéticos y de dinámica de fluidos.

Abaqus dispone de toda la información necesaria para el usuario, por medio de documentación escrita y en línea, concerniente a tipos de elementos finitos, materiales, procedimientos de análisis, condiciones iniciales, modelado con Abaqus/Cae, ejemplos, tutorial de ejemplos, manual de palabras clave y de teoría, así como la instalación del programa en circunstancias particulares.

4.2 EL ENTORNO ABAQUS.

El programa permite introducir todos los datos necesarios para la simulación mediante un lenguaje de programación propio en un formato de documento de texto, el cual puede llegar a ser tremendamente complejo. Para este estudio se ha utilizado la interfaz Abaqus/CAE del programa, ya que resulta mucho más intuitiva y eficiente. A continuación, se describen todas las zonas que aparecen en la pantalla principal del programa.

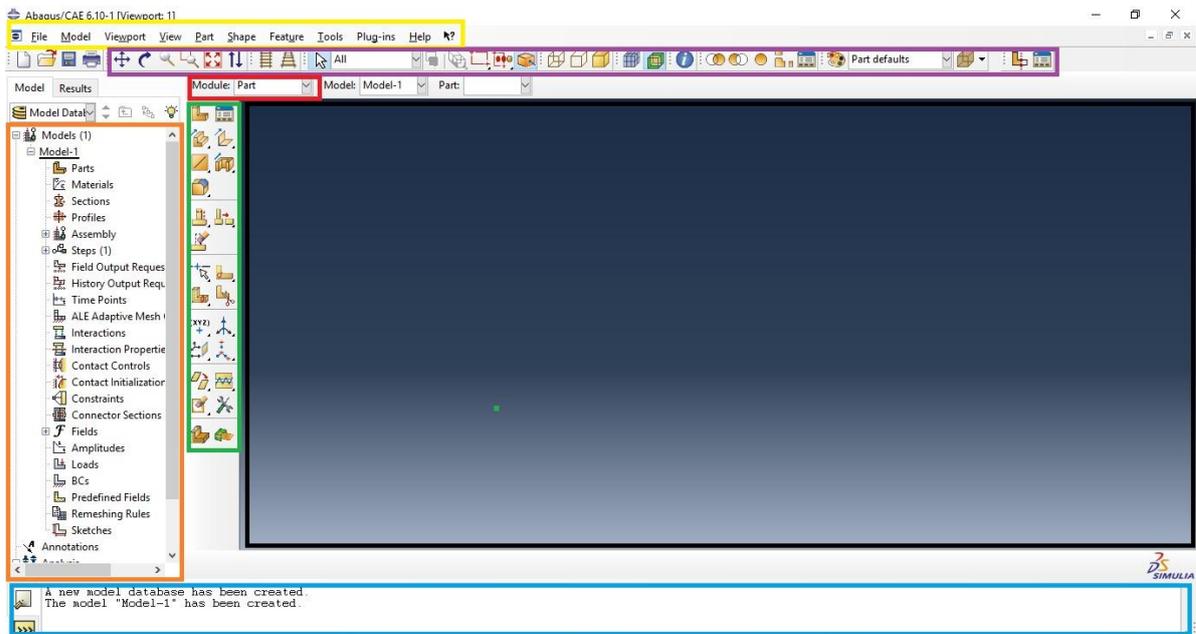


Figura 4.1: Pantalla de trabajo de Abaqus.

Al abrir el programa, aparecerá una ventana en la que se debe seleccionar “Standard/Explicit Model” para empezar a trabajar, tras lo cual aparece la pantalla representada en la figura 4.1, en la se observan diferentes zonas por colores:

- En **amarillo**: barra de menú. Aquí se ubican las distintas opciones y herramientas de trabajo que están disponibles en cada módulo. Algunas de estas opciones son comunes a todos los módulos (File, Model, Viewport, View, Edit) mientras que otras vendrán determinadas por el módulo en el que se esté trabajando.
- En **morado**: barra de herramientas. Cada icono ofrece acceso rápido a opciones que contienen los diferentes menús. Es personalizable. Desde esta barra se puede girar o mover el modelo, modificar su tamaño, extraer información, etc.
- En **naranja**: árbol de modelo/ resultados. El diagrama de árbol muestra toda la información que se va introduciendo sobre el modelo y permite una vista y edición rápida del mismo, así como navegar entre los distintos modelos que se quieran introducir. En la pestaña “Model”, se encuentra el diagrama de árbol referido al modelo en sí, pudiendo trabajar con más de uno. Por otra parte, en la pestaña “Results”, se puede trabajar con diferentes archivos de resultados de los análisis.
- En **verde**: caja de herramientas. Aquí se encuentran todos los iconos de acceso rápido a las diferentes herramientas en función del módulo en que se esté trabajando.
- En **azul**: área de mensajes y comandos. En este recuadro, Abaqus muestra los mensajes de estado, advertencias y errores cometidos al ejecutar determinada acción. También da instrucciones sobre los pasos a realizar. Además, también pueden introducirse comandos en el lenguaje de programación Python.
- En **negro**: ventana de trabajo. Es el lugar en el que el programa muestra una determinada vista del modelo que se está simulando. Abaqus permite trabajar con diferentes vistas de forma simultánea, lo cual puede ser muy útil cuando se trabaja con varios modelos a la vez.

- En **rojo**: barra de contexto. Permite navegar por los distintos módulos que ofrece el programa y por las distintas funcionalidades que ofrece cada uno. Por ejemplo, en el módulo “Part”, permite navegar por los distintos modelos y las diferentes geometrías o partes.

4.3 MÓDULOS DE ABAQUS.

El software dispone de 10 módulos diferentes de trabajo, cada uno de ellos con unas funciones concretas para poder introducir todos los datos necesarios con el objetivo de simular la pieza de forma correcta:

- Módulo “PART”: permite crear partes individuales a partir del dibujo de las mismas o importar una geometría generada con otro software. También pueden crearse o importarse mallas para una determinada parte. Aquí habrá que elegir qué tipo de modelo se crea, 3D, 2D o axisimétrico.
- Módulo “PROPERTY”: aquí se pueden crear las secciones y materiales para asignar a cada parte, generar los perfiles para las secciones de las vigas, definir orientaciones, normales y tangentes para las distintas secciones, etc. En cuanto a los materiales, se deberán definir sus características (Módulo de Young, Coeficiente de Poisson...), que vendrán determinadas en función del tipo de propiedades elegidas (General, Mechanical, Thermal...). En cuanto a las secciones, también habrá que decidir cual se aplica (sólida, placa, viga...)
- Módulo “ASSEMBLY”: en este módulo se crean y se ensamblan las *instances* (subdominios que componen el problema). También permite definir el tipo de mallado que se aplicará (dependiente o independiente) y asignarle a las distintas partes una orientación, posición relativa, etc.
- Módulo “STEP”: permite generar y definir los distintos estados de carga y las variables asociadas a los mismos que se incluirán en los resultados. Cada estado de carga se denomina “paso” o “step” y pueden generarse de manera secuencial (ejecutar un step al finalizar uno previo) o superponerse. Por defecto, cada modelo cuenta con el step inicial. En este módulo se puede elegir si se considerarán los efectos no lineales (NLgeom) a la hora de realizar la simulación.
- Módulo “INTERACTION”: se deben especificar las interacciones entre las distintas partes de un modelo. Entre los tipos de interacciones, se pueden encontrar interacciones de contacto, elásticas, radiación desde o hacia un ambiente, restricciones de cuerpo rígido, inercias, etc.
- Módulo “LOAD”: aquí se crearán las cargas, condiciones de borde y campos que se aplicarán en cada estado de carga. Todos estos elementos dependerán del tipo de step elegido anteriormente, por lo que para crear alguna de ellas, es necesario seleccionar el step y el programa mostrará las opciones compatibles con el mismo. Las condiciones de borde (BC, boundary condition) pueden ser, por ejemplo, desplazamiento, rotación o velocidad si se trata de un análisis estático. También es importante tener presente el sistema de coordenadas con el que se está trabajando, ya que tanto las condiciones de borde como las cargas (load) deben aplicarse en la dirección correcta.
- Módulo “MESH”: permite generar la malla de elementos finitos en el modelo. Se deberá elegir el tipo de elemento (de viga, de barra, de estados planos...), el tipo de función de interpolación (lineal o cuadrática), el tamaño del elemento y la técnica de mallado. El tamaño del elemento puede variar en función de la zona en la que se desean obtener los resultados para que éstos sean más precisos (mallado más fino).

- Módulo "JOB": aquí se crean, ejecutan y monitorean los diferentes análisis sobre el modelo con el que se está trabajando. Cada uno de los análisis realizados dará como resultado (si se ejecuta correctamente y sin errores) un archivo de resultados. Mientras dura la ejecución del análisis, pueden observarse en tiempo real los mensajes y advertencias que Abaqus indica sobre dicho análisis, abortando el mismo si encuentra algún error.
- Módulo "VISUALIZATION": aquí se muestran los resultados del análisis. Se pueden obtener diagramas de tensiones, desplazamientos o cualquier variable que se incluyó en el análisis. También muestra diagramas vectoriales o de contorno, donde se representan con diferentes colores los valores que toma la variable representada. El programa también permite realizar cortes en el modelo a la altura deseada para obtener datos en ese corte o generar tablas tipo XY y graficarlas.
- Módulo "SKETCH": se pueden crear planos bidimensionales para incluir en el modelo. También se tiene acceso a este módulo al crear una parte desde el módulo "Part".

4.4 DISEÑO DE LAS VIGAS EN ABAQUS.

4.4.1 VIGA ISOSTATICA RECTANGULAR

En primer lugar, se ejecuta el programa y se elige la opción de trabajar con Standard/Explicit Model (Figura 4.2):

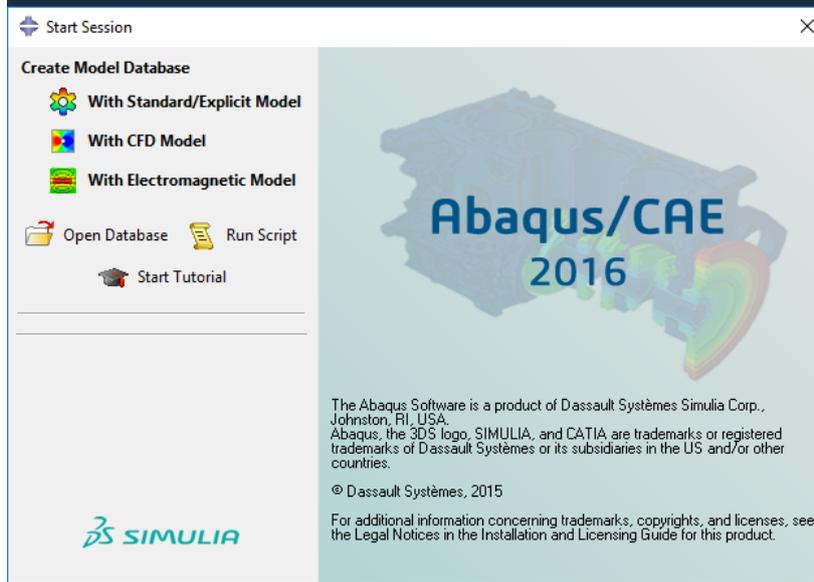
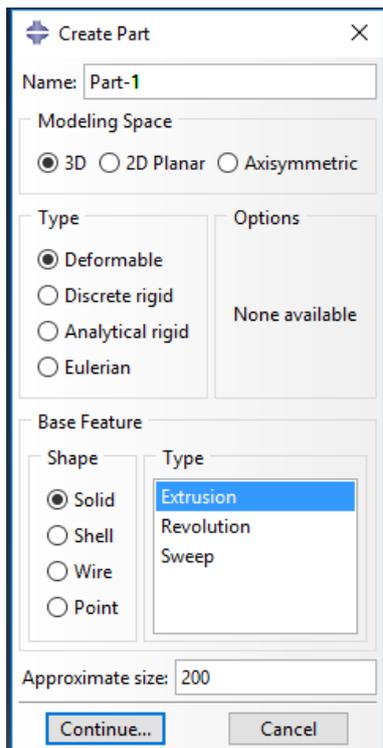


Figura 4.2: Inicio del programa Abaqus.

- MODULO PART

El primer paso es diseñar la sección de la viga. Para ello, dentro del módulo “Part” se pincha en el icono “Create Part” y aparece el siguiente cuadro de diálogo (Figura 4.3):



Abaqus indica que se introduzca el nombre de la pieza o parte a desarrollar. También se puede elegir el tipo de modelado que se desea (3D) y la forma en la que se creará (Extrusion). En la parte inferior del cuadro se puede introducir un tamaño aproximado de la red o “Sketch” sobre la que se dibujará el perfil. Se aceptarán todas las opciones que aparecen por defecto y se pincha en “Continue”.

Aparecerá el Sketch sobre el que indicaremos a Abaqus el perfil del diseño elegido. El programa muestra unos ejes coordenados con el objetivo de introducir la sección transversal correcta.

Las cotas que introduciremos irán en milímetros. Para el caso de estudio, la sección es de 35x140 mm².

Se pincha en el icono “Create Lines: Connected” para ir introduciendo mediante coordenadas el perfil de la viga. Aparecerá en el cuadro de comandos un recuadro

Figura 4.3: Create Part.

donde se introducen las coordenadas en X y en Y separadas por coma. Para esta sección se introducen las siguientes coordenadas para que el perfil quede centrado dentro del Sketch:

- (-17.5,70) (17.5,70) (17.5,-70) (-17.5,-70) (-17.5,70).

El perfil creado debe ser el siguiente (Figura 4.4):

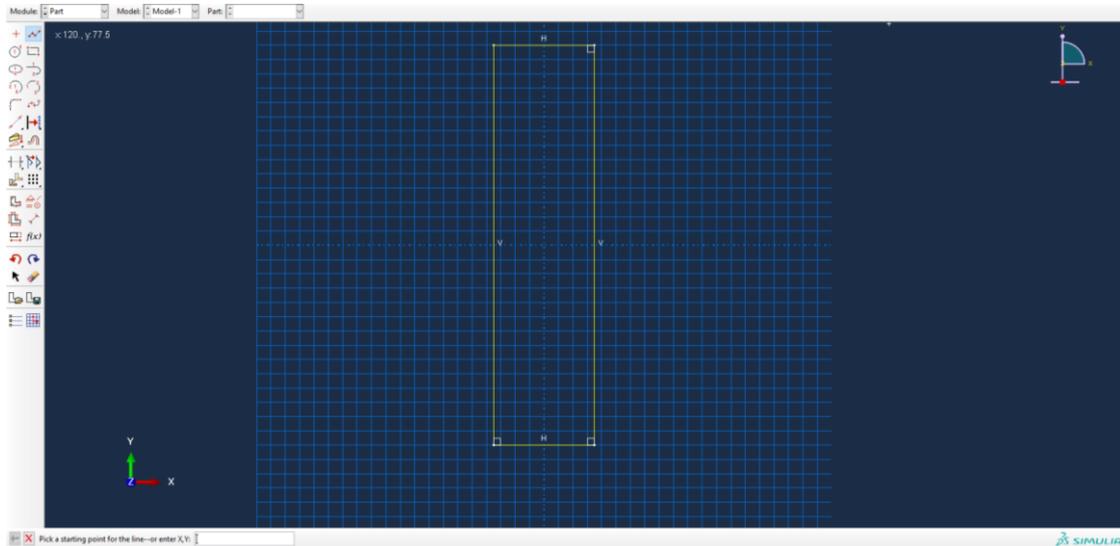


Figura 4.4: Diseño de la sección en el Sketch.

Una vez dibujada la sección, se clickea en la cruz roja del cuadro de comandos para indicar a Abaqus que ya se ha terminado de dibujar la sección. A continuación, se pincha en “Done” para salir del Sketch y aparecerá un nuevo cuadro de diálogo (Edit Base Extrusion) para introducir la longitud de la viga (Figura 4.5):

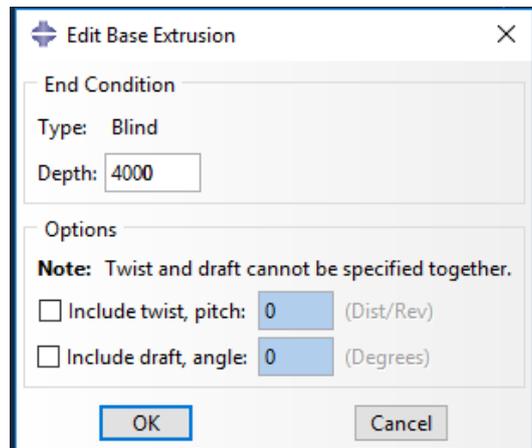


Figura 4.5: Longitud de la viga.

Se introducirá 4000 en el cuadro “Depth” correspondiente a los 4 metros de longitud de la viga. Se pincha en “OK” y automáticamente aparecerá la viga diseñada en 3D mediante extrusión de la sección indicada (Figura 4.6):

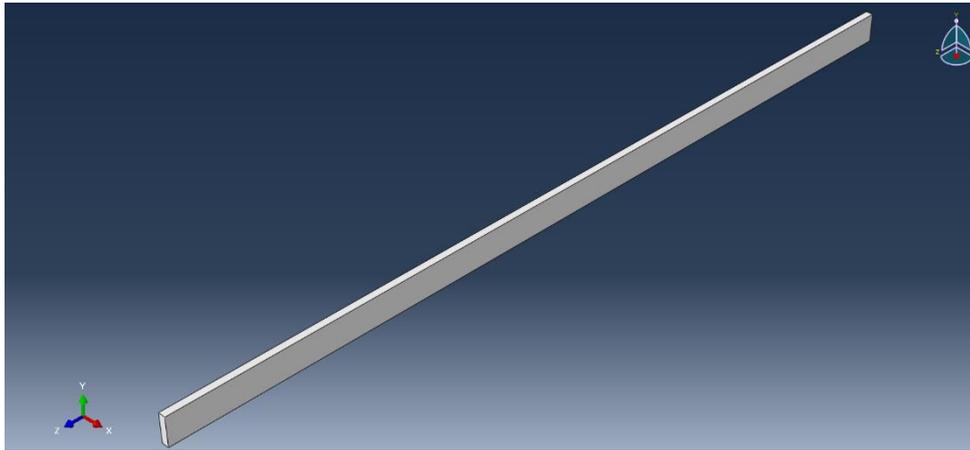


Figura 4.6: Viga en 3D.

Antes de continuar con el siguiente módulo, se van a realizar dos particiones a la viga en la parte central que servirán para poder definir dos tamaños diferentes de malla. Esto es debido a que la licencia académica del programa sólo permite crear un número limitado de nodos. De esta forma, se mallará más fino la parte central de la viga (donde se da el momento flector máximo) para que la aproximación numérica sea más precisa.

Para crear la primera partición, se pincha en “Tools”, “Partition” y aparecerá un cuadro de diálogo (Create Partition) en el que Abaqus pide los datos acerca de cómo se realizará la partición deseada (Figura 4.7):

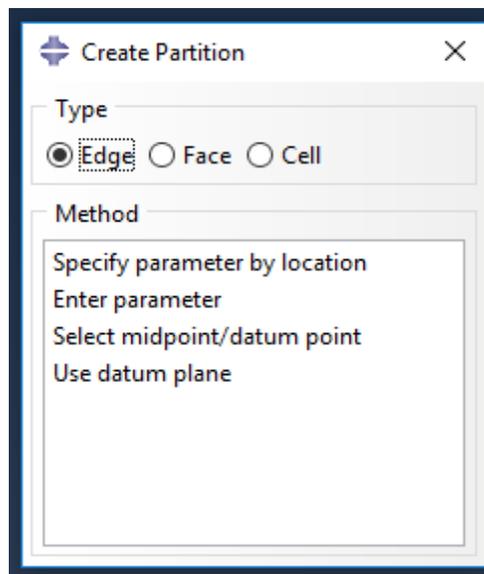


Figura 4.7: Forma de realizar la partición.

Se elegirá la opción “Edge” (Eje) y “Enter parameter”. Una vez seleccionadas estas opciones, en el cuadro de comandos aparece un mensaje para que se seleccione el eje sobre el que se realizará la partición. Poniendo el cursor sobre una de las aristas longitudinales, ésta se pondrá de color naranja, se hace click en ella para seleccionarla y pasará a color rojo. Se pincha en “Done” y de nuevo en el cuadro de comandos aparece un mensaje para introducir el parámetro. Por ejemplo, se dividirá la viga en 11 partes ficticias de las cuales sólo interesa la central, que es donde se mallará más fino. Dejando 5 partes a la derecha, hay que expresar el parámetro en tanto por uno, por lo

que se introducirá un valor de $5/11=0.4545$. En la viga aparece un punto en color amarillo en el lugar introducido. A continuación, en el mismo cuadro de dialogo anterior, se selecciona la opción “Cell”, “Define Cutting Plane” y en el cuadro de comandos aparecen varias opciones sobre cómo se quiere especificar el plano. Se hace click en “Point & Normal”, se selecciona el punto amarillo mencionado anteriormente y después una dirección normal al plano buscado, en este caso, la misma de la arista seleccionada previamente. Por último, se pincha en “Create Partition” dentro del cuadro de comandos y en la viga aparecerá una línea que separa la viga en dos partes de forma ficticia.

El proceso se repite para la segunda partición, pero en este caso el parámetro que se debe introducir es $1/6=0.1667$ ya que, de las 6 partes ficticias restantes, hay que realizar la partición en la más cercana a la anterior.

El resultado debe ser similar al siguiente (Figura 4.8):

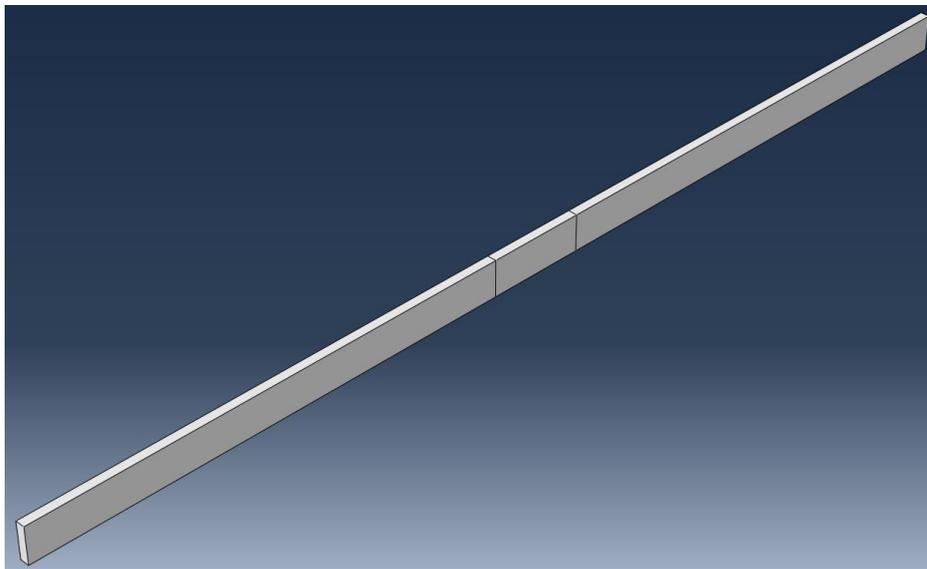


Figura 4.8: Particiones realizadas en la viga.

- **MÓDULO PROPERTY**

En este módulo se asigna a la viga las propiedades del material deseado, en este caso, acero. Para ello se pincha en “Create Material” y aparecerá un cuadro de diálogo (Edit Material) en el que es necesario introducir el nombre del material, su Módulo de Young y el coeficiente de Poisson. Para poder introducir estos datos se pincha en “Mechanical”, “Elasticity”, “Elastic” y aparecerá una tabla en la parte inferior del cuadro de diálogo donde se introducirán los valores de 200000 (MPa) para el módulo de Young y 0.29 (adimensional) para el coeficiente de Poisson (Figura 4.9):

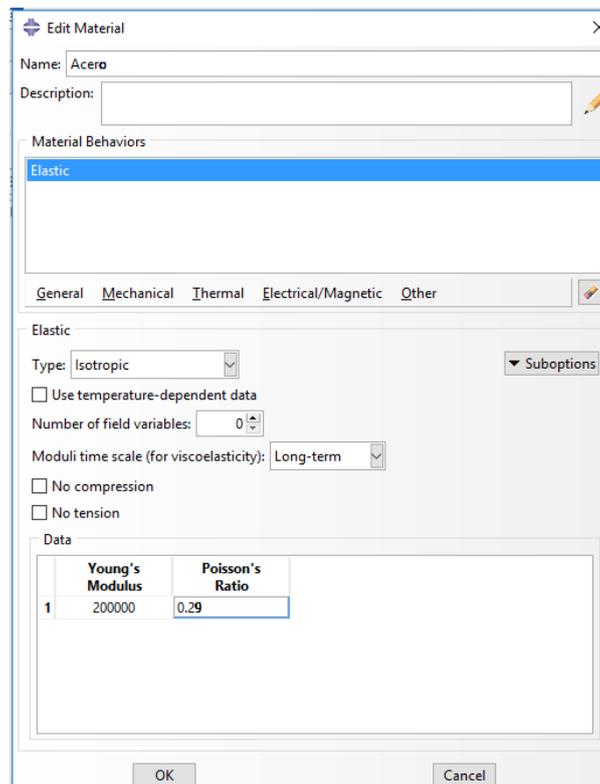


Figura 4.9: Características del material.

Después, se pincha en “OK” para cerrar el cuadro.

Estos datos son válidos para el análisis elástico de la viga. Más tarde se explicará cómo introducir los datos para el análisis elasto-plástico.

El siguiente paso es crear una sección. Se hará pinchando en el icono “Create section” y aparecerá otro cuadro de diálogo donde se dejarán las opciones por defecto (Category: Solid; Type: Homogeneous). Para cerrar el cuadro, pinchar en “Continue”. Aparecerá un segundo cuadro de diálogo en que se asignará a la sección creada el material que hemos introducido anteriormente. Pinchando en el desplegable, aparecerá el material Acero. Se selecciona y se pincha en “OK”.

El tercer paso de este módulo es asignar el material a la sección creada. Se pincha en el icono “Assign Section” y en el cuadro de comandos, Abaqus nos dirá que hay que seleccionar las regiones a las que será asignada la sección. Para ello, hay que pinchar con el cursor en cualquier parte de la ventana de trabajo y arrastrar sin soltar hasta que toda la pieza quede dentro del recuadro creado. Se sabe que está seleccionada toda la viga cuando Abaqus muestra todas sus aristas en rojo. Posteriormente, se pincha en “Done” y aparecerá de nuevo un cuadro de diálogo (Edit Section Assignment) con un desplegable para elegir la sección creada (Figura 4.10):

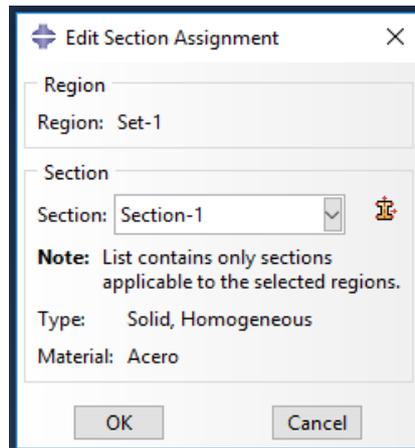


Figura 4.10: Asignar la sección a la viga.

Tras pinchar en “OK”, aparecerá la viga en un tono verde claro, lo cual indica que el proceso se ha realizado correctamente.

- MÓDULO ASSEMBLY

En este módulo se crean y ensamblan las *instances* (subdominios que componen el problema). En este caso sólo tenemos una única pieza por lo que bastará con pinchar en el icono “Create Instance”. Aparece un cuadro de diálogo (Create Instance) como el siguiente (Figura 4.11):

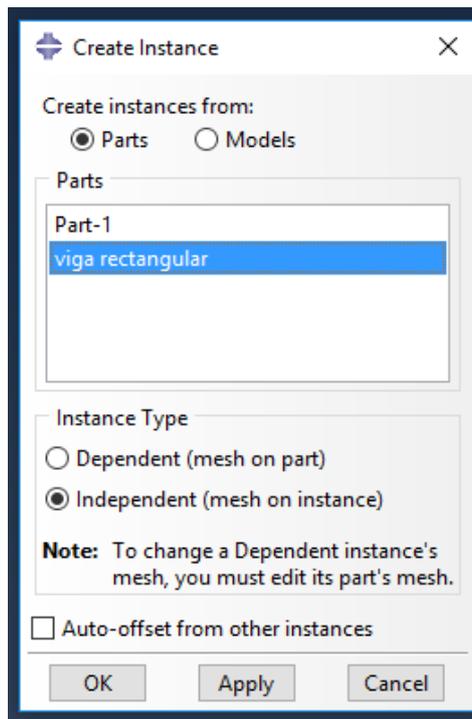


Figura 4.11: Create Instance.

Se elegirá la opción de Independent (mesh on instance) para evitar problemas a la hora de realizar el mallado con distinto tamaño en las diferentes particiones.

- MÓDULO STEP

En este apartado se define la metodología de análisis y se pueden realizar cambios como, por ejemplo, tener en cuenta los efectos no lineales (NLgeom) o variar los pasos de integración.

También se pueden guardar y utilizar los resultados. Algunas de las variables se seleccionan por defecto (Field Output e History output) pero otras las puede variar el usuario según las necesidades.

El primer paso es pinchar en el icono “Create Step”. Aparecerá un cuadro de diálogo (Create Step) en el que se dejarán todas las opciones por defecto (Static, General) y se presiona en “Continue”. De nuevo salta un cuadro de diálogo (Edit Step) como el siguiente (Figura 4.12):

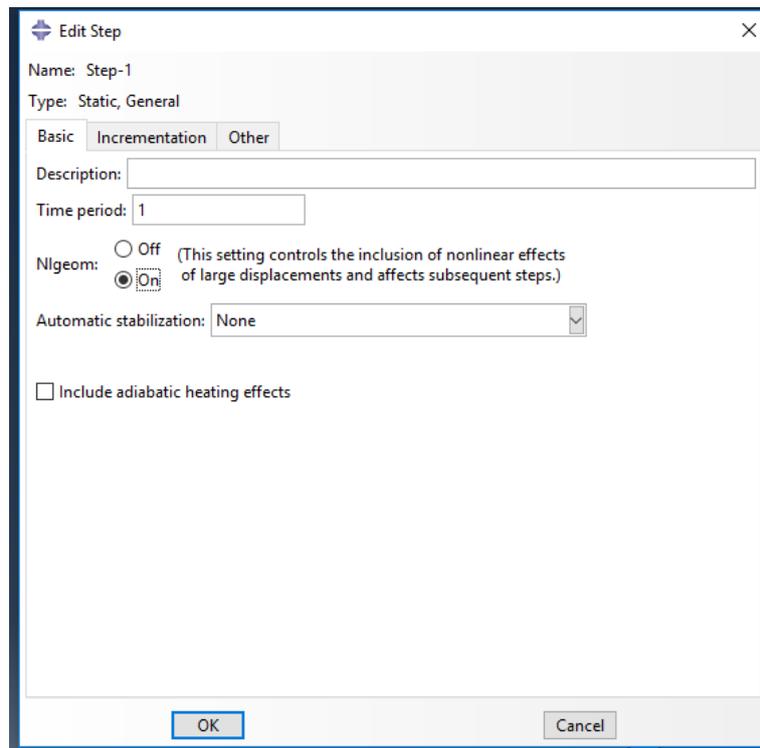


Figura 4.12: Edit Step.

Aquí, se pulsará la opción de tener en cuenta los efectos no lineales (NLgeom, On) para que la aproximación sea más precisa. Se pulsa “OK” para terminar con el módulo.

- MÓDULO LOAD

En este módulo se introducirán las cargas y las condiciones de contorno que afectarán a la viga de estudio.

Para crear la carga distribuida, se pincha en el icono “Create Load” y Abaqus muestra el siguiente cuadro de diálogo (Figura 4.13):

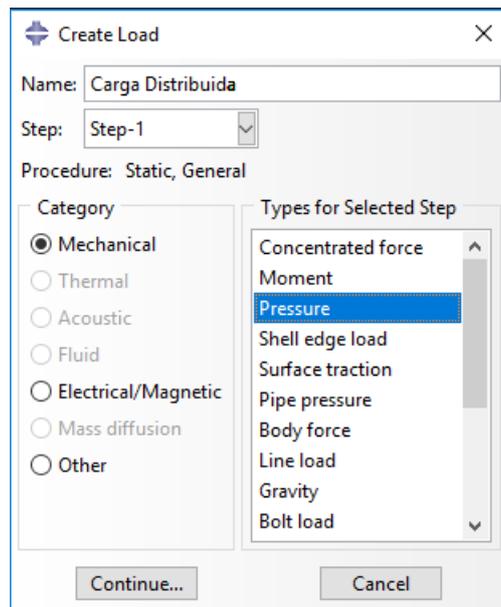


Figura 4.13: Create Load.

Se nombrará a la carga como Carga Distribuida, la opción “Mechanical” dentro de “Category” se dejará por defecto y en el tipo de fuerza elegimos “Pressure”. Para cerrar el cuadro de diálogo se hace click en “Continue” y el programa reclama las caras en las que será aplicada la fuerza. Con el botón del teclado “Shift” apretado se selecciona la cara superior de la viga (anteriormente dividida en tres superficies) de forma que estas superficies se muestren en rojo. Haciendo click en “Done”, aparecerá un nuevo cuadro de diálogo (Edit Load) en el que hay que introducir la magnitud de la carga aplicada. Para el problema en 2D, esta carga sería de $18,4\text{kN/m}$ ($=18,4\text{N/mm}$) pero para aplicarlo a una superficie hay que dividirlo entre el ancho de la sección (35mm) obteniendo un resultado de 0.5257 MPa . Se pincha en “OK” y en la viga aparecerán unas flechas en sentido vertical y hacia abajo que indican que la carga se ha aplicado de forma correcta (Figura 4.14):

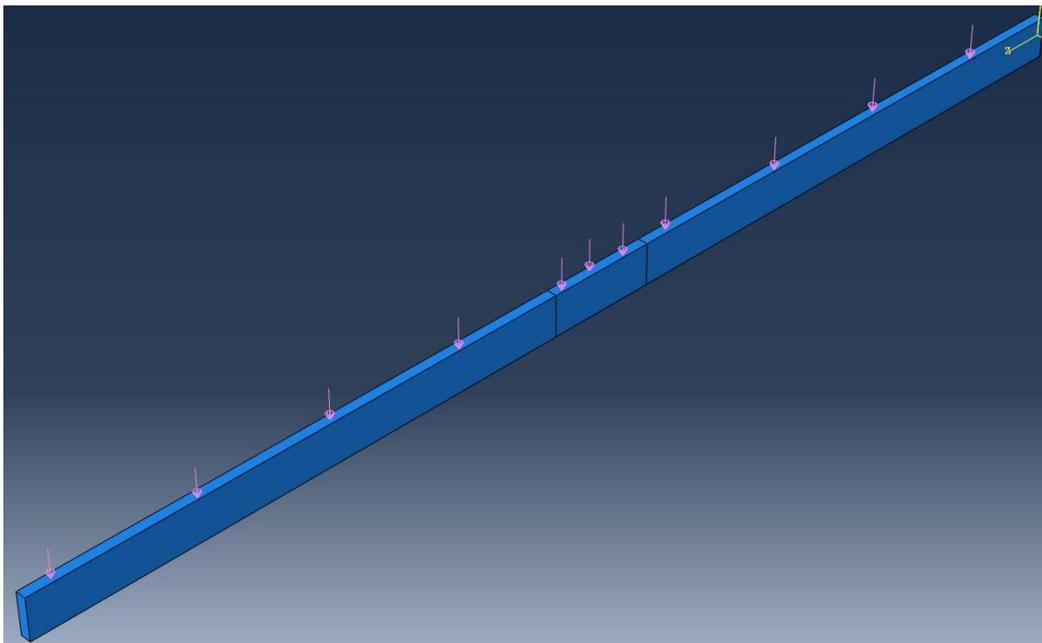


Figura 4.14: Carga aplicada en la viga.

El siguiente paso es introducir los apoyos sobre los que se sustenta la viga. En este caso, existirán dos apoyos, uno en cada extremo de la viga. Para crearlos, se pulsa sobre el icono “Create Boundary Condition” y se mostrará el siguiente cuadro de diálogo (Figura 4.15):

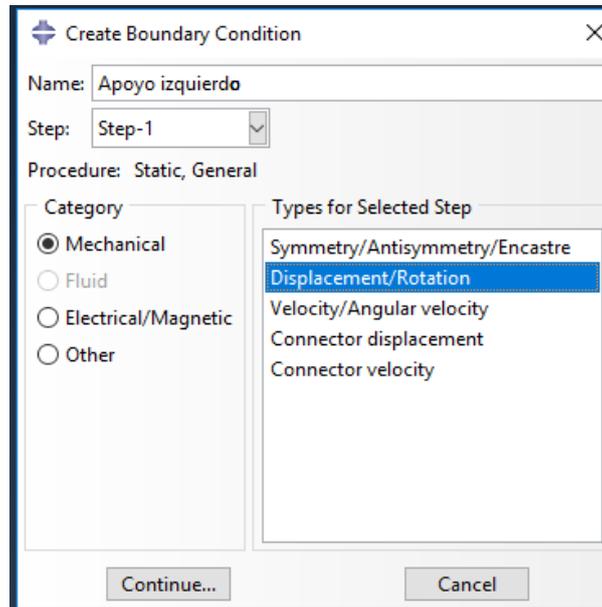


Figura 4.15: Condiciones de apoyo.

Al pinchar en “Continue”, en el cuadro de comandos Abaqus pide que se seleccione el lugar en el cual se colocará el apoyo. Para ello, se amplía la imagen de la viga con el zoom y se pincha sobre la arista inferior de la cara lateral izquierda de la viga. Al pinchar en “Done”, aparece otro cuadro de diálogo (Edit Boundary Condition) para restringir el desplazamiento o el giro en los ejes que se desee (Figura 4.16):

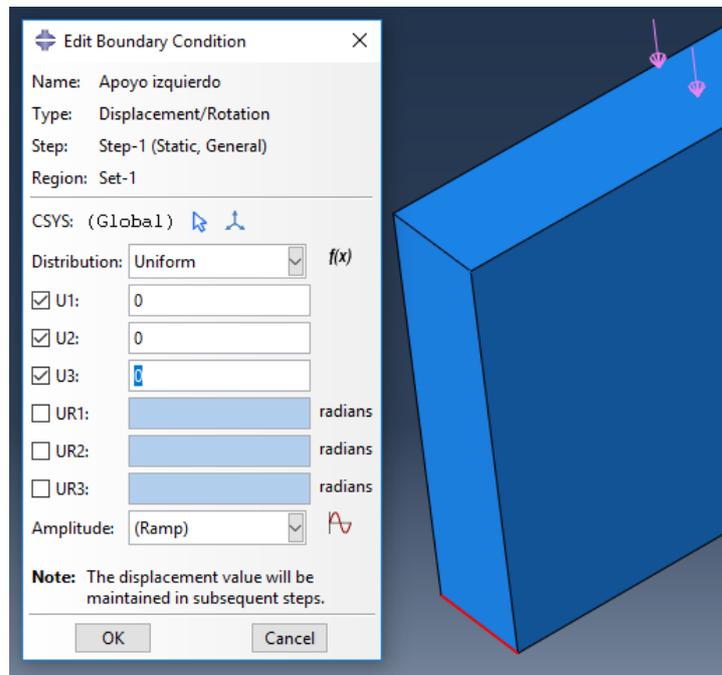


Figura 4.16: Restricción de desplazamientos del apoyo izquierdo.

