PROGRAMA DE MEJORA DE LA CALIDAD – PLAN ESTRATÉGICO GENERAL 2013-2018

MEMORIA FINAL

Proyecto de innovación y mejora docente ID2016/186

APRENDER Y ENSEÑAR MATEMÁTICAS HOY: NUEVAS REGLAS, NUEVOS ROLES

COORDINADORA DEL PROYECTO: Araceli Queiruga Dios (queirugadios@usal.es)

MIEMBROS DEL EQUIPO DE TRABAJO: Juan José Bullón Pérez (perbu@usal.es), Ascensión Hernández Encinas (ascen@usal.es), Eulalia Izard Anaya (eia@usal.es), Ángel Martín del Rey (delrey@usal.es), Jesús Martín Vaquero (jesmarva@usal.es), Gerardo Rodríguez Sánchez (gerardo@usal.es), Isabel Visus Ruiz (ivisus@usal.es).

30 JUNIO, 2017

1. INTRODUCCIÓN

El equipo que ha desarrollado este proyecto forma parte de un consorcio de varias universidades que se han unido para participar en convocatorias de proyectos europeos. En este proyecto hemos propuesto la utilización de las líneas generales que teníamos ya consensuadas con nuestros socios, con vistas a ampliarlo posteriormente como un proyecto europeo: trabajar las competencias de matemáticas para titulaciones de ciencias e ingeniería, puesto que en todos estos estudios se imparten varias asignaturas de matemáticas, principalmente en los primeros cursos.

Para el proyecto de "Aprender y enseñar matemáticas hoy: nuevas reglas, nuevos roles" hemos desarrollado las 8 competencias de matemáticas[1]:

(1) **Pensar matemáticamente:** está relacionada con el conocimiento del tipo de preguntas que se tratan en matemáticas y los tipos de respuestas que las matemáticas pueden y no pueden proporcionar y también con la capacidad de plantear tales preguntas. Incluye además el reconocimiento de conceptos matemáticos y una comprensión de su alcance y limitaciones, así como la extensión del alcance por abstracción y generalización de resultados. Esto también está relacionado con una comprensión de la certeza que las consideraciones matemáticas pueden proporcionar.

(2) **Razonar matemáticamente** incluye, por un lado, la capacidad de comprender y evaluar una argumentación matemática ya existente (cadena de argumentos lógicos), en particular para entender la noción de prueba y reconocer las ideas centrales en las pruebas. También incluye el conocimiento y la capacidad de distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (definición, instrucción if-then, iff-statement, etc.). Por otro lado, incluye también la construcción de cadenas de argumentos lógicos y por tanto, la transformación del razonamiento heurístico en pruebas propias (razonamiento lógico).

(3) **Plantear y resolver problemas matemáticos** comprende, por un lado, la capacidad de identificar y especificar problemas matemáticos (sean estos puros o aplicados, abiertos o cerrados) y por otro la capacidad de resolverlos (incluyendo el conocimiento de los algoritmos adecuados). Lo que realmente constituye un problema no está bien definido y el hecho de considerar una pregunta como un problema depende de las capacidades personales.

---

[1] Mustoe, L., Olsson-Lehtonen, B., Robinson, C., & Velichova, D. (2013). A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education.

(4) **Modelar matemáticamente** tiene esencialmente dos componentes: la capacidad de analizar y trabajar con modelos existentes (encontrar propiedades, investigar rango y validez, relacionarse con la realidad modelada) y la capacidad de "realizar modelado activo" (estructurar la parte de la realidad que es de interés, establecer un modelo matemático y transformar las cuestiones de interés en preguntas matemáticas, responder a las preguntas matemáticamente, interpretar los resultados reales e investigar la validez del modelo, monitorizar y controlar todo el proceso de modelado).

(5) **Representar entidades matemáticas** incluye la capacidad de comprender y utilizar representaciones matemáticas (ya sean simbólicas, numéricas, gráficas y visuales, verbales, materiales, etc.) y conocer sus relaciones, ventajas y limitaciones. También incluye la posibilidad de elegir y cambiar entre una u otra representación basándose en este conocimiento.

(6) **Manejar símbolos y formalismos matemáticos** incluye la habilidad de entender el lenguaje simbólico y formal de matemáticas y su relación con el lenguaje natural, así como la traducción entre ambos. También incluye las reglas de los sistemas formales matemáticos y la capacidad de utilizar y manipular enunciados simbólicos y expresiones de acuerdo con las reglas.

(7) **Comunicarse en, con y sobre matemáticas** tiene que ver con la capacidad de comprender las expresiones y enunciados matemáticos (de forma oral, escrita u otra), realizados por otros, y también con la capacidad de expresarse uno mismo matemáticamente de diferentes maneras.

(8) **Utilizar el material y herramientas necesarias** incluye conocimientos sobre los recursos y herramientas que están disponibles, así como su potencial y limitaciones. Además, incluye la capacidad de utilizarlos de manera cuidadosa y eficiente.

Todo ello para cada uno de los niveles de matemáticas.

a lo largo de este proyecto hemos elaborado algunos de los contenidos que impartimos en nuestras asignaturas, con el fin de que los estudiantes alcancen esas 8 competencias matemáticas utilizando herramientas específicas, que hacen las matemáticas más amigables.

Estas ideas tienen cabida dentro de los objetivos de propiciar e institucionalizar las buenas prácticas docentes y la mejora de los materiales didácticos y también perfeccionar la divulgación de la actividad académica hacia el mundo empresarial, las administraciones y hacia la sociedad en general con el fin de mejorar la empleabilidad de nuestros egresados, puesto que cualquiera podrá recurrir al material desarrollado (un ingeniero por ejemplo que quiera estudiar la fatiga de una viga podrá fundamentar sus cálculos con la simulación del problema matemático correspondiente).

Los objetivos que nos propusimos alcanzar con este proyecto eran los siguientes:

Objetivo 1. Desarrollar temas de nuestras asignaturas en competencias.

Objetivo 2. Utilización de software adecuado a cada asignatura y a cada titulación.

Objetivo 3. Promover una actitud positiva entre los estudiantes, para que estén más motivados (lo que cobra un sentido especial cuando hablamos de estudiantes de ciencias e ingeniería y sobre todo en asignaturas de matemáticas o que incluyen las matemáticas y cálculos para la adquisición de las competencias).

2. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

En los siguientes apartados detallaremos para cada uno de los objetivos propuestos en el proyecto, las actividades que realizamos.

Objetivo 1. Desarrollar temas de nuestras asignaturas en competencias.

Uno de los métodos que utilizamos para desarrollar una educación en competencias es el de educación realista de las matemáticas (conocido como RME por sus siglas en inglés, *Realistic Mathematics Education*), que trata de describir los conceptos matemáticos partiendo de su relación con el fenómeno que los origina y considera las matemáticas como una actividad humana. Partiendo de este paradigma educacional los estudiantes pueden utilizar herramientas matemáticas para formular y resolver problemas que se les plantean en otras asignaturas, problemas de la vida real o más aún, problemas que ellos se puedan imaginar. Se trata de hacer a los estudiantes participantes activos en su propio proceso de aprendizaje (una de las proposiciones del acuerdo de Bolonia).
Para este objetivo, una de las actividades que desarrollamos fue la propuesta a los estudiantes de la realización de un trabajo en grupo, con un plan de trabajo que siguió los siguientes principios:

1. Actividad: cada uno será partícipe activo en su propio proceso de aprendizaje. Se trata de aprender "haciendo", en lugar de leyendo o viendo.
2. Realidad: aplicar los temas de las asignaturas a la resolución de problemas reales.
3. Principio de los niveles: en el proceso de aprendizaje se pasa por varios niveles de comprensión hasta ser capaces de ver el problema completo. Este principio está muy relacionado con los modelos matemáticos, que establecen un puente entre la docencia más puramente formal y la más aplicada.
4. Interconexión: los temas de las diferentes asignaturas de la titulación no son compartimentos estancos dentro del currículo de la asignatura, sino que están integrados unos con otros.

5. Interactividad: El aprendizaje es una actividad social y no solo una tarea individual.
6. Principio de orientación: está relacionado con el rol proactivo de los profesores-tutores, como guías y orientadores de la trayectoria de enseñanza-aprendizaje a largo plazo.

Las tareas que debían formar parte de este trabajo eran:

1. Seleccionar el título del trabajo que se va a realizar.
2. Seleccionar el tema de matemáticas en el que se centra o que se va a desarrollar en el trabajo (ver ANEXO I).
3. Familiarizarse con las distintas herramientas que ya existen para desarrollar temas concretos de matemáticas (editores de texto y presentaciones, software matemático, programas de simulación, etc.)
4. Elaborar con esas herramientas los contenidos específicos.
5. Presentar los desarrollos realizados.

En la Figura 1 mostramos un ejemplo de los trabajos realizados: utilización de splines para dar forma a un muñeco de nieve.