Para el apoyo izquierdo se restringirá el movimiento en las tres direcciones del espacio (U1, U2 y U3) aunque en la dirección X no haya posibilidad de desplazamiento. En rojo aparece la arista seleccionada para el apoyo.

Para el apoyo derecho se repetirá el proceso de forma similar y se restringirá el desplazamiento en Y y en Z (U2 y U3).

El resultado de la viga una vez creados fuerzas y apoyos es el siguiente (Figura 4.17):

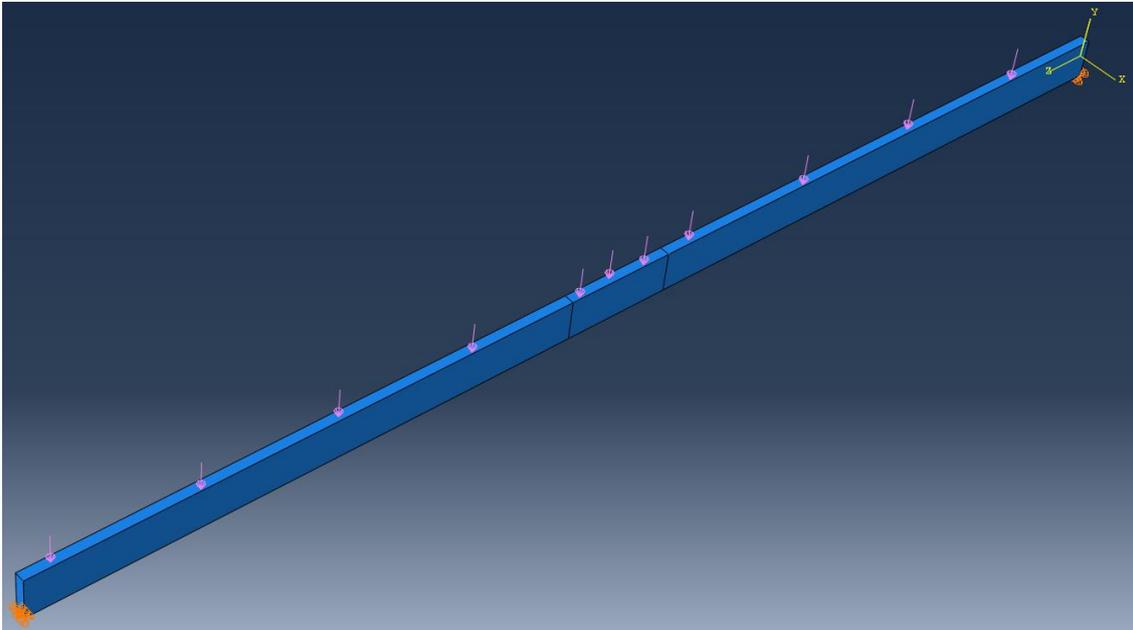


Figura 4.17: Diseño final de la viga.

- MÓDULO MESH

Para poder empezar a trabajar en el módulo Mesh, es necesario que la viga aparezca en un color verde intenso, lo cual significa que se está trabajando en forma correcta (en la parte superior de la ventana de trabajo debe estar seleccionada la opción "Assembly").

El primer paso es pinchar en el icono "Seed Part Instance" para que aparezca un cuadro de diálogo (Global Seeds). En este cuadro (Figura 4.19) se indicará al programa el tamaño de la malla para toda la pieza. En este caso, no interesa que sea fina porque se generarían demasiados nodos y el programa los tiene limitados a 250000 (Figura 4.18):

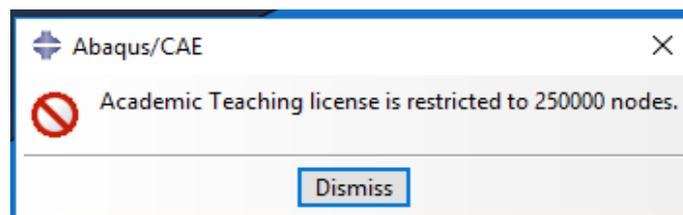


Figura 4.18: Limite de nodos.

Es por esto que se puede dejar el tamaño que viene por defecto (200) y que aparezca una malla tosca.

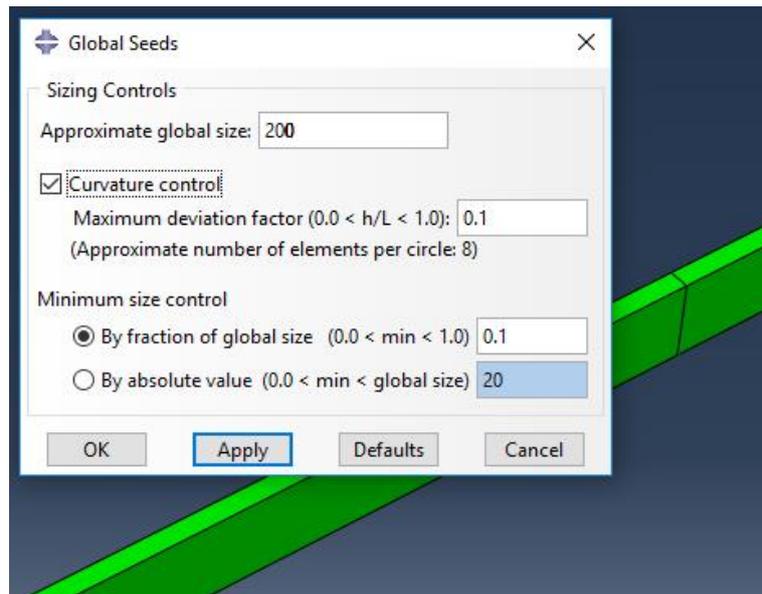


Figura 4.19: Tamaño de malla general.

Al hacer click en “Apply”, en la viga aparecen unas marcas blancas que indican por donde se trazará la malla de la pieza. Seguidamente, hay que pinchar en el icono “Mesh Part Instance” y en el cuadro de comandos aparecerá un mensaje para confirmar si se quiere mallar la pieza. Al presionar en “Yes”, la viga aparecerá con la malla introducida (Figura 4.20):

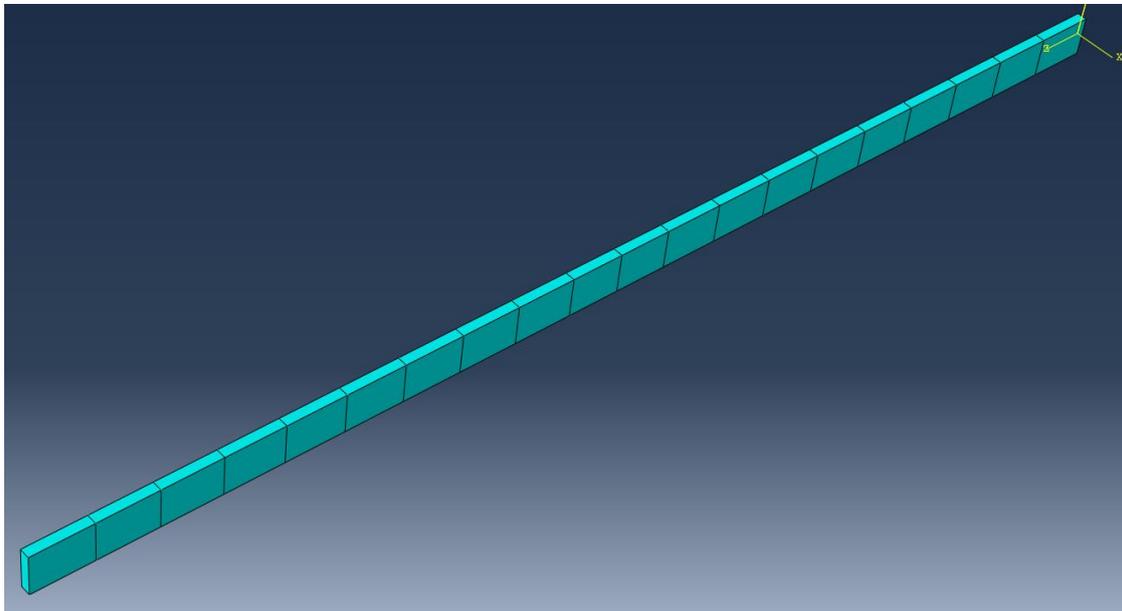


Figura 4.20: Mallado inicial.

Para afinar la malla en la zona central, se utiliza la herramienta “Replace Selectec”. En el cuadro de comandos se puede elegir qué entidad se quiere seleccionar mediante un desplegable. Se escoge la opción “Cells” y se coloca el cursor sobre la zona central de la viga de forma que aparezcan únicamente las aristas de celda central. Se pincha en dicha celda y a continuación en “Done”. Abaqus mostrará ahora sólo la parte

seleccionada para poder introducir después un tamaño de malla mucho menor. Para ello, se hace click sobre el icono “Seed Edges” y se selecciona toda la parte central. Cuando estén todas las aristas en rojo, se hace click en “Done” y aparecerá un nuevo cuadro de diálogo (Local Seeds) en que se indicará un tamaño de malla de 2. Para mallar realmente la viga, se pincha en el icono “Mesh Region” y se selecciona la parte que se desea mallar y se vuelve a repetir para el resto de la viga. De esta forma conseguimos dos tamaños diferentes de malla (Figura 4.21):

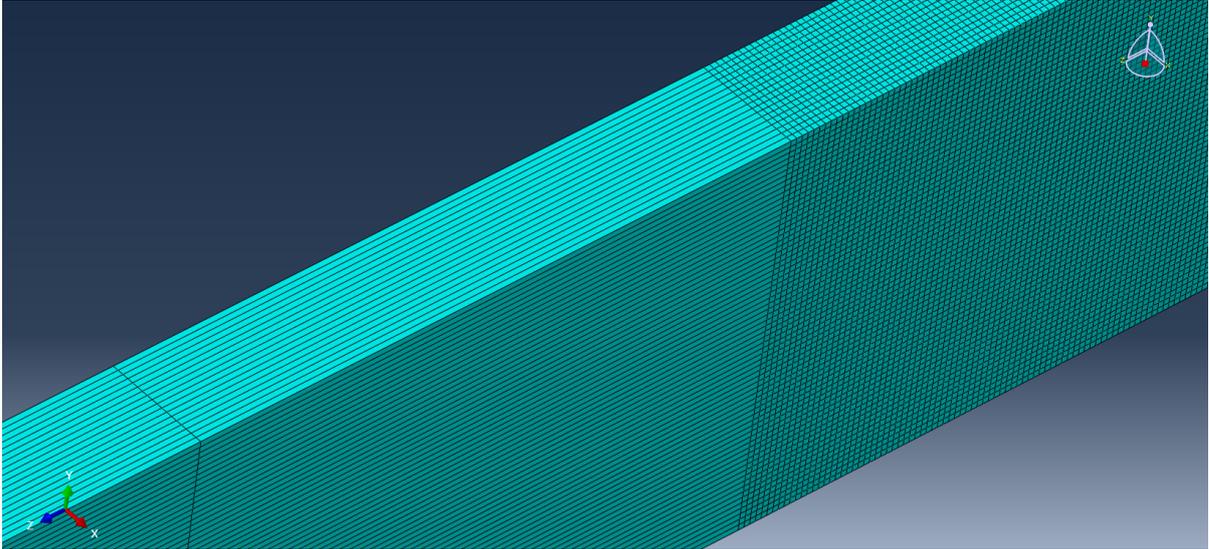


Figura 4.21: Dos tipos de densidad de malla.

- MÓDULO JOB

En este módulo es donde se ejecutará el análisis de la viga. Para ello, se pincha en el icono “Create Job” y aparecerán dos cuadros de diálogo (Edit Job) en los que se aceptarán todas las opciones por defecto. Después, se pincha en el icono “Job Manager”, en el cual aparecerá el Job recién creado y pinchando en “Submit” el procesador comenzará a realizar el análisis nodo a nodo (Figura 4.22):

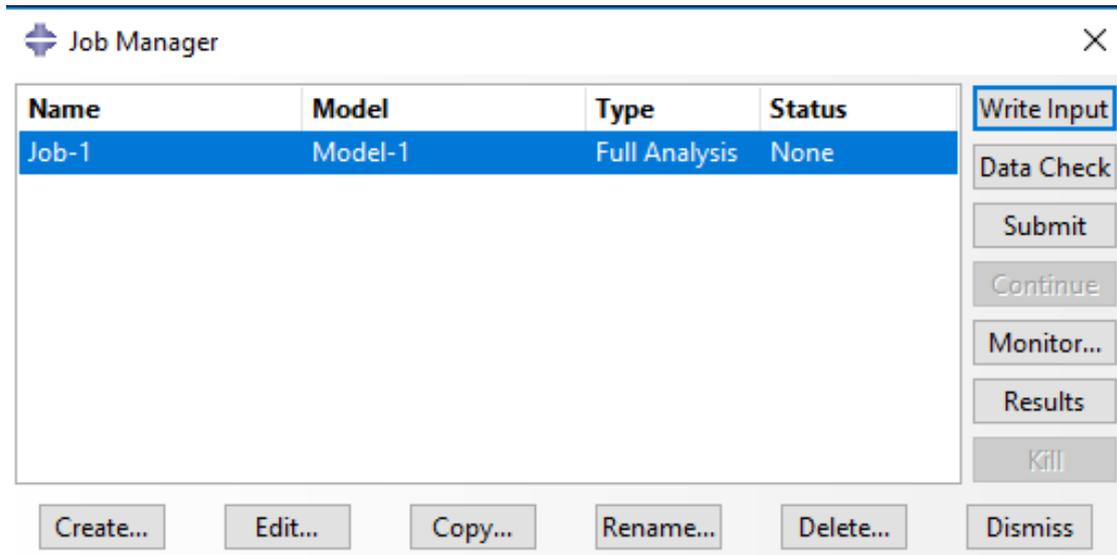


Figura 4.22: Ejecución del análisis.

En función de las tensiones y deformaciones que aparezcan en la viga con todos los datos introducidos, el proceso puede durar varios minutos hasta que se realice por completo. Cuando debajo de "Status" aparezca "Completed", se tendrá la certeza de que el análisis se ha realizado con éxito. Para visualizar los resultados, basta con pinchar en "Results" y automáticamente Abaqus cambiará al módulo "Visualization".

- MODULO VISUALIZATION

En este módulo se puede observar, mediante una escala de colores, el estado de tensiones al que se ha sometido la viga una vez aplicadas las cargas. Abaqus ofrece la opción de visualizar la viga deformada o sin deformar y, además, para poder comparar ambas, también puede mostrar ambos estados de forma simultánea. Para ello basta con dejar el cursor apretado en el icono "Plot Contours On Undeformed Shape" y aparecerán las tres opciones mencionadas.

El programa también ofrece la posibilidad de comprobar las tensiones en todas las direcciones y con diferentes criterios de plastificación (Tresca, Von Mises). En el caso de estudio, la tensión relevante es la S33. Para mostrarla, se pincha en el desplegable que hay en la barra de herramientas y seleccionar S33. El resultado para la viga introducida (sin deformar) en la zona central es el siguiente (Figura 4.23):

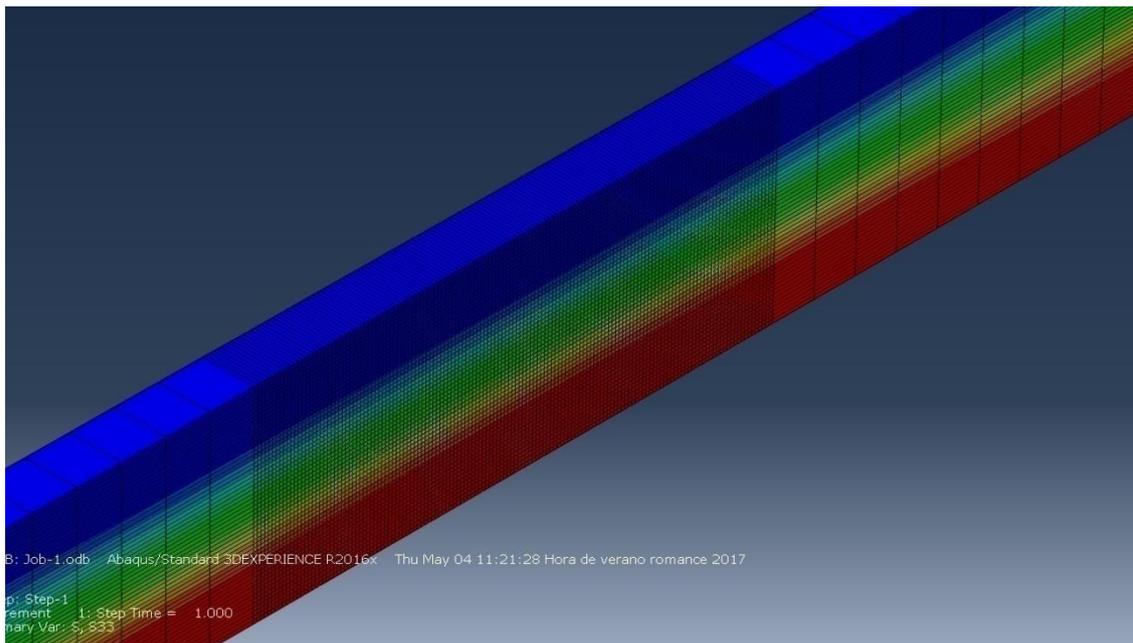


Figura 4.23: Estado tensional de la viga.

Se puede apreciar que las tensiones están repartidas de forma homogénea por la viga, lo cual indica que los resultados son correctos. Mediante la escala de colores también quedan definidas las zonas en las que la pieza ha plastificado. En azul intenso se representan las zonas en las que la viga ha plastificado por compresión (zona superior) mientras que el rojo intenso indica las zonas que han plastificado por tracción (zona inferior).

El software también permite la opción de estudiar una sección concreta. En este caso se estudia la sección central, ya que es la que mayor momento flector soporta y por

tanto en la que mayores tensiones se generan. Pinchando en el icono "Activate/Deactivate View Cut" es posible elegir la sección concreta que se desea estudiar. Primero se pincha en el icono "View Cut Manager" y aparecerá un cuadro de diálogo en que hay que seleccionar el eje Z y la distancia a la que se quiere realizar el corte, para este caso 2000 mm, justo el centro de la viga (Figura 4.24):

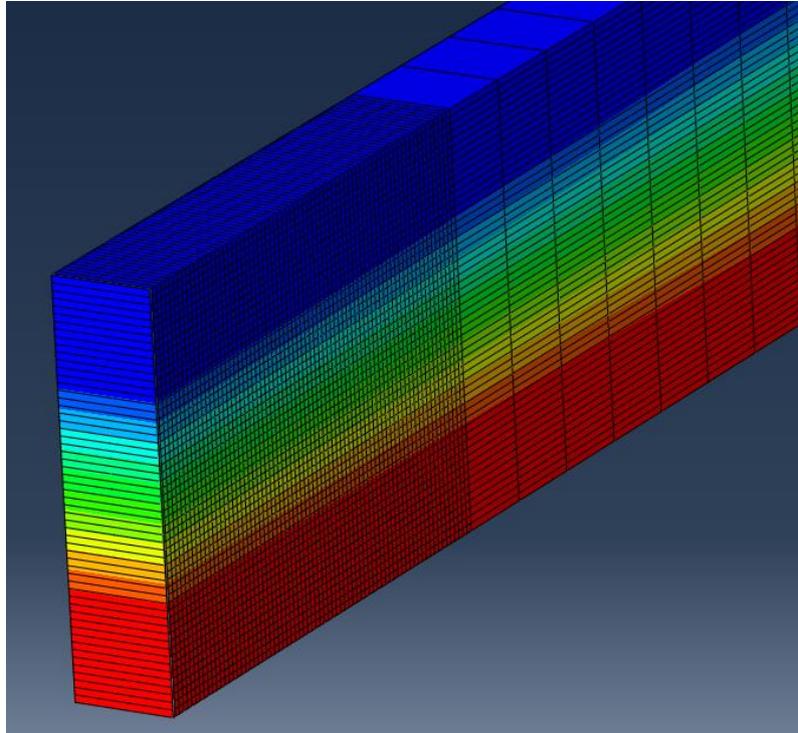


Figura 4.24: Sección central de la viga.

Para importar los datos desde Abaqus y poder procesarlos en Excel, hay que realizar el siguiente proceso:

- Pinchar en el icono "Query Information" y aparecerá un nuevo cuadro de diálogo (Query) como el siguiente (Figura 4.25):
- En "General Queries" se pincha en "Node" y en "Visualization Module Queries" se pincha en "Stress Linearization". De esta forma se indica al programa que se quieren obtener todos los valores de la tensión entre dos nodos concretos.
- Nuevamente vuelve a saltar otro cuadro de diálogo (Stress Linearization) en el que se elegirán las opciones que corresponden (Figura 4.25).
- En la pestaña "Basic" se introduce el nombre con los datos necesarios. Después, se pincha en el icono del cursor para seleccionar los nodos entre los cuales se quieren extraer los valores de las tensiones (desde un nodo en la cara superior hasta otro alineado en la cara inferior). En "Model Shape" se selecciona "Undeformed".
- En "Number Of Intervals On Stress Line" se introducirá 280. De esta forma, se obtendrán valores de la tensión cada 0,5 mm ya que el canto de la viga es de 140mm.
- Para importar los datos, Abaqus crea un archivo de texto con extensión ".rpt" en el que quedarán recogidos todos los valores de la tensión.

- En la pestaña “Computations” hay que dejar seleccionados únicamente los valores de S33 ya que el resto no son interesantes para el estudio.
- Para terminar, se pincha en “Apply” para generar el archivo de texto. Abaqus también mostrará una gráfica representando los valores.

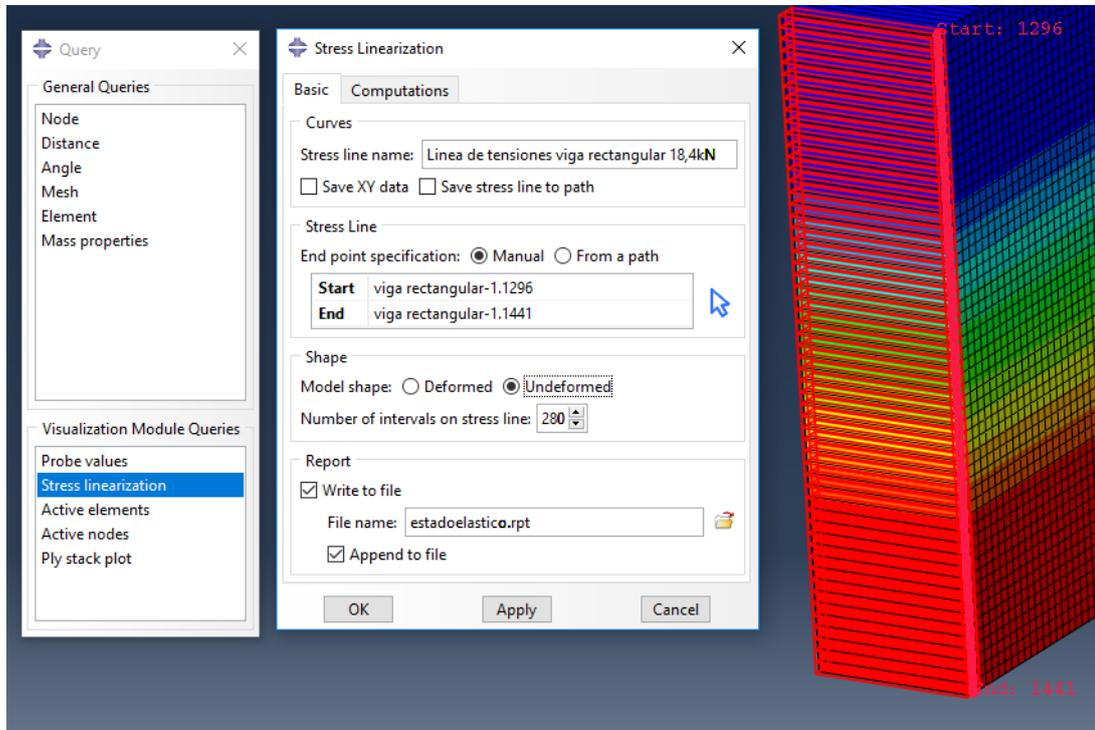


Figura 4.25: Línea de tensiones.

El siguiente paso es importar los valores desde el archivo de texto generado a un procesador de datos, Excel, en este caso. Será necesario cambiar algunos ajustes predeterminados del panel de control para que los datos sean importados de forma correcta.

El proceso definido anteriormente lleva a la obtención de los datos relativos a estado elástico de la viga. Para conseguir los datos correspondientes al estado elasto-plástico basta con añadir, dentro del módulo Property, la tensión a la que plastificará el material y la deformación que sufrirá a partir de dicha tensión. Por tanto, en el módulo mencionado, se pincha en el icono “Material Manager”, tras lo cual, aparecerá un cuadro de diálogo (Figura 4.26) en el que se encuentra el material definido primeramente, el acero:

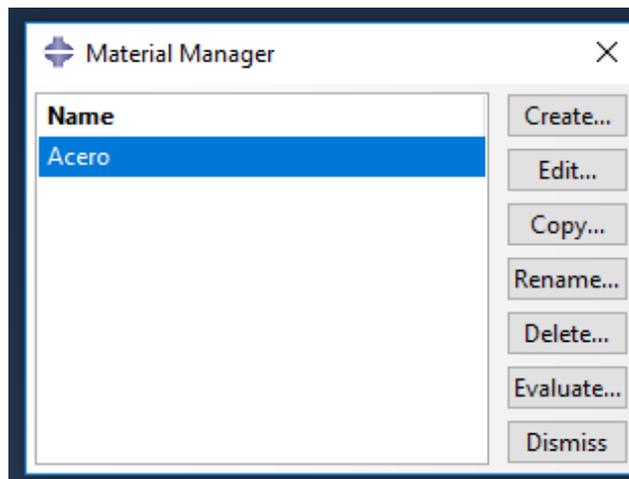


Figura 4.26: Material Manager.

Pinchando en “Edit”, Abaqus vuelve a abrir el cuadro “Edit Material” (Figura 4.27). De nuevo, hay que pinchar en “Mechanical” pero esta vez se eligirá “Plasticity”, “Plastic” y aparece en la parte inferior una tabla en la que hay que introducir los valores a partir de los cuales la pieza empieza a sufrir deformaciones permanentes. En este caso se indicará que para una tensión de 240 MPa la deformación es 0 y que para una tensión de 241 MPa la deformación toma un valor del 2%:

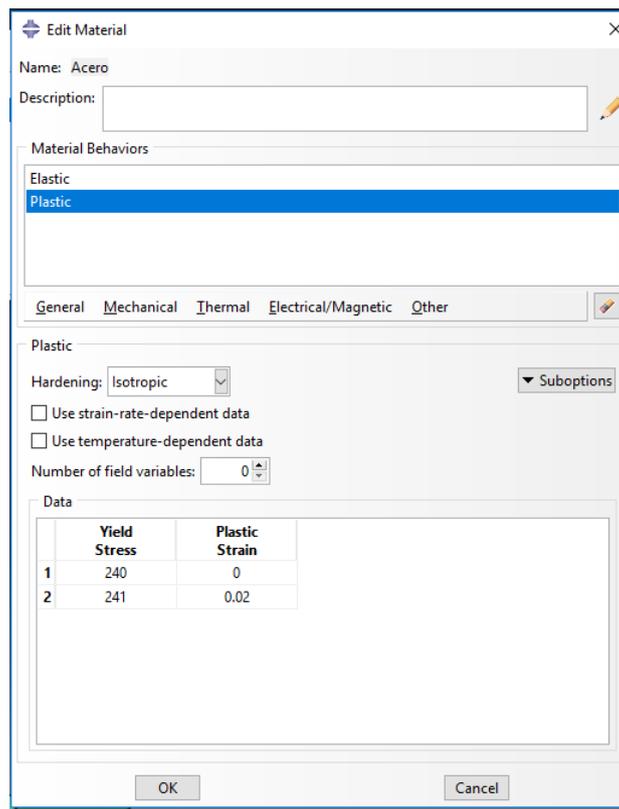


Figura 4.27: Datos para el comportamiento elastoplástico.

Una vez que se han introducido estos valores, hay que volverlos a asignar a la sección como ya se explicó para el caso elástico. En el resto de módulos no hay que realizar más modificaciones. Para obtener la línea de tensiones, hay que volver a ejecutar el análisis en el módulo job y volver a importar los valores obtenidos de la forma ya indicada.

4.4.2 VIGA ISOSTÁTICA CON PERFIL I.

Las condiciones de apoyo y carga de esta viga serán las mismas que en la rectangular, por lo que el diseño de la viga únicamente varía respecto a la anterior en el módulo Part.

Hay que seguir los pasos ya indicados hasta que aparezca el “Sketch”. Se diseñará una viga con un perfil I (Figura 4.28) prácticamente igual al perfil normalizado IPE-160. Se ha elegido este perfil ya que su inercia es la más parecida a la de la viga de sección rectangular. La diferencia entre el perfil que se diseñará en Abaqus y el perfil normalizado es el área correspondiente a las uniones entre el alma y las alas de la viga. Esto provoca que el área de la sección con la que se va a trabajar sea ligeramente menor que la que tendría el perfil normalizado y, por lo tanto, el momento de inercia también será algo menor ($8.69E6 \text{ mm}^4$ del perfil normalizado frente $8.346E6 \text{ mm}^4$ del perfil utilizado).

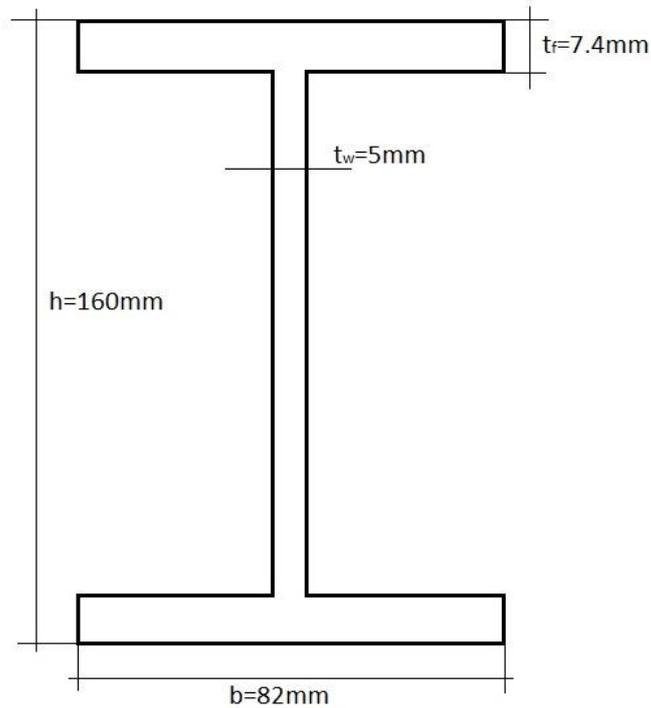


Figura 4.28: Sección acotada de la viga con perfil I.

Momento de inercia del perfil:

$$I = \frac{82 * 160^3}{12} - \frac{(82 - 5) * (160 - 2 * 7.4)^3}{12} = 8.346 * 10^6 \text{ mm}^4$$

Las coordenadas que hay que introducir para que la sección quede centrada en el “sketch” son las siguientes:

(-41,80); (41,80); (41,72.6); (2.5,72.6); (2.5,-72.6); (41,-72.6); (41,-80); (-41,-80); (-41,-72.6); (-2.5,-72.6); (-2.5,72.6); (-41,72.6); (-41,80).

Tras introducirlas en el orden indicado, Abaqus mostrará un perfil similar al de la figura 4.29:

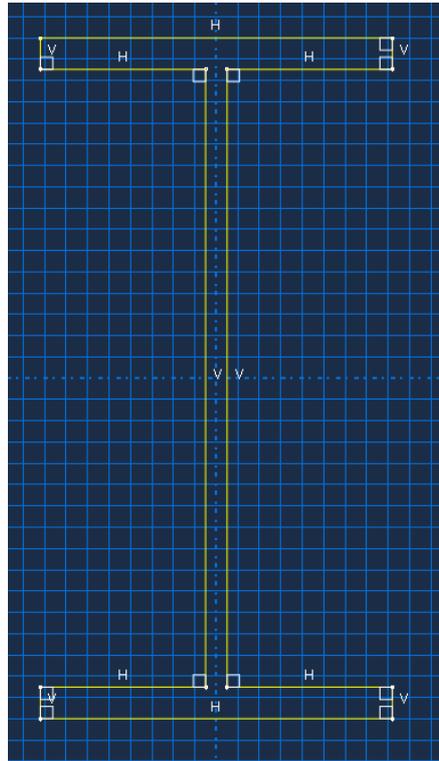


Figura 4.29: Sección dibujada en el "Sketch".

Tras la extrusión de la sección, se seguirá el mismo proceso que para el caso de la viga con sección rectangular, ya que ambas tendrán las mismas condiciones de apoyo. Hay que tener en cuenta que el ancho de la sección es diferente respecto a la viga rectangular. Esto significa que aunque la carga lineal aplicada sea la misma, la fuerza de presión que se introduce en Abaqus será diferente, siendo en este caso $(18.4 \text{ N/mm})/82\text{mm}=0.2244\text{MPa}$. La última diferencia con respecto a la viga anterior es el límite elástico. Para este caso se tomarán 320 MPa.

El diseño final será (Figura 4.30):

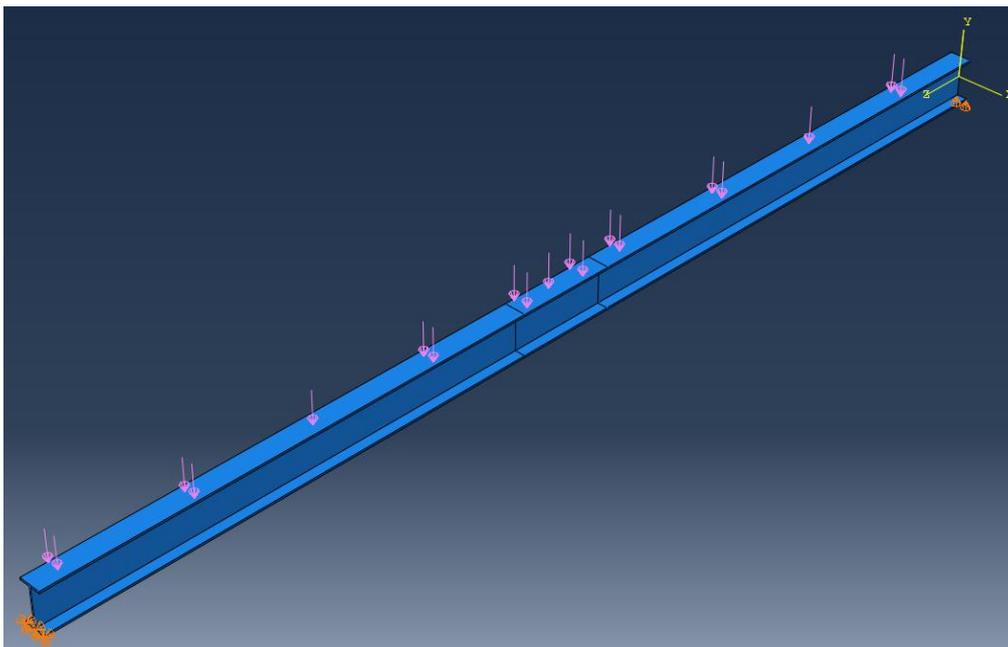


Figura 4.30: Diseño final de la viga.

4.4.3 VIGA EN MÉNSULA CON PERFIL I.

En este ejemplo se diseñará una viga con perfil I empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho. La carga lineal aplicada será la misma que en los casos anteriores (18.4 KN/m) pero su longitud será la mitad (2000 mm) para que los momentos generados no sean excesivamente grandes. Es por esto que las únicas variaciones respecto al primer ejemplo se darán en el módulo Part y en el módulo Load.

Dentro del módulo Part, se diseñará el mismo perfil que ya se explicó para el caso de la viga isostática rectangular, con la diferencia de que a la hora de extrusionarla se introducirá una longitud de 2000 mm. Además, la partición para poder mallar más fino se realizará cerca del empotramiento ya que, como se demostrará más adelante, es donde tienen lugar los mayores momentos. El diseño de la viga es el siguiente (Figura 4.31):

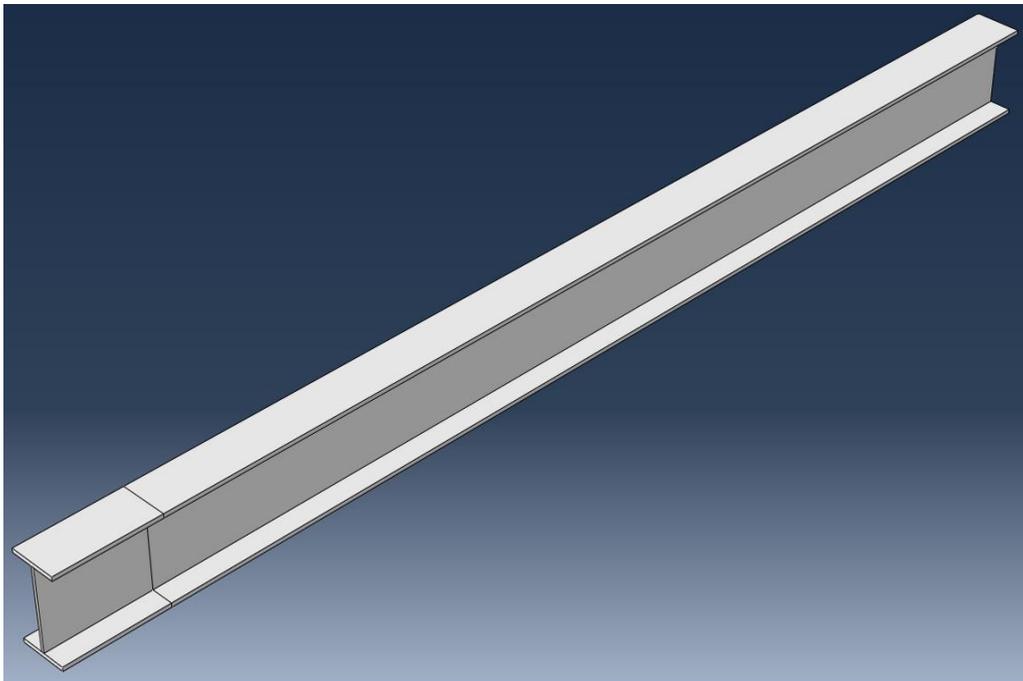


Figura 4.31: Viga con perfil I y la partición realizada en su parte izquierda.