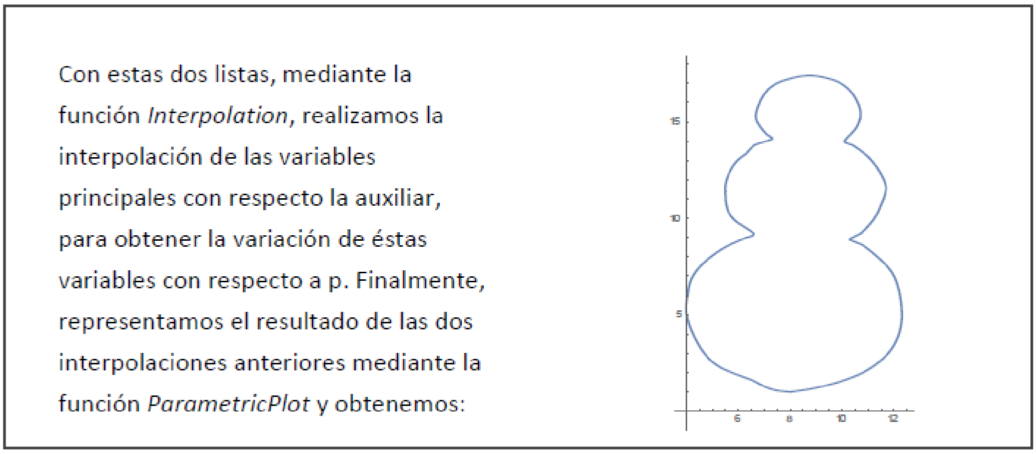


Figura 1: Ejemplo de uno de los trabajos realizados por estudiantes del Grado en Estadística.

No solo los trabajos propuestos para realizar en grupo desarrollan las matemáticas en competencias, también en nuestras clases les propusimos problemas de la vida real (ver ejemplo en la Figura 2).

Uno de los sistemas de evaluación que utilizamos para evaluar competencias fue la utilización de tests de respuesta múltiple. En el ANEXO II se incluye un ejemplo correspondiente al tema de optimización de los estudiantes de 3er curso del Grado en Ingeniería Química.

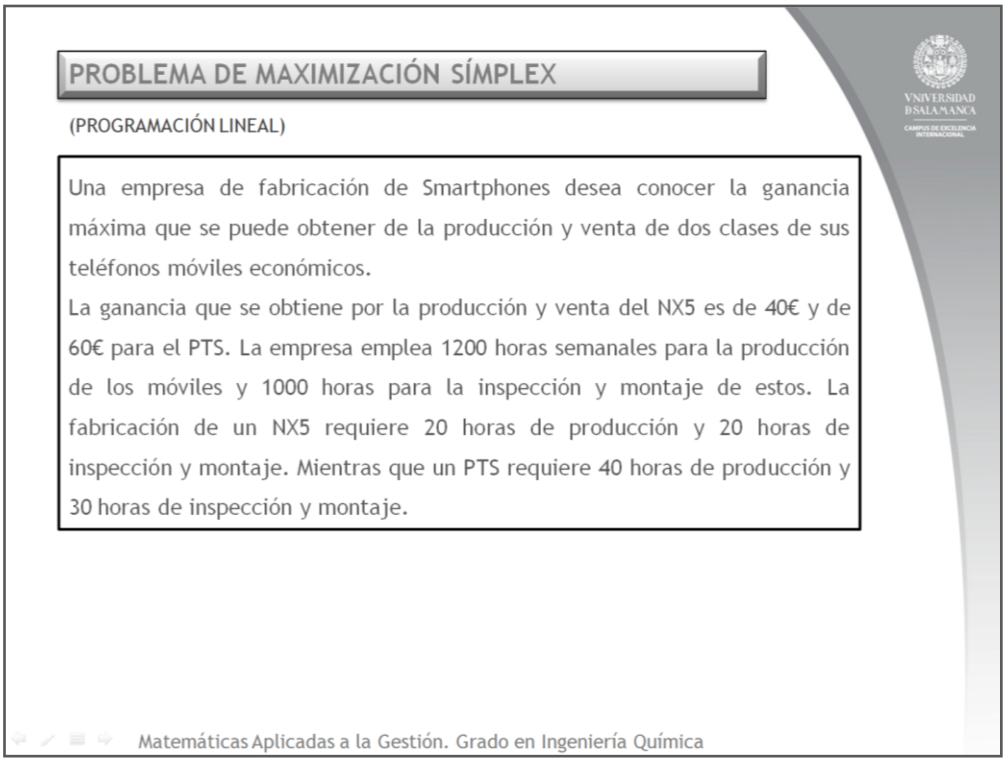


Figura 2: Problema de optimización propuesto a los estudiantes del Grado en Ingeniería Química.

Objetivo 2. Utilización de software adecuado a cada asignatura y a cada titulación.

Los profesores que participan en este proyecto hemos probado diferentes programas informáticos para afrontar alguno de los temas de nuestras asignaturas. Así por ejemplo, el paquete Mathematica sin ir más lejos (del que la Universidad de Salamanca tiene licencia que permite tanto a profesores como estudiantes su utilización), es una de las herramientas adecuadas para las asignaturas de matemáticas, puesto que en las versiones más actuales, instaladas en todos los campus, tienen nuevas funcionales (ver ejemplo de su utilización en la Figura 3). Además del Mathematica, Matlab, SPSS, etc., proponemos la utilización de otros programas "menos convencionales" que permitan la utilización de dispositivos móviles para la simulación 3D o realidad aumentada, o para creación y visualización de contenidos interactivos.

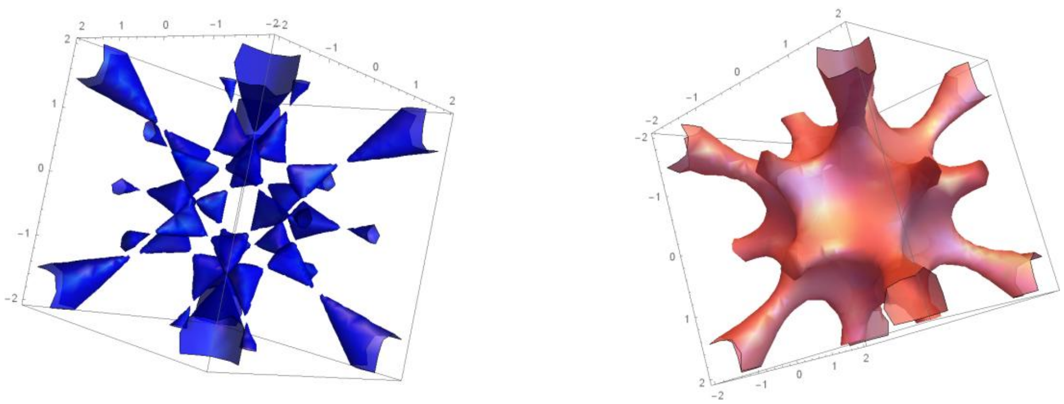


Figura 3: Singularidades de un polinomio de grado 4 utilizando el comando `ContourPlot3D` del software Mathematica.

En la Figura 4 se muestra una mínima parte del trabajo realizado sobre el tema de splines en la modelización de una prótesis.