Una vez completados los módulos Property, Assembly y Step de la misma forma que para el primer ejemplo, en el módulo Load se introducirán diferentes condiciones de apoyo. Pinchando en el icono "Create Boundary Condition" aparecerá un cuadro de diálogo (Figura 4.32) en el que se elegirá la opción "Symetry/Antisymetry/Encastre" para indicar a Abaqus que la viga estará empotrada en el extremo izquierdo.

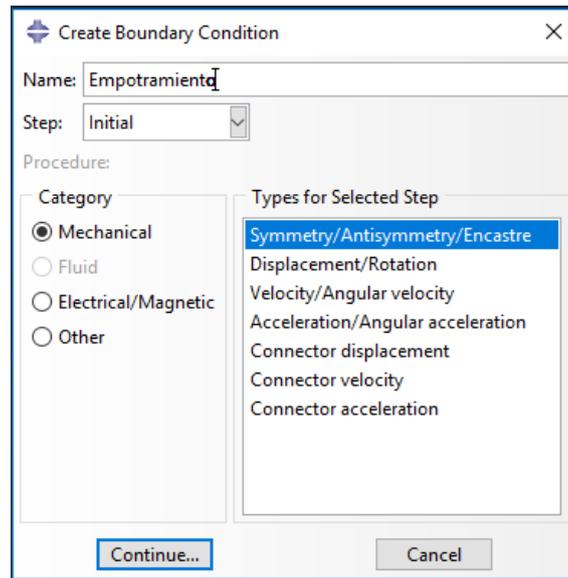


Figura 4.32: Cuadro de diálogo para el empotramiento.

Tras pinchar en “Continue...”, Abaqus pedirá que se indique la cara en la que la viga irá empotrada, en este caso la cara lateral izquierda. Se selecciona dicha superficie, se pincha en “Done” y aparecerá un nuevo cuadro de diálogo (Figura 4.33) en el cual hay que indicar al programa que restrinja desplazamientos y rotaciones en todas las direcciones. Esto corresponde a la última opción de la lista:

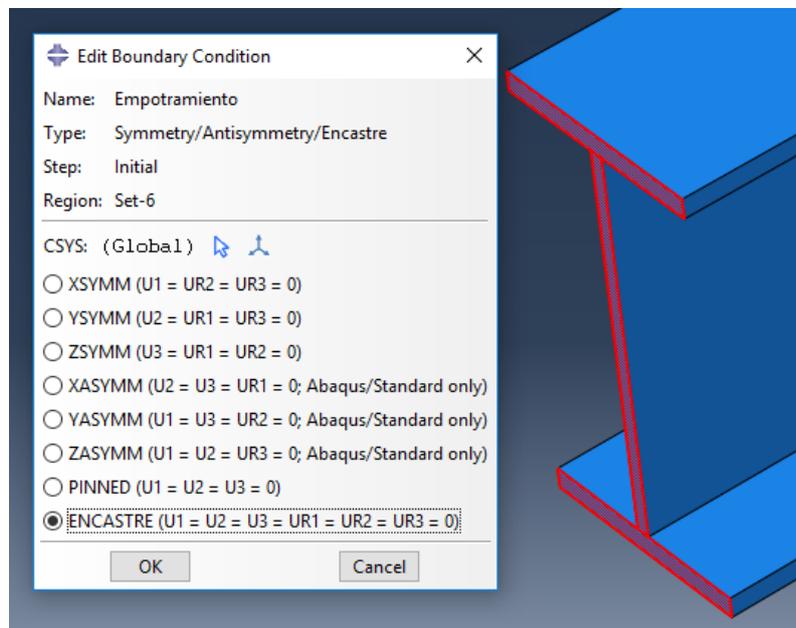


Figura 4.33: Cara del empotramiento seleccionada y opción ENCASTRE elegida.

Haciendo click en “OK”, el software muestra las restricciones en la viga (Figura 4.34):

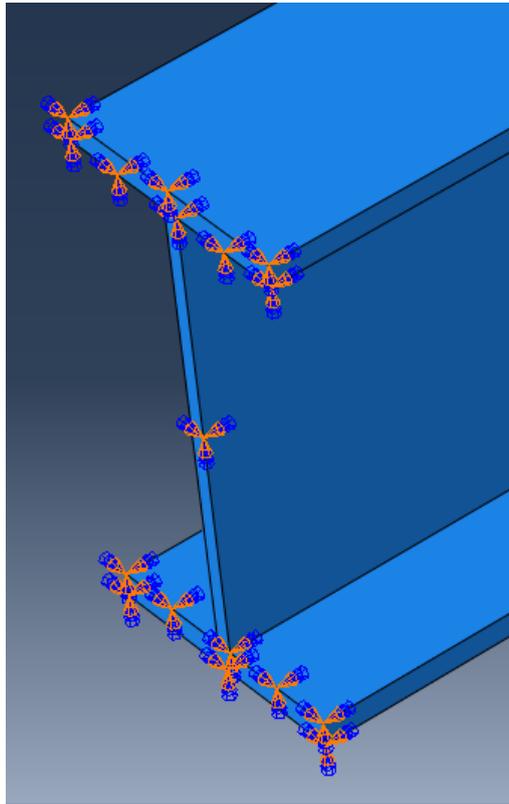


Figura 4.34: Empotramiento en lado izquierdo.

Para terminar en el módulo Load, se introduce el mismo valor de presión que para la viga isostática con perfil I (0.2244MPa). El resultado mostrado por Abaqus es el siguiente (Figura 4.35):

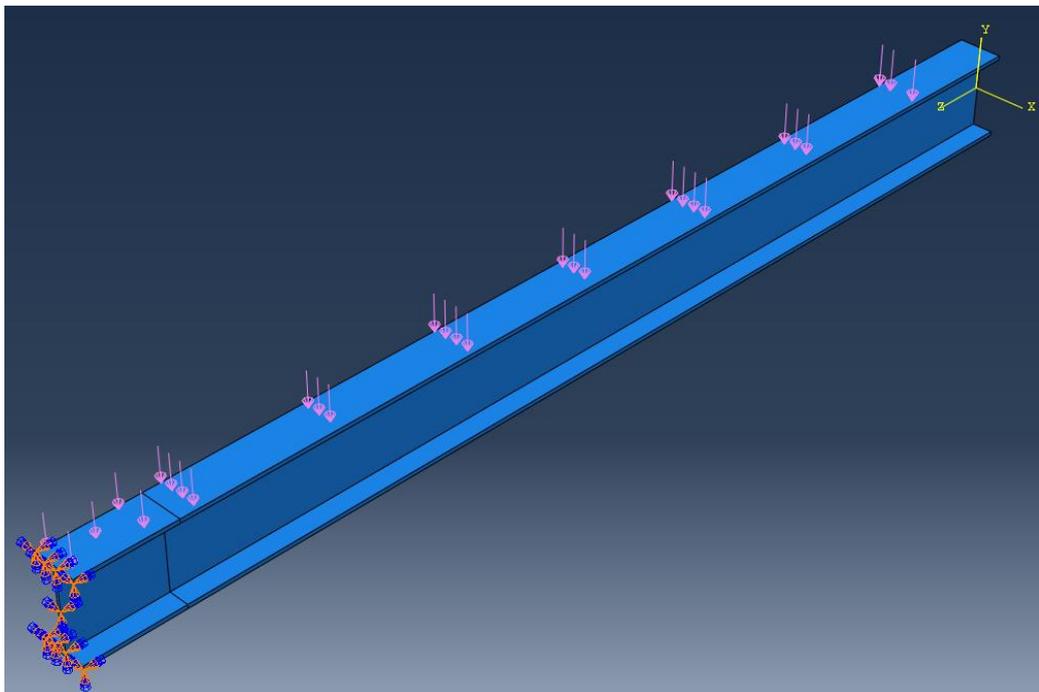


Figura 4.35: Diseño de la viga en ménsula.

4.4.4 VIGA HIPERESTÁTICA RECTANGULAR.

Se diseñará una viga de perfil rectangular igual al del primer ejemplo (35x140 mm²) pero cuyas condiciones de apoyo serán diferentes. En este caso irá empotrada en el lateral izquierdo y simplemente apoyada en el lateral derecho. La carga lineal aplicada también será la misma (18.4 KN/m).

La partición para poder realizar un mayado más fino se hará en la zona del empotramiento.

El diseño de la viga en Abaqus será el siguiente (Figura 4.36):

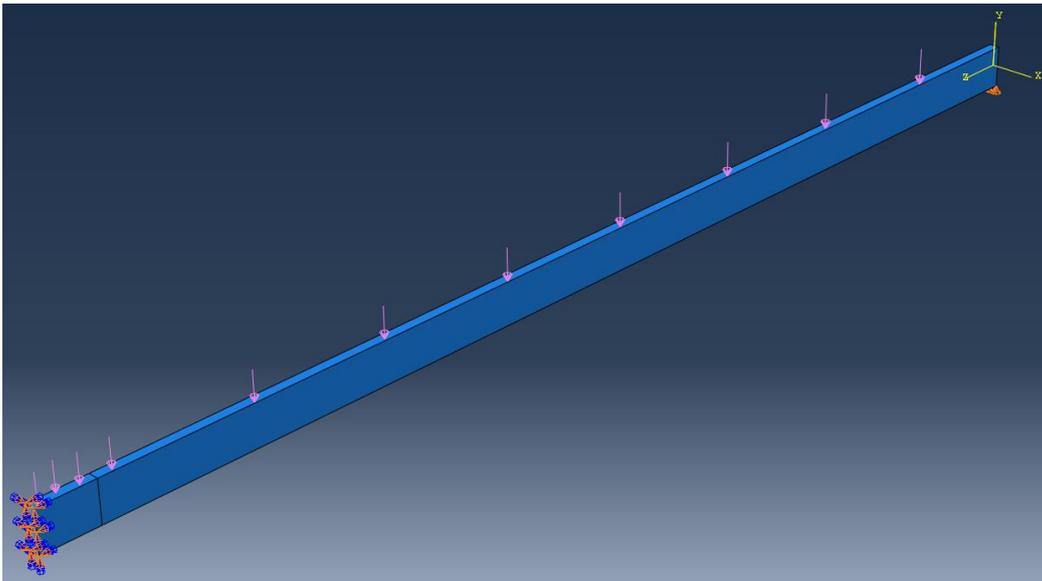


Figura 4.36: Diseño de la viga rectangular hiperestática.

4.4.5 VIGA BIEMPOTRADA CON PERFIL I.

Para este ejemplo, las condiciones de apoyo de la viga consistirán en sendos empotramientos en cada extremo y un apoyo simple central, lo cual puede asemejarse a las condiciones en las que operaría una viga que forma parte de un forjado unidireccional. En cuanto a las cargas, hay que aumentar su magnitud dado que estas condiciones de apoyo hacen que la viga no plastifique si se aplican cargas como las de los ejemplos anteriores. Por ello, se han aplicado una carga lineal de 92 KN/m en vano izquierdo y una carga puntual de 184 KN en el centro del vano derecho.

Para ubicar el apoyo central y la carga puntual habrá que realizar particiones en esos puntos y otra partición más para poder introducir una malla más precisa en la zona donde se crean mayores momentos (empotramiento derecho, demostrado más adelante).

El diseño de la viga quedará (Figura 4.37):

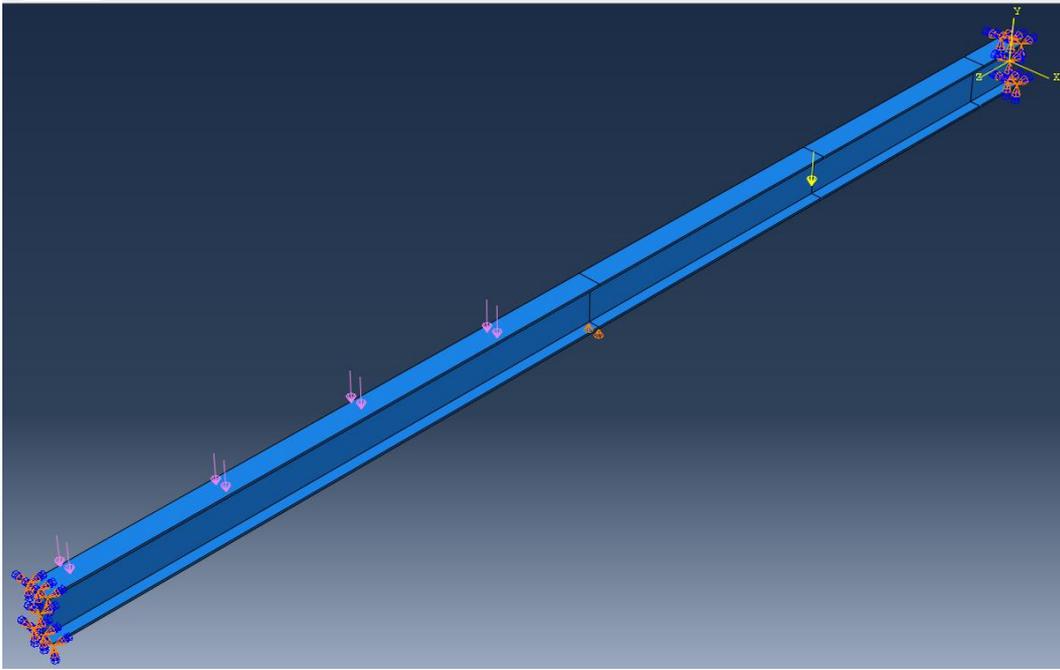


Figura 4.37: Diseño de la viga biempotrada con perfil I.

CAPÍTULO V: RESULTADOS.

En primer lugar, se estudiará de forma analítica el comportamiento de la viga sometida a las solicitaciones indicadas en cada caso y después, se graficarán los resultados para poder compararlos con los obtenidos mediante el software Abaqus.

5.1 VIGA ISOSTÁTICA RECTANGULAR.

5.1.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.

Se dispone de una viga articulada en su extremo izquierdo y simplemente apoyada en su extremo derecho, que está sometida a una carga distribuida y uniforme de 18.4 kN/m. Dicha viga está formada de acero con un Módulo de Young $E=200$ GPa, un coeficiente de Poisson $\mu = 0.29$ y un límite elástico de $\sigma_Y = 240$ MPa. La sección de la viga es rectangular de 35x140 mm² y la separación entre extremos es de $L=4$ m. Determinar las tensiones residuales que aparecerán en la viga al retirar la carga.

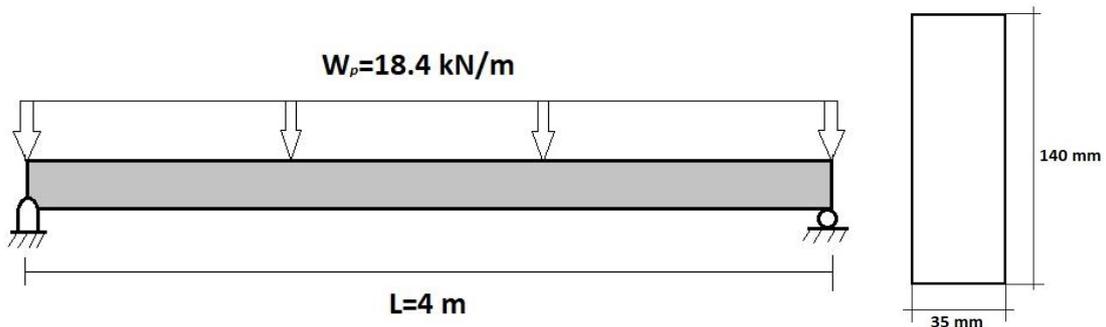


Figura 5.1: Esquemmatización de la viga y su sección.

Momento de inercia de la sección:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{35 \cdot 140^3}{12} = 8.0033 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Dado que en ninguno de los dos extremos existirá momento ya que se trata de una articulación y un apoyo simple, sabemos que el momento máximo tendrá lugar en la sección central. Para calcularlo, basta con analizar la viga aplicando las ecuaciones de la estática ($\sum F$ y $\sum M$) u obtener la fórmula directamente de las tablas de empotramiento perfecto (Método de Cross, se explicará en los siguientes ejemplos) y tendrá un valor de:

$$M_e = \frac{W_p L^2}{8} = \frac{18400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4^2 \text{ m}^2}{8} = 36800 \text{ Nm} = 36.8 \text{ kNm}$$

y, por tanto, la tensión máxima σ_p que soportará la pieza será:

$$\sigma_p = \frac{M_e c}{I} = \frac{36800 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \cdot 70 \text{ mm}}{8003333.3 \text{ mm}^4} = 321.86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 321.86 \text{ MPa}$$

siendo c la mitad de la altura de la viga. Si se sustituye la variable c tomando valores desde -70 mm hasta 70 mm cada 0.5 mm (esto es, para que coincidan los datos que se obtienen de Abaqus), obtendremos todos los valores del rango elástico que después se podrán representar gráficamente:



Gráfica 1: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.

Como se puede observar, el comportamiento de la viga es totalmente elástico ya que la pendiente es perfectamente constante.

El momento máximo que la viga soportaría sin plastificar (Momento elástico= M_y) se calcula a partir de la ecuación (18) y, lógicamente, será menor que el momento máximo M_e :

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{8003333.3 \text{ mm}^4}{70 \text{ mm}} 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 27.43999 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 27.44 \text{ kNm}$$

Para conocer el valor del núcleo elástico, se acude a la ecuación (23), de la cual se despejará el valor de y_Y :

$$y_Y = c \sqrt{3 \left(1 - \frac{2M_e}{3M_y} \right)} = 70 \text{ mm} \sqrt{3 \left(1 - \frac{2 \cdot 36800000 \text{ Nmm}}{3 \cdot 27439999 \text{ Nmm}} \right)} = 39.46 \text{ mm}$$

Este resultado implica que la pieza no plastificará en su totalidad, ya que el valor obtenido es menor que la distancia c ($39.46 < 70$). Por tanto, el espesor del núcleo elástico será $2y_Y = 78.92 \text{ mm}$.

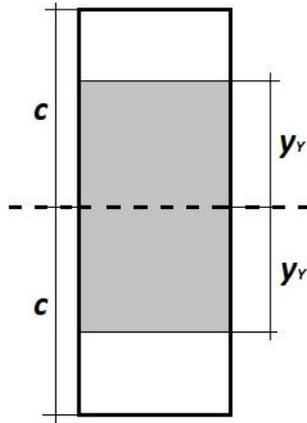
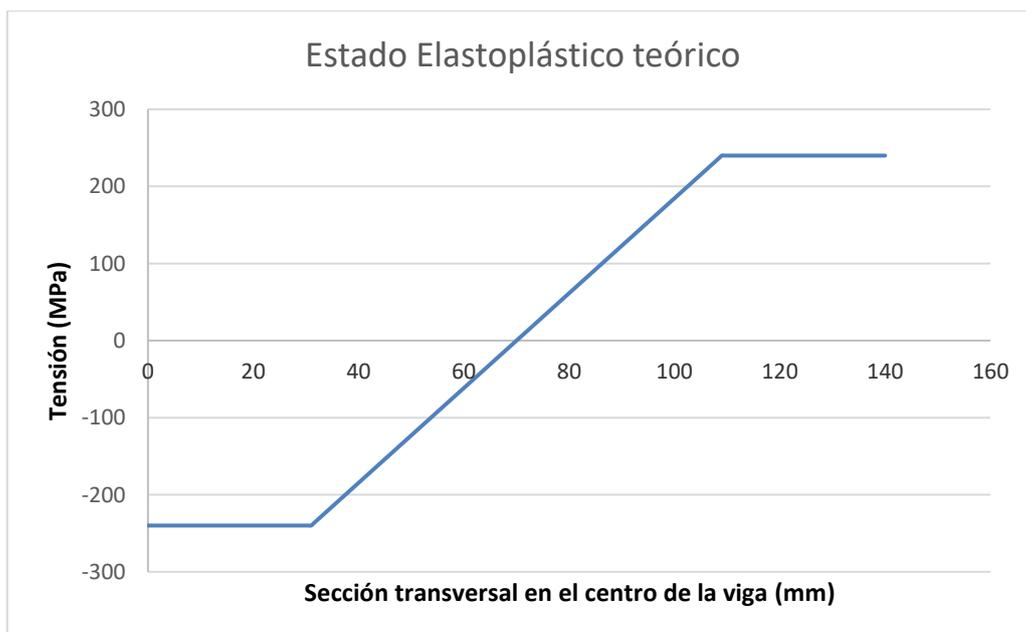


Figura 5.2: Núcleo elástico (en gris) y zonas plásticas (en blanco) de la sección.

Esto significa que la sección habrá plastificado por los extremos, ya que es donde mayores tensiones se producen al estar más alejados de la fibra neutra. Tomando la altura de la sección desde la base inferior (0 mm) hasta la base superior (140 mm), la pieza plastificará en dos tramos:

- Desde 0 mm hasta $(70-39.46)=30.54$ mm.
- Desde $(70+39.46)=109.46$ mm hasta 140 mm.

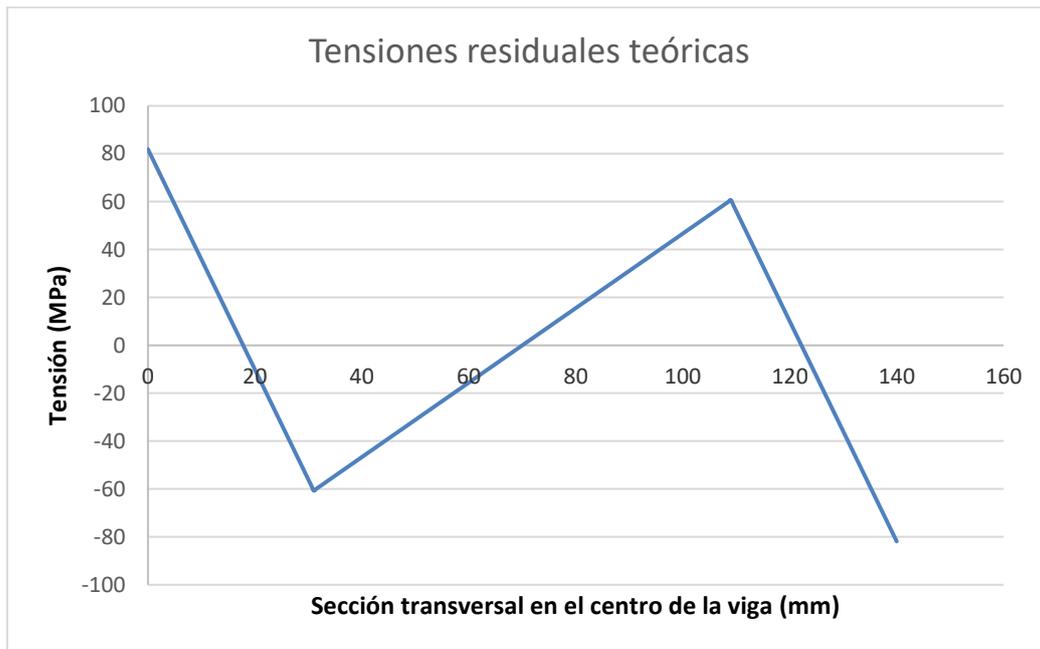
Una vez determinados estos datos, se pueden graficar los resultados. Para ello, y como conocemos los dos puntos donde la gráfica tendrá pendiente, basta con calcular la ecuación de la recta que une estos puntos, correspondientes al núcleo elástico de la sección. El resto de puntos serán los que habrán plastificado y tendrán un valor igual al límite elástico (en valor absoluto). Teniendo en cuenta estas consideraciones, la representación gráfica quedaría:



Gráfica 2: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico de forma teórica.

En la gráfica se aprecian perfectamente las zonas plásticas (pendiente nula) así como la zona elástica, en la que, al igual que en el caso anterior, la pendiente se mantiene constante.

Para poder determinar los esfuerzos residuales que quedarán en la sección una vez retirada la carga, se aplicará el principio de superposición. Para ello, se calculará la diferencia de tensiones entre el estado elasto-plástico y el estado elástico. El resultado es el siguiente:

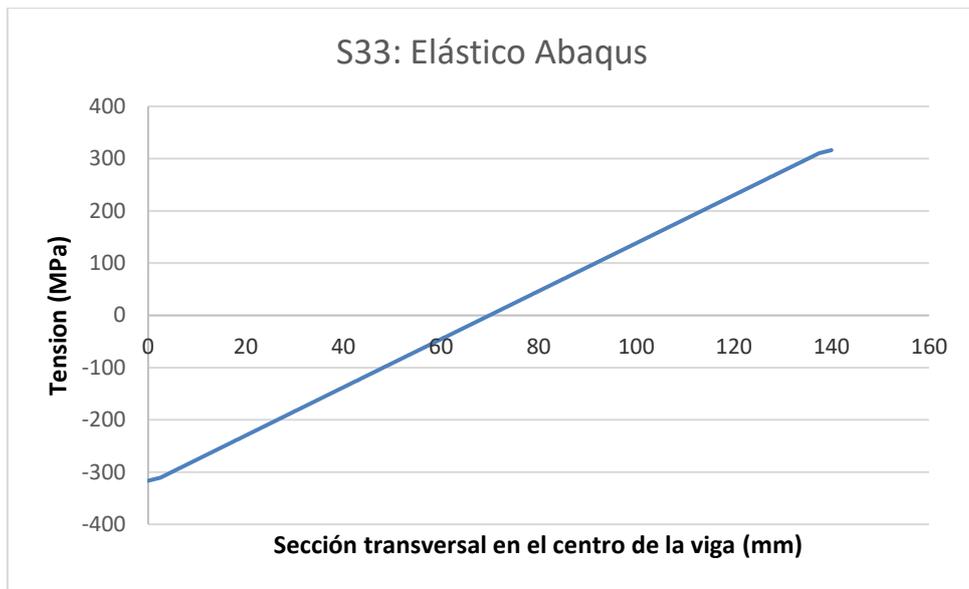


Gráfica 3: Representación de las tensiones residuales teóricas.

En este caso, se puede observar que las tensiones residuales pueden ser tanto positivas como negativas. También se aprecia que la gráfica es simétrica respecto al punto central, lo cual indica que las tensiones residuales a un lado y a otro del eje neutro son iguales en valor absoluto.

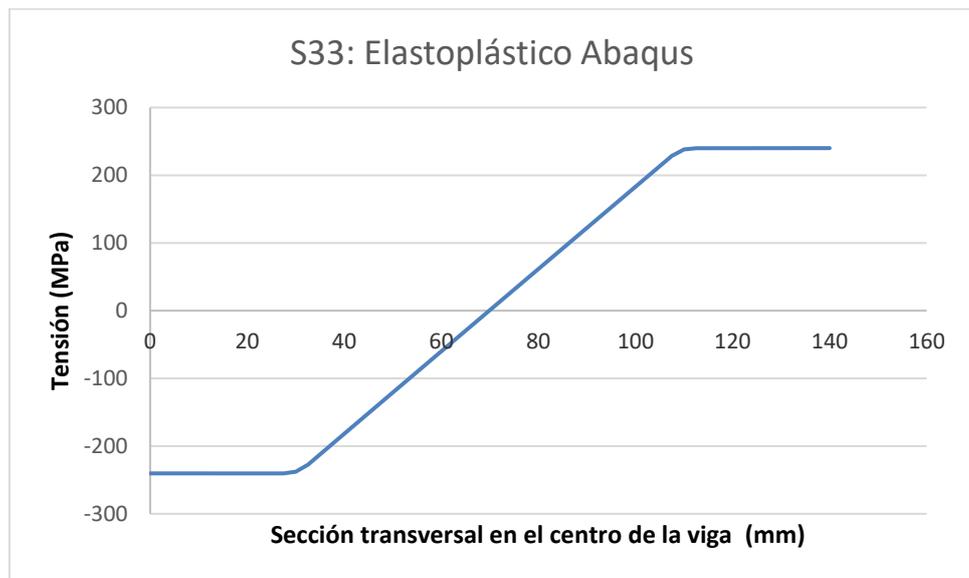
5.1.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.

Ya se ha explicado en apartados anteriores cómo se introducen los datos necesarios para poder simular las vigas en el software Abaqus. Los datos obtenidos una vez graficados son los siguientes:



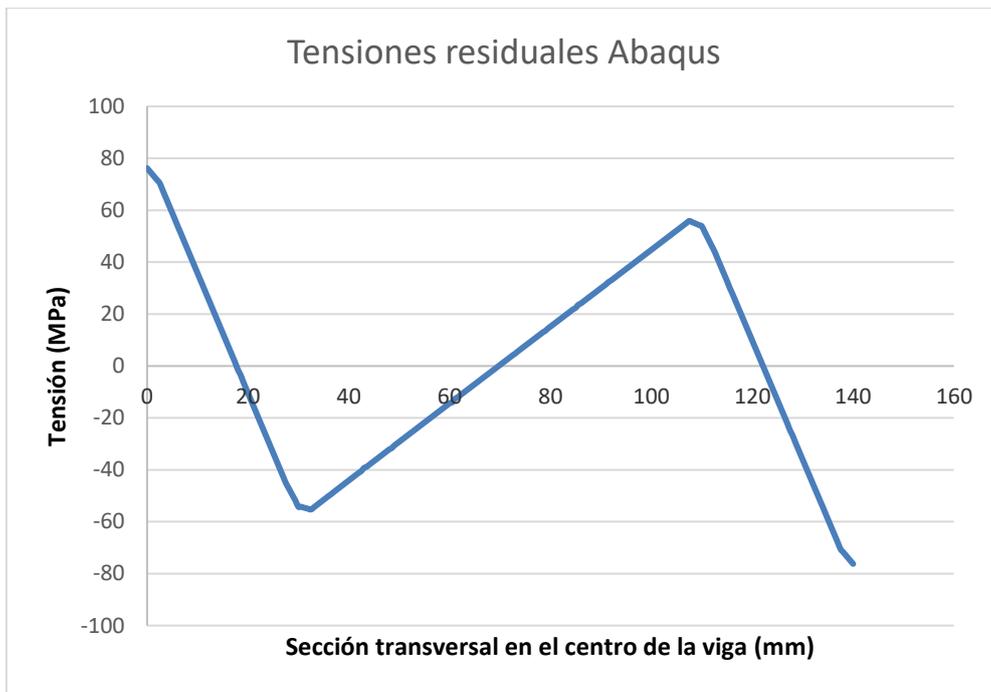
Gráfica 4: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.

El resultado obtenido mediante la simulación es exactamente el esperado, ya que a simple vista, se asemeja de forma clara a la gráfica obtenida de forma analítica.



Gráfica 5: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico mediante Abaqus.

Al igual que en el rango elástico, en el elasto-plástico también se han obtenido unos resultados similares a los calculados de forma teórica.

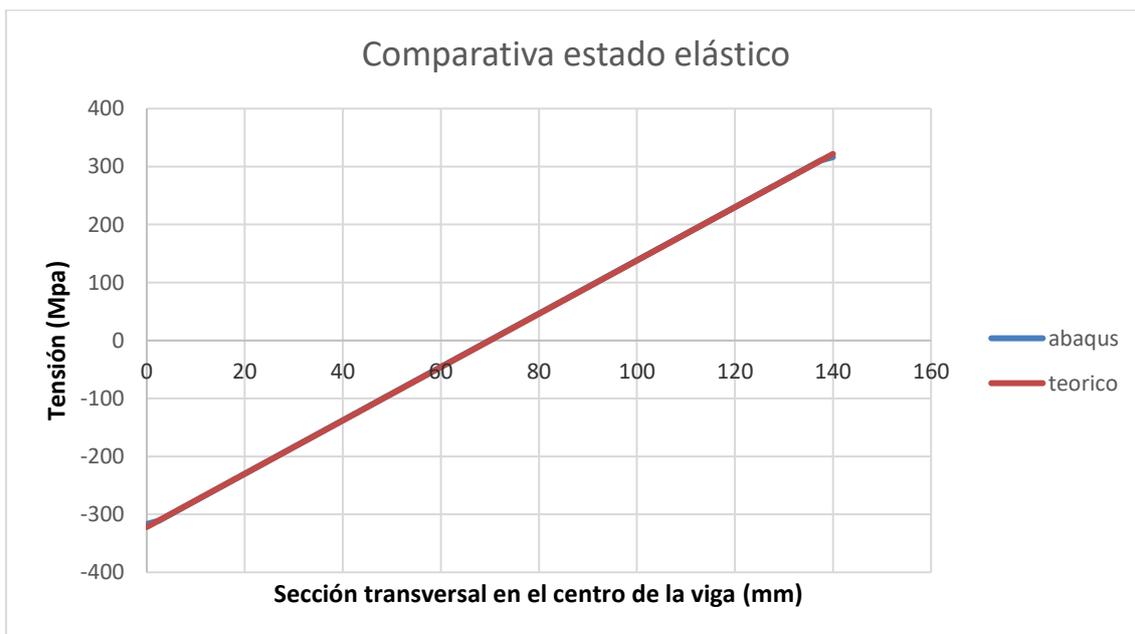


Gráfica 6: Tensiones residuales obtenidas mediante Abaqus.

Teniendo en cuenta que los datos relativos tanto al estado elástico como al elastoplástico han salido muy similares de forma analítica y mediante Abaqus, era de esperar que la representación de las tensiones residuales también sea semejante.

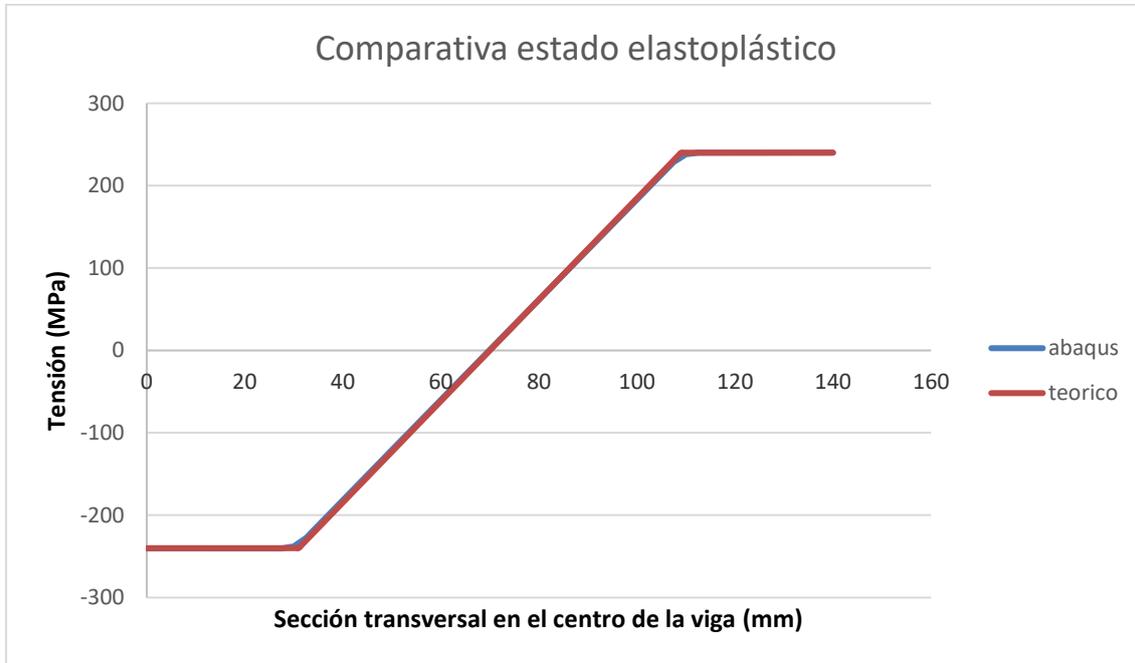
5.1.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

En este apartado se representarán superpuestas las gráficas obtenidas teóricamente con las obtenidas a partir del programa.



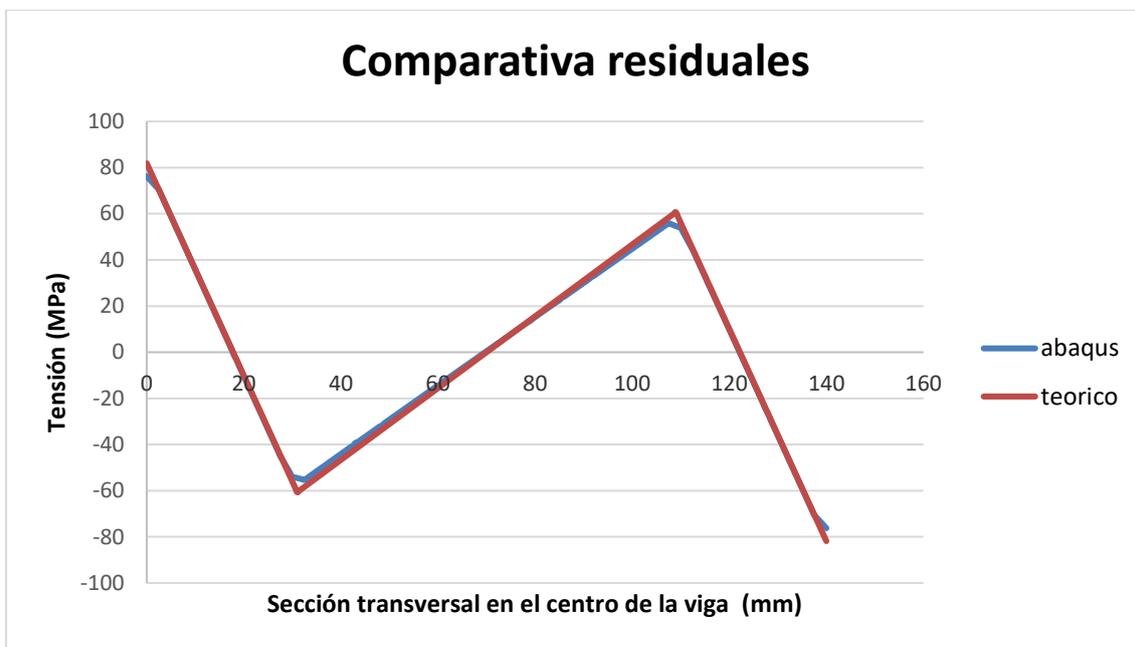
Gráfica 7: Comparación de los resultados en el rango elástico.