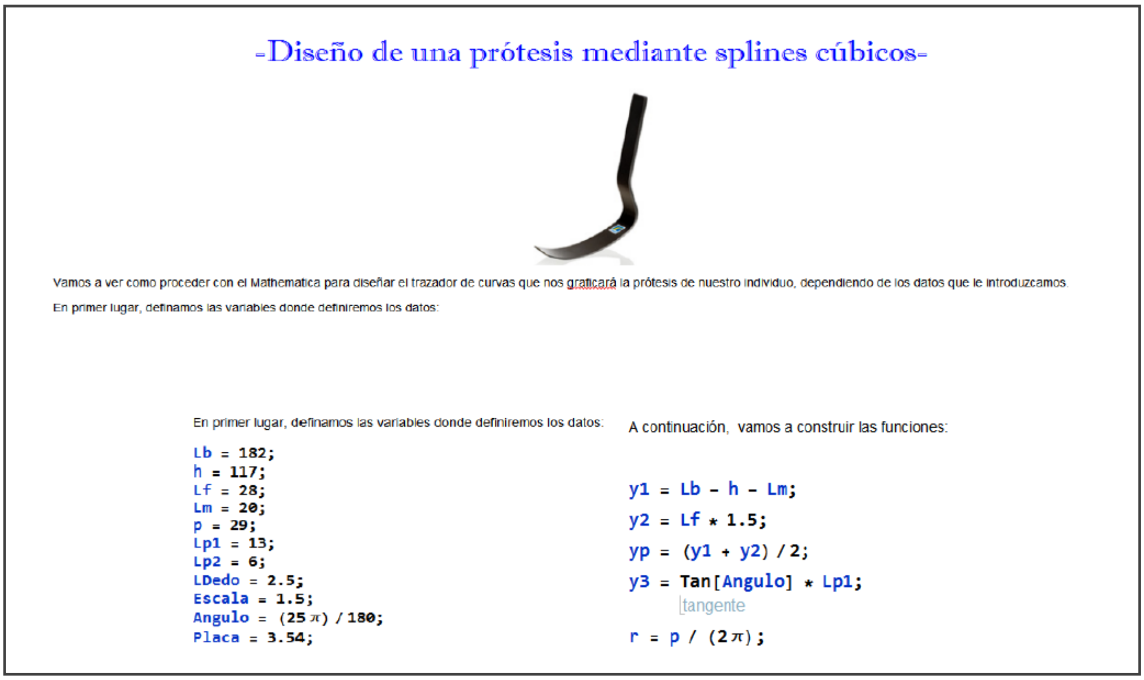


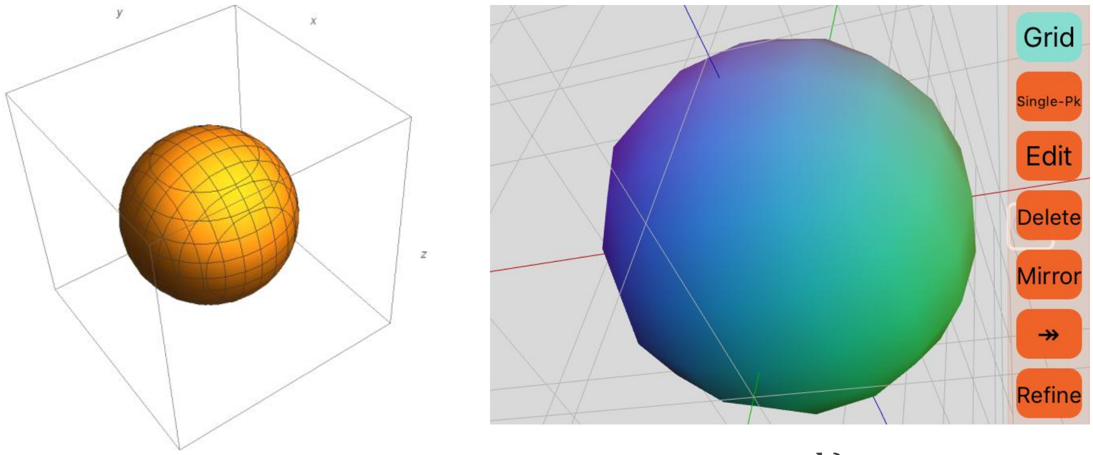
Figura 4: Desarrollo del trabajo de "Diseño de una prótesis mediante splines cúbicos".

Objetivo 3. Promover una actitud positiva entre los estudiantes, para que estén más motivados.

Este tercer objetivo es una consecuencia directa de los 2 anteriores, puesto que las asignaturas de matemáticas son históricamente las que menos gustan a los estudiantes de estas titulaciones, con la utilización del ordenador, tablets o móviles, el estudiante estará más motivado para adquirir las competencias de su titulación.

La docencia más clásica utiliza contenidos en papel. Actualmente recurrimos más al ordenador y dispositivos móviles, pero también en estos nos movemos en un entorno 2D. En este proyecto hemos incluido una dimensión más permitiendo a los estudiantes que el entorno de estudio sea tridimensional; es decir, lo más similar posible a lo que se encuentran en la vida real y se encontrarán en su futuro profesional.

En la Figura 5 se muestra el ejemplo de la utilización de diferentes programas para representar el sencillo caso de una esfera, utilizado en Métodos Numéricos para visualizar el tema de aproximación numérica.



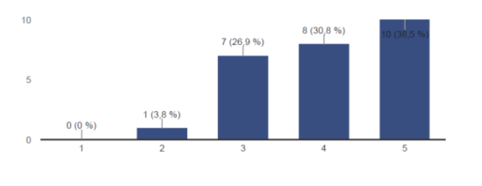
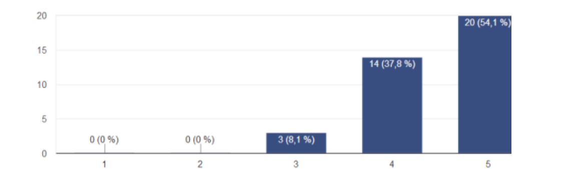
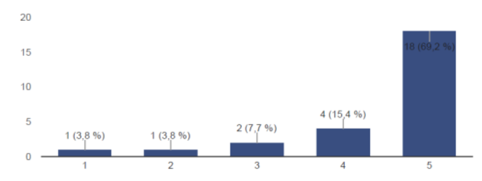
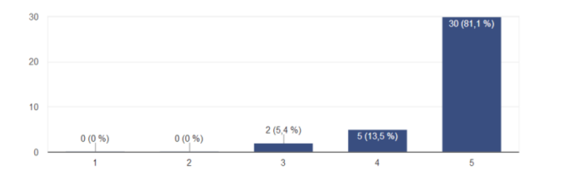
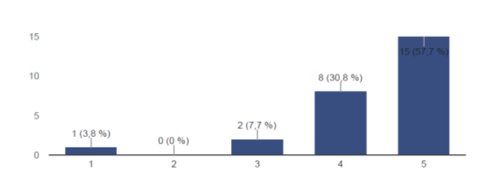
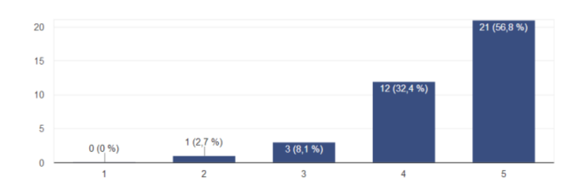
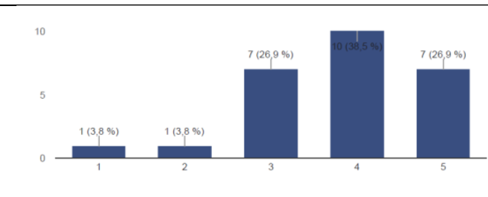
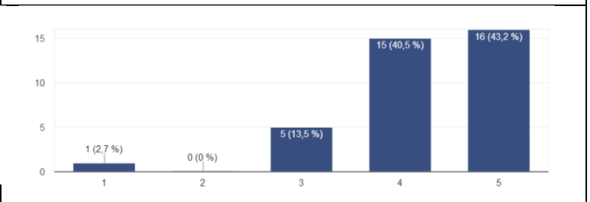
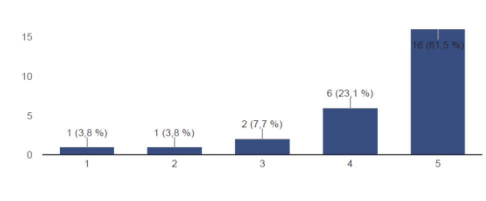
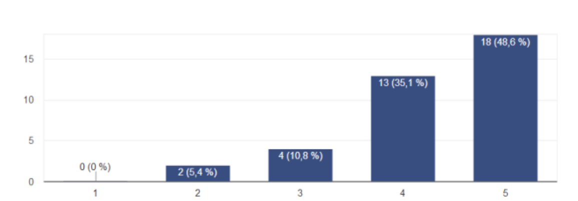
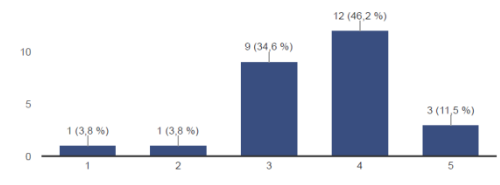
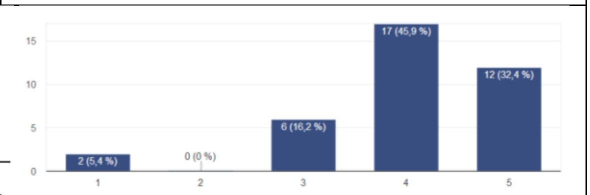
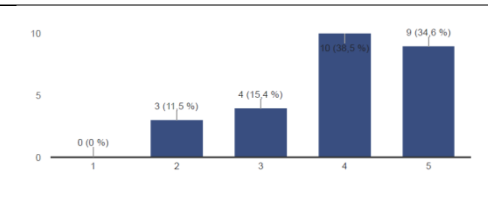
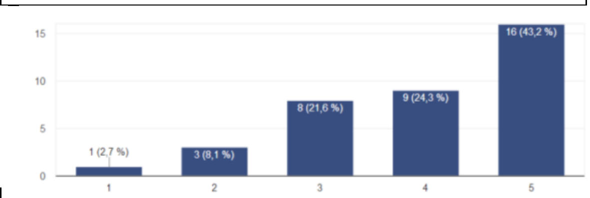
a) b)