En esta representación puede apreciarse la exactitud alcanzada por ambos métodos, el analítico y el teórico. Apenas existe una mínima diferencia en los extremos de la sección, la gráfica de Abaqus se redondea muy ligeramente en los extremos. Esto es debido principalmente a que el programa aplica la carga de forma progresiva (Ramp) pero la pendiente puede considerarse similar.



Gráfica 8: Comparación de los resultados en el rango elastoplástico.

De nuevo, la aproximación realizada es prácticamente exacta. En este caso la única diferencia radica en la transición del estado plástico al elástico y viceversa. Otra vez, Abaqus la realiza de forma más suavizada y por eso la gráfica aparece ligeramente redondeada en las transiciones. Aún así, la pendiente de la zona elástica es la misma.



Gráfica 9: Comparación de las tensiones residuales.

Esta representación culmina la buena aproximación que se ha realizado por ambos métodos. En ella pueden apreciarse las pequeñas diferencias mencionadas anteriormente, tanto en los extremos como en los cambios de pendiente intermedios.

5.2 VIGA ISOSTÁTICA CON PERFIL EN I.

5.2.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.

Se dispone de una viga articulada en su extremo izquierdo y simplemente apoyada en su extremo derecho, que está sometida a una carga distribuida y uniforme de 18.4 kN/m. Dicha viga está formada de acero con un Módulo de Young $E=200$ GPa, un coeficiente de Poisson $\mu = 0.29$ y un límite elástico de $\sigma_y = 320$ MPa. La sección de la viga es un perfil I con las dimensiones indicadas en el dibujo y la separación entre apoyos es de $L=4$ m. Determinar las tensiones residuales que aparecerán en la viga al retirar la carga.

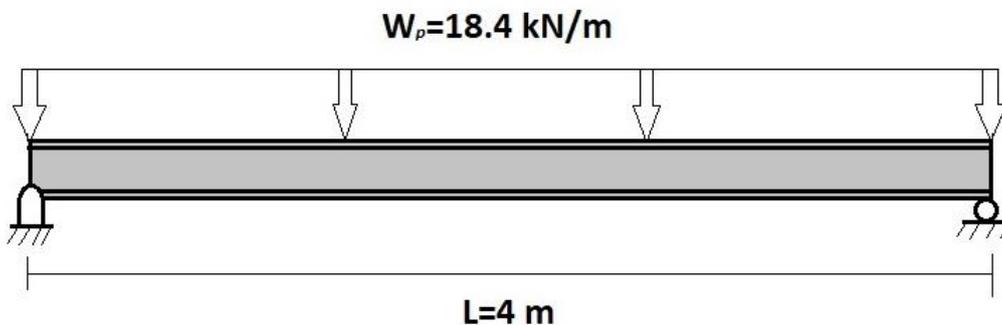


Figura 5.3: Esquematización de la viga.

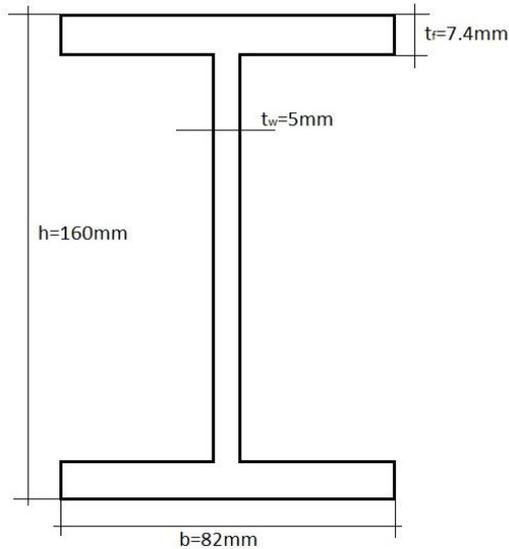


Figura 5.4: Esquemización de la sección.

Como ya se mencionó anteriormente, se ha elegido un perfil con una inercia similar al perfil rectangular. En este caso las dimensiones del perfil son:

- Altura: \$h=160\text{mm}\$.
- Base: \$b=82\text{mm}\$.
- Espesor alas: \$t_f=7,4\text{mm}\$.
- Espesor alma: \$t_w=5\text{mm}\$.

El momento de inercia de de la sección es:

$$I = \frac{82 \cdot 160^3}{12} - \frac{(82 - 5) \cdot (160 - 2 \cdot 7.4)^3}{12} = 8.346 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

Dado que, en este caso, las condiciones de apoyo de la viga son las mismas que en el anterior, el momento máximo también tendrá lugar en la sección central de pieza y se calculará de la misma forma:

$$M_e = \frac{W_p L^2}{8} = \frac{18400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4^2 \text{m}^2}{8} = 36800 \text{Nm} = 36.8 \text{kNm}$$

Una vez calculado el momento máximo \$M_e\$ que actuará en la viga, se puede calcular la tensión máxima \$\sigma_p\$ que soportará la misma:

$$\sigma_p = \frac{M_e c}{I} = \frac{36800 \cdot 10^3 \text{Nmm} \cdot 80 \text{mm}}{8.346 \cdot 10^6 \text{mm}^4} = 352.744 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 352.744 \text{MPa}$$

Al comparar este resultado con el caso de la viga de sección rectangular, se observa que el perfil en I alcanza mayores tensiones. Esto se debe a que se trata de una sección de mayor altura y por lo tanto la variable \$c\$ (semialtura de la sección) es mayor. Es por esto que el límite elástico del acero empleado será también mayor (320 MPa).

Para conseguir todos los valores del rango elástico, se vuelven a sustituir en la anterior ecuación todos los valores de \$c\$ desde -80 mm hasta 80 mm cada 0,5 mm:



Gráfica 10: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.

Al igual que ocurría en el caso de la viga de sección de rectangular, el resultado obtenido parece coherente ya que se observa una pendiente constante y los valores mínimo y máximo son iguales en valor absoluto. Cabe destacar que, para la misma carga, los valores máximos son mayores en la viga de perfil I que en la rectangular (352,74 MPa frente a 321,86 MPa).

El momento máximo que la viga soportaría sin plastificar (Momento elástico= M_y) se calcula a partir de la ecuación (18) y, lógicamente, será menor que el momento máximo M_e :

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{8.346 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{80 \text{ mm}} 320 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 33.384 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 33.38 \text{ kNm}$$

Para conocer el valor del núcleo elástico, se acude a la ecuación (23), de la cual se despejará el valor de y_y . Pero además, en este caso, y dado que se trata de un perfil en I, se podrá aplicar un factor de forma k para que los resultados sean más precisos. El factor de forma depende del tipo de sección y representa la relación entre el momento plástico y el momento elástico (o también, entre el módulo resistente plástico y el módulo resistente elástico). Su valor, por tanto, será mayor que la unidad y puede sacarse de la siguiente tabla:

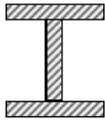
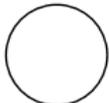
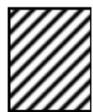
SECCION						
$k = \frac{W_p}{W_f}$	1,00	1,15 a 1,17	1,27	1,50	1,70	2,00

Figura 5.7: Diferentes valores del factor de forma en función de la sección.

Se tomará un valor de $k=1,16$ (adimensional).

$$y_Y = c \sqrt{3 \left(1 - \frac{2M_{ek}}{3M_y} \right)} = 80\text{mm} \sqrt{3 \left(1 - \frac{2 \cdot 36800000 \cdot 1.16\text{Nmm}}{3 \cdot 33384000\text{Nmm}} \right)} = 53.22 \text{ mm}$$

Como ocurría en el caso de la viga rectangular, esta viga tampoco plastifica en su totalidad ya que el valor obtenido de la semialtura del núcleo elástico y_Y es inferior a la semialtura de la sección c . El espesor total del núcleo elástico será de $2y_Y = 106.44\text{mm}$.

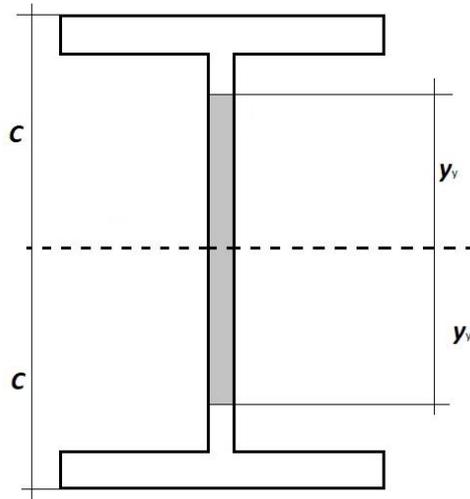
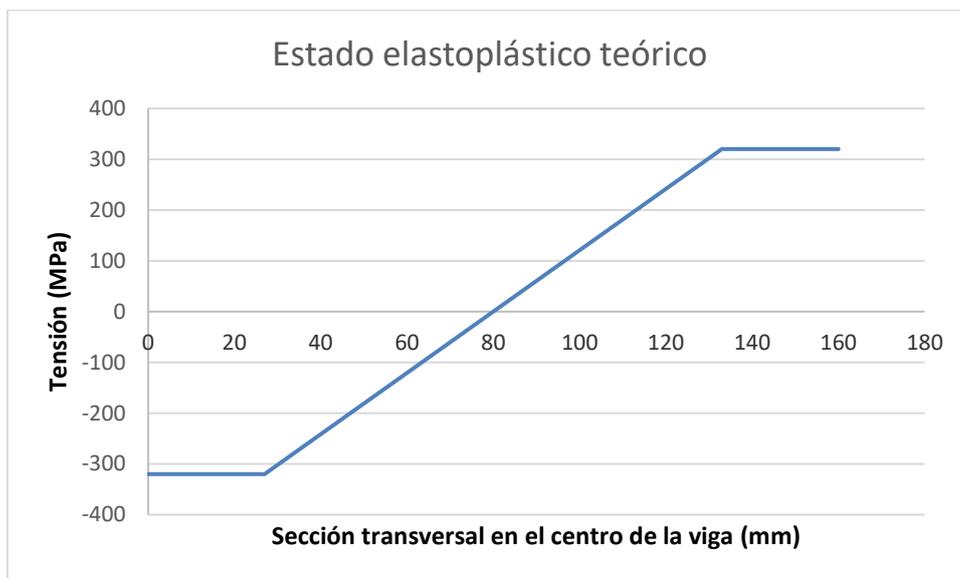


Figura 5.5: Núcleo elástico (gris) y zonas plásticas (blanco) de la sección.

Tomando la altura de la sección desde la base inferior (0 mm) hasta la base superior (160 mm), la pieza plastificará en dos tramos:

- Desde 0 mm hasta $(80-53,22)=26,78$ mm.
- Desde $(80+53.22)=133.22$ mm hasta 160 mm.

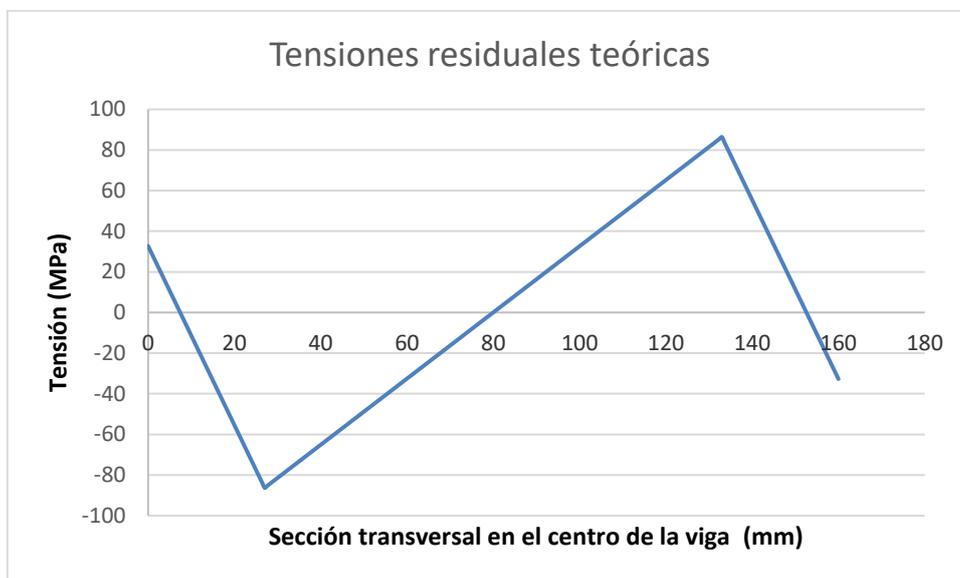
Como ocurría en el ejemplo anterior, ya se pueden graficar los resultados. Conociendo los dos puntos donde la pieza empieza y termina de plastificar y la tensión de esos puntos (-320 MPa y +320 MPa), basta con calcular la ecuación de la recta que une estos puntos, correspondientes al núcleo elástico de la sección. El resto de puntos serán los que habrán plastificado y tendrán un valor igual al límite elástico (en valor absoluto). Teniendo en cuenta estas consideraciones, la representación gráfica quedaría:



Gráfica 11: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico de forma teórica.

En la gráfica se aprecian claramente las zonas donde la pieza ha plastificado, es decir, las zonas cuya pendiente es 0. Del mismo modo, se observa que la pendiente de la zona elástica se mantiene constante.

Una vez más, con el objetivo de calcular las tensiones residuales que quedarán en la pieza al retirar la carga, se aplicará el principio de superposición. Para ello, se calcula la diferencia entre el estado elasto-plástico y el elástico:

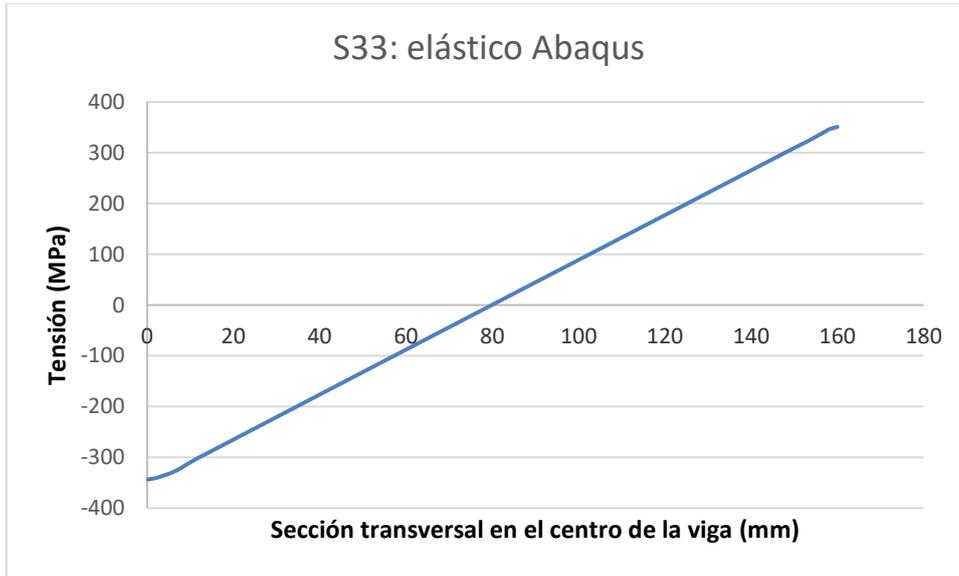


Gráfica 12: Representación de las tensiones residuales teóricas.

Aquí también se puede observar que las tensiones residuales pueden ser tanto positivas como negativas. También se aprecia que la gráfica es simétrica respecto al punto central, lo cual indica que las tensiones residuales a un lado y a otro del eje neutro son iguales en valor absoluto.

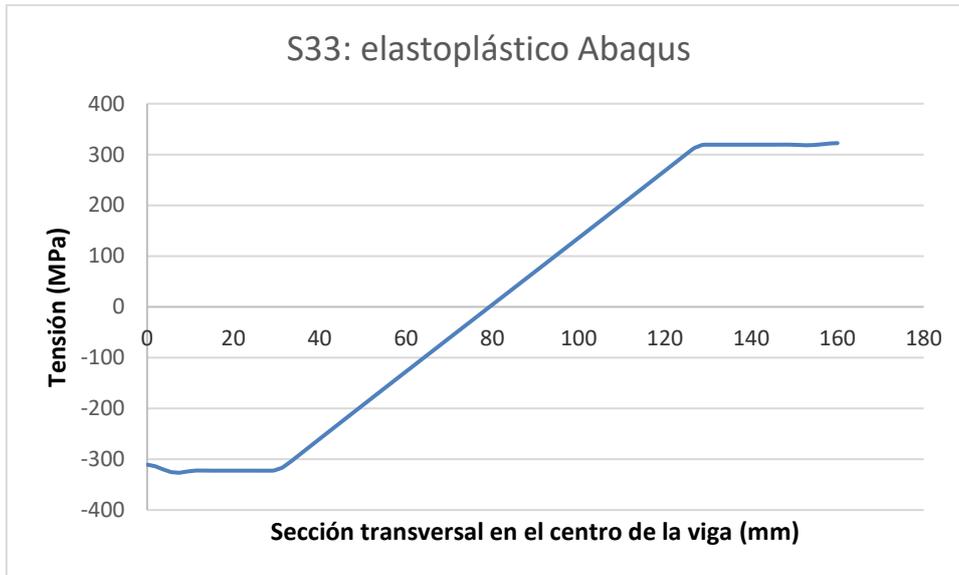
5.2.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.

Los datos obtenidos a partir de la simulación de la viga con el software Abaqus son los siguientes:



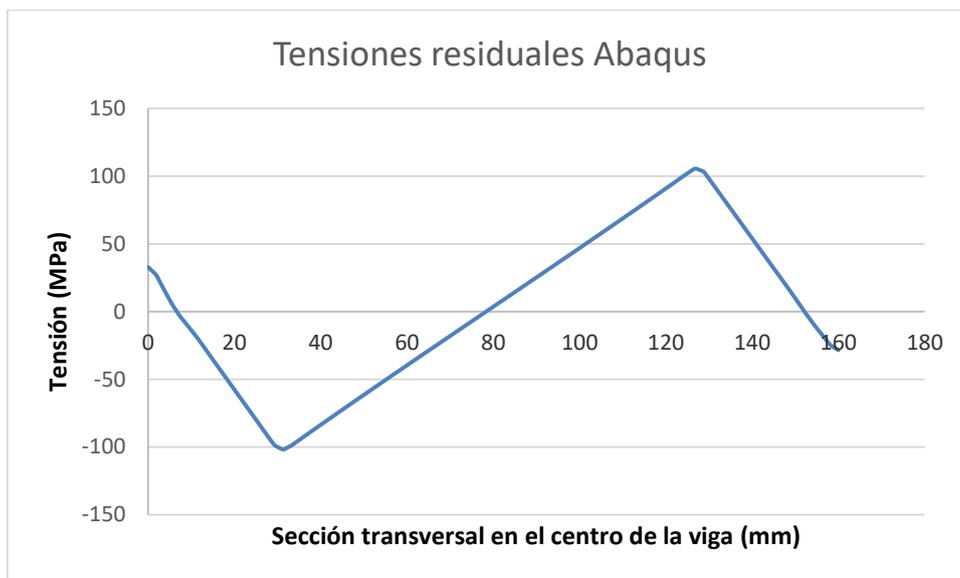
Gráfica 13: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.

A primera vista, los datos concuerdan con los obtenidos de forma analítica.



Gráfica 14: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico mediante Abaqus.

En esta gráfica puede observarse que en la zona plástica existe una pequeña diferencia respecto a los datos calculados de forma analítica. Esto se debe a las concentraciones de tensiones que aparecen debidas a geometría de la viga en la unión entre alma y alas.



Gráfica 15: Representación de las tensiones residuales obtenidas mediante Abaqus.

Destacan las pequeñas variaciones en la pendiente que tienen lugar en los tramos de pendiente descendente, las cuales son debidas al mismo motivo explicado anteriormente, la concentración de tensiones en la unión entre alma y alas.

5.2.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

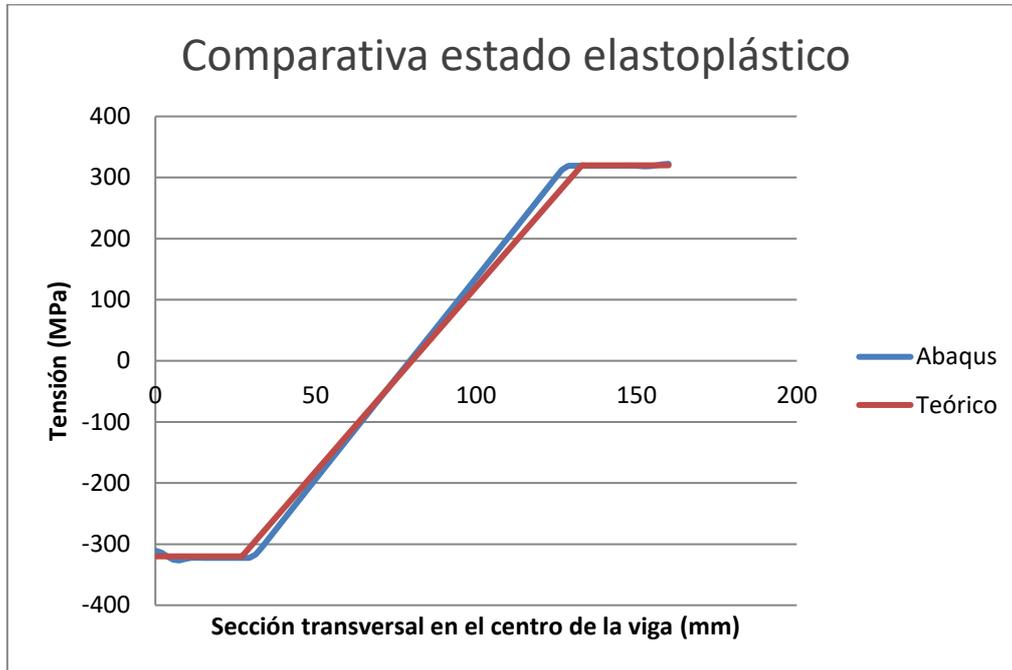
A continuación se superpondrán las gráficas obtenidas por los diferentes métodos.



Gráfica 16: Comparación de los resultados en el rango elástico.

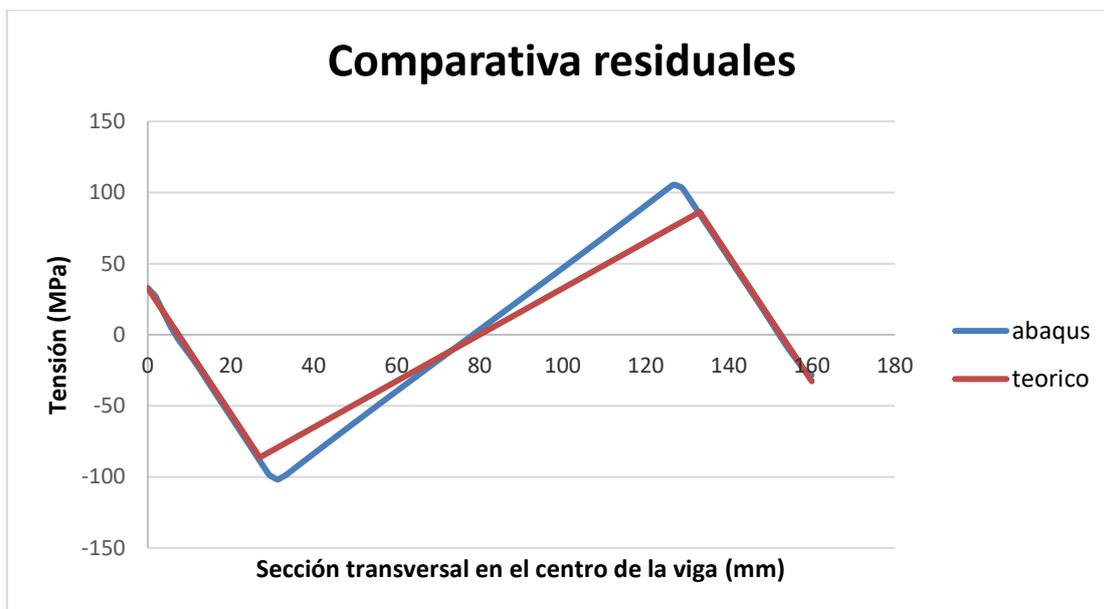
En la anterior gráfica también puede observarse la gran exactitud alcanzada por los dos métodos utilizados, ya que apenas existe diferencia entre ellos. Únicamente se observa una pequeña variación en el inicio de la representación:

Como ocurría anteriormente, la curva de Abaqus es más suavizada al inicio ya que el programa aplica la carga de forma progresiva.



Gráfica 17: Comparación de los resultados en el rango elastoplástico.

Una vez más, la aproximación realizada es muy buena aunque pueden apreciarse dos pequeñas diferencias. La primera radica en la pendiente de la zona elástica, ligeramente mayor en los datos proporcionados por Abaqus que en el cálculo teórico. Esto se debe a que la zona plástica (horizontal) es mayor en la simulación con el software. Y la segunda diferencia se encuentra al inicio de la zona plástica inferior, en la que puede observarse que la gráfica pierde la horizontalidad.



Gráfica 18: Comparación de las tensiones residuales.

En esta representación se recogen todas las diferencias mencionadas anteriormente, tanto las variaciones al inicio de la plastificación en la zona inferior como la diferente pendiente existente en la zona elástica.

5.3 VIGA EN MÉNSULA CON PERFIL EN I.

5.3.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.

Se dispone de una viga empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho, que está sometida a una carga distribuida y uniforme de 18.4 kN/m. Dicha viga está formada de acero con un Módulo de Young $E=200$ GPa, un coeficiente de Poisson $\mu = 0.29$ y un límite elástico de $\sigma_Y = 300$ MPa. La sección de la viga es un perfil I con las dimensiones indicadas en el dibujo y la longitud es $L= 2$ m. Determinar las tensiones residuales que aparecerán en la viga al retirar la carga.

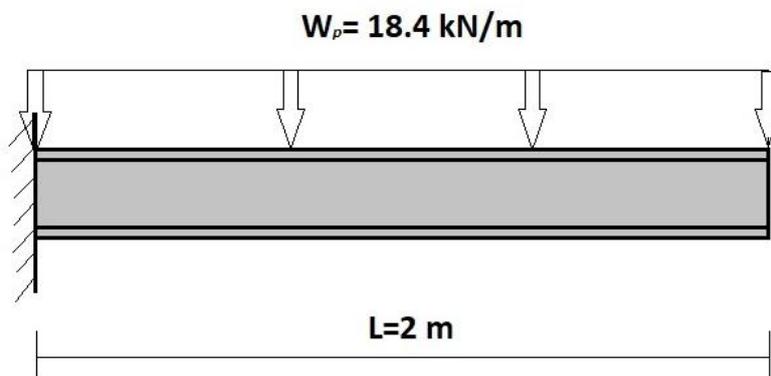


Figura 5.6: Esquematización de la viga.

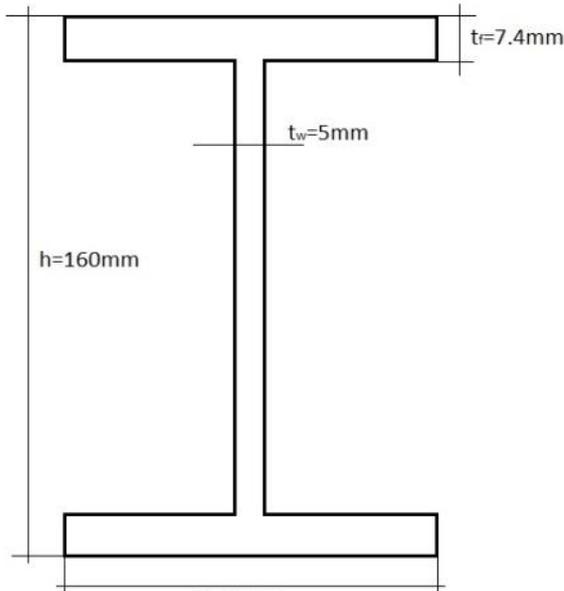


Figura 5.7: Esquemización de la sección

Al tratarse del mismo perfil utilizado en el ejemplo anterior, ya se conoce su momento de inercia:

$$I = 8.346 \cdot 10^6 \text{mm}^4$$

Puesto que las condiciones de apoyo son más desfavorables que los casos anteriores, para que la pieza no plastifique de forma excesiva (o incluso, colapse), se ha decidido mantener la magnitud de la carga aplicada pero reducir a la mitad la longitud de la viga. De esta forma, se conseguirá que el momento máximo M_e que se desarrolle en la pieza no sea desmesurado.

Al tratarse de un voladizo, el momento flector en el extremo libre será 0, mientras que en el empotramiento, el momento será máximo (en valor absoluto). Para calcularlo, se aplica $\sum M$ y se llega a la expresión:

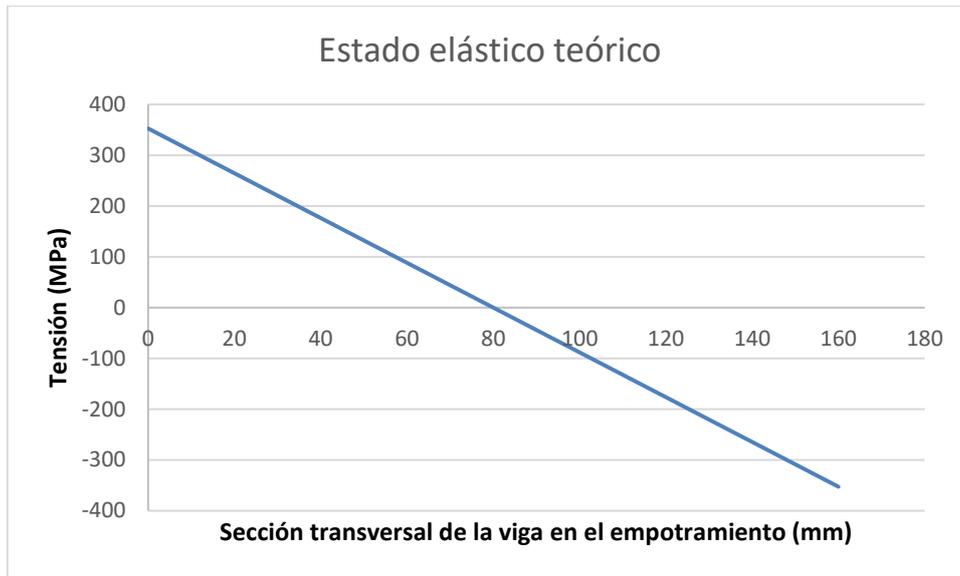
$$M_e = -q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = -\frac{q \cdot L^2}{2} = \frac{18400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2^2 \cdot \text{m}^2}{2} = -36800 \text{Nm}$$

El signo negativo indica que se trata de un momento que actúa en sentido antihorario.

Una vez calculado el momento máximo M_e que actuará en la viga, se puede calcular la tensión máxima σ_p que soportará la misma:

$$\sigma_p = \frac{M_e c}{I} = \frac{-36800 \cdot 10^3 \text{Nmm} \cdot 80 \text{mm}}{8.346 \cdot 10^6 \text{mm}^4} = -352.744 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -352.744 \text{MPa}$$

siendo c la mitad de la altura de la viga. Si se sustituye la variable c tomando valores desde -80 mm hasta 80 mm cada 0.5 mm (esto es, para que coincidan los datos que se obtienen de Abaqus), obtendremos todos los valores del rango elástico que después se podrán representar gráficamente:



Gráfica 19: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.

Al igual que en todos los casos anteriores, el resultado parece el correcto ya que se observa que la pendiente es constante y los valores en los extremos son iguales en valor absoluto. Es necesario destacar que para este caso, la pendiente es negativa (descendente), al contrario que en los anteriores ejemplos de vigas biapoyadas, donde la pendiente era positiva (ascendente). Esto se debe a que el momento tiene sentido antihorario.

El momento máximo que la viga soportaría sin plastificar (Momento elástico= M_y) se calcula a partir de la ecuación (18) y, lógicamente, será menor que el momento máximo M_e :

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{8.346 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{80 \text{ mm}} 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 31.2975 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 31.297 \text{ kNm}$$

Una vez conocido el valor de M_y , se acude a la ecuación (23) con el objetivo de calcular la longitud de la fibra elástica más alejada del eje neutro. Al igual que en el caso anterior, también se aplicará el factor de forma k:

$$y_Y = c \sqrt{3 \left(1 - \frac{2M_e k}{3M_y} \right)} = 80 \text{ mm} \sqrt{3 \left(1 - \frac{2 \cdot 36800000 \cdot 1.16 \text{ Nmm}}{3 \cdot 31297500 \text{ Nmm}} \right)} = 41.732 \text{ mm}$$

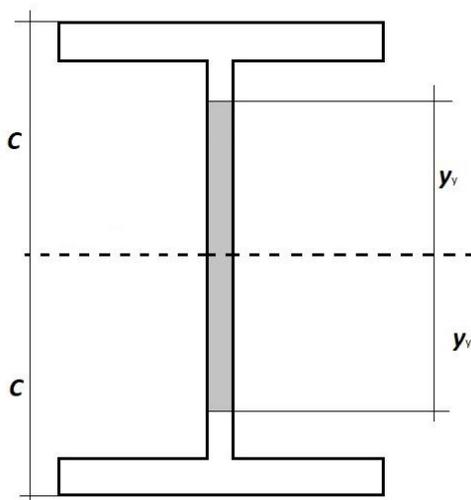


Figura 5.8: Núcleo elástico (en gris) y zonas plásticas (blanco).

Una vez determinado este valor, pueden deducirse las zonas en las que la sección plastificará:

- Desde 0mm hasta $(80-41.732)=38.268$ mm.
- Desde $(80+41.732)=121.732$ mm hasta 160 mm.

Al igual que en el ejemplo anterior, ya se pueden representar gráficamente los resultados. Conociendo los dos puntos donde la pieza empieza y termina de plastificar y la tensión de esos puntos (300 MPa y -300 MPa), basta con calcular la ecuación de la recta que une estos puntos, correspondientes al núcleo elástico de la sección. El resto de puntos serán los que habrán plastificado y tendrán un valor igual al límite elástico (en valor absoluto). Teniendo en cuenta estas consideraciones, la representación gráfica quedaría:



Gráfica 20: Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico de forma teórica.

Como era de esperar, la pendiente es descendiente, quedando así en concordancia con la gráfica correspondiente al rango elástico. Se observa además, que ambas

zonas plásticas se estabilizan en 300 MPa y -300 MPa y que la pendiente de la zona elástica es constante.

Para poder calcular las tensiones residuales, se aplicará una vez más el principio de superposición:



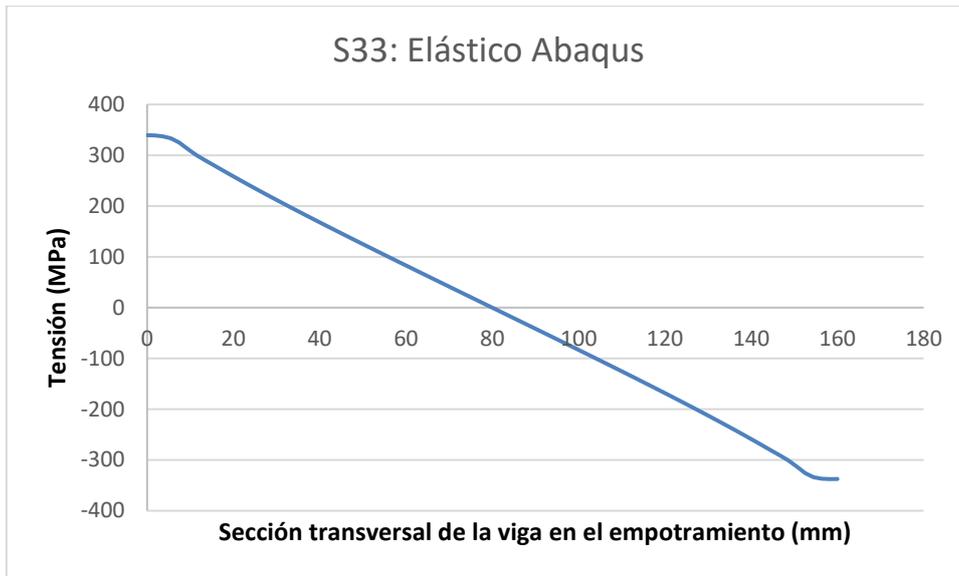
Gráfica 21: Representación de las tensiones residuales teóricas.

De igual modo, en esta gráfica se observa que las tensiones residuales pueden ser tanto positivas como negativas y que, aproximadamente, tendrán el mismo valor a un lado y al otro del eje neutro dado que la representación es simétrica respecto al punto central.

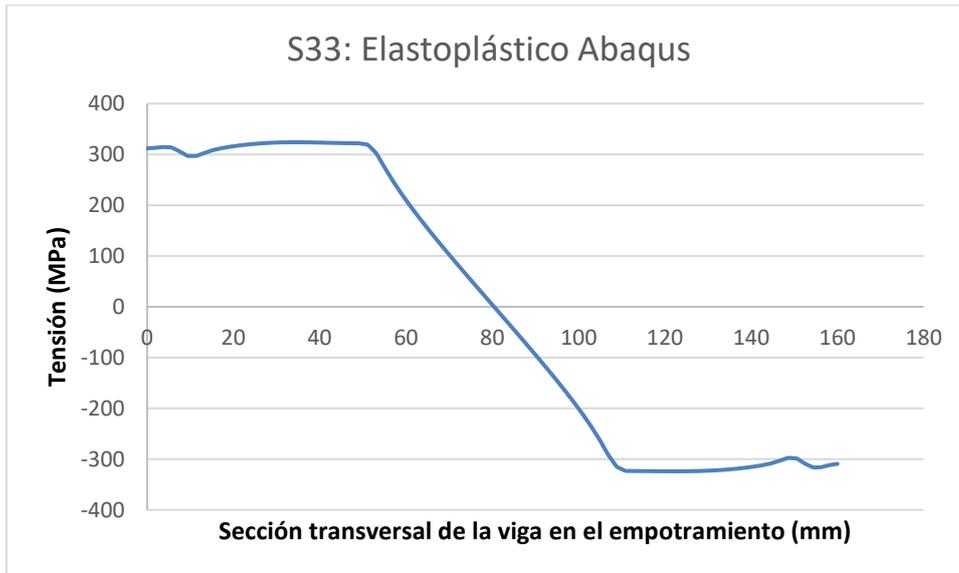
5.3.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.

Los datos utilizados están tomados a 20 mm del empotramiento ya que, a medida que se toman más cerca del mismo, dichos datos se distorsionan y no concuerdan con el cálculo teórico.