Figura 5: Representación de una esfera, a) utilizando el programa Mathematica, y b) Utilizando la App Sketch 3D.

Para valorar la motivación y mejora en el aprendizaje de los estudiantes les propusimos la realización de una encuesta fiable, la misma que utilizamos para el estudio desarrollado con la profesora Cristina M.R. Caridade del Instituto Superior de Ingeniería de Coímbra[2]. Esta encuesta (https://goo.gl/forms/CzPINmzqDVTYvDrC2) la realizamos a principio y final de curso. Se puede apreciar la evolución de los estudiantes cuando realizamos

[2]Caridade, C. M. R., Encinas, A. H., Martín Vaquero, J., & Queiruga Dios, A. (2015). CAS and real life problems to learn basic concepts in Linear Algebra course. *Computer Applications in Engineering Education*, 23(4), 567-577.

durante el curso las actividades propuestas en este proyecto. Algunas de las respuestas se muestran en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>PREGUNTA</th><th>RESULTADO PRE</th><th>RESULTADO POST</th></tr>
<tr><td>1) Las matemáticas están muy relacionadas con muchos aspectos de la vida diaria</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2) Las matemáticas están muy relacionadas con la Ingeniería</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4) Saber matemáticas me ayudará a entender mejor algunas asignaturas de la carrera</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5) Las matemáticas aplicadas se entienden mejor que una demostración teórica</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10) Una clase de matemáticas con trabajos y aplicaciones prácticas es más útil que las clases convencionales</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>11) El contenido de estas clases de matemáticas incluyen información que será útil para mí</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13) El ordenador es importante para las clases de matemáticas</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

CONCLUSIONES

Tal como se propuso en la solicitud de este proyecto, su realización nos ha permitido, entre otras cosas:

- Motivar a los estudiantes, poniendo a su disposición temas de las asignaturas en distintos formatos (presentaciones, ficheros del Mathematica, etc.).
- Utilización de dispositivos móviles. Todos nuestros estudiantes disponen de teléfono móvil y muchos de ellos de tablet o iPad, pero los contenidos que utilizamos normalmente no están adaptados a esta realidad. Con este proyecto hemos promovido la utilización de estos dispositivos.
- Una vez finalizado el proyecto, disponemos de la memoria elaborada con los socios europeos.

Como parte del trabajo desarrollado, hemos publicado los artículos (incluidos al final de esta memoria):

1. Méndez, M. D. C. L., Arrieta, A. G., Dios, M. Q., Encinas, A. H., & Queiruga-Dios, A. (2016, October). Minecraft as a Tool in the Teaching-Learning Process of the Fundamental Elements of Circulation in Architecture. *International Conference on EUropean Transnational Education* (pp. 728-735). Springer International Publishing.