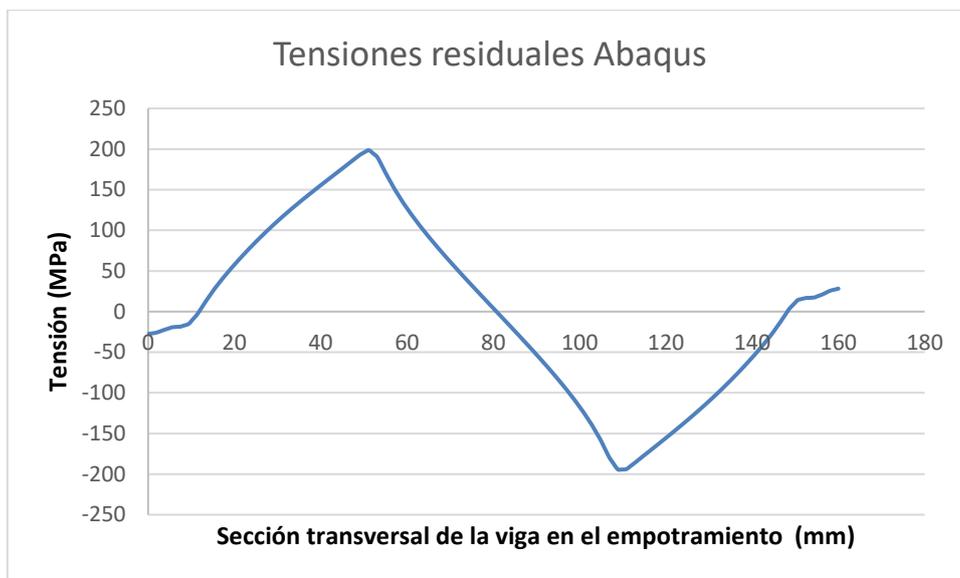
Los datos obtenidos a partir de la simulación con el software Abaqus, una vez graficados, son los siguientes:



Gráfica 22: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.



Gráfica 23: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico mediante Abaqus.

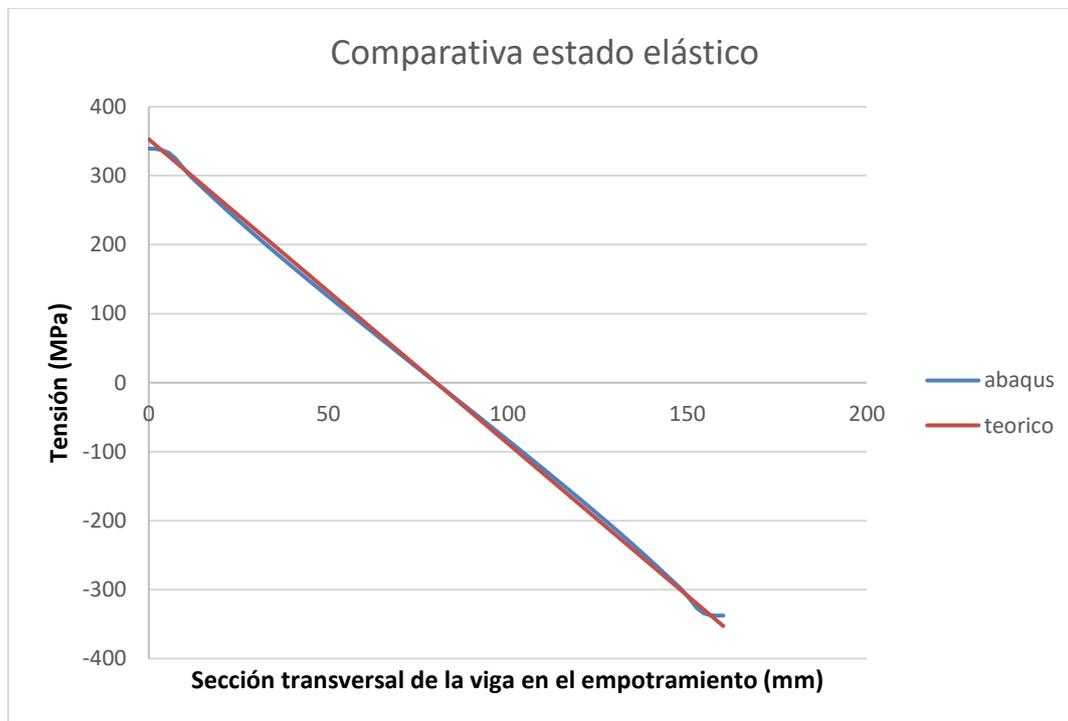


Gráfica 24: Representación de las tensiones residuales mediante Abaqus.

A priori, los resultados obtenidos de la simulación concuerdan con los obtenidos de forma teórica.

5.3.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

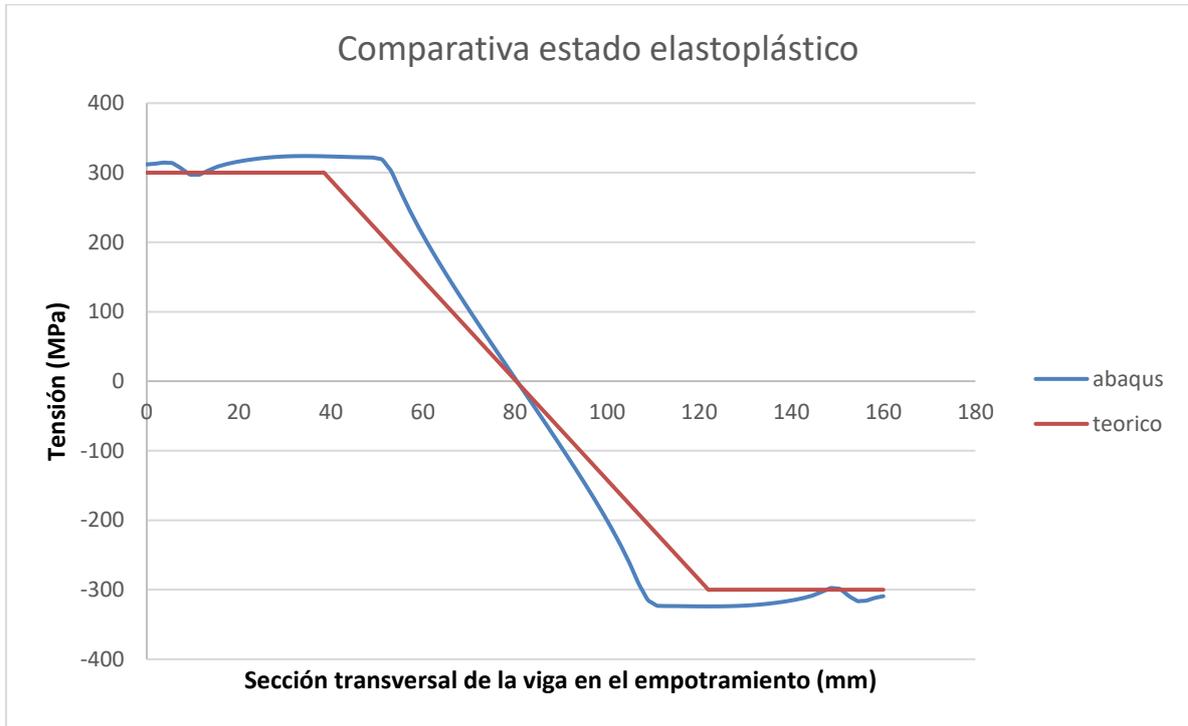
Una vez calculados los datos por ambos métodos, se representarán superpuestas ambas gráficas para poder comparar los resultados.



Gráfica 25: Comparación de los resultados en el rango elástico.

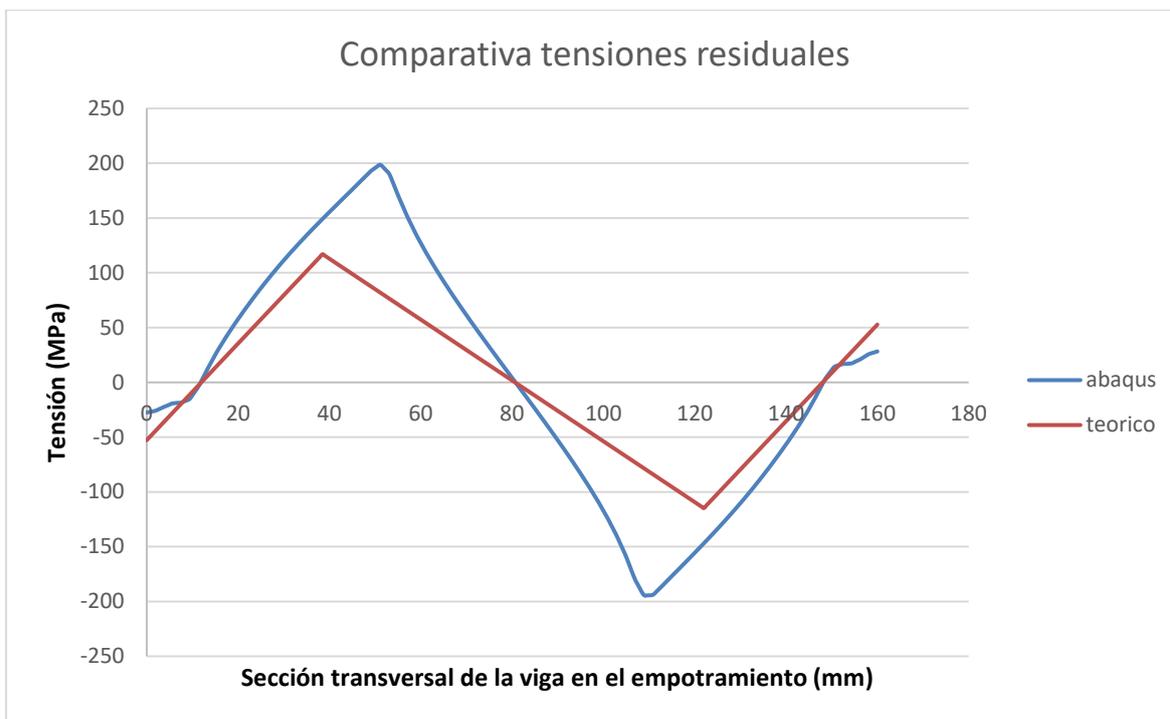
De la misma forma que en casos anteriores, se ha realizado una gran aproximación ya que apenas existe diferencia en la pendiente. En los extremos puede apreciarse una

ligera curvatura en los datos relativos a Abaqus debida a las concentraciones de tensiones y a que los datos no están tomados exactamente en la misma sección.



Gráfica 26: Comparación de los resultados en el rango elastoplástico.

Al igual que ocurría en caso del rango elástico, en el rango elastoplástico también se consigue una buena aproximación. A pesar de ello, pueden observarse pequeñas diferencias. Entre ellas destaca la mayor pendiente de la gráfica de Abaqus, debida a que, en la simulación, la viga tiene una zona plástica más larga.



Gráfica 27: Comparación de las tensiones residuales.

A medida que las condiciones de contorno de las vigas estudiadas van adquiriendo complejidad, se observa en las gráficas comparativas que los resultados obtenidos de forma teórica no se corresponden en total medida con la realidad. Este hecho se debe a que, en el cálculo analítico, existen multitud de factores que no se tienen en cuenta pero que sí influyen en la pieza, tales como concentraciones de tensiones, efectos no lineales, etc. El software Abaqus sí considera todos estos factores y, por tanto, los datos que se extraen de la simulación son ligeramente diferentes a los teóricos. Es por esto que, aunque las gráficas no sean tan parecidas, puede considerarse que las aproximaciones son adecuadas siempre que ambas gráficas sigan la misma tendencia y sus valores no sean excesivamente dispares.

5.4 VIGA HIPERESTÁTICA RECTANGULAR.

5.4.1 MÉTODO DE CROSS.

En este ejemplo y en el siguiente se utilizará un método diferente para calcular los momentos desarrollados en la viga de forma teórica. El método empleado será el "Método de Cross" o "Método de Distribución de Momentos". La aplicación del método en los siguientes ejemplos resulta sencilla por lo que el proceso se explicará de forma breve.

En líneas generales, el método consiste en un proceso iterativo para ajustar los valores de los momentos flectores en los extremos de la barra o viga estudiada con el objetivo de mantener el equilibrio en la misma.

En primer lugar es necesario conocer los conceptos de:

- Coeficiente de rigidez relativa (k): Es la relación entre la inercia de la sección (real o relativa, constante a lo largo de la viga) y la longitud de la viga. Depende

de las condiciones en los extremos y el elemento debe ser siempre de material homogéneo.

- Coeficiente de reparto (ρ): se calcula dividiendo un coeficiente de rigidez entre la suma de todos los coeficientes de rigidez, por lo que siempre será menor que la unidad.
- Momentos de empotramiento perfecto: se calculan utilizando las expresiones especificadas en tablas.

Al aplicar un momento equilibrante en el extremo de una barra o viga, una parte de dicho momento es transmitida al extremo opuesto. La proporción del momento transmitido será de valor mitad si se trata de un empotramiento y será cero si es una articulación. Este proceso de equilibrio y transmisión continúa hasta obtener una precisión satisfactoria.

El convenio de signos utilizado para los momentos extremos es positivo en el sentido de las agujas del reloj y negativo en caso contrario (convenio contrario al utilizado generalmente en la resistencia de materiales).

El Método de Cross puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Cálculo de los coeficientes de rigidez relativa $k = I/L$ de cada barra.
2. Cálculo de los coeficientes de reparto ρ de cada barra, teniendo en cuenta que para cada nudo, $\sum \rho_{ij} = 1$.
3. Calcular los momentos de empotramiento perfecto en cada barra, afectados por el signo correspondiente.
4. Sumar todos los momentos que concurren en cada nudo.
5. Repartir dichos momentos, cambiándoles de signo, para equilibrar cada nudo.
6. Transporte a los nudos opuestos del momento mitad del obtenido en el apartado anterior.
7. Se repiten los pasos 5 y 6 de forma iterativa hasta conseguir la aproximación deseada. La última operación siempre será de reparto.
8. Suma de todos los momentos obtenidos en cada barra y en cada nudo.

Para facilitar el proceso, los datos de partida y cada iteración que se realice, se irán recogiendo en una tabla denominada "Tabla de Cross".

5.4.2 CÁLCULOS TEÓRICOS.

Se dispone de una viga empotrada en su extremo izquierdo y simplemente apoyada en su extremo derecho, que está sometida a una carga distribuida y uniforme de 18.4 kN/m. Dicha viga está formada de acero con un Módulo de Young $E=200$ GPa, un coeficiente de Poisson $\mu = 0.29$ y un límite elástico de $\sigma_Y = 240$ MPa. La sección de la viga es rectangular de 35x140 mm² y la longitud es $L= 4$ m. Determinar las tensiones residuales que aparecerán en la viga al retirar la carga.

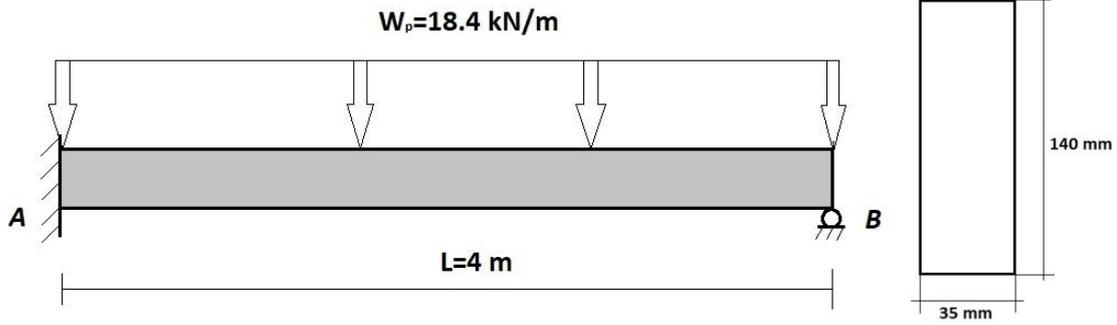


Figura 5.9: Esquematación de la viga y su sección.

El momento de inercia de la sección es conocido del primer ejemplo ya que se trata de la misma sección:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{35 \cdot 140^3}{12} = 8.0033 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

El valor calculado es la inercia real de la sección. Pero para la aplicación del método de Cross se tomará la inercia relativa, de valor unidad, ya que únicamente existe una barra.

- Coeficientes de rigidez relativa:

$$K_{AB} = \frac{I}{L} = \frac{1}{4}$$

- Coeficientes de reparto:

$$\rho = \frac{K_{AB}}{K_{AB}} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

- Momentos de empotramiento perfecto (expresiones en tablas):

$$M_B = -M_A = \frac{qL^2}{12} = \frac{18.4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4^2 \text{ m}^2}{12} = 24.533 \text{ kN/m}$$

- Tabla de Cross:

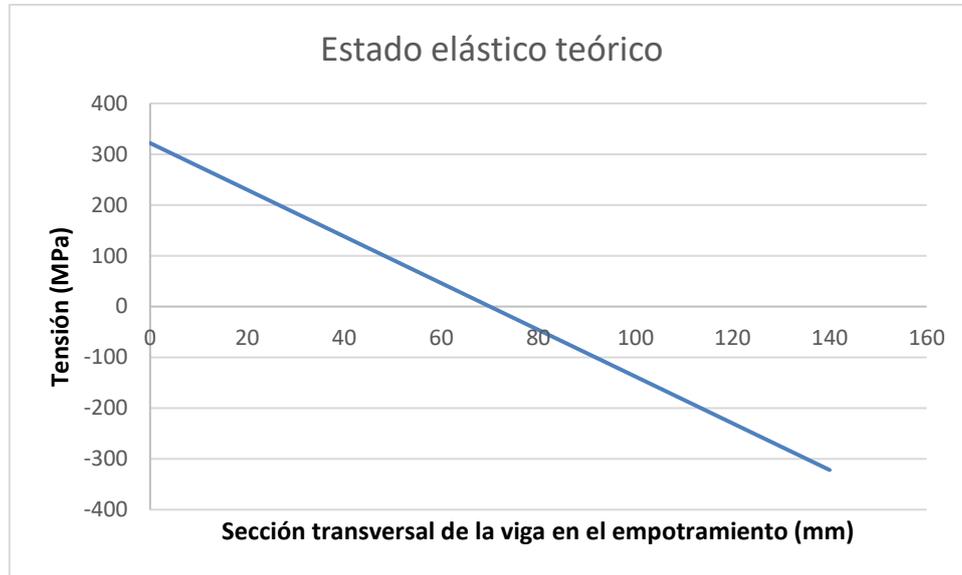
	A	B
<i>Coef. reparto</i> = ρ	0	1
<i>Momentos empotr.</i> = M_0	-24.533	24.533
Primer reparto= 1R		-24.533
Primer transporte= 1T	-12.266	
Segundo reparto= 2R		
Momento de Cross= M_c	-36.8	0

El momento máximo desarrollado en la viga se da en la sección del empotramiento y tiene un valor de $M_e = 36.8$ mkN (existe un momento máximo relativo cuando el diagrama de cortantes se anula, a 2.23m del extremo izquierdo, pero su valor es de 20.03 mkN, menor que el que se da en el empotramiento).

Una vez conocido M_e , podemos calcular las tensiones máximas que se desarrollan en la viga:

$$\sigma_p = \frac{M_e c}{I} = \frac{36800 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \cdot 70 \text{ mm}}{8003333.3 \text{ mm}^4} = 321.86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 321.86 \text{ MPa}$$

Para poder graficar los datos en el rango elástico, se sustituyen los diferentes valores de c desde -70mm hasta 70mm cada 0.5mm :



Gráfica 28: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.

A priori, el resultado parece correcto ya que se observa una pendiente constante y descendente.

El momento máximo que la viga soportaría sin plastificar (Momento elástico= M_y) se calcula a partir de la ecuación (18) y, lógicamente, será menor que el momento máximo M_e , calculado a partir del Método de Cross:

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{8003333.3 \text{ mm}^4}{70 \text{ mm}} 240 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 27.43999 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 27.44 \text{ kNm}$$

El siguiente paso es determinar la longitud del núcleo elástico, y para ello, se acude a la ecuación (23), de la cual se despeja el valor de y_Y :

$$y_Y = c \sqrt{3 \left(1 - \frac{2M_e}{3M_y} \right)} = 70 \text{ mm} \sqrt{3 \left(1 - \frac{2 \cdot 36800000 \text{ Nmm}}{3 \cdot 27439999 \text{ Nmm}} \right)} = 39.46 \text{ mm}$$

Una vez conocido este dato, es sabido que la pieza no plastificará en su totalidad, ya que el valor obtenido es menor que la distancia c ($39.46 < 70$). Es por esto que el espesor del núcleo elástico será $2y_Y = 78.92 \text{ mm}$.

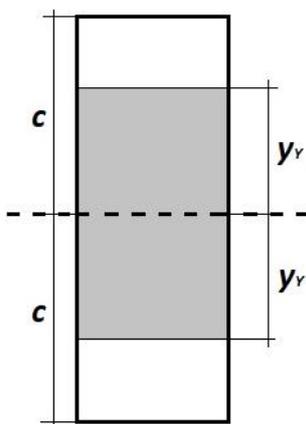


Figura 5.9: Núcleo elástico (en gris) y zonas plásticas (en blanco) de la sección.

Esto significa que la sección plastificará por los extremos, ya que es donde mayores tensiones se producen al estar más alejados de la fibra neutra. Si se toma toda la altura de la sección desde la base inferior (0 mm) hasta la base superior (140 mm), la pieza plastificará en dos tramos:

- Desde 0 mm hasta $(70-39.46)=30.54$ mm.
- Desde $(70+39.46)=109.46$ mm hasta 140 mm.

Como puede comprobarse, estos resultados son similares a los del primer ejemplo (viga isostática rectangular) ya que se trata de un material con las mismas características, la misma carga y la misma longitud. La única diferencia existente reside en el lugar en el cual se comparan los resultados. En el primer caso, el momento máximo se daba en el tramo central, mientras que en la viga hiperestática, el momento máximo tiene lugar en la sección del empotramiento.

Una vez determinadas las zonas plásticas y el núcleo elástico, se pueden graficar los resultados. Para ello, y como conocemos los dos puntos donde la gráfica tendrá pendiente, basta con calcular la ecuación de la recta que une estos puntos, correspondientes al núcleo elástico de la sección. El resto de puntos serán los que habrán plastificado y tendrán un valor igual al límite elástico (en valor absoluto). Teniendo en cuenta estas consideraciones, la representación gráfica quedaría:



Gráfica 29: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico de forma teórica.

Si de nuevo se compara este resultado con el del primer ejemplo, vemos que la única diferencia existente es la pendiente de la zona elástica, ascendente en el primer caso y descendente en este. Tanto las zonas plásticas como la pendiente tienen el mismo valor (con el signo correspondiente).

Con el objetivo de calcular las tensiones residuales, se aplica una vez más el principio de superposición:



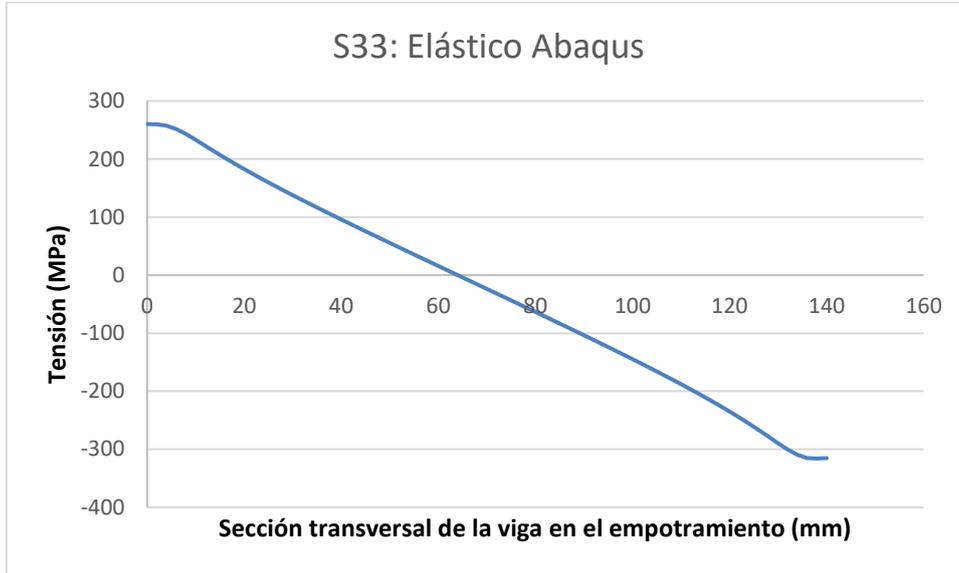
Gráfica 30: Representación de las tensiones residuales teóricas.

Como cabía esperar, la gráfica de las tensiones residuales es la contraria a la obtenida en el caso de la viga isostática. Su forma es la misma pero invertida. Se siguen observando tensiones residuales tanto positivas como negativas y es simétrica respecto al punto central.

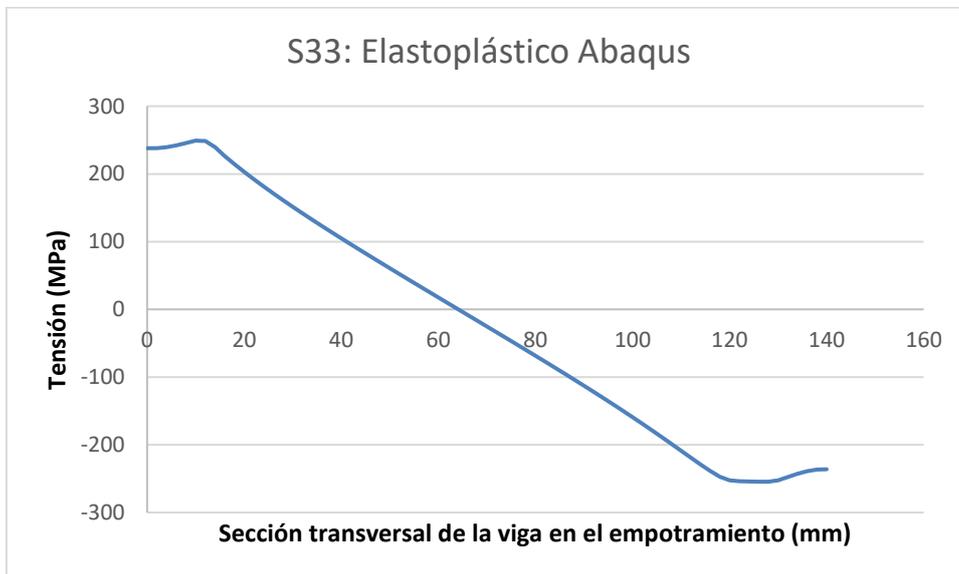
5.4.3 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.

Al igual que ocurría en caso de la viga en ménsula, los datos que se representarán están tomados a 20 mm del empotramiento ya que, a medida que se toman más cerca del mismo, dichos datos se distorsionan y no concuerdan con el cálculo teórico.

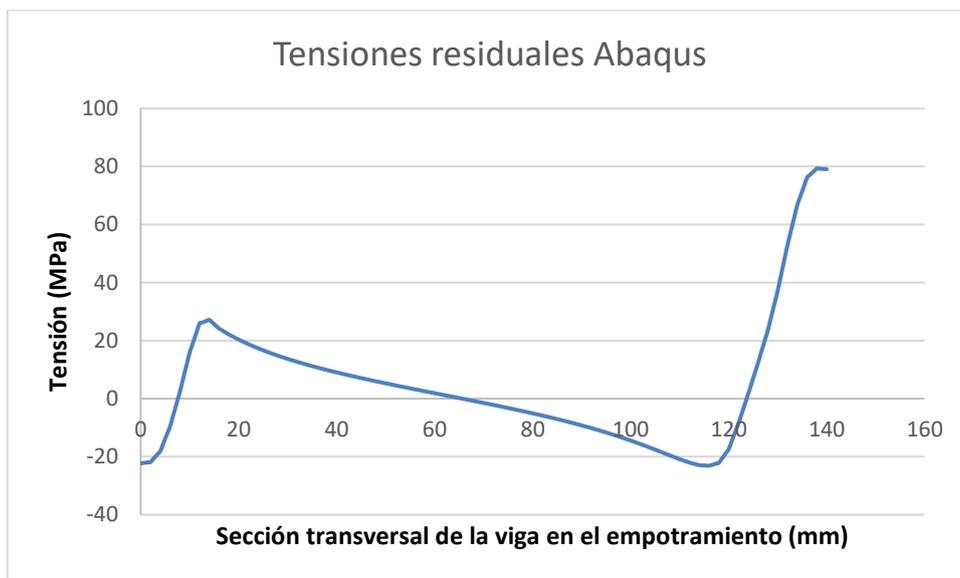
Los datos obtenidos a partir de la simulación con el software Abaqus, una vez graficados, son los siguientes:



Gráfica 31: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.



Gráfica 32: Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico mediante Abaqus.

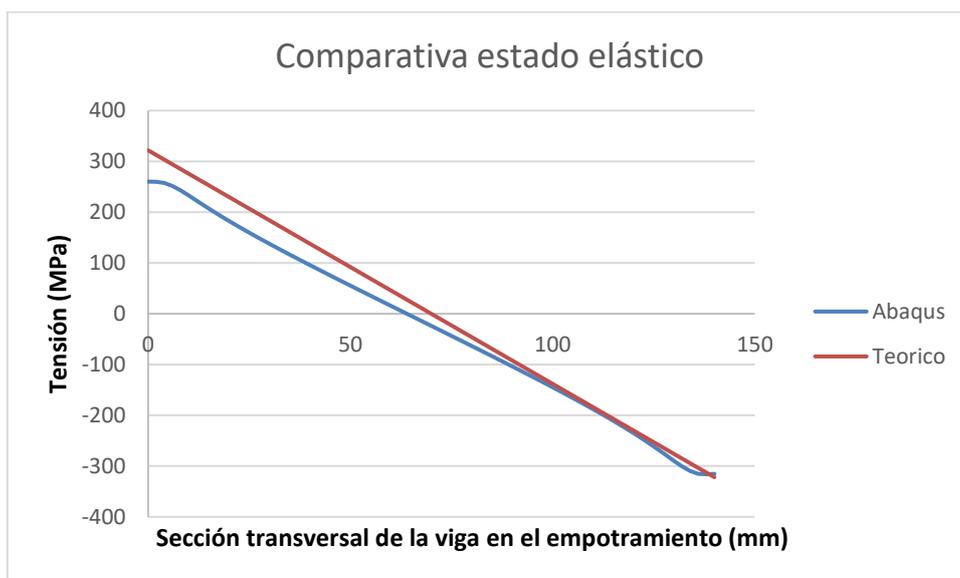


Gráfica 33: Representación de las tensiones residuales mediante Abaqus.

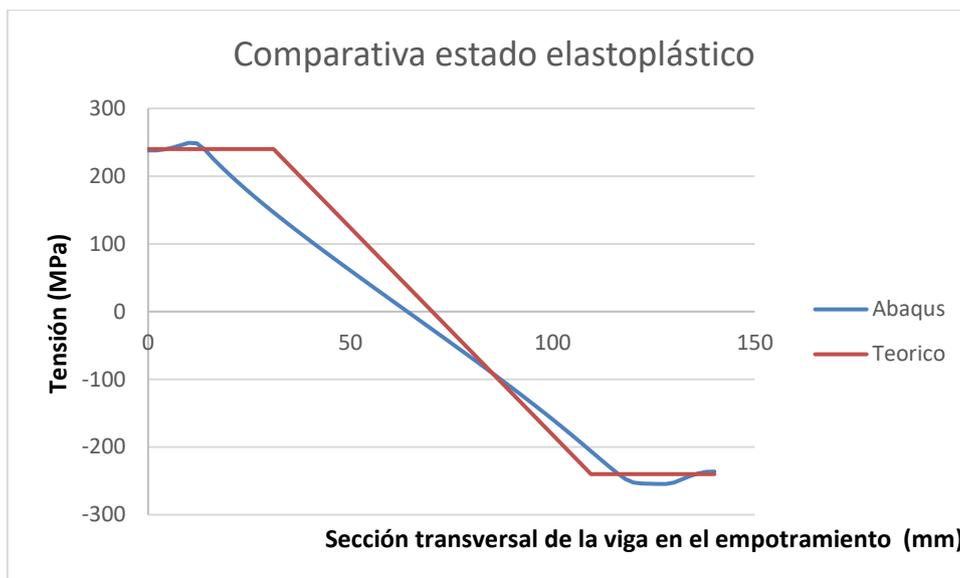
A medida que las condiciones de apoyo de la viga estudiada se van complicando, resulta más difícil conseguir una aproximación realista por medio de métodos teóricos, ya que éstos no consideran multitud de factores que intervienen en el estado final de la pieza. El software Abaqus sí tiene en cuenta la mayoría de esos factores, por lo que los datos obtenidos mediante la simulación con el programa pueden considerarse más fiables. En el siguiente apartado se podrá comprobar cómo va aumentando la inexactitud entre los dos métodos utilizados.

5.4.4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

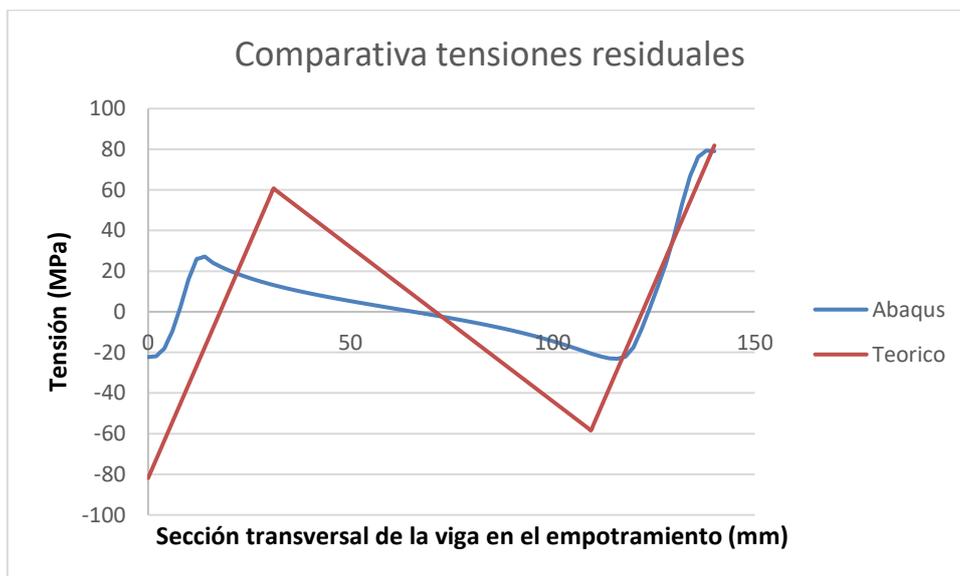
Una vez representados todos los datos y para poder compararlos mejor, se presentarán superpuestos:



Gráfica 34: Comparación de los resultados en el rango elástico.



Gráfica 35: Comparación de los resultados en el rango elasto-plástico.



Gráfica 36: Comparación de las tensiones residuales.

En cualquiera de las tres gráficas anteriores puede apreciarse que las aproximaciones realizadas son buenas ya que, en todo momento, los datos obtenidos de forma analítica siguen la misma tendencia que los conseguidos a partir de la simulación por ordenador. Por otra parte, resulta obvio que el error cometido es cada vez mayor si se comparan con los casos más sencillos. Esto se debe, en gran medida, a los factores ya comentados anteriormente. Entre ellos destacan las concentraciones de tensiones, la proximidad con el empotramiento, la aplicación progresiva de la carga o las condiciones de apoyo de la viga.

5.5 VIGA BIEMPOTRADA CON PERFIL EN I.

5.5.1 CÁLCULOS TEÓRICOS.

Se dispone de una viga empotrada en sus dos extremos y simplemente apoyada en la sección central. Dicha viga está sometida a una carga distribuida y uniforme de 92 kN/m en el vano izquierdo y a una carga puntual de 184 kN en centro del vano derecho. Se sabe que el material del que está formada es acero con un Módulo de Young $E=200$ GPa, un coeficiente de Poisson $\mu = 0.29$ y un límite elástico de $\sigma_Y = 320$ MPa. La sección de la viga es un perfil en I con las dimensiones indicadas en el dibujo y la longitud es $L=4$ m. Determinar las tensiones residuales que aparecerán en la viga al retirar la carga.

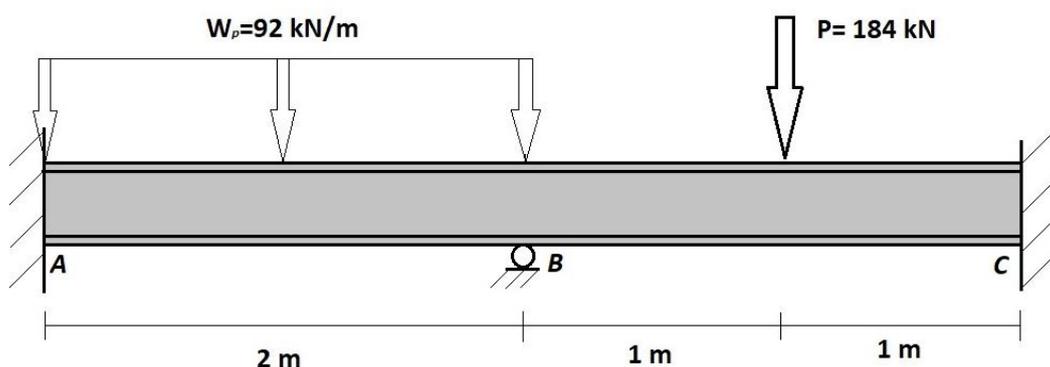


Figura 5.10: Esquematación de la viga.

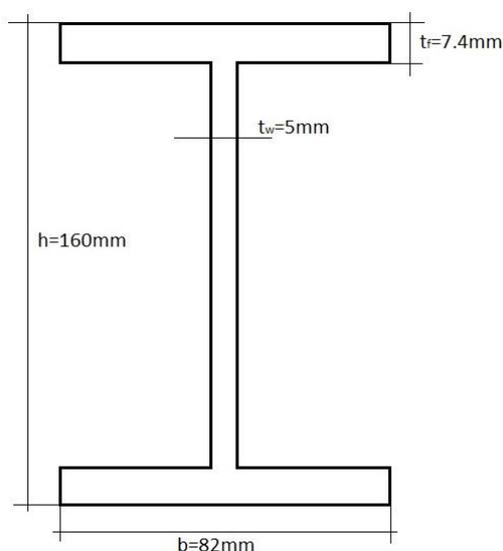


Figura 5.11: Esquematación de la sección.

Como ya se mencionó anteriormente, se ha elegido un perfil con una inercia similar al perfil rectangular. Las dimensiones del perfil son:

- Altura: $h=160$ mm.
- Base: $b=82$ mm.
- Espesor alas: $t_f=7,4$ mm.
- Espesor alma: $t_w=5$ mm.