2. Queiruga-Dios, A., Encinas, A. H., Sánchez, G. R., del Rey, Á. M., Vaquero, J. M., & Encinas, L. H. (2016, November). Case study: Malware propagation models for undergraduate engineering students. *Proceedings of the Fourth International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality* (pp. 931-935). ACM.

3. A. Queiruga-Dios, M.J. Santos Sánchez, J. Bullón Pérez, A. Hernández Encinas, G. Rodríguez Sánchez, A. Martín del Rey, J. Martín-Vaquero. PINDO: Proyecto de Investigación en la práctica DOcente. *VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 10-14 julio, 2017. Madrid. EN PRENSA.

4. A. Queiruga-Dios, J. Bullón Pérez, A. Hernández Encinas, G. Rodríguez Sánchez, A. Martín del Rey, J. Martín-Vaquero. Case study: Engineering education, Industry 4.0, security, and competencies-based assessment. *45th SEFI Conference*, 18-21 Septiembre, 2017, Azores, Portugal. EN PRENSA.

Además, tal como propusimos en la solicitud del proyecto, hemos colaborado con socios de universidades europeas para solicitar el proyecto europeo: "New Rules for assessing Mathematical Competencies", dentro de la Acción Clave 2 – Asociaciones Estratégicas, correspondiente a la Convocatoria de Propuestas del programa Erasmus+ 2017.

ANEXO I: CONTENIDOS DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

A FRAMEWORK FOR MATHEMATICS CURRICULA IN ENGINEERING EDUCATION:

CONTENTS CORE 0

Algebra

1. Arithmetic of real numbers
2. Algebraic expressions and formulae
3. Linear laws
4. Quadratics, cubics, polynomials

Analysis and Calculus

1. Functions and their inverses
2. Sequences, series, binomial expansions
3. Logarithmic and exponential functions
4. Rates of change and differentiation
5. Stationary points, maximum and minimum values
6. Indefinite integration
7. Definite integration, applications to areas and volumes
8. Complex numbers
9. Proof

Discrete Mathematics

1. Sets

Geometry and Trigonometry

1. Geometry
2. Trigonometry
3. Co-ordinate geometry
4. Trigonometric functions and applications
5. Trigonometric identities

Statistics and Probability

1. Data Handling
2. Probability

CONTENTS CORE LEVEL 1

Analysis and Calculus

1. Hyperbolic functions
2. Rational functions
3. Complex numbers
4. Functions
5. Differentiation
6. Sequences and series

7. Methods of integration
8. Applications of integration
9. Solution of non-linear equations

Discrete Mathematics

1. Mathematical logic
2. Sets
3. Mathematical induction and recursion
4. Graphs

Geometry

1. Conic sections
2. 3D co-ordinate geometry

Linear Algebra

1. Vector arithmetic
2. Vector algebra and applications
3. Matrices and determinants
4. Solution of simultaneous linear equations
5. Least squares curve fitting
6. Linear spaces and transformations

Statistics and Probability

1. Data Handling
2. Combinatorics
3. Simple probability
4. Probability models
5. Normal distribution
6. Sampling
7. Statistical inference

CONTENTS LEVEL 2

Analysis and Calculus

1. Ordinary differential equations
2. First order ordinary differential equations
3. Second order equations - complementary function and particular integral
4. Functions of several variables
5. Fourier series
6. Double integrals
7. Further multiple integrals
8. Vector calculus
9. Line and surface integrals, integral theorems
10. Linear optimisation
11. The simplex method
12. Non-linear optimisation

13. Laplace transforms
14. z transforms
15. Complex functions
16. Complex series and contour integration
17. Introduction to partial differential equations
18. Solving partial differential equations

Discrete Mathematics

1. Number systems
2. Algebraic operations
3. Recursion and difference equations
4. Relations
5. Graphs
6. Algorithms

Geometry

1. Helix
2. Geometric spaces and transformations

Linear Algebra

1. Matrix methods
2. Eigenvalue problems

Statistics and Probability

1. One-dimensional random variables
2. Two-dimensional random variables
3. Small sample statistics
4. Small sample statistics: chi-square tests
5. Analysis of variance
6. Simple linear regression
7. Multiple linear regression and design of experiments

CONTENTS LEVEL 3

Analysis and calculus

- Numerical solution of ordinary differential equations
- Fourier analysis
- Solution of partial differential equations, including the use of Fourier series
- Fourier transforms
- Finite element method

Discrete mathematics

- Combinatorics
- Graph theory
- Algebraic structures

- Lattices and Boolean algebra
- Grammars and languages

Geometry

- Differential geometry
- Geometric modelling of curves and surfaces
- Geometric methods in solid modelling
- Non-Euclidean geometry
- Computer geometry
- Fractal geometry
- Geometric core of Computer Graphics

Linear Algebra

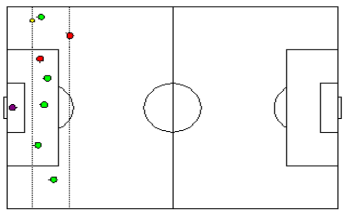
- Matrix decomposition
- Further numerical methods

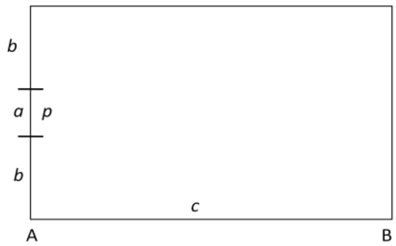
Statistics and probability

- Stochastic processes
- Statistical quality control
- Reliability
- Experimental design
- Queueing theory and discrete simulation
- Filtering and control
- Markov processes and renewal theory
- Statistical inference
- Multivariate analysis

ANEXO II: TEST DE EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS

Un campo de fútbol tiene la forma y dimensiones de la figura[3]:





¿desde qué punto de la banda $\overline{AB}$ será más fácil meter un gol en la portería p?

⅄ ⅄ ⅄

1.- ¿Cómo resolverías el problema de saber el punto de la banda desde el que meter el gol?

(a) Se trata de un problema de estrategia futbolística.
(b) Se trata de un problema de probabilidades, a partir de los estudios de los últimos partidos.
(c) Es un problema que se resuelve si entiendes de fútbol y te gusta.
(d) Podemos resolverlo matemáticamente.

2.- ¿Cuál sería el razonamiento del problema?

(a) Trazamos una línea recta desde cada uno de los puntos de la banda $\overline{AB}$ hasta la portería para obtener el óptimo (aunque si el tiro es con ángulo habría que considerar también las curvas).

(b) Como $c \cong 2b$, el punto desde el que resulta más fácil meter gol es el centro de la banda.

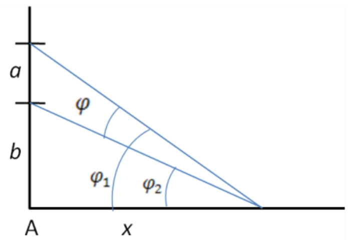
(c) El punto más fácil será el que tenga mayor ángulo, puesto que si estamos en A es imposible que entre el balón por la portería. A medida que vamos hacia B va siendo más fácil.

(d) Ninguno de los anteriores. Nos faltan datos del problema.

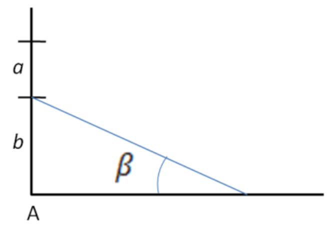
3.- Plantea el problema:

(a) Cuanto mayor sea el ángulo con el que se ve la portería desde la banda, más fácil será meter gol. Debemos, pues, maximizar el ángulo $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

[3] Del libro: A. García López, F. García Castro, et al. *Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables*. Ed. Clagsa.



(b) Hay que tener en cuenta el ángulo β desde el que se tira a puerta y ese ángulo es el que debe ser máximo.



(c) Habría que aplicar el teorema de Thales, de semejanza de triángulos.
(d) El enunciado está incompleto y no se puede resolver si no tenemos más información.

4.- Soluciona el problema:

(a) Como la tangente es una función creciente en $[0, \frac{\pi}{2})$, el problema es equivalente a calcular el máximo de φ y el de la tg φ.
(b) Se trata de resolver un problema de optimización, en el que se debe calcular la distancia mínima de la recta $\overline{AB}$ a la portería p.
(c) Puesto que formamos triángulos rectángulos, debemos resolver un problema de mínimos cuadrados (que obtenemos al utilizar el teorema de Pitágoras).
(d) Nos faltaría saber las dimensiones del campo de fútbol para obtener el valor pedido.

5.- Determina cuál de los siguientes modelos o métodos permite resolver el problema correctamente:

(a) Debemos resolver un problema de optimización de una variable, que es la distancia a la portería.
(b) Debemos resolver un problema de optimización en el que debe ser máximo el ángulo con el que se ve la portería desde la banda.
(c) Debemos resolver un problema de optimización en el que debe ser máximo el ángulo que forma la recta $\overline{AB}$ con la trayectoria del balón.

(d) Se puede resolver utilizando las relaciones entre las dimensiones del campo, puesto que son medidas estándar e iguales en todos los campos de fútbol.

6.- Selecciona cuál de las siguientes expresiones nos da la función objetivo del problema

(a) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{ax}{x^2+(a+b)b} = f(x)$

(b) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{b/x}{x/a} = f(x)$

(c) $d(\overline{AB}, p) = \sqrt{(x-a)^2-(x-b)^2} = f(x)$

(d) $d(\overline{AB}, p) = \sqrt{(x-a)^2-(y-b)^2} = f(x,y)$