Es destacable que las condiciones de apoyo de la viga son comparables a las de un forjado unidireccional, en el cual las viguetas van incrustadas en las jácenas exteriores y apoyadas en la jácena central. También es

necesario destacar que las cargas que se han aplicado en este enunciado están muy

alejadas de las que se aplicarían en un caso real, ya que se pretende que la viga plastifique.

El momento de inercia de de la sección es:

$$I = \frac{82 \cdot 160^3}{12} - \frac{(82 - 5) \cdot (160 - 2 \cdot 7.4)^3}{12} = 8.346 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Este valor representa la inercia real de la sección que se utilizará para calcular las tensiones máximas desarrolladas y el momento elástico. Pero para la aplicación del método de Cross se utilizará la inercia relativa, que será igual a la unidad ya que se trata de una barra de sección constante.

- Coeficientes de rigidez relativa:

$$K_{BA} = K_{BC} = \frac{I}{L} = \frac{1}{2}$$

- Coeficientes de reparto:

$$\rho_{BA} = \rho_{BC} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{1/2}{1/2 + 1/2} = \frac{1}{2}$$

- Momentos de empotramiento perfecto (expresiones en tablas):

$$M_A = -M_{BA} = \frac{W_p L^2}{12} = \frac{92 \text{ kN/m} \cdot 2^2 \text{ m}^2}{12} = 30.66 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -M_C = \frac{PL}{8} = \frac{184 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m}}{8} = 46 \text{ kNm}$$

- Tabla de Cross:

	A	BA	BC	C
<i>Coef. de reparto = ρ</i>		0.5	0.5	
<i>Momen. empotra. = M_0</i>	30.66	-30.66	46	-46
<i>Primer reparto=1R</i>		-7.66	-7.66	
<i>Primer transporte=1T</i>	-3.83			-3.83
<i>Segundo reparto=2R</i>				
<i>Momento de Cross = M_C</i>	26.77	-38.33	38.33	-49.83

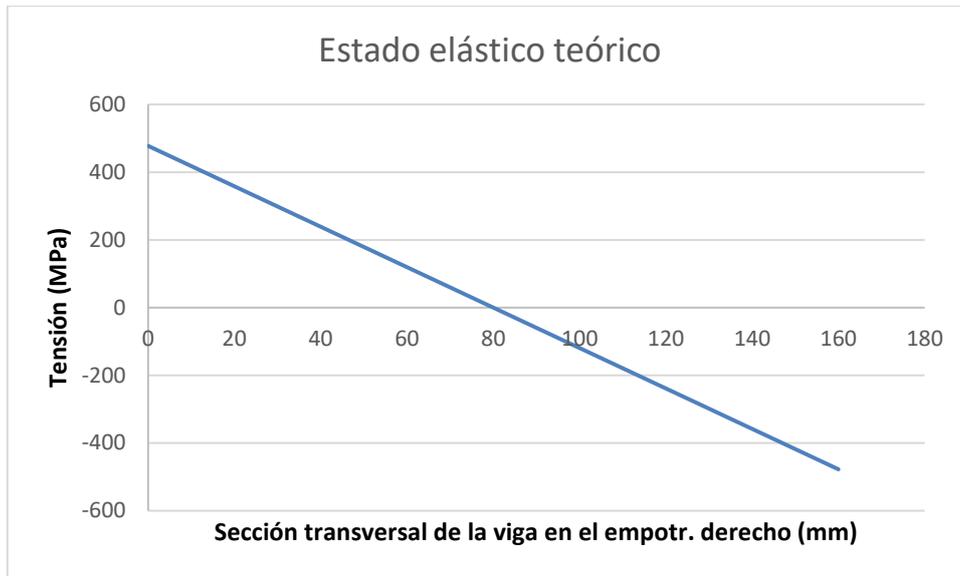
Como puede comprobarse, el nudo B está equilibrado.

El momento máximo M_e que se da en la viga analizándola por el Método de Cross tiene lugar en el extremo C, y se obtiene un valor de -49,83kNm (existe un máximo relativo en cada vano en el diagrama de momentos, pero no alcanzan el valor del máximo absoluto).

Una vez conocido M_e , podemos calcular las tensiones máximas que se desarrollan en la viga:

$$\sigma_p = \frac{M_e c}{I} = \frac{49833 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \cdot 80 \text{ mm}}{8.346 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} = 477.64 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 477.64 \text{ MPa}$$

Si se sustituye la variable c tomando valores desde -80 mm hasta 80 mm cada 0.5 mm (esto es, para que coincidan los datos que se obtienen de Abaqus), obtendremos todos los valores del rango elástico que después se podrán representar gráficamente:



Gráfica 37: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.

Como puede comprobarse, los valores máximos de la tensión son bastante elevados, lo cual viene provocado por las grandes cargas aplicadas. Para compensar este hecho, se eleva el límite elástico del material hasta 320 MPa.

El momento máximo que la viga soportaría sin plastificar (Momento elástico= M_y) se calcula a partir de la ecuación (18) y, lógicamente, será menor que el momento máximo M_e , calculado a partir del Método de Cross:

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{8.346 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{80 \text{ mm}} 320 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 33.384 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 33.384 \text{ kNm}$$

El momento M_y es mayor que en ocasiones anteriores. Esto significa que la zona plástica tendrá mayor longitud y el núcleo elástico, será, por tanto, más reducido.

Para determinar la longitud del núcleo elástico se acude a la ecuación (23), de la cual se despeja el valor de y_Y :

$$y_Y = c \sqrt{3 \left(1 - \frac{2M_e}{3M_y} \right)} = 70 \text{ mm} \sqrt{3 \left(1 - \frac{2 \cdot 49.83 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{3 \cdot 33.384 \cdot 10^6 \text{ Nmm}} \right)} = 9.71 \text{ mm}$$

Una vez conocido este dato, es sabido que la pieza no plastificará en su totalidad, ya que el valor obtenido es menor que la distancia c ($9.71 < 70$). Es por esto que el espesor del núcleo elástico será $2y_Y = 19.42 \text{ mm}$. Gracias a este dato, se sabe que la pieza plastificará en los tramos:

- Desde 0mm hasta $(80-9.71)=70.29 \text{ mm}$.
- Desde $(80+9.71)=89.71 \text{ mm}$ hasta 160mm.

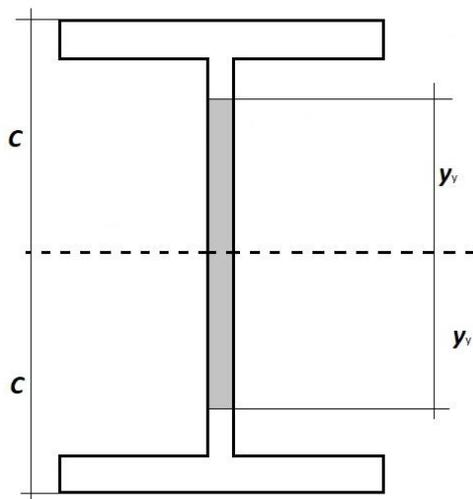
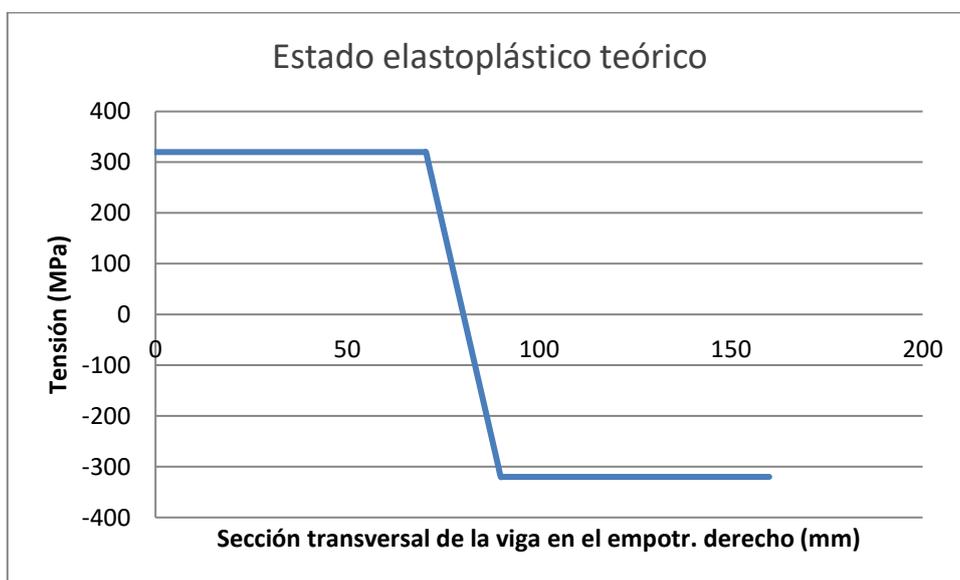


Figura 5.12: Núcleo elástico (en gris) y zonas plásticas (en blanco).

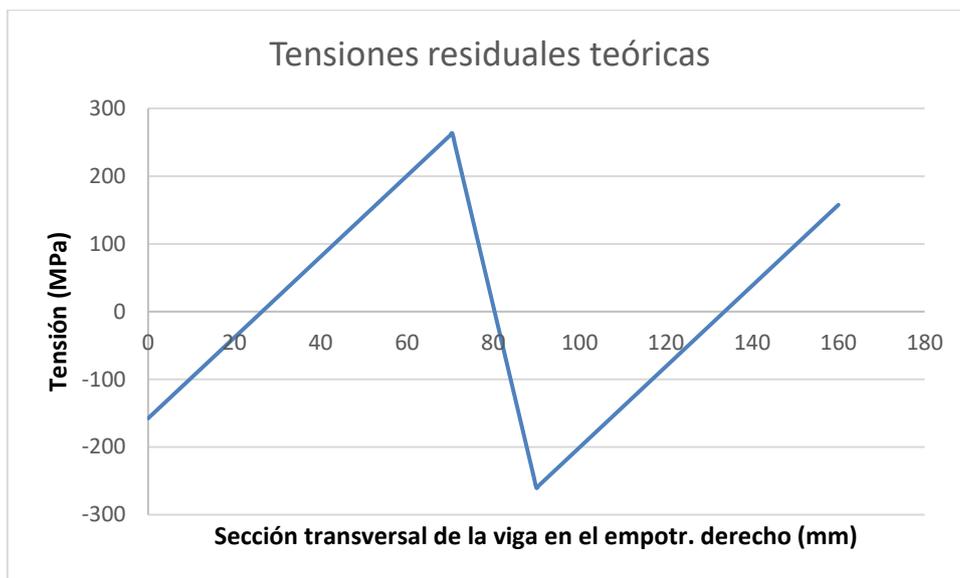
Al igual que en los ejemplos anteriores, ya se pueden graficar los resultados. Conociendo los dos puntos donde la pieza empieza y termina de plastificar y la tensión de esos puntos (+320 MPa y -320 MPa), basta con calcular la ecuación de la recta que une estos puntos, correspondientes al núcleo elástico de la sección. El resto de puntos serán los que habrán plastificado y tendrán un valor igual al límite elástico (en valor absoluto). Teniendo en cuenta estas consideraciones, la representación gráfica quedaría:



Gráfica 38: Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico de forma teórica.

Por lo mencionado anteriormente, se observa que la zona plástica (horizontal) es mayor de lo habitual. Esto implica que la pendiente de la zona elástica será más pronunciada.

Para finalizar el cálculo teórico, es necesario aplicar de nuevo el principio de superposición. Para conseguirlo, basta con restar las tensiones del rango elastoplástico menos las del rango elástico:



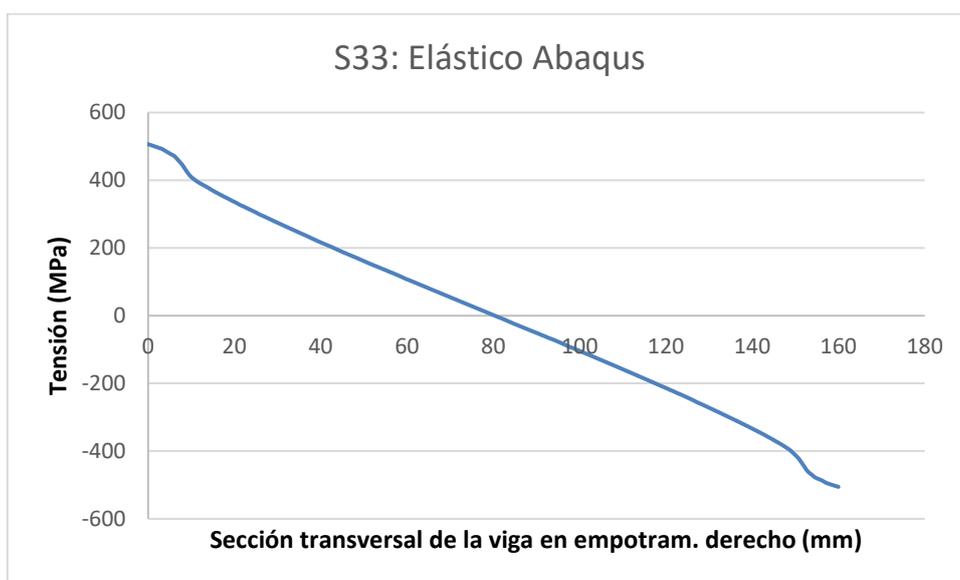
Gráfica 39: Representación de las tensiones residuales teóricas.

Debido a la gran pendiente de la zona elástica en el rango elastoplástico, la pendiente de la zona central de la gráfica de tensiones residuales también es muy pronunciada. A pesar de ello, el resultado parece lógico ya que la representación es simétrica respecto al punto central.

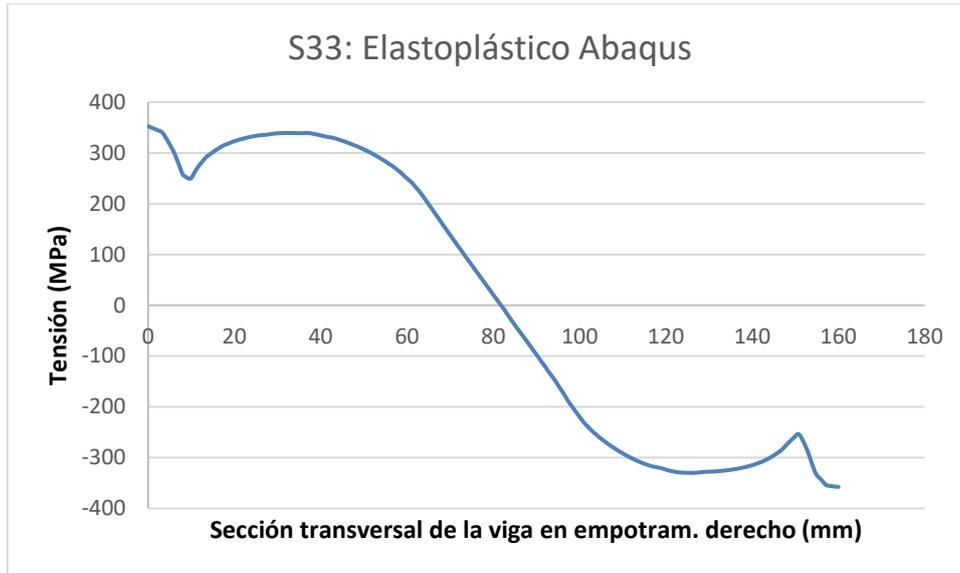
5.5.2 REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON ABAQUS.

Como ya ocurría en caso de la viga en ménsula y de la viga hiperestática, los datos que se representarán están tomados a 10 mm del empotramiento derecho, ya que, a medida que se toman más cerca del mismo, dichos datos se distorsionan y no concuerdan con el cálculo teórico.

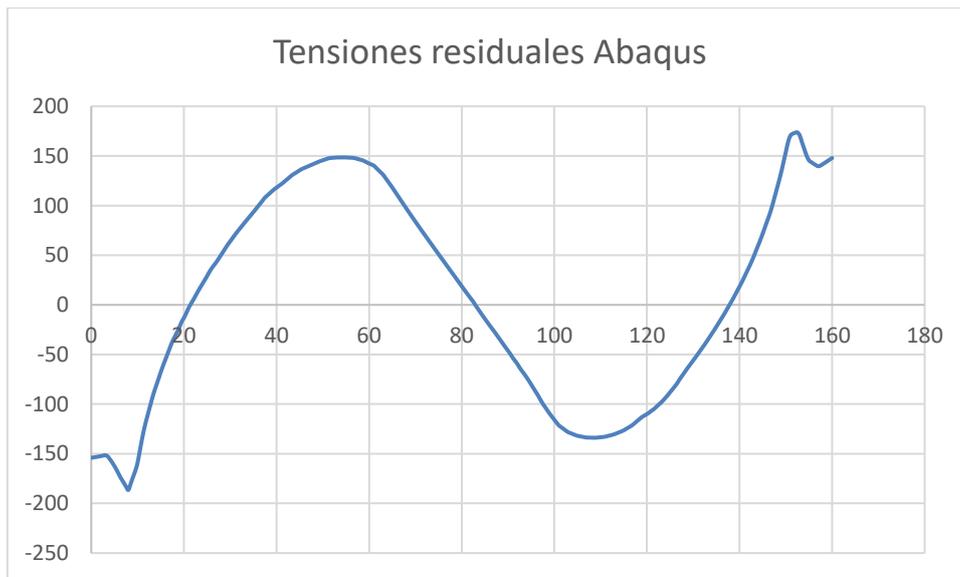
Los datos obtenidos a partir de la simulación con el software Abaqus, una vez graficados, son los siguientes:



Gráfica 40: Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.



Gráfica 41: Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico mediante Abaqus.

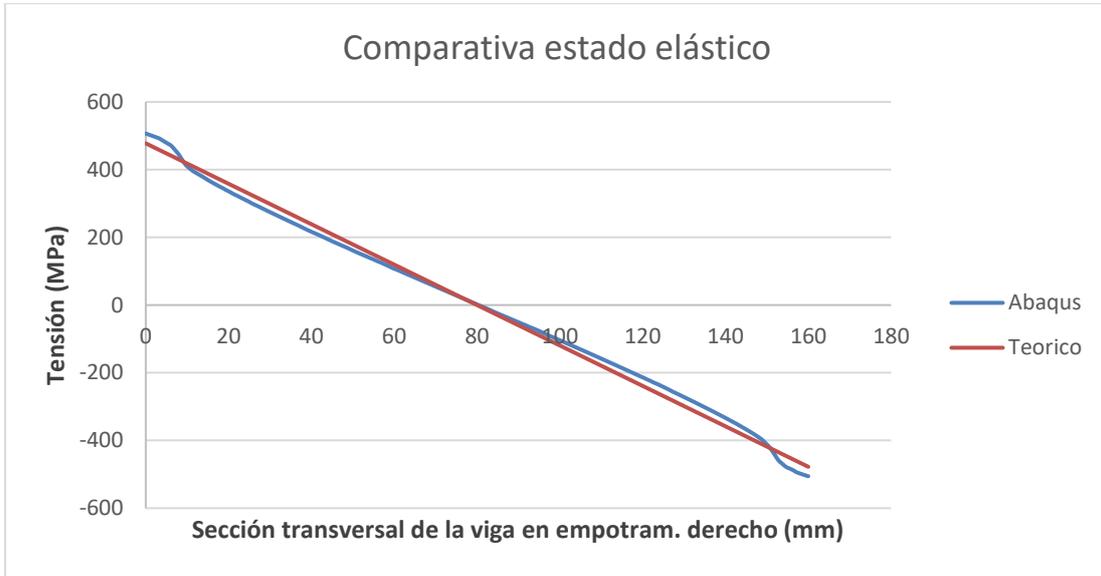


Gráfica 42: Representación de las tensiones residuales mediante Abaqus.

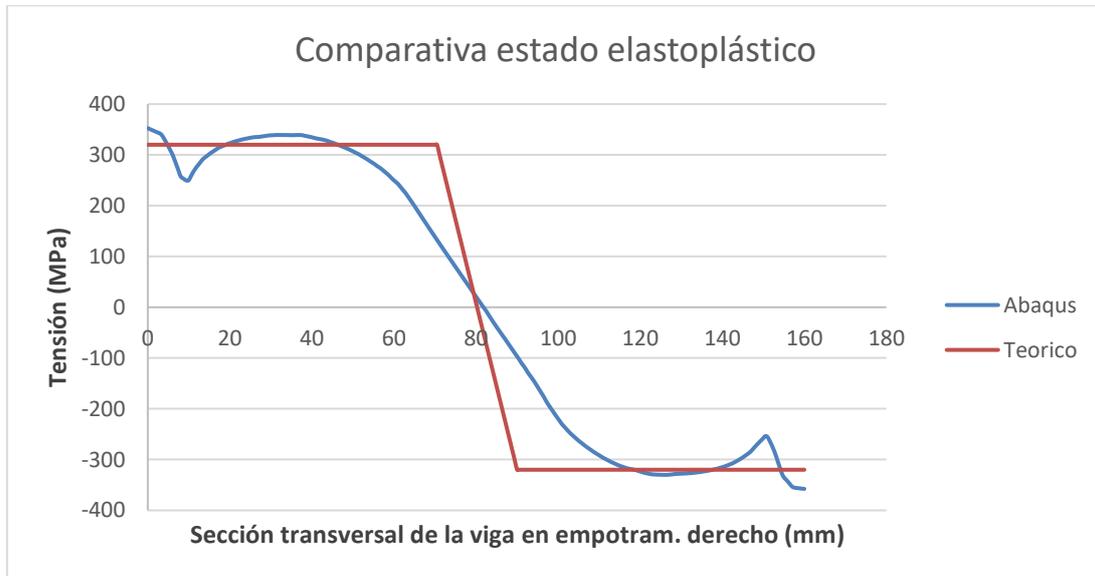
Saltan a la vista en la gráfica del rango elasto-plástico dos discontinuidades en los extremos, que después se ven reflejadas también en la gráfica de residuales. Si se tiene en cuenta su ubicación dentro de la sección, puede apreciarse que comienzan a algo menos de 10 mm de cada extremo, lo cual indica que probablemente se deban a la concentración de tensiones que tiene lugar en la unión entre el alma y el ala superior e inferior. A pesar de ello, las tres gráficas siguen la misma pauta que las anteriores.

5.5.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

Tras haber determinado todos los datos por ambos métodos, se representaran superpuestos para compararlos mejor:

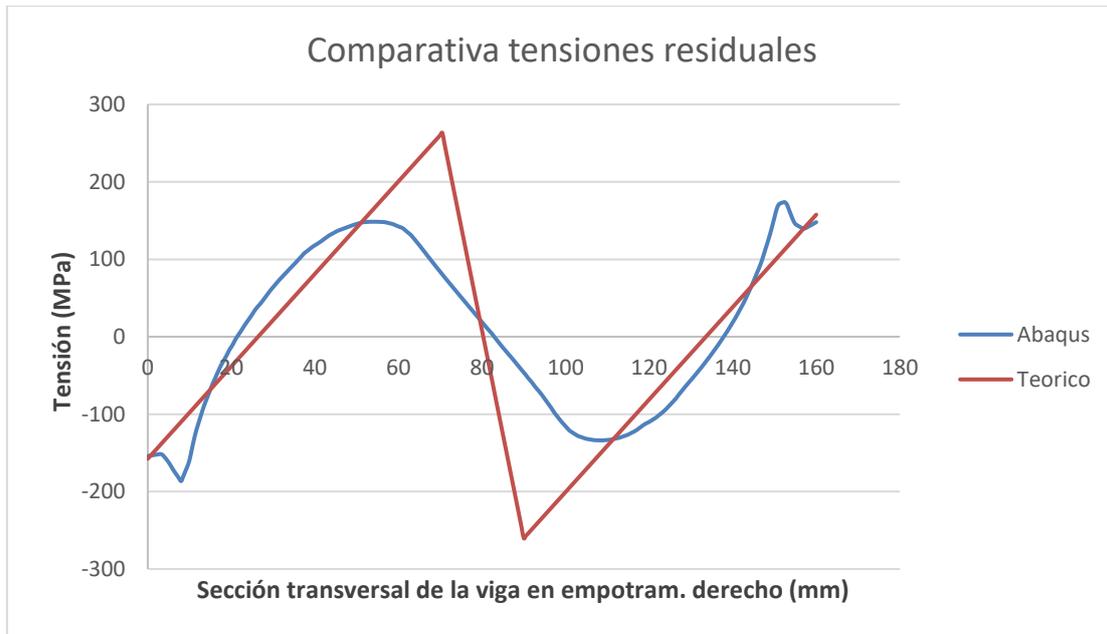


Gráfica 43: Comparación de resultados en el rango elástico.



Gráfica 44: Comparación de resultados en el rango elastoplástico.

Tanto en el rango elástico como en el elastoplástico, se aprecian dos discontinuidades en los extremos, ambas causadas, como ya se mencionó, por la concentración de tensiones. A parte de esas diferencias, la aproximación realizada sigue siendo buena ya que ambas gráficas siguen el mismo patrón de comportamiento.



Gráfica 45: Comparación de las tensiones residuales.

Ya se han comentado ciertos factores que influyen en la simulación con Abaqus y que evitan que las aproximaciones sean más precisas. Entre ellos, los más importantes son:

- El lugar preciso de la toma de datos en la simulación por ordenador (mínimamente alejado de donde se da el momento máximo).
- Las concentraciones de tensiones que tienen lugar en las uniones de la viga con perfil I.
- La aplicación progresiva de la carga.
- Las condiciones de apoyo de la viga. A mayor complejidad, menos precisión.
- En el cálculo analítico, el problema trata sobre un caso bidimensional, mientras que en la simulación con Abaqus, los resultados se obtienen a partir de un caso tridimensional.
- El mallado de la pieza no es todo lo fino que debería debido a las limitaciones que tiene la licencia académica del programa.

Teniendo en cuenta todas estas condiciones, se puede considerar que las aproximaciones son bastante buenas, ya que, en ningún caso, los resultados difieren de forma excesiva, ni en la forma de las gráficas ni en los valores que están representados en ellas.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES.

6.1 CONCLUSIONES SOBRE EL ESTUDIO REALIZADO.

Este TFG muestra los datos del estudio realizado a cinco tipos de vigas en cuanto a su comportamiento elasto-plástico:

- Viga isostática rectangular.
- Viga isostática con perfil en I.
- Viga en ménsula con perfil en I.
- Viga hiperestática rectangular.
- Viga biempotrada con perfil en I.

En todas ellas los resultados obtenidos han sido satisfactorios pese a que, a medida que aumentaba la complejidad de las condiciones de apoyo y carga, el error cometido va incrementándose. Como ejemplo representativo del error, puede tomarse la gráfica relativa al estado elasto-plástico de la quinta viga, en la que a 69mm de la base, Abaqus muestra un valor de 150,45 MPa mientras que el cálculo teórico ofrece 320MPa. Aunque este error pueda parecer demasiado grande, no significa que la aproximación haya sido mala, ya que puede verse que las gráficas siguen la misma pauta de comportamiento. Las causas que llevan a cometer este error son de origen muy diferente:

- Es complicado tomar los datos exactamente en el mismo punto en la simulación y en el cálculo teórico.
- El MEF no deja de ser un método aproximado, y su error cometido aumenta al aumentar el tamaño de la malla, aspecto en el cual existen limitaciones computacionales.
- El número de decimales utilizado en los cálculos es diferente.
- Abaqus realiza la simulación a partir de un modelo 3D, mientras que el cálculo teórico parte de un modelo bidimensional.
- El software tiene en cuenta factores como las concentraciones de tensiones, la aplicación progresiva de la carga, los efectos no lineales, etc.

El comportamiento mecánico de un material viene determinado por la respuesta que ofrece ante una situación de carga concreta y en unas condiciones de apoyo determinadas. Para poder conocer dicho comportamiento, sería necesario ensayar infinidad de piezas en el laboratorio, lo cual supondría una enorme inversión tanto económica como de tiempo. Con el objetivo de evitar estos costes, se han diseñado técnicas de simulación numérica por FEM que han permitido avanzar en la investigación y el desarrollo de materiales de una manera impensable hace no tanto tiempo. Hoy en día, existen multitud de programas que permiten utilizar el método de los elementos finitos en múltiples aplicaciones. En este estudio se ha utilizado la herramienta Abaqus para calcular las tensiones residuales que aparecen en diferentes vigas sometidas a flexión, pero las posibilidades de este tipo de software son mucho más variadas; desde análisis fluidomecánicos hasta estudios acústicos, pasando por problemas de conductividad, etc. Esto refleja la tremenda importancia que ha adquirido el MEF en los campos de la ingeniería y la física, disminuyendo tanto los costes económicos como los computacionales.

En este estudio se recogen los resultados teóricos y los proporcionados a partir de la simulación por ordenador de diferentes tipos de vigas. La aproximación realizada ha sido exitosa teniendo en cuenta los diferentes factores que influyen a la hora de realizar los cálculos. A partir de ahí, si se quisieran validar los resultados realmente, faltaría obtener los datos de forma experimental para poder verificar que tanto los resultados teóricos como los de la simulación son correctos.

Por otra parte, se concluye que el software Abaqus resulta muy adecuado para este tipo de estudios en los que se aplica MEF, ya que puede simular cualquier pieza que se pueda imaginar con apenas variar las condiciones que se le aplican. Además, muestra los resultados obtenidos de una forma muy intuitiva gracias a su representación cromática y a la variedad de formas que ofrece para extraer los datos necesarios.

A nivel personal, este TFG me ha ayudado a ampliar mis conocimientos acerca del comportamiento plástico del acero y a manejar con fluidez un software como es Abaqus, tan necesario como utilizado hoy en día en multitud de aplicaciones relacionadas con la ingeniería industrial. Gracias a la base obtenida en asignaturas como “Resistencia de Materiales”, “Elasticidad y Ampliación de resistencia de materiales” o “Diseño y Cálculo de Estructuras”, he podido adquirir y desarrollar los conceptos relativos a la plasticidad, los cuales no se tratan de una forma tan importante como pueden ser los de la elasticidad, ya que la gran mayoría de las piezas se diseñan para que no alcancen la fluencia durante su vida útil.

Es necesario mencionar que la mayor parte del trabajo de este estudio se basa en el método de prueba y error, es decir, se han realizado las simulaciones en multitud de vigas cambiando diferentes factores como la carga, el límite elástico o las condiciones de apoyo, hasta conseguir unos resultados adecuados e interpretables.

Por todo lo comentado anteriormente, creo que el balance ha sido muy positivo.

CAPÍTULO VII: BIBLIOGRAFÍA.

BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Beer, Johnston, DeWolf & Mazurek: Mecánica de Materiales (6ª edición). Mc Graw Hill.

- [2] Beer, Johnston, DeWolf & Mazurek: Mecánica de materiales (5ª edición). Mc Graw Hill. Fuente para todas las figuras del Capítulo II.

- [3] Hibbeler, R. C.: Mecánica de Materiales (6ª edición). Pearson Educación.

- [4] Reveriego J. A.: Fundamentos de Elementos finitos. Apuntes ETSII Béjar, Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras.

- [5] Nadia D. Román: Guía de Modelado con el Software Abaqus (2013). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe.

- [6] Maylett Y. Uzcátegui Flores: Abaqus, Programa de Elementos Finitos. Centro Nacional de Cálculo Científico Universidad de los Andes.

- [7] E. Alarcón, M. Doblaré. Teoría de Plasticidad, Conceptos Generales. Universidad Politécnica de Madrid.

- [8] https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_los_elementos_finitos

- [9] Matas M.: Análisis de Vigas y Pórticos Continuos. Apuntes ETSII Béjar, Diseño y Cálculo de Estructuras.

ANEXOS.

ANEXO I: RELACIÓN DE DATOS EN RANGO ELÁSTICO Y ELÁSTOPLÁSTICO.

- VIGA ISOSTÁTICA RECTANGULAR

Canto (mm)	Abaqus	Teórico	Abaqus	Teórico
	Elástico (Mpa)	Elástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)
0	-316,559	-321,866	-240,319	-240,000
0,5	-315,403	-319,567	-240,318	-240,000
1	-314,248	-317,268	-240,317	-240,000
1,5	-313,092	-314,969	-240,316	-240,000
2	-311,936	-312,670	-240,316	-240,000
2,5	-310,781	-310,371	-240,315	-240,000
3	-308,472	-308,072	-240,316	-240,000
3,5	-306,160	-305,773	-240,317	-240,000
4	-303,849	-303,474	-240,317	-240,000
4,5	-301,537	-301,175	-240,318	-240,000
5	-299,226	-298,875	-240,319	-240,000
5,5	-296,915	-296,576	-240,320	-240,000
6	-294,515	-294,277	-240,322	-240,000
6,5	-292,293	-291,978	-240,323	-240,000
7	-289,982	-289,679	-240,324	-240,000
7,5	-287,671	-287,380	-240,325	-240,000
8	-285,361	-285,081	-240,326	-240,000
8,5	-283,050	-282,782	-240,327	-240,000
9	-280,740	-280,483	-240,328	-240,000
9,5	-278,430	-278,184	-240,329	-240,000
10	-276,119	-275,885	-240,330	-240,000
10,5	-273,810	-273,586	-240,331	-240,000
11	-271,500	-271,287	-240,332	-240,000
11,5	-269,190	-268,988	-240,333	-240,000
12	-266,881	-266,689	-240,335	-240,000
12,5	-264,571	-264,390	-240,336	-240,000
13	-262,262	-262,091	-240,337	-240,000
13,5	-259,953	-259,792	-240,338	-240,000
14	-257,644	-257,493	-240,339	-240,000
14,5	-255,335	-255,194	-240,339	-240,000
15	-253,025	-252,895	-240,340	-240,000
15,5	-250,717	-250,596	-240,341	-240,000
16	-248,408	-248,297	-240,343	-240,000
16,5	-246,100	-245,998	-240,344	-240,000
17	-243,791	-243,698	-240,345	-240,000
17,5	-241,483	-241,399	-240,346	-240,000
18	-238,911	-239,100	-240,347	-240,000
18,5	-237,076	-236,801	-240,348	-240,000
19	-234,559	-234,502	-240,349	-240,000
19,5	-232,251	-232,203	-240,350	-240,000
20	-229,943	-229,904	-240,351	-240,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

20,5	-227,636	-227,605	-240,352	-240,000
21	-225,328	-225,306	-240,353	-240,000
21,5	-223,021	-223,007	-240,354	-240,000
22	-220,714	-220,708	-240,356	-240,000
22,5	-218,406	-218,409	-240,357	-240,000
23	-216,099	-216,110	-240,358	-240,000
23,5	-213,792	-213,811	-240,359	-240,000
24	-211,486	-211,512	-240,360	-240,000
24,5	-209,179	-209,213	-240,360	-240,000
25	-206,872	-206,914	-240,361	-240,000
25,5	-204,566	-204,615	-240,363	-240,000
26	-202,259	-202,316	-240,364	-240,000
26,5	-199,953	-200,017	-240,365	-240,000
27	-197,646	-197,718	-240,366	-240,000
27,5	-195,340	-195,419	-240,368	-240,000
28	-193,034	-193,120	-239,856	-240,000
28,5	-190,729	-190,820	-239,344	-240,000
29	-188,423	-188,521	-238,832	-240,000
29,5	-186,117	-186,222	-238,320	-240,000
30	-183,520	-183,923	-237,808	-240,000
30,5	-181,542	-181,624	-235,768	-240,000
31	-179,200	-179,325	-233,728	-239,995
31,5	-176,895	-177,026	-231,688	-236,918
32	-174,590	-174,727	-229,648	-233,841
32,5	-172,284	-172,428	-227,608	-230,764
33	-169,980	-170,129	-224,554	-227,687
33,5	-167,675	-167,830	-221,499	-224,610
34	-165,370	-165,531	-218,445	-221,533
34,5	-163,065	-163,232	-215,390	-218,456
35	-160,760	-160,933	-212,336	-215,380
35,5	-158,456	-158,634	-209,283	-212,303
36	-156,151	-156,335	-206,230	-209,226
36,5	-153,797	-154,036	-203,177	-206,149
37	-151,543	-151,737	-200,124	-203,072
37,5	-149,238	-149,438	-197,071	-199,995
38	-146,934	-147,139	-194,020	-196,918
38,5	-144,630	-144,840	-190,969	-193,841
39	-142,326	-142,541	-187,917	-190,765
39,5	-140,023	-140,242	-184,866	-187,688
40	-137,719	-137,943	-181,815	-184,611
40,5	-135,415	-135,643	-178,765	-181,534
41	-133,112	-133,344	-175,715	-178,457
41,5	-130,808	-131,045	-172,665	-175,380
42	-128,505	-128,746	-169,615	-172,303
42,5	-126,111	-126,447	-166,565	-169,226
43	-124,236	-124,148	-163,516	-166,150

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

43,5	-121,595	-121,849	-160,468	-163,073
44	-119,292	-119,550	-157,419	-159,996
44,5	-116,989	-117,251	-154,371	-156,919
45	-114,686	-114,952	-151,322	-153,842
45,5	-112,383	-112,653	-148,275	-150,765
46	-110,081	-110,354	-145,228	-147,688
46,5	-107,778	-108,055	-142,181	-144,611
47	-105,475	-105,756	-139,133	-141,534
47,5	-103,173	-103,457	-136,086	-138,458
48	-100,870	-101,158	-133,040	-135,381
48,5	-98,567	-98,848	-129,994	-132,304
49	-96,264	-96,545	-126,948	-129,227
49,5	-93,961	-94,226	-123,902	-126,150
50	-91,658	-91,939	-120,856	-123,073
50,5	-89,355	-89,636	-117,810	-119,996
51	-87,052	-87,333	-114,764	-116,919
51,5	-84,749	-85,030	-111,718	-113,843
52	-82,446	-82,726	-108,672	-110,766
52,5	-80,143	-80,423	-105,626	-107,689
53	-77,840	-78,121	-102,580	-104,612
53,5	-75,537	-75,818	-99,534	-101,535
54	-73,234	-73,515	-96,488	-98,458
54,5	-70,931	-71,212	-93,442	-95,381
55	-68,628	-68,909	-90,396	-92,304
55,5	-66,325	-66,606	-87,350	-89,228
56	-64,022	-64,303	-84,304	-86,151
56,5	-61,719	-62,000	-81,258	-83,074
57	-59,416	-59,697	-78,212	-79,997
57,5	-57,113	-57,394	-75,166	-76,920
58	-54,810	-55,091	-72,120	-73,843
58,5	-52,507	-52,788	-69,074	-70,766
59	-50,204	-50,485	-66,028	-67,689
59,5	-47,901	-48,182	-62,982	-64,612
60	-45,598	-45,879	-59,936	-61,535
60,5	-43,295	-43,576	-56,890	-58,458
61	-40,992	-41,273	-53,844	-55,381
61,5	-38,689	-38,970	-50,798	-52,304
62	-36,386	-36,667	-47,752	-49,228
62,5	-34,083	-34,364	-44,706	-46,151
63	-31,780	-32,061	-41,660	-43,074
63,5	-29,477	-29,758	-38,614	-39,997
64	-27,174	-27,455	-35,568	-36,920
64,5	-24,871	-25,152	-32,522	-33,843
65	-22,568	-22,849	-29,476	-30,766
65,5	-20,265	-20,546	-26,430	-27,689
66	-17,962	-18,243	-23,384	-24,612

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

66,5	-15,731	-16,093	-20,464	-21,536
67	-13,435	-13,794	-17,425	-18,459
67,5	-11,131	-11,495	-14,385	-15,382
68	-8,831	-9,196	-11,346	-12,306
68,5	-6,532	-6,897	-8,307	-9,229
69	-4,232	-4,598	-5,268	-6,152
69,5	-1,932	-2,299	-2,229	-3,075
70	0,367	0,000	0,810	0,002
70,5	2,667	2,299	3,848	3,079
71	4,966	4,598	6,887	6,156
71,5	7,265	6,897	9,925	9,233
72	9,565	9,196	12,964	12,310
72,5	11,864	11,495	16,002	15,386
73	14,242	13,794	19,040	18,463
73,5	16,462	16,093	22,078	21,540
74	18,761	18,392	25,116	24,617
74,5	21,061	20,691	28,154	27,694
75	23,360	22,990	31,192	30,771
75,5	25,659	25,289	34,230	33,848
76	27,957	27,589	37,268	36,925
76,5	30,256	29,888	40,305	40,001
77	32,555	32,187	43,343	43,078
77,5	34,854	34,486	46,380	46,155
78	37,153	36,785	49,418	49,232
78,5	39,451	39,084	52,455	52,309
79	41,910	41,383	55,493	55,386
79,5	44,049	43,682	58,530	58,463
80	46,347	45,981	61,567	61,540
80,5	48,646	48,280	64,604	64,616
81	50,944	50,579	67,642	67,693
81,5	53,243	52,878	70,679	70,770
82	55,541	55,177	73,716	73,847
82,5	57,840	57,476	76,753	76,924
83	60,138	59,775	79,790	80,001
83,5	62,436	62,074	82,827	83,078
84	64,734	64,373	85,864	86,155
84,5	67,033	66,672	88,901	89,232
85	69,491	68,971	91,938	92,308
85,5	71,398	71,270	94,975	95,385
86	73,927	73,569	98,012	98,462
86,5	76,225	75,868	101,048	101,539
87	78,523	78,167	104,085	104,616
87,5	80,821	80,466	107,122	107,693
88	83,119	82,766	110,159	110,770
88,5	85,417	85,065	113,196	113,847
89	87,715	87,364	116,233	116,923

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

89,5	90,013	89,663	119,270	120,000
90	92,311	91,962	122,307	123,077
90,5	94,609	94,261	125,344	126,154
91	96,906	96,560	128,381	129,231
91,5	99,053	98,859	131,418	132,308
92	101,502	101,158	134,455	135,385
92,5	103,800	103,457	137,492	138,462
93	106,097	105,756	140,529	141,538
93,5	108,395	108,055	143,566	144,615
94	110,693	110,354	146,603	147,692
94,5	112,990	112,653	149,641	150,769
95	115,288	114,952	152,678	153,846
95,5	117,585	117,251	155,715	156,923
96	119,883	119,550	158,753	160,000
96,5	122,180	121,849	161,790	163,077
97	124,478	124,148	164,827	166,154
97,5	126,775	126,447	167,865	169,230
98	129,073	128,746	170,902	172,307
98,5	131,370	131,045	173,940	175,384
99	133,668	133,344	176,978	178,461
99,5	135,965	135,643	180,016	181,538
100	138,262	137,943	183,054	184,615
100,5	140,560	140,242	186,092	187,692
101	142,857	142,541	189,130	190,769
101,5	145,154	144,840	192,168	193,846
102	147,452	147,139	195,206	196,923
102,5	149,749	149,438	198,244	200,000
103	152,046	151,737	201,282	203,077
103,5	154,352	154,036	204,321	206,154
104	156,641	156,335	207,360	209,230
104,5	158,938	158,634	210,398	212,307
105	161,235	160,933	213,437	215,384
105,5	163,532	163,232	216,476	218,461
106	165,830	165,531	219,515	221,538
106,5	168,127	167,830	222,554	224,615
107	170,424	170,129	225,593	227,692
107,5	172,721	172,428	228,632	230,769
108	175,018	174,727	230,519	233,845
108,5	177,315	177,026	232,405	236,922
109	179,612	179,325	234,292	239,999
109,5	181,910	181,624	236,179	240,000
110	184,207	183,923	238,065	240,000
110,5	186,504	186,222	238,433	240,000
111	188,801	188,521	238,801	240,000
111,5	191,098	190,820	239,169	240,000
112	193,395	193,120	239,537	240,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

112,5	195,692	195,419	239,905	240,000
113	197,989	197,718	239,908	240,000
113,5	200,286	200,017	239,910	240,000
114	202,583	202,316	239,912	240,000
114,5	204,880	204,615	239,914	240,000
115	207,177	206,914	239,917	240,000
115,5	209,640	209,213	239,920	240,000
116	211,772	211,512	239,922	240,000
116,5	214,069	213,811	239,925	240,000
117	216,366	216,110	239,928	240,000
117,5	218,663	218,409	239,931	240,000
118	220,960	220,708	239,933	240,000
118,5	223,257	223,007	239,936	240,000
119	225,554	225,306	239,938	240,000
119,5	227,851	227,605	239,940	240,000
120	230,148	229,904	239,943	240,000
120,5	232,445	232,203	239,945	240,000
121	234,742	234,502	239,948	240,000
121,5	237,039	236,801	239,951	240,000
122	239,336	239,100	239,954	240,000
122,5	241,634	241,399	239,957	240,000
123	243,931	243,698	239,959	240,000
123,5	246,228	245,998	239,961	240,000
124	248,525	248,297	239,964	240,000
124,5	250,822	250,596	239,966	240,000
125	253,119	252,895	239,969	240,000
125,5	255,416	255,194	239,971	240,000
126	257,714	257,493	239,974	240,000
126,5	260,011	259,792	239,977	240,000
127	262,308	262,091	239,980	240,000
127,5	264,818	264,390	239,983	240,000
128	266,750	266,689	239,985	240,000
128,5	269,199	268,988	239,987	240,000
129	271,497	271,287	239,990	240,000
129,5	273,794	273,586	239,992	240,000
130	276,091	275,885	239,994	240,000
130,5	278,389	278,184	239,997	240,000
131	280,686	280,483	240,000	240,000
131,5	282,983	282,782	240,003	240,000
132	285,281	285,081	240,006	240,000
132,5	287,578	287,380	240,008	240,000
133	289,875	289,679	240,011	240,000
133,5	292,173	291,978	240,013	240,000
134	294,394	294,277	240,015	240,000
134,5	296,767	296,576	240,018	240,000
135	299,065	298,875	240,020	240,000

135,5	301,362	301,175	240,023	240,000
136	303,660	303,474	240,026	240,000
136,5	305,957	305,773	240,029	240,000
137	308,255	308,072	240,031	240,000
137,5	310,553	310,371	240,034	240,000
138	311,704	312,670	240,037	240,000
138,5	312,853	314,969	240,039	240,000
139	314,002	317,268	240,041	240,000
139,5	315,151	319,567	240,043	240,000
140	316,300	321,866	240,046	240,000

- VIGA ISOSTÁTICA CON PERFIL I

Canto (mm)	Abaqus	Teórico	Abaqus	Teórico
	Elástico (Mpa)	Elástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)
0,000	-343,549	-352,733	-310,688	-320,000
0,500	-342,886	-350,528	-311,530	-320,000
1,000	-342,222	-348,323	-312,371	-320,000
1,500	-341,559	-346,119	-313,212	-320,000
2,000	-340,697	-343,914	-314,305	-320,000
2,500	-339,370	-341,710	-315,993	-320,000
3,000	-338,043	-339,505	-317,681	-320,000
3,500	-336,715	-337,301	-319,368	-320,000
4,000	-335,307	-335,096	-320,905	-320,000
4,500	-333,850	-332,891	-322,340	-320,000
5,000	-332,396	-330,687	-323,778	-320,000
5,500	-330,945	-328,482	-325,219	-320,000
6,000	-328,952	-326,278	-325,707	-320,000
6,500	-326,905	-324,073	-326,080	-320,000
7,000	-324,865	-321,869	-326,455	-320,000
7,500	-322,719	-319,664	-326,633	-320,000
8,000	-320,100	-317,459	-325,953	-320,000
8,500	-317,481	-315,255	-325,279	-320,000
9,000	-314,861	-313,050	-324,611	-320,000
9,501	-312,277	-310,846	-323,991	-320,000
10,001	-309,821	-308,641	-323,534	-320,000
10,501	-307,364	-306,436	-323,076	-320,000
11,001	-304,908	-304,232	-322,618	-320,000
11,501	-302,512	-302,027	-322,268	-320,000
12,001	-300,311	-299,823	-322,298	-320,000
12,501	-298,111	-297,618	-322,328	-320,000
13,001	-295,910	-295,414	-322,356	-320,000
13,501	-293,710	-293,209	-322,389	-320,000
14,001	-291,512	-291,004	-322,438	-320,000
14,501	-289,313	-288,800	-322,487	-320,000
15,001	-287,115	-286,595	-322,536	-320,000
15,501	-284,909	-284,391	-322,570	-320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

16,001	-282,684	-282,186	-322,560	-320,000
16,501	-280,459	-279,982	-322,550	-320,000
17,001	-278,234	-277,777	-322,540	-320,000
17,501	-276,010	-275,572	-322,533	-320,000
18,001	-273,790	-273,368	-322,531	-320,000
18,501	-271,570	-271,163	-322,530	-320,000
19,001	-269,350	-268,959	-322,529	-320,000
19,501	-267,130	-266,754	-322,529	-320,000
20,001	-264,913	-264,549	-322,532	-320,000
20,501	-262,696	-262,345	-322,536	-320,000
21,001	-260,479	-260,140	-322,539	-320,000
21,501	-258,262	-257,936	-322,542	-320,000
22,001	-256,044	-255,731	-322,542	-320,000
22,501	-253,825	-253,527	-322,542	-320,000
23,001	-251,607	-251,322	-322,543	-320,000
23,501	-249,389	-249,117	-322,544	-320,000
24,001	-247,172	-246,913	-322,546	-320,000
24,501	-244,955	-244,708	-322,548	-320,000
25,001	-242,738	-242,504	-322,551	-320,000
25,501	-240,521	-240,299	-322,556	-320,000
26,001	-238,303	-238,095	-322,568	-320,000
26,501	-236,086	-235,890	-322,580	-320,000
27,001	-233,869	-233,685	-322,592	-319,992
27,502	-231,652	-231,481	-322,590	-316,972
28,002	-229,436	-229,276	-322,564	-313,953
28,502	-227,220	-227,072	-322,538	-310,934
29,002	-225,004	-224,867	-322,513	-307,914
29,502	-222,787	-222,662	-321,938	-304,895
30,002	-220,571	-220,458	-320,532	-301,876
30,502	-218,355	-218,253	-319,126	-298,857
31,002	-216,139	-216,049	-317,720	-295,838
31,502	-213,923	-213,844	-315,629	-292,819
32,002	-211,707	-211,640	-312,584	-289,800
32,502	-209,492	-209,435	-309,540	-286,781
33,002	-207,277	-207,230	-306,495	-283,761
33,502	-205,061	-205,026	-303,318	-280,742
34,002	-202,846	-202,821	-299,970	-277,723
34,502	-200,631	-200,617	-296,623	-274,704
35,002	-198,415	-198,412	-293,276	-271,685
35,502	-196,200	-196,208	-289,932	-268,666
36,002	-193,986	-194,003	-286,590	-265,647
36,502	-191,771	-191,798	-283,249	-262,627
37,002	-189,557	-189,594	-279,908	-259,608
37,502	-187,342	-187,389	-276,570	-256,589
38,002	-185,128	-185,185	-273,236	-253,570
38,502	-182,913	-182,980	-269,902	-250,550

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

39,002	-180,699	-180,775	-266,568	-247,531
39,502	-178,485	-178,571	-263,237	-244,512
40,002	-176,271	-176,366	-259,907	-241,493
40,502	-174,057	-174,162	-256,577	-238,474
41,002	-171,844	-171,957	-253,248	-235,455
41,502	-169,630	-169,753	-249,921	-232,436
42,002	-167,416	-167,548	-246,595	-229,417
42,502	-165,203	-165,343	-243,270	-226,397
43,002	-162,989	-163,139	-239,945	-223,378
43,502	-160,776	-160,934	-236,622	-220,359
44,002	-158,563	-158,730	-233,301	-217,340
44,502	-156,350	-156,525	-229,980	-214,321
45,002	-154,137	-154,321	-226,659	-211,302
45,502	-151,925	-152,116	-223,340	-208,283
46,003	-149,712	-149,911	-220,023	-205,263
46,503	-147,499	-147,707	-216,706	-202,244
47,003	-145,287	-145,502	-213,389	-199,225
47,503	-143,074	-143,298	-210,075	-196,206
48,003	-140,862	-141,093	-206,761	-193,186
48,503	-138,650	-138,888	-203,448	-190,167
49,003	-136,438	-136,684	-200,135	-187,148
49,503	-134,226	-134,479	-196,823	-184,129
50,003	-132,014	-132,275	-193,514	-181,110
50,503	-129,802	-130,070	-190,204	-178,091
51,003	-127,590	-127,866	-186,894	-175,072
51,503	-125,379	-125,661	-183,586	-172,052
52,003	-123,167	-123,456	-180,279	-169,033
52,503	-120,956	-121,252	-176,973	-166,014
53,003	-118,745	-119,047	-173,666	-162,995
53,503	-116,533	-116,843	-170,361	-159,975
54,003	-114,322	-114,638	-167,057	-156,956
54,503	-112,111	-112,434	-163,753	-153,937
55,003	-109,900	-110,229	-160,450	-150,918
55,503	-107,689	-108,024	-157,147	-147,899
56,003	-105,479	-105,820	-153,846	-144,880
56,503	-103,268	-103,615	-150,545	-141,861
57,003	-101,058	-101,411	-147,244	-138,842
57,503	-98,847	-99,206	-143,945	-135,822
58,003	-96,637	-97,001	-140,646	-132,803
58,503	-94,427	-94,797	-137,347	-129,784
59,003	-92,216	-92,592	-134,048	-126,765
59,503	-90,006	-90,388	-130,751	-123,746
60,003	-87,796	-88,183	-127,455	-120,727
60,503	-85,587	-85,979	-124,158	-117,708
61,003	-83,377	-83,774	-120,862	-114,688
61,503	-81,167	-81,569	-117,567	-111,669

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

62,003	-78,957	-79,365	-114,272	-108,650
62,503	-76,748	-77,160	-110,977	-105,631
63,003	-74,538	-74,956	-107,683	-102,611
63,503	-72,329	-72,751	-104,390	-99,592
64,003	-70,120	-70,547	-101,097	-96,573
64,504	-67,910	-68,342	-97,804	-93,554
65,004	-65,701	-66,137	-94,511	-90,535
65,504	-63,492	-63,933	-91,220	-87,516
66,004	-61,283	-61,728	-87,928	-84,497
66,504	-59,074	-59,524	-84,637	-81,477
67,004	-56,865	-57,319	-81,346	-78,458
67,504	-54,657	-55,114	-78,055	-75,439
68,004	-52,448	-52,910	-74,765	-72,420
68,504	-50,240	-50,705	-71,475	-69,401
69,004	-48,031	-48,501	-68,185	-66,382
69,504	-45,823	-46,296	-64,896	-63,362
70,004	-43,614	-44,092	-61,608	-60,343
70,504	-41,406	-41,887	-58,319	-57,324
71,004	-39,198	-39,682	-55,030	-54,304
71,504	-36,990	-37,478	-51,742	-51,285
72,004	-34,782	-35,273	-48,454	-48,266
72,504	-32,574	-33,069	-45,166	-45,247
73,004	-30,366	-30,864	-41,878	-42,228
73,504	-28,158	-28,660	-38,591	-39,209
74,004	-25,950	-26,455	-35,303	-36,190
74,504	-23,742	-24,250	-32,016	-33,170
75,004	-21,534	-22,046	-28,729	-30,151
75,504	-19,327	-19,841	-25,442	-27,132
76,004	-17,119	-17,637	-22,155	-24,113
76,504	-14,912	-15,432	-18,869	-21,094
77,004	-12,704	-13,227	-15,582	-18,075
77,504	-10,497	-11,023	-12,296	-15,056
78,004	-8,290	-8,818	-9,108	-12,036
78,504	-6,083	-6,614	-5,723	-9,017
79,004	-3,875	-4,409	-2,436	-5,998
79,504	-1,668	-2,205	0,850	-2,978
80,004	0,539	0,000	4,136	0,041
80,504	2,746	2,205	7,422	3,060
81,005	4,953	4,409	10,709	6,079
81,505	7,160	6,614	13,995	9,098
82,005	9,366	8,818	17,281	12,117
82,505	11,573	11,023	20,567	15,137
83,005	13,780	13,227	23,854	18,156
83,505	15,987	15,432	27,140	21,175
84,005	18,193	17,637	30,427	24,194
84,505	20,400	19,841	33,713	27,213

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

85,005	22,607	22,046	36,999	30,232
85,505	24,813	24,250	40,286	33,251
86,005	27,019	26,455	43,573	36,271
86,505	29,226	28,660	46,860	39,290
87,005	31,432	30,864	50,147	42,309
87,505	33,639	33,069	53,434	45,329
88,005	35,845	35,273	56,722	48,348
88,505	38,051	37,478	60,009	51,367
89,005	40,257	39,682	63,296	54,386
89,505	42,464	41,887	66,585	57,405
90,005	44,670	44,092	69,873	60,424
90,505	46,876	46,296	73,161	63,443
91,005	49,082	48,501	76,449	66,463
91,505	51,288	50,705	79,738	69,482
92,005	53,494	52,910	83,027	72,501
92,505	55,700	55,114	86,316	75,520
93,005	57,906	57,319	89,605	78,539
93,505	60,112	59,524	92,895	81,558
94,005	62,318	61,728	96,185	84,578
94,505	64,524	63,933	99,475	87,597
95,005	66,730	66,137	102,766	90,616
95,505	68,935	68,342	106,057	93,635
96,005	71,141	70,547	109,348	96,655
96,505	73,347	72,751	112,639	99,674
97,005	75,553	74,956	115,931	102,693
97,506	77,759	77,160	119,224	105,712
98,006	79,964	79,365	122,516	108,731
98,506	82,170	81,569	125,809	111,750
99,006	84,376	83,774	129,102	114,770
99,506	86,581	85,979	132,396	117,789
100,006	88,787	88,183	135,690	120,810
100,506	90,993	90,388	138,984	123,829
101,006	93,198	92,592	142,279	126,848
101,506	95,404	94,797	145,575	129,867
102,006	97,610	97,001	148,871	132,886
102,506	99,815	99,206	152,166	135,905
103,006	102,021	101,411	155,463	138,924
103,506	104,226	103,615	158,760	141,943
104,006	106,432	105,820	162,058	144,962
104,506	108,638	108,024	165,356	147,981
105,006	110,843	110,229	168,654	151,000
105,506	113,049	112,434	171,954	154,019
106,006	115,254	114,638	175,253	157,038
106,506	117,460	116,843	178,553	160,057
107,006	119,665	119,047	181,853	163,076
107,506	121,871	121,252	185,155	166,095

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

108,006	124,076	123,456	188,457	169,114
108,506	126,282	125,661	191,759	172,133
109,006	128,488	127,866	195,061	175,152
109,506	130,693	130,070	198,366	178,171
110,006	132,899	132,275	201,670	181,190
110,506	135,104	134,479	204,974	184,209
111,006	137,310	136,684	208,279	187,228
111,506	139,515	138,888	211,586	190,247
112,006	141,721	141,093	214,892	193,266
112,506	143,927	143,298	218,199	196,285
113,006	146,132	145,502	221,507	199,304
113,506	148,338	147,707	224,816	202,323
114,006	150,543	149,911	228,125	205,342
114,507	152,749	152,116	231,435	208,367
115,007	154,955	154,321	234,745	211,386
115,507	157,160	156,525	238,058	214,405
116,007	159,366	158,730	241,370	217,424
116,507	161,572	160,934	244,683	220,443
117,007	163,777	163,139	247,996	223,462
117,507	165,983	165,343	251,312	226,481
118,007	168,189	167,548	254,628	229,500
118,507	170,394	169,753	257,943	232,519
119,007	172,600	171,957	261,260	235,538
119,507	174,806	174,162	264,578	238,557
120,007	177,012	176,366	267,896	241,576
120,507	179,217	178,571	271,215	244,595
121,007	181,423	180,775	274,535	247,614
121,507	183,629	182,980	277,859	250,633
122,007	185,835	185,185	281,183	253,652
122,507	188,041	187,389	284,507	256,671
123,007	190,246	189,594	287,835	259,690
123,507	192,452	191,798	291,168	262,709
124,007	194,658	194,003	294,501	265,728
124,507	196,864	196,208	297,834	268,747
125,007	199,070	198,412	301,135	271,766
125,507	201,276	200,617	304,397	274,785
126,007	203,482	202,821	307,660	277,804
126,507	205,688	205,026	310,922	280,823
127,007	207,894	207,230	313,422	283,842
127,507	210,100	209,435	315,056	286,861
128,007	212,306	211,640	316,691	289,880
128,507	214,512	213,844	318,325	292,899
129,007	216,718	216,049	319,172	295,918
129,507	218,924	218,253	319,207	298,937
130,007	221,130	220,458	319,241	301,956
130,507	223,337	222,662	319,275	304,975

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

131,008	225,543	224,867	319,288	308,000
131,508	227,749	227,072	319,281	311,019
132,008	229,955	229,276	319,274	314,038
132,508	232,162	231,481	319,266	317,057
133,008	234,368	233,685	319,264	320,076
133,508	236,574	235,890	319,266	320,000
134,008	238,780	238,095	319,269	320,000
134,508	240,987	240,299	319,271	320,000
135,008	243,193	242,504	319,274	320,000
135,508	245,399	244,708	319,279	320,000
136,008	247,606	246,913	319,284	320,000
136,508	249,812	249,117	319,289	320,000
137,008	252,019	251,322	319,293	320,000
137,508	254,225	253,527	319,296	320,000
138,008	256,432	255,731	319,299	320,000
138,508	258,638	257,936	319,303	320,000
139,008	260,845	260,140	319,306	320,000
139,508	263,052	262,345	319,310	320,000
140,008	265,259	264,549	319,314	320,000
140,508	267,465	266,754	319,318	320,000
141,008	269,672	268,959	319,321	320,000
141,508	271,878	271,163	319,324	320,000
142,008	274,085	273,368	319,326	320,000
142,508	276,291	275,572	319,329	320,000
143,008	278,497	277,777	319,330	320,000
143,508	280,703	279,982	319,330	320,000
144,008	282,908	282,186	319,331	320,000
144,508	285,114	284,391	319,331	320,000
145,008	287,323	286,595	319,342	320,000
145,508	289,535	288,800	319,358	320,000
146,008	291,746	291,004	319,373	320,000
146,508	293,957	293,209	319,389	320,000
147,008	296,168	295,414	319,399	320,000
147,509	298,379	297,618	319,408	320,000
148,009	300,590	299,823	319,417	320,000
148,509	302,801	302,027	319,426	320,000
149,009	304,973	304,232	319,342	320,000
149,509	307,131	306,436	319,226	320,000
150,009	309,290	308,641	319,109	320,000
150,509	311,448	310,846	318,993	320,000
151,009	313,581	313,050	318,832	320,000
151,509	315,708	315,255	318,656	320,000
152,009	317,834	317,459	318,478	320,000
152,509	319,960	319,664	318,299	320,000
153,009	322,185	321,869	318,341	320,000
153,509	324,441	324,073	318,441	320,000

154,009	326,702	326,278	318,541	320,000
154,509	328,979	328,482	318,667	320,000
155,009	331,358	330,687	319,050	320,000
155,509	333,736	332,891	319,433	320,000
156,009	336,114	335,096	319,816	320,000
156,509	338,504	337,301	320,216	320,000
157,009	340,912	339,505	320,646	320,000
157,509	343,321	341,710	321,076	320,000
158,009	345,729	343,914	321,505	320,000
158,509	347,297	346,119	321,781	320,000
159,009	348,502	348,323	321,990	320,000
159,509	349,707	350,528	322,199	320,000
160,009	350,912	352,733	322,407	320,000

- VIGA EN MÉNSULA CON PERFIL I

	Abaqus	Teórico	Abaqus	Teórico
Canto (mm)	Elástico (Mpa)	Elástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)
0,000	339,431	352,733	311,915	300,000
0,500	339,303	350,528	312,180	300,000
1,000	339,174	348,323	312,449	300,000
1,500	339,043	346,119	312,722	300,000
2,000	338,806	343,914	313,044	300,000
2,500	338,310	341,710	313,480	300,000
3,000	337,807	339,505	313,927	300,000
3,500	337,304	337,301	314,400	300,000
4,000	336,468	335,096	314,469	300,000
4,500	335,415	332,891	314,239	300,000
5,000	334,348	330,687	314,040	300,000
5,500	333,276	328,482	313,923	300,000
6,000	331,209	326,278	312,148	300,000
6,500	329,011	324,073	310,220	300,000
7,000	326,857	321,869	308,208	300,000
7,500	324,524	319,664	305,997	300,000
8,000	321,330	317,459	303,627	300,000
8,500	318,135	315,255	301,257	300,000
9,000	314,941	313,050	298,886	300,000
9,500	311,784	310,846	297,034	300,000
10,000	308,758	308,641	296,997	300,000
10,500	305,732	306,436	296,960	300,000
11,000	302,706	304,232	296,923	300,000
11,500	299,804	302,027	297,273	300,000
12,000	297,286	299,823	298,824	300,000
12,500	294,769	297,618	300,374	300,000
13,000	292,251	295,414	301,925	300,000
13,500	289,762	293,209	303,436	300,000
14,000	287,351	291,004	304,838	300,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

14,500	284,940	288,800	306,240	300,000
15,000	282,530	286,595	307,642	300,000
15,500	280,110	284,391	308,911	300,000
16,000	277,669	282,186	309,850	300,000
16,500	275,227	279,982	310,789	300,000
17,000	272,786	277,777	311,728	300,000
17,500	270,352	275,572	312,602	300,000
18,000	267,934	273,368	313,330	300,000
18,500	265,516	271,163	314,058	300,000
19,000	263,098	268,959	314,786	300,000
19,500	260,692	266,754	315,465	300,000
20,000	258,308	264,549	316,045	300,000
20,500	255,924	262,345	316,625	300,000
21,000	253,540	260,140	317,205	300,000
21,500	251,166	257,936	317,751	300,000
22,000	248,811	255,731	318,236	300,000
22,500	246,455	253,527	318,720	300,000
23,000	244,099	251,322	319,204	300,000
23,500	241,756	249,117	319,653	300,000
24,000	239,435	246,913	320,045	300,000
24,500	237,114	244,708	320,436	300,000
25,000	234,793	242,504	320,827	300,000
25,500	232,481	240,299	321,183	300,000
26,000	230,183	238,095	321,486	300,000
26,500	227,886	235,890	321,789	300,000
27,000	225,588	233,685	322,091	300,000
27,500	223,303	231,481	322,358	300,000
28,000	221,034	229,276	322,576	300,000
28,500	218,765	227,072	322,794	300,000
29,000	216,496	224,867	323,011	300,000
29,500	214,236	222,662	323,193	300,000
30,000	211,986	220,458	323,328	300,000
30,500	209,737	218,253	323,463	300,000
31,000	207,488	216,049	323,598	300,000
31,500	205,249	213,844	323,699	300,000
32,000	203,022	211,640	323,763	300,000
32,500	200,795	209,435	323,826	300,000
33,000	198,567	207,230	323,890	300,000
33,500	196,348	205,026	323,924	300,000
34,000	194,137	202,821	323,926	300,000
34,500	191,926	200,617	323,928	300,000
35,000	189,715	198,412	323,930	300,000
35,500	187,513	196,208	323,908	300,000
36,000	185,319	194,003	323,864	300,000
36,500	183,125	191,798	323,819	300,000
37,000	180,931	189,594	323,775	300,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

37,500	178,745	187,389	323,713	300,000
38,000	176,564	185,185	323,635	300,000
38,500	174,384	182,980	323,557	300,000
39,000	172,203	180,775	323,479	296,407
39,500	170,030	178,571	323,392	292,814
40,000	167,863	176,366	323,299	289,221
40,500	165,696	174,162	323,205	285,628
41,000	163,529	171,957	323,112	282,035
41,500	161,368	169,753	323,016	278,442
42,000	159,212	167,548	322,917	274,849
42,500	157,056	165,343	322,819	271,256
43,000	154,900	163,139	322,720	267,663
43,500	152,750	160,934	322,620	264,070
44,000	150,605	158,730	322,518	260,477
44,500	148,460	156,525	322,416	256,884
45,000	146,315	154,321	322,315	253,291
45,500	144,175	152,116	322,240	249,698
46,000	142,039	149,911	322,183	246,105
46,500	139,903	147,707	322,125	242,512
47,000	137,767	145,502	322,067	238,919
47,500	135,637	143,298	322,003	235,326
48,000	133,509	141,093	321,935	231,733
48,500	131,382	138,888	321,867	228,140
49,000	129,255	136,684	321,799	224,547
49,500	127,133	134,479	321,343	220,954
50,000	125,013	132,275	320,686	217,361
50,500	122,893	130,070	320,030	213,768
51,000	120,774	127,866	319,374	210,175
51,500	118,659	125,661	316,223	206,582
52,000	116,547	123,456	311,911	202,989
52,500	114,434	121,252	307,599	199,396
53,000	112,322	119,047	303,287	195,803
53,500	110,214	116,843	296,878	192,210
54,000	108,108	114,638	289,588	188,617
54,500	106,002	112,434	282,299	185,024
55,000	103,895	110,229	275,009	181,431
55,500	101,794	108,024	268,027	177,838
56,000	99,693	105,820	261,162	174,245
56,500	97,593	103,615	254,297	170,652
57,000	95,493	101,411	247,431	167,059
57,500	93,396	99,206	240,976	163,466
58,000	91,301	97,001	234,660	159,873
58,500	89,206	94,797	228,343	156,280
59,000	87,111	92,592	222,026	152,687
59,500	85,019	90,388	216,045	149,094
60,000	82,929	88,183	210,165	145,501

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

60,500	80,838	85,979	204,284	141,908
61,000	78,748	83,774	198,404	138,315
61,500	76,660	81,569	192,750	134,722
62,000	74,574	79,365	187,156	131,129
62,500	72,488	77,160	181,562	127,536
63,000	70,401	74,956	175,968	123,943
63,500	68,318	72,751	170,540	120,350
64,000	66,235	70,547	165,151	116,757
64,500	64,152	68,342	159,762	113,164
65,000	62,069	66,137	154,373	109,571
65,500	59,989	63,933	149,108	105,978
66,000	57,910	61,728	143,869	102,385
66,500	55,830	59,524	138,629	98,792
67,000	53,750	57,319	133,389	95,199
67,500	51,673	55,114	128,244	91,606
68,000	49,596	52,910	123,115	88,013
68,500	47,519	50,705	117,987	84,420
69,000	45,442	48,501	112,858	80,827
69,500	43,367	46,296	107,803	77,234
70,000	41,292	44,092	102,757	73,641
70,500	39,217	41,887	97,712	70,048
71,000	37,142	39,682	92,667	66,455
71,500	35,069	37,478	87,678	62,862
72,000	32,996	35,273	82,695	59,269
72,500	30,923	33,069	77,712	55,676
73,000	28,850	30,864	72,729	52,083
73,500	26,778	28,660	67,788	48,490
74,000	24,706	26,455	62,851	44,897
74,500	22,635	24,250	57,914	41,304
75,000	20,563	22,046	52,976	37,711
75,500	18,492	19,841	48,069	34,118
76,000	16,421	17,637	43,163	30,525
76,500	14,350	15,432	38,258	26,932
77,000	12,280	13,227	33,352	23,339
77,500	10,209	11,023	28,465	19,746
78,000	8,139	8,818	23,579	16,153
78,500	6,068	6,614	18,692	12,560
79,000	3,998	4,409	13,806	8,967
79,500	1,928	2,205	8,927	5,374
80,000	-0,142	0,000	4,049	1,781
80,500	-2,213	-2,205	-0,829	-1,812
81,000	-4,283	-4,409	-5,708	-5,405
81,500	-6,353	-6,614	-10,589	-8,998
82,000	-8,424	-8,818	-15,471	-12,591
82,500	-10,495	-11,023	-20,352	-16,184
83,000	-12,565	-13,227	-25,234	-19,777

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

83,500	-14,637	-15,432	-30,129	-23,370
84,000	-16,708	-17,637	-35,025	-26,963
84,500	-18,779	-19,841	-39,921	-30,556
85,000	-20,851	-22,046	-44,818	-34,149
85,500	-22,923	-24,250	-49,739	-37,742
86,000	-24,996	-26,455	-54,661	-41,335
86,500	-27,068	-28,660	-59,582	-44,928
87,000	-29,141	-30,864	-64,506	-48,521
87,500	-31,215	-33,069	-69,467	-52,114
88,000	-33,289	-35,273	-74,428	-55,707
88,500	-35,364	-37,478	-79,388	-59,300
89,000	-37,438	-39,682	-84,354	-62,893
89,500	-39,514	-41,887	-89,369	-66,486
90,000	-41,590	-44,092	-94,384	-70,079
90,500	-43,666	-46,296	-99,399	-73,672
91,000	-45,743	-48,501	-104,423	-77,265
91,500	-47,822	-50,705	-109,512	-80,858
92,000	-49,900	-52,910	-114,600	-84,451
92,500	-51,979	-55,114	-119,689	-88,044
93,000	-54,058	-57,319	-124,792	-91,637
93,500	-56,139	-59,524	-129,979	-95,230
94,000	-58,221	-61,728	-135,166	-98,823
94,500	-60,303	-63,933	-140,353	-102,416
95,000	-62,385	-66,137	-145,561	-106,009
95,500	-64,470	-68,342	-150,880	-109,602
96,000	-66,554	-70,547	-156,199	-113,195
96,500	-68,639	-72,751	-161,518	-116,788
97,000	-70,725	-74,956	-166,871	-120,381
97,500	-72,814	-77,160	-172,370	-123,974
98,000	-74,903	-79,365	-177,870	-127,567
98,500	-76,991	-81,569	-183,369	-131,160
99,000	-79,081	-83,774	-188,921	-134,753
99,500	-81,174	-85,979	-194,671	-138,346
100,000	-83,267	-88,183	-200,421	-141,939
100,500	-85,360	-90,388	-206,171	-145,532
101,000	-87,454	-92,592	-212,007	-149,125
101,500	-89,552	-94,797	-218,132	-152,718
102,000	-91,650	-97,001	-224,257	-156,311
102,500	-93,748	-99,206	-230,382	-159,904
103,000	-95,848	-101,411	-236,643	-163,497
103,500	-97,951	-103,615	-243,308	-167,090
104,000	-100,054	-105,820	-249,972	-170,683
104,500	-102,157	-108,024	-256,636	-174,276
105,000	-104,262	-110,229	-263,535	-177,869
105,500	-106,372	-112,434	-271,055	-181,462
106,000	-108,481	-114,638	-278,576	-185,055

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

106,500	-110,590	-116,843	-286,096	-188,648
107,000	-112,702	-119,047	-293,154	-192,241
107,500	-114,817	-121,252	-299,109	-195,834
108,000	-116,933	-123,456	-305,065	-199,427
108,500	-119,049	-125,661	-311,020	-203,020
109,000	-121,167	-127,866	-315,726	-206,613
109,500	-123,290	-130,070	-317,750	-210,206
110,000	-125,413	-132,275	-319,773	-213,799
110,500	-127,536	-134,479	-321,797	-217,392
111,000	-129,662	-136,684	-323,162	-220,985
111,500	-131,793	-138,888	-323,246	-224,578
112,000	-133,924	-141,093	-323,329	-228,171
112,500	-136,055	-143,298	-323,413	-231,764
113,000	-138,189	-145,502	-323,471	-235,357
113,500	-140,328	-147,707	-323,481	-238,950
114,000	-142,468	-149,911	-323,490	-242,543
114,500	-144,608	-152,116	-323,500	-246,136
115,000	-146,751	-154,321	-323,526	-249,729
115,500	-148,900	-156,525	-323,576	-253,322
116,000	-151,049	-158,730	-323,625	-256,915
116,500	-153,198	-160,934	-323,675	-260,508
117,000	-155,351	-163,139	-323,721	-264,101
117,500	-157,511	-165,343	-323,759	-267,694
118,000	-159,671	-167,548	-323,798	-271,287
118,500	-161,830	-169,753	-323,836	-274,880
119,000	-163,995	-171,957	-323,869	-278,473
119,500	-166,166	-174,162	-323,894	-282,066
120,000	-168,336	-176,366	-323,920	-285,659
120,500	-170,507	-178,571	-323,945	-289,252
121,000	-172,684	-180,775	-323,961	-292,845
121,500	-174,868	-182,980	-323,966	-296,438
122,000	-177,052	-185,185	-323,971	-300,000
122,500	-179,236	-187,389	-323,975	-300,000
123,000	-181,426	-189,594	-323,967	-300,000
123,500	-183,624	-191,798	-323,944	-300,000
124,000	-185,821	-194,003	-323,921	-300,000
124,500	-188,018	-196,208	-323,898	-300,000
125,000	-190,224	-198,412	-323,856	-300,000
125,500	-192,438	-200,617	-323,795	-300,000
126,000	-194,652	-202,821	-323,734	-300,000
126,500	-196,866	-205,026	-323,673	-300,000
127,000	-199,088	-207,230	-323,586	-300,000
127,500	-201,318	-209,435	-323,475	-300,000
128,000	-203,548	-211,640	-323,364	-300,000
128,500	-205,778	-213,844	-323,253	-300,000
129,000	-208,019	-216,049	-323,111	-300,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

129,500	-210,271	-218,253	-322,943	-300,000
130,000	-212,522	-220,458	-322,775	-300,000
130,500	-214,774	-222,662	-322,607	-300,000
131,000	-217,036	-224,867	-322,400	-300,000
131,500	-219,307	-227,072	-322,162	-300,000
132,000	-221,577	-229,276	-321,925	-300,000
132,500	-223,848	-231,481	-321,688	-300,000
133,000	-226,135	-233,685	-321,408	-300,000
133,500	-228,434	-235,890	-321,099	-300,000
134,000	-230,732	-238,095	-320,789	-300,000
134,500	-233,031	-240,299	-320,479	-300,000
135,000	-235,343	-242,504	-320,122	-300,000
135,500	-237,665	-244,708	-319,734	-300,000
136,000	-239,986	-246,913	-319,345	-300,000
136,500	-242,307	-249,117	-318,957	-300,000
137,000	-244,650	-251,322	-318,515	-300,000
137,500	-247,005	-253,527	-318,042	-300,000
138,000	-249,360	-255,731	-317,570	-300,000
138,500	-251,715	-257,936	-317,097	-300,000
139,000	-254,087	-260,140	-316,568	-300,000
139,500	-256,469	-262,345	-316,009	-300,000
140,000	-258,852	-264,549	-315,450	-300,000
140,500	-261,234	-266,754	-314,890	-300,000
141,000	-263,638	-268,959	-314,240	-300,000
141,500	-266,052	-271,163	-313,544	-300,000
142,000	-268,467	-273,368	-312,849	-300,000
142,500	-270,882	-275,572	-312,153	-300,000
143,000	-273,312	-277,777	-311,326	-300,000
143,500	-275,749	-279,982	-310,441	-300,000
144,000	-278,186	-282,186	-309,555	-300,000
144,500	-280,624	-284,391	-308,670	-300,000
145,000	-283,032	-286,595	-307,456	-300,000
145,500	-285,429	-288,800	-306,109	-300,000
146,000	-287,827	-291,004	-304,763	-300,000
146,500	-290,224	-293,209	-303,416	-300,000
147,000	-292,713	-295,414	-302,003	-300,000
147,500	-295,235	-297,618	-300,566	-300,000
148,000	-297,757	-299,823	-299,128	-300,000
148,500	-300,279	-302,027	-297,691	-300,000
149,000	-303,248	-304,232	-297,613	-300,000
149,500	-306,360	-306,436	-297,974	-300,000
150,000	-309,473	-308,641	-298,336	-300,000
150,500	-312,585	-310,846	-298,697	-300,000
151,000	-315,831	-313,050	-300,857	-300,000
151,500	-319,114	-315,255	-303,529	-300,000
152,000	-322,397	-317,459	-306,202	-300,000

152,500	-325,680	-319,664	-308,875	-300,000
153,000	-327,934	-321,869	-311,073	-300,000
153,500	-329,974	-324,073	-313,005	-300,000
154,000	-332,066	-326,278	-314,852	-300,000
154,500	-334,011	-328,482	-316,523	-300,000
155,000	-334,830	-330,687	-316,251	-300,000
155,500	-335,646	-332,891	-316,071	-300,000
156,000	-336,445	-335,096	-315,926	-300,000
156,500	-337,008	-337,301	-315,374	-300,000
157,000	-337,205	-339,505	-314,256	-300,000
157,500	-337,403	-341,710	-313,166	-300,000
158,000	-337,592	-343,914	-312,087	-300,000
158,500	-337,623	-346,119	-311,293	-300,000
159,000	-337,592	-348,323	-310,624	-300,000
159,500	-337,559	-350,528	-309,959	-300,000
160,000	-337,524	-352,733	-309,296	-300,000

- VIGA HIPERESTÁTICA RECTANGULAR

Canto (mm)	Abaqus	Teórico	Abaqus	Teórico
	Elástico (Mpa)	Elástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)
0,000	260,247	321,866	237,959	240,000
0,500	260,150	319,567	237,970	240,000
1,000	260,053	317,268	237,981	240,000
1,500	259,957	314,969	237,993	240,000
2,000	259,861	312,670	238,004	240,000
2,500	259,775	310,371	238,364	240,000
3,000	258,691	308,072	238,725	240,000
3,500	258,107	305,773	239,085	240,000
4,000	257,523	303,474	239,445	240,000
4,500	256,045	301,175	240,106	240,000
5,000	254,567	298,875	240,767	240,000
5,501	253,090	296,576	241,428	240,000
6,001	251,612	294,277	242,090	240,000
6,501	249,493	291,978	242,955	240,000
7,001	247,374	289,679	243,820	240,000
7,501	245,255	287,380	244,685	240,000
8,001	243,136	285,081	245,551	240,000
8,501	240,647	282,782	246,450	240,000
9,001	238,157	280,483	247,348	240,000
9,501	235,667	278,184	248,247	240,000
10,001	233,177	275,885	249,146	240,000
10,501	230,535	273,586	248,988	240,000
11,001	227,893	271,287	248,831	240,000
11,501	225,252	268,988	248,674	240,000
12,001	222,609	266,689	248,516	240,000
12,501	220,026	264,390	246,247	240,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

13,001	217,443	262,091	243,978	240,000
13,501	214,859	259,792	241,709	240,000
14,001	212,276	257,493	239,440	240,000
14,501	209,729	255,194	236,140	240,000
15,002	207,182	252,895	232,839	240,000
15,502	204,635	250,596	229,539	240,000
16,002	202,088	248,297	226,239	240,000
16,502	199,625	245,998	223,264	240,000
17,002	197,163	243,698	220,289	240,000
17,502	194,700	241,399	217,314	240,000
18,002	192,238	239,100	214,339	240,000
18,502	189,836	236,801	211,498	240,000
19,002	187,434	234,502	208,657	240,000
19,502	185,031	232,203	205,816	240,000
20,002	182,629	229,904	202,976	240,000
20,502	180,292	227,605	200,240	240,000
21,002	177,955	225,306	197,504	240,000
21,502	175,618	223,007	194,768	240,000
22,002	173,281	220,708	192,033	240,000
22,502	170,995	218,409	189,390	240,000
23,002	168,709	216,110	186,747	240,000
23,502	166,423	213,811	184,104	240,000
24,002	164,137	211,512	181,461	240,000
24,502	161,899	209,213	178,892	240,000
25,002	159,660	206,914	176,323	240,000
25,503	157,421	204,615	173,755	240,000
26,003	155,181	202,316	171,186	240,000
26,503	152,982	200,017	168,685	240,000
27,003	150,782	197,718	166,185	240,000
27,503	148,582	195,419	163,685	240,000
28,003	146,382	193,120	161,184	240,000
28,503	144,216	190,820	158,738	240,000
29,003	142,049	188,521	156,293	240,000
29,503	139,883	186,222	153,847	240,000
30,003	137,717	183,923	151,401	240,000
30,503	135,580	181,624	149,004	240,000
31,003	133,443	179,325	146,607	240,000
31,503	131,305	177,026	144,211	236,943
32,003	129,168	174,727	141,814	233,885
32,503	127,056	172,428	139,458	230,828
33,003	124,943	170,129	137,101	227,770
33,503	122,831	167,830	134,744	224,713
34,003	120,718	165,531	132,387	221,655
34,503	118,627	163,232	130,066	218,598
35,003	116,536	160,933	127,746	215,540
35,503	114,446	158,634	125,425	212,483

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

36,004	112,355	156,335	123,104	209,425
36,504	110,282	154,036	120,813	206,368
37,004	108,210	151,737	118,521	203,310
37,504	106,137	149,438	116,230	200,253
38,004	104,064	147,139	113,938	197,195
38,504	102,008	144,840	111,673	194,138
39,004	99,952	142,541	109,408	191,080
39,504	97,896	140,242	107,143	188,023
40,004	95,840	137,943	104,878	184,965
40,504	93,797	135,643	102,635	181,908
41,004	91,755	133,344	100,392	178,850
41,504	89,712	131,045	98,149	175,793
42,004	87,670	128,746	95,906	172,735
42,504	85,640	126,447	93,683	169,678
43,004	83,610	124,148	91,459	166,620
43,504	81,579	121,849	89,236	163,563
44,004	79,549	119,550	87,012	160,505
44,504	77,529	117,251	84,805	157,448
45,004	75,510	114,952	82,598	154,390
45,504	73,490	112,653	80,390	151,333
46,005	71,470	110,354	78,183	148,275
46,505	69,459	108,055	75,990	145,218
47,005	67,449	105,756	73,797	142,160
47,505	65,438	103,457	71,605	139,103
48,005	63,427	101,158	69,412	136,045
48,505	61,424	98,859	67,231	132,988
49,005	59,422	96,560	65,050	129,930
49,505	57,419	94,261	62,869	126,873
50,005	55,415	91,962	60,688	123,815
50,505	53,420	89,663	58,517	120,758
51,005	51,424	87,364	56,346	117,700
51,505	49,427	85,065	54,176	114,643
52,005	47,431	82,766	52,005	111,585
52,505	45,441	80,466	49,843	108,528
53,005	43,450	78,167	47,681	105,470
53,505	41,460	75,868	45,518	102,413
54,005	39,469	73,569	43,356	99,355
54,505	37,484	71,270	41,201	96,298
55,005	35,498	68,971	39,045	93,240
55,505	33,512	66,672	36,890	90,183
56,006	31,526	64,373	34,735	87,125
56,506	29,545	62,074	32,585	84,068
57,006	27,563	59,775	30,435	81,010
57,506	25,581	57,476	28,285	77,953
58,006	23,599	55,177	26,135	74,895
58,506	21,620	52,878	23,989	71,838

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

59,006	19,641	50,579	21,843	68,780
59,506	17,662	48,280	19,698	65,723
60,006	15,683	45,981	17,552	62,665
60,506	13,707	43,682	15,409	59,608
61,006	11,731	41,383	13,266	56,550
61,506	9,754	39,084	11,123	53,493
62,006	7,777	36,785	8,980	50,435
62,506	5,802	34,486	6,838	47,378
63,006	3,828	32,187	4,697	44,320
63,506	1,852	29,888	2,555	41,263
64,006	-0,123	27,589	0,414	38,205
64,506	-2,097	25,289	-1,728	35,148
65,006	-4,071	22,990	-3,869	32,090
65,506	-6,045	20,691	-6,010	29,033
66,006	-8,019	18,392	-8,151	25,975
66,507	-9,993	16,093	-10,294	22,918
67,007	-11,967	13,794	-12,436	19,860
67,507	-13,941	11,495	-14,578	16,803
68,007	-15,916	9,196	-16,720	13,745
68,507	-17,890	6,897	-18,865	10,688
69,007	-19,864	4,598	-21,009	7,630
69,507	-21,839	2,299	-23,153	4,572
70,007	-23,814	0,000	-25,298	1,515
70,507	-25,790	-2,299	-27,446	-1,543
71,007	-27,765	-4,598	-29,594	-4,600
71,507	-29,741	-6,897	-31,741	-7,658
72,007	-31,717	-9,196	-33,889	-10,715
72,507	-33,695	-11,495	-36,042	-13,773
73,007	-35,673	-13,794	-38,194	-16,830
73,507	-37,650	-16,093	-40,347	-19,888
74,007	-39,628	-18,392	-42,500	-22,945
74,507	-41,609	-20,691	-44,658	-26,003
75,007	-43,589	-22,990	-46,817	-29,060
75,507	-45,570	-25,289	-48,976	-32,118
76,007	-47,550	-27,589	-51,135	-35,175
76,507	-49,534	-29,888	-53,301	-38,233
77,007	-51,518	-32,187	-55,467	-41,290
77,508	-53,502	-34,486	-57,633	-44,348
78,008	-55,486	-36,785	-59,799	-47,405
78,508	-57,473	-39,084	-61,975	-50,463
79,008	-59,461	-41,383	-64,150	-53,520
79,508	-61,449	-43,682	-66,325	-56,578
80,008	-63,438	-45,981	-68,501	-59,635
80,508	-65,430	-48,280	-70,686	-62,693
81,008	-67,423	-50,579	-72,872	-65,750
81,508	-69,416	-52,878	-75,058	-68,808

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

82,008	-71,409	-55,177	-77,244	-71,865
82,508	-73,408	-57,476	-79,443	-74,923
83,008	-75,407	-59,775	-81,641	-77,980
83,508	-77,406	-62,074	-83,839	-81,038
84,008	-79,405	-64,373	-86,038	-84,095
84,508	-81,410	-66,672	-88,250	-87,153
85,008	-83,415	-68,971	-90,463	-90,210
85,508	-85,421	-71,270	-92,675	-93,268
86,008	-87,427	-73,569	-94,888	-96,325
86,508	-89,440	-75,868	-97,116	-99,383
87,008	-91,453	-78,167	-99,345	-102,440
87,508	-93,467	-80,466	-101,574	-105,498
88,008	-95,480	-82,766	-103,803	-108,555
88,509	-97,502	-85,065	-106,050	-111,613
89,009	-99,524	-87,364	-108,297	-114,670
89,509	-101,546	-89,663	-110,544	-117,728
90,009	-103,569	-91,962	-112,792	-120,785
90,509	-105,601	-94,261	-115,059	-123,843
91,009	-107,633	-96,560	-117,327	-126,900
91,509	-109,665	-98,859	-119,595	-129,958
92,009	-111,698	-101,158	-121,863	-133,015
92,509	-113,741	-103,457	-124,154	-136,073
93,009	-115,785	-105,756	-126,446	-139,130
93,509	-117,829	-108,055	-128,737	-142,188
94,009	-119,872	-110,354	-131,028	-145,245
94,509	-121,929	-112,653	-133,345	-148,303
95,009	-123,986	-114,952	-135,662	-151,360
95,509	-126,043	-117,251	-137,979	-154,418
96,009	-128,100	-119,550	-140,295	-157,475
96,509	-130,171	-121,849	-142,641	-160,533
97,009	-132,242	-124,148	-144,986	-163,590
97,509	-134,313	-126,447	-147,331	-166,648
98,009	-136,385	-128,746	-149,677	-169,705
98,509	-138,473	-131,045	-152,053	-172,763
99,010	-140,561	-133,344	-154,430	-175,820
99,510	-142,649	-135,643	-156,806	-178,878
100,010	-144,738	-137,943	-159,183	-181,935
100,510	-146,845	-140,242	-161,593	-184,993
101,010	-148,952	-142,541	-164,003	-188,050
101,510	-151,059	-144,840	-166,414	-191,108
102,010	-153,166	-147,139	-168,824	-194,165
102,510	-155,295	-149,438	-171,270	-197,223
103,010	-157,424	-151,737	-173,716	-200,280
103,510	-159,553	-154,036	-176,161	-203,338
104,010	-161,682	-156,335	-178,607	-206,395
104,510	-163,836	-158,634	-181,089	-209,453

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

105,010	-165,989	-160,933	-183,572	-212,510
105,510	-168,143	-163,232	-186,054	-215,568
106,010	-170,297	-165,531	-188,536	-218,625
106,510	-172,479	-167,830	-191,052	-221,683
107,010	-174,662	-170,129	-193,567	-224,740
107,510	-176,844	-172,428	-196,083	-227,798
108,010	-179,027	-174,727	-198,599	-230,855
108,510	-181,242	-177,026	-201,140	-233,913
109,010	-183,457	-179,325	-203,681	-236,970
109,510	-185,673	-181,624	-206,222	-240,000
110,010	-187,888	-183,923	-208,763	-240,000
110,511	-190,142	-186,222	-211,304	-240,000
111,011	-192,395	-188,521	-213,846	-240,000
111,511	-194,649	-190,820	-216,388	-240,000
112,011	-196,903	-193,120	-218,930	-240,000
112,511	-199,201	-195,419	-221,450	-240,000
113,011	-201,499	-197,718	-223,970	-240,000
113,511	-203,797	-200,017	-226,490	-240,000
114,011	-206,096	-202,316	-229,010	-240,000
114,511	-208,445	-204,615	-231,410	-240,000
115,011	-210,794	-206,914	-233,810	-240,000
115,511	-213,144	-209,213	-236,210	-240,000
116,011	-215,493	-211,512	-238,610	-240,000
116,511	-217,904	-213,811	-240,767	-240,000
117,011	-220,315	-216,110	-242,924	-240,000
117,511	-222,726	-218,409	-245,081	-240,000
118,011	-225,138	-220,708	-247,238	-240,000
118,511	-227,616	-223,007	-248,548	-240,000
119,011	-230,095	-225,306	-249,858	-240,000
119,511	-232,573	-227,605	-251,167	-240,000
120,011	-235,052	-229,904	-252,477	-240,000
120,511	-237,616	-232,203	-252,817	-240,000
121,011	-240,181	-234,502	-253,156	-240,000
121,512	-242,745	-236,801	-253,496	-240,000
122,012	-245,310	-239,100	-253,836	-240,000
122,512	-247,955	-241,399	-253,929	-240,000
123,012	-250,600	-243,698	-254,023	-240,000
123,512	-253,245	-245,998	-254,116	-240,000
124,012	-255,891	-248,297	-254,209	-240,000
124,512	-258,648	-250,596	-254,289	-240,000
125,012	-261,406	-252,895	-254,369	-240,000
125,512	-264,164	-255,194	-254,450	-240,000
126,012	-266,922	-257,493	-254,530	-240,000
126,512	-269,734	-259,792	-254,532	-240,000
127,012	-272,546	-262,091	-254,535	-240,000
127,512	-275,358	-264,390	-254,538	-240,000

128,012	-278,171	-266,689	-254,540	-240,000
128,512	-281,067	-268,988	-254,038	-240,000
129,012	-283,963	-271,287	-253,536	-240,000
129,512	-286,859	-273,586	-253,035	-240,000
130,012	-289,755	-275,885	-252,533	-240,000
130,512	-292,471	-278,184	-251,314	-240,000
131,012	-295,187	-280,483	-250,096	-240,000
131,512	-297,902	-282,782	-248,878	-240,000
132,012	-300,618	-285,081	-247,659	-240,000
132,513	-302,866	-287,380	-246,456	-240,000
133,013	-305,113	-289,679	-245,252	-240,000
133,513	-307,361	-291,978	-244,049	-240,000
134,013	-309,608	-294,277	-242,845	-240,000
134,513	-311,010	-296,576	-241,889	-240,000
135,013	-312,411	-298,875	-240,933	-240,000
135,513	-313,812	-301,175	-239,977	-240,000
136,013	-315,213	-303,474	-239,020	-240,000
136,513	-315,401	-305,773	-238,423	-240,000
137,013	-315,588	-308,072	-237,825	-240,000
137,513	-315,774	-310,371	-237,227	-240,000
138,013	-315,960	-312,670	-236,629	-240,000
138,513	-315,784	-314,969	-236,525	-240,000
139,013	-315,608	-317,268	-236,421	-240,000
139,513	-315,431	-319,567	-236,317	-240,000
140,013	-315,254	-321,866	-236,213	-240,000

- VIGA BIEMPOTRADA CON PERFIL I

Canto (mm)	Abaqus	Teórico	Abaqus	Teórico
	Elástico (Mpa)	Elástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)	Elastoplástico (Mpa)
0,000	506,645	477,642	352,600	320,000
0,500	504,455	474,657	350,811	320,000
1,000	502,266	471,671	349,033	320,000
1,500	500,078	468,686	347,267	320,000
2,000	497,891	465,701	345,512	320,000
2,500	495,705	462,716	343,769	320,000
3,000	493,520	459,730	342,038	320,000
3,500	490,510	456,745	338,066	320,000
4,000	486,666	453,760	331,340	320,000
4,500	482,908	450,775	324,280	320,000
5,000	479,237	447,789	316,885	320,000
5,500	475,652	444,804	309,155	320,000
6,000	472,153	441,819	301,091	320,000
6,500	466,026	438,834	290,773	320,000
7,000	459,021	435,848	279,924	320,000
7,500	451,810	432,863	268,827	320,000
8,000	444,274	429,878	257,820	320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

8,500	434,610	426,893	254,245	320,000
9,000	425,084	423,907	251,412	320,000
9,500	416,632	420,922	249,302	320,000
10,000	409,541	417,937	250,362	320,000
10,500	404,509	414,951	257,846	320,000
11,000	399,551	411,966	265,166	320,000
11,500	395,059	408,981	271,765	320,000
12,000	391,339	405,996	277,155	320,000
12,500	387,780	403,010	282,290	320,000
13,000	384,245	400,025	287,401	320,000
13,500	380,881	397,040	292,186	320,000
14,000	377,067	394,055	295,302	320,000
14,500	373,250	391,069	298,416	320,000
15,000	369,430	388,084	301,529	320,000
15,500	365,798	385,099	304,471	320,000
16,000	362,389	382,114	307,158	320,000
16,500	358,979	379,128	309,853	320,000
17,000	355,567	376,143	312,557	320,000
17,500	352,207	373,158	315,015	320,000
18,000	349,020	370,173	316,577	320,000
18,500	345,887	367,187	318,135	320,000
19,000	342,610	364,202	319,828	320,000
19,500	339,057	361,217	321,724	320,000
20,000	336,126	358,231	322,988	320,000
20,500	332,863	355,246	324,387	320,000
21,000	329,187	352,261	325,871	320,000
21,500	326,091	349,276	326,998	320,000
22,000	323,243	346,290	328,051	320,000
22,500	320,215	343,305	329,183	320,000
23,000	317,037	340,320	330,335	320,000
23,500	313,963	337,335	331,182	320,000
24,000	310,908	334,349	332,035	320,000
24,500	307,860	331,364	332,863	320,000
25,000	304,758	328,379	333,667	320,000
25,500	301,239	325,394	334,359	320,000
26,000	298,070	322,408	334,888	320,000
26,500	295,251	319,423	335,197	320,000
27,000	292,390	316,438	335,448	320,000
27,500	289,438	313,453	335,890	320,000
28,000	286,442	310,467	336,505	320,000
28,500	283,446	307,482	337,121	320,000
29,000	280,437	304,497	337,747	320,000
29,500	277,414	301,512	338,252	320,000
30,000	274,492	298,526	338,516	320,000
30,500	271,570	295,541	338,779	320,000
31,000	268,648	292,556	339,041	320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

31,500	265,718	289,570	339,198	320,000
32,000	262,823	286,585	339,185	320,000
32,500	259,928	283,600	339,172	320,000
33,000	257,033	280,615	339,159	320,000
33,500	254,129	277,629	339,118	320,000
34,000	251,246	274,644	339,045	320,000
34,500	248,359	271,659	338,967	320,000
35,000	245,462	268,674	338,868	320,000
35,500	242,575	265,688	338,852	320,000
36,000	239,778	262,703	339,013	320,000
36,500	237,024	259,718	339,131	320,000
37,000	234,056	256,733	339,094	320,000
37,500	230,919	253,747	338,926	320,000
38,000	227,953	250,762	338,082	320,000
38,500	224,984	247,777	337,226	320,000
39,000	222,030	244,792	336,376	320,000
39,500	219,228	241,806	335,611	320,000
40,000	216,504	238,821	334,599	320,000
40,500	213,782	235,836	333,586	320,000
41,000	211,085	232,850	332,584	320,000
41,500	208,427	229,865	331,712	320,000
42,000	205,694	226,880	331,005	320,000
42,500	202,989	223,895	330,273	320,000
43,000	200,116	220,909	329,348	320,000
43,500	197,153	217,924	328,280	320,000
44,000	194,266	214,939	326,836	320,000
44,500	191,374	211,954	325,413	320,000
45,000	188,509	208,968	324,038	320,000
45,500	185,786	205,983	322,682	320,000
46,000	183,100	202,998	321,004	320,000
46,500	180,418	200,013	319,326	320,000
47,000	177,768	197,027	317,669	320,000
47,500	175,144	194,042	316,044	320,000
48,000	172,464	191,057	314,389	320,000
48,500	169,814	188,072	312,739	320,000
49,000	166,989	185,086	310,913	320,000
49,500	164,097	182,101	308,978	320,000
50,000	161,272	179,116	306,924	320,000
50,500	158,444	176,130	304,892	320,000
51,000	155,646	173,145	302,909	320,000
51,500	153,003	170,160	300,848	320,000
52,000	150,365	167,175	298,411	320,000
52,500	147,744	164,189	295,985	320,000
53,000	145,187	161,204	293,615	320,000
53,500	142,622	158,219	291,104	320,000
54,000	139,960	155,234	288,447	320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

54,500	137,284	152,248	285,781	320,000
55,000	134,845	149,263	283,328	320,000
55,500	132,052	146,278	280,413	320,000
56,000	129,218	143,293	277,444	320,000
56,500	126,808	140,307	274,880	320,000
57,000	124,247	137,322	271,912	320,000
57,500	121,457	134,337	268,464	320,000
58,000	118,666	131,352	265,036	320,000
58,500	115,887	128,366	261,620	320,000
59,000	112,981	125,381	257,778	320,000
59,500	109,927	122,396	253,456	320,000
60,000	107,376	119,410	249,812	320,000
60,500	104,888	116,425	246,269	320,000
61,000	102,357	113,440	242,690	320,000
61,500	99,696	110,455	237,804	320,000
62,000	97,033	107,469	232,866	320,000
62,500	94,371	104,484	227,929	320,000
63,000	91,662	101,499	222,906	320,000
63,500	88,998	98,514	217,112	320,000
64,000	86,351	95,528	211,199	320,000
64,500	83,704	92,543	205,284	320,000
65,000	81,047	89,558	199,348	320,000
65,500	78,399	86,573	193,238	320,000
66,000	75,757	83,587	187,101	320,000
66,500	73,115	80,602	180,964	320,000
67,000	70,470	77,617	174,821	320,000
67,500	67,819	74,632	168,719	320,000
68,000	65,168	71,646	162,629	320,000
68,500	62,518	68,661	156,538	320,000
69,000	59,868	65,676	150,450	320,000
69,500	57,226	62,691	144,452	320,000
70,000	54,586	59,705	138,466	320,000
70,500	51,945	56,720	132,481	320,000
71,000	49,306	53,735	126,499	303,590
71,500	46,668	50,749	120,576	287,179
72,000	44,029	47,764	114,659	270,769
72,500	41,391	44,779	108,742	254,359
73,000	38,753	41,794	102,827	237,949
73,500	36,119	38,808	96,948	221,538
74,000	33,486	35,823	91,071	205,128
74,500	30,852	32,838	85,195	188,718
75,000	28,219	29,853	79,318	172,308
75,500	25,585	26,867	73,457	155,897
76,000	22,952	23,882	67,598	139,487
76,500	20,318	20,897	61,738	123,077
77,000	17,685	17,912	55,878	106,667

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

77,500	15,057	14,926	50,034	90,256
78,000	12,431	11,941	44,195	73,846
78,500	9,804	8,956	38,356	57,436
79,000	7,178	5,971	32,516	41,026
79,500	4,531	2,985	26,627	24,615
80,000	1,907	0,000	20,793	8,205
80,500	-0,719	-2,985	14,953	-8,205
81,000	-3,347	-5,971	9,109	-24,615
81,500	-5,908	-8,956	3,399	-41,026
82,000	-8,432	-11,941	-2,222	-57,436
82,500	-10,956	-14,926	-7,845	-73,846
83,000	-13,847	-17,912	-14,309	-90,256
83,500	-16,655	-20,897	-20,575	-106,667
84,000	-19,409	-23,882	-26,708	-123,077
84,500	-22,171	-26,867	-32,855	-139,487
85,000	-24,871	-29,853	-38,849	-155,897
85,500	-27,478	-32,838	-44,657	-172,308
86,000	-30,062	-35,823	-50,430	-188,718
86,500	-32,637	-38,808	-56,183	-205,128
87,000	-35,137	-41,794	-61,764	-221,538
87,500	-37,733	-44,779	-67,603	-237,949
88,000	-40,356	-47,764	-73,512	-254,359
88,500	-42,985	-50,749	-79,431	-270,769
89,000	-45,562	-53,735	-85,238	-287,179
89,500	-48,143	-56,720	-91,100	-303,590
90,000	-50,685	-59,705	-96,868	-320,000
90,500	-53,251	-62,691	-102,690	-320,000
91,000	-56,093	-65,676	-109,153	-320,000
91,500	-58,544	-68,661	-114,745	-320,000
92,000	-60,978	-71,646	-120,316	-320,000
92,500	-63,884	-74,632	-126,990	-320,000
93,000	-66,460	-77,617	-132,912	-320,000
93,500	-68,800	-80,602	-138,367	-320,000
94,000	-71,288	-83,587	-144,165	-320,000
94,500	-73,925	-86,573	-150,305	-320,000
95,000	-76,726	-89,558	-156,862	-320,000
95,500	-79,514	-92,543	-163,390	-320,000
96,000	-82,287	-95,528	-169,889	-320,000
96,500	-85,061	-98,514	-176,392	-320,000
97,000	-88,105	-101,499	-183,586	-320,000
97,500	-91,007	-104,484	-190,452	-320,000
98,000	-93,487	-107,469	-196,317	-320,000
98,500	-96,014	-110,455	-202,284	-320,000
99,000	-98,623	-113,440	-208,211	-320,000
99,500	-101,304	-116,425	-213,928	-320,000
100,000	-103,984	-119,410	-219,636	-320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

100,500	-106,661	-122,396	-225,336	-320,000
101,000	-109,405	-125,381	-230,846	-320,000
101,500	-112,099	-128,366	-235,292	-320,000
102,000	-114,786	-131,352	-239,725	-320,000
102,500	-117,472	-134,337	-244,158	-320,000
103,000	-120,162	-137,322	-248,392	-320,000
103,500	-122,866	-140,307	-252,041	-320,000
104,000	-125,569	-143,293	-255,691	-320,000
104,500	-128,272	-146,278	-259,341	-320,000
105,000	-130,979	-149,263	-262,865	-320,000
105,500	-133,683	-152,248	-266,035	-320,000
106,000	-136,387	-155,234	-269,205	-320,000
106,500	-139,092	-158,219	-272,375	-320,000
107,000	-141,806	-161,204	-275,443	-320,000
107,500	-144,537	-164,189	-278,244	-320,000
108,000	-147,267	-167,175	-281,044	-320,000
108,500	-149,998	-170,160	-283,845	-320,000
109,000	-152,730	-173,145	-286,553	-320,000
109,500	-155,469	-176,130	-289,054	-320,000
110,000	-158,207	-179,116	-291,555	-320,000
110,500	-160,946	-182,101	-294,057	-320,000
111,000	-163,687	-185,086	-296,439	-320,000
111,500	-166,446	-188,072	-298,600	-320,000
112,000	-169,205	-191,057	-300,760	-320,000
112,500	-171,964	-194,042	-302,921	-320,000
113,000	-174,724	-197,027	-304,961	-320,000
113,500	-177,488	-200,013	-306,790	-320,000
114,000	-180,252	-202,998	-308,619	-320,000
114,500	-183,016	-205,983	-310,450	-320,000
115,000	-185,787	-208,968	-312,116	-320,000
115,500	-188,566	-211,954	-313,521	-320,000
116,000	-191,346	-214,939	-314,928	-320,000
116,500	-194,125	-217,924	-316,336	-320,000
117,000	-196,915	-220,909	-317,495	-320,000
117,500	-199,717	-223,895	-318,301	-320,000
118,000	-202,521	-226,880	-319,118	-320,000
118,500	-205,335	-229,865	-319,938	-320,000
119,000	-208,136	-232,850	-320,925	-320,000
119,500	-210,828	-235,836	-322,234	-320,000
120,000	-213,478	-238,821	-323,521	-320,000
120,500	-216,315	-241,806	-324,759	-320,000
121,000	-219,328	-244,792	-325,954	-320,000
121,500	-221,834	-247,777	-326,836	-320,000
122,000	-224,752	-250,762	-327,651	-320,000
122,500	-227,877	-253,747	-328,563	-320,000
123,000	-230,506	-256,733	-329,124	-320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

123,500	-233,126	-259,718	-329,366	-320,000
124,000	-235,906	-262,703	-329,600	-320,000
124,500	-238,845	-265,688	-329,791	-320,000
125,000	-241,833	-268,674	-329,887	-320,000
125,500	-244,800	-271,659	-329,992	-320,000
126,000	-247,759	-274,644	-330,064	-320,000
126,500	-250,824	-277,629	-330,045	-320,000
127,000	-254,240	-280,615	-329,747	-320,000
127,500	-257,249	-283,600	-329,372	-320,000
128,000	-260,034	-286,585	-328,906	-320,000
128,500	-262,877	-289,570	-328,390	-320,000
129,000	-265,819	-292,556	-328,101	-320,000
129,500	-268,785	-295,541	-327,918	-320,000
130,000	-271,748	-298,526	-327,727	-320,000
130,500	-274,729	-301,512	-327,545	-320,000
131,000	-277,765	-304,497	-327,345	-320,000
131,500	-280,758	-307,482	-327,057	-320,000
132,000	-283,751	-310,467	-326,770	-320,000
132,500	-286,744	-313,453	-326,485	-320,000
133,000	-289,770	-316,438	-326,074	-320,000
133,500	-292,821	-319,423	-325,574	-320,000
134,000	-295,871	-322,408	-325,075	-320,000
134,500	-298,922	-325,394	-324,578	-320,000
135,000	-301,986	-328,379	-323,978	-320,000
135,500	-305,058	-331,364	-323,303	-320,000
136,000	-308,130	-334,349	-322,629	-320,000
136,500	-311,201	-337,335	-321,955	-320,000
137,000	-314,323	-340,320	-321,145	-320,000
137,500	-317,473	-343,305	-320,249	-320,000
138,000	-320,623	-346,290	-319,353	-320,000
138,500	-323,773	-349,276	-318,458	-320,000
139,000	-326,960	-352,261	-317,355	-320,000
139,500	-330,167	-355,246	-316,135	-320,000
140,000	-333,374	-358,231	-314,915	-320,000
140,500	-336,582	-361,217	-313,695	-320,000
141,000	-339,862	-364,202	-312,201	-320,000
141,500	-343,158	-367,187	-310,574	-320,000
142,000	-346,454	-370,173	-308,947	-320,000
142,500	-349,750	-373,158	-307,319	-320,000
143,000	-353,189	-376,143	-305,257	-320,000
143,500	-356,704	-379,128	-302,960	-320,000
144,000	-360,219	-382,114	-300,661	-320,000
144,500	-363,736	-385,099	-298,361	-320,000
145,000	-367,366	-388,084	-295,714	-320,000
145,500	-371,007	-391,069	-292,849	-320,000
146,000	-374,648	-394,055	-289,982	-320,000

Estudio elasto-plástico de vigas sometidas a flexión.

146,500	-378,289	-397,040	-287,111	-320,000
147,000	-382,138	-400,025	-283,523	-320,000
147,500	-386,182	-403,010	-279,019	-320,000
148,000	-390,279	-405,996	-274,538	-320,000
148,500	-394,528	-408,981	-270,133	-320,000
149,000	-399,402	-411,966	-265,944	-320,000
149,500	-405,522	-414,951	-261,940	-320,000
150,000	-411,679	-417,937	-257,873	-320,000
150,500	-417,872	-420,922	-253,741	-320,000
151,000	-425,680	-423,907	-255,157	-320,000
151,500	-434,641	-426,893	-262,270	-320,000
152,000	-443,882	-429,878	-270,546	-320,000
152,500	-453,561	-432,863	-279,865	-320,000
153,000	-461,235	-435,848	-290,530	-320,000
153,500	-466,463	-438,834	-302,706	-320,000
154,000	-471,783	-441,819	-314,932	-320,000
154,500	-476,834	-444,804	-326,596	-320,000
155,000	-480,388	-447,789	-334,780	-320,000
155,500	-482,861	-450,775	-339,065	-320,000
156,000	-485,651	-453,760	-343,463	-320,000
156,500	-488,944	-456,745	-348,222	-320,000
157,000	-492,661	-459,730	-353,034	-320,000
157,500	-495,402	-462,716	-355,049	-320,000
158,000	-497,535	-465,701	-355,714	-320,000
158,500	-499,624	-468,686	-356,308	-320,000
159,000	-501,670	-471,671	-356,833	-320,000
159,500	-503,672	-474,657	-357,289	-320,000
160,000	-505,631	-477,642	-357,674	-320,000

ANEXO II: ÍNDICE DE GRÁFICAS.

GRÁFICA	DESCRIPCIÓN	VIGA	TEÓRICO ABAQUS COMPARATIVA	PÁGINA
1	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.	1	T	66
2	Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico de forma teórica.	1	T	67
3	Representación de las tensiones residuales teóricas.	1	T	68
4	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.	1	A	69
5	Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico mediante Abaqus.	1	A	69
6	Tensiones residuales obtenidas mediante Abaqus.	1	A	70
7	Comparación de los resultados en el rango elástico.	1	C	70
8	Comparación de los resultados en el rango elasto-plástico.	1	C	71
9	Comparación de las tensiones residuales.	1	C	72
10	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.	2	T	74
11	Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico de forma teórica.	2	T	76
12	Representación de las tensiones residuales teóricas.	2	T	76
13	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.	2	A	77
14	Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico mediante Abaqus.	2	A	77
15	Representación de las tensiones residuales obtenidas mediante Abaqus.	2	A	78
16	Comparación de los resultados en el rango elástico.	2	C	78
17	Comparación de los resultados en el rango elasto-plástico.	2	C	79
18	Comparación de las tensiones residuales.	2	C	80
19	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.	3	T	82
20	Representación del estado tensional de la sección en el rango elasto-plástico de forma teórica.	3	T	83
21	Representación de las tensiones residuales teóricas.	3	T	84
22	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.	3	A	85

Estudio elastoplástico de vigas sometidas a flexión.

23	Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico mediante Abaqus.	3	A	85
24	Representación de las tensiones residuales mediante Abaqus.	3	A	86
25	Comparación de los resultados en el rango elástico.	3	C	86
26	Comparación de los resultados en el rango elastoplástico.	3	C	87
27	Comparación de las tensiones residuales.	3	C	87
28	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.	4	T	90
29	Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico de forma teórica.	4	T	92
30	Representación de las tensiones residuales teóricas.	4	T	92
31	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.	4	A	93
32	Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico mediante Abaqus.	4	A	93
33	Representación de las tensiones residuales mediante Abaqus.	4	A	94
34	: Comparación de los resultados en el rango elástico.	4	C	94
35	Comparación de los resultados en el rango elastoplástico.	4	C	95
36	Comparación de las tensiones residuales.	4	C	95
37	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico de forma teórica.	5	T	98
38	Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico de forma teórica.	5	T	99
39	Representación de las tensiones residuales teóricas.	5	T	100
40	Representación del estado tensional de la sección en el rango elástico mediante Abaqus.	5	A	100
41	Representación del estado tensional de la sección en el rango elastoplástico mediante Abaqus.	5	A	101
42	Representación de las tensiones residuales mediante Abaqus.	5	A	101
43	Comparación de resultados en el rango elástico.	5	C	102
44	Comparación de resultados en el rango elastoplástico.	5	C	102
45	Comparación de las tensiones residuales.	5	C	103

- Viga 1: Isostática rectangular.
- Viga 2: Isostática con perfil I.

- Viga 3: En ménsula con perfil I.
- Viga 4: Hiperestática rectangular.
- Viga 5: Biempotrada con perfil I